FMI, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2021/2022
Logică matematică

Exerciţii de seminar

1 Teoria mulţimilor

1. Să se dea exemple de x şi y, astfel încât să se întâmple, pe rând:
   (a) $x \in y$ şi $x \subseteq y$;
   (b) $x \in y$ şi $x \not\subseteq y$;
   (c) $x \notin y$ şi $x \subseteq y$;
   (d) $x \notin y$ şi $x \not\subseteq y$.

   Soluţie:
   (a) Luăm $x = \emptyset$, $y = \{\emptyset\}$.
   (b) Luăm $x = \{\emptyset\}$, $y = \{\{\emptyset\}\}$.
   (c) Luăm $x = \emptyset$, $y = \emptyset$.
   (d) Luăm $x = \{\emptyset\}$, $y = \emptyset$.

   $\square$

2. Reamintim din curs că, pentru orice F şi z,
$$z \in \bigcup F \Leftrightarrow \text{există } x \text{ cu } x \in F \text{ şi } z \in x$$
   şi că, pentru orice F nevidă,
$$\bigcap F = \left\{ z \in \bigcup F \mid \text{pentru orice } x \text{ cu } x \in F, \text{ avem } z \in x \right\}.$$
   Arătaţi că definiţia de mai sus pentru intersecţii arbitrare este corectă. Mai exact, arătaţi că pentru orice F nevidă, avem că pentru orice z,
$$z \in \bigcap F \Leftrightarrow \text{pentru orice } x \text{ cu } x \in F, \text{ avem } z \in x.$$
   Unde se foloseşte în demonstraţie faptul că F este nevidă?

   Soluţie: Fie F şi z ca în enunţ.
   „$\Rightarrow$" Evident.
   „$\Leftarrow$" Presupunem că z este astfel încât pentru orice x cu $x \in F$, avem $z \in x$ şi vrem să arătăm că $z \in \bigcap F$.
   Rămâne de arătat doar că $z \in \bigcup F$. Fiindcă F este nevidă, există $x \in F$. Avem deci $z \in x$. De aici deducem $z \in \bigcup F$. $\square$

3. Definim, pentru orice x, y, $\langle x, y \rangle := \{x, \{y\}\}$. Arătaţi că aceasta nu este o definiţie adecvată a perechii ordonate.

Soluţie: Vrem să găsim exemple de x, y, u, v astfel încât $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$, dar nu este adevărat că $x = u$ şi $y = v$, adică $x \neq u$ sau $y \neq v$.

Ideea este următoarea. Ne uităm la egalitatea $\{x, \{y\}\} = \{u, \{v\}\}$ şi căutăm să o satisfacem „invers", adică via $x = \{v\}$ şi $u = \{y\}$. Prin urmare, u şi x sunt atunci determinate de y şi v, şi deci este suficient să găsim y şi v cu $y \neq v$. Dar noi ştim două mulţimi diferite, de pildă $\emptyset$ şi $\{\emptyset\}$.

Raţionăm acum riguros. Alegem $x := \{\{\emptyset\}\}$, $y := \emptyset$, $u := \{\emptyset\}$, $v := \{\emptyset\}$. Se observă că $y \neq v$ (şi, mai mult, deşi nu mai este nevoie, $x \neq u$). Atunci

$$\langle x, y \rangle = \{x, \{y\}\} = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\},$$

iar

$$\langle u, v \rangle = \{u, \{v\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\},$$

deci $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$. □

4. Arătaţi (folosind doar primele cinci axiome ZFC din curs) că nu există mulţimea tuturor mulţimilor singleton.

Soluţie: Presupunem că ar exista şi o notăm cu S.

Notăm $V := \bigcup S$. Atunci, pentru orice x, avem $x \in \{x\}$ şi $\{x\} \in S$, deci $x \in \bigcup S = V$. Ca urmare, V este mulţimea tuturor mulţimilor. Contradicţie! □

5. Fie R o relaţie binară. Să se arate că:

   (a) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
   - există A şi B astfel încât R este grafic între A şi B;
   - pentru orice x, y, z cu (x, y), $(x, z) \in R$, avem $y = z$.

   (b) Dacă A, B, C, D sunt astfel încât R este grafic atât între A şi B, cât şi între C şi D, atunci $A = C$.

Soluţie:

(a) „$\Rightarrow$" Evident.
„$\Leftarrow$" Cum R este relaţie binară, există C, B astfel încât R este relaţie între C şi B. Notăm:

$$A := \{a \in C \mid \text{există } b \in B \text{ cu } (a, b) \in R\}.$$

Fie $p \in R$. Atunci există $a \in C$ şi $b \in B$ cu $(a, b) = p \in R$. Deci $a \in A$ şi deci $p \in A \times B$. Prin urmare, $R \subseteq A \times B$, deci R este relaţie între A şi B.
Demonstrăm acum că R este chiar grafic între A şi B. Fie acum $a \in A$. Atunci, din definiţia lui A, există $b \in B$ cu $(a, b) \in R$. Mai trebuie să arătăm că este unic. Dacă avem $z \in B$ cu $(a, z) \in R$, atunci, folosind condiţia din ipoteză, $b = z$.

(b) Fie $a \in A$. Cum R este grafic între A şi B, există $b \in B$ cu $(a, b) \in R$. Cum $R \subseteq C \times D$, există $c \in C$ şi $d \in D$ cu $(a, b) = (c, d)$. Rezultă $a = c \in C$. Am demonstrat că $A \subseteq C$.
Analog se arată $C \subseteq A$, deci avem $A = C$.

□

6. Fie A o mulţime. Să se arate că:

   (a) Dacă $\leq$ este o relaţie de ordine parţială pe A şi dacă definim $< \subseteq A \times A$ ca fiind mulţimea tuturor perechilor (a, b) cu proprietatea că $a \leq b$ şi $a \neq b$, atunci $<$ este o relaţie de ordine strictă pe A.

(b) Dacă $<$ este o relaţie de ordine strictă pe A şi dacă definim $\leq \subseteq A \times A$ ca fiind mulţimea tuturor perechilor (a, b) cu proprietatea că $a < b$ sau $a = b$, atunci $\leq$ este o relaţie de ordine parţială pe A.

Soluţie: Fie x, y, $z \in A$.

(a) Dacă avem $x < x$, atunci $x \neq x$, o contradicţie. Deci $<$ este ireflexivă.

Presupunem $x < y$ şi $y < z$. Atunci $x \leq z$. Dacă am avea $x = z$, atunci am avea $x \leq y \leq x$, deci $x = y$, contradicţie. Deci $x < z$. Am arătat că $<$ este tranzitivă.

Prin urmare, $<$ este o relaţie de ordine strictă.

(b) Cum $x = x$, avem $x \leq x$. Deci $\leq$ este reflexivă.

Presupunem prin absurd că $x \leq y$ şi $y \leq x$, dar $x \neq y$. Atunci $x < y$ şi $y < x$, contradicţie cu faptul că $<$ este asimetrică. Deci $\leq$ este antisimetrică.

Presupunem $x \leq y$ şi $y \leq z$. Dacă $x = y$, atunci clar $x \leq z$. Analog pentru $y = z$. Rămâne cazul când $x < y$ şi $y < z$, iar atunci $x < z$, deci $x \leq z$. Am arătat că $\leq$ este tranzitivă.

Prin urmare, $\leq$ este o relaţie de ordine parţială.

$\square$

7. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că:

(a) Ori $n = 0$, ori există $m \in \mathbb{N}$ cu $n = m^+$.

(b) Pentru orice $m \in n$, $m \in \mathbb{N}$.

(c) Avem $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

Soluţie:

(a) Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n = 0$, enunţul este trivial.

Fie n. Vrem acum să arătăm că dacă există $m \in \mathbb{N}$ cu $n = m^+$, atunci există $p \in \mathbb{N}$ cu $n^+ = p^+$. E suficient să luăm $p := n$.

(Deşi inducţia este trivială, am scris acest enunţ în mod explicit, fiindcă va fi folosit în exerciţiul următor.)

(b) Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n = 0$, enunţul este trivial.

Presupunem adevărat că pentru orice $m \in n$, $m \in \mathbb{N}$ şi arătăm că pentru orice $m \in n^+$, $m \in \mathbb{N}$. Fie $m \in n^+ = n \cup \{n\}$. Atunci $m \in n$, deci $m \in \mathbb{N}$ din ipoteza de inducţie, sau $m = n \in \mathbb{N}$.

(c) Incluziunea „$\supseteq$" este imediată. Pentru incluziunea „$\subseteq$", luăm $m \in n$, iar din punctul anterior ştim că $m \in \mathbb{N}$. Cum $m < n$ este doar o reformulare a lui $m \in n$, rezultă că m aparţine mulţimii din dreapta.

$\square$

8. Fie $A \subseteq \mathbb{N}$ nevidă ce admite majorant. Arătaţi că A admite maxim.

Soluţie: Fie $B := \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ majorant pentru } A\}$. Cum $B \neq \emptyset$, există minimul lui B (deci supremumul lui A), pe care îl notăm cu n. E suficient să arătăm că $n \in A$.

Presupunem că $n \notin A$. Atunci pentru orice $l \in A$, $l < n$. Cum $A \neq \emptyset$, rezultă $n \neq 0$, deci (din primul punct al exerciţiului anterior) există $m \in \mathbb{N}$ cu $n = m^+$, şi deci $m < n$. Avem că pentru orice $l \in A$, $l < m^+$, deci $l \leq m$. Prin urmare, m este majorant pentru A, contradicţie cu faptul că n este cel mai mic majorant. $\square$

9. Fie X, Y mulţimi cu $X \neq \emptyset$ şi $f : X \to Y$ injectivă. Să se arate că există $g : Y \to X$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

   Soluţie: Cum $X \neq \emptyset$, există $a \in X$. Definim $g : Y \to X$, pentru orice $y \in Y$, astfel: dacă există $x \in X$ (necesar unic) cu $f(x) = y$, punem $g(y) := x$, altfel punem $g(y) := a$.

   Fie $x \in X$. Notând $y := f(x)$, avem $g(y) = x$, deci $g(f(x)) = x$. Am demonstrat că $g \circ f = \mathrm{id}_X$. □

10. Arătaţi că o submulţime A a unei mulţimi finite B este finită.

    Soluţie: Demonstrăm prin inducţie după numărul de elemente n al lui B.

    Dacă $n = 0$, $B = \emptyset$ şi deci $A = \emptyset$ şi are şi ea 0 elemente.

    Presupunem adevărat pentru un n şi demonstrăm pentru n^+. Presupunem, deci, că B are n^+ elemente, deci există o bijecţie $f : n^+ \to B$. Notăm $C := B \setminus \{f(n)\}$. Atunci C are n elemente şi distingem două cazuri.

    Dacă $f(n) \notin A$, atunci $A \subseteq C$ şi este deci finită din ipoteza de inducţie.

    Dacă $f(n) \in A$, atunci notând $D := A \setminus \{f(n)\} = A \cap C$ avem că $D \subseteq C$, deci este finită din ipoteza de inducţie şi aşadar există m astfel încât D are m elemente. Rezultă că $A = D \cup \{f(n)\}$ are m^+ elemente şi este deci finită. □

11. Dacă f este un şir $\mathbb{N}$-valuat infinit, spunem că f este **finalmente constant** dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $f_{k+m} = f_k$. Arătaţi că mulţimea C a şirurilor finalmente constante este numărabilă.

    Soluţie: Clar, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ putem considera şirul ce ia numai valoarea n. Prin urmare $\aleph_0 \leq |C|$.

    Definim acum $\phi : C \to \mathbb{N}$, pentru orice $f \in C$, prin

    $$\phi(f) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{pentru orice } m \in \mathbb{N},\ f_{k+m} = f_k\}$$

    şi $\psi : C \to \mathrm{Seq}(\mathbb{N})$, pentru orice $f \in C$, prin

    $$\psi(f) := (f_i)_{i<\phi(f)^+} = f \cap (\phi(f)^+ \times \mathbb{N}).$$

    Atunci ψ este injectivă şi, cum am demonstrat la curs că $\mathrm{Seq}(\mathbb{N})$ este numărabilă, rezultă că $|C| \leq \aleph_0$, deci $|C| = \aleph_0$. □

12. Arătaţi că mulţimea $\mathcal{O}$ a tuturor mulţimilor deschise ale lui $\mathbb{R}$ (în topologia canonică) are cardinalul $\mathfrak{c}$.

    Soluţie: În această soluţie, vom folosi notaţia (a, b) şi pentru pereche ordonată, şi pentru interval deschis, dezambiguizându-le la fiecare folosire.

    Clar, oricărui număr real r îi putem asocia intervalul deschis $(r - 1, r)$, deci avem cel puţin $\mathfrak{c}$ deschişi. Rămâne de arătat că avem cel mult pe atât.

    Definim acum $\phi : \mathcal{O} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, pentru orice mulţime deschisă D, prin

    $$\phi(D) := \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid \text{intervalul } (a, b) \text{ este inclus în } D\}.$$

    Demonstrăm că ϕ este injectivă, ceea ce ne încheie demonstraţia, dat fiind că $|\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})| = \mathfrak{c}$.

    Fie D, E mulţimi deschise cu $\phi(D) = \phi(E)$ şi vrem $D = E$. Este suficient să arătăm că $D \subseteq E$, cealaltă incluziune rezultând din simetria problemei. Fie $r \in D$. Cum D este deschisă, există $\varepsilon > 0$ astfel încât intervalul $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ este inclus în D. Cum $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$, există a, $b \in \mathbb{Q}$ cu

    $$r - \varepsilon < a < r < b < r + \varepsilon.$$

    Atunci intervalul (a, b) este inclus în D, deci perechea (a, b) aparţine lui $\phi(D)$ şi deci şi lui $\phi(E)$. Prin urmare, intervalul (a, b) este inclus în E şi deci, cum r aparţine intervalului, avem $r \in E$. □

13. Fie α un ordinal. Arătaţi că α^+ este ordinal.

Soluţie: Reamintim că $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Demonstrăm că α^+ este tranzitivă. Fie x, y cu $x \in \alpha^+$ şi $y \in x$. Vrem $y \in \alpha^+$. Vom arăta chiar $y \in \alpha$. Cum $x \in \alpha^+$, avem $x \in \alpha$ sau $x = \alpha$. Dacă $x \in \alpha$, avem $y \in \alpha$ fiindcă α este tranzitivă. Dacă $x = \alpha$, cum $y \in x$, avem $y \in \alpha$.

Demonstrăm că $\in_{\alpha^+}$ este ireflexivă. Fie $x \in \alpha^+$ şi vrem $x \notin x$. Dacă $x \in \alpha$, atunci nu putem avea $x \in x$ din faptul că $\in_\alpha$ este ireflexivă. Dacă $x = \alpha$, atunci $x \in x$ ar însemna $x \in \alpha$ şi putem aplica raţionamentul de la primul caz.

Demonstrăm că $\in_{\alpha^+}$ este tranzitivă. Fie x, y, $z \in \alpha^+$ cu $x \in y$ şi $y \in z$. Vrem $x \in z$. Dacă $z \in \alpha$, atunci, din tranzitivitatea lui α, rezultă, pe rând, $y \in \alpha$ şi $x \in \alpha$. Cum $\in_\alpha$ este tranzitivă, rezultă $x \in z$. Dacă $z = \alpha$, atunci avem $x \in y$ şi $y \in \alpha$, iar cum α este tranzitivă, avem $x \in \alpha = z$.

Demonstrăm acum că $\in_{\alpha^+}$ este o bună ordine. Fie o mulţime nevidă $A \subseteq \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$. Notăm $B := A \cap \alpha$. Dacă B este nevidă, există un minim al ei relativ la $\in$. Cum $B \subseteq \alpha$, acel minim aparţine lui α, deci este mai mic şi ca α. Prin urmare, el este minimul lui A în ansamblu. Dacă B este vidă, atunci avem $A = \{\alpha\}$ ce îl are pe α ca minim. □

14. Fie α un ordinal. Arătaţi că $\alpha \notin \alpha$.

Soluţie: Dacă am avea $\alpha \in \alpha$, atunci s-ar contrazice ireflexivitatea lui $\in_\alpha$. □

15. Fie α un ordinal şi $\beta \in \alpha$. Arătaţi că β este ordinal.

Soluţie: Demonstrăm că β este tranzitivă. Fie u, v cu $u \in v$ şi $v \in \beta$. Vrem $u \in \beta$. Cum α este tranzitivă şi $\beta \in \alpha$, avem $v \in \alpha$, iar apoi $u \in \alpha$. Deci u, v, $\beta \in \alpha$, iar concluzia rezultă din tranzitivitatea lui $\in_\alpha$.

Cum $\beta \in \alpha$ şi α este tranzitivă, avem $\beta \subseteq \alpha$, deci $\in_\beta$ este restricţia la β (i.e. intersecţia cu $\beta \times \beta$) a lui $\in_\alpha$, deci este şi ea o relaţie de bună ordine. □

16. Fie α şi β ordinali astfel încât $\alpha \subsetneq \beta$. Arătaţi că $\alpha \in \beta$.

Soluţie: Cum $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, există un minim al său, pe care îl notăm cu γ. Vom arăta $\gamma = \alpha$, de unde va rezulta $\alpha \in \beta$.

Pentru implicaţia „$\subseteq$", presupunem că există $\delta \in \gamma$ cu $\delta \notin \alpha$. Atunci, cum β este tranzitivă, avem $\delta \in \beta$, deci avem $\delta \in \beta \setminus \alpha$, ceea ce contrazice minimalitatea lui γ.

Pentru implicaţia „$\supseteq$", presupunem că există $\delta \in \alpha$ cu $\delta \notin \gamma$. Cum δ, $\gamma \in \beta$, avem că $\gamma \in \delta$ sau $\gamma = \delta$. Din tranzitivitatea lui α, rezultă $\gamma \in \alpha$, contrazicând faptul că $\gamma \in \beta \setminus \alpha$. □

17. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$. Există două moduri de a exprima faptul că f este continuă în a:

- pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice x cu $|x-a| < \delta$, avem $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$;
- pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce are ca limită pe a, avem că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are ca limită pe $f(a)$.

Folosind Axioma alegerii, arătaţi că ele sunt echivalente.

Observaţie: Se ştie că echivalenţa nu rezultă fără Axioma alegerii, dar şi că este strict mai slabă decât ea.

Soluţie: Pentru „$\Rightarrow$", fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir cu limita a. Vrem să arătăm că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are ca limită pe $f(a)$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice x cu $|x - a| < \delta$, avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la a, avem că există N astfel încât pentru orice $n \geq N$, $|x_n - a| < \delta$. Aşadar, pentru orice $n \geq N$, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Am arătat că $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are ca limită pe $f(a)$.

Pentru „$\Leftarrow$", presupunem prin absurd că există un $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ există x cu $|x - a| < \delta$ şi $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Deci pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \frac{1}{n+1} \text{ şi } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ca urmare, putem aplica Axioma alegerii pentru familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi obţinem un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X_n$, i.e. $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$ şi $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Aşadar, limita lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este a, dar $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nu converge la $f(a)$. Contradicţie! □

18. Fie X, Y mulţimi şi $g : Y \to X$ surjectivă. Să se arate, folosind Axioma alegerii, că există $f : X \to Y$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

    Soluţie: Cum g este surjectivă, avem că pentru orice $x \in X$, $g^*(\{x\})$ este nevidă, deci, aplicând Axioma alegerii pentru familia $(g^*(\{x\}))_{x\in X}$, obţinem că există o familie $a = (a_x)_{x\in X}$ astfel încât pentru orice $x \in X$, $a_x \in g^*(\{x\})$, deci $a_x \in Y$ şi $g(a_x) = x$.

    Definim $f : X \to Y$, punând, pentru orice $x \in X$, $f(x) := a_x$. (Altfel spus, $f = (X, Y, a)$.) Atunci, pentru orice $x \in X$, avem $g(f(x)) = g(a_x) = x$. Prin urmare, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. □

19. Demonstraţi că faptul că „pentru orice X, Y mulţimi şi $g : Y \to X$ surjectivă, avem că există $f : X \to Y$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_X$" implică Axioma alegerii.

    Soluţie: Fie $(D_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi nevide, disjuncte două câte două. Vrem să arătăm că există $(d_i)_{i\in I}$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $d_i \in D_i$.

    Notăm
    $$C := \bigcup_{i\in I} D_i.$$
    Fie $g : C \to I$, definită punând, pentru orice $x \in C$, $g(x)$ ca fiind acel unic i cu $x \in D_i$. Cum g este surjectivă, există $f : I \to C$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_I$.

    Pentru orice $i \in I$, punem $d_i := f(i)$ şi atunci, cum $g(d_i) = g(f(i)) = i$, avem că $d_i \in D_i$. Aşadar, familia $(d_i)_{i\in I}$ este cea căutată. □

20. Demonstraţi că faptul că „pentru orice X, Y mulţimi, există o injecţie de la X la Y sau există o injecţie de la Y la X" implică Axioma alegerii. **Indiciu:** Folosiţi ordinalul Hartogs.

    Soluţie: Fie A o mulţime. Atunci, fie există o injecţie de la $h(A)$ la A, fie există o injecţie de la A la $h(A)$. Primul caz contrazice definiţia ordinalului Hartogs. Avem aşadar că există o injecţie $g : A \to h(A)$. Cum $(h(A), \in_{h(A)})$ este bine-ordonată, există o bună ordine pe imaginea lui g, imagine care este echipotentă cu A, deci există o bună ordine pe A.

    Am arătat că orice mulţime este bine-ordonabilă, iar la curs am demonstrat că aceasta implică Axioma alegerii. □

21. Fie α un ordinal. Arătaţi:

    (a) Pentru orice $x \in V_\alpha$, $x \notin x$.

    (b) Avem că $V_\alpha \in V_{\alpha^+} \setminus V_\alpha$. Prin urmare, $\mathrm{rg}(V_\alpha) = \alpha$.

    (c) Pentru orice $\beta < \alpha$, $V_\beta \subsetneq V_\alpha$.

    Soluţie:

    (a) Fireşte, enunţul rezultă din Axioma regularităţii, dar este interesant de văzut că este adevărat şi fără a o postula.

    Demonstrăm prin inducţie după α.

    Dacă $\alpha = 0$, atunci, cum $V_\alpha = V_0 = \emptyset$, nu avem ce demonstra.

    Presupunem că există β cu $\alpha = \beta^+$. Atunci $x \in V_\alpha = V_{\beta^+} = \mathcal{P}(V_\beta)$, deci $x \subseteq V_\beta$. Dacă am avea $x \in x$, atunci $x \in V_\beta$, iar din ipoteza de inducţie rezultă $x \notin x$.

    Presupunem acum că α este ordinal limită. Atunci există $\gamma < \alpha$ cu $x \in V_\gamma$ şi, din ipoteza de inducţie, rezultă $x \notin x$.

    (b) Avem că $V_\alpha \subseteq V_\alpha$, deci $V_\alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha^+}$, iar din primul punct avem că $V_\alpha \notin V_\alpha$.

(c) Fie $\beta < \alpha$. Ştim că $V_\beta \subseteq V_\alpha$, rămâne de arătat doar că incluziunea este strictă. Avem că $\beta^+ \leq \alpha$ (exerciţiu!) şi deci $V_{\beta^+} \subseteq V_\alpha$. Ştim, din punctul anterior, că $V_\beta \in V_{\beta^+} \setminus V_\beta$, deci $V_\beta \in V_\alpha \setminus V_\beta$.

$\square$

22. Fie α un ordinal. Arătaţi:

(a) Avem că $\alpha \in V_{\alpha^+}$.

(b) Avem că $\alpha \notin V_\alpha$. Prin urmare, $\mathrm{rg}(\alpha) = \alpha$.

Soluţie:

(a) Demonstrăm prin inducţie completă după α. Cum $V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, trebuie să demonstrăm că $\alpha \subseteq V_\alpha$.
Fie $\beta \in \alpha$. Atunci β este un ordinal mai mic ca α, iar din ipoteza de inducţie, avem $\beta \in V_{\beta^+}$. Cum $\beta < \alpha$, avem $\beta^+ \leq \alpha$ (exerciţiu!), deci $V_{\beta^+} \subseteq V_\alpha$, aşadar $\beta \in V_\alpha$.

(b) Demonstrăm prin inducţie după α.
Dacă $\alpha = 0$, atunci $\alpha \notin \emptyset = V_0 = V_\alpha$.
Presupunem că există β cu $\alpha = \beta^+$. Presupunem prin absurd că $\alpha \in V_\alpha$, i.e. $\beta^+ \in V_{\beta^+} = \mathcal{P}(V_\beta)$, deci $\beta^+ \subseteq V_\beta$. Dar $\beta \in \beta^+$, deci $\beta \in V_\beta$, ceea ce contrazice ipoteza de inducţie.
Presupunem acum că α este ordinal limită. Presupunem prin absurd că $\alpha \in V_\alpha$. Atunci există $\gamma < \alpha$ cu $\alpha \in V_\gamma$. Cum $\gamma \in \alpha$, există $\delta < \gamma$ cu $\gamma \in V_\delta \subseteq V_\gamma$, ceea ce, din nou, contrazice ipoteza de inducţie.

$\square$

23. Fie I o mulţime nevidă şi A, B două submulţimi diferite ale sale. Arătaţi că există un ultrafiltru pe I care conţine exact una dintre submulţimi.

Soluţie: Avem $A \neq B$, deci $A \not\subseteq B$ sau $B \not\subseteq A$. Presupunem w.l.o.g. $A \not\subseteq B$, deci există $x \in A$ cu $x \notin B$.

Ştim că $[\{x\})$ este un ultrafiltru. Cum $\{x\} \subseteq A$, avem $A \in [\{x\})$, iar cum $\{x\} \subseteq I \setminus B$, avem $I \setminus B \in [\{x\})$, deci $B \notin [\{x\})$. $\square$

24. Fie I o mulţime nevidă, F un filtru pe I şi $X \subseteq I$ cu $X \notin F$. Arătaţi că există un ultrafiltru pe I care include pe F şi nu conţine pe X (omite pe X).

Soluţie: Cum $X \notin F$, $X \neq I$, deci $I \setminus X \neq \emptyset$.

Fie $G := F \cup \{I \setminus X\}$. Vom arăta că G are proprietatea intersecţiilor finite, de unde va rezulta că se poate prelungi la un ultrafiltru. Acel ultrafiltru va include pe F şi, deoarece va conţine pe $I \setminus X$, nu va putea conţine pe X.

Fie $A \subseteq G$ finită nevidă şi vrem $\bigcap A \neq \emptyset$. Dacă $A \subseteq F$, suntem OK. Dacă $A \not\subseteq F$, există $B \subseteq F$ cu $A = B \cup \{I \setminus X\}$. Dacă $B = \emptyset$, atunci $A = \{I \setminus X\}$ şi din nou suntem OK. Dacă $B \neq \emptyset$, atunci $\bigcap B \in F$, şi, presupunând prin absurd că $\bigcap A = (\bigcap B) \cap (I \setminus X) = \emptyset$, obţinem $\bigcap B \subseteq X$, deci $X \in F$, ceea ce este o contradicţie. $\square$

2 Logica propoziţională

1. Fie φ, ψ, $\chi \in E(Q)$. Arătaţi că avem:

   (a) $\psi \models \varphi \to \psi$;

   (b) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$.

Soluţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a \in 2$,

$$\begin{aligned} 1 \to a &= a, & a \to 1 &= 1, \\ 0 \to a &= 1, & a \to 0 &= \neg a, \\ 1 \wedge a &= a, & 0 \wedge a &= 0. \end{aligned}$$

(a) Fie $e : Q \to 2$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = e^+(\varphi) \to 1 = 1.$$

(b) Fie $e : Q \to 2$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi).$$

Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) &= e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) &= (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi), \end{aligned}$$

deci trebuie arătat că

$$e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi).$$

Avem cazurile:

i. $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 0 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1, \\ (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (0 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = 0 \to e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

ii. $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 1 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = e^+(\psi) \to e^+(\chi), \\ (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (1 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = e^+(\psi) \to e^+(\chi). \end{aligned}$$

$\square$

2. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Să se găsească câte un model pentru fiecare dintre formulele:

   (a) $v_0 \to v_2$;

   (b) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Soluţie:

(a) Fie funcţia $e : Q \to 2$, definită, pentru orice $x \in Q$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_2, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \to v_2) = e^+(v_0) \to e^+(v_2) = e(v_0) \to e(v_2) = 0 \to 1 = 1,$$

deci $e \models v_0 \to v_2$.

(b) Fie funcţia $e : Q \to 2$, definită, pentru orice $x \in Q$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_4, \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \land e^+(v_3) \land \neg e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \land e(v_3) \land \neg e(v_4) \\ &= 1 \land 1 \land \neg 0 \\ &= 1 \land 1 \land 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

deci $e \models v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

□

3. Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ, $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă φ este tautologie.

Soluţie:

Avem:

$$\begin{aligned} \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă} &\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\ &\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\ &\iff \text{nu avem că există } e : Q \to 2 \text{ cu } e^+(\neg\varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ e^+(\neg\varphi) \neq 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ e^+(\neg\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ \neg e^+(\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ e^+(\varphi) = 1 \\ &\iff \varphi \text{ este tautologie.} \end{aligned}$$

□

4. Confirmaţi sau infirmaţi:

(a) pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$, $\models \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ şi $\models \psi$;

(b) pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$, $\models \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$.

Soluţie:

(a) Este adevărat. Fie $\varphi, \psi \in E(Q)$. Avem:

$$\begin{aligned} \models \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2, e^+(\varphi) \land e^+(\psi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi} \\ &\qquad \text{pentru orice } e : Q \to 2, e^+(\psi) = 1 \\ &\iff \models \varphi \text{ şi} \models \psi. \end{aligned}$$

(b) Nu este adevărat! Fie $v \in Q$ arbitrar. Vom lua $\varphi := v$ şi $\psi := \neg v$.
Luăm $e_0 : Q \to 2$ ca fiind funcţia constantă 0. Atunci $e_0^+(\varphi) = e_0^+(v) = e_0(v) = 0$. Deci $e_0 \not\models \varphi$.
Prin urmare, $\not\models \varphi$.

Luăm $e_1 : Q \to 2$ ca fiind funcţia constantă 1. Atunci $e_1^+(\psi) = e_1^+(\neg v) = \neg e_1^+(v) = \neg e_1(v) = \neg 1 = 0$. Deci $e_1 \not\models \psi$. Prin urmare, $\not\models \psi$.

Fie acum $e : Q \to 2$ arbitrară. Atunci

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(v \vee \neg v) = e^+(v) \vee e^+(\neg v) = e^+(v) \vee \neg e^+(v) = e(v) \vee \neg e(v) = 1,$$

deci $e \models \varphi \vee \psi$. Prin urmare, avem că $\models \varphi \vee \psi$.

□

5. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Aflaţi mulţimea modelelor pentru fiecare dintre mulţimile de formule:

   (a) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

   (b) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Soluţie:

(a) Fie $e : Q \to 2$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \models v_n \to v_{n+1}$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n) \to e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \to e(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$e \models \Gamma$	dacă şi numai dacă	pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $e \models v_n \to v_{n+1}$
	dacă şi numai dacă	pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$
	dacă şi numai dacă	(pentru orice $v \in Q$, $e(v) = 0$) sau (există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $i < k$, $e(v_i) = 0$ şi pentru orice $i \geq k$, $e(v_i) = 1$).

Definim $e^0 : Q \to 2$ ca fiind funcţia constantă 0. Definim şi, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $e_k : Q \to 2$, punând, pentru orice $i \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_i) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } i < k, \\ 1, & \text{dacă } i \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{e^0\}.$$

(b) Fie $e : Q \to 2$. Atunci

$e \models \Gamma$	dacă şi numai dacă	$e \models v_0$ şi, pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, $e \models v_n \to v_{n+1}$
	dacă şi numai dacă	$e(v_0) = 1$ şi, pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$
	dacă şi numai dacă	pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, 8\}$, $e(v_n) = 1$.

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : Q \to 2 \mid \text{pentru orice } n \in \{0, 1, \ldots, 8\},\ e(v_n) = 1\}.$$

□

6. Fie $f : Q \to 2$. Găsiţi $\Gamma \subseteq E(Q)$ astfel încât $Mod(\Gamma) = \{f\}$.

Soluţie: Luăm $\Gamma := Q^f = \{v^f \mid v \in Q\}$.

Fie $e : Q \to 2$. Avem $e \in Mod(\Gamma)$ dacă şi numai dacă pentru orice $v \in Q$, $e \models v^f$ dacă şi numai dacă pentru orice $v \in Q$, $e^+(v^f) = 1$. Vom arăta că ultima afirmaţie este echivalentă cu $e = f$.

Presupunem că pentru orice $v \in Q$, $e^+(v^f) = 1$. Fie $v \in Q$. Vrem $e(v) = f(v)$. Dacă $f(v) = 1$, atunci $v^f = v$ şi deci $e(v) = e^+(v) = e^+(v^f) = 1 = f(v)$. Dacă $f(v) = 0$, atunci $v^f = \neg v$ şi deci

$$e(v) = e^+(v) = \neg\neg e^+(v) = \neg e^+(\neg v) = \neg e^+(v^f) = \neg 1 = 0 = f(v).$$

Invers, presupunem că $e = f$ şi vrem să arătăm că pentru orice $v \in Q$, $e^+(v^f) = 1$. Fie $v \in Q$. Atunci $e^+(v^f) = f^+(v^f) = 1$. □

7. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Să se arate că mulţimea modelelor unei mulţimi satisfiabile şi finite de formule este infinită.

Soluţie: Fie Γ o mulţime de formule ca în enunţ. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model şi fie acesta e. Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcţie $e_k : Q \to 2$, definită, pentru orice $x \in Q$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \ldots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \ldots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru $k \neq l$ avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime numărabilă. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $\varphi \in \Gamma$, avem că $e_{k|Var(\varphi)} = e_{|Var(\varphi)}$, deci $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$. Aşadar, $e_k \models \varphi$.

Am obţinut astfel că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq Mod(\Gamma)$. Aşadar, $Mod(\Gamma)$ este infinită. $\square$

8. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Găsiţi o mulţime (infinită) de formule cu proprietatea că nu există o mulţime finită de formule care să aibă exact aceleaşi modele.

Soluţie: Considerăm $\Gamma := Q$. Clar, Γ este infinită. Fie $f : Q \to 2$ funcţia constantă 1. Avem că $Mod(\Gamma) = \{f\}$.

Fie acum Δ o mulţime finită de formule. Avem două cazuri:

(a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $Mod(\Delta) = \emptyset$.

(b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm exerciţiul precedent pentru a concluziona că $Mod(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obţinem că $Mod(\Delta) \neq Mod(\Gamma)$. $\square$

9. Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ şi φ, $\psi \in E(Q)$. Să se arate că:

(a) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;

(b) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$;

(c) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ şi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$;

(d) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$;

(e) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Soluţie:

(a) Avem:

(1)		$\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	(A3)
(4)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	Teorema deducţiei.

(b) Avem:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	Ex. 9a
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$	Teorema deducţiei.

(c) Avem:

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$	Ex. 9b
(2)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Ipoteză
(3)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \psi \to \bot$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	Ipoteză
(5)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (3), (4)
(6)	Γ	$\vdash \varphi$	Metoda reducerii la absurd.

(d) Avem:

(1)	$\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \bot$	Ex. 9a
(2)	$\{\neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	Metoda reducerii la absurd
(3)		$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi.$	Teorema deducţiei.

(e) Avem:

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	Ex. 9d
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(A3)
(3)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2).

□

10. Să se arate că, pentru orice $\varphi \in E(Q)$,

$$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi.$$

Soluţie: Avem:

(1)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \varphi$	
(2)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi$	
(3)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg\varphi \to \varphi\}$	$\vdash \varphi$	Ex. 9c pentru (1), (3)
(5)		$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	Teorema deducţiei.

□

11. Să se arate că, pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$,

$$\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \neg(\psi \to \varphi)).$$

Soluţie: Avem:

(1)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi$	
(2)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi$	
(3)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$	
(4)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$	Ex. 9d
(5)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\psi \to \varphi)$	Ex. 9c pentru (2), (6)
(8)	$\{\psi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg(\psi \to \varphi)$	Teorema deducţiei
(9)		$\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \neg(\psi \to \varphi))$	Teorema deducţiei.

□

12. **("Reciproca" Axiomei 3)**
Să se arate că, pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Soluţie: Avem:

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \varphi \to \psi & \\
(2) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\psi & \\
(3) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\neg\varphi & \\
(4) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi & \text{Ex. 9d} \\
(5) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \varphi & \text{(MP): (3), (4)} \\
(6) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \psi & \text{(MP): (1), (5)} \\
(7) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi\} & \vdash \neg\varphi & \text{Ex. 9c pentru (2), (6)} \\
(8) & \{\varphi \to \psi\} & \vdash \neg\psi \to \neg\varphi & \text{Teorema deducţiei} \\
(9) & & \vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) & \text{Teorema deducţiei.}
\end{array}
$$

□

3 Logica de ordinul I

1. Considerăm σ_{ar} şi $\mathcal{N}$ aşa cum au fost ele definite în curs. Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$.

   (a) Fie $t := \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. (Îl putem scrie pe t şi ca $\dot{S}x\dot{\times}\dot{S}\dot{S}y$.) Să se calculeze $t_v^{\mathcal{N}}$, unde $v : V \to \mathbb{N}$ verifică $v(x) = 3$ şi $v(y) = 7$.

   (b) Fie $\varphi := \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. (Îl putem scrie pe φ şi ca $x\dot{<}\dot{S}y \to (x\dot{<}y \vee x = y)$.) Să se arate că, pentru orice $v : V \to \mathbb{N}$, $\|\varphi\|_v^{\mathcal{N}} = 1$.

Soluţie:

(a) Pentru orice $v : V \to \mathbb{N}$, avem

$$
\begin{aligned}
t_v^{\mathcal{N}} &= N_{\dot{\times}}((\dot{S}x)_v^{\mathcal{N}}, (\dot{S}\dot{S}y)_v^{\mathcal{N}}) = (\dot{S}x)_v^{\mathcal{N}} \cdot (\dot{S}\dot{S}y)_v^{\mathcal{N}} \\
&= N_{\dot{S}}(x_v^{\mathcal{N}}) \cdot N_{\dot{S}}((\dot{S}y)_v^{\mathcal{N}}) = S(v(x)) \cdot S(N_{\dot{S}}(y_v^{\mathcal{N}})) \\
&= S(v(x)) \cdot S(S(v(y))).
\end{aligned}
$$

Prin urmare, dacă $v(x) = 3$ şi $v(y) = 7$, atunci

$$t_v^{\mathcal{N}} = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

(b) Pentru orice $v : V \to \mathbb{N}$, avem

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_v^{\mathcal{N}} = 1 &\Leftrightarrow \|\dot{<}(x, \dot{S}y)\|_v^{\mathcal{N}} = 0 \text{ sau } \|\dot{<}(x, y) \vee x = y\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{nu avem } N_{\dot{<}}(v(x), S(v(y))) \text{ sau avem} \\
&\qquad \|\dot{<}(x, y)\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \text{ sau avem } \|x = y\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{nu avem } v(x) < S(v(y)) \text{ sau avem } v(x) < v(y) \\
&\qquad \text{sau avem } v(x) = v(y) \\
&\Leftrightarrow v(x) \geq S(v(y)) \text{ sau } v(x) < v(y) \text{ sau } v(x) = v(y) \\
&\Leftrightarrow v(x) \geq v(y) + 1 \text{ sau } v(x) < v(y) \text{ sau } v(x) = v(y).
\end{aligned}
$$

Prin urmare, pentru orice $v : V \to \mathbb{N}$, $\|\varphi\|_v^{\mathcal{N}} = 1$.
De obicei, scriem:

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_v^{\mathcal{N}} = 1 &\Leftrightarrow \|\dot{<}(x, \dot{S}y)\|_v^{\mathcal{N}} = 0 \text{ sau } \|\dot{<}(x, y) \vee x = y\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\Leftrightarrow v(x) \geq S(v(y)) \text{ sau } v(x) < v(y) \text{ sau } v(x) = v(y) \\
&\Leftrightarrow v(x) \geq v(y) + 1 \text{ sau } v(x) < v(y) \text{ sau } v(x) = v(y).
\end{aligned}
$$

□

2. Considerăm σ_{ar} şi $\mathcal{N}$ aşa cum au fost ele definite în curs. Fie formula $\varphi := \forall x_4(x_3 \dot{<} x_4 \vee x_3 = x_4)$. Să se caracterizeze acele $v : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\|\varphi\|_v^{\mathcal{N}} = 1$.

   Soluţie: Fie $v : V \to \mathbb{N}$. Avem:

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \|\forall x_4(x_3 \dot{<} x_4 \vee x_3 = x_4)\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ \|x_3 \dot{<} x_4 \vee x_3 = x_4\|_{v_{x_4 \leftarrow a}}^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ \|x_3 \dot{<} x_4\|_{v_{x_4 \leftarrow a}}^{\mathcal{N}} \lor \|x_3 = x_4\|_{v_{x_4 \leftarrow a}}^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ \|x_3 \dot{<} x_4\|_{v_{x_4 \leftarrow a}}^{\mathcal{N}} = 1 \text{ sau } \|x_3 = x_4\|_{v_{x_4 \leftarrow a}}^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ v_{x_4 \leftarrow a}(x_3) < v_{x_4 \leftarrow a}(x_4) \text{ sau } v_{x_4 \leftarrow a}(x_3) = v_{x_4 \leftarrow a}(x_4) \\
&\Leftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ v_{x_4 \leftarrow a}(x_3) \leq v_{x_4 \leftarrow a}(x_4) \\
&\Leftrightarrow \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ v(x_3) \leq a \\
&\Leftrightarrow \quad v(x_3) = 0.
\end{aligned}$$

   □

3. Fie σ o signatură. Să se arate că pentru orice σ-formulă φ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$ şi $FV(\varphi) \subseteq \{x, y\}$, avem $\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi$. (Folosirea semnului $\models$ are sens deoarece $\exists y \forall x \varphi$ şi $\forall x \exists y \varphi$ sunt enunţuri.)

   Soluţie: Fie $\mathcal{A}$ o σ-structură cu universul A. Trebuie să arătăm că dacă $\mathcal{A} \models \exists y \forall x \varphi$, atunci $\mathcal{A} \models \forall x \exists y \varphi$.

   Avem că $\mathcal{A} \models \exists y \forall x \varphi$ dacă şi numai dacă există $v : V \to A$ astfel încât $\|\exists y \forall x \varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1$ dacă şi numai dacă există $v : V \to A$ astfel încât există $b \in A$ astfel încât pentru orice $a \in A$ avem $\|\varphi\|_{(v_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\|\varphi\|_{v_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}}^{\mathcal{A}} = 1$ (*).

   Pe de altă parte, avem că $\mathcal{A} \models \forall x \exists y \varphi$ dacă şi numai dacă există $v : V \to A$ astfel încât $\|\forall x \exists y \varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1$ dacă şi numai dacă există $v : V \to A$ astfel încât pentru orice $c \in A$ există $d \in A$ astfel încât $\|\varphi\|_{(v_{x \leftarrow c})_{y \leftarrow d}}^{\mathcal{A}} = 1$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\|\varphi\|_{v_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}}^{\mathcal{A}} = 1$ (**).

   Ştim, deci, (*) şi vrem să arătăm (**).

   Luăm în continuare în (**) acelaşi v ca în (*).

   Fie acum $c \in A$. Vrem $d \in A$ astfel încât $\|\varphi\|_{v_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}}^{\mathcal{A}} = 1$.

   Luăm d să fie b-ul din (*). Atunci, pentru orice $a \in A$ avem $\|\varphi\|_{v_{x \leftarrow a, y \leftarrow d}}^{\mathcal{A}} = 1$. În particular, luând $a := c$, obţinem $\|\varphi\|_{v_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}}^{\mathcal{A}} = 1$, ceea ce ne trebuia. □

4. Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de signatură σ şi de formulă φ cu $FV(\varphi) \subseteq \{x, y\}$ astfel încât $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$. (Din nou, folosirea semnului $\models$ are sens deoarece $\forall x \exists y \varphi$ şi $\exists y \forall x \varphi$ sunt enunţuri.)

   Soluţie: Vom considera σ_{ar} şi $\mathcal{N}$ aşa cum au fost ele definite în curs. Fie $v : V \to \mathbb{N}$ arbitrară (de pildă, punem, pentru orice $z \in V$, $v(z) := 7$).

   Luăm $\sigma := \sigma_{ar}$ şi $\varphi := x \dot{<} y$. Atunci

$$\begin{aligned}
\|\forall x \exists y \varphi\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \quad &\text{dacă şi numai dacă} \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ avem } \|\exists y \varphi\|_{v_{x \leftarrow n}}^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\text{dacă şi numai dacă} \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \|\varphi\|_{v_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}}^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\text{dacă şi numai dacă} \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } n < m,
\end{aligned}$$

   ceea ce este adevărat – se ia, de pildă, $m := n + 1$. Aşadar,

$$\mathcal{N} \models \forall x \exists y \varphi.$$

   Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
\|\exists y \forall x \varphi\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \quad &\text{dacă şi numai dacă} \quad \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \|\forall x \varphi\|_{v_{y \leftarrow m}}^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\text{dacă şi numai dacă} \quad \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ astfel încât pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } \|\varphi\|_{v_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}}^{\mathcal{N}} = 1 \\
&\text{dacă şi numai dacă} \quad \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ astfel încât pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m,
\end{aligned}$$

ceea ce este fals. Aşadar,

$$\mathcal{N} \not\models \exists y \forall x \varphi.$$

Am demonstrat că $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$. □

5. Fie σ o signatură, φ, $\psi \in F_\sigma$ şi $x \in V \setminus FV(\varphi)$. Fie $\mathcal{A}$ o σ-structură cu universul A şi $v : V \to A$. Atunci avem

$$\|\forall x(\varphi \wedge \psi)\|_v^{\mathcal{A}} = \|\varphi \wedge \forall x \psi\|_v^{\mathcal{A}}.$$

Soluţie:

Avem:

$$\begin{array}{rcl} \|\forall x(\varphi \wedge \psi)\|_v^{\mathcal{A}} = 1 & \Leftrightarrow & \text{pentru orice } a \in A,\ \|\varphi \wedge \psi\|_{v_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \text{pentru orice } a \in A,\ \|\varphi\|_{v_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1 \text{ şi } \|\psi\|_{v_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \text{pentru orice } a \in A,\ \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \text{ şi } \|\psi\|_{v_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1 \\ & & \text{(aplicând Lema de coincidenţă)} \\ & \Leftrightarrow & \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \text{ şi pentru orice } a \in A,\ \|\psi\|_{v_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \|\varphi\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \text{ şi } \|\forall x \psi\|_v^{\mathcal{A}} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \|\varphi \wedge \forall x \psi\|_v^{\mathcal{A}} = 1. \end{array}$$

□

6. Considerăm σ_{ar} şi $\mathcal{N}$ aşa cum au fost ele definite în curs. Să se dea exemplu de σ_{ar}-formule φ_1, φ_2, φ_3 astfel încât pentru orice $v : V \to \mathbb{N}$,

   (a) $\|\varphi_1\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \Leftrightarrow v(x_0)$ este par;

   (b) $\|\varphi_2\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \Leftrightarrow v(x_0)$ este prim;

   (c) $\|\varphi_3\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \Leftrightarrow v(x_0)$ este putere a lui 2 cu exponent strict pozitiv.

Soluţie:

(a) Luăm

$$\varphi_1 := \exists x_1 (x_1 \dot{+} x_1 = x_0).$$

(b) Luăm

$$\varphi_2 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} x_0 \wedge \forall x_1((x_1 \dot{<} x_0 \wedge \exists x_2(x_1 \dot{\times} x_2 = x_0)) \to x_1 = \dot{S}\dot{0}).$$

(c) Luăm

$$\varphi_3 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} x_0 \wedge \forall x_1((\dot{S}\dot{0} \dot{<} x_1 \wedge \exists x_2(x_1 \dot{\times} x_2 = x_0)) \to \exists x_2(x_1 = x_2 \dot{+} x_2)).$$

□

7. Considerăm signatura σ_r ce conţine două simboluri de operaţie de aritate 2, notate cu $\dot{+}$ şi $\dot{\times}$.

   (a) Considerăm σ_r-structura $\mathcal{R}$ cu universul $\mathbb{R}$, unde cele două simboluri sunt instanţiate cu operaţiile uzuale pe numerele reale $+$, respectiv $\cdot$. Să se dea exemplu de σ_r-formulă ψ astfel încât pentru orice $v : V \to \mathbb{R}$,

$$\|\psi\|_v^{\mathcal{R}} = 1 \Leftrightarrow v(x_0) \leq v(x_1).$$

   (b) (Exerciţiu suplimentar) Considerăm σ_r-structura $\mathcal{Z}$ cu universul $\mathbb{Z}$, unde cele două simboluri sunt instanţiate cu operaţiile uzuale pe numerele întregi $+$, respectiv $\cdot$. Să se dea exemplu de σ_r-formulă χ astfel încât pentru orice $v : V \to \mathbb{Z}$,

$$\|\chi\|_v^{\mathcal{Z}} = 1 \Leftrightarrow v(x_0) \leq v(x_1).$$

Soluţie:

(a) Luăm
$$\psi := \exists x_2(x_1 = x_0 \dot{+} x_2 \wedge \exists x_3(x_2 = x_3 \dot{\times} x_3)).$$

(b) Ne bazăm pe rezultatul lui J. L. Lagrange (1770), care spune că orice număr natural se scrie ca o sumă de patru pătrate. Aşadar, luăm (cu parantezările de rigoare)
$$\chi := \exists x_2(x_1 = x_0 \dot{+} x_2 \wedge \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \exists x_6(x_2 = x_3 \dot{\times} x_3 \dot{+} x_4 \dot{\times} x_4 \dot{+} x_5 \dot{\times} x_5 \dot{+} x_6 \dot{\times} x_6)).$$

□

8. Considerăm signatura σ ce conţine un singur simbol de operaţie, $+$, de aritate 2. Să se găsească un σ-enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \not\models \varphi$.

Soluţie:

Prima soluţie: se ia φ ca fiind
$$\forall x_0 \forall x_1((\neg \exists x_2(x_0 = x_2 + x_2) \wedge \neg \exists x_2(x_1 = x_2 + x_2)) \to \exists x_2(x_0 + x_1 = x_2 + x_2)),$$
ce exprimă faptul că suma a două elemente „nepare" este pară – în $\mathbb{Z}$, avem într-adevăr regula „impar + impar = par", dar în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avem contraexemplul $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.

A doua soluţie: se ia φ ca fiind
$$\exists x_1 \forall x_0(\exists x_2(x_0 = x_2 + x_2) \vee \exists x_2(x_0 = x_2 + x_2 + x_1)),$$
ce este adevărată în $\mathbb{Z}$, luând valoarea lui x_1 să fie 1 (orice număr este ori de forma $2k$, ori de forma $2k + 1$), dar nu este adevărat în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, unde relaţia de congruenţă indusă de elementele pare are patru clase, şi nu două. □

9. Considerăm signatura σ ce conţine un singur simbol de operaţie, $\cdot$, de aritate 2. Fie $\mathcal{G} = (G, \cdot^{\mathcal{G}})$ un grup finit. Să se determine un enunţ $\varphi_{\mathcal{G}}$ astfel încât pentru orice grup $\mathcal{H} = (H, \cdot^{\mathcal{H}})$ avem că $\mathcal{H} \models \varphi_{\mathcal{G}}$ dacă şi numai dacă $\mathcal{H}$ este izomorf cu $\mathcal{G}$.

Soluţie: Dat fiind că G este mulţime finită, există $n \in \mathbb{N}$ şi $h : n^+ \to G$ o bijecţie. Luăm enunţul $\varphi_{\mathcal{G}}$ ca fiind
$$\exists x_0 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{\substack{i,j \in n^+ \\ i \neq j}} \neg(x_i = x_j) \wedge \forall x_{n^+} \left(\bigvee_{i \in n^+} z = x_i \right) \wedge \bigwedge_{i,j \in n^+} x_i \cdot x_j = x_{h^{-1}(h(i) \cdot^{\mathcal{G}} h(j))} \right),$$
unde primii doi termeni ai conjuncţiei din paranteză exprimă faptul că $x_0, \ldots, x_n$ sunt exact elementele potenţialei structuri, iar ultimul termen codifică tabla grupului $\mathcal{G}$. □

10. Considerăm signatura σ ce conţine un singur simbol de relaţie, $\dot{<}$, de aritate 2. Fie Γ o mulţime de enunţuri ce conţine axiomele de ordine strictă, totală şi ce admite măcar un model infinit. Să se arate că există un model $\mathcal{A}$ pentru Γ în care, mai mult, $(\mathbb{Q}, <)$ se scufundă, i.e. există $f : \mathbb{Q} \to A$ (necesar injectivă) cu proprietatea că pentru orice q, $r \in \mathbb{Q}$, $q < r$ dacă şi numai dacă $f(q) \dot{<}^{\mathcal{A}} f(r)$.

Soluţie: Notăm cu σ' signatura ce extinde σ prin adăugarea unei familii de constante $\{c_q\}_{q \in \mathbb{Q}}$, câte una corespunzătoare fiecărui număr raţional. Mai departe, notăm cu Γ' mulţimea Γ la care adăugăm toate enunţurile de forma $c_q \dot{<} c_r$, cu $q < r$. Fie $\mathcal{B}$ un model infinit pentru Γ.

Arătăm că Γ' este finit satisfiabilă, deci satisfiabilă. Fie Δ o submulţime finită a lui Γ'. Există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ astfel încât doar constante dintre $c_{q_1}, \ldots, c_{q_n}$ apar în Δ. Fără a restrânge generalitatea, considerăm $q_1 < \ldots < q_n$. Structura $\mathcal{B}$ fiind infinită, admite o secvenţă $b_1 \dot{<}^{\mathcal{B}} \ldots \dot{<}^{\mathcal{B}} b_n$. Construim o σ'-expansiune $\mathcal{B}_\Delta$ a lui $\mathcal{B}$ în felul următor: pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, punem $c_{q_i}^{\mathcal{B}} := b_i$, iar pentru orice $q \notin \{q_1, \ldots, q_n\}$, punem $c_q^{\mathcal{B}} := b_1$ (o valoare arbitrară). Atunci $\mathcal{B}_\Delta$ va fi model pentru Δ.

Fie $\mathcal{C}$ un model pentru Γ'. Notăm cu $\mathcal{A}$ σ-redusa lui $\mathcal{C}$. Atunci $\mathcal{A}$ este modelul căutat pentru Γ – scufundarea f va fi dată, pentru orice $q \in \mathbb{Q}$, de

$$f(q) := c_q^{\mathcal{C}}.$$

□