MULȚIMI ORDONATE. ORDINALI.

Prop: Fie $(W,<)$ mulțime bine ordonată și $S \subsetneq W$ a.î. $(\forall)\ x \in W,\ y \in S$ cu $x < y$ avem $x \in S$. Atunci $(\exists)\ a \in W$ a.î. $S = \{x \in W \mid x < a\} = W[a]$.

Prop: Fie $(W,<)$ mulțime bine ordonată și $f : W \longrightarrow W$ a.î. $(\forall)\ x_1, x_2 \in W$ cu $x_1 < x_2$ avem $f(x_1) < f(x_2)$. Atunci $(\forall)\ x \in W,\ x \leq f(x)$.

Prop: Fie $(W,<)$ și $(W',<)$ bine ordonate.

- Fie $a \in W$. Atunci $W \not\simeq W[a]$.
- Fie $f : W \longrightarrow W$ izom. Atunci $f = id_W$.
- $(\exists)$ cel mult un izom. $f : W \longrightarrow W'$.

Teoremă: Fie $(W_1,<)$ și $(W_2,<)$ mulțimi bine ordonate. Atunci are loc una din următoarele:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ W_1 \simeq W_2 \\ \bullet\ (\exists)\ a \in W_2 \text{ a.î. } W_1 \simeq W_2[a]. \\ \bullet\ (\exists)\ a \in W_1 \text{ a.î. } W_2 \simeq W_1[a]. \end{array}\right\} \text{izom. unice}$$

Def: O mulțime T s.n. tranzitivă dacă $(\forall)\ x \in T,\ x \subseteq T$ (echivalent: $(\forall)\ x \in T$ și $y \in x$ avem $y \in T$)

Not. $\in_A := \{(x,y) \in A \times A \mid x \in y\}$.

Def: O mulțime α s.n. ordinal dacă α tranzitivă și $(\alpha, \in_\alpha)$ este mulțime bine ordonată.

Propoziție:

- α ordinal $\Rightarrow \alpha^+$ ordinal
- α ordinal și $\beta \in \alpha$, $\Rightarrow \beta$ ordinal
- α, β ordinali cu $\alpha \subsetneq \beta$, atunci $\alpha \in \beta$.

Fie α, β, γ ordinali, atunci:

- $\alpha < \beta,\ \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$
- $\alpha \not< \alpha$
- $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ sau $\beta < \alpha$.

Teorema bunei ordonări:

Fie P o proprietate și α ordinal a.î. $P(\alpha)$.
Atunci $(\exists)\ \beta$ a.î. $P(\beta)$ și $(\forall)\ \gamma$ cu $P(\gamma)$ avem $\beta \leq \gamma$.
În particular, orice mulțime nevidă ale cărei elemente sunt ordinali admite minim relativ la $<$ $\Rightarrow$ orice mulțime de ordinali este bine ordonată de $<$.

Prop: Fie X o mulțime de ordinali. Not. $\sup X = \bigcup X$. Atunci:

- $\sup X$ ordinal
- $(\forall)\ \alpha \in X$: $\alpha \leq \sup X$
- $(\forall)\ \gamma$ ordinal a.î. $(\forall)\ \alpha \in X$ avem $\alpha \leq \gamma$, avem $\sup X \leq \gamma$.
- $(\sup X)^+ \notin X$, deci $(\exists)\ \alpha \notin X$.

Prop: Ordinalul ω este limită. ($\omega = \aleph_0$)

Teoremă: Fie $(W, <)$ mulțime bine ordonată. Atunci $(\exists)\ \alpha$ ordinal a.î. $(W, <) \cong (\alpha, \in_\alpha)$.

7) Axioma înlocuirii

Pentru orice operație F și orice mulțime A, $(\exists)$ o mulțime B a.î. $(\forall)\ x \in A$, $F(x) \in B$.

Principiul inducției pentru ordinali

I. Fie P o prop și p.p. că $(\forall)\ \alpha$ ordinal, avem că dacă $(\forall)\ \beta < \alpha$, $P(\beta)$, atunci $P(\alpha)$. Atunci $(\forall)\ \alpha$ ordinal avem $P(\alpha)$.

II. Fie P o prop. și p.p. că:

- $P(0)$
- $(\forall)\ \alpha$ ordinal cu $P(\alpha)$, avem $P(\alpha^+)$.
- $(\forall)\ \alpha$ ordinal limită a.î. $(\forall)\ \beta < \alpha$, $P(\beta)$, avem $P(\alpha)$.

Atunci $(\forall)\ \alpha$ ordinal, avem $P(\alpha)$.

Teorema recursiei pentru ordinali

I. Fie G o operație. Atunci $(\forall)\ \alpha$ ordinal, $(\exists!)\ y$ a.î. $(\exists)\ t$ funcție cu domeniul α^+ a.î. $(\forall)\ \beta \leq \alpha$, $t(\beta) = G(t/_\beta)$ și $y = t(\alpha)$.

II. Fie G_1, G_2, G_3 ordinali. Atunci $(\forall)\ \alpha$ ordinal, $(\exists!)\ y$ a.î. $(\exists)\ t$ funcție cu dom. α^+ a.î. $(\forall)\ \beta \leq \alpha$:

- $\beta = 0 \Rightarrow t(\beta) = G_1(0)$
- $(\exists)\ \delta$ cu $\beta = \delta^+$, $t(\beta) = G_2(t(\delta))$
- dacă β este limită, $t(\beta) = G_3(t/_\beta)$

și $y = t(\alpha)$.

Adunarea ordinalilor:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$
- β ordinal limită, $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma / \gamma < \beta\}$.

Înmulțirea și Exponențierea ordinalilor:

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot \beta^+ = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- β ordinal limită, $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma / \gamma < \beta\}$
- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^{\beta^+} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
- β ordinal limită, $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma / \gamma < \beta\}$.

Def: 1) Un ordinal s.n. inițial, dacă nu este echipotent cu un ordinal mai mic ca el.

2) O mulț. s.n. bine ordonată dacă $(\exists)$ o rel. de bună-ordine pe ea.

Teoremă: Pentru orice mulțime bine ordonată, $(\exists!)\ \alpha$ ordinal inițial echipotent cu ea.

Considerăm cardinalul ca fiind acest ordin inițial.

Obs! • $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ și $(\forall)\ X$, avem că dacă $X \sim n \Rightarrow |X| = n$.

• $(\forall)\ X$, dacă $X \sim \mathbb{N}$, $|X| = \mathbb{N}$.

• $(\forall)\ X$, $X \sim |X|$

• $(\forall)\ k$ cardinal, $|k| = k$

• $(\forall)\ X, Y$, $X \sim Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$.

• $(\forall)\ \alpha$ ordinal, $|\alpha| \leq \alpha$.

Prop: Pt. orice mulțime A, $(\exists)\ \alpha$ ordinal cu prop. că nu este echipotent cu nicio submulțime a lui A.
Prin urmare, există un ordinal minim cu această proprietate, care este, evident inițial. și îl numim ordinalul Hartogs al lui A și îl not. $h(A)$ – cel mai mic ordinal α cu prop. că $(\not\exists)$ injecție de la el la A.

Not.: $\aleph_{\alpha^+} = h(\aleph_\alpha)$ $(\forall)\ \alpha$ ordinal
$\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}$. $(\forall)\ \alpha$ ordinal limită.

Obs! $|\aleph_\alpha| < |\aleph_{\alpha^+}|$ $(\forall)\ \alpha$ ordinal
$|\aleph_\alpha| < |\aleph_\beta|$ $(\forall)\ \alpha < \beta$ ordinale

Prop: • $(\forall)\ \alpha$ ordinal, $\aleph_\alpha$ ordinal inițial infinit.
• $(\forall)\ \alpha$ ordinal, $\alpha \leq \aleph_\alpha$

Prop: $(\forall)\ \gamma$ ordinal și $(\forall)\ \beta < \aleph_\gamma$ ordinal inițial infinit, $(\exists)\ \alpha < \gamma$ cu $\beta = \aleph_\alpha$.

Corolar: $(\forall)\ \beta$ ordinal inițial infinit, $(\exists)\ \alpha$ ordinal cu $\beta = \aleph_\alpha$.

Obs! Deci, orice cardinal este ori un nr. nat (finit), ori un alef (infinit).

Def: Fie $(A,\leq)$ mulțime ordonată și $B \subseteq A$, B s.n. lanț al lui A dacă $(\forall)\ x,y \in B$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Def: Fie $(A,\leq)$ mulțime ordonată. Ea s.n. inductiv ordonată dacă orice lanț al său admite majorant, i.e. $(\forall)\ B \subseteq A$ care este lanț, $(\exists)\ z \in A$ a.î. $(\forall)\ x \in B$, $x \leq z$.

Lema lui Zorn: Orice mulțime inductiv ordonată admite un element maximal.

Teorema lui Zermelo: Orice mulțime este bine-ordonabilă.

Prop: Orice mulțime infinită admite o submulțime numărabilă.

Corolar: O reuniune cel mult numărabilă de mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Corolar: O reuniune numărabilă de mulțimi numărabile este numărab[ilă].

Prop:
- $(\forall)\ k$ cardinal infinit, $k \cdot k = k$.
- $(\forall)\ k$ card. infinit și $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, atunci $k^n = k$.
- $(\forall)\ \lambda, \mu$ card. cu $\lambda \leq \mu$, μ infinit, atunci $\lambda + \mu = \mu$.
- $(\forall)\ \lambda, \mu$ card cu $1 \leq \lambda \leq \mu$ și μ infinit, atunci $\lambda \cdot \mu = \mu$.