TAFALAN ALEXANDRU-MARIAN

TUTORIAT GEOMETRIE - Nr 3 (SĂPTĂMÂNA 4)

Subspații afine. Ecuații în spații afine

Exercițiul 1:

Fie $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \varphi_{can})$ spațiu afin. Se consideră reperul cartezian canonic $\mathcal{R}_c = \{O(0,0,0); e_1=(1,0,0); e_2=(0,1,0); e_3=(0,0,1)\}$. Să se scrie:

i) ecuația dreptei care trece prin punctul $P_0(1,2,3)$ și are direcția dată de vectorul $\vec{u} = 3e_1 + 2e_2 + e_3$;

ii) ecuația dreptei care trece prin punctul $P_1(1,0,-2)$ și are parametrul dat de $(2,-1,4)$

iii) ecuația dreptei care trece prin punctele $P_2(1,-1,1)$ și $P_3(0,3,-2)$

iv) ecuația simetrică și parametrică a dreptei ce conține punctele $P(1,2,-1)$; $Q(-2,1,1)$ și $R(3,1,-1)$;

v) ecuația planului care trece prin originea reperului și are subspațiul director determinat de vectorii $\vec{u_1} = e_1 + e_2 + e_3$ și $\vec{u_2} = e_1 - e_2 + e_3$;

vi) ecuația planului care trece prin punctul $P_4(2,-1,-1)$ și are subspațiul director determinat de vectorii $\vec{v_1} = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ și $\vec{v_2} = e_1 - 2e_2 + e_3$

vii) ecuația planului care trece prin punctul $P_5(5,-3,2)$ și este paralel cu (xOy);

viii) ecuatia planului care trece prin punctul $P_6(4,-3,1)$ și este paralel cu dreptele afine $d_1: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$ și

$d_2: \frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$;

ix) ecuatia planului care contine dreapta afină $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-5}$ și este paralel cu dreapta: $d_2: \frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$;

x) ecuatia planului ce trece prin dreapta afină $d_1: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ și este paralel cu dreapta afină $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$;

xi) ecuatia planului care trece prin punctul $P_7(1,2,0)$ și este paralel cu planul afin: $\pi: \begin{cases} x = 1+s+t \\ y = 2s+t \\ z = 2-s-2t \end{cases}, s,t \in \mathbb{R}$;

xii) ecuatia planului care trece prin punctul $P_8(5,-3,2)$ și prin axa cotelor Oz

xiii) ecuatia planului care contine punctele $O(0,0,0)$, $P_9(1,2,3)$ și $P_{10}(0,4,1)$.

Solutie: i)

$$d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

2| $\vec{u} = 3e_1 + 2e_2 + e_3 = (3,2,1)$

ii) $P_1(1,0,-2)$, parametru $\rightarrow (2,-1,4)$

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 - 1t \\ z = -2 + 4t \end{cases} \Rightarrow d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{4} = t$$

iii) $$P_2P_3: \frac{x-1}{0-1} = \frac{y+1}{3+1} = \frac{z-1}{-2-1}$$

$$\Rightarrow P_2P_3: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-3}$$

iv) $P, Q, R \in d$

$\overrightarrow{QR} = (5, 0, -2) \Rightarrow \langle \overrightarrow{QR} \rangle = dir(d)$

$$\Rightarrow d: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{-2}$$

v) $O(0,0,0) \in \pi$

$\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle = dir(\pi)$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{\ }_1 = e_1 + e_2 + e_3 = (1,1,1)$

$\overrightarrow{\ }_2 = e_1 - e_2 + e_3 = (1,-1,1)$

$$\Leftrightarrow x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 2x - 0 \cdot y - 2z = 0. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi: 2x - 2z = 0. \Leftrightarrow \pi: x - z = 0.$

vi) $P_4(2,-1,-1) \in \pi$

$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = dir(\pi)$

$\vec{v}_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 = (1, 2, 3)$

$\vec{v}_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 = (1, -2, 1)$

$$\Pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \iff$$

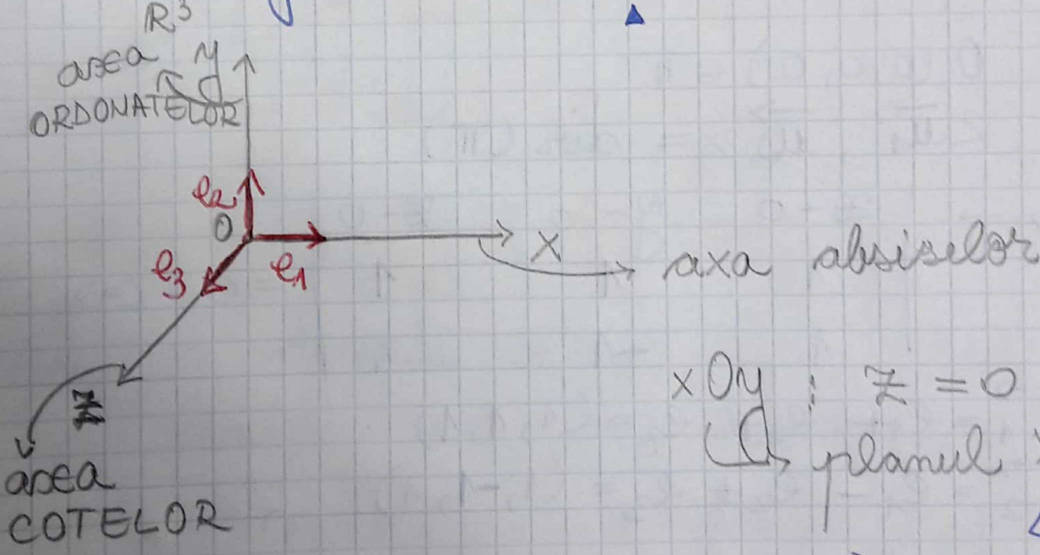
$$\iff (x-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$\iff 8x - 16 + 2y + 2 - 4z - 4 = 0 \iff$

$\iff \Pi: 8x + 2y - 4z - 18 = 0 \quad |:2 \iff$

$\iff \Pi: 4x + y - 2z - 9 = 0$ ▲

vii)



$xOy: z = 0$

↳ planul $xOy = \langle e_1, e_2 \rangle$

PARALELISM ÎN SPAȚII AFINE (teorie)

Definiție: Fie $(A, V_{/K}, \varphi)$ spațiu afin. Fie A_1 și $A_2 \subset A$ subspații afine. Spunem că $A_1 \parallel A_2 \iff \text{dir}(A_1) \subseteq \text{dir}(A_2)$ sau $\text{dir}(A_2) \subseteq \text{dir}(A_1)$

Observație: Dacă $\dim(A_1) = \dim(A_2)$, atunci $A_1 \parallel A_2 \iff \text{dir}(A_1) = \text{dir}(A_2)$.

Caz particular: $(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}; f_{can})$

(i) d_1 – dreaptă afină
$dir(d_1) = \langle \vec{u} \rangle$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$
d_2 – dreaptă afină
$dir(d_2) = \langle \vec{v} \rangle$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

• $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow dir(d_1) = dir(d_2) \Leftrightarrow Sp_{\mathbb{R}}\{\vec{u}\} = Sp_{\mathbb{R}}\{\vec{v}\}$

$\Leftrightarrow (\exists)\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $v = \lambda u \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3} = \lambda$

(ii) $\Pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
$\Pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. } plane afine

$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow dir(\Pi_1) = dir(\Pi_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists)\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $\underbrace{(a_1, b_1, c_1)}_{\notin dir(\Pi_1)} = \lambda(a_2; b_2; c_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{c_3} = \lambda$

(iii) d – dreaptă afină
$dir(d) = \langle v \rangle$; $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\Pi: ax + by + c \cdot z + d = 0$ – plan afin

$d \parallel \Pi \Leftrightarrow dir(d) \subset dir(\Pi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$.

Soluție (vii)

$\Pi: ax + by + cz + d = 0$

$(xOy) \parallel \Pi \Leftrightarrow (\exists)\lambda \in \mathbb{R}^*$ a.î. $(0, 0, 1) = \lambda(a, b, c)$

$\Rightarrow \Pi: z + d = 0$

iau $\lambda = 1$ $\quad P_5 \in \Pi \Rightarrow 2 + d = 0 \Rightarrow d = -2$ } $\Rightarrow$

5|

$\Rightarrow \Pi: \quad z - 2 = 0.$ ▲

viii) $\Pi: \begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-1 \\ 6 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ldots\ldots$

ix) $d_1 \in \Pi \Rightarrow P(3,-4,2) \in d_1 \in \Pi$

$d_2 \parallel \Pi$

$\Pi: \begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ldots\ldots$

x) $d_1: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow d_1: \begin{cases} x = 1 - \frac{t}{3} \\ y = -\frac{2t}{3} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow d_1: \dfrac{x-1}{-\frac{1}{3}} = \dfrac{y}{-\frac{2}{3}} = \dfrac{z}{1} = t$

$d_1 \in \Pi \Rightarrow P(-1, 0, 0) \in \Pi$

$d_2 \parallel \Pi$

$\Pi: \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ldots\ldots$

xi) $P_7(1,2,0) \in \gamma$

$\Pi \parallel \gamma$

$\mathrm{dir}(\Pi) = Sp_{\mathbb{R}}\{(1,2,-1);(1,1,-2)\}$

$$\Rightarrow \mathcal{Y}: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$-(y-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x+3+y-2-z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi: -3x+y-z+1=0.$$

xii) $P_8(5,-3,2) \in \Pi$

$Oz \in \Pi$

$Oz = \langle e_3 \rangle = \langle (0,0,1) \rangle \hookrightarrow$ un prim vector dir al lui Π

$O(0,0,0) \in Oz$

$\overrightarrow{OP_8} = (5,-3,2) = 5e_1 - 3e_2 + 2e_3$

$\hookrightarrow$ al doilea vector director.

$$\Pi: \begin{vmatrix} x-5 & y+3 & z-2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - \cancel{15} + 5y + \cancel{15} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi: 3x + 5y = 0$$

xiii)

$$OP_9P_{10}: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & +2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{------}$$

2

7