Facultatea de Matematica-Informatica
Universitatea din Bucuresti

21 Mai 2019

Examen EDP II

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale
Tipul examinarii: Examen scris
Nume student: ______________________________
Grupa 321
Timp de lucru: 3 ore

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest examen contine 4 probleme (toate obligatorii).

Verificati foile cu subiecte fata-verso !

Examenul este individual. La sfarsitul examenului nu uitati sa aduceti foaia cu subiectele o data cu lucrarea scrisa pentru a le capsa impreuna. Astfel, corectura se va face mai usor.
Pentru elaborarea lucrarii scrise puteti folosi ca unic material ajutator o foaie format A4 care sa contina doar notiuni teoretice. Exercitiile rezolvate sunt excluse ca material ajutator.

Pentru redactare tineti cont de urmatoarele sugestii:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **indicati** acest lucru si explicati cum se poate aplica rezultatul respectiv.
- **Organizati-va munca** intr-un mod coerent pentru a avea toti de castigat ! Incercati ca la predarea lucrarii fiecare problema sa fie redactata in ordinea aparitiei pe foaia cu subiecte. Nu amestecati rezolvarile problemelor ! Ideal ar fi ca si subpunctele sa fie redactate in ordine. Daca nu stiti a rezolva un anumit subpunct scrieti numarul subpunctului si lasati liber.
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Barem: P1 (3.5p) + P2 (2p)+ P3 (2.5p) +P4 (3p) + 1p oficiu= **12p**.

Pentru promovarea examenului trebuie sa obtineti un punctaj de cel putin **4.5 puncte.**

Rezultatele le veti primi cat mai curand posibil. Pentru orice nelamuriri scrieti-mi la adresa cristian.cazacu@fmi.unibuc.ro.

Problema 1. *(3.5 p) Fie functiile* $f(x) = e^{-(x+1)^2}$ *si* $g(x) = \chi_{(-2,2)}(x)$ *(functia caracteristica a intervalului* $(-2,2)$*) definite pe* $\mathbb{R}$.

1). Calculati $\int_0^\infty re^{-r^2}dr$.

2). Calculati $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ *(folosind eventual formula co-ariei).*

3). Calculati $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$.

4). Calculati $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}dx$, $n \geq 1$.

5). Calculati norma lui f *in* $H^1(\mathbb{R})$.

6). Apartine g *lui* $H^1(-3,3)$ *? Argumentati.*

7). Aratati ca $g' = \delta_2 - \delta_{-2}$ *in* $\mathcal{D}'(-3,3)$, *unde* δ_x *reprezinta distributia Dirac in punctul* x.

8). Calculati $\hat{f}, \hat{g}$.

9). Calculati $g * g$, $\widehat{g * g}$.

10). Calculati $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}dx$.

11). Calculati $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

12). Determinati $p \in \mathbb{R}$ *astfel incat* $\frac{\ln^2|x|}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^6)$.

Problema 2. *(2 p)*

1). Aratati ca $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \subset L^3(\mathbb{R}^2)$, *unde* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ *este in spatiul Schwartz.*

2). Aratati ca $\frac{1}{|x|+|x|^2} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

3). Aratati ca $|x|^2 \ln|x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, *unde* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *este spatiul distributiilor temperate.*

4). Fie o functie $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ *a carei transformata Fourier este* $\hat{f}(\xi) = \frac{\sqrt[6]{|\xi|}}{|\xi|^3+1}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$. *Determinati* s *astfel incat* $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$.

5). Fie $u \in H^{1/6}(\mathbb{R}) \cap H^5(\mathbb{R})$ *astfel incat* $\|u\|_{H^{1/6}(\mathbb{R})} = 4$ *si* $\|u\|_{H^5(\mathbb{R})} = 5$. *Argumentati ca* $u \in H^3(\mathbb{R})$ *si gasiti o cota superioara pentru* $\|u\|_{H^3(\mathbb{R})}$.

Problema 3. *(2.5 p) Consideram ecuatia undelor*

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt}(t,x) - 4u_{xx}(t,x) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1). Aplicati transformata Fourier in variabila x *si scrieti ecuatia diferentiala verificata de* $\hat{u}(t,\xi)$.

2). Scrieti sistemul cu conditiile initiale la $t = 0$ *verificat de* $\hat{u}(t,\xi)$.

3). Determinati $\hat{u}(t,\xi)$ *in functie de* $\hat{f}$ *si* $\hat{g}$.

4). Gasiti $u(t,x)$ *aplicand transformata Fourier inversa.*

5). Daca $f = e^{-x}$ *si* $g = 1/(x^2+1)$ *determinati* u.

Problema 4. *(3 p) Consideram ecuatia caldurii*

$$(2) \qquad \begin{cases} v_t(t,x) - 3\Delta v(t,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

cu data initiala $v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$.

1). Aplicati transformata Fourier in variabila x *si scrieti problema satisfacuta de* $\hat{v}(t,\xi)$.

2). Aratati ca $\hat{v}(t,\xi) = e^{-12\pi^2|\xi|^2 t}\hat{v_0}(\xi)$.

3). Fie "nucleul"

$$N_t(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{12t}}}{(12\pi t)^{3/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

4). Aratati prin calcul direct ca $N_t(x)$ *verifica ecuatia*

$$\partial_t N_t(x) - 3\Delta_x N_t(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

5). Aratati ca pentru orice $t > 0$ *avem*

$$\widehat{N_t}(\xi) = e^{-12\pi^2|\xi|^2 t}.$$

6). Aratati ca $v(t,x) = N_t * v_0(x)$ *pentru orice* $t > 0$ *si orice* $x \in \mathbb{R}^3$.

7). Determinati norma $\|N_t\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$, *pentru orice* $t > 0$ *si* $p \geq 1$.

8). Folosind inegalitatea lui Young si cei 2 itemi anteriori aratati ca pentru orice $p \in [1,\infty]$ *exista o constanta pozitiva* $C(p)$ *astfel incat*

$$\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(p) t^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}, \quad \forall t > 0.$$