Examen la Algebră,
19 iunie 2017, seria 10.
La fiecare subiect se acordă un punctaj între 1 şi 10. Nota lucrării este media notelor celor 5 subiecte.
Timp de lucru: $2\frac{3}{4}$ ore

1. Fie $P(X) = X^3 + pX + q$ un polinom cu coeficienţi reali. Să se calculeze discriminantul $D(P)$ al lui P în funcţie de p şi q şi să se discute natura rădăcinilor lui P în funcţie de $D(P)$.

2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 3$ considerăm determinantul de ordin n cu elemente numere reale

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

(determinantul are 3 peste tot pe diagonala principală, 2 imediat deasupra ei, 1 imediat sub ea şi 0 în rest).
(a) Să se calculeze Δ_3 şi Δ_4.
(b) Să se arate că $\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$ pentru orice $n \geq 5$.
(c) Să se arate că $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$ pentru orice $n \geq 3$.

3. (a) Fie $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ aplicaţia liniară definită prin

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \;\; &= \;\; (x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5, x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5, \\ &\quad\;\; 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5) \end{aligned}$$

Să se determine $\mathrm{Ker} f$, $\dim(\mathrm{Ker} f)$ şi $\dim(\mathrm{Im} f)$.
(b) Există o aplicaţie liniară injectivă $g : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$?

4. Fie o transformare liniară $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ care are în baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$ matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$$

(a) Să se determine valorile proprii ale lui T şi vectorii proprii corespunzători fiecărei valori proprii.
(b) Să se determine forma canonică Jordan a lui T şi o bază Jordan (în care T are ca matrice forma canonică Jordan).
(c) Să se determine polinomul minimal al lui T.
(d) Să se arate că $A^n \neq I_4$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

5. Fie K un corp comutativ, V un K-spaţiu vectorial şi $V^* = Hom_K(V, K)$ dualul lui V. Fie $n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că:
(a) Dacă $v_1, \dots, v_n \in V$ sunt liniar independente, atunci există $f_1, \dots, f_n \in V^*$ cu $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ pentru orice $1 \leq i, j \leq n$ (unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker).
(b) Dacă $f_1, \dots, f_n \in V^*$ sunt liniar independente, atunci există $v_1, \dots, v_n \in V$ cu $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ pentru orice $1 \leq i, j \leq n$.