Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

9 februarie 2019

NUME:	....
PRENUME:	....
GRUPA:	....

Examen Analiză Numerică & Metode Numerice
Matematică, Anul III

I. (a) Prezentaţi algoritmul metodei Newton-Raphson.

(b) Enumeraţi avantajele şi dezavantajele metodei Newton-Raphson (i.e. cerinţele, dependenţa de prima aproximare, izolarea soluţiei, viteza de convergenţă a metodei).

(c) Determinaţi relaţia dintre două erori consecutive ale şirului de aproximări date de metoda Newton-Raphson.

(d) Determinaţi/demonstraţi viteza de convergenţă a metodei Newton-Raphson.

II. Fie $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$, o matrice tridiagonală astfel încât

$$a_{ii} = 2, \quad i = \overline{1,n}\,; \qquad a_{i,\,i+1} = a_{i+1,\,i} = -1, \quad i = \overline{1,n-1}\,.$$

Considerăm vectorii $\mathbf{a}^{(j)} = (a_{1j}\, a_{2j}\, \ldots\, a_{nj})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,n}$, şi $\mathbf{v}^{(k)} = \left(v_1^{(k)}\, v_2^{(k)}\, \ldots\, v_n^{(k)}\right)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$, $k = \overline{1,n}$, ale cărui componente sunt definite prin

$$v_j^{(k)} = \begin{cases} j(n+1-k)\,, & j = \overline{1,k} \\ k(n+1-j)\,, & j = \overline{k+1,n}\,. \end{cases}$$

(a) Daţi definiţia normei matriciale $\|\cdot\|_\infty$ şi formula de calcul pentru aceasta. Calculaţi $\|\mathbf{A}\|_\infty$.

(b) Calculaţi produsul scalar $\left\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{a}^{(j)} \right\rangle_2$, $k, j = \overline{1,n}$.

(c) Folosind (b), determinaţi componentele matricei $\mathbf{A}^{-1}$ şi verificaţi că $\mathbf{A}^{-1}$ este simetrică.

(d) Determinaţi $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$ şi calculaţi $\kappa_\infty(\mathbf{A})$.

III. Fie $n \geq 1$, $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă şi nodurile $a \leq x_0 < x_1 < \ldots x_n \leq b$.

(a) Determinaţi $\ell_0 \in \mathscr{P}_{2n}$ şi $h_i, k_i \in \mathscr{P}_{2n}$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât polinomul

$$P_{2n}(x) = \ell_0(x)\, f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \left[h_i(x)\, f(x_i) + k_i(x)\, f'(x_i)\right] \in \mathscr{P}_{2n}$$

satisface următoarea problemă de interpolare

$$P_{2n}(x_i) = f(x_i)\,, \quad i = \overline{0,n}\,; \qquad P'_{2n}(x_i) = f'(x_i)\,, \quad i = \overline{1,n}\,.$$

(b) Dacă $f \in \mathrm{C}^{2n+1}[a,b]$, arătaţi că

$$\forall\, x \in [a,b], \quad \exists\, \xi = \xi(x) \in [a,b]: \quad f(x) = P_{2n}(x) + \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}\, \psi_{2n+1}(x)\,,$$

unde $\psi_{2n+1}(x) := (x - x_0) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 \in \mathscr{P}_{2n+1}$.

IV. Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabilă, unde $-\infty < a < b < \infty$, şi $I(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Determinaţi formula de cuadratură a trapezului, $I_1(f)$, pentru $I(f)$ pornind de la polinomul de interpolare Lagrange $P_1 \in \mathscr{P}_1$ asociat funcţiei f şi nodurilor de interpolare $x_0 = a$ şi $x_1 = b$.

(b) Dacă $f \in \mathrm{C}^2[a,b]$, determinaţi eroarea de cuadratură a trapezului, $E_1(f)$.

(c) Aplicaţi metoda de cuadratură adaptivă pentru $f \in \mathrm{C}^2[a,b]$ şi o toleranţă dată $\varepsilon > 0$ folosind formula de cuadratură a trapezului.

BAREM:

Problema	Oficiu	(a)/Punctaj		(b)/Punctaj		(c)/Punctaj		(d)/Punctaj	
I	1	3		3		2		2	
II	1	3		3		2		2	
III	1	6		4		–		–	
IV	1	3		3		4		–	

TIMP DE LUCRU: 180 minute