TAFALAN ALEXANDRU

TUTORIAT GEOMETRIE - Nr 5 (SĂPTĂMÂNA 6)

Translații. Omotetii. Simetrii

1) Definiție (TRANSLAȚIE)

Fie $(\mathcal{A}, V_{/\mathbb{K}}, \varphi)$. $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește translație dacă $T_\tau : V \to V$ (urma vectorială a lui τ) este $T_\tau = id_V$

MATRICIAL

$$\tau(X) \overset{not}{=} \underbrace{Y = X + B}_{} \Rightarrow A = I_n$$

din TEORIA GENERALĂ :)

2) Proprietăți translații

i) O translație "duce" un subspațiu afin într-un subspațiu afin paralel cu transformatul (subsp. inițial), iar subspațiul obținut are aceeași dimensiune cu subspațiul inițial.

ii) Translațiile sunt transformări afine bijective.

iii) Translațiile nu au puncte fixe.

iv) $(T_v)^{-1} = T_{-v}$, $v \in V$

v) $T_v \circ T_w = T_{v+w}$.

2) Definiție (OMOTETIE)

Fie $(\mathcal{A}, V_{/\mathbb{K}}, \varphi)$ spațiu afin, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ și $O \in \mathcal{A}$ fixate. Se numește OMOTETIA DE

CENTRU O ŞI RAPORT/PONDERE λ, funcţia $\mathcal{H}_O^{\lambda} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ unic definită de

$$\mathcal{H}_O^{\lambda}(P) = P' \iff \overrightarrow{OP'} = \lambda\,\overrightarrow{OP}, \quad (\forall) P \in \mathcal{A}$$

MATRICIAL:

$$\tau(X) = \lambda X + (1-\lambda) B$$

3) Proprietăţi omotetii:

i) $\lambda = 1 \Rightarrow$ omotetia e de fapt identitatea

ii) $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ omotetia are un punct fix, anume centrul omotetiei.

iii)

$$\underbrace{\mathcal{H}_{O_2}^{\lambda_2} \circ \mathcal{H}_{O_1}^{\lambda_1}}_{\text{compunere}} = \begin{cases} \mathcal{H}_O^{\lambda_1 \cdot \lambda_2} ; & \text{Dacă } \lambda_2 \cdot \lambda_1 \neq 1, \text{ unde } O \text{ e baricentru de ponderi egale al sistemului } \{O_1, O_2\} \\ T_{(1-\lambda_2)\overrightarrow{O_1 O_2}} ; & \text{Dacă } \lambda_2 \cdot \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

Translaţia de vector $\underbrace{\underbrace{(1-\lambda_2)}_{\in K} \cdot \overrightarrow{O_1 O_2}}_{\in V}$

Exerciţiul 1:

Fie $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3_{/\mathbb{R}}, \varphi_{can})$. Considerăm $\mathcal{R}_c$ reperul canonic cartezian $\mathcal{R}_c = \{O(0,0,0);\ e_1 = (1,0,0);\ e_2 = (0,1,0);\ e_3 = (0,0,1)\}$.

a) Să se scrie ecuaţiile în raport cu reperul cartezian al simetriei $\Delta_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, unde $M(-1, 4, -2)$ şi ale omotetiei $\mathcal{H}_N^3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, unde $N(4, 6, -3)$

b) Se consideră dreapta $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{4}$

Să se determine $s_M(d)$;

c) Se consideră planul $\pi: x-2y+5z+7=0$.

Să se determine $\mathcal{H}_N^3(\pi)$

Soluție:

a) Fie $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ și $P'=(x',y',z')$ este simetricul lui P în raport/față de M.

Avem că M e mijlocul lui PP' $\Rightarrow$

$\Rightarrow M = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P'$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x' \\ 4 = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y' \\ -2 = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2-x \\ y' = 8-y \\ z' = -4-z \end{cases}$$

Deci $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}}_{B}$$

$\Rightarrow X' = AX + B$

$\mathcal{H}_N^3(P) = P' \Leftrightarrow \overrightarrow{NP'} = 3\overrightarrow{NP} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x'-4, y'-6, z'+3) = 3(x-4; y-6; z+3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-4 = 3x-12 \\ y'-6 = 3y-18 \\ z'+3 = 3z+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x-8 \\ y' = 3y-12 \\ z' = 3z+6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 3 \cdot I_3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1-3)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $P(2,-2,-3) \in d$

$s_M(d) \stackrel{not}{:=} d'$

d' va fi o dreaptă $[\dim(d') = \dim(d)]$ şi

$d' \parallel d \Rightarrow \mathcal{D}ir(d') = \mathcal{D}ir(d)$

$\mathcal{D}ir(d) = \langle (3; -5; 4) \rangle$

$P \in d \Rightarrow s_M(P) \stackrel{not}{:=} P' \in d'$

Calculez $s_M(P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ sau

sau Determin legea lui s_M

$s_M((x,y,z)) = AX + B = (-2-x; 8-y; -4-z)$

$s_M((2,-2;3)) = (-4; 10; -7)$

Deci $P'(-4, 10, -7)$

Aşadar, scriu ecuaţia lui d' care trece prin punctul $P'(-4,10,-7)$ şi este paralelă cu d

$s_M(d) = d'$: $\frac{x+4}{3} = \frac{y-10}{-5} = \frac{z+7}{4}$

c) Determin legea lui $\mathcal{H}_N^3$

$\mathcal{H}_N^3((x,y,z)) = (3x-8; 3y-12; 3z+6)$

$\pi: x - 2y + 5z + 7 = 0.$

Notez: $(P) \stackrel{not}{=} \mathcal{H}_N^3(\pi)$. Atunci

(P) este un subspațiu afin care are $\dim(P) = \dim(\Pi)$ și $(P) \parallel \Pi$

Deci (P) este un plan paralel cu Π.

$\mathrm{Dir}(\Pi) : x - 2y + 5z = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{Dir}(\Pi) : \begin{cases} x = 2\alpha - 5\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \mathrm{Dir}(\Pi) = Sp_{\mathbb{R}}\{(2,1,0); (-5;0;1)\}$

$(P) \parallel (\Pi) \Rightarrow \mathrm{Dir}(P) = \mathrm{Dir}(\Pi) = Sp_{\mathbb{R}}\{(2,1,0); (-5,0,1)\}$

$A(-7, 0, 0) \in \Pi$

Atunci $\mathcal{H}_N^3((-7,0,0)) \in (P)$

Calculez:

$$\mathcal{H}_N^3((-7,0,0)) = (-29; -12; 6).$$

Deci

$$(P) : \begin{vmatrix} x+29 & y+12 & z-6 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{calcul}$$

Exercițiul 2:

Care dintre următoarele submulțimi reprezintă plane în spațiul $A = \mathbb{R}^3$ (cu structura canonică)

a) $A' = \{(x,y,z) \mid x^2 = 0\}$ ✓ $\Rightarrow$ "PLAN DUBLU"

b) $A' = \{(x,y,z) \mid x - 2y = 1\}$ ✓

c) $A' = \{(\alpha+1; \beta+1; \alpha+\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ✓

d) $A' = \{(\alpha, \alpha+1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

<u>Răspuns</u>:

a), b), c)

Justificare:

a) $A' = \{(x, y, z) \mid x^2 = 0\}$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow A' = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$= Sp_{\mathbb{R}}\{(0,1,0); (0,0,1)\}$

b) $A' = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 1\}$

$\dim(A') = 3 - \text{rang}(1, -2, 0) = 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow A'$ e plan în $\mathbb{R}^3$

$Dir(A') = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0\}$

$Dir(A') = \{(2y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = Sp_{\mathbb{R}}\{(2,1,0); (0,0,1)\}$

c) $A' = \{(\alpha+1; \beta+1; \alpha+\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$Dir(A') = \{(\alpha; \beta; \alpha+\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= Sp_{\mathbb{R}}\{(1,0,1); (0,1,1)\}$ ✓

$\Rightarrow \dim(A') = \dim(Dir(A')) = 2 \Rightarrow A'$ e plan în $\mathbb{R}^3$

d) $Dir(A') = \{(\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$= Sp_{\mathbb{R}}\{(1,1,0)\}$

$\Rightarrow \dim(Dir(A')) = 1 = \dim(A') \Rightarrow A'$ e o dreaptă în $\mathbb{R}^3$.

Exercițiul 3:

În spațiul afin $\mathbb{R}^3$ cu structura canonică afină considerăm dreptele d_1 și d_2:

$$(d_1): \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-2}{-1} = \frac{x_3-3}{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(d_2): \begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = 2-t \\ x_3 = 3+2t \end{cases}$$

a) Determinați, pentru $\alpha=1$, ecuația planului determinat de d_1 și d_2;

b) Determinați α a.î. $d_1 \parallel d_2$;

c) Există $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $d_1 \vee d_2 = \mathbb{R}^3$? Justif.

Soluție:

a) Scriu ecuația lui (d_2) cartezian:

$$(d_2): \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-2}{-1} = \frac{x_3-3}{2} = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\alpha=1 \Rightarrow (d_1): \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-2}{-1} = \frac{x_3-3}{1}$$

Observ că $d_1 \cap d_2 = \{P(1,2,3)\}$, deci d_1 și d_2 sunt concurente.

Ecuația planului determinat de d_1 și d_2 este

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{calcule}$$

dir(d_1)

dir(d_2)

$$\Rightarrow \pi: x+y-3=0.$$

b) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow (\exists)\, k$ a.î. $(1,-1,2) = k(1,-1,\alpha)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{2}{\alpha} = k$

Cum $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = 1 \rightarrow k = 1$

iau $k = 1 \Rightarrow \underline{\alpha = 2}$

Deci, pentru $\alpha = 2$: $d_1 \parallel d_2$

c) Determin $d_1 \cap d_2$: $\begin{cases} x_1 = 1+s \\ x_2 = 2+s \\ x_3 = 3+\alpha s \\ x_1 = 1+t \\ x_2 = 1-t \\ x_3 = 3+2t \end{cases}$ $s, t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 1+s = 1+t \\ 2+s = 2+t \end{array}\right\} \Rightarrow s = t$, $3+\alpha s = 3+t$ $\Downarrow$ $\begin{cases} \alpha s = 2t \\ s = t \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha t = 2t \xrightarrow{(\forall) t \in \mathbb{R}} \alpha = 2$

Deci, pentru $\alpha = 2$ avem $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset \rightarrow$

$\dim(A_1 \vee A_2) = 1 + 1 - \dim(d_1 \cap d_2) \neq 3$

Pentru $\underline{\underline{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}}}$ avem $d_1 \cap d_2 = \emptyset$

Determin $dir(d_1) \cap dir(d_2)$

$dir(d_1)$: $\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = s \\ x_3 = \alpha s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} s = t \\ 2s = t \\ \alpha s = 3t \end{cases}$, $(\forall)\, s, t \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\Downarrow$ $s = t = 0$.

$(0, 0, 0)$

$dir(d_2)$: $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Deci, $\dim(dir(d_1) \cap dir(d_2)) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$

Așadar

$\dim(d_1 \vee d_2) = \dim(d_1) + \dim(d_2) - \dim(dir(d_1) \cap dir(d_2))$

$+1$

$\Rightarrow \dim(d_1 \vee d_2) = 1+1-0+1 = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow d_1 \vee d_2 = \mathbb{R}^3$ pentru $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$