GEOMETRIE

SEMINAR 13

I Decideți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

(1) Dacă hiperbola $\mathcal{H}$ are ecuația $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$, atunci punctul $P = (10, 0)$ este focar al lui $\mathcal{H}$.

(A) $a^2 = 64$, $b^2 = 36$, $c^2 = a^2 + b^2 = 100$

$c = 10$

$F_1(10, 0)$, $F_2(-10, 0)$.

(2) Dreptele din plan $d_1 : 2x - y - \alpha = 0$

$d_2 : -4x + 2y + 5 = 0$

sunt paralele pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$

(A) vectorii normali sunt $n_1 = (2, -1)$

$n_2 = (-4, 2) = -2n_1$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-1)\cdot(-4) = 0 \Rightarrow n_1 \parallel n_2 \Rightarrow d_1 \parallel d_2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(3) Dacă $A = (1, -1)$, $B = (4, -3)$, $C = (-5, 3)$, atunci triunghiul ABC este degenerat.

(A) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3+12+5-15-3+4$

$= 0$, adică ΔABC e degenerat.

(5) Dacă o conică Γ are două centre A și B distincte, atunci orice punct de pe dreapta AB este centru pentru Γ.

(A) pentru o conică Γ, mulțimea centrelor este ori vidă, ori un singur punct, ori o dreaptă.
ipoteza noastră $\Rightarrow$ centrul e o dreaptă, dreapta AB.

II [1] În planul $\mathbb{R}^2$, fie dreapta $d: x+3y-2=0$
și funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(3x-2, 3y+2)$

(a) Arătați că f este omotetie și calculați centrul și raportul ei.

Centrul este punct fix pentru omotetie, deci căutăm (x,y) pentru care $f(x,y)=(x,y)$

$$(3x-2,\ 3y+2)=(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$A(1,-1)$.

$$f(x,y)=(3x-2,\ 3y+2)=3\big((x,y)-(1,-1)\big)+(1,-1)$$ ✓

Deci f e omotetie de centru $A(1,-1)$ și raport $k=3$

(b) Aflați ecuația dreptei $d' = f(d)$ și calculați distanța de la d la d'.

Alegem 2 puncte de pe d: $B = (2,0)$, $C = (-1,1)$. $d = BC$

$B' = f(B) = (4,2)$

$C' = f(C) = (-5,5)$

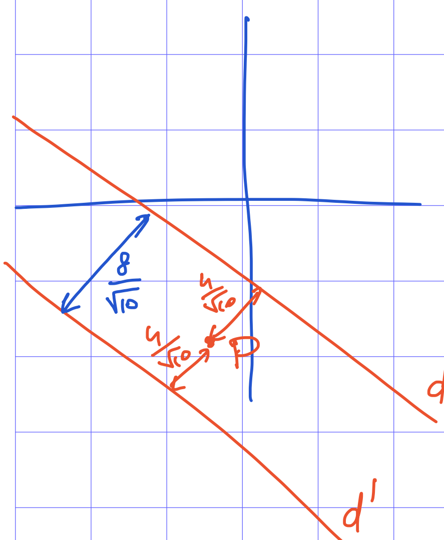
$d' = B'C' : \dfrac{x+5}{4+5} = \dfrac{y-5}{2-5}$

$d' : \dfrac{x+5}{9} = \dfrac{y-5}{-3}$ ⇢ $d' : x+5 = -3y+15$

$$\boxed{d' : x + 3y - 10 = 0}$$

$$\text{dist}(d, d') = \text{dist}(B, d') = \frac{|1\cdot 2 + 3\cdot 0 - 10|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

(c) Găsiți ecuația unei conice nedegenerate care este tangentă la d și d'.



Mai întâi găsim un punct P la jumătatea distanței între d și d' (adică la $\frac{4}{\sqrt{10}}$ de d și d') și apoi luăm Γ = cercul de centru P și rază $\frac{4}{\sqrt{10}}$.

Cum să găsim pe P?

Luăm un punct pe d, altul pe d', iar mijlocul segmentului determinat de cele 2 puncte va avea proprietatea de a se afla la jumătatea dist de d și d'!

De exemplu, $\overset{\in d}{B} = (2,0)$ și $\overset{\in d'}{B'} = (4,2)$

P = mijlocul lui $BB' = (3,1)$

C = cercul de centru $(3,1)$ și rază $\frac{4}{\sqrt{10}}$ este conica căutată

$C: \ (x-3)^2 + (y-1)^2 = \frac{16}{10}$

$\boxed{2}$ În planul $\mathbb{R}^2$, considerăm conica

$\Gamma: \quad x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 8y + 4 = 0.$

(a) Aflați natura conicei Γ. Precizați dacă este nedegenerată și dacă are centru unic.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$\Delta = \det \tilde{A} = 4 + 16 + 16 - 4 - 16 - 16$
$= 0$

deci Γ este degenerată

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$

deci Γ are centru unic

(b) Aduceți Γ la forma canonică și precizați reperul în care Γ are această formă.

Aflăm mai întâi centrul unic.

$AX_0 = -b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_0 + 2y_0 = -2 \\ 2x_0 + y_0 = -4 \ \ / \cdot (-2) \end{cases}$$

$-3x_0 = -2 + 8$

$\boxed{x_0 = -2}$ $\quad \boxed{y_0 = -4 - 2x_0 = 0}$

$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ este centrul unic al lui Γ.

Facem schimbarea de repere $R' = \left\{ 0' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$

$X' = X - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ coord. în R'

Γ în R' are forma: $\Gamma: \; {}^tX' A X' + \frac{\Delta}{\delta} = 0$ $\qquad \frac{\Delta}{\delta} = 0$

$\Gamma: \; (x' \; y') \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0.$

Mai departe, trebuie să diagonalizăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -2 & X-1 \end{vmatrix} = 0 \iff X^2 - 2X + 1 - 4 = 0$

$X^2 - 2X - 3 = 0$

$(X-3)(X+1) = 0.$ Deci v.p. sunt

$\lambda_1 = 3, \; \lambda_2 = -1.$

Căutăm acum vectori proprii corespunzători pt. fiecare val. proprie

Căutăm v_1 a.î. $A v_1 = 3 \cdot v_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

Alegem $v_1 = (1, 1)$. $\quad \|v_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Alegem $u_2 \perp u_1$, $\|u_2\| = 1$ (și atunci sigur va fi vector propriu corespunzător lui $\lambda_2 = -1$)

$$u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$$

Verificăm că reperul $\{u_1, u_2\}$ e pozitiv orientat, $\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{vmatrix} = \frac12 - \left(-\frac12\right) = 1 > 0$

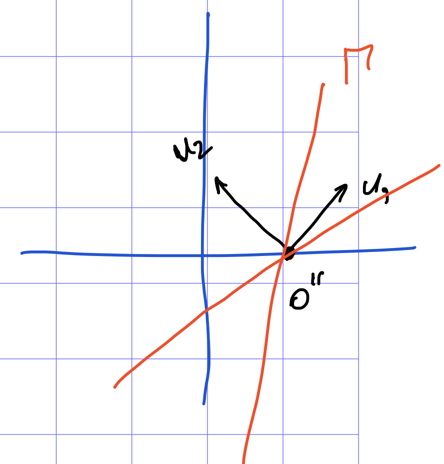
Deci $R'' = \left\{ O'' = O' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}} \right\} \right\}$

În reperul R'', Γ are forma:

$$\Gamma : {}^tX'' \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X'' = 0$$

$$\Gamma : 3x''^2 - y''^2 = 0$$

$$\Gamma : (\sqrt3 x'' - y'')(\sqrt3 x'' + y'') = 0.$$



Deci Γ este pereche de drepte secante.

$\boxed{3}$ În $\mathbb{R}^2$ considerăm cercurile neconcentrice

$$C_1 : f_1(x,y) = x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$C_2 : f_2(x,y) = x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

și d axa lor radicală.

Considerăm mulțimea de conice

$$\mathcal{F} = \left\{ \Gamma_{\alpha_1, \alpha_2} : \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \; \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0 \right\}$$

(a) Demonstrați că $d \in \mathcal{F}$ și este singura dreaptă din $\mathcal{F}$.

REM: dacă C_1 și C_2 sunt ca mai sus, axa radicală

este $d_{C_1C_2} : \underline{(a_1-a_2)x + (b_1-b_2)y + (c_1-c_2) = 0}.$

Luăm $\alpha_1 = 1$ și $\alpha_2 = -1$ și obținem $\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2} = d_{C_1,C_2} = d$.

$\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2} : \alpha_1 f_1(x,y) + \alpha_2 f_2(x,y) = 0$

$$\alpha_1(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1) + \alpha_2(x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2) = 0$$

$$\boxed{\underline{(\alpha_1+\alpha_2)}x^2 + \underline{(\alpha_1+\alpha_2)}y^2 + (\alpha_1a_1+\alpha_2a_2)x + (\alpha_1b_1+\alpha_2b_2)y + \alpha_1c_1+\alpha_2c_2 = 0}$$

Dacă $\alpha_1+\alpha_2 = 0$, atunci împărțim ec. la α_1 (care trebuie să fie $\neq 0$)

și obținem ec. dreptei d (axa radicală).

Dacă $\alpha_1+\alpha_2 \neq 0$, $\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2}$ este cerc ($\underline{\text{posibil degenerat}}$), deci nu poate fi dreaptă.

punct sau ϕ

Concluzie: singura dreaptă din $\mathcal{F}$ este d.

(b) Demonstrați că cercurile din $\mathcal{F}$, diferite de C_1, au axa radicală cu C_1 egală cu d.

$$\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2} = \underbrace{\text{cerc din } \mathcal{F}}_{\alpha_1+\alpha_2\neq 0}, \underbrace{\text{diferit de } C_1}_{\text{adică } \alpha_2\neq 0.}$$

$$* \quad \boxed{\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2} : x^2+y^2 + \frac{\alpha_1a_1+\alpha_2a_2}{\alpha_1+\alpha_2}x + \frac{\alpha_1b_1+\alpha_2b_2}{\alpha_1+\alpha_2}y + \frac{\alpha_1c_1+\alpha_2c_2}{\alpha_1+\alpha_2} = 0}$$

axa radicală a lui $\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2}$ cu C_1 este $d_{\Gamma_{\alpha_1\alpha_2}, C_1}$: $\left(\frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}{\alpha_1+\alpha_2} - a_1\right)x + \left(\frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1+\alpha_2} - b_1\right)y + \left(\frac{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2}{\alpha_1+\alpha_2} - c_1\right) = 0$

$$d_{\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2}, C_1} : \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\Big[\left(\cancel{\alpha_1 a_1} + \alpha_2 a_2 - \cancel{\alpha_1 a_1} - \alpha_2 a_1\right)x + \left(\cancel{\alpha_1 b_1} + \alpha_2 b_2 - \cancel{\alpha_1 b_1} - \alpha_2 b_1\right)y + \left(\cancel{\alpha_1 c_1} + \alpha_2 c_2 - \cancel{\alpha_1 c_1} - \alpha_2 c_1\right)\Big] = 0$$

$$d_{\Gamma_{\alpha_1\alpha_2}, C_1} : \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\Big[(a_2-a_1)x + (b_2-b_1)y + (c_2-c_1)\Big] = 0$$

adică $d_{\Gamma_{\alpha_1\alpha_2}, C_1} = d.$ ✓

(c) Demonstrați că dacă $C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$ $A \neq B$, atunci cercurile din $\mathcal{F}$ sunt exact cercurile care trec prin A și B.

$$C_1 \cap C_2 = \{A, B\} \implies d = AB$$

Fie $\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2}$ = cerc din $\mathcal{F}$ $= \underbrace{\{\alpha_1 f_1(x,y) + \alpha_2 f_2(x,y) = 0\}}$ $\ni A, B$ deoarece

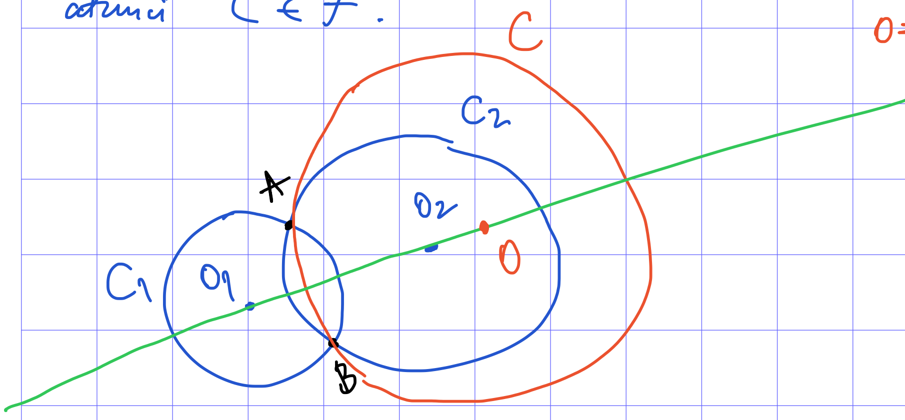
$A, B \in C_1 \cap C_2$

$\Downarrow$

$f_1(A) = f_2(A) = 0$

și $f_1(B) = f_2(B) = 0$

Acum, trebuie să arătăm că dacă $C=$ cerc care trece prin A și B, atunci $C \in \mathcal{F}$.



$O=$ centrul lui C

$O \in O_1O_2$

$$* \quad \Gamma_{\alpha_1,\alpha_2}: x^2+y^2+\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2}{\alpha_1+\alpha_2}x+\frac{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2}{\alpha_1+\alpha_2}y+\frac{\alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2}{\alpha_1+\alpha_2}=0$$

$(\alpha_1+\alpha_2\neq 0)$

Centrul cercului $\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2}$ este $\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2}{\alpha_1+\alpha_2}, -\frac{1}{2}\frac{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)=$

$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$
centrul: $\left(-\frac{a_1}{2},\frac{-b_1}{2}\right)$ ✓

$=$ vrem să il scriem ca o comb. a centrelor celor 2 cercuri

$$=\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\frac{-a_1}{2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\frac{-a_2}{2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\frac{-b_1}{2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\frac{-b_2}{2}\right)$$

$$=\underbrace{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}_{t=}\cdot\underbrace{\left(-\frac{a_1}{2},-\frac{b_1}{2}\right)}_{\text{centrul lui } C_1}+\underbrace{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}_{=1-t}\cdot\underbrace{\left(-\frac{a_2}{2},-\frac{b_2}{2}\right)}_{\text{centrul lui } C_2}$$

suma este 1, deci punctul rezultat este pe dreapta O_1O_2

Cu toate alegerile posibile pentru α_1 și α_2 (adică pentru t), vom obține toată dreapta O_1O_2, deci toate cercurile care trec prin A și B vor fi în $\mathcal{F}$.

(d) $C_1 \cap C_2 = \phi$. Demonstrați că cercurile din $\mathcal{F}$ sunt disjuncte 2 câte 2.

Să presupunem PRIN ABSURD că $\exists$ $\underbrace{\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2} \text{ și } \Gamma_{\alpha_1',\alpha_2'}}_{\text{cercuri distincte}} \in \mathcal{F}$ a.î.

$\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2} \cap \Gamma_{\alpha_1',\alpha_2'} \neq \phi$.

cercuri distincte $\iff \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \alpha_2' \end{vmatrix} \neq 0$.

Deducem că $\begin{cases} \alpha_1 f_1(x,y) + \alpha_2 f_2(x,y) = 0 \\ \alpha_1' f_1(x,y) + \alpha_2' f_2(x,y) = 0 \end{cases}$ are sol. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\Downarrow$

$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$ are sol. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Downarrow$

$C_1 \cap C_2 \neq \phi$ contradicție!

Deci cercurile din $\mathcal{F}$ sunt disjuncte 2 câte 2.