

PCMMP: Sistemul augmentat

Considerăm sistemul supradimensionat de ec. liniare (*). Determinați soluția sistemului în sensul celor mai mici pătrate folosind sist. augmentat și MEGRP.

$$(*) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sol În acest caz, $m=3$ și $n=2$

Sist. augmentat asociat este dat de:

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ A^T & O_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ o_m \end{bmatrix}$$

$\eta \in \mathbb{R}^m$ - vectorul eroare reziduală

$$\begin{bmatrix} I_3 & A \\ A^T & O_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ o_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_c \quad (1)$$

Matricea extinsă a sistemului augmentat (1) este dată de

$$\bar{B} = [B | c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} E_4 &\leftarrow E_4 - E_1 \\ E_5 &\leftarrow E_5 - E_1 \end{aligned}$$

$$\bar{B}^{(1)} = [\bar{B}^{(1)} | c^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{E_5 \leftarrow E_5 - E_2}_{\bar{B}^{(2)} = [\bar{B}^{(2)} | c^{(2)}]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{E_5 \leftarrow E_5 - E_1}_{\bar{B}^{(3)} = [\bar{B}^{(3)} | c^{(3)}]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Am obținut următorul sistem echivalent:

$$\begin{cases} \eta_1 + x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow \eta_1 = 0 \\ \eta_2 + x_2 = 1 \Rightarrow \eta_2 = 0 \\ \eta_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 = -2 \Rightarrow x_1 = 1 \\ -x_2 = -1 \end{cases}$$