Davidescu - Filip Olivia - Alexandra 24.03.2022

Elemente de calcul științific
TUTORIAT 3

Metoda Gauss - Jordan

Considerăm $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă. Vrem să determinăm un algoritm potrivit pentru a obține inversa lui A.

Fie $X = (x_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $X = A^{-1} \Rightarrow AX = XA = I_n$

$X = \text{col}[\underline{x}^{(1)}\ \underline{x}^{(2)} \dots \underline{x}^{(n)}]$, $\underline{x}^{(j)} = [x_{1j}\ x_{2j} \dots x_{nj}]^T \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,n}$

Algoritm: Rezolvăm prin MEG, de n ori, simultan, sistemele

$$A\underline{x}^{(k)} = \underline{e}^k, \quad k = \overline{1,n}$$

$I_n = \text{col}[\underline{e}^{(1)}\ \underline{e}^{(2)} \dots \underline{e}^{(n)}]$, $\underline{e}^{(j)} = (\delta_{ij})_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}_n$, $j = \overline{1,n}$

Metode de factorizare. Factorizarea LU fără pivotare

Considerăm sistemul de ecuații liniare $A\underline{x} = \underline{b}$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ inversabilă} \\ \underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Date}$$

$$x = (\underline{x}_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \text{Necunoscute}$$

Vrem să descompunem (factorizăm) A sub forma $A = LU$ (2)

$L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ inferior triunghiulară

$U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ superior triunghiulară

De ce?

Dacă are loc factorizarea (2) a matricii A, atunci sistemul (1) se va rezolva astfel:

$$A\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow (LU)\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow L\underbrace{(U\underline{x})}_{\overset{\text{not.}}{=}\, y} = \underline{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ly = \underline{b} \text{ și determinăm } \boxed{y = L^{-1}\underline{b}} \in \mathbb{R}^n \text{ folosind metoda substituției ascendente} \\ U\underline{x} = y \text{ și determinăm } \boxed{\underline{x} = U^{-1}y} \in \mathbb{R}^n \text{ folosind metoda substituției descendente} \end{cases}$$

De ce nu rezolvăm cu MEGFP?

Dacă sistemul se rezolvă cu MEGFP sunt necesare $O(n^3)$ operații, în timp ce la folosirea factorizării sunt necesare doar $O(n^2)$ operații. Prin urmare, această metodă este mai eficientă.

$\boxed{\text{Teoremă}}$ Fie A inversabilă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $A_k = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}} \in M_k(\mathbb{R})$, $k=\overline{1,n}$ inversabile

ii) A admite MEGFP

iii) A admite factorizarea LU fără pivotare

Factorizările LDU și LDL^T

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, A admite factorizarea LU fără pivotare.
Atunci:

- $\exists!\ L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \left\langle \begin{array}{l} \text{inferior triunghiulară} \\ l_{ii} = 1,\quad i = \overline{1,n} \end{array} \right.$

- $\exists!\ D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- $\exists!\ U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \left\langle \begin{array}{l} \text{superior triunghiulară} \\ u_{ii} = 1,\quad i = \overline{1,n} \end{array} \right.$

astfel încât $A = LDU$.

Dacă, în plus, $A = A^T$, atunci $A = LDL^T$.