Lucrare la teoria măsurii şi integrării [1]
anul II, sem. I
14.12.2020

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

par **Subiectul 1. a)** Considerăm mulţimile

$$A = [-1, 2] \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}; \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Decideţi dacă mulţimile A şi B sunt măsurabile Lebesgue şi, dacă este posibil, calculaţi $\lambda(A)$ şi $\lambda(B)$.

b) Pentru orice $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R})$ definim $\mu(A) = \int_A x^2 d\lambda(x)$. Demonstraţi că $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}), \mu)$ este un spaţiu cu măsură şi calculaţi $\mu((-5, 3])$.

Subiectul 2. Considerăm funcţia $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } \ x \in (1, 2] \cup \{0\} \\ n^2, & \text{dacă } \ x \in (\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}], \text{ pentru } \ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Decideţi dacă funcţia f este măsurabilă Lebesgue.

b) Decideţi dacă funcţia f este integrabilă Lebesgue.

Subiectul 3. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin(\sqrt{n^2x + 1})}{1 + nx^2} dx.$$

[1] **Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 1h si 30 min. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10. Se acordă 1 punct din oficiu. Lucrările scanate trebuie trimise in format PDF (un singur fişier care are ca primă pagină subiectul primit) la adresa elena.vladoiu@unibuc.ro. Succes!**

Morariu Medeea
Grupa 201

Subiectul 1.

a) $A = [-1,2] \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$A' = [-1,2] \cap \mathbb{Q} \Rightarrow A = [-1,2] \setminus A'$

$\left.\begin{array}{l} A' = [-1,2] \cap \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} \text{ - numărabilă} \end{array}\right\} \Rightarrow A' \text{ - numărabilă} \Rightarrow A' = \bigcup_{a \in A'} \{a\}$ - reuniune numărabilă de mulțimi măsurabile Lebesgue $\Rightarrow A'$ - măsurabilă Lebesgue

$\left.\begin{array}{l} A = [-1,2] \setminus A' \\ [-1,2] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow [-1,2] \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}) \\ A' \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow A$ - măsurabilă Lebesgue

$\lambda(A) = \lambda([-1,2]) - \lambda(A') = (2-(-1)) - 0 = 3$

$B = ([-1,1] \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}$

$[-1,1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow [-1,1] \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R})$

$\mathbb{Q}$ - mulțime numărabilă - se scrie ca reuniune numărabilă de mulțimi măs. Lebesgue $\Rightarrow \mathbb{Q}$ - măs. Lebesgue

$\Rightarrow [-1,1] \setminus \mathbb{Q}$ - măs Lebesgue $\Rightarrow ([-1,1] \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}$ măs Lebesgue

$\lambda(\mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow \lambda(B) = 0$

b) $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R})$, $\mu(A) = \int_A x^2 d\lambda(x)$.

$(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}), \mu)$ – sp. cu măsură

① $\mu(\phi) = \int_\phi x^2 d\lambda(x) = 0 \Rightarrow \mu(\phi) = 0$

② Fie $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R})$, $A_m \cap A_n = \phi$, $\forall\, m \neq n$

Vrem

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$$

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \int_{\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m} x^2 d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} x^2 d\lambda(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} x^2 d\lambda(x)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} x^2 d\lambda(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$$

Deci din ①, ② $\Rightarrow \mu$ – măsură pe $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}), \mu)$ – spațiu cu măsură

$$\mu((-5,3]) = \int_{(-5,3]} x^2 d\lambda(x)$$

$(-5,3] = [-5,3] \setminus \underbrace{\{-5\}}_{\text{mulțime finită}}$ $\rightarrow \int_{[-5,3]} x^2 d\lambda = \int_{(-5,3]} x^2 d\lambda$

$f: [-5,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ – continuă $\rightarrow$ integrabilă Riemann

$$\rightarrow \int_{(-5,3]} x^2 d\lambda(x) = \int_{[-5,3]} x^2 d\lambda(x) = \int_{-5}^{3} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-5}^{3} =$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{-125}{3} = \frac{152}{3}$$

$\Rightarrow \mu([-5,3]) = \frac{152}{3}$.

Subiectul 2.

$f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in(1,2]\cup\{0\} \\ n^2, & x\in\left(\frac{1}{(n+1)^2},\frac{1}{n^2}\right], \ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

a) Decideți dacă funcția f este măsurabilă Lebesgue

$f(x)=\begin{cases} 1, & x=0 \\ 1, & x\in\left(\frac{1}{4},1\right] \\ 4, & x\in\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right] \\ 9, & x\in\left(\frac{1}{16},\frac{1}{9}\right] \\ \text{---} & \\ e^x, & x\in(1,2] \end{cases}$

Pe $(1,2]$ $f(x)=e^x$ – continuă

Mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f este $\{0,1\}\cup\left\{\frac{1}{n^2} \mid n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2\right\}$ – mulțime numărabilă $\to$

$\Rightarrow$ f este continuă a.p.t. $\Rightarrow$ f este măsurabilă Lebesgue.

b) Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n:[0,2]\to\mathbb{R}$,

$f_n = 1\!\!1_{\{0\}} + e^x 1\!\!1_{(1,2]} + 1\cdot 1\!\!1_{\left(\frac{1}{4},1\right]} + 4\cdot 1\!\!1_{\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right]} + \dots + n^2\cdot 1\!\!1_{\left(\frac{1}{(n+1)^2},\frac{1}{n^2}\right]}$

$f_n \leq f_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\left(f_{n+1}-f_n = 1\!\!1_{\left(\frac{1}{(n+2)^2},\frac{1}{(n+1)^2}\right]}\right.$ și $1\!\!1_{\left(\frac{1}{(n+2)^2},\frac{1}{(n+1)^2}\right)}(x)\geq 0$, $\left.\forall x\in[0,2]\right) \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – crescător

~~f_n – f.d. etajată, pozitivă~~

$e^x\cdot 1\!\!1_{(1,2]}$ – f.d. continuă $\Rightarrow$ f_n este sumă dintre f.d. continuă și funcții etajate $\Rightarrow$ f_n sumă de f.d.

măsurabile, deci f_n măsurabilă $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ (punctual)

Așadar putem aplica T. Beppo Levi $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \int_{[0,2]} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,2]} f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda + \int_{(1,2]} f_n \, d\lambda\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{n} 1_{\left(\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2}\right]} \cdot k^2 + 1_{\{0\}}\right) + \left(\int_{(1,2]} e^x \, dx\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\mu\left(\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2}\right] \cdot k^2\right) + \underbrace{\mu(\{0\})}_{=0} \cdot 1\right) + \int_1^2 e^x \, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \cdot k^2\right) + e^x \Big|_1^2 =$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(k+1)^2}\right)}_{} + e^2 - e = \infty$$

$\rightarrow$ ~~convergentă~~ divergentă ($\sum \frac{1}{n}$ - diverg)

$\Rightarrow$ f nu e integrabilă Lebesgue

Subiectul 3

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin(\sqrt{n^2x+1})}{1+nx^2}\,dx = ?$$

Fie $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{n^2x+1})}{1+nx^2} \cdot \mathbb{1}_{[0,n]}$

$$\left.\begin{array}{l} -1 \le \sin(\sqrt{n^2x+1}) \le 1 \quad \forall x \in [0,\infty) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+nx^2} = 0, \quad \forall x \in [0,\infty),\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ a.p.t.}$$

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{1+nx^2} \le \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\text{continuă} \Rightarrow \text{integrabilă}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

T.C.D.

$$\Rightarrow \cancel{\lim_{n\to\infty}} \int_{[0,\infty)} 0\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_n\,dx \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_n\,dx = 0$$

f_n – continuă $\Rightarrow \exists$ integr. Riemann $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^n \frac{\sin(\sqrt{n^2x+1})}{1+nx^2}\,dx = \int_{[0,n]} \cancel{\sin(\sqrt{}} f_n\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin(\sqrt{n^2x+1})}{1+nx^2}\,dx = 0$$