Examen la Cercetări operaţionale seria 31

Cristian Niculescu

13 ianuarie 2021

1) Fie sistemul primal:

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccc} -3x_1 & +4x_2 & +8x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & +ix_2 & +2x_3 & = & 8 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \geq & 7 \end{array} \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

a) Scrieţi sistemul dual.
b) Care dintre cele 2 sisteme este compatibil şi care este incompatibil? Justificaţi răspunsul.

2) Rezolvaţi prin metoda celor 2 faze:

$$\begin{cases} \inf(10x_1 + x_2) \\ 36x_1 - x_2 + x_3 = i \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

3) Fie problema:

$$\begin{cases} \inf(-2x_1 - x_2) \\ x_1 + x_2 + x_3 = i \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 80 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

a) Rezolvaţi problema.
b) Reoptimizaţi pentru $b = \begin{pmatrix} 36 - i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Înlocuiţi i cu numărul corespunzător din următoarea listă:
ALBU MIHAI-PAVEL 1
ALECU FLORIN-GABRIEL 2
ANGHELESCU DIANA-LIVIA 3
APOSTOL CRISTIANA-CLAUDIA 4
AVRAMESCU ROBERT-VALENTIN 5
BALTATESCU ELENA-ECATERINA 6

Examen

Cercetări operaționale

Veloa Ana-Maria
grupa 312
X - 7 0
13.01.2021

1) Fie sistemul primal

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 2 \\ x_1 + 70x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 7 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ arbitrar},\ x_3 \leq 0 \end{cases}$$

a) Sistemul dual?

Matricea sistemului: $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 1 & 70 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Vectorul termenilor liberi: $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

Matricea extinsă $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 70 & 2 & 8 \\ 5 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Facem corespondența dintre ecuații sau inegalitățile din sistemul primal și variabilele din sistemul dual:

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 2 \rightsquigarrow u_1 \\ x_1 + 70x_2 + 2x_3 = 8 \rightsquigarrow u_2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 7 \rightsquigarrow u_3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ arbitrar},\ x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Acum scriem ecuațiile și inegalitățile din sistemul dual:

pentru x_1:
$3u_1 - u_2 - 5u_3 \geq 0$ (semnul este "≥ 0", deoarece $x_1 \geq 0$)

pentru x_2: $\cancel{4x_1 + 70x_2 - 3x}$

$4u_1 + 70u_2 - 3u_3 = 0$ (semnul este "=", deoarece x_2 arbitrar)

pentru x_3:

$-8u_1 - 2u_2 - 2u_3 \leq 0$ (semnul este "≤ 0", deoarece $x_3 \leq 0$

Scriem semnele variabilelor din sistemul dual:

$u_1 \leq 0$, deoarece u_1 corespunde la o inegalitate cu $\leq$

u_2 arbitrar, deoarece u_2 corespunde la o ecuație

$u_3 \geq 0$, deoarece u_3 corespunde la o inegalitate cu ≥ 0

Scriem condiția de ecart: $2u_1 + 8u_2 + 7u_3 > 0$

Sistemul dual este:

$$\begin{cases} 3u_1 - u_2 - 5u_3 \geq 0 \\ -4u_1 - 70u_2 + 3u_3 = 0 \\ -8u_1 - 2u_2 - 2u_3 \leq 0 \\ u_1 \leq 0,\ u_2 \text{ arbitrar},\ u_3 \geq 0 \\ 2u_1 + 8u_2 + 7u_3 > 0 \end{cases}$$

b) Care din cele 2 sisteme este compatibil și care incompatibil?

~~Abatere standard din sistemul dual~~

~~Sistemul~~ testăm dacă sistemul primal este compatibil

trebuie să avem $rang\, A = rang\, A^{l}$

~~$rang\, A \neq 0$, de~~

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 1 & 70 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 140 - 24 + 100 - 40\cdot 70 - 8 - 18 =$$

$$-420 - 24 + 100 - 2800 - 26 \neq 0$$

$\Rightarrow rang\, A = 3 = rang\, A^{l} \Rightarrow$ sistemul primal e compatibil

T.F.M $\Rightarrow$ sistemul dual este incompatibil

EXERC. 2

Rezolvați prin metoda celor două faze

$$\begin{cases} \inf(10x_1 + x_2) \\ 36x_1 - x_2 + x_3 = 70 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Sol:

trebuia ca $b \geq 0$ => înmulțim ecuația 3 cu (-1)

$$\begin{cases} \inf(\underbrace{10x_1 + x_2}_{z}) \\ 36x_1 - x_2 + x_3 = 70 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 36 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Faza 1}}$: Introducem ~~câte~~ o variabilă artificială în fiecare ecuație care nu conține o variabilă a cărei coloană în A e vector unitar

Singura coloană vector unitar din A ~~este~~ este a^3 ~~...~~ =>

Doar în ecuația în care apare x_3 ~~...~~ nu introducem variabilă artificială. Funcția obiectiv este suma variabilelor artificiale:

$$\begin{cases} \inf(x_5) \\ 36x_1 - x_2 + x_3 = 70 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases} \qquad C_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} 36 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = I_2 = (a_3, a_5)$ (7) $\Rightarrow B^{-1}b = I_2 \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$

$\Rightarrow B$ bază primal admisibilă $\Rightarrow c_B^T = (0,1)$ și $c_R^T = (0,0,0)$

Se rezolvă cu algoritmul simplex primal

~~VB~~ pe coloana lui VB vom avea variabilele x_3, x_5 și z

coloanele corespunzătoare lui x_3 și x_5 vor fi vectori unitari cu 1 pe linia variabilei corespunzătoare și 0 în rest

pe coloana VVB vom avea

$$\overline{X}^B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 70 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{z}^B = c_B^T \cdot \overline{X}^B = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

pe coloanele variabilelor secundare:

pe coloana lui x_1:

$$y_1^B = B^{-1} \cdot a^1 = I_2 \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_1^B - c_1 = c_B^T y_1^B - c_1 = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 1 \end{pmatrix} - 0$$

$$= 1$$

$$y_2^B = B^{-1} \cdot a^2 = I_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z_2^B - c_2 = c_B^T \cdot y_2^B - c_2 = (0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 =$$

$$-1 - 0 = -1$$

~~$z_4^B - c_4$~~ $y_4^B = B^{-1} \cdot a^4 = I_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$z_4^B - c_4 = c_B^T \cdot y_4^B - c_4 = (0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0$$

$$= -1 - 0 = -1$$

=> Vom avea :

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	70	36	-1	1	0	0
x_5	1	$\boxed{1}$	-1	0	-1	1
z'	1	1	-1	0	-1	0

$z_1'^{B} - c_1' = 1 \neq 0$ => testul de optim nu e îndeplinit

La faza I nu mai putem face testul de optim infinit, întrucât valoarea minimă a funcției obiectiv de domeniul admisibil e 0. (deoarece $x_5 \geq 0$)

$\max\{1\} = 1$, atins pe coloana lui x_1 => x_1 intră în bază => $\underline{k = 1}$

$\min\{\frac{70}{36}, \frac{1}{1}, \cancel{\ }\} = 1$, care e atins pe ~~lin~~ linia lui x_5

=> x_5 va ieși din bază => $\underline{r = 5}$

pivotul este $y_{rk}^{B} = y_{51}^{B} = 1$

În noul tabel, linia pivotului se va împărți la pivot

pe coloana VB vom avea x_1 și x_3, iar pe coloanele corespunzătoare lui x_1 și x_3, vectori unitari egali cu 1 pe linia variabilei respective și 0 în rest

Vom avea:

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3		0		1		
x_1	1	1	-1	0	-1	1
z'		0		0		

Vom calcula acum celelalte valori, din valorile vechi, cu regula dreptunghiului:

pe coloana VVB:

$$70 - \frac{1\cdot 36}{1} = 34 \ ; \quad 1 - \frac{1\cdot 1}{1} = 0$$

pe coloana lui x_2:

$$-1 - \frac{(-1)\cdot 36}{1} = -1 + 36 = +35 \ ; \quad -1 - \frac{1\cdot(-1)}{1} = -1+1=0$$

pe coloana lui x_4:

$$0 - \frac{(-1)\cdot(36)}{1} = 36 \ ; \quad -1 - \frac{1\cdot(-1)}{1} = -1+1=0$$

pe coloana lui x_5:

$$0 - \frac{1\cdot 36}{1} = -36 \ ; \quad 0 - \frac{1\cdot 1}{1} = -1$$

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	34	0	35	1	36	-36
x_1	1	1	-1	0	-1	1
z	0	0	0 7	0	0	-1

$z_j'^{B} - c_j' \leq 0, \forall j \in R \Rightarrow$

testul de optim este îndeplinit

$\bar{z}'^{B} = 0 \Rightarrow$ problema inițială are soluție admisibilă.

Nu mai avem variabile artificiale în bază ~~și o putem~~

~~elimina~~

Faza 2

Eliminăm coloanele variabilelor artificiale și recalculăm linia z în conformitate cu funcția obiectiv inițială

C_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
				1		0
0	x_3	34	0	35	1	36
10	x_1	1	1	-1	0	-1
	z	10	0	-11	0	10

$z_j^{B} - c_j \leq 0, \forall j \in R \Rightarrow$ TO este îndeplinit

$\Rightarrow$ valoarea optimă este 10 și soluția optimă este $x_1^* = 1, x_2^* = 0, x_3^* = 34, x_4^* = 0$

EX3

$$\begin{cases} \inf(-2x_1 - x_2) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 70 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 80 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

a) Rezolvați problema

Sol:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Alegem $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B(a^3 a^4)$ bază a sistemului. Verificăm dacă e primal admisibilă

$B^{-1} \cdot b = I_2^{-1} \cdot b = I_2 \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$

B primal admisibilă

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{3, 4\}$ și $R = \{1, 2\}$ $\qquad c_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_R = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

~~$c_\mathcal{B} = (0, 0)$, $c_R = (-2, -1)$~~

Pe coloana VB vom avea variabilele x_3, x_4 și apoi z

Coloanele lui x_3 și x_4 vor fi, deci, vectori unitari, cu 1 pe linia va riabilei respective și 0 în rest

Pe coloana VVB vom avea

$$\bar{X}^{B} = B^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z}^{B} = C_B^T \cdot \bar{x}^{B} = (0\ 0)\cdot\begin{pmatrix} 70 \\ 80 \end{pmatrix} = 0$$

Pe coloanele variabilelor secundare sunt:

pe coloana lui x_1:

$$y_1^{B} = B^{-1}a^1 = I_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_1^{B} - c_1 = C_B^T y_1^{B} - c_1 = (0\ 0)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - c_1 = -c_1 = -(-2) = 2$$

$$y_2^{B} = B^{-1}a^2 = I_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z_2^{B} - c_2 = C_B^T y_2^{B} - c_2 = (0,0)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - (-1) = -(-1) = 1$$

Deci vom avea:

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	70	1	1	1	0
x_4	80	1	2	0	1
z	0	2	1	0	0

Testul de optim: $z_j^{B} - c_j \leq 0,\ \forall j \in R = \{1,2\}$ nu este îndeplinit, deoarece, spre exemplu, $2 \not< 0$

test de optim infinit:

$\exists\, k \in R = \{1,2\}$ a.î. $z_k^B - c_k > 0$ și $y_k^B \leq 0$?

Nu este îndeplinită condiția, deoarece $y_1^B = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq 0$

și $y_2^B = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \neq 0$

criteriul de intrare în bază:

$k \in R$ a.î. $z_k^B - c_k = \max\{z_j^B - c_j \mid j \in R,\ z_j^B - c_j > 0\}$

$\Rightarrow x_k$ intră în bază

$\max\{z_j^B - c_j \mid j \in R,\ z_j^B - c_j > 0\} = \max(z_1^B - c_1, z_2^B - c_2)$

$= \max(2,1) = 2 \Rightarrow k = 1$

criteriul de ieșire din bază:

$r \in B$ a.î. $\dfrac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \dfrac{x_i^B}{y_{ik}^B} \Rightarrow x_r$ iese din bază

$$\min_{y_{i1}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{i1}} = \min_{y_{i1}^B > 0}\left(\frac{\overline{x}_3^B}{y_{31}^B}, \frac{\overline{x}_4^B}{y_{41}^B}\right) = \min_{\substack{y_{i1}^B > 0\\ i=3,4}}\left(\frac{4}{1}, \frac{8}{1}\right)$$

$= \min\left(\frac{4}{1}\right) = 4 \in$ corespunzător ~~coloanei~~ lui x_3 $\Rightarrow$

$r = 3$ și x_3 iese din bază

pivotul va fi $y_{rk}^B = y_{31}^B = 1$

~~Ne uităm pe coloană ... x_1 și~~ x_5

~~Împărțim linia pivot~~

~~tabelu~~

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
$\leftarrow x_3$	70	$\boxed{1}$	1	1	0
x_4	80	1	2	0	1
z	0	2	1	0	0

Împărțim linia pivotului la pivot

În noul tabel vom avea pe coloanele lui x_1 și x_4 vectori unitari cu 1 pe linia variabilei respective

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	70	$\boxed{1}$	1	1	0
x_4		0			1
z		0			0

Celelalte valori vor fi calculate cu regula dreptunghiului

~~pentru coloana lui x_1:~~

pe coloana VVB: $80 - \frac{1 \cdot 70}{1} = 10$; $0 - \frac{2 \cdot 70}{1} = -140$

pe coloana lui x_1: $2 - \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$; $1 - \frac{2 \cdot 1}{1} = -1$

pe coloana lui x_3: $0 - \frac{1 \cdot 1}{1} = -1$; $0 - \frac{2 \cdot 1}{1} = -2$

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	70	1	1	1	0
x_4	10	0	1	-1	1
z	-140	0	-1	-2	0

Verificăm acum testul de optim

$$z_i^B - c_i \leq 0, \forall i \in \{2,3\} ?$$

Da => ~~soluția~~ valoarea optimă este -140 și soluția optimă este $x_1^* = 70$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 10$

b) Reoptimizați pentru $b = \begin{pmatrix} 36-70 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ 1 \end{pmatrix} = (-34, 1)^T$

Se modifică coloana VVB din ultimul tabel simplex

$$a^j = e^i \Rightarrow (B^{-1})^i = B^{-1} \cdot e^i = B^{-1} \cdot a^j = y_j^B$$

$$\begin{cases} a^3 = e_1 \\ a^4 = e_2 \end{cases} \Rightarrow B^{-1} = (y_3^B, y_4^B)$$

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	70	1	1	1	0
x_4	10	0	1	-1	1
z	-140	0	-1	-2	0

Verificăm acum testul de optim

$$z_i^B - c_i \leq 0, \forall i \in \{2,3\} ?$$

Da => valoarea optimă este -140 și soluția optimă este $x_1^* = 70$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 10$

b) Reoptimizați pentru $b = \begin{pmatrix} 36-70 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ 1 \end{pmatrix} = (-34, 1)^T$

Se modifică coloana VVB din ultimul tabel simplex

$$a^j = e^i \Rightarrow (B^{-1})^i = B^{-1} \cdot e^i = B^{-1} \cdot a^j = y_j^B$$

$$\begin{cases} a^3 = e_1 \\ a^4 = e_2 \end{cases} \Rightarrow B^{-1} = (y_3^B, y_4^B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -34 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ 35 \end{pmatrix}$$