Exercițiul 1

10p

1. Ne propunem să simulăm observații dintr-o populație $\mathcal{N}(0,1)$ folosindu-ne de observații repartizate Laplace de parametru $\lambda > 0$, i.e.

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.$$

a) Determinați valoarea lui λ care permite minimizarea probabilității de respingere. Verificați că această valoare este aproximativ 0.24. b) Scrieți un cod `R` care să permită simularea unei variabile aleatoare X repartizată $\mathcal{N}(0,1)$ plecând de la repartiția Laplace de parametru λ.

2. Considerăm cuplul de variabile aleatoare (X, Y) care este repartizat cu densitatea de repartiție

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{y^2 x}{2} - \sqrt{x}} \mathbf{1}_{x>0}.$$

   a) Determinați repartiția condiționată a lui Y la $X = x$
   b) Determinați repartiția lui $\sqrt{X}$
   c) Propuneți o metodă de simulare pentru o observație din densitatea $f(x,y)$ și scrieți un cod `R` care să permită acest lucru.

Exercițiul 2

10p

Numărul de clienți pe zi de la ghișeul unei bănci poate fi modelat ca o variabilă aleatoare $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Pentru a îmbunătății serviciile oferite, banca vrea să estimeze parametrul λ atât prin metoda momentelor cât și prin metoda verosimilității maxime. Pentru aceasta dispune de următorul eșantion înregistrat pe parcursul a 3 săptămâni:

`X: 16 23 23 18 24 19 26 19 19 13 22 26 21 19 25 18 22 19 22 21 25`

a) Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor $\tilde{\lambda}$ și estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\lambda}$ și verificați dacă aceștia sunt deplasați, consistenți și eficienți. Determinați repartiția lor limită.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\lambda(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 3

10p

Considerăm densitatea

$$f(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \mathbf{1}_{[0,1]}(y)$$

unde folosim convenția $f(1) = +\infty$.

1. Dacă v.a. Y are densitatea f care este densitatea v.a. $X = \theta Y$ cu $\theta > 0$?
2. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n din X. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ a lui θ.
3. Determinați repartiția limită a lui $n\sqrt{\theta - \hat{\theta}_n}$.
4. Determinați mediana repartiției v.a. X și deduceți un nou estimator $\tilde{\theta}_n$. Pe care dintre cei doi estimatori îl preferați?

Exercițiul 4

10p

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de volum n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = Axe^{-\theta x^2} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

cu $\theta > 0$ parametru necunoscut și A o constantă (care depinde de θ).

a) Determinați constanta A și calculați funcția de repartiție $F_\theta(x)$ a lui X_1.

b) În cazul în care $\theta = 5$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui X. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0, 1]$: $u_1 = 0.622$, $u_2 = 0.609$ și $u_3 = 0.623$. Descrieți procedura și scrieți un cod `R` care să permită acest lucru.

c) Determinați mediana $x_{1/2}$ repartiției lui X_1. Plecând de la aceasta deduceți un estimator $\tilde{\theta}_n$ a lui θ și îi preferați.

Exercițiul 4

10p

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de volum n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = Axe^{-\theta x^2}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

cu $\theta > 0$ parametru necunoscut și A o constantă (care depinde de θ).

a) Determinați constanta A și calculați funcția de repartiție $F_\theta(x)$ a lui X_1.

b) În cazul în care $\theta = 5$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui X. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0, 1]$: $u_1 = 0.622$, $u_2 = 0.609$ și $u_3 = 0.623$. Descrieți procedura și scrieți un cod `R` care să permită acest lucru.

c) Determinați mediana $x_{1/2}$ repartiției lui X_1. Plecând de la aceasta deduceți un estimator $\tilde{\theta}_n$ a lui θ și determinați repartiția limită a lui $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta)$.

d) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ a lui θ.

e) Arătați că $X_1^2 \sim \text{Exp}(\theta)$ și calculați $\mathbb{E}[X_1^1]$ și $Var(X_1^2)$.

f) Determinați repartiția limită a lui $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$.

g) Calculați informația lui Fisher și verificați dacă $\hat{\theta}_n$ este asimptotic eficient.

h) Pe care dintre cei doi estimatori îi preferați ? Ce puteți spune de estimatorul obținut prin metoda momentelor ?

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2 x}{2} - \sqrt{x}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2 x}{2}}\, dy$$

Facem schimbarea de variabilă $v = \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

$$dv = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\, dy$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\, dv = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{x}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\sqrt{x}}$$

$$f_X(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2 x}{2} - \sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{e^{-\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{-y^2 x}{2}}}{e^{\sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{e^{-\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2 x}{2}} \cdot \cancel{e^{-\sqrt{x}}} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{x}}{\cancel{e^{-\sqrt{x}}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2 x}{2}} \cdot \sqrt{x}$$

Deci, $f_{Y|X}(y|x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2 x}{2}} \sim N(0, \frac{1}{x})$

b) repartiția lui $\sqrt{X}$.

Fie z. Avem 2 cazuri:

cazul 1 : $z < 0$, avem $\mathbb{P}(X \leq z) = 0$

cazul 2 : Pt. $z > 0$, vom avea:

b) Det. repartiția limită a lui $\tilde{\theta}$

Din TLC știm că $\sqrt{n}(\bar{x} - \underbrace{E(x_i)}_{=\frac{\theta}{1+\theta}}) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$

unde $\sigma^2 = Var(x_i) = E(x_i^2) - E(x_i)^2$

$$E(x_i^2) = \int_0^1 x^2 \theta \cdot x^{\theta-1} \, dx = \theta \frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\Big|_0^1 = \frac{\theta}{\theta+2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\theta}{\theta+2} - \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^2 = \frac{\theta}{(\theta+2)(1+\theta)^2}$$

Aplicăm metoda delta pentru $g(x) = \frac{x}{1-x}$ (deriv pe $(0,1)$).
și obținem că: (pt $a = \frac{\theta}{1+\theta}$)

$$\sqrt{n}\Big(\underbrace{g(\bar{x})}_{\tilde{\theta}} - \underbrace{g\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)}_{=\theta}\Big) \xrightarrow{D} N\left(0, \left(\sigma \cdot g'\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)\right)^2\right)$$

se calculează

Deci $\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{\theta}{\theta+2}\right)$

împărțind prin abaterea medie pătratică obținem o normală standard

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n} \cdot (\tilde{\theta} - \theta)}{\sqrt{\frac{\theta}{\theta+2}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$$= \frac{\tilde{\theta} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta}{n(\theta+2)}}}$$

Deci, repartiția asimptotică a lui $\tilde{\theta}$ este $N\left(\theta, \frac{\theta}{(n+2)}\right)$