Seminariile 10, 11, 12 (Planul şi dreapta în spaţiu)

1. Să se scrie ecuaţia planului care:
   a) trece prin $M_0\,(1,2,3)$ şi are normala $N = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$;
   b) trece prin origine şi are normala $N = -\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$;
   c) trece prin punctele $M_1\,(3,-1,0)\,,\ M_2\,(4,1,1)\,,\ M_3\,(2,0,1)\,;$
   d) taie axele de coordonate în punctele $M_1\,(3,0,0)\,,\ M_2\,(0,-3,0)\,,\ M_3\,(0,0,1)\,.$

2. Să se determine unghiul dintre planele: $P_1)\ x + y + z + 2 = 0$ şi $P_2)\ 2x - y + 3z + 5 = 0.$

3. Să se determine parametrii λ şi μ reali astfel încât planele $P_1)\ (\lambda + 2)\,x - y + z + 2\mu - 1 = 0$ şi $P_2)\ \lambda x + (4 - \mu)\,y - \mu z + \lambda + 2 = 0$ să fie perpendiculare, respectiv paralele.

4. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin punctul $M_0\,(7,-5,1)$ şi care taie pe axele de coordonate segmente pozitive şi egale între ele.

5. Să se determine distanţa de la $M_0\,(1,1,0)$ la planul $P)\ 2x+2y-z-1 = 0.$

6. Să se scrie ecuaţia unui plan care:
   i) trece prin $M_0\,(3,-1,2)$ şi este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{M_0M_1}$, unde $M_1\,(4,-2,-1)\,;$
   ii) trece prin $M_0\,(3,2,5)$ şi este paralel cu planul $P)\ 2x+y-3z+5 = 0;$
   iii) trece prin $M_0\,(2,1,3)$ şi este paralel cu vectorii $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{b} = 3\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$;
   iv) trece prin $M_0\,(1,-5,-3)$ şi este perpendicular pe planele $P_1)\ 3x - y + z + 1 = 0$ şi $P_2)\ x + y - z - 2 = 0;$
   v)trece prin $M_1\,(2,1,3)\,,\ M_2\,(2,2,2)$ şi este paralel cu vectorul $\overline{u} = 3\overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k}$
   vi) este paralel cu planul xOz şi trece prin punctul $M_0\,(2,-5,3)\,;$
   vii) trece prin punctele $M_1\,(0,0,1)$ şi $M_2\,(3,0,0)$ şi formează un unghi de 60° cu planul xOy;
   viii) este paralel cu axa Ox şi trece prin punctele $M_1\,(4,0,-2)$ şi $M_2\,(5,1,7)\,;$
   ix) trece prin Oz şi prin punctul $M_0\,(-3,1,-2)\,.$

7. Determinaţi mulţimea punctelor egal depărtate de $M_1\,(3,-1,3)$ şi $M_2\,(5,1,-1)\,.$

8. Se dau punctele $A(3,-1,3)$, $B(5,1,-1)$ şi vectorul $\overline{v}=-3\overline{i}+5\overline{j}-6\overline{k}$. Se cer:
i) ecuaţiile canonice şi parametrice ale dreptei $d)$ ce trece prin A şi are vectorul director $\overline{v}$;
ii) punctele de intersecţie ale dreptei $d)$ cu planele de coordonate;
iii) ecuaţiile canonice ale dreptei AB;
iv) distanţa de la A la B şi vectorul $\overrightarrow{AB}$;
v) măsura unghiului dintre dreptele AB şi $d)$.

9. Să se scrie ecuaţiile dreptei prin $A(2,-5,3)$ paralelă cu:
i) $d_1)$ $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$;
ii) axa Oz;
iii) $d_2)$ $\begin{cases} 2x-y+3z+1=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases}$.

10. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei $d)$ $\begin{cases} 3x-y+2z-6=0 \\ 3x+4y-z+3=0 \end{cases}$.

11. Se dau punctul $M(1,2,-1)$, dreapta $d)$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}$ şi planul $P)$ $x+y+z-1=0$. Să se determine:
i) ecuaţiile dreptei ce trece prin M şi este perpendiculară pe planul $P)$;
ii) ecuaţiile dreptei prin M, paralelă cu dreapta $d)$;
iii) ecuaţia planului ce trece prin M şi este perpendicular pe dreapta $d)$;
iv) distanţa de la M la planul $P)$;
v) distanţa de la M la dreapta $d)$;
vi) ecuaţia planului ce trece prin M şi conţine dreapta $d)$;
vii) unghiul dintre dreapta $d)$ şi planul $P)$;
viii) ecuaţia planului prin M, paralel cu planul $P)$;
ix) coordonatele proiecţiei punctului M pe dreapta $d)$;
x) coordonatele simetricului lui M faţă de dreapta $d)$;
xi) coordonatele proiecţiei punctului M pe planul $P)$;
xii) coordonatele simetricului lui M faţă de planul $P)$;
xiii) ecuaţiile proiecţiei dreptei $d)$ pe planul $P)$.

12. Să se afle coordonatele simetricelor punctului $M(1,2,-3)$ faţă de origine, axele de coordonate şi respectiv planele de coordonate.

13. Fie punctul $M(-1,2,1)$. Să se afle coordonatele simetricului lui M faţă

de punctul $M'(-1,-2,3)$, ecuaţia planului prin M paralel cu planul yOz, distanţa de la M la planul xOz şi ecuaţia planului prin M care conţine axa Ox.

14. Se consideră dreapta $d)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-7}{-1}$ şi planul $P)\ 2x-y+z-2=0$.
i) Să se arate că dreapta $d)$ este paralelă cu planul $P)$;
ii) Să se calculeze distanţa de la dreapta $d)$ la planul $P)$;
iii) Să se determine ecuaţiile proiecţiei dreptei $d)$ pe planul $P)$ şi ecuaţiile simetricei dreptei $d)$ faţă de planul $P)$.

15. Să se verifice că punctele $A(3,0,1)$, $B(0,2,4)$, $C\left(1,\frac{4}{3},3\right)$ sunt coliniare şi să se scrie ecuaţia dreptei suport.

16. Să se scrie ecuaţia planului determinat de dreptele paralele $d_1)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{2}$ şi $d_2)\ \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$.

17. Să se scrie ecuaţia planului ce trece prin $M_0(1,-1,3)$ şi este paralel cu dreptele: $d_1)\begin{cases} 5x+y-2z+12=0 \\ x-3=0 \end{cases}$ şi $d_2)\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-5y+3z-1=0 \end{cases}$.

18. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin dreapta de intersecţie a planelor: $P_1)\ 4x-y+3z-1=0$ şi $P_2)\ x+5y-z+2=0$ şi care:
i) trece prin origine;
ii) trece prin punctul $M(1,1,1)$;
iii) este paralel cu axa Oy;
iv) este perpendicular pe planul $P')\ 2x-y+5z-3=0$.

19. Să se afle perpendiculara comună a dreptelor (necoplanare): $d_1)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ şi $d_2)\ \frac{x+4}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2}$.

20. Să se scrie ecuaţia planului dus prin axa Ox şi paralel cu dreapta $d)$ $\begin{cases} x=az+p \\ y=bz+q \end{cases}$.

21. Se dă dreapta $d)\begin{cases} 3x-2y+z-3=0 \\ 4x-3y+2z+1=0 \end{cases}$ şi planul $P)\ x+2y+3z-1=0$. Să se determine ecuaţiile proiecţiei dreptei $d)$ pe planul $P)$.

22. Să se afle distanţa dintre planele: $P_1)\ 11x-2y-10z-22=0$ şi $P_2)\ 11x-2y-10z-45=0$.

23. Să se afle distanţa dintre dreptele $d_1)$: $M_1\left(-7,-4,3\right), \overline{v_1}=3\overline{i}+4\overline{j}-2\overline{k}$ şi $d_2)$: $M_2\left(21,-5,2\right), \overline{v_2}=6\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k}$.

24. Se consideră dreptele $d_1)$ $\frac{x-5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{-3}$, $d_2)$ $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+8}{1}$ şi $d_3)$ $x=y=z$. Să se scrie ecuaţia planului $P)$, care conţine dreapta $d_1)$ şi cu proprietatea că proiecţia dreptei $d_2)$ pe planul $P)$ este paralelă cu proiecţia dreptei $d_3)$ pe planul $P)$.

Probleme propuse

1. Stabiliţi care dintre perechile de plane sunt paralele:
   a) $P_1)\ 2x-3y-7=0$, $P_2)\ 2x-3y+5z+3=0$;
   b) $P_1)\ 4x+2y-4z+5=0$, $P_2)\ 2x+y-2z+1=0$;
   c) $P_1)\ x-3z+2=0$, $P_2)\ x-3z+5=0$.

   Soluţie: a) $P_1)$ şi $P_2)$ nu sunt paralele.

   b) $\overline{N}_1 = 2\overline{N}_2$, deci planele sunt paralele.

   c) Planele sunt paralele.

2. Se dau punctele $M_1\,(1,3,0)$, $M_2\,(3,-2,1)$, $M_3\,(\alpha,1,-3)$ şi $M_4\,(7,-2,3)$. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele date să fie coplanare. Să se scrie ecuaţia planului determinat de ele.

   Soluţie: $\alpha = -5$, $17x-34z-17=0$ sau $x-2z-1=0$.

3. Fiind date punctele $A\,(1,2,-3)$ şi $B\,(3,0,-1)$, să se determine:
   a) vectorul $\overrightarrow{AB}$, planul mediator al segmentului AB precum şi distanţele de la A şi B la acest plan;
   b) norma vectorului $\overline{v}$ perpendicular pe $\overrightarrow{AB}$ şi care îndeplineşte condiţia $\overline{v}\times\overrightarrow{AB} = 6\left(\overline{i}-\overline{k}\right)$.

   Rezolvare: a) $\overrightarrow{AB} = \overline{r}_B - \overline{r}_A = 2\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$; mijlocul segmentului AB fiind $C\,(2,1,-2)$, planul căutat are ecuaţia $x-y+z+1=0$; cele două distanţe sunt egale între ele şi au valoarea $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|/2 = \sqrt{3}$.

   b) Vectorul $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{AB}$ dacă $\overline{v}\cdot\overrightarrow{AB} = 2x-2y+2z=0$. Cea de-a doua condiţie implică $y+z=3$, $x-z=0$ şi $x+y=3$. Rezolvând sistemul obţinut avem $\overline{v} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ şi deci $\|\overline{v}\| = \sqrt{6}$.

4. Fiind date punctele $A\,(2,0,0)$, $B\,(0,1,0)$ şi $C\,(0,0,-1)$, să se găsească:
   a) ecuaţia planului $P)$ determinat de punctele A, B şi C, distanţa de la origine la acest plan şi proiecţia originii pe planul $P)$;

b) simetricul lui A faţă de axa Oy şi ecuaţiile medianei din B a triunghiului ABC;
c) volumul tetraedrului $OABC$.

Rezolvare: a) Folosind ecuaţia planului prin tăieturi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$, unde $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ şi $C(0,0,c)$, obţinem $P)$ $x+2y-2z-2=0$. Distanţa de la origine la planul obţinut se calculeaza după formula $dist(O,P)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{2}{3}$. Dreapta prin origine perpendiculară pe planul $P)$ are ecuaţiile $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{-2}$ şi intersectează planul în punctul $O'\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9},-\frac{4}{9}\right)$.

b) Simetricul lui A faţă de axa Oy este $A'(-2,0,0)$, mijlocul segmentului AC este $D(1,0,-1/2)$, iar mediana BD are ecuaţiile $x=1-y=-2z$.

c) Volumul căutat este $\mathcal{V}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\right|=\frac{1}{3}$.

5. Fiind date planele $P)x+y+z-3=0$ şi $Q)x+y+z-9=0$, să se găsească:
a) simetricul planului $P)$ faţă de origine;
b) planul $R)$ ce împarte distanţa între $P)$ şi $Q)$ în raportul $1/3$.

Rezolvare: a) Simetricul punctului $A(1,1,1)$ (ce aparţine planului $P)$) faţă de origine fiind $B(-1,-1,-1)$ ecuaţia planului căutat este $x+y+z+3=0$.

b) Punctul ce împarte segmentul AC, unde $C(3,3,3)$ aparţine planului $Q)$, în raportul $1/3$ fiind $D(3/2,3/2,3/2)$, planul $R)$ are ecuaţia $x+y+z-9/2=0$.

6. Fiind date punctul $A(1,2,3)$ şi dreapta $d)$ $\begin{cases} x-y-1=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$, să se determine:
a) paralela prin A la dreapta $d)$ şi planul determinat de cele două drepte paralele;
b) simetrica dreptei $d)$ faţă de planul xOy.

Rezolvare: a) Dreapta $d)$ va avea vectorul director $\overline{v}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}$, $\overline{N_1}$ şi $\overline{N_2}$ fiind normalele celor două plane, deci $\overline{v}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$. Astfel, paralela prin A la dreapta d) va avea ecuaţiile $x-1=y-2=z-3$. Din fascicolul de plane ce trece prin dreapta d), $\lambda(x-y-1)+\mu(y-z-2)=0$ alegem pe acela ce trece prin punctul A, adică $3x-5y+2z+1=0$.

b) Intersecţia dreptei d) cu planul xOy este punctul $B(3,2,0)$, iar simetricul punctului $C(1,0,-2)$ (aparţinând dreptei d)) faţă de planul xOy este $D(1,0,2)$. Dreapta căutată are ecuaţiile $x-1=y=2-z$.

7. Fiind date punctele $A(1,2,3)$ şi $B(3,1,2)$, se cere:
a) să se arate că triunghiul OAB este isoscel şi să se scrie ecuaţiile dreptei AB;
b) ecuaţia planului ce conţine triunghiul OAB şi ecuaţiile perpendicularei pe acest plan prin centrul de greutate al triunghiului;
c) ecuaţiile planelor prin A paralele cu planele de coordonate precum şi ecuaţiile paralelelor prin A cu axele de coordonate.

Rezolvare: a) $dist(O,A)=dist(O,B)=\sqrt{14}$, ecuaţiile dreptei AB sunt $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$.

b) Folosind ecuaţia planului prin trei puncte necoliniare obţinem $x+7y-5z=0$. Coordonatele centrului de greutate G fiind $(4/3,1,5/3)$, ecuaţiile perpendicularei cerute sunt $\frac{x-4/3}{1}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-5/3}{-5}$.

c) Ecuaţiile planelor sunt $x=1$ (paralel cu zOy), $y=2$ şi respectiv $z=3$. Paralelele la axe sunt $x=1$, $y=2$ (paralelă cu Oz), $y=2$, $z=3$ şi respectiv $z=3$, $x=1$.

8. Fiind date punctele $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$ şi $C(0,0,1)$, să se determine:
a) ecuaţiile dreptei d) ce trece prin C şi este paralelă cu AB, ecuaţia planului P) ce trece prin A şi este perpendicular pe dreapta d) şi simetricul punctului A faţă de această dreaptă;
b) aria triunghiului ABC, unghiul dreptelor AB şi AC, precum şi unghiul dintre OA şi planul triunghiului ABC.

Rezolvare: a) Întrucât $\overrightarrow{AB}=-\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$ rezultă că dreapta d) are ecuaţiile $-x=y=z-1$. Folosind ecuaţia planului printr-un punct şi de normală dată scriem ecuaţia planului P) sub forma $x-y-z-1=0$ şi găsim apoi intersecţia planului cu dreapta d) în punctul $D(2/3,-2/3,1/3)$. Coordonatele punctului E simetricul lui A faţă de D sunt $(1/3,-4/3,2/3)$.

b) Întrucât $\overrightarrow{AC} = -\overline{i}+\overline{k}$ şi $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \overline{i}+\overline{k}$ avem $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, de asemenea, $\cos\varphi = \sqrt{2/3}$, deci $\varphi = \arccos\sqrt{2/3}$; $\overrightarrow{OA} = \overline{i}$ şi normala la plan este $\overline{N} = \overline{i}+\overline{k}$. Prin urmare $\sin\omega = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $\omega = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. Se consideră planul $P)\ x+y+2z-14=0$ şi dreapta $d)\ x-1 = \frac{y-2}{2} = z-3$. Să se determine simetrica dreptei $d)$ faţă de planul $P)$ şi unghiul format de cele două drepte.

Rezolvare: Intersecţia dreptei $d)$ cu planul $P)$ dă punctul $A\,(2,4,4)$. Proiecţia punctului $B\,(1,2,3)$, aparţinând dreptei $d)$, pe planul $P)$ este punctul $C\,(11/6, 17/6, 14/3)$, iar simetricul lui B faţă de acest punct este $E\,(8/3, 11/3, 19/3)$. Ecuaţiile dreptei căutate, determinată de punctele A şi E sunt $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{7}$. Unghiul dreptei cu planul fiind dat de relaţia $\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{5}{6}$, unghiul cerut este $\alpha = 2\arcsin\frac{5}{6}$.

10. Fiind date dreptele $d_1)\ x-1 = 2-y = \frac{z+2}{2}$ şi $d_2)\ \begin{cases} 2x-z-1=0 \\ 2y+z+3=0 \end{cases}$, să se afle:
a) distanţa dintre cele două drepte şi planul determinat de ele, dacă există;
b) simetricul punctului $A\,(2,-1,2)$ faţă de dreapta $d_1)$, proiecţia dreptei $d_2)$ pe planul xOy şi unghiul acesteia cu axa Oy.

Rezolvare: a) Deoarece un vector director al dreptei $d_2)$ este $\overline{v_2} = 2\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k} = 2\overline{v_1}$, cele două drepte sunt paralele. Alegând punctul $B\,(0,-1,-1)$ pe $d_2)$ obţinem $dist\,(d_1,d_2) = \frac{5}{\sqrt{3}}$. ($\overrightarrow{CB} = -\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$). Din fascicolul de plane ce trece prin $d_2)$, adică $\lambda\,(2x-z-1)+\mu\,(2y+z+3)=0$, îl alegem pe acela care trece prin puctul $A\,(1,2,-2)$, adică $5x-3y-4z=0$.

b) Proiecţia punctului A pe dreapta $d_1)$, adică punctul $C\,(3,0,2)$, se află la intersecţia planului $P)\ x-y+2z-7=0$ (plan ce trece prin A şi este perpendicular pe $d_1)$) cu această dreaptă. Simetricul lui A faţă de C este $D\,(4,1,2)$. Intersecţia dreptei $d_2)$ cu planul xOy este punctul $E\,(1/2,-3/2,0)$, iar proiecţia lui B pe acelaşi plan este $F\,(0,-1,0)$.

Dreapta căutată are ecuaţiile $x+y+1=0,\ z=0$. Vectorul director al axei Oy fiind $\overline{j}\,(0,1,0)$, unghiul căutat este $\varphi = \arccos\left(-1/\sqrt{6}\right)$.

11. Fiind date punctele $A\,(1,2,3)$, $B\,(2,3,4)$, vectorii $\overline{a} = \overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i}-\overline{j}$ şi planul $P)\ y=0$, să se determine:
a) vectorul $\overrightarrow{AB}$, ecuaţiile paralelei prin origine la vectorul $\overline{b}$ şi planul mediator al segmentului AB.
b) vectorul $\overline{v}$ paralel cu planul $P)$ pentru care $\overline{v}\times\overline{b} = \overline{a}$.
c) simetricul punctului A faţă de planul $P)$, unghiul format de $\overrightarrow{AB}$ cu planul $P)$, planul $Q)$ ce trece prin A şi este paralel cu vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Rezolvare:a) $\overrightarrow{AB} = \overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, paralela prin origine la vectorul $\overline{b}$ are ecuaţiile $x=-y,\ z=0$, iar planul mediator al segmentului AB, adică planul trece prin punctul $C\,(3/2, 5/2, 7/2)$, mijlocul segmentului AB, are ecuaţia $x+y+z-15/2=0$.

b) Notând $\overline{v} = x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, din relaţia dată obţinem $z=1$ şi $x+y=1$. Din condiţia de paralelism cu planul $P)$, adică $\overline{v}\cdot\overline{N}=0$ rezultă $y=0$ şi deci $\overline{v} = \overline{i}+\overline{k}$.

c) Simetricul lui A faţă de planul $P)$ este punctul $D\,(1,-2,3)$, iar unghiul format de AB cu planul $P)$ este $\varphi = \arcsin 1/\sqrt{3}$. Planul $Q)$ are ecuaţia $x+y+2z-9=0$.

12. Fiind date dreapta $d)\ x = y-1 = z$, punctul $A(1,0,1)$ şi vectorul $\overline{a} = \overline{j}$, să se găsească:
a) planul care trece prin A, perpendicular pe dreapta $d)$ şi distanţa de la A la această dreaptă;
b) simetricul lui A faţă de axa Ox, vectorul $\overrightarrow{OA}$ şi vectorul $\overline{v}$ perpendicular pe axa Ox, care satisface relaţia $\overline{v}\times\overrightarrow{OA} = \overline{a}$.

Rezolvare:a) Planul căutat are ecuaţia $P)\ x+y+z-2=0$ şi intersectează dreapta $d)$ în punctul $B\,(1/3, 4/3, 1/3)$. Distanţa de la A la B, adică $2\sqrt{2}/\sqrt{3}$ este distanţa căutată.

b) Simetricul lui A faţă de Ox este punctul $C\,(1,0,-1)$, vectorul $\overrightarrow{OA} = \overline{i}+\overline{k}$, iar vectorul căutat $\overline{v} = 2\overline{k}$ (din $\overline{v}\times\overrightarrow{OA} = \overline{a}$ a rezultat $\overline{v} = x\overline{i}+(1+x)\,\overline{k}$).

13. Fiind date punctele $A\,(a,1,0)$, $B\,(b,0,2)$, $C\,(0,1,3)$ şi $D\,(1,1,4)$, să se

determine:
a) paralela prin A la Ox, planul prin B perpendicular pe $\overrightarrow{CD}$ şi unghiul vectorilor $\overrightarrow{CB}$ şi $\overrightarrow{CD}$.
b) valorile lui a şi b pentru ca vectorii $\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\}$ să formeze o bază, iar pentru $a \neq -3$ şi $b = 0$ să se determine volumul tetraedrului $ABCD$.

Rezolvare: a) Ecuaţiile paralelei prin A la Ox sunt $y - 1 = 0$, $z = 0$, vectorul $\overrightarrow{CD} = \bar{i} + \bar{k}$, iar planul prin B perpendicular pe $\overrightarrow{CD}$ are ecuaţia $x + z - b - 2 = 0$. Unghiul vectorilor $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{CB} = b\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$ este $\varphi = \arccos(b-1)/\sqrt{2(b^2+2)}$.

b) Vectorii $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{CA} = a\bar{i} - 3\bar{k}$ formează o bază dacă $a \neq -3$. Volumul tetraedrului este $\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})\right| = \frac{1}{6}|a+3|$.

14. Fiind date punctele $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ şi vectorii $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{b} = \bar{k}$, să se afle:
a) ecuaţia planului prin A paralel cu vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, simetrica dreptei AB faţă de Oz şi unghiul acesteia cu Ox;
b) versorul $\bar{v}$ perpendicular pe $\overrightarrow{AB}$ şi satisfăcând ecuaţia $\bar{v} \times \bar{a} = \bar{b}$.

Rezolvare: a) Planul căutat are ecuaţia $x - y - 1 = 0$, iar simetrica lui AB faţă de Oz, $x + y + 1 = 0$, $z = 0$ trece prin punctele $A'(-1,0,0)$ şi $B'(0,-1,0)$. Unghiul lui $\overrightarrow{AB} = -\bar{i} + \bar{j}$ cu Ox este $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

b) Întrucât $\bar{b} \cdot \bar{a} = 0$, sistemul $\bar{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\bar{v} \times \bar{a} = \bar{b}$ admite soluţia $\bar{i} + \bar{j}$, iar versorul acestuia este $\left(\bar{i} + \bar{j}\right)/\sqrt{2}$.

15. Fiind date punctul $A(1,2,3)$ şi vectorul $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, să se determine:
a) planul prin A paralel cu $\bar{v}$ şi axa Oz;
b) distanţa de la origine la dreapta ce trece prin A şi este paralelă cu $\bar{v}$.

Rezolvare: a) $x - y + 1 = 0$.

b) $\overrightarrow{OA} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, iar distanţa căutată este $\sqrt{2}$.

16. Fiind date punctele $A(1,2,3)$, $B(2,3,a)$ şi $C(3,4,b)$, să se determine:
a) ecuaţiile dreptei OA, condiţia de coplanaritate a dreptelor OA şi

CB, iar pentru $a = b = 0$ perpendiculara lor comună;
b) planul determinat de punctele O, A şi B pentru $a = 0$, aria triunghiului OAB şi versorul $\overline{u}$ perpendicular pe $\overrightarrow{OA}$ şi paralel cu xOy.

Rezolvare: a) Ecuaţiile dreptelor OA şi CB sunt $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ respectiv $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-a}{b-a}$, iar condiţia de coplanaritate a acestora este $b - 2a + 3 = 0$. Direcţia perpendicularei comune fiind $\overline{v} = \overline{v_1} \times \overline{v_2} = -3\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$, ecuaţiile acesteia sunt $11x+8y-9z = 0$ şi $x-y-6z+1 = 0$.

b) Planul determinat de cele trei puncte este $9x - 6y + z = 0$, iar aria triunghiului OAB este $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{118}$. Un vector $\overline{v}$ paralel cu Oy are forma $x\overline{i} + y\overline{j}$ care din condiţia de ortogonalitate cu $\overrightarrow{OA} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ se reduce la $-2\overline{i} + \overline{j}$. Problema admite două soluţii $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\overline{i} + \overline{j}\right)$ şi $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\overline{i} - \overline{j}\right)$.

17. Fiind date punctele $A(1,0,1)$, $B(0,2,0)$, $C(0,-1,3)$ şi vectorul $\overline{a} = \overline{j} - \overline{k}$, să se determine:
a) vectorul $\overline{b} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, planul prin A perpendicular pe $\overline{b}$ şi dreapta prin C paralelă cu $\overline{a}$;
b) proiecţia dreptei AB pe planul xOy, distanţa de la C la dreapta AB şi aria triunghiului ABC;
c) versorii $\overline{u}$ perpendiculari pe $\overline{a}$ şi locul geometric al punctelor D pentru care vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ şi $\overline{a}$ sunt coplanari.

Rezolvare: a) $\overrightarrow{AB} = -\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$, $\overrightarrow{AC} = -\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b} = 3\left(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}\right)$ iar planul căutat este $x + y + z - 2 = 0$. Dreapta prin C paralelă cu $\overline{a}$ are ecuaţiile $x = 0$, $y - z - 2 = 0$.

b) $A'(1,0,0)$ şi $B'(0,2,0)$ fiind două puncte ale dreptei căutate, ecuaţiile ei sunt $z = 0$, $2x + y - 2 = 0$. Distanţa de la C la AB este $\left\|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}\right\| / \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 3\sqrt{2}/2$.

c) Un vector $\overline{v}$ perpendicular pe $\overline{a}$ $(\overline{v} \cdot \overline{a} = 0)$ fiind de forma $x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$ versorii corespunzători sunt $\overline{u}_{1,2} = \left(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\right) / \pm\sqrt{x^2 + 2y^2}$. Din condiţia de coplanaritate a celor trei vectori (produsul mixt să fie nul) rezultă planul $P)$ $x + y + z - 2 = 0$.

18. Fiind date punctele $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$, $C(\alpha,0,\beta)$ şi $O(0,0,0)$ cu α, $\beta \in \mathbb{R}$, să se determine:

a) ecuaţiile dreptei d) ce trece prin A şi este paralelă cu BC, ecuaţiile planelor prin O paralele cu AB şi valorile lui α şi β pentru ca dreptele OA şi BC să fie coplanare;
b) simetrica dreptei BC faţă de punctul O, planul mediator al segmentului BC şi versorul normalei la acest plan;
c) simetricul lui C faţă de planul OAB şi un versor $\overline{v}$ paralel cu xOy şi perpendicular pe AB.

Rezolvare: a) $\overrightarrow{BC} = \alpha\overline{i} - \overline{j} + (\beta - 1)\,\overline{k}$, iar ecuaţiile dreptei d) sunt $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{\beta-1}$, $\overrightarrow{AB} = -\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ iar normala la planele căutate este $\overline{N} = (\lambda + \mu)\,\overline{i} + \lambda\overline{j} + \mu\overline{k}$ ($\overline{N} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$). Planele căutate au ecuaţia $(\lambda + \mu)\,x + \lambda y + \mu z = 0$. Din condiţia de coplanaritate a celor patru puncte rezultă $\beta = 0$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Simetricele lui B şi C faţă de origine fiind $B'\,(0, -1, -1)$ şi $C'\,(-\alpha, 0, -\beta)$, dreapta căutată are ecuaţiile $\frac{x}{-\alpha} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1-\beta}$; mijlocul segmentului BC fiind punctul $D\,(\alpha/2, 1/2, (\beta + 1)\,/2)$, ecuaţia planului mediator acesteia este $\alpha x - y + (\beta - 1)\,z - (\alpha^2 + \beta^2 - 2)\,/2 = 0$; versorul normalei la plan este $\overline{n} = \left(\alpha\overline{i} - \overline{j} + (\beta - 1)\,\overline{k}\right)/\sqrt{\alpha^2 + (\beta - 1)^2 + 1}$.

c) Planul determinat de punctele O, A şi B fiind P) $y - z = 0$, intersecţia sa cu perpendiculara prin C pe el d) $x - \alpha = 0$, $y + z - \beta = 0$ este punctul $C'\,(\alpha, \beta/2, \beta/2)$. Simetricul căutat are coordonatele $(\alpha, \beta, 0)$; din condiţia ca $\overline{v}$ paralel cu xOy avem $\overline{v} = \alpha\overline{i} + \beta\overline{j}$, iar din $\overline{v}$ perpendicular pe $\overrightarrow{AB}$ rezultă $\beta = -\alpha$. Prin urmare există doi versori cu proprietăţile cerute $\overline{v}_0 = \left(\overline{i} - \overline{j}\right)/\sqrt{2}$ şi $\overline{v}_0 = \left(-\overline{i} + \overline{j}\right)/\sqrt{2}$.

19. Fiind date dreptele d_1) $x = z = 0$ şi d_2) $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = z \end{cases}$, să se determine:
a) ecuaţiile perpendicularei comune d) şi distanţa dintre cele două drepte (lungimea perpendicularei comune);
b) ecuaţiile dreptei d_1) pe planele ce determină dreapta d_2) precum şi unghiul diedru al acestor plane;
c) unghiul dreptelor d_1) şi d_2) şi proiecţia lui d_2) pe planul yOz.

Rezolvare: a) Direcţiile dreptelor d_1) şi d_2) fiind date de $\overline{v}_1 = \overline{j}$ şi $\overline{v}_2 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \overline{j} + \overline{k}$ ($\overline{N}_1$ şi $\overline{N}_2$ fiind normalele planelor ce o determină) un vector director al perpendicularei comune este $\overline{v} = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \overline{i}$.

Perpendiculara comună o vom prezenta ca intersecţie de două plane. Astfel, din fascicolele de plane ce trec prin d_1) respectiv d_2) adică P_f) $\lambda x + \mu z = 0$ şi Q_f) $\lambda (x-1) + \mu (y-z) = 0$ alegem planele paralele cu $\overline{v}$ adică $z = 0$, $y - z = 0$ sau, mai simplu, $y = z = 0$.Întrucât dreapta d) intersectează cele două drepte în $O(0,0,0)$ şi $A(1,0,0)$, distanţa căutată este $OA = 1$.

b) Din fascicolul de plane P_f) $\lambda x + \mu z = 0$ alegem planele proiectante pe planele ce determină d_2). Acestea fiind $z = 0$ respectiv $x = 0$, dreptele căutate au ecuaţiile $z = 0$, $x - 1 = 0$ şi $x = 0$, $y - z = 0$. De asemenea, $\cos\varphi = \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 / \left(\left\| \overline{N}_1 \right\| \left\| \overline{N}_2 \right\| \right) = 0$ şi deci $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

c) $\cos\omega = 1/\sqrt{2}$ şi deci $\omega = \frac{\pi}{4}$. Folosind din nou fascicolul de plane ce trece prin d_2), obţinem $x = 0$, $y - z = 0$.

20. Fiind dată dreapta d) $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$, să se determine:
a) proiecţia dreptei d) pe planul xOy şi simetrica ei faţă de origine;
b) perpendiculara comună a dreptelor d) şi Ox, distanţa dintre aceste drepte şi planul prin d) şi origine.

Rezolvare: a) Din fascicolul de plane determinate de dreapta d) se alege acela perpendicular pe xOy astfel că ecuaţiile priecţiei sunt $z = 0$, $x + y - 1 = 0$. Simetricele punctelor $A(0,1,0)$ şi $B(1,0,-1)$ (aparţinând dreptei d)) faţă de origine fiind $A'(0,-1,0)$ şi $B'(-1,0,1)$, dreapta căutată are ecuaţiile $-x = y + 1 = z$.

b) Direcţia dreptei d) fiind dată de vectorul $\overline{v} = -\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, iar a axei Ox de versorul $\overline{i}$, perpendiculara lor comună va fi paralelă cu vectorul $\overline{w} = \overline{v} \times \overline{i} = \overline{j} - \overline{k}$. Perpendiculara comună va fi din nou prezentată ca intersecţie de două plane ce trec respectiv prin d) şi Ox şi sunt paralele cu $\overline{w}$, adică $y + z = 0$, $2x - 1 = 0$. Distanţa între cele două drepte este $CD = 1/\sqrt{2}$, unde $C(1/2,0,0)$ şi $D(1/2,1/2,-1/2)$ sunt punctele de intersecţie ale perpendicularei comune cu Ox şi respectiv d). Din fascicolul de plane ce trec prin d), adică $\lambda (x+z) + \mu (y - z - 1) = 0$ îl alegem pe $x + z = 0$ adică cel ce trece prin origine.

21. Fiind date dreptele d_1) $x = y - 1 = z$ şi d_2) $x - 2 = y = z - 3$, să se determine:
a) planul determinat de aceste drepte, dreapta d) aparţinând planului

astfel determinat, paralelă cu cele două drepte şi care împarte distanţa dintre d_1) şi d_2) în raportul $1/4$;
b) unghiurile dreptei d_1) cu axele şi planele de coordonate;
c) distanţa dintre dreptele d_1) şi d_2), simetrica lui d_1) faţă de d_2) şi locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două drepte.

Rezolvare: a) Ecuaţia planului determinat de cele două drepte este $4x-y-3z+1=0$. Alegând punctele $A\,(0,1,0) \in d_1)$ şi $B\,(2,0,3) \in d_2)$ dreapta căutată trece prin punctul $C\,(2/5, 4/5, 3/5)$, care împarte segmentul AB în raportul $1/4$. Dreapta căutată este $x - 2/5 = y - 4/5 = z - 3/5$ (problema mai admite o soluţie $x - 8/5 = y - 1/5 = z - 12/5$).

b) Unghiurile dreptei d_1) cu axele de coordonate $\alpha = \beta = \gamma = \arccos 1/\sqrt{3}$ şi unghiurile cu planele de coordonate $\alpha' = \beta' = \gamma' = \arcsin 1/\sqrt{3}$.

c) $dist\,(d_1, d_2) = \sqrt{26/3}$. Simetrica dreptei d_1) faţă de d_2) trece prin punctul $D\,(4, -1, 6)$, simetricul lui A faţă de B. Ecuaţiile ei vor fi deci $x - 4 = y + 1 = z - 6$. Locul geometric căutat este un plan P) ce trece prin $F\,(1, 1/2, 3/2)$ mijlocul segmentului AB. Normala planului, perpendiculară pe cele două drepte şi pe planul determinat de ele este $\overline{N} = 2\overline{i} - 7\overline{j} + 5\overline{k}$, iar ecuaţia acestuia $2x - 7y + 5z - 6 = 0$.

22. Fiind date punctele $A\,(3,4,0)$, $B\,(0,-3,4)$, $C\,(1,0,1)$ şi $O\,(0,0,0)$, se cer:
a) planul mediator segmentului AC şi distanţa de la C la dreapta AB;
b) să se arate că triunghiul AOB este isoscel şi să se scrie ecuaţiile bisectoarei din O a acestuia;
c) ecuaţia planului prin O paralel cu AB şi AC, perpendiculara prin O pe aceşti vectori şi proiecţia ei pe planul yOz.

Rezolvare: a) Mijlocul segmentului AC este $D\,(2, 2, 1/2)$, vectorul $\overrightarrow{AC} = -2\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k}$ şi deci planul căutat are ecuaţia $2x + 4y - z - 23/2 = 0$. Obţinem $d = \sqrt{458/21}$.

b) Întrucât $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 5$, bisectoarea unghiului AOB dată de ecuaţiile $\frac{x}{3} = y = \frac{z}{4}$ trece şi prin mijlocul $E\,(3/2, 1/2, 2)$ al lui AB;

c) Planul prin O paralel cu $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ are ecuaţia $9x - 5y - 2z = 0$, iar perpendiculara prin O pe acest plan este $\frac{x}{9} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{-2}$. Proiectând punctul $F\,(-9, 5, 2)$ (ce aparţine dreptei obţinute) pe planul yOz

şi scriind ecuaţia dreptei prin două puncte, obţinem $x = 0$, $2y - 5z = 0$.

23. Fiind date planele $P_1)$ $2x - 2y + 2z + 3 = 0$, $P_2)$ $2x + 2y + z - 6 = 0$ şi $P_3)$ $x - 5y + 2z + 2 = 0$, să se scrie ecuaţia planului ce trece prin dreapta de intersecţie a planelor $P_1)$ şi $P_2)$ şi este perpendicular pe planul $x = 0$.

    Rezolvare: Din ecuaţia fascicolului de plane $\lambda P_1 + \mu P_2 = 0$ alegem planul căutat $4y - z - 9 = 0$, plan perpendicular pe yOz.

24. Se cer ecuaţiile dreptelor ce aparţin planului $P)$ $2x - y - z - 1 = 0$ şi sunt perpendiculare pe dreapta $d)$ $\begin{cases} x = z - 1 \\ y + 2z = x \end{cases}$.

    Rezolvare: Dreptele căutate se găsesc la intersecţia planului $P)$ cu planele $Q)$ perpendiculare pe $d)$. Cum direcţia dreptei $d)$ este dată de vectorul $\overline{v} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, ecuaţiile acestor drepte vor fi $2x - y - z - 1 = 0$, $x - y + z - \lambda = 0$.

25. Să se determine ecuaţia planului $Q)$ perpendicular pe $P)$ $x - y + 2z - 5 = 0$ şi care îl intersectează pe acesta după o dreaptă aparţinând planului xOy. Să se scrie apoi sub formă parametrică ecuaţiile dreptei de intersecţie a celor două plane $P)$ şi $Q)$.

    Rezolvare: Planul $Q)$ îl alegem din fascicolul de plane $\lambda (x - y + 2z - 5) + \mu z = 0$ determinat de $P)$ şi xOy. Astfel, din condiţia de ortogonalitate $\overline{N}_P \cdot \overline{N}_Q = 0$ rezultă $Q)$ $x - y - z - 5 = 0$. Şi deci dreapta de intersecţie $x - y + 2z - 5 = 0$, $x - y - z - 5 = 0$ sau echivalent $x - y - z - 5 = 0$, $z = 0$. O reprezentare parametrică a acestei drepte este $x = t + 5$, $y = t$, $z = 0$.

26. Fiind date punctele $A\,(1, 0, 0)$, $B\,(0, 2, 0)$, $C\,(0, 0, -3)$ şi dreapta $d)$ $2x - 1 = 3y = z$, se cer:
    a) planul $P)$ determinat de cele trei puncte, cosinusurile directoare ale normalei sale şi distanţa de la origine la acest plan;
    b) unghiul axei Oz cu planul $P)$, simetricul lui $P)$ faţă de origine şi planul $Q)$ paralel cu $P)$ şi care împarte distanţa între origine şi acest plan în raportul $1/2$;
    c) ecuaţia planului $R)$ ce trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC şi este perpendicular pe $d)$ şi simetrica dreptei $d)$ faţă de origine.

Rezolvare: a) $P)\ x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z-1=0$; $\cos\alpha=\frac{6}{7}$, $\cos\beta=\frac{3}{7}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{7}$; $dist(O,P)=\frac{6}{7}$.

b) $\varphi=\arcsin\frac{6}{7}$; $x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z+1=0$; $Q)\ 6x+3y-2z+1=0$.

c) $G\,(1/3,2/3,-1)$, $\overline{v}=3\overline{i}+2\overline{j}+6\overline{k}$ şi $R)\ 9x+6y+18z+11=0$; $2x+1=3y=z$.

27. Se dau dreapta $d)\ x=y=z$ şi planul $P)\ x+2y+z-5=0$ şi se cer:
a) unghiul dreptei $d)$ cu planul $P)$, ecuaţia planului $Q)$ ce conţine $d)$ şi este perpendicular pe $P)$ şi simetrica dreptei $d)$ faţă de planul $P)$;
b) ecuaţiile planelor paralele cu $P)$ la distanţa de două unităţi de aceasta şi simetricul lui $P)$ faţă de origine;
c) planul$R)$ prin Ox şi paralel cu $d)$ şi simetrica dreptei $d)$ faţă de axa Oy.

Rezolvare: a) $\varphi=\arcsin\left(2\sqrt{2}/3\right)$; $Q)\ x-z=0$; $x-5/4=(y-5/4)\,/5=z-5/4$.

b) $x+2y+z-5\pm2\sqrt{6}=0$.

c) $R)\ y-z=0$; $x=-y=z$.

28. Fiind date punctele $A\,(1,2,3)$, $B\,(0,1,2)$ şi vectorul $\overline{a}=\overline{j}-\overline{k}$, se cer:
a) simetrica dreptei AB faţă de planul xOy, planul prin A şi Oz şi distanţa de la B la acest plan;
b) proiecţia dreptei AB pe planul yOz şi unghiul vectorilor $\overline{a}$ şi $\overrightarrow{AB}$;
c) versorul direcţiei AB şi soluţia sistemului de ecuaţii $\overline{v}\times\overline{a}=\overrightarrow{AB}$, $\overline{v}\cdot\overline{a}=1$.

Rezolvare: a) $x=y-1=-z-2$; $2x=y$; $d=1/\sqrt{5}$.

b) $x=0$, $y-z+1=0$; $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

c) $\overline{u}=-\left(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}\right)/\sqrt{3}$; $\overline{v}=\overline{j}-\overline{k}$.

29. Se dau punctele $A\,(1,0,0)$, $B\,(1,1,0)$, $C\,(1,1,1)$ şi se cer:
a) vectorul $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, aria triunghiului ABC şi ecuaţia planului ce conţine acest triunghi;
b) simetrica dreptei OB faţă de planul $P)$ şi unghiul dreptei OC cu acest plan.

Rezolvare: a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \bar{i}$; $A = 1/2$; $x = 1$.

b) $x + y - 2 = 0$, $z = 1$; $\varphi = \arcsin\left(1/\sqrt{3}\right)$.

30. Date fiind punctele $A(1,2,3)$, $B(0,1,2)$ şi dreapta $d)$ $x + y = 0$, $x - y - 1 = 0$, se cer:
a) paralela prin A la $d)$ şi planul prin $d)$ şi origine;
b) versorii direcţiei AB, unghiul lui AB cu axa Oy şi simetrica dreptei AB faţă de planul yOz;
c) vectorul $\overline{v}$ perpendicular pe Oz şi satisfăcând ecuaţia $\overline{v} \times \overrightarrow{AB} = \overline{j} - \overline{k}$ (rezolvare vectorială).

Rezolvare: a) $1 - x = y - 2 = z - 3$; $x + y = 0$.

b) $\overline{u} = \pm\left(\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}\right)/\sqrt{3}$, $\varphi = \arccos\left(-1/\sqrt{3}\right)$, $-x-1 = y-1 = z-2$.

c) $\overline{v} = \overline{i}$.

31. Fiind date planul $P)$ $x + 6y - z - 2 = 0$ şi dreapta $d)$ $x - y - 3z + 2 = 0$, $2x - y + 2z - 3 = 0$, se cer:
a) paralela prin origine la dreapta $d)$ şi planul prin origine paralel cu $P)$;
b) unghiul dintre dreaptă şi plan şi proiecţia ortogonală a dreptei pe plan.

Rezolvare: a) $\overline{v} = -5\overline{i} - 8\overline{j} + \overline{k}$, $\frac{x}{5} = \frac{y}{8} = \frac{z}{-1}$, $x + 6y - z = 0$.

b) $\varphi = \arcsin\left(3/\sqrt{95}\right)$ şi $d')$ $x + 6y - z - 2 = 0$, $x - 2y - 11z + 9 = 0$ (cel de-al doilea plan trece prin $d)$ şi este perpendicular pe $P)$).

32. Să se determine unghiul dreptei $d)$ $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ cu planul $P)$ $x + y + 2z - 14 = 0$ şi simetrica acesteia faţă de plan.

Rezolvare: $\varphi = \arcsin 5/6$; dreapta căutată trece prin punctul $A(2,4,4)$ (de intersecţie dintre dreaptă şi plan) şi $C(8/3, 11/3/19/3)$ simetricul lui $B(1,2,3) \in d)$ faţă de planul $P)$. Ecuaţiile ei vor fi $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{7}$.

33. Fiind date punctele $A(1,-2,1)$, $B(2,1,-1)$ şi $C(3,2,-6)$, să se determine: produsul vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, aria triunghiului ABC şi perpendiculara pe planul triunghiului prin centrul său de greutate.

Rezolvare: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -13\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$, $A = \sqrt{182}/2$, $G\,(2, 1/3, -2)$, $\frac{x-2}{13} = \frac{3y-1}{-9} = \frac{z+2}{2}$.

34. Fiind date punctul $A\,(0,1,2)$, vectorul $\overline{a} = \overline{i} - \overline{k}$ şi dreapta $d)$ $x+y-3 = 0$, $y = 1$, se cer:
a) direcţia dreptei $d)$, unghiul acesteia cu axa Oy şi simetricul lui A faţă de dreapta $d)$;
b) planul prin $d)$ paralel cu $\overline{a}$, vectorul $\overrightarrow{OA}$ şi ecuaţiile proiecţiei dreptei OA pe planul xOz.

Rezolvare: a) $\overline{v} = -\overline{i} + \overline{k}$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Planul prin A perpendicular pe $d)$ o intersectează pe aceasta în punctul $B\,(1/2, 1, 5/2)$, iar simetricul căutat este punctul $C\,(1,1,3)$.

b) Din fascicolul de plane ce trece prin $d)$ reţinem pe acela paralel cu $\overline{a}$, adică $x + y + z - 4 = 0$, $\overrightarrow{OA} = \overline{j} + 2\overline{k}$. Proiecţia lui A pe xOz fiind $D\,(0,0,2)$ dreapta căutată este axa Oz de ecuaţii $x = y = 0$.

35. Se dau dreapta $d)$ $x - y - 1 = 0$, $2x - z - 2 = 0$ şi punctul $M\,(1,0,1)$ şi se cer:
a) planul $P)$ ce trece prin M şi este perpendicular pe $d)$ şi distanţele de la M la dreapta $d)$ şi la planul yOz;
b) simetricul punctului M faţă de dreapta $d)$ şi ecuaţiile paralelei prin M la axa Ox.

Rezolvare: a) Direcţia lui $d)$ fiind dată de vectorul $\overline{v} = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$, planul $P)$ are ecuaţia $x + y + 2z - 3 = 0$; $dist\,(M,d) = 1/\sqrt{3}$, $dist\,(M, yOz) = 1$.

b) $M'\,(5/3, 2/3, 1/3)$, $y = z - 1 = 0$.

36. Fiind date punctele $A\,(1,0,1)$, $B\,(-1,2,1)$, $C\,(1,1,1)$ şi planul $P)$ $x + y + z - 6 = 0$, se cer:
a) planul $Q)$ ce trece prin A şi este paralel cu planul $P)$, dreapta AC şi unghiul acesteia cu planul $P)$;
b) coordonatele simetricului lui C faţă de planul $P)$, aria triunghiului ABC şi distanţa de la A la $P)$.

Rezolvare: a) $Q)$ $x+y+z-2 = 0$; $x-1 = z-1 = 0$; $\varphi = \arcsin 1/\sqrt{3}$.

b) Proiecţia lui C pe planul $P)$ este $D(2,2,2)$ iar simetricul său faţă de plan este $E(3,3,3)$; $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = 1$, $dist(A,P) = 4/\sqrt{3}$.

37. Să se determine parametrul α astfel ca dreptele $d_1)$ $\frac{x}{2} = y = z$ şi $d_2)$ $x-1 = y-2 = z/\alpha$ să fie concurente. Pentru α obţinut să se scrie ecuaţia planului determinat de cele două drepte.

Rezolvare: Sistemul format cu ecuaţiile celor două drepte este compatibil dacă $\alpha = 1/3$. În acest caz ecuaţia planului căutat este $2x - y - 3z = 0$.

38. Se dau dreptele $d_1)$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$ şi $d_2)$ $x+2z-1 = 0$, $y+2z+1 = 0$. Se cere să se arate că sunt concurente, să se scrie ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor şi să se scrie ecuaţia planului determinat de acestea.

Rezolvare: $M_1(1,-1,0) \in d_1) \cap d_2)$; vectorii directori ai bisectoarelor sunt $\overline{u}_1 = \overline{v}_1/\left\|\overline{v}_1\right\| + \overline{v}_2/\left\|\overline{v}_2\right\| = -\overline{j}/3 - \overline{k}/3$ şi $\overline{u}_2 = \overline{v}_1/\left\|\overline{v}_1\right\| - \overline{v}_2/\left\|\overline{v}_2\right\| = 4\overline{i}/3 + \overline{j} - \overline{k}$, iar ecuaţiile acestora $x-1 = 0$, $y-z+1 = 0$, respectiv $(x-1)/4 = (y+1)/3 = (1-z)/3$. Planul lor are ecuaţia $3x - 2y + 2z - 5 = 0$.

39. Arătaţi că dreptele $d_1)$ $x-1 = 2-y = (z+1)/3$ şi $d_2)$ $x+y-1 = 0$, $3y+z-3 = 0$ sunt coplanare şi scrieţi ecuaţia planului determinat de ele.

Rezolvare: $\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = \overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $x - 2y - z + 2 = 0$.

40. Fiind date punctele $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$ şi $C(0,0,1)$, se cer:
a) ecuaţiile dreptei $d)$ ce trece prin C şi este paralelă cu AB, ecuaţia planului $P)$ ce trece prin A şi este perpendicular pe dreapta $d)$ şi simetricul punctului A faţă de dreapta $d)$;
b) aria triunghiului ABC, unghiul dreptelor AB şi AC precum şi unghiul dintre OA (O fiind originea sistemului de coordonate) şi planul triunghiului ABC.

Rezolvare: a) $\overrightarrow{AB} = -\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $d)$ $-x = y = z-1$; $P)$ $x - y - z - 1 = 0$, $d) \cap P) = D(2/3, -2/3, 1/3)$. Simetricul lui A faţă de $d)$ este $E(1/3, -4/3, 2/3)$.
b) $\mathcal{A} = 1/\sqrt{2}$, $\varphi = \arccos\sqrt{2/3}$, $\omega = \arcsin 1/\sqrt{3}$.

41. Arătaţi că dreptele d_1) $x-1=y=z$ şi d_2) $x-z-3=0$, $y=0$ sunt necoplanare şi determinaţi ecuaţia perpendicularei lor comune.

Rezolvare: $\overline{v}_1=(1,1,1)$, $\overline{v}_2=(1,0,1)$ şi deci dreptele nu sunt paralele. În plus, $\left(\overrightarrow{M_1M_2},\overline{v}_1,\overline{v}_2\right)=2\neq 0$, unde $M_1(1,0,0)\in d_1$) şi $M_2(3,0,0)\in d_2$). Perpendiculara comună are ecuaţiile $y=0$, $x+z-1=0$.

42. Determinaţi punctul de intersecţie dintre dreapta d) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{-3}$ şi planul P) ce trece prin mijlocul segmentului AB cu $A(1,2,3)$ şi $B(-1,4,1)$ şi este perpendicular pe d).

Rezolvare: Mijlocul segmentului AB este $M(0,3,2)$ iar planul P) are ecuaţia $2x-4y-3z+18=0$. Intersecţia lui P) cu d) este punctul $N(-19/29,67/29,72/29)$.

43. Se dau planul P) $x-y+z-3=0$ şi punctul $A(1,1,0)$ şi se cer:
a) planul ce trece prin A şi este paralel cu P) şi coordonatele simetricului lui A faţă de P);
b) fascicolul de plane ce trece prin A şi este perpendicular pe planul P).

Rezolvare: a) $x-y+z=0$, $A'(3,-1,2)$.

b) Axa fascicolului $x-z-1=0$, $x+z-1=0$ trece prin A şi este perpendiculară pe P), iar ecuaţia fascicolului este $\lambda(x-z-1)+\mu(y+z-1)=0$.

44. Se consideră punctul $A(1,1,1)$, dreapta d) $x=y-3=z$ şi planul P) $5x-3y+2z+4=0$ şi se cer ecuaţiile dreptei d') ce trece prin punctul A' simetricul lui A faţă de d) şi este perpendiculară pe planul P).

Rezolvare: $A'(-1,5,-1)$ şi $(x+1)/5=(5-y)/3=(z+1)/2$.

45. Fiind date punctul $A(1,0,-1)$ şi dreapta d) $x-z-1=0$, $y+z-1=0$, se cer:
a) ecuaţiile perpendicularei din A pe d);
b) distanţa de la punctul A la dreapta d).

Rezolvare: a) Dreapta căutată se scrie ca intersecţie de două plane:

unul determinat de punctul A şi dreapta d), iar celălalt trece prin A şi este perpendicular pe d), adică $2x+y-z-3=0$ şi $x-y+z=0$.

b) $dist\,(A,d)=\sqrt{2}$.

46. Fiind date dreptele d_1) $2x+y-1=0$, $x-z-1=0$ şi d_2) $x+z-1=0$, $2x-y-1=0$, se cer:
a) ecuaţiile dreptei d) care se sprijină pe d_1) şi d_2) şi este paralelă cu planul xOz;
b) să se arate că intersecţia dreptei variabile d) cu planul xOy este o parabolă, iar proiecţiile ortogonale ale lui d_1) şi d_2) pe acelaşi plan xOy trec prin vârful parabolei.

Rezolvare: a) Punctele $M_1\,(\lambda,1-2\lambda,\lambda-1)\in d_1$) şi $M_2\,(\mu,2\mu-1,1-\mu)\in d_2$) determină o dreaptă d) variabilă care este paralelă cu xOz dacă $\mu=1-\lambda$. Prin urmare, d) are ecuaţiile $(x-\lambda)\,/\,(1-2\lambda)=z-\lambda+1$ şi $y+2\lambda-1=0$.

b) $z=0$, $y^2=2x-1$ cu vârful $V\,(1/2,0,0)$. Se arată că punctul V aparţine proiecţiilor pe xOy ale lui d_1) şi d_2).

47. Arătaţi că familia de plane P_λ) $x/\lambda+y/\sqrt{a^2-\lambda^2}+z-b=0$, cu $\lambda\in\mathbb{R}$ determină pe axele de coordonate segmente având suma pătratelor lungimilor constantă.

Rezolvare: Punctele de intersecţie fiind $A\,(\lambda b,0,0)$, $B\left(0,b\sqrt{a^2-\lambda^2},0\right)$, $C\,(0,0,b)$ avem $OA^2+OB^2+OC^2=b^2\,(a^2+1)$.

48. Pentru ce valori ale lui α, β şi γ reali, dreapta d_1) $x/\alpha=y=z/\beta$ se sprijină pe d_2) $(x-1)\,/\gamma=(y-2)\,/2=(z-3)\,/3$.

Rezolvare: Obţinem a) $\gamma=1$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ şi b) $\beta=3/2$; $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$. În primul caz ambele drepte trec prin origine.

49. Determinaţi α, $\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât planele P_1) $2x-y+3z-1=0$ şi P_2) $x+2y-z+\beta=0$ şi P_3) $x+\alpha y-\beta z+10=0$ să îndeplinească condiţiile:
a) să aibă un singur punct comun;
b) să treacă printr-o dreaptă dată;
c) să se intersecteze după trei drepte paralele distincte.

Rezolvare: a) Sistemul format de ecuaţiile celor trei plane este compatibil determinat dacă $\beta - \alpha + 1 \neq 0$. b) $\alpha = \sqrt{106}/2$, $\beta = \left(-2 + \sqrt{106}\right)/2$ şi $\alpha = -\sqrt{106}/2$, $\beta = \left(-2 - \sqrt{106}\right)/2$. c) $\alpha = \beta + 1$ şi $\beta \neq \left(-2 \pm \sqrt{106}\right)/2$.

50. Să se scrie ecuaţia planului paralel cu planul $P)$ $x + y + 2z = 0$ şi care trece prin punctul de intersecţie al planelor $2x + y - z - 2 = 0$, $x - 3y + z + 1 = 0$ şi $x + y + z - 3 = 0$.

Rezolvare: Folosind ecuaţia snopului de plane ce trec prin punctul de intersecţie al planelor date, adică $\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 = 0$, se obţine planul $x + y + 2z - 4 = 0$.