(1) 19.03.24

ElemTN_~~4~~_3II

$(96, 80) = 16.$

$16 = 1\cdot 96 + (-1)\cdot 80.$

Să scriem $(1202, 784)$ sub formă de combinație liniară (cu coef în $\mathbb{Z}$) de 1202 și 784.

Sol: utilizăm algoritmul lui Euclid.

$1202 = 1\cdot 784 + 418 \Rightarrow 2 = 23\cdot 784 - 15\cdot 1202$

$784 = 1\cdot 418 + 366 \Rightarrow 2 = 8\cdot 784 - 15\cdot 418$

$418 = 1\cdot 366 + 52 \Rightarrow 2 = 8\cdot 366 - 7\cdot 418$

$366 = 7\cdot 52 + \boxed{2} \rightarrow 2 = 366 - 7\cdot 52$

$52 = 26\cdot 2$

(*) $\alpha_0 \overset{def}{=} 1$, $\beta_0 \overset{def}{=} -q_0$

$\alpha_1 \overset{def}{=} -q_1$, $\beta_1 \overset{def}{=} 1 + q_0 q_1$

$a = b q_0 + r_0 \qquad r_0 = \underset{\alpha_0}{1}\cdot a \underset{\beta_0}{-q_0}\cdot b$

$b = r_0 q_1 + r_1 \qquad r_1 = b - q_1 r_0 = b - q_1(a - q_0 b) =$

$r_0 = r_1 q_2 + r_2 \qquad = -q_1 a + (1 + q_0 q_1) b.$

$r_{j-2} = r_{j-1} q_j + r_j \Rightarrow r_j = r_{j-2} - r_{j-1} q_j =$

$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$

$r_{n} = r_{n+1} q_{n+2}.$

$(\alpha_{j-2} a + \beta_{j-2} b) - q_j(\alpha_{j-1} a + \beta_{j-1} b) =$

$= \underbrace{(\alpha_{j-2} - q_j \alpha_{j-1})}_{\alpha_j} a + \underbrace{(\beta_{j-2} - q_j \beta_{j-1})}_{\beta_j} b \quad (1)$

	0	1	2	3	4
q	1	1	1	7	26
α	1	-1	2	-15	
β	1	2	3	23	

În (1) am definit (2)

$\alpha_j = \alpha_{j-2} - q_j \alpha_{j-1}$

și

$\beta_j = \beta_{j-2} - q_j \beta_{j-1}$

Din (*) conform tabelului,

$2 = (1202, 784) = -15 \cdot 1202 + 23 \cdot 784.$

$1202 = 2 \cdot 784 - 366$

$784 = (-2)(-366) + 52$

$-366 = -7 \cdot 52 - 2$

$52 = (-26)(-2)$

	0	1	2
q	2	-2	-7
α	1	2	15
β	-2	-3	-23

$a = b c_0 + r_0$ așa ceva!

$b = r_0 c_1 + r_1$

$r_0 = r_1 c_2 + r_2$

$r_{n-1} = r_n c_{n+1} + r_{n+1}$

$r_n = r_{n+1} c_{n+2}$

$1202 = c_0 \cdot 784 - 366$

$366 = 1 \cdot 1202 - c_0 \cdot 784$

$52 = 784 + c_1(-366) = 784 + c_1(1 \cdot 1202 - c_0 \cdot 784) = (1 - c_0 c_1) \cdot 784 + c_1 \cdot 1202$

de făcut tabel

Vom avea $r_{j-2} = r_{j-1} c_j + r_j \iff$

$r_j = r_{j-2} - r_{j-1} c_j$

$r_j = (\alpha_{j-2} a + \beta_{j-2} b) - c_j(\alpha_{j-1} a + \beta_{j-1} b)$

Punem $\alpha_j = \alpha_{j-2} - c_j \alpha_{j-1}$; $\beta_j = \beta_{j-2} - c_j \beta_{j-1}$

Ni avem $a_j = \alpha_j a + \beta_j b$.

$$r_1 = b - r_0 c_1 = b - c_1(a - b c_0) = -c_1 a + (1 + c_0 c_1) b.$$

$$\boxed{\alpha_1 = -c_1 \,;\ \beta_1 = 1 + c_0 c_1}$$

Conform tabelului $-2 = 15 \cdot 1202 - 23 \cdot 784$ ce

$2 = -15 \cdot 1202 + 23 \cdot 784$.

Rezolvați în numere întregi ecuația

$30x - 38y = 14 \iff 15x - 19y = 7$

$15 \cdot 35 - 19 \cdot 28 = -7$

$15(x+35) = 19(y+28) \Rightarrow$

$\exists \lambda \in \mathbb{Z}\ \ x + 35 = 19\lambda \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z}\ \ x = -35 + 19\lambda$.

Pentru acest λ, $15 \cdot 19\lambda = 19(y+28) \iff$

$y + 28 = 15\lambda \iff y = 15\lambda - 28$.

Reciproc, fie că $\lambda \in \mathbb{Z}$

$15(-35 + \cancel{19\lambda}) - 19(\cancel{15\lambda} - 28) = -15 \cdot 35 + 19 \cdot 28 = 7$

Ca urmare, soluția ecuației date este

$\{(-35 + 19\lambda, 15\lambda - 28) : \lambda \in \mathbb{Z}\}$.

În scrierea de mai sus nu a fost clar că ar trebui păstrat echivalența și de aceea am recurs la verificare. Am fi putut scrie așa:

$$30x - 38y = 14 \iff 15x - 19y = 7 \overset{15 \cdot 35 - 19 \cdot 28 = -7}{\iff}$$

$$15(x+35) = 19(y+28) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{Z}\ (x + 35 = 19\lambda \wedge y + 28 = 15\lambda))$$

$$\iff (\exists \lambda \in \mathbb{Z}\ (x = 19\lambda - 35 \wedge y = 15\lambda - 28)).$$

Ca urmare, soluția ecuației date e $\{(-35 + 19\lambda, 15\lambda - 28) : \lambda \in \mathbb{Z}\}$

Rezolvați în numere întregi ecuația:

$$439x + 327y = 5$$

În general, pentru a rezolva o astfel de ecuație (adică, una liniară în două variabile cu coef în $\mathbb{Z}$):

- îi găsim o soluție particulară
- Odată găsită o sol. particulară, o folosim ca în soluția ecuației anterioare

---

$439 = 1\cdot 327 + 112$

$327 = 3\cdot 112 - 9$

$112 = (-12)(-9) + 4$

$-9 = (-2)\cdot 4 - 1$

$4 = (-4)\cdot(-1)$

	-1	0	1	2	3
c	0	1	3	-12	-2
α	0	1	-3	-35	-73
β	1	-1	4	47	98

$$\left\{\begin{array}{l} b = a\cdot \overset{c_{-1}}{0} + \overset{r_{-1}}{b} \\ a = b c_0 + r_0 \\ b = r_0 c_1 + r_1 \end{array}\right.$$

$$439\cdot(-73)\cdot 5 + 327\cdot 98\cdot 5 = -5$$

$439x + 327y = 5 \iff$

$439(x - 73\cdot 5) + 327(y + 490) = 0 \iff$

$439(x - 365) = -327(y + 490) \iff$

$\left(\exists \lambda \in \mathbb{Z}\ (x - 365 = -327\lambda \wedge y + 490 = 439\lambda)\right) \iff$

$\left(\exists \lambda \in \mathbb{Z}\ (x = 365 - 327\lambda \wedge y = -490 + 439\lambda)\right)$.

Deci, soluția ec. date e $\{(365 - 327\lambda, -490 + 439\lambda) : \lambda \in \mathbb{Z}\}$

$$\boxed{\frac{439}{327}} = 1 + \frac{112}{327} = 1 + \frac{1}{\frac{327}{112}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{103}{112}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{9}{103}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11 + \frac{4}{9}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}}}$$

FRACȚIE CONTINUĂ ASOCIATĂ lui $\frac{439}{327}$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2}}}} = \frac{98}{73}$$

$$\frac{73}{25} \quad \frac{25}{23} \quad \frac{23}{2}$$

$$1$$

$$1 + \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11}}}$$