Curs introductiv in teoria probabilitatilor

Iulian Cîmpean

2022-

Cuprins

Rezumat

In aceasta lucrare raspundem la intrebarea ”care e cea mai importanta intrebare din lume?”.

1 Cursul 1

Sa incepem cu cateva exemple simple de calcul de probabilitati, dar al caror scop este mai profund, anume importanta stabilirii modelului probabilist intr-un cadru clar, fundamentat matematic.

Exemplul 1.1. *Intr-o urna se afla sapte bile albe si trei bile negre. Cat este probabilitatea* $\mathbb{P}(H)$ *ca la o extragere intamplatoare sa fie extrasa o bila alba?*

Soluţie. In mod evident,

$$\mathbb{P}(H) = \frac{\#\{\text{ cazuri favorabile }\}}{\#\{\text{ cazuri posibile }\}} = \frac{7}{10}.$$

□

Exemplul 1.2. *Consideram o moneda cu fetele* $\{H, T\}$*, unde* H *inseamna "head(cap)" iar* T *inseamna "tail(pajura)". Care este probabilitatea ca la o aruncare cu moneda sa pice* H*?*

Soluţie. Iarasi raspunsul este evident, insa de remarcat este ca putem gandi in mai multe moduri. De exemplu, putem considera ca cele doua cazuri posibile sunt $\{H, T\}$, iar cel favorabil este $\{H\}$. Asadar

$$\mathbb{P}(H) = \frac{\#\{H\}}{\#\{H, T\}} = \frac{1}{2}.$$

O alta varianta este sa consideram ca fata H se identifica cu o bila alba, iar fata T cu una neagra, ambele bile aflate intr-o urna din care facem o extragere intamplatoare. Asadar, aplicand modelul urnei, putem iarasi concluziona ca probabilitatea sa pice "head" este totuna cu probabilitatea sa extragem o bila alba, adica $1/2$.

Putem merge si mai departe, si sa consideram un model de urna in care avem n bile albe si tot n bile negre, cu aceeasi analogie ca mai sus.

Morala aici este ca acelasi fenomen aleator se poate formaliza in mai multe moduri echivalente.

□

Exemplul 1.3. *Intr-un cazino, dealer-ul arunca de* 100 *de ori cu aceeasi moneda si ne lasa sa observam rezultatele. In urma aruncarilor contabilizam* 70 H*-uri si* 30 T*-uri. Care e probabilitatea ca la a* 101*-a aruncare sa pice* H*?*

Soluţie. Desigur, primele 100 aruncari nu influenteaza rezultatul urmatoarei aruncari. Insa in functie de ipotezele pe care le presupunem, rezultatele primelor 100 aruncari pot fi ignorate sau, contrar, pot fi cat se poate de informative. Distingem doua variante:

1. Daca moneda e corecta, atunci in mod a priori stim ca $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(T) = 0.5$, deci raspunsul este 0.5.

2. Fiind intr-un casino, este intru totul realist sa presupunem ca moneda este totusi masluita. In acest caz nu cunoastem in mod a priori valoarea teoretica $\mathbb{P}(H)$. In schimb, putem sa folosim informatia acumulata in urma celor 100 de experimente si sa propunem urmatorul model:
$$\mathbb{P}(H) = \frac{\#\{\text{ cazuri favorabile }\}}{\#\{\text{ cazuri posibile }\}} = \frac{70}{100} = 0.7, \quad \mathbb{P}(T) = 0.3.$$

□

Exemplul 1.4. *Un cod secret ales de Mihai pentru lantul de la bicicleta e format din patru cifre de la* 0 *la* 9*. Care este probabilitatea ca cifrul sa fie* 1985*. Dar* 9762*?*

Soluţie. Iarasi, raspunsul depinde de ipotezele cu care lucram. Pe de o parte, daca presupunem ca fiecare cifra e la fel de probabil sa apara pe oricare dintre cele patru pozitii, atunci fiecare cifru este la fel de probabil, deci

$$\mathbb{P}(\text{Codul este } 1985) = \frac{\#\{\text{ cazuri favorabile }\}}{\#\{\text{ cazuri posibile }\}} = \frac{1}{10^4} = 0.0001 = \mathbb{P}(\text{Codul este } 9762).$$

Pe de alta parte, modelul de mai sus este oarecum nerealist. Daca am avea acces la o baza de date cu coduri alese de un numar suficient de mare de biciclisti, probabil am observa ca cele care incep cu 1 sunt mai frecvente decat cele care incep cu 9. Un motiv ar fi ca de obicei avem tendinta de a folosi un an de nastere pe post de cifru. Daca un individ are acces la o astfel de baza de date, ar putea potrivi probabilitatile intr-un mod mai realist si si-ar putea mari sansele de a-si insusi in mod necuvenit o bicicleta.

De fapt, pentru a spori securitatea unor astfel de coduri secrete, asa numitele token-uri care genereaza coduri de unica folosinta au la baza algoritmi performanti de generare de numere aleatoare, tocmai cu scopul de a evita un anume profil (pattern) de generare ce ar facilita un posibil atac informational (hack). $\square$

In toate exemplele simple de mai sus am putut sa asociem destul de usor diverse raspunsuri in functie de ipotezele pe care le consideram naturale. In urmatoarea situatie celebra alegerea cadrului de lucru este mult mai delicata.

Exemplul 1.5 (Paradoxul lui Joseph Bertrand)**.** *Consideram doua cercuri concentrice de centru O, unul de raza $\frac{1}{2}$ si celalalt de raza 1. Alegand o coarda la intamplare pe cercul de raza 1, care este probabilitatea ca aceasta sa intersecteze cercul de raza $\frac{1}{2}$?*

Soluţie. In mod paradoxal, putem produce trei solutii la fel de valide:

Varianta 1. Sa consideram o coarda AB pe cercul de raza 1. Mai departe construim dreapta d determinata de punctul A si centrul O. In acest cadru este limpede ca AB intersecteaza cercul de raza $1/2$ daca si numai daca $\angle(d, AB) \in [0, \pi/6]$; faptul ca alegem A sau B este irelevant, din simetrie. Pe de alte parte avem intotdeauna $\angle(d, AB) \in [0, \pi/2]$. Putem deduce astfel raspunsul

$$\mathbb{P}(\text{ intersectie }) = \frac{l([0, \pi/6])}{l([0, \pi/2])} = \frac{1}{3},$$

unde $l(I)$ desemneaza lungimea intervalului I.

Varianta 2. O alta abordare este sa consideram ca o coarda intersecteaza cercul de raza $1/2$ daca si numai daca centrul ei nimereste in discul de raza $1/2$. Cum o coarda e unic determinata de centrul ei (mai putin cele de lungime maxima a caror sansa de aparitie este in mod natural 0), putem reformula in felul urmator: alegand un centru la intamplare in interiorul discului de raza 1, care este probabilitatea ca acesta sa pice in discul de raza $1/2$? Evident, raspunsul de data asta este

$$\mathbb{P}(\text{ intersectie }) = \frac{Aria(D(0, 1/2))}{Aria(D(0, 1))} = \frac{1}{4}.$$

Varianta 3. In fine, o a treia abordare este sa identificam coarda cu centrul ei C ca in cazul anterior, dar de data aceasta sa consideram diametrul pe cercul de raza 1 determinat de punctul C si sa remarcam ca intersectia corzii cu cercul de raza $1/2$ se produce doar daca C pica pe diametrul construit mai sus, la distanta mai mica de $1/2$ de centrul O. Folosind lungimi de segmente de data aceasta, deducem $\mathbb{P}(\text{ intersectie }) = 1/2$. □

Concluzia pe care o putem trage in urma exemplelor de mai sus este ca definirea in mod clar a modelului probabilist folosit e cruciala. In cele ce urmeaza ne preocupam sa construim si sa intelegem axiomatica ce sta la baza modelelor probabiliste in acceptiunea moderna.

Definiţia 1.6. *Dat un fenomen aleator, prin experiment intelegem orice rezultat posibil. Multimea tuturor experimentelor (rezultatelor posibile) se numeste spatiul total asociat fenomenului aleator. De obicei, un experiment se noteaza cu ω, iar spatiul total cu Ω. Asadar,*

$$\Omega := \{\omega : \omega \text{ este rezultat posibil }\}.$$

Exemplul 1.7. *i) La aruncarea cu o moneda, fenomenul aleator este aruncarea insasi, un rezultat posibil este H, altul este T, iar spatiul total este $\Omega := \{H, T\}$.*

ii) Daca aruncam cu doua monede, atunci un rezultat posibil este (H, T), iar spatiul total este produsul cartezian $\Omega := \{H, T\}^2$.

iii) La aruncarea cu un zar, un rezultat posibil este 1, sau 2, sau $\cdots 6$, iar spatiul total este $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

iv) Daca ne intereseaza numarul de accesari (nu neaparat unice) ale unei pagini web in decursul unei zile, atunci un experiment poate fi 0, 173, 10.000, sau oricare alt numar natural. Spatiul total este $\Omega := \mathbb{N}$, multimea numerelor naturale.

v) Daca suntem interesati sa generam un numar "la intamplare" in intervalul $[0, 1]$, atunci un posibil experiment este 0.73 sau $\sqrt{0.5}$, iar spatiul total este $\Omega := [0, 1]$.

vi) Daca ne intereseaza pozitia posibila a unui punct material intr-o suprafata plana, atunci un experiment este orice punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, iar spatiul total este* $\Omega := \mathbb{R}^2$*.*

Remarca 1.8. *De obicei, spatiul total se poate formaliza in mai multe moduri. De exemplu, la aruncarea cu o moneda, putem considera* $\Omega := \{H, T\}$ *sau* $\Omega := \{0, 1\}$*, dar avand in vedere identificarea* $0 \equiv T$ *si* $1 \equiv H$*.*

Definiţia 1.9. *Dat un spatiu total* Ω*, o submultime* $A \subset \Omega$ *poarta numele de eveniment.*

Remarca 1.10. *Desi la nivel formal un eveniment nu este nimic altceva decat o submultime a lui* Ω*, semnificatia evenimentului capata mai mult sens daca este privit in raport cu fenomenul probabilist in cauza. De exemplu, la aruncarea cu zarul, multimea* $\{2, 4, 6\}$ *este un eveniment, insa interpretarea fenomenologica poate fi "pica numar par". In termeni mai generali, un eveniment este o colectie a tuturor experimentelor posibile ce satisfac o proprietate comuna data. In exemplul de mai sus, proprietatea comuna pentru experimente este de a fi numar par.*

Exemplul 1.11. *i) La aruncarea cu o moneda, evenimentul de a pica* H *este multimea* $A = \{H\}$*.*

ii) Daca aruncam cu doua monede, atunci evenimentul ca cele doua monede sa nu pice la fel este $A = \{(H, T), (T, H)\}$*.*

iii) La aruncarea cu un zar, evenimentul sa pice un numar divizibil cu 3 *este* $A = \{3, 6\}$*.*

iv) Daca ne intereseaza numarul de accesari (nu neaparat unice) ale unei pagini web in decursul unei zile, atunci evenimentul ca pagina sa fie accesata de cel mult 10 *accesari este* $A = \{0, 1, \cdots, 10\}$*.*

v) Daca suntem interesati sa generam un numar la intamplare in intervalul $[0, 1]$*, atunci evenimentul ca acesta sa fie cel putin* $1/3$ *si cel mult* $1/2$ *este* $A = [1/3, 1/2]$*.*

vi) Daca ne intereseaza pozitia posibila a unui punct material intr-o suprafata plana, atunci evenimentul ca punctul material sa se afle la distanta cel mult 1 *de origine este* $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$*.*

In cursul viitor vom fi interesati sa atribuim unui eveniment un numar care sa cuantifice sansa/riscul ca acel eveniment sa aibe loc. De exemplu, daca din 100 de aruncari cu o moneda posibil masluita pica de 20 de ori numar divizibil cu trei, atunci putem deduce in mod “frecventionist” ca probabilitatea ca evenimentul $A := \{3, 6\}$ sa aibe loc este $20/100 = 0.2$. Esential de remarcat aici este faptul ca pentru a putea cuantifica probabilitatea de aparitie a evenimentului A, este crucial sa-l putem observa in mode repetat, in particular sa avem “acces” la el. Insa pe cale logica, daca putem observa aparitia a doua evenimente A si B, atunci putem observa si aparitia lui “A sau B”, adica $A \cup B$. Pe aceeasi cale logica, daca putem observa aparitia lui A, putem automat sa observam si daca A nu apare, deci putem observa $A^c := \Omega \setminus A$. Acest rationament profileaza un soi de structura asupra evenimentelor care sunt parte a unui fenomen probabilist si care au calitatea de a putea fi observate/accesate, rezultand urmatoarea definitie.

Definiţia 1.12. *Fie Ω un spatiu total si $\mathcal{P}(\Omega)$ multimea partilor. Atunci o colectie de evenimente $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se numeste* algebra *daca sunt verificate urmatoarele proprietati:*

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Daca $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ *atunci* $\bigcup_{1 \le i \le n} A_i \in \mathcal{A}$

iii) Daca $A \in \mathcal{A}$ *atunci* $A^c \in \mathcal{A}$.

Exemplul 1.13. *i) In mod trivial, avem ca $\{\emptyset\}$ si $\mathcal{P}(\Omega)$ sunt algebre. Orice alta algebra $\mathcal{A}$ satisface $\{\emptyset\} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.*

ii) Sa presupunem ca aruncam cu un zar al carui rezultat il putem observa complet. Asadar, putem observa direct toate evenimentele {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}. Apoi, prin operatii logice avem acces si la evenimente de tipul ”pica 1 sau 2” ({1; 2}), sau ”pica par” ({2; 4; 6}). De fapt, pentru ca orice $A \in \mathcal{P}$ se poate scrie ca $A = \bigcup_{i \in A} \{i\}$, prin operatii logice de tip “sau” (adica reuniune) avem acces la intreaga algebra $\mathcal{P}(\Omega)$.

iii) O situatie diferita de cea anterioara apare daca ne imaginam ca Mihai arunca cu zarul dar noi nu putem vedea rezultatul. In schimb, Mihai ne spune doar daca rezultatul e par. In *mod nemijlocit avem acces doar la evenimentul "zarul e par", adica la* $A = \{2;4;6\}$*, iar prin operatii logice (complementare si reuniuni) deducem ca avem acces la (si doar la)* $\mathcal{A} := \{\emptyset,\ A,\ A^c, \Omega\}$ *care este clar o algebra. In particular, daca zarul ar fi masluit, atunci prin obervatii repetate asupra aparitiei evenimentului* A *nu putem masura/ asocia probabilitati decat pentru evenimentele din* $\mathcal{A}$*.*

Exercițiul 1.14. *Mihai arunca cu un zar (posibil) masluit de un numar mare de ori si ne spune la fiecare aruncare daca zarul este mai mic sau egal cu* 2 *si daca este mai mare sau egal cu* 5*. Care este algebra de evenimente pentru care putem asocia probabilitati in urma informatiilor furnizate de Mihai?*

Propoziția 1.15 (Proprietati pentru algebre)**.** *Daca* $\mathcal{A}$ *este o algebra pe* Ω*, atunci:*

(i) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Asa cum am discutat in exemplele de mai sus, o algebra se obtine in mod natural pornind de la o clasa initiala de evenimente pe care le putem observa in mod direct, care mai apoi se imbogateste cat se poate de mult prin operatii logice. Acest procedeu se numeste "generare" si este definit in felul urmator:

Definiția 1.16. *Fie* Ω *un spatiu total si* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *o familie initiala de evenimente. Atunci* algebra generata *de* $\mathcal{C}$ *este*

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ e alg.} \\ \mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}}} \mathcal{A}.$$

Nu este dificil de aratat ca $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ *este de fapt cea mai mica algebra care contine clasa* $\mathcal{C}$*, motiv pentru care aceasta caracterizare este de multe ori considerata ca definitie.*

Exercițiul 1.17. *Daca* $\Omega = \{1, \ldots, 6\}, A = \{1, 2\}, B = \{5, 6\}$ *si* $\mathcal{C} = \{A, B\}$*, descrieti* $\mathcal{A}(\mathcal{C})$*.*

Exercițiul 1.18. *Fie* $\Omega = \mathbb{N}$ *si* $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots\}$*. Aratati ca* $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \#A < \infty$ *sau* $\#A^c < \infty\}$*. Remarcati ca* $A := \{2k : k \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{A}(\mathcal{C})$*, in particular* $\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{N})$*.*

Exercitiul anterior scoate in evidenta ca in cazul in care spatiul total nu este o multime finita, atunci algebra generata de evenimentele ce contin cate un singur experiment poate fi destul de saraca. Acest lucru conduce catre anumite restrictii tehnice in ce priveste teoria care urmeaza sa fie dezvoltata. De altfel, daca interpretam exemplul tocmai mentionat ca modeland numarul de accesari ale unei pagini web in decurs de o zi, atunci ar reiesi ca n-am avea acces la evenimente de tipul “numarul accesarilor este par”. Solutia este sa extindem dreptul de a efectua un numar finit de operatii logice cu evenimentele pe care le putem observa, la un numar cel mult numarabil. Obtinem astfel urmatoarea definitie cheie.

Definiţia 1.19. *Dat Ω un spatiu total, spunem ca $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ este o σ-algebra (pe Ω) daca:*

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i\geqslant 1} A_i \in \mathcal{F}$

(iii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

Propoziţia 1.20. *Orice σ-algebra este in particular o algebra. De asemenea, o σ-algebra este inchisa (stabila) la intersectii numarabile.*

2 Cursul 2

In acest curs continuam cu cateva proprietati si exemple despre σ-algebre, ca mai apoi sa introducem notiunea de spatiu de probabilitate.

Incepem cu o remarca evidenta:

Remarca 2.1. *Daca $\#\Omega < \infty$, atunci notiunile de "algebra" si "σ-algebra" coincid.*

Propoziţia 2.2 (Structura σ-algebrelor pe spatii cel mult numarabile)**.** *Fie Ω o multime cel mult numarabile si $\mathcal{F}$ o σ-algebra. Atunci exista o unica familie cel mult numarabila de evenimente $(A_i)_{i\geq 1}$ cu proprietatile:*

i) $A_i \in \mathcal{F}$ *pentru orice* $i \geq 1$

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pentru* $i \neq j \geq 1$

iii) $\bigcup_{i\geq 1} A_i = \Omega$

iv) *Orice eveniment* $A \in \mathcal{F}$ *se scrie ca* $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, *cu* $I \subset \mathbb{N}^*$.

Elementele A_i ale familiei cu proprietatile de mai sus se numesc "atomi"; denumirea decurge de la faptul ca un astfel de A_i joaca rolul de eveniment elementar si indivizibil in $\mathcal{F}$, cu ajutorul carora se pot construi (prin reuniuni) toate celelalte evenimente din $\mathcal{F}$.

Demonstraţie. Pentru fiecare pereche $\omega \neq \tilde{\omega} \in \Omega$ alegem un eveniment $A(\omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{F}$ cu proprietatea ca $\omega \in A(\omega, \tilde{\omega}) \not\ni \tilde{\omega}$ daca un astfel de eveniment exista in $\mathcal{F}$, iar daca nu, atunci consideram $A(\omega, \tilde{\omega}) := \Omega$. Mai departe, pentru fiecare $\omega \in \Omega$ definim

$$A(\omega) := \bigcap_{\tilde{\omega}\in\Omega} A(\omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{F}.$$

Lasam ca exercitiu faptul ca evenimentele $A(\omega), \omega \in \Omega$ satisfac urmatoarele proprietati:

1. $\bigcup_{\omega\in\Omega} A(\omega) = \Omega$

2. Daca $\omega \neq \tilde{\omega} \in \Omega$, atunci ori $A(\omega) \cap A(\tilde{\omega}) = \emptyset$, ori $A(\omega) = A(\tilde{\omega})$.

3. Pentru orice $\omega \in \Omega$, $A(\omega)$ are proprietatea ca nu exista $A \in \mathcal{F}$ cu $A \subsetneq A(\omega)$.

Mai departe, din primele doua proprietati deducem ca $\{A(\omega) : \omega \in \Omega\} \subset \mathcal{F}$ formeaza o partitie disjuncta a spatiului Ω. De asemenea, este clar ca daca $A \in \mathcal{F}$, atunci

$$A = \bigcup_{\omega \in A} A(\omega),$$

deci orice eveniment A din $\mathcal{F}$ se poate construi ca o reuniune cel mult numarabila (pentru ca Ω este cel mult numarabila si la fel orice submultime a sa A) de evenimente de tipul $A(\omega)$, ceea ce incheie demonstratia. $\square$

Exerciţiul 2.3. *Folosind notatiile din Propoziţia 2.2, aratati ca* $A(\omega) = \bigcap_{\omega \in A \in \mathcal{F}} A$. *Cu alte cuvinte, atomul* $A(\omega)$ *reprezinta "cel mai mic" eveniment din* $\mathcal{F}$ *ce contine* ω.

Exemplul 2.4. *Sa presupunem ca putem masura (arbitrar de precis) temperatura unui sistem. Consideram ca spatiul total este* $\Omega = \mathbb{R}$ *si ca putem observa fiecare masuratoare. Asta inseamna ca putem porni cu clasa evenimentelor obsevate direct, anume* $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$, *iar mai apoi putem construi* σ*-algebra generata* $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{C})$. *In acest caz, lasam ca exercitiu faptul ca*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \textit{ sau } A^c \textit{ este cel mult numarabila } \}.$$

Remarca importanta este ca $\mathcal{F}$ *este desul de saraca, de exemplu evenimentul ca temperatura sa se fie intre* a *si* b, *adica intreg intervalul* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *, nu se afla in* $\mathcal{F}$. *Exista insa o* σ*-algebra pe* $\mathbb{R}$ *generata in mod natural si care este suficient de bogata incat sa contina toate multimile deschise din* $\mathbb{R}$, *dupa cum vedem mai departe.*

Exerciţiul 2.5. *Pe* $\Omega = \mathbb{R}$ *consideram urmatoarele clase de evenimente:*

$\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$, $\quad \mathcal{C}_2 = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$, $\quad \mathcal{C}_3 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{C}_4 = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$, $\quad \mathcal{C}_5 = \{(a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$, $\quad \mathcal{C}_6 = \{[a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{C}_7 = \{(a, b] : a < b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C}_8 = \{[a, b] : a < b \in \mathbb{R}\}$.

Aratati ca $\sigma(\mathcal{C}_i) = \sigma(\mathcal{C}_1) \quad \forall 1 \leq i \leq 8$.

Definiţia 2.6. *Pastrand notatiile din Exerciţiul 2.5,* $\sigma(\mathcal{C}_i)$ *se noteaza cu* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *si se numeste* σ*-algebra Borel pe* $\mathbb{R}$. *Un eveniment* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *se numeste multime masurabila Borel.*

Exerciţiul 2.7. *Aratati ca urmatoarele multimi sunt masurabile Borel pe* $\mathbb{R}$*:*

i) Orice multime cel mult numarabila, in particular $\{x\}$ *cu* $x \in \mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{Q}$.

ii) Orice multime deschisa pe $\mathbb{R}$.

iii) Orice multime inchisa pe $\mathbb{R}$.

iv) Multimea de discontinuitati ale unei functii crescatoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

v) Multimea de discontinuitati ale unei functii $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabile Riemann.*

vi) Pentru un sir de functii continue $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \geq 1$, *multimea*

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ exista in } \overline{\mathbb{R}}\right\}.$$

Definiţia 2.8. *O pereche* $(\Omega, \mathcal{F})$ *unde* $\Omega \neq \emptyset$ *si* $\mathcal{F}$ *este o* σ*-algebra pe* Ω *se numeste spatiu masurabil.*

Dat un spatiu masurabil $(\Omega, \mathcal{F})$, in cele ce urmeaza dorim sa stabilim cadrul general in care putem asocia fiecarui eveniment $A \in \mathcal{F}$ un numar real intre 0 si 1 care sa “masoare” sansa/riscul de aparitie a ecenimentului A. Mai precis, suntem interesati de definirea unei aplicatii de tipul

$$\mathcal{F} \ni A \longmapsto \mathbb{P}(A) \in [0, 1],$$

ale carei proprietati sa fie compatibile cu notiunea de “masurare” in general, si “masurare a sansei” in particular.

Sa incepem cu un exemplu simplu: aruncam cu un zar corect. Asadar $\Omega = \{1, \cdots, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. In ceea ce priveste definirea aplicatiei $\mathcal{F} \ni A \longmapsto \mathbb{P}(A) \in [0,1]$, este clar ca $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/6$ pentru orice $1 \leq i \leq 6$. Mai departe, daca ne intereseaza probabilitatea sa pice par, atunci $A = \{2,4,6\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\text{ cazuri favorabile}}{\#\text{ cazuri posibile}} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Analog, putem considera aceeasi formula pentru orice eveniment $A \in \mathcal{P}$, astfel ca in cazul aruncarii cu un zar corect avem

$$\mathcal{F} \ni A \longmapsto \mathbb{P}(A) := \frac{\#A}{\#\Omega} \in [0,1].$$

Sa observam ca in mod trivial

$$\text{Daca } A \cap B = \emptyset, \quad \text{atunci} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B). \tag{1}$$

Ce sa intampla in cazul in care avem de-aface cu un zar masluit? Pentru a intelege, sa presupunem ca aruncam de 1000 de ori si obtinem urmatoarele frecvente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 100 & 150 & 350 & 50 & 250 & 100 \end{pmatrix}.$$

Desigur, Ω si $\mathcal{F}$ raman aceleasi, dar e clar ca nu mai putem considera $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ pentru orice $A \in \mathcal{F}$. In schimb, inca putem folosi definitia $\mathbb{P}(A) = \frac{\#\text{ cazuri favorabile}}{\#\text{ cazuri posibile}}$. De exemplu, probabilitatea sa pice par este

$$\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{150+50+100}{1000} = 0.3.$$

Sa remarcam ca $\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\})$, de fapt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} \mathbb{P}(\{i\}), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Mai general, putem deduce usor ca proprietatea (1) este iarasi satisfacuta. Esenta aici este ca prin aditivitate, a defini $\mathbb{P}$ pe $\mathcal{F}$ se reduce, de fapt, la a defini $\mathbb{P}(\{i\})$ pentru orice $1 \leq i \leq 6$, in cazul nostru

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{1\}) & \mathbb{P}(\{2\}) & \mathbb{P}(\{3\}) & \mathbb{P}(\{4\}) & \mathbb{P}(\{5\}) & \mathbb{P}(\{6\}) \\ 0.1 & 0.15 & 0.35 & 0.05 & 0.25 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Principiul general pe care dorim sa-l scoatem in evidenta este ca o aplicatie menita sa "masoare" diverse entitati satisface in general proprietatea: *Daca o entitate E este o reuniune disjunca a doua subentitati E_1 si E_2, atunci "masura"(E)="masura"(E_1)+"masura"(E_2).* Inductiv, aceasta proprietate se extinde pentru o reuniune finita.

Asadar, introducem notiunea centrala a acestui curs:

Definiţia 2.9. *Fie $(\Omega, \mathcal{F})$ un spatiu masurabil. O aplicatie $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ ce satisface $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ se numeste*

i) "probabilitate finit aditiva" daca

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{F} \text{ cu } A \cap B = \emptyset;$$

ii) "probabilitate σ-aditiva", sau pe scurt "probabilitate", daca pentru orice sir $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ cu $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$, are loc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n).$$

Definiţia 2.10. *Un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ unde $(\Omega, \mathcal{F})$ este un spatiu masurabil, iar $\mathbb{P}$ este o probabilitate pe el, se numeste "spatiu cu masura de probabilitate", sau mai pe scurt "spatiu de probabilitate".*

In cele ce urmeaza studiem cateva aspecte de baza ce tin de constructia unor astfel de probabilitati.

Teorema 2.11 (Teorema de structura a probabilitatilor pe spatii cel mult numarabile)**.** *Fie $(\Omega, \mathcal{F})$ un spatiu masurabil cu Ω cel mult numarabila; in particular, conform Propoziţia 2.2, $\mathcal{F}$ este* *generata de o clasa de atomi* $\{A_i, i \geq 1\}$*. Atunci, a defini o probabilitate pe* $(\Omega, \mathcal{F})$ *se reduce la a preciza un sir de numere reale pozitive de suma unu. Mai precis, daca notam*

$$\mathsf{P} := \{\mathbb{P} : \mathbb{P} \textit{ e o probabilitate pe } (\Omega, \mathcal{F})\}$$
$$\mathsf{S}_1^+ := \{(p_i)_{i \geq 1} \subset \mathbb{R}_+ : \sum_{i \geq 1} p_1 = 1\}$$

atunci aplicatia Ψ

$$\mathsf{P} \ni \mathbb{P} \stackrel{\Psi}{\longmapsto} (p_i)_{i \geq 1} \in \mathsf{S}_1^+,$$

data de $\Psi(\mathbb{P}) = (p_i)_{i \geq 1}$ *cu* $p_i := \mathbb{P}(A_i), i \geq 1$*, este o bijectie. Mai mult,*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{A_i \subset A} p_i \quad \textit{pentru orice } A \in \mathcal{F}.$$

Demonstraţie. □

Corolarul 2.12. *Daca* $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n \dots\}$ *si* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$*, atunci o probabilitate* $\mathbb{P}$ *pe* $(\Omega, \mathcal{F})$ *este complet determinata de sirul de numere reale pozitive de suma unu* $p_i := \mathbb{P}(\{i\}), i \geq 1$ *prin*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i \quad \textit{pentru orice } A \in \mathcal{F}.$$

Exemplul 2.13 (Nu exista probabilitate uniforma pe spatii numarabile)**.** *Sa presupunem ca intr-o urna punem toate numerele naturale, cu proprietatea ca toate numerele sunt la fel de probabil de a fi extrase. Daca extragem un numar la intamplare, ce putem spune despre probabilitatea*

i) sa pice numar par?

ii) sa pice 10*?*

iii) sa pice ≤ 10*?*

iv) sa pice ≥ 10*?*

Tentatia este de raspunde astfel: i) 0.5*, ii)* 0*, iii)* 0*, iv)* 1*. Insa pe acelasi principiu ca la ii), putem spune ca* $\mathbb{P}\{i\} = 0$ *pentru orice* $i \geq 0$*, dar prin definitie, daca* $\mathbb{P}$ *e o probabilitate pe* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$*, atunci*

$$1 = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(\{i\}) = 0, \text{ contradictie}.$$

De fapt, cu acelasi tip de calcul ca mai sus, daca $\mathbb{P}(\{i\}) = c\ \forall i \geq 0$ *atunci daca* $c = 0$ *ajungem la contradictia* $1 = 0$*, iar daca* $c > 0$*, la contradictia* $1 = \infty$*. Concluzia este ca nu exista un model de probabilitate pe un spatiu numarabil cu proprietatea ca toate elementele sunt echiprobabile. Inca o remarca interesanta este ca daca* $\mathbb{P}$ *este o probabilitate pe* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *cu* $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i, i \geq 1$*, pentru ca* $\sum\limits_{i \geq 0} p_1 = 1 < \infty$ *avem ca* $\lim\limits_{i} p_i = 0$*, ceea ce inseamna ca numerele mari sunt obligatoriu din ce in ce mai putin probabile/frecvente.*

Am vazut care este structura probabilitatilor pe spatii cel mult numarabile. Dar pe un spatiu masurabil oarecare $(\Omega, \mathcal{F})$, putem sa construim probabilitati? Un prim raspuns este dat de urmatorul exercitiu a carui demonstratie este usoara, motiv pentru care este lasata ca exercitiu.

Exercițiul 2.14. *Fie* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un spatiu masurabil, in particular exista cel putin un* $\omega_0 \in \Omega$*. Atunci au loc urmatoarele:*

i) Aplicatia

$$\delta_{\omega_0} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1], \quad \delta_{\omega_0}(A) := \begin{cases} 1, & \omega_0 \in A \\ 0, & \textit{altfel} \end{cases}$$

este o probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$*; ea se numeste probabilitatea (sau distributia) Dirac in* ω_0*.*

ii) Daca $\mathbb{P}_1$ *si* $\mathbb{P}_2$ *sunt doua probabilitati pe* $(\Omega, \mathcal{F})$ *si* $\alpha \in (0,1)$*, atunci*

$$\mathbb{Q} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1], \quad \mathbb{Q}(A) := \alpha \mathbb{P}_1(A) + (1-\alpha)\mathbb{P}_2(A) \in [0,1]$$

este o probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$*.*

In particular, daca Ω *contine cel putin doua elemente, atunci pe* $(\Omega, \mathcal{F})$ *se pot defini o infinitate de* *probabilitati.*

Exercițiul 2.15. *Daca* $\mathbb{P}_1$ *si* $\mathbb{P}_2$ *sunt doua probabilitati pe* $(\Omega, \mathcal{F})$*, aratati ca aplicatia* $\mathbb{Q}(A) := \min(\mathbb{P}_1(A), \mathbb{P}_2(A)), A \in \mathcal{F}$ *nu este o probabilitate.*

Urmatorul exemplu este central pentru ceea ce urmeaza.

Exemplul 2.16 (Problema extensiei si a unicitatii)**.** *Mihai arunca cu un zar posibil masluit de* 100 *de ori si ne spune la sfarsitul aruncarilor ca a picat numar par de* 60 *de ori si ca a picat numar mai mare sau egal cu* 4 *de* 55 *de ori. Mihai ne invita sa pariem o suma de bani pe evenimentul ca la urmatoarea aruncare sa pice* 2*. Cum putem sa analizam sansele de castig?*

Soluție. Este clar ca $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, iar $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$, unde $\mathcal{C} := \{\{2,4,6\}, \{4,5,6\}\}$. De asemenea, este usor de verificat ca multimea atomilor lui $\mathcal{F}$ este $\{A_1 := \{2\}, A_2 := \{5\}, A_3 := \{1,3\}, A_4 := \{4,6\}\}$. Asadar, conform Teorema 2.11, pentru a determina complet modelul de probabilitate $\mathbb{P}$, este suficient sa determinam $p_i := \mathbb{P}(A_i), 1 \leq i \leq 4$. Dar din datele problemei putem deduce urmatorul sistem

$$\begin{cases} p_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ p_1 + p_4 = 0.6 \\ p_2 + p_4 = 0.55 \end{cases},$$

care admite o infinitate de solutii de forma

$$p_1 \in [0.05, 0.45], \quad p_2 = p_1 - 0.05, \quad p_4 = 0.6 - p_1, \quad p_4 = 0.45 - p_1.$$

Oricare alegere ca mai sus pentru $(p_i)_{1 \leq i \leq 4}$ induce o probabilitate $\mathbb{P}$ pe $\mathcal{F}$ prin formula

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{A_i \subset A} p_i \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Asadar, concluzia este ca zarul poate fi masluit intr-o infintate de moduri, fiecare mod fiind compatibil cu informatiile (partiale) furnizate de Mihai. Daca ar fi sa pariem pe aparitia lui 2 la o noua aruncare cu zarul, in cel mai rau caz am avea 5% sanse de castig, iar in cel mai bun 45%. $\square$

Exerciţiul 2.17. *In contextul exemplului anterior, aratati ca daca Mihai ne-ar spune la fiecare aruncare daca a picat numar par si daca a picat numar mai mare sau egal cu* 4*, atunci probabiltatea* $\mathbb{P}$ *se poate determinata in mod unic pe* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Exemplul de mai devreme scoate in evidenta doua problematici centrale:

1. Problema (existentei) extensiei unei probabilitati definita intai pe o clasa mai mica de evenimente; in cazul exemplului de mai sus, initial doar pe $\mathcal{C} = \{\{2, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}\}$.

2. Problema unicitatii extensiei, atunci cand ea se poate face.

Vom prezenta in cursul urmator cateva rezultate generale care clarifica aceste doua probleme.

3 Cursul 3

Conceptul de probabilitate este unul de “masura” a sansei/riscului ca un eveniment sa se intample, iar notiunea de masura se poate defini mai general:

Definiţia 3.1. *Fie $(\Omega, \mathcal{F})$ un spațiu măsurabil. O aplicatie $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ se numește*

i) masura finit aditiva dacă

$$\mu\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) \quad \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \text{ disjuncte.}$$

ii) masura σ-aditiva (pe scurt, masura), daca

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu\left(A_n\right) \quad \forall \left(A_n\right)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F} \text{ disjuncte.}$$

Remarca 3.2. *Evident, orice masura este in particular masura finit aditiva, iar daca $\#\mathcal{F} < \infty$, atunci are loc si reciproca.*

Exemplul 3.3 (Probabilitate finit aditiva care nu e σ-aditiva)**.** *Pe $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ consideram*

$$\mathbb{P}_n(A) := \frac{\#A \cap \{1, \ldots, n\}}{n}, \quad n \geq 1$$
$$\mathbb{P}(A) := \lim_n \mathbb{P}_n(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Atunci $\mathbb{P}$ e o probabilitate finit aditiva pe $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ care nu este σ-aditiva.

Soluţie. Daca $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{N}$ sunt disjuncte, atunci

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_k) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \lim_{n\to\infty} [\mathbb{P}_n(A_1) + \cdots + \mathbb{P}_n(A_k)] \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_k),\end{aligned}$$

deci $\mathbb{P}$ este finit aditiva. Sa aratam ca nu este si σ-aditiva, observand intai ca $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(\mathbb{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\mathbb{N} \cap \{1,\dots,n\}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$.

Pe de alta parte, daca $\mathbb{P}$ e σ-aditivă, atunci $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 0}\{i\}\right) = \sum_{i\geq 0}\mathbb{P}(\{i\})$, insa $\mathbb{P}(\{i\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i\} \cap \{1,\dots,n\}}{n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, ceea ce conduce la contradictia $1 = 0$. □

Propoziţia 3.4. *Fie $\mu : \Omega \to [0,\infty)$ o masura aditiva (finita, de exemplu o probabilitate) pe $(\Omega,\mathcal{F})$. Atunci urmatoarele afirmatii sunt echivalente:*

(i) *μ e σ-aditivă*

(ii) *Daca $\mathcal{F} \ni A_n \searrow_n \emptyset$ atunci $\mu(A_n) \to_n 0$*

(iii) *Daca $\mathcal{F} \ni A_n \nearrow_n \Omega$ atunci $\mu(A_n) \to_n \mu(\Omega)$*

(iv) *Daca $\mathcal{F} \ni A_n \nearrow_n A$ atunci $\mu(A_n) \to_n \mu(A)$*

(v) *Daca $\mathcal{F} \ni A_n \searrow_n A$ atunci $\mu(A_n) \to_n \mu(A)$*

Demonstraţie. Observatia este ca e suficient sa demonstram doar echivalenta dintre (i) si (iv). Intradevar, echivalenta din (iv) si restul afirmatiilor se poate deduce usor prin trecere la complementare.

Sa aratam $(i) \Rightarrow (iv)$. Daca $\mathcal{F} \ni A_n \nearrow A$ atunci construim sirul $B_1 := A_1, B_2 := A_2 \setminus A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \cdots$. Sa remarcam ca $A_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ cu $(B_n)_{n\geq 1}$ disjuncte. Asadar,

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n = A \overset{\sigma\text{-ad}}{\Longrightarrow} = \mu(A) &\overset{\sigma\text{-ad}}{=} \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) \overset{\sigma\text{-ad}}{=} \sum_{n\geq 1}\mu(B_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i) = \lim_{n\to\infty}\mu(B_1\cup\cdots\cup B_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu(A_n).\end{aligned}$$

$(iv) \Rightarrow (i)$. Sa presupunem acum ca (iv) are loc, si ca $(A_n)_n \subset \mathcal{F}$ sunt disjuncte. Definim $B_1 := A_1, B_2 := A_1 \cup A_2, \dots, B_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n, \dots$, astfel ca $B_n \nearrow \bigcup_{n\geq 1} A_n =: A$, deci

$\mu(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)$. Putem concluziona acum:

$$\mu(A) = \lim_n \mu(B_n) = \lim_n [\mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)] = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

□

Urmatoarele doua proprietati (monotonie si sub-aditivitate) sunt specifice unei masuri in general:

Propoziţia 3.5. *Fie μ o masura pe $(\Omega, \mathcal{F})$. Atunci urmatoarele doua proprietati au loc:*

i) Daca $A, B \in \mathcal{F}$ cu $A \subset B$ atunci $\mu(A) \subset \mu(B)$.

ii) Daca $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}$ atunci $\mu(\bigcup\limits_n A_n) \leq \sum\limits_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

Sa ne preocupam acum de problema constructiei (in mod unic) a unei masuri (in particular, a unei probabilitati).

Strategia, pe scurt, este urmatoarea. Date Ω si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ o clasa de evenimente pe care le putem manipula usor, ideea este sa parcurgem urmatorii pasi:

(i) Definim intai $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$, avand in minte ideea ca acest lucru este usor/natural de facut, $\mathcal{C}$ fiind o clasa speciala de evenimente.

(ii) Incercam sa extindem μ de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{C})$, $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ prin σ-aditivitate.

(iii) Aratam ca extensia este unica, ceea ce inseamna ca intr-adevar daca cunoastem μ doar pe $\mathcal{C}$, putem recupera complet μ pe $\sigma(\mathcal{C})$.

Enuntam acum rezultatul lui Caratheodory privind constructia unei masuri intr-un cadru extrem de general, pronind de la o simpla aplicatie pe multimi:

Teorema 3.6 (Constructia Caratheodory)**.** *Fie Ω o multime nevida.*

I) Fie $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ o clasa de multimi ce contine $\emptyset$ si o aplicatie data

$$\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty], \quad \textit{cu proprietatea ca } \varphi(\emptyset) = 0.$$

Definim pentru orice $A \subset \Omega$

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \varphi(A_n) : A \subset \bigcup_n A_n, \ (A_n)_n \subset \mathcal{C} \right\}.$$

Atunci μ^* este o "masura exterioara", adica satisface urmatoarele trei proprietati

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) Daca $A, B \subset \Omega$ cu $A \subset B$ atunci $\mu^*(A) \subset \mu^*(B)$

iii) Daca $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{P}(\Omega)$ atunci $\mu^*(\bigcup\limits_n A_n) \leq \sum\limits_{n \geq 1} \mu^*(A_n)$.

II) Daca μ^* este o masura exterioara pe Ω (de exemplu ca cea construita la I)), atunci au loc urmatoarele doua afirmatii:

(a) $\mathcal{F}_\mu := \{A \subset \Omega : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall E \subset \Omega\}$ este o σ-algebra pe Ω; $\mathcal{F}_\mu$ se numeste σ-algebra multimilor μ-masurabile.

(b) Restrictia μ a lui μ^* la $\mathcal{F}_\mu$, adica

$$\mu : \mathcal{F}_\mu \longrightarrow [0, \infty], \quad \mu(A) := \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_m u,$$

este o masura (σ-aditiva) pe $(\Omega, \mathcal{F}_\mu)$.

Definiţia 3.7. *O masura μ (finit aditiva sau σ-aditiva) pe $(\Omega, \mathcal{F})$ se numeste σ-finita daca $\exists (A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}$ astfel incat $\mu(A_n) < \infty, n \geq 1$ si $\Omega = \bigcup\limits_{n \geq 1} A_n$.*

Privind problema unicitatii, avem urmatorul rezultat:

Teorema 3.8 (Unicitatea masurilor)**.** *Dacă μ și ν sunt două masuri σ-finite pe $(\Omega, \mathcal{F})$ astfel încât $\exists\, \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ cu* *(i)* $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$*, adica* $\mathcal{C}$ *este "*π*-sistem",*

(ii) $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$*,*

(iii) $\mu(A) = \nu(A) \quad \forall A \in \mathcal{C}$*,*

atunci $\mu = \nu$*, adica* $\mu(A) = \nu(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$*.*

Coroborand Teorema 3.6 si Teorema 3.8, se poate obtine urmatorul rezultat particular la care vom face apel in mai multe randuri:

Corolarul 3.9 (Extensia Hahn-Kolmogorov)**.** *Fie* $\mathcal{A}$ *o algebra pe* Ω*, si* $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ *o masura finit aditiva. Atunci urmatoarele afirmatii sunt echivalente:*

i) *Exista o extensie a lui* μ *(notata tot cu* μ*),* $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow [0, \infty]$ *masura (*σ*-aditiva).*

ii) *Pentru orice* $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}$ *cu* $A := \bigcap\limits_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ *avem ca* $\mu(A) = \lim\limits_n \mu(A_n)$*.*

In plus, daca μ *este* σ*-finita, atunci extensia (daca exista) este unica.*

Teorema 3.10 (Masura Lebesgue)**.** *Fie* $d \geq 1$ *si*

$$\mathcal{C} := \left\{ \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i) \ : \ a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma\left(\mathcal{C}\right) \quad \sigma\text{-algebra Borel pe } \mathbb{R}^d.$$

Atunci exista si e unica o masura σ*-finita*

$$\lambda_d : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, \infty] \quad \text{cu proprietatea ca}$$

$$\lambda_d\left(\prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i) \quad \forall a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \in \mathbb{R}.$$

Definiţia 3.11. *Masura* λ_d *definita in Teorema 3.10 se numeste "masura Lebesgue"* d*-dimensionala. Ea extinde conceptul de lungime, arie, volum, etc, de la domenii cu geometrie simpla la clasa de multimi* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*.*

Exemplul 3.12. *Daca $x \in \mathbb{R}^d$, atunci $\lambda_d(\{x\}) = 0$. In particular, $\lambda_d(A) = 0$ pentru orice multime cel mult numarabila $A \subset \mathbb{R}^d$.*

Soluţie. Cu scrierea $x = (x_1, \ldots, x_d)$, avem ca $\{x\} = \bigcap_{n\geq 1} \prod_{1\leq i\leq d} [x_i, x_i + 1/n)$, unde intersectia este una descrescatoare. Asadar $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ si

$$\lambda_d(\{x\}) = \lim_n \lambda_d \left(\prod_{1\leq i\leq d} [x_i, x_i + 1/n) \right) = \lim_n (1/n)^d = 0.$$

□

Exerciţiul 3.13 (Fractali)**.** *Fie C multimea Cantor pe $[0,1]$, anume multimea acelor numere din $[0,1]$ cu proprietatea ca in baza 3 se scriu doar cu cifre din $\{0,2\}$. O descriere iterativa este urmatoarea:*

$$\begin{aligned}
&C_0 := [0,1] \\
&C_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
&C_n := \frac{C_{n-1}}{3} \bigcup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right) \subset C_{n-1}, n \geq 2,
\end{aligned}$$

astfel ca putem defini

$$C := \bigcap_{n\geq 1} C_n.$$

Aratati urmatoarele:

i) $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

ii) C *este nenumarabila; de fapt are acelasi cardinal ca* $[0,1]$.

iii) $\lambda_1(C) = 0$.

Exerciţiul 3.14 (Multimi Vitali)**.** *Pe $\mathbb{R}$ introducem urmatoarea relatie de echivalenta: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$; notam cu $x + \mathbb{Q}$ clasa de echivalenta a lui $x \in \mathbb{R}$. Pentru fiecare $x \in (0,1]$, cu ajutorul* *axiomei alegerii (pe care o presupunem valida) selectam un element $x_{\mathbb{Q}} \in (x+\mathbb{Q}) \cap [0,1] \neq \emptyset$ si construim multimea "Vitali" $V := \{x_{\mathbb{Q}} : x \in (0,1]\}$. Aratati ca V nu este o multime Borel masurabila pe $\mathbb{R}$, adica $V \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Data o masura pe un spatiu masurabil, putem considera restrictia ei la o submultime masurabila. Formal, avem urmatorul rezultat imediat a carui demonstratie e lasata ca exercitiu.

Propoziţia 3.15. *Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un spatiu cu masura si $A \in \mathcal{F}$ fixata. Atunci au loc urmatoarele:*

i) Colectia $\mathcal{F}_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{F}\}$ este o σ-algebra pe A; se numeste σ-algebra "urma" pe A.

ii) Aplicatia $\mu_A : \mathcal{F}_A \longrightarrow [0,\infty], \quad \mu_A(B) := \mu(B) \quad \forall B \in \mathcal{F}_A$ este o masura pe spatiul masurabil $(A, \mathcal{F}_A)$; se numeste "restrictia" lui μ la A.

Exemplul 3.16. *1. $\lambda_{[a,b]}$ este masura Lebesgue pe $\mathbb{R}$ restrictionata la intervalul $[a,b]$ inzestrat cu σ-algebra urma $\mathcal{B}(\mathbb{R})_{[a,b]}$. De remarcat este ca $\lambda_{[a,b]}$ este o masura finita, cu masura totala $b-a$.*

2. $\lambda_{B_2(0,r)}$ este masura Lebesgue pe $\mathbb{R}^2$ restrictionata la discul de centru 0 si raza r, $B_2(0,r)$, inzestrat cu σ-algebra urma $\mathcal{B}(\mathbb{R})_{B_2(0,r)}$; $\lambda_{B_2(0,r)}$ are masura toatala πr^2.

Exerciţiul 3.17. *Daca μ_1, μ_2 sunt doua masuri pe $(\Omega, \mathcal{F})$, atunci $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ ramane masura pe $(\Omega, \mathcal{F})$ pentru orice $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,\infty)$. In particular, daca μ e o masura finita pe $(\Omega, \mathcal{F})$, atunci cu $c := 1/\mu(\Omega)$ avem ca $c\mu$ este o probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Definiţia 3.18. *Probabilitatile pe $\mathbb{R}^d$ sau submultimi ale sale se vor numi si "distributii" sau "distributii de probabilitate". De exemplu, daca $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ cu $\lambda_d(A) < \infty$, atunci probabilitatea $\frac{\lambda_A}{\lambda_d(A)}$ se numeste distributia uniforma pe A.*

4 Cursul 4

Intr-unul din cursurile anterioare am disctutat teorema de structura a probabilitatilor pe spatii cel mult numarabile. Problema structurii probabilitatilor pe spatii masurabile generale este mult mai delicata si depaseste scopul acestui curs introductiv, insa este bine inteleasa in literatura. Ce putem spune in acest moment, fara prea multe detalii, este ca datorita unei teoreme a lui Kuratowski, o clasa foarte generala de spatii de probabilitate se poate reduce, printr-un izomorfism (sau mai precis o clasa de izomorfisme), la spatiul probabilitatilor pe $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Avand in minte aceasta putere de reprezentare a spatiului masurabil $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dar si prin prisma exemplelor din acest curs si din practica in general, ne vom concentra asupra structurii probabilitatilor pe $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, probabilitati care, am stabilit in cursul anterior, sunt numite si distributii de probabilitate, sau pe scurt distributii.

Avem nevoie de o definitie si o notatie.

Definiţia 4.1. *O funcție $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ se numește funcție de repartiție (pe $\mathbb{R}$) dacă*

i). F *este crescătoare*

ii). F *este continuă la dreapta*

iii). $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

iv). $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

In cele ce urmeaza vom nota cu $M(\mathbb{R}^d)$ masurile pe $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, iar cu $\mathsf{P}(\mathbb{R}^d)$ subclasa probabilitatilor din $M(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 4.2 (Teorema de structura a probabilitatilor pe $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$)**.** *Aplicatia*

$$\mathsf{P}(\mathbb{R}) \ni \mu \longmapsto F_\mu : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]), x \in \mathbb{R},$$

stabileste o bijectie intre multimea probabilitatilor pe $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *si multimea functiilor de repartitie pe* $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Impartim demonstratia in trei pasi.

Pasul 1: buna definire. Aici trebuie sa aratam ca daca $\mu \in \mathsf{P}(\mathbb{R})$, atunci F_μ este o functie de repartitie, adica proprietatile i)-iv) din Definiţia 4.1 sunt satisfacute:

i) Daca $x \le y \in \mathbb{R}$, atunci din proprietatea de monotonie a unei masuri avem $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \le \mu((-\infty, y]) = F_\mu(y)$.

ii) Daca $x_n \searrow_n x \in \mathbb{R}$, atunci din proprietatea de continuitate a unei masuri finite si din faptul ca $(-\infty, x_n] \searrow_n (-\infty, x]$ avem ca $F_\mu(x_n) = \mu((-\infty, x_n]) \searrow_n \mu((-\infty, x]) = F_\mu(x)$.

iii)-iv) Ultimele doua proprietati decurg imediat din aceeasi proprietate de continuitate a unei masuri finite si din faptul ca $\mu(\emptyset) = 0$ si $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Pasul 2: injectivitatea. Daca $\mu, \nu \in \mathsf{P}(\mathbb{R}^d)$ cu $F_\mu = F_\nu$, atunci pentru ca $\mathcal{C}_1 := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ este π-sistem si genereaza $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, rezultatul de unicitate obtinut in Teorema 3.8 se poate aplica in mod direct pentru a deduce ca $\mu = \nu$.

Pasul 3: surjectivitatea. Acest pas este ceva mai elaborat, asa ca il vom trata sistematic, ideea fiind aceea de a utiliza rezultatul de existenta/extensie furnizat de Corolarul 3.9. Asadar, fie F o functie de repartitie pe $\mathbb{R}$. Dorim sa construim o distributie $\mu \in \mathsf{P}(\mathbb{R})$ astfel incat $F_\mu = F$, lucru pe care il facem in trei subpasi:

3.1) Intai definim $\mu : \mathcal{C}_1 \to [0, 1]$ in mod natural, prin $\mu((-\infty, x]) := F(x), x \in \mathbb{R}$.

3.2) Urmatoarea etapa este sa construim o extensie a lui μ la algebra $\mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$ generata de $\mathcal{C}_1$ si sa aratam ca extensia obtinuta este finit aditiva. Este un exercitiu usor de aratat ca

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}_1) = \Big\{(-\infty, b_0] \cup \bigcup_{1 \le i \le n} (a_i, b_i] \cup (a_0, \infty) : \\ -\infty < b_0 \le a_1 \le b_1 \le \cdots \le a_n \le b_n \le a_0 < \infty, \quad n \ge 1\Big\} \cup \{\emptyset\}.$$

Cum multimile din $\mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$ sunt reuniuni finite si disjuncte de intervale de tipul $(a,b])$, suntem natural condusi la definirea

$$\mu((a,\infty)) := 1 - F(a); \quad \text{reamintim ca } \mu((-\infty,a]) = F(a)$$

$$\mu((a,b]) := \mu((-\infty,b]) - \mu((-\infty,a]) = F(b) - F(a), -\infty \le a \le b < \infty$$

$$\mu\left(\bigcup_{1\le i\le n}(a_i,b_i] \cup (a_{n+1},\infty)\right) := \sum_{1\le i\le n}\mu((a_i,b_i]) = 1 - F(a_0) + \sum_{1\le i\le n} F(b_i) - F(a_i),$$

deci am construit extensia $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{C}_1) \longrightarrow [0,1]$. Faptul ca μ este finit aditiva pe $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ reiese in mod trivial.

3.3) Ultima etapa consta in a invoca extensia Hahn-Kolmogorov obtinuta in Corolarul 3.9. Pentru asta, sa ne reamintim ca $\sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, asadar, din rezultatul amintit adineauri deducem ca o extensie σ-aditiva a lui μ de la algebra $\mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$ la $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ exista daca si numai daca

$$\text{pentru orice } (A_k)_k \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}_1) \text{ cu } A_k \underset{k}{\searrow} \emptyset \text{ avem ca } \mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2}$$

Asadar, ramane sa aratam ca (2) are loc. Fie

$$\emptyset \underset{k}{\swarrow} A_k = (-\infty, b_0^k] \cup \bigcup_{1\le i\le n}(a_i^k, b_i^k] \cup (a_0^k,\infty) \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_1).$$

Este clar ca intervalele din structura lui A_{k+1} sunt sub-intervale ale intervalelor din structura lui A_k. In particular, $b_0^k \underset{k}{\searrow} 0$ si $a_0^k \underset{k}{\nearrow} \infty$, deci $\lim_k \mu((-\infty, b_0^k]) = \lim_k \mu([a_0^k,\infty)) = 0$ si ramanem cu

$$\lim_k \mu(A_k) = \lim_k \sum_{1\le i\le n} \underbrace{F(b_i^k) - F(a_i^k)}_{=:\alpha(i,k)}.$$

Dar, pentru un i fixat, sa tinem cont ca $(a_i^k, b_i^k] \underset{k}{\searrow} \emptyset$, iar acest lucru nu se poate intampla decat daca exista $c_i \in \mathbb{R}$ astfel incat atat $(a_i^k)_k$ cat si $(b_i^k)_k$ descresc la c_i atunci cand k tinde la ∞.

Deci pentru i fixat, din continuitatea la dreapta a lui F avem ca

$$\lim_k \alpha(i,k) = \lim_k F(b_i^k) - F(a_i^k) = F(c_i) - F(c_i) = 0. \tag{3}$$

Tot din proprietatile lui F, sa remarcam ca sirul dublu indexat $\alpha(i,k)$ mai are urmatoarea proprietate:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{k\geq 1} |\alpha(i,k)| \leq F(\infty) - F(0) = 1 < \infty. \tag{4}$$

Dar cu cele doua proprietati (3)-(4) putem imediat deduce ca $\lim_k \mu(A_k) = 0$, invocand un rezultat cunoscut de la siruri de numere reale dublu indexate, cu privile la interschimbarea limitei cu suma; vezi urmatoarea lema, in cazul acesta cu $\alpha(i) = 0, i \geq 1$.

□

Lema 4.3 (Convergenta dominata pentru siruri). *Fie $(\alpha(i,n))_{i,k\geq 1}$ si $(\alpha(i))_{i\geq 1}$ siruri de numere reale astfel încât*

i) Pentru fiecare $i \geq 1$ avem $\lim_{k\to\infty} \alpha(i,k) = \alpha(i)$

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{k\geq 1} |\alpha(i,k)| < \infty$.

Atunci

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i\geq 1} \alpha(i,k) = \sum_{i\geq 1} \lim_{k\to\infty} \alpha(i,k) = \sum_{i\geq 1} \alpha(i),$$

adica putem interschimba limita dupa k cu suma (cu o infinitate de termeni) dupa i.

Exemplul 4.4. *Daca $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\mu := \delta_{x_0}$ este distributia Dirac in x_0 pe $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, vezi Exercițiul 2.14, atunci*

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0, \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 4.5. *Daca* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots \in \mathbb{R}$ *si* $\mu := \sum_{i\geq 1} p_i\delta_{x_i}$, *unde* $0 \leq p_i$, $\sum_{1\leq i\leq n} p_i = 1$, *atunci*

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x \in [x_1, x_2) \\ p_1 + p_2, & x \in [x_2, x_3) \\ \cdots & \\ p_1 + \cdots + p_n, & x \geq x_n \\ \cdots, & \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definiţia 4.6. *O distributie* μ *pe* $\mathbb{R}$ *se numeste "discreta" daca este de forma* $\mu := \sum_{i\geq 1} p_i\delta_{x_i}$, *folosind notatiile din Exemplul 4.5; observati ca* p_i*-urile pot fi zero de la un* i *incolo, caz in care* μ *este o medie ponderata de distributii* $Dirac$ *cu un numar finit de termeni.*

Exerciţiul 4.7. *Aratati ca o distributie* μ *pe* $\mathbb{R}$ *este discreta daca si numai daca functia sa de repartitie* F_μ *este egala cu suma salturilor sale, adica*

$$F_\mu(t) = \sum_{s\leq t} F_\mu(s+) - F_\mu(s), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

unde $F_\mu(s+)$ *reprezinta limita la dreapta in* s*. In particular, aratati ca seria din* (5) *este bine definita pentru o functie de repartitie oarecare* F*, in sensul ca* F *are o multime cel mult numarabila de salturi si ca seria lor este convergenta.*

Definiţia 4.8. *O distributie* μ *pe* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *se numeste continua daca* $\mu(\{x\}) = 0$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*; in acest caz, spunem ca* μ *"nu incarca punctele".*

Exerciţiul 4.9. *O distributie* μ *pe* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *este continua daca si numai daca daca functia ei de repartitie* F_μ *este o functie continua pe* $\mathbb{R}$*.*

O clasa larga de distributii continue poate fi obtinuta prin intermediul urmatorului exercitiu.

Exerciţiul 4.10. *Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow[0,\infty)$ o functie Riemann integrabila, pentru care definim*

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Atunci F este o functie de repartitie daca si numai daca $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$. In acest caz, F este derivabila peste tot si $F' = f$; de asemeneam, daca μ este distributia cu functia de repartitie $F_\mu = F$, atunci $\mu([a,b]) = \int_a^b f(t)\,dt, \quad \forall a\le b\in\mathbb{R}$.

Putem generaliza exercitiul anterior la caz multidimensional, in felul urmator.

Propoziţia 4.11. *Fie $d\ge 1$ si $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow[0,\infty)$ o functie pentru care integrala multipla $\int_{\mathbb{R}}^{d} f(x_1,\ldots,x_d)\,dx_1\cdots dx_d$ este bine definita (in sens Riemann) si este egala cu 1. Atunci exista si e unica o distributie de probabilitate μ pe $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ cu proprietatea ca*

$$\mu\left(\prod_{1\le i\le d}[a_i,b_i]\right) = \int\cdots\int_{\prod\limits_{1\le i\le d}[a_i,b_i]} f(x_1,\ldots,x_d)\,dx_1\cdots dx_d, \quad \forall a_i\le b_i\in\mathbb{R}, 1\le i\le d. \tag{6}$$

Demonstraţie. Nu vom detalia demonstratia, mentionam doar ca se poate demonstra folosind fundamental aceasi tehnica utilizata si in demonstratia pentru Teorema 4.2, mai precis extensia Hahn-Kolmogorov Corolarul 3.9. □

Prin prisma ultimelor doua rezultate, introducem urmatoarea definite.

Definiţia 4.12. *Spunem ca o distributie μ pe $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ este absolut continua cu densitate Riemann integrabila f daca* (6) *este satisfacuta. Putem remarca usor ca orice distributie absolut continua este continua.*

Corolarul 4.13. *Egalitatea* (6) *se poate scrie pentru multimi mai generale. Mai precis, daca μ este o distributie pe $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ cu densitate Riemann integrabila f, atunci*

$$\mu(A) = \int_A f(x_1,\ldots,x_d)\,dx_1\cdots dx_d, \quad \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \tag{7}$$

In particular, daca $d = 2$ si A este un domeniu normal, adica are o reprezentare de tipul

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \textit{ si } y \in [\alpha(x), \beta(x)]\right\}$$

cu $a, b \in \mathbb{R}$ si α, β doua functii reale continue, atunci

$$\mu(A) = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx, \tag{8}$$

iar aceasta regula se poate extinde pentru mai multe dimensiuni in mod similar.

Exemplul 4.14. *1. Distributia μ pe $\mathbb{R}$ cu densitatea*

$$f_\mu(x) := \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases} \tag{9}$$

se numeste distributia uniforma pe intervalul $[a, b]$.

2. *Mai general, distributia μ pe $\mathbb{R}^d$ cu densitatea*

$$f_\mu(x) := \begin{cases} \frac{1}{\prod\limits_{1 \le i \le d} (b_i - a_i)}, & x \in \prod\limits_{1 \le i \le d} [a_i, b_i] \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases} \tag{10}$$

se numeste distributia uniforma pe domeniul $\prod\limits_{1 \le i \le d} [a_i, b_i]$. Remarcati ca distributia uniforma are proprietatea ca densitatea ei este constanta pe domeniul pe care nu e nula.

3. *Distributia μ pe $\mathbb{R}$ cu proprietatea ca exista $\alpha, \beta > 0$ astfel incat*

$$f_\mu(x) := \begin{cases} c x^{\alpha - 1} (1 - x)^{\beta - 1}, & x \in [0, 1] \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases} \tag{11}$$

se numeste distributia Beta pe $[0, 1]$; aici c este o constanta normalizatoare astfel incat

$\int_0^1 f_\mu(x)\, dx = 1.$

Mai general, orice functie f pozitiva si integrabila Riemann pe $\mathbb{R}^d$ determina o distributie absolut continua de indata ce impartim f cu integrala ei pe tot spatiul. Vom discuta mai multe exemple relevante de-alungul urmatoarelor cursuri.

Exerciţiul 4.15. *Fie μ o distributie pe $\mathbb{R}$ cu densitatea*

$$f_\mu(x) := \begin{cases} cx^2y, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \textit{in rest}. \end{cases}$$

Calculati $\mu(A)$, unde $A := \{x \in [0,1]^2 : x + y \leq 1\}$.

Exerciţiul 4.16 (Distributie continua care nu e absolut continua: din nou fractali)**.** *Consideram multimea Cantor si notatiile introduse in Exerciţiul 3.13. Pentru fiecare multime C_n consideram functia de repartitie uniforma F_n pe C_n, anume*

$$F_n(x) := \int_{-\infty}^{x} f_n(x)\, dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1(C_n)}, & x \in C_n \\ 0, & \textit{altfel} \end{cases}, n \geq 1.$$

Aratati ca exista limita $F(x) := \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$ si ca F are urmatoarele proprietati:

i) F este o functie de repartitie continua pe $\mathbb{R}$.

ii) Distributia μ indusa de F pe $\mathbb{R}$ are proprietatea ca $\mu(C) = 1$, altfel spus $\mu(\mathbb{R} \setminus C) = 0$.

iii) Distributia μ nu este absolut continua.

5 Cursul 5

In acest curs dorim sa introducem concepte fundamentale precum probabilitati conditionate si independenta. Pentru aceasta, incepem cu un exercitiu evident, dar care ne introduce in problematica.

Exerciţiul 5.1. *Într-un magazin sunt la vânzare laptopuri și desktopuri, noi sau second-hand, dupa cum reiese din tabelul urmator:*

Tip unitate	*D*	*L*
N	*20*	*80*
SH	*70*	*30*

Un client intra in magazin.

i) Care e probabilitatea să cumpere un desktop nou?

Solutie: Desigur, probabilitatea este $\frac{\textit{\# desktopuri noi}}{\textit{\# unitati totale}} = \frac{20}{200} = 0.1.$

ii) Care e probabilitatea să cumpere un desktop ştiind că e interesat doar de unitati noi?

Solutie: este clar ca notiunile de caz favorabil si caz posibil trebuie actualizate cu informatia de care dorim sa tinem cont, anume clientul doreste o unitate noua. Asadar, spatiul total se restrange la acele cazuri ce reprezinta unitati noi, iar evenimentul ce ne intereseaza contine acele desktopuri cu proprietatea ca sunt noi. Deci raspunsul este $\frac{\textit{\# desktopuri noi}}{\textit{\# unitati noi}} = \frac{20}{100} = 0.2.$

iii) Care e probabilitarea sa cumpere o unitate noua stiind ca doreste sa achitioneze neaparat un desktop?

Solutie: Iarasi, suntem nevoiti sa ajustam spatiile in functie de informatia/restrictia impusa, raspunsul fiind $\frac{\textit{\# unitati noi de tip desktop}}{\textit{\# unitati de tip desktop}} = \frac{20}{90} = 2/9.$

Acest procedeu de “ajustare” a probabilitatii in functie de o informatie sau un eveniment despre care stim ca are loc se poate formaliza in general in felul urmator:

Definiţia 5.2. *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un spatiu de probabilitate si* $B \in \mathcal{F}$ *un eveniment fixat cu* $\mathbb{P}(B) > 0$*, despre care presupunem ca are loc. Aplicatia*

$$\mathcal{F} \ni A \longrightarrow \mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \in (0,1]$$

defineste o noua probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$*, numita probabilitatea* $\mathbb{P}$ *conditionata de evenimentul* B*.*

Mai notam si $\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A|B)$*.*

Remarca 5.3. *In Definiţia 5.2 avem de-a face cu doua modele de probabilitate. Primul model este cel "a priori",* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, care atribuie unui eveniment* $A \in \mathcal{F}$ *sansa de aparitie* $\mathbb{P}(A)$*. Al doilea model este cel "a posteriori" presupunerii ca evenimentul* B *are loc,* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, care atribuie unui eveniment* $A \in \mathcal{F}$ *sansa de aparitie* $\mathbb{P}(A|B)$*. Modelul a posteriori reprezinta o actualizare a modelului a priori, pe baza faptului ca evenimentul* B *este presupus ca avand loc.*

Urmatorul rezultat este pe cat de simplu de demonstrat, pe atat de bogat in consecinte diverse.

Teorema 5.4 (Formula lui Bayes)**.** *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un spatiu de probabilitate. Atunci pentru* $\forall A, B \in \mathcal{F}$ *cu* $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$ *avem*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)}\, \mathbb{P}(A). \tag{12}$$

Demonstraţie. Direct din Definiţia 5.2 avem

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}\, \mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)}\, \mathbb{P}(A).$$

□

Propoziţia 5.5 (Formula de descompunere)**.** *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un spatiu de probabilitate si* $(B_n)_{n \geq 1}$ *o partitie (disjuncta) masurabila a lui* Ω*, adica* $B_n \in \mathcal{F}$ *si* $B_n \cap B_m = \emptyset$ *pentru orice* $n \neq m \geq 1$*.*

Presupunem ca $\mathbb{P}(B_n) > 0, n \geq 1$. *Atunci pentru orice* $A \in \mathcal{F}$ *avem descompunerea*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n). \tag{13}$$

In particular, daca $B \in \mathcal{F}$ *cu* $\mathbb{P}(B) > 0$*, atunci pentru orice* $A \in \mathcal{F}$ *avem descompunerea*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c).$$

Demonstraţie. □

Corolarul 5.6 (Formula lui Bayes extinsa)**.** *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un spatiu de probabilitate. Atunci pentru* $\forall A, B \in \mathcal{F}$ *cu* $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$ *avem*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)}\,\mathbb{P}(A). \tag{14}$$

Exerciţiul 5.7. *O boala afecteaza 2 indivizi dintr-o mie. Un test e menit sa detecteze daca boala este prezenta sau nu. Testul are urmatoarea eficienta:*

- *din* 100 *de persoane bolnave,* 98 *sunt testate pozitiv.*
- *din* 100 *de persoane sanatoase,* 5 *sunt testate (fals) pozitiv.*

O persoana este testata pozitiv. Care e probabilitatea sa fie infectata?

Soluţie. Ideea este de a formaliza enuntul in termeni de evenimente si de a aplica formula lui Bayes, sarind peste o descriere minutioasa si inutila a spatiilor de probabilitate. Pentru aceasta, introducem notatiile:

$B :=$ *"persoana e bolnava",* $B^c :=$ *"persoana e sanatoasa",*

$T_+ :=$ *"testul e pozitiv",* $T_- :=$ *"testul e negativ".*

Cu aceste notatii, putem rescrie datele problemei astfel

$$\mathbb{P}(B) = 2\%, \quad \mathbb{P}(T_+|B) = 98\%, \quad \mathbb{P}(T_+|B^c) = 5\%, \quad \textit{cerinta fiind } \mathbb{P}(B|T_+) =? \tag{15}$$

Folosind formula lui Bayes extinsa Corolarul 5.6, avem

$$\mathbb{P}(B|T_+) = \frac{\mathbb{P}(T_+|B)}{\mathbb{P}(T_+|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(T_+|B^c)\mathbb{P}(B^c)}\mathbb{P}(B) = \cdots \approx 28\%.$$

□

Pe baza notiunii de probabilitate conditionata se poate construi in mod natural un alt concept fundamental in teoria probabilitatilor, anume cel de *independenta*:

Definiţia 5.8. *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un spatiu de probabilitate. Spunem ca doua evenimente* $A, B \in \mathcal{F}$ *sunt independente (scriem* $A \perp\!\!\!\perp B$*) daca*

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A). \tag{16}$$

In cuvinte, faptul ca stim/presupunem ca evenimentul B *are loc nu modifica sansele de aparitie a evenimentului* A*. Sa remarcam ca pentru ca termenul din stanga relatiei* (16) *sa fie bine definit, este necesar sa impunem* $\mathbb{P}(B) > 0$*.*

Definiţia 5.8 admite urmatoarea caracterizare (definitie alternativa), care in particular scoate in evidenta faptul ca relatia de independenta este una simetrica:

Propoziţia 5.9 (Definitie alternativa)**.** *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un spatiu de probabilitate si* $A, B \in \mathcal{F}$ *cu* $\mathbb{P}(B) > 0$*. Atunci*

$$A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \tag{17}$$

Demonstraţie. $A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow$ (17). □

Remarca 5.10. *Sa observam ca definitia alternativa a independentei a doua evenimente* A, B *nu necesita restrictia* $\mathbb{P}(B) > 0$*.*

Exerciţiul 5.11. *Aruncam cu doua zaruri si consideraam evenimentele:*

$$A_1 := \text{"primul zar } \leq 2\text{"}, \quad A_2 := \text{"al doilea zar e par"}, \quad A_3 := \text{"suma este } 7\text{"}$$

Studiati daca $A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$, $A_1 \perp\!\!\!\perp A_3$, $A_2 \perp\!\!\!\perp A_3$.

Putem sa extindem notiunea de independenta in cazul mai multor evenimente, insa acest lucru presupune mai mult decat independenta “doua cate doua”:

Definiţia 5.12. *Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un spatiu de probabilitate. Spunem ca familia (cel mult numarabila) $(A_n)_{n \in I \subset \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ este una de evenimente independente daca:*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}), \quad \forall \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq I,$$

sau echivalent, daca

$$\mathbb{P}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k} | A_{j_1}, \ldots, A_{j_l}) = \mathbb{P}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}), \quad \forall \{i_1, \ldots, i_k\}, \{j_1, \ldots, j_l\} \subseteq I, \textit{disjuncte}.$$

Exerciţiul 5.13. *Aruncam doua monede (independente) echilibrate, pentru care facem identificarea $H \equiv 1$ si $T \equiv 0$. Consideram evenimentele:*

$$A := \text{"prima pica } 1\text{"}, \quad B := \text{"a doua pica } 0\text{"}, \quad C := \text{"suma celor doua (mod } 2\text{) este } 1\text{"}.$$

Raspundeti la urmatoarele intrebari:

(i) $A \perp\!\!\!\perp B$?

(ii) $B \perp\!\!\!\perp C$?

(iii) $A \perp\!\!\!\perp C$?

(iv) A, B, C *sunt independente?*

Putem merge si mai departe si sa conceptualizam notiunea de independenta pentru clase de evenimente:

Definiţia 5.14. *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un spatiu de probabilitate. Clasele de evenimente* $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}, i \geq 1$ *se numesc independente daca familia* $A_i, i \geq 1$ *este una de evenimente independente, pentru orice* $A_i \in \mathcal{C}_i, i \geqslant 1$.

Propoziţia 5.15. *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un spatiu de probabilitate. Daca* $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}, i \geq 1$ *sunt independente si* $\mathcal{C}_i$ *este* π*-sistem pentru orice* $i \geq 1$*, atunci* $\sigma(\mathcal{C}_i), i \geq 1$ *formeaza o familie de* σ*-algebre independete.*

Demonstraţie. Pentru claritate, impartim demonstratia in trei pasi.

Pasul 1. Conform Definiţia 5.14, este suficient sa aratam ca $\sigma(\mathcal{C}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ sunt σ-algebre independente, pentru orice $n \geq 1$. De asemenea, este clar ca putem presupune ca $\emptyset, \Omega \in \mathcal{C}_i, i \geq 1$.

Pasul 2. Printr-un argument inductiv, este suficient sa demonstram enuntul doar pentru doua clase de evenimente care sunt π-sisteme. Intr-adevar, este usor de observat ca $\sigma(\mathcal{C}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ sunt independente daca si numai daca $\sigma(\mathcal{C}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{C}_{n-1})$ sunt independente si $\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} \sigma(\mathcal{C}_i)\right) \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{C}_n)$. Dar este iarasi un exercitiu faptul ca $\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} \sigma(\mathcal{C}_i) = \sigma(\mathcal{C}_1^{n-1})$, unde $\mathcal{C}_1^{n-1} := \{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} : A_i \in \mathcal{C}_1, 1 \leq i \leq n-1\}$ este un $\pi-$sistem.

Pasul 3. Ramane sa demonstram ca enuntul este adevar in cazul a doua clase $\mathcal{C} \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}'$ care sunt π-sisteme. O idee este de a face uz de teorema de unicitate Teorema 3.8, in felul urmator. Fie $B \in \mathcal{C}'$ si

$$\sigma(\mathcal{C}) \ni A \longmapsto \mathbb{P}(A|B)$$

probabilitatea conditionata de B, definita pe $\sigma(\mathcal{C})$. De asemenea, putem privi $\mathbb{P}$ ca o probabilitate pe aceeasi σ-algebra $\sigma(\mathcal{C})$. Acum, din faptul ca $\mathcal{C} \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}'$, avem ca

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{C}.$$

Cum $\mathcal{C}$ este π-sistem, din Teorema 3.8 deducem ca

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{C}).$$

Cum $B \in \mathcal{C}'$ a fost ales arbitrar, avem ca $\sigma(\mathcal{C}) \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}'$. Faptul ca $\sigma(\mathcal{C}) \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{C}')$ se obtine din acelasi argument de unicitate ca cel de mai sus, schimband rolul lui $\mathcal{C}'$ cu $\sigma(\mathcal{C})$ si rolul lui $\mathcal{C}$ cu $\mathcal{C}'$. $\square$

Exemplul 5.16. *Daca $A \perp\!\!\!\perp B$ atunci*

$$\{\emptyset, A, A^c, \Omega\} = \sigma(\{\emptyset, A\}) \perp\!\!\!\perp \sigma(\{\emptyset, B\}) = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\},$$

deci $A \perp\!\!\!\perp B^c, A^c \perp\!\!\!\perp B, A^c \perp\!\!\!\perp B^c$.

Independenta poate fi privita si intr-un cadru conditionat. De exemplu, daca alegem doi studenti la intamplare din intreaga lume, atunci faptul ca unul promoveaza cursul de probabilitati la care e inscris e independent de faptul ca celelalt, de exemplu, nu promoveaza. Insa daca stim ca cei doi studenti sunt colegi in aceeasi grupa, atunci cele doua evenimente nu mai sunt neaparat independente; de exemplu, in acest caz, faptul ca unul dintre cei doi nu promoveaza poate sa fie din cauza ca examenul a fost mult prea greu, caz in care scad si sansele colegului sa promoveze. Cu alte cuvinte, doua evenimente pot fi independente intre ele, dar sa nu mai fie independente in prezenta unui al treilea eveniment. Pe dos, putem sa ne imaginam situatia in care doi colegi de grupa sunt supusi aceluiasi examen la probabilitati, si stim ca examenul a fost usor. Acum, putem sa acceptam ca evenimentul ca unul dintre studenti promoveaza este independent de cel in care celalalt pica examenul. Asadar, doua evenimente pot sa nu fie independente de unele singure, dar pot deveni independente in prezenta unui al treilea eveniment.

Definiţia 5.17 (Independenta conditionata)**.** *Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un spatiu de probabilitate si $A, B, C \in \mathcal{F}$. Folosind notatia $\mathbb{P}_C$ din Definiţia 5.2 pentru probabilitatea conditionata de C, spunem ca A si B sunt independente conditionat de C (scriem $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$) daca*

$$\mathbb{P}_C(A|B) = \mathbb{P}_C(A), \tag{18}$$

sau echivalent

$$\mathbb{P}(A|B, C) = \mathbb{P}(A|C). \tag{19}$$

Mai general, un sir de clase de evenimente $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}, i \geq 1$ sunt independente conditionat de un eveniment $C \in \mathcal{F}$, daca $\mathcal{C}_i, i \geq 1$ sunt independente in raport cu probabilitatea $\mathbb{P}_C$ (vezi Definiţia 5.14).

Exerciţiul 5.18. *(i) $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$ daca si numai daca $\mathbb{P}(A, B|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)$.*

(ii) $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ sunt independente conditionat de C daca si numai daca $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \mid C) = \mathbb{P}(A_{i_1} \mid C) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k} \mid C), \quad \forall i_1, \ldots, i_k$ indici disjuncti.

Exerciţiul 5.19. *Aratati ca daca A, B, C sunt independente atunci $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$.*

Exerciţiul 5.20. *Pentru o moneda consideram identificarea $H \equiv 1$ si $T \equiv 0$.*

i) Aruncam cu doua monede echilibrate si consideram evenimentele $A :=$ ”prima pica 1”, $B :=$ ”a doua pica 0”, respectiv $C :=$ ”suma pica 0 (mod 2)”. Aratati ca $A \perp\!\!\!\perp B$ dar $A \not\perp\!\!\!\perp B \mid C$.

ii) Aruncam cu trei monede echilibrate si consideram evenimentele $A :=$ ”suma primelor doua este 1 (mod 2)”, $B :=$ ”suma dintre prima si a treia este 1 (mod 2)”, $C :=$ ”prima pica 1”. Aratati ca $A \perp\!\!\!\perp B$ dar $A \not\perp\!\!\!\perp B \mid C$. Aratati ca $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$ dar $A \not\perp\!\!\!\perp B$.

Exerciţiul 5.21. *Preluand ipotezele din Exerciţiul 5.7, calculati probabilitatea ca o persoana sa fie bolnava stiind ca a fost testata pozitiv de doua ori consecutiv.*