EXAMEN
Teoria măsurii
28.01.2022

Exercițiu 1 Aplicați teorema de convergență monotonă șirului de funcții

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[\frac{1}{n},n]}(x) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

în spațiul cu măsură $((0,\infty), \mathcal{L}\text{eb}((0,\infty)), \lambda)$. Calculați

$$\int_{(0,\infty)} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x).$$

Analizați limita

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{1}{\sqrt{x}}(e^{-nx^2} + 1) d\lambda(x).$$

Exercițiu 2 Fie $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, suprafața dată prin

$$\sigma(u,v) = (u - v, u + v, u^2v^2).$$

Determinați $\partial\sigma$ și, folosind formula Stokes-Ampere, calculați

$$\int_\sigma (\text{curl}(F)|ds)_{\mathbb{R}^3},$$

unde

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = (-y, z, x - z).$$

Exercițiu 3 Fie $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea

$$|f(x,y)| \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}, \quad \forall (x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty).$$

Arătați că f nu este Lebesgue integrabilă.