EXAMEN
Teoria măsurii
28.01.2022

**Exerciţiu 1** Fie $j \in \mathbb{N}^*$. Aplicaţi teorema de convergenţă monotonă şirului de funcţii

$$f_n(x) = x^j \ln(x) \chi_{[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]}(x) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

în spaţiul cu măsură $((0,1), \mathcal{L}\text{eb}(0,1), \lambda)$.
Dezvoltând în serie funcţia $\frac{1}{1-x}$ calculaţi

$$\int_{(0,1)} \frac{\ln(x)}{1-x} d\lambda(x).$$

**Exerciţiu 2** Fie $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, suprafaţa dată prin

$$\sigma(u,v) = (uv, v, u^2).$$

Determinaţi $\partial\sigma$ şi, folosind formula Stokes-Ampere, calculaţi

$$\int_\sigma (\text{curl}(F)|ds)_{\mathbb{R}^3},$$

unde

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = (y, z, 2x).$$

**Exerciţiu 3** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea

$$|f(x)| \geq e^{x^2}.$$

Arătaţi că $f$ nu este Lebesgue integrabilă pe $\mathbb{R}$.