1 26.03.24

ElemTN5 _ 3(1)

$\boxed{\text{T. EULER}}$ Pentru orice $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ și pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ cu $(a,n)=1$ $a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$

dem: $(a,n)=1 \Rightarrow \hat{a}\in U(\mathbb{Z}_n)$

Ca urmare $\hat{a}^{\varphi(n)} = \hat{a}^{|U(\mathbb{Z}_n)|} = \hat{1}$,

deci $a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$. □

$\boxed{\text{T. FERMAT}}$ Pentru orice $p\in\mathbb{N}$ prim și pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ $p\nmid a \Rightarrow a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$ □

$\boxed{\text{T WILSON}}$ Pentru orice $p\in\mathbb{N}$ prim

$(p-1)!\equiv -1 \pmod{p}$. □

Obs Dacă $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ și $(n-1)!\equiv -1 \pmod{n}$,

presupunem că n e compus.

Atunci există $a,b>1$ cu $n=ab$

$1<a,b<n$.

Atunci: • Dacă $a\neq b$

$(n-1)! = 1\cdot 2\cdots b\cdots a\cdots (n-1)\equiv 0 \pmod{n}$, ↯

• Dacă $a=b$, atunci $n=a^2$.

Avem $a\mid(a^2-1)!\equiv -1 \pmod{n=a^2}$, deci există $\hat{c} \in \mathbb{Z}_{a^2}$ a.î. $\hat{a}\hat{c} = \widehat{-1}$ (2)

în $\mathbb{Z}_{a^2}$ ~~(mod a^2)~~,

deci $\hat{a}\cdot\widehat{(-c)} = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_{a^2}$.

Ca urmare, $\hat{a} \in U(\mathbb{Z}_{a^2})$, deci $(a, a^2) = 1$,

↯. În concluzie

E VALABILĂ ȘI RECIPROCA T. LUI WILSON!

√1. Pentru ce număr prim p avem $\frac{2^p+1}{p} \in \mathbb{Z}$?

√2. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^3 + b^3 + c^3 \not\equiv 4 \pmod 9$

√3. Determinați restul împărțirii lui $100!$ la 103

4. $p \geq 3$ e prim. Arătați că $7^p - 6^p \equiv 1 \pmod{43}$

5. Rezolvați congruența $x^{37} \equiv 3 \pmod{17}$

Sol 1. $\frac{2^p+1}{p} \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \mid 2^p + 1 \Rightarrow 2^p \equiv -1 \pmod p$ (1)

Dacă $p = 2$, evident, $\frac{2^p+1}{p} = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$, ↯.

Dacă $p > 2$, cf T. Fermat, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &2^p \equiv 2 \pmod p \\ &(1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow -1 \equiv 2 \pmod p \Rightarrow p \mid 3 \Rightarrow p = 3$$

Reciproc $\frac{2^3+1}{3} = 3 \in \mathbb{Z}$.

Ca urmare, singurul nr. prim p cu prop. dată e $p = 3$ □

2) $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}\ (7 \mid a^3+b^3+c^3 \rightarrow 7 \mid abc)$ (3)

0,5. Arătați că nr $11\cdot 111\cdot 1111\cdot 11111\cdot\ldots\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}$ nu e pătrat perfect

---

Sol 0,5: $11\cdot 11\cdot 111\cdots\underbrace{11\ldots1}_{n} \equiv 3\cdot(-1)^n$ ~~(mod 8)~~ $\equiv 3$ sau 5 (mod 8),

deci nu poate fi pătrat perfect.

$\boxed{\text{Prop}}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$ $a \equiv -1, 0$ sau 1 (mod 7) (mod 9)

$\alpha \in \{-1,0,1\}$

$$(3k+\alpha)^3 = \boxed{27k^3+27k^2\alpha+9k\alpha^2} + \alpha^3 \equiv$$

$\vdots 9$

$$\overset{9}{\equiv} \alpha^3 \in \{-1,0,1\}.$$

---

3. Cf. Wilson, $108! \equiv -1 \pmod{109}$,

deci $100!\cdot 101\cdot 102\cdot 103\cdot 104\cdot 105\cdot 106\cdot 107\cdot 108 \equiv -1 \pmod{109}$

$\Leftrightarrow 100!\cdot(-8)\cdot(-7)\cdot(-6)\cdot(-5)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1) \equiv -1 \pmod{109}$

$\overset{\cdot(-1)^8}{\Leftrightarrow} 100!\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 \equiv -1 \pmod{109}$

$\overset{\cdot 5}{\Leftrightarrow} 100!\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 \equiv 54 \pmod{109}$

$\overset{\cdot(-36)}{\Leftrightarrow} 100!\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 \equiv -18 \pmod{109}$

$\overset{\cdot(-27)}{\Leftrightarrow} 100!\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 \equiv 50 \pmod{109}$

$\cdot 22$ $(\Leftrightarrow)$ $100! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \equiv 10 \pmod{109}$ (4) 1

$\cdot 18$ $(\Leftrightarrow)$ $100! \cdot 8 \cdot 7 \equiv 38 \pmod{109}$

$\cdot 16 \cdot (-36)$ $(\Leftrightarrow)$ $100! \cdot 8 \cdot \equiv 38 \cdot 16 \cdot (-36) \equiv 21 \pmod{109}$

$\cdot 14 \cdot (-36)$ $(\Leftrightarrow)$ $100! \equiv 21 \cdot 14 \cdot (-36) \pmod{109} \Leftrightarrow$

$(\Leftrightarrow)$ $100! \equiv 11 \pmod{109}$.

$$\left.\begin{array}{l} 7 \cdot 16 \overset{109}{\equiv} 3 \overset{\cdot(-36)}{\Rightarrow} \\ 7 \cdot 16 \cdot (-36) \overset{109}{\equiv} 1 . \end{array}\right.$$

46
36
1656 (109
109
= 556
545
21

38
16
228
38
15608 ≡ −46

294 ≡
35
− 31
36
108
1116 (109