GEOMETRIE
SEMINAR 14

<u>Din Seminar 13</u>: • Imaginea printr-o omotetie a unei hiperbole este o hiperbolă cu aceeași excentricitate.

A <u>Justificare</u>: Hiperbola $\mathcal{H}$ este locul geom. al punctelor din plan pentru care modulul diferenței dist. la 2 puncte fixe (focarele F_1, F_2) este constantă k.

Aplicăm omotetia f de raport λ

$\mathcal{H}' = f(\mathcal{H})$ = locul geom. al punctelor pt. care modulul dist la $f(F_1)$, $f(F_2)$ este const. egal cu $k \cdot \lambda$.

Deci $\mathcal{H}'$ = tot hiperbolă.

$$c' = c \cdot \lambda \qquad e' = \frac{c'}{a'} = \frac{c \cdot \lambda}{a \cdot \lambda} = \frac{c}{a} = e$$
$$a' = a \cdot \lambda$$

<u>Mai general</u>: Este transformata unei conice printr-o omotetie tot o conică, de același tip?

<u>Răspuns</u>: DA.

Luăm Γ conică în forma generală $\boxed{\Gamma:\ {}^{T}XAX + 2\,{}^{T}bX + c = 0}$

Putem considera că omotetia f are centrul în $(0,0)$. (deoarece am luat Γ în forma cea mai generală). Așadar,

$f(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$. $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $\quad X' = \lambda X \iff X = \frac{1}{\lambda} X'$

Înlocuim în ec. conicei și vom avea:

$${}^T\!\left(\frac{1}{\lambda}X'\right) A \left(\frac{1}{\lambda}X'\right) + 2\,{}^T b \left(\frac{1}{\lambda}X'\right) + c = 0$$

$${}^T X' \left(\frac{1}{\lambda^2}A\right) X' + 2\,{}^T\!\left(\frac{1}{\lambda}b\right) X' + c = 0. \quad \leftarrow \text{ec. conicei } f(\Gamma) = \Gamma'.$$

$$\widetilde{A'} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\lambda^2}A & \frac{1}{\lambda}b \\ \hline {}^T\!\left(\frac{1}{\lambda}b\right) & c \end{array}\right) \qquad A' = \frac{1}{\lambda^2}A. \qquad \delta = \det A, \ \Delta = \det \tilde{A}$$

$$\delta' = \frac{1}{\lambda^4}\delta$$

$$\Delta' = \frac{1}{\lambda^4}\Delta$$

$$\det \widetilde{A'} = \left|\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\lambda^2}a_{11} & \frac{1}{\lambda^2}a_{12} & \frac{1}{\lambda}b_1 \\ \frac{1}{\lambda^2}a_{12} & \frac{1}{\lambda^2}a_{22} & \frac{1}{\lambda}b_2 \\ \hline \frac{1}{\lambda}b_1 & \frac{1}{\lambda}b_2 & c \end{array}\right| = \frac{1}{\lambda^4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda^4}\det \tilde{A}$$

Dar știm că tipul conicei este dat de semnele și anularea lui δ', Δ'

Concluzie: Transformata va fi o conică de același tip.

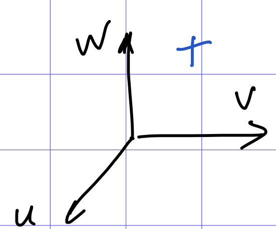
BAZE POZITIV ORIENTATE

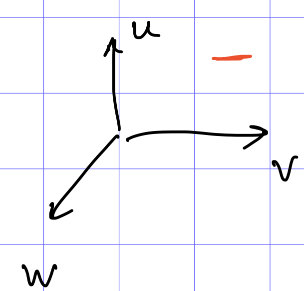
VOLUME

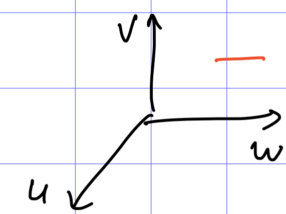
PRODUS VECTORIAL

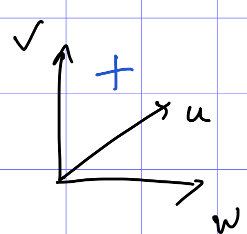
Def: O bază pozitiv orientată $\{u, v, w\}$ a sp. vectorilor liberi $\mathcal{V}$ din $\mathbb{R}^3$ este o bază pentru care $\det(u, v, w) > 0$

Interpretare geometrică: O bază $\{u, v, w\}$ este pozitiv orientată dacă privind planul $\langle u, v \rangle$, atunci când u se rotește spre v în sens trigonometric, atunci w este îndreptat spre privitor









Prop.: Pentru
$$u = (u_1, u_2, u_3)$$
$$v = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{din } \mathcal{V}$$
$$w = (w_1, w_2, w_3)$$

Volumul (cu semn) al paralelipipedului cu vârfuri în O, u, v, w este

$$vol(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Fie $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$. $A = (x_A, y_A, z_A)$

$\vdots$

$D = (x_D, y_D, z_D)$

Atunci, $V_{ABCD} = \frac{1}{6}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{vmatrix}$

În particular, A,B,C,D coplanare $\Longleftrightarrow$ $\Delta = 0$. $(V_{ABCD} = 0)$

Planul determinat de A,B,C, are ecuația:

$$(ABC): \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_A & x_B & x_C \\ y & y_A & y_B & y_C \\ z & z_A & z_B & z_C \end{vmatrix}$$

PRODUSUL VECTORIAL

Dacă $u = (u_1, u_2, u_3)$
$v = (v_1, v_2, v_3)$,

atunci putem defini prod. vect. al lui u cu v ca fiind vectorul $u \times v$ def. prin

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Prop.: (a) $u \times v = 0 \Longleftrightarrow u$ și v sunt liniar dependenți

(b) Dacă u și v sunt lin. independenți, atunci $\{u, v, u \times v\}$

este o bază pozitiv orientată

(c) $\|u \times v\| = |\text{aria}(u,v)|$ = modulul ariei paralelogramului determinat de u și v.

Ex 12.1 În $\mathbb{R}^3$ considerăm dreapta $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$

și planul $\pi: 4x - y - z = 1$

Atunci:

a) $d \parallel \pi$

~~b)~~ $d \perp \pi$

~~c)~~ $d \subset \pi$

~~d)~~ niciuna dintre a), b), c)

Resolvare:

$d \subset \pi$? $(0,-2,0) \in d$

$4 \cdot 0 - (-2) - 0 = 2 \neq 1$ deci $(0,-2,0) \notin \pi$

$d \perp \pi$? vector normal la π: $n = (4,-1,-1)$

vector director pt d: $v = (1,2,2)$

sunt liniar dependenți?

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2$$

Deci vectorii sunt lin. indep,

adică $d \not\perp \pi$

$d \parallel \pi$? $\langle n, v \rangle = \langle (4,-1,-1), (1,2,2) \rangle = 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2$
$= 0$

deci $n \perp v$, de unde rezultă $d \parallel \pi$.

$\boxed{\text{Exc 12.2}}$ În $\mathbb{R}^3$, considerăm dreptele

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$$

$$d_2: \begin{cases} x-y=1 \\ 2x-z=8 \end{cases}$$

Atunci:
- ~~(a)~~ $d_1 = d_2$
- (b) $d_1 \parallel d_2$
- ~~(c)~~ $d_1 \perp d_2$
- ~~(d)~~ niciuna dintre (a), (b), (c)

Rez.: vect. director al lui d_1: $v_1 = (1, 1, 2)$

vectorii normali la d_2: $n_1 = (1, -1, 0)$, $n_2 = (2, 0, -1)$

$d_1 \parallel d_2$ sau $d_1 = d_2$ $\iff$ $v_1 \perp$ pe subsp. $\langle n_1, n_2 \rangle$ $\iff$ $\langle v_1, n_1 \rangle = 0$ şi $\langle v_1, n_2 \rangle = 0$

$\langle v_1, n_1 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0$ ✓

$\langle v_1, n_2 \rangle = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 0$ ✓

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} \implies \boxed{x - y = 1}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{z-2}{2} \implies 2x - 2 = z - 2 \implies \boxed{2x - z = 0}$$

$$d_1: \begin{cases} x-y=1 \\ 2x-z=0 \end{cases} \qquad d_2: \begin{cases} x-y=1 \\ 2x-z=8 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$d_1 \neq d_2$$

<u>Altfel:</u> găsim un punct P pe d_1. Dacă $P \in d_2 \Rightarrow d_1 = d_2$

la întâmplare

Dacă $P \notin d_2 \Rightarrow d_1 \parallel d_2$, $d_1 \neq d_2$

$\boxed{\text{Exc } 12.3}$ Fie punctele $A = (3, -1, 3)$

$B = (5, 1, -1)$

$C = (0, 4, -3)$

$D = (\alpha, 1, -2)$

(a) Scrieți ec. dreptelor AB, AC (parametrice și implicite).

$$AB: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

$$AB: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4} \qquad \text{ec. parametrică}$$

$$AB: \begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 2x + z - 9 = 0 \end{cases} \qquad \text{ec. implicită}$$

$$AC: \frac{x-3}{-3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-6}$$

$$AC: \begin{cases} 5x + 3y - 12 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

b) Aflați $\sphericalangle(AB, AC)$.

$\overrightarrow{AB} = (2, 2, -4)$ $\quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{24}$

$\overrightarrow{AC} = (-3, 5, -6)$ $\quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2+5^2+(-6)^2} = \sqrt{70}$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle (2,2,-4), (-3,5,-6) \rangle = -6+10+24 = 28$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{28}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{70}} = \frac{14}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{70}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{35}} = \frac{7}{\sqrt{105}}$$

(c) Scrieți ec. planului π_1 a.i. $C \in \pi_1$, $\pi_1 \perp AB$

$C = (0, 4, -3)$

$AB: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$ $\quad$ vector director al lui AB: $\overrightarrow{AB} = (2, 2, -4)$

$\overrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\pi_1: 2x + 2y - 4z + d = 0$

$C \in \pi_1 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 4 \cdot (-3) + d = 0$

$8 + 12 + d = 0$

$\boxed{d = -20}$

$$\boxed{\pi_1: 2x + 2y - 4z - 20 = 0}$$

(d) Aflați locul geometric al punctelor egal depărtate de A și B, notat π_2.

$A = (3, -1, 3)$ $\quad \pi_2 =$ plan $\perp AB$

$B = (5, 1, -1)$ $\quad \pi_2 \cap AB = M$

$M =$ mijlocul lui $AB = (4, 0, 1)$

$\overrightarrow{AB} = (2, 2, -4)$

$\pi_2 : 2x+2y-4z+d_2=0$

$M\in\pi_2 \Rightarrow \quad 2\cdot 4+2\cdot 0-4\cdot 1+d_2=0$

$8-4+d_2=0 \quad \Rightarrow d_2=-4$

$$\boxed{\pi_2 : 2x+2y-4z-4=0}$$

(e) Aflați distanța dintre π_1 și π_2.

$\pi_1 \parallel \pi_2$ (se vede din vectorii normali la cele 2 plane)

Alegem la întâmplare un punct $P\in\pi_1$ și atunci

$$dist(\pi_1,\pi_2)= dist(P,\pi_2).$$

Alegem $P=C=(0,4,-3)$. $\quad dist(P,\pi_2)=\dfrac{|2\cdot 0+2\cdot 4+(-4)\cdot(-3)-4|}{\sqrt{4+4+16}}$

$$=\frac{|8+12-4|}{\sqrt{24}}=\frac{16}{\sqrt{24}}=\frac{8}{\sqrt{6}}$$

(f) Găsiți α a.î. A,B,C,D coplanare.

$$0=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\3&5&0&\alpha\\-1&1&4&1\\3&-1&-3&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\3&2&-3&\alpha-3\\-1&2&5&2\\3&-4&-6&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-3&\alpha-3\\2&5&2\\-4&-6&-5\end{vmatrix}=$$

$$=2\begin{vmatrix}1&-3&\alpha-3\\1&5&2\\-2&-6&-5\end{vmatrix}=2\left(-25-6(\alpha-3)+12+10(\alpha-3)+12-15\right)$$

$$=2\left(16+4\alpha-18-30\right)$$

$$= 2(4\alpha - 32)$$

$$4\alpha - 32 = 0 \implies \boxed{\alpha = 8}$$

$\boxed{\text{Exc. 12.4}}$ (a) Pentru $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$

$$d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$$

studiați dacă dreptele sunt coplanare, iar dacă nu, aflați ecuația perpendicularei comune la ele.

Vectorii directori: pentru d_1: $u_1 = (2,3,1)$

pentru d_2: $u_2 = (2,2,1)$

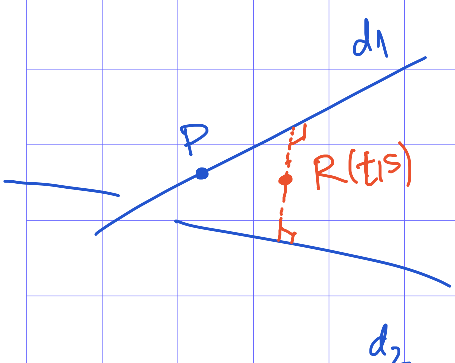
u_1, u_2 liniar indep. $\left(\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \right)$, deci $\boxed{d_1 \not\parallel d_2}$

$$d_1 \cap d_2: \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} \quad / -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \\ \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1} \end{cases} \implies \frac{x-1}{2} = \frac{x-4}{2} \implies \frac{-1}{2} = \frac{-4}{2}$$

Nu are soluție.

Deci $\boxed{d_1 \cap d_2 = \emptyset}$

Concluzie: d_1 și d_2 necoplanare



Luăm $P \in d_1$

$P = (1, -1, 0)$

$$R(t,s) = \underbrace{(1,-1,0) + s(2,3,1)}_{\in d_1} + \underbrace{t \cdot u_1 \times u_2}_{\text{pe dreapta} \perp \text{ pe } u_1 \text{ și } u_2}$$

$$u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} - 2\vec{k} = (1, 0, -2)$$

$$R(t,s) = (1,-1,0) + s(2,3,1) + t(1,0,-2) = (2s+t+1,\ 3s-1,\ s-2t)$$

Vrem să găsim s, t a.î. $R(t,s) \in d_2$

$$d_2 : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2s + t + 1 - 3s + 1 - 2 = 0 \\ 3s - 1 - 2(s - 2t) - 2 = 0 \end{cases}$$

se rezolvă și se află s, t.

În final, dreapta de direcție $u_1 \times u_2$ ce trece prin R este dreapta căutată.