① 05.03.24

ElemTN_S2_312

De la curs: fie $p \in \mathbb{N}$ prim și $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N}^* : p^k \mid n\}.$$

$\boxed{\text{Prop}}$ Fie $p \in \mathbb{N}$ prim. Atunci:

(i) $\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad v_p(m+n) \geq \min\{v_p(m), v_p(n)\}$

Dem: scriem $m = p^{v_p(m)}\mu$, $n = p^{v_p(n)}\nu$,

cu $p \nmid \mu$, $p \nmid \nu$

Atunci $m+n = p^{v_p(m)}\mu + p^{v_p(n)}\nu$. (1)

Dacă $v_p(m) \leq v_p(n)$

$(1) = p^{v_p(m)}\left(\mu + p^{v_p(n)-v_p(m)}\nu\right)$ (2)

Deci $v_p(m+n) \geq v_p(m) = \min\{v_p(m), v_p(n)\}$

Dacă avem $v_p(m) < v_p(n)$,

în (2) $p \nmid$ paranteza

deci $v_p(m+n) = \min\{v_p(m), v_p(n)\}$.

Cazul $v_p(n) \leq v_p(m)$ se tratează analog.

Am obținut, deci, și:

(ii) $\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad v_p(m) \neq v_p(n) \Rightarrow v_p(m+n) = \min\{v_p(m), v_p(n)\}$

Analog se probează și:

(i') $\forall m,n \in \mathbb{N}^* \ (m > n \Rightarrow v_p(m-n) \geq \min\{v_p(m), v_p(n)\})$ (2)

(ii') $\forall m,n \in \mathbb{N}^* \ ((m > n \wedge v_p(m) \neq v_p(n)) \Rightarrow v_p(m-n) = \min\{v_p(m), v_p(n)\})$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ + RADU-GLĂVAN ANDREI

$$\prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(n)}$$

$\{p \in \mathbb{N}^* : p \text{ e prim}\}$

$$P_s = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq s}} p^{v_p(n)}$$

~~Atunci~~ $P_n = P_{n+1} = P_{n+2} = \ldots$ [pt că $\forall p \in \mathcal{P}$ $p > n \Rightarrow v_p(n) = 0$.]

deci $\displaystyle\prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(n)} = \lim_{s \to \infty} P_s = \lim_{s \to \infty} P_n$

$$= \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq n}} p^{v_p(n)}$$

Dacă noi ne considerăm desc. standard

$n = \prod_{q \text{ prim}} q^{k_q}$, în acest produs fiecare q e $\leq n$ și avem pt fiecare $p \le n$, p prim

$$\boxed{v_p(n) = v_p\Big(\prod_{\substack{q \text{ prim} \\ q \le n}} q^{\alpha_q}\Big) = \alpha_p}$$

Deci, în $\prod q^{\alpha_q}$ fiecare α_q e, de q prim fapt, $v_q(n)$.

Ca urmare, $n = \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \le n}} p^{v_p(n)} = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(n)}$

Ca urmare teorema fundamentală a aritmeticii admite o reformulare

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad n = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(n)}$

Fie $m = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(m)}$ și $n = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(n)}$.

Considerăm $d = \prod_p p^{\min\{v_p(m), v_p(n)\}}$.

Am $\min\{v_p(m), v_p(n)\} \le v_p(m), v_p(n)$,

avem $d \mid m$ și $d \mid n$.

Dacă $d' = \prod_p p^{v_p(d')}$ are calitatea $d' \mid m$ și

$d'|n$, atunci

$v_p(d') \le v_p(m)$ și $v_p(d') \le v_p(n)$ pt orice p

deci $v_p(d') \le \min\{v_p(m), v_p(n)\}$, pt orice p,

deci $v_p(d') \le v_p(d)$ pt orice p?

deci $d'|d$,

Morala:

$$\left(\prod_p p^{v_p(m)}, \prod_p p^{v_p(n)}\right) = \prod_p p^{\min\{v_p(m), v_p(n)\}}$$

Analog,

$$[m, n] = \prod_p p^{\max\{v_p(m), v_p(n)\}}$$

Obs: Din $\min\{u, v\} + \max\{u, v\} = u + v$,

$$(m, n)[m, n] = mn.$$

✓ 1. Determinați numerele prime a, b pentru care $ab+1$ și $ab-1$ sunt prime.

✓ 2. Determinați numerele n pentru care $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13$ și $n+15$ sunt prime.

✓ 3. Din 10 numere consecutive, cât de multe pot fi prime?

4. Orice progresie aritmetică neconstantă de numere naturale are o infinitate de termeni compuși.

5. $\frac{2^{4n+2}+1}{5} \in \mathbb{Z}$ și e compus pt orice $n \geq 2$

6. $\forall m,n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2 \Rightarrow m^4+4n^4$ e compus.

7. Dacă $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ e prim, atunci n e prim.

8. Dacă 2^n+1 e prim, $n=0$ sau $\exists k \in \mathbb{N}$ $n=2^k$

9. Dacă 2^n-1 e prim, atunci n e prim.

10. Care sunt numerele naturale care nu sunt sumă de două numere compuse?

---

6. $m^4+4n^4 = m^4+4n^4+4m^2n^2-4m^2n^2 =$

$$= (m^2-2mn+2n^2)(m^2+2mn+2n^2)$$

$$(m-n)^2+n^2 \geq 4 \qquad (m+n)^2+n^2 \geq 4$$

---

5. $$\frac{2^{4n+2}+1}{5} = \frac{4^{2n+1}+1}{5} = \frac{\cancel{(4+1)}(4^{2n}-4^{2n-1}+4^{2n-2}-\dots+4^2-4+1)}{\cancel{5}} \in \mathbb{Z}$$

$$1+\sum_{j=1}^{n}\left(4^{2j}-4^{2j-1}\right) = 1+3\sum_{j=1}^{n} 4^{2j-1}$$

2. Dacă restul împărțirii lui n la 5 e 0, $n+5 \,\vdots\, 5$ și $n+5 \geq 5$, deci $n+5$ nu e prim, ✗.

• 1 : $n+9 \,\vdots\, 5$ și $n+9 \geq 9$, deci $n+9$ nu e prim, ✗

• 2 : $n+13 \,\vdots\, 5$ și $n+13 \geq 13$ — $n+13$ — ✗

• 3 : $n+7 \,\vdots\, 5$ și $n+7 \geq 7$, deci $n+7$ nu e prim ✗.

• 4 : $n+1 \,\vdots\, 5$ și $n+1 \geq 5$. Dacă $n > 4$, $n+1$ nu e prim, ✗.

Rămâne $n=4$, pt care:

$n+1 = 5$, e prim

$n+3 = 7$, —

$n+7 = 11$, —

$n+9 = 13$, —

$n+13 = 17$, —

$n+15 = 19$, —

Deci singura valoare n care satisface cerința e $n=4$.

---

5. $(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) \,\vdots\, 5$.

și $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 \geq 25$.

9. Dacă $n = ab$ cu $a, b > 1$

$$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 =$$

$$= \underbrace{(2^a - 1)}_{\geq 3}\underbrace{(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^a + 1)}_{\text{mare rău}}.$$

---

8. Dacă $n = 2^k \cdot q$, q impar

Atunci $2^n + 1 = 2^{2^k \cdot q} + 1 =$

$$= \underbrace{(2^{2^k} + 1)}_{\geq 3}(2^{2^k(q-1)} - 2^{2^k(q-2)} + \dots - 2^{2^k} + 1)$$

Evident, $2^{2^k(j+1)} > 2^{2^k j}$,

deci $\sum (2^{2^k(j+1)} - 2^{2^k j}) \geq \sum$ chestii $> 0 > 0$.

---

7. $\underbrace{11\ldots1}_{n} = \frac{10^n - 1}{9} = c(n)$

Pp. $n = ab$ cu $a, b > 1$. ~~Atunci~~

$$c(n) = \frac{(10^a - 1)(10^{a(b-1)} + 10^{a(b-2)} + \dots + 10 + 1)}{9} \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$