Examen Mărire

2 Iunie 2018

Timp de lucru 2h30. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație cu densitatea $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$.

a) Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ obținut prin metoda momentelor și estimatorul $\hat{\theta}$ obținut prin metoda verosimilității maxime.

b) Determinați legea variabilei $n(\hat{\theta} - \theta)$ și verificați dacă estimatorul $\hat{\theta}$ este nedeplasat.

c) Calculați eroarea medie pătratică a lui $\hat{\theta}$.

d) În cazul în care $\theta = 3$ dorim să generăm 4 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de patru valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0,\ 1]$: $u_1 = 0.647$, $u_2 = 0.637$ și $u_3 = 0.159$. Descrieți procedura.

Exercițiul 2

10p

Numărul de clienți care intră în magazinul Unirea zilnic poate fi modelat cu ajutorul unei variabile aleatoare repartizate Poisson de parametru λ, cunoscut. Odată intrat, un client cumpără produse în valoare de cel puțin 250 RON cu probabilitatea p. Pentru a estima p avem la dispoziție un eșantion $Y_1, Y_2, \dots, Y_{20}$ pentru 20 zile, reprezentând numărul de clienți, zilnic, care au efectuat cumpărături de cel puțin 250 RON:

`4 4 1 4 0 3 4 1 6 7 7 5 3 5 4 6 2 2 5 6`

Propuneți un estimator pentru p, studiați proprietățile acestuia și dați o estimare plecând de la eșantionul dat (știind că $\lambda = 18$).

Exercițiul 3

10p

Considerăm densitatea f_θ în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$ definită prin

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta}\left(\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x) + \mathbf{1}_{[2\theta,3\theta]}(x)\right)$$

cu $\theta > 0$ un parametru necunoscut și fie $X_1, \dots, X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ.

a) Determinați estimatorul $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și precizați care este repartiția limită a acestuia.

b) Calculați cuartila de ordin 1, $Q_1 = x_{\frac{1}{4}}$ și plecând de la aceasta găsiți un estimator $\hat{\theta}_n^{Q_1}$ consistent pentru θ. Specificați repartiția limită a acestuia.

c) Aceeași întrebare pentru cuartila de ordin 3 (notați estimatorul cu $\hat{\theta}_n^{Q_3}$).

d) Pe care dintre cei trei estimatori $\hat{\theta}_n^M$, $\hat{\theta}_n^{Q_1}$ și $\hat{\theta}_n^{Q_3}$ îl preferați ?

e). Pentru $0 < x < \theta$ calculați $\mathbb{P}(X_{(n)} \leq 3\theta - x)$, unde $X_{(n)}$ este statistica de ordine de rang n. Găsiți un estimator $\hat{\theta}_n^S$ consistent pentru θ.

f) Determinați repartiția limită a lui $n(\theta - \hat{\theta}_n^S)$.

g) Pe care dintre cei patru estimatori îi preferați ?

h) Propuneți o metodă de determinare a unui interval de încredere ne asimptotic de nivel de încredere $1 - \alpha$ pentru θ.