Teorema Heine - Borel

O submulțime a lui $\mathbb{R}^n$ este compactă $\Leftrightarrow$ închisă și mărginită

Demonstrație K compactă $\Leftrightarrow$ K închisă și mărginită

„$\Rightarrow$" Fie K o submulțime compactă a lui $\mathbb{R}^n$

Vom arăta că K este închisă

Fie, în acest sens, $x \in \mathbb{R}^n - K$

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, să considerăm mulțimile deschise $G_m = \{ y \in \mathbb{R}^n / \|y - x\| > \frac{1}{m} \}$

Atunci $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} G_m = \mathbb{R}^n - \{x\}$

deci $K \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} G_m$

Cum K este compactă, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$K \subseteq G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{n_0} \subseteq G_{n_0}$$

Atunci

$$\{ z \in \mathbb{R}^n / \|z - x\| < \frac{1}{n_0} \} \subseteq \mathbb{R}^n - K$$

ceea ce arată, având în vedere că x a fost ales arbitrar, că $\mathbb{R}^n - K$ este deschisă, deci K închisă

Să arătam că K este mărginită

Fie mulțimile deschise

$$H_n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < n\}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}$$

Atunci

$$K \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$$

Cum K este compactă, există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca $K \subseteq H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{n_0} \subseteq H_{n_0}$, ceea ce arată că K este mărginită

„$\Leftarrow$" K închisă, mărginită $\Rightarrow$ K compactă

Fie $\{D_\alpha = \mathring{D}_\alpha / \alpha \in A\}$ a.î. $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha$

Deoarece K este mărginită, există un interval închis I_1, din $\mathbb{R}^n$, având proprietatea că
$K \subseteq I_1$

Spre exemplu, putem alege
$I_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) / |\xi_i| < r, \forall i \in \{1, \dots n\}\}$
pt un r suficient de mare

Să presupunem că K nu este conținută în nici o reuniune finită de elemente din mulțimea $\{D_\alpha = \mathring{D}_\alpha / \alpha \in A\}$

Atunci, cel puțin unul dintre cele 2^n intervale închise obținute prin înjumătățirea „laturilor" lui I_1 conține puncte din K și intersecția lui K cu acest interval nu este conținută în nici o reuniune finită de elemente din mulțimea $\{D_\alpha = \mathring{D}_\alpha / \alpha \in A\}$

fie I_2 un astfel de interval

Continuând acest procedeu obținem un șir $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de intervale nevide închise incluse astfel ~~astfel~~ încât, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, mulțimea nevidă $K\cap I_n$ nu este conținută în nicio reuniune finită de elemente din mulțimea $\{\Delta_\alpha = \Delta_\alpha^0 / \alpha\in A\}$

Conform Teoremei intervalelor nevide incluse există $y\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$

Atunci y este un punct de acumulare al lui K.

Cum K este închisă, $y\in K$, deci există $\alpha_0\in A$, astfel ca $y\in\Delta_{\alpha_0}$

Prin urmare, $(\exists)\ \varepsilon>0$ cu proprietatea

$$\|w-y\|<\varepsilon \Rightarrow w\in\Delta_{\alpha_0}$$

Întrucât lungimea laturilor lui I_k este $\frac{r}{2^{k-2}}$, avem că $w\in I_k \Rightarrow \|w-y\|<\frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}}$

deci dacă k este ales astfel ca

$\frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}} < \varepsilon$, atunci toate punctele lui I_k

se găsesc în D_{α_0}, ceea ce contrazice faptul că

$I_k \cap K$ nu este conținută în nici o reuniune

finită de elemente din mulțimea $\{D_\alpha = \Delta_\alpha^0 \mid \alpha \in A\}$