Facultatea de Matematica-Informatica
Universitatea din Bucuresti

7 Februarie 2018

Examinare

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale
Tipul examinarii: Examen scris
Nume student: ______________________________
Grupa 301
Timp de lucru: 3 ore

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest examen contine 4 probleme (toate obligatorii).

Examenul este individual. La sfarsitul examenului nu uitati sa aduceti foaia cu subiectele o data cu lucrarea scrisa pentru a le capsa impreuna. Astfel, corectura se va face mai usor.
Pentru elaborarea lucrarii scrise puteti folosi ca unic material ajutator o foaie format A4 care sa contina doar notiuni teoretice. Exercitiile rezolvate sunt excluse ca material ajutator.

Pentru redactare tineti cont de urmatoarele sugestii:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **indicati** acest lucru si explicati cum se poate aplica rezultatul respectiv.
- **Organizati-va munca** intr-un mod coerent pentru a avea toti de castigat ! Incercati ca la predarea lucrarii fiecare problema sa fie redactata in ordinea aparitiei pe foaia cu subiecte. Nu amestecati rezolvarile problemelor ! Ideal ar fi ca si subpunctele sa fie redactate in ordine. Daca nu stiti a rezolva un anumit subpunct scrieti numarul subpunctului si lasati liber.
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Barem: P1 (2.5p) + P2 (2.5p)+ P3 (2.5p) +P4 (2p) + 1p oficiu= **10.5p**.

Rezultatele le veti primi cel mai probabil ziua urmatoare. Pentru orice nelamuriri scrieti-mi la adresa cristian.cazacu@fmi.unibuc.ro.

Problema 1. *(2.5p). Fie functia* $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\big(|x|^2 + 1\big)$, $x = (x_1, \dots, x_5)$.

1). Sa se scrie formula operatorului Laplacian Δ *pentru functii cu simetrie radiala din* $\mathbb{R}^5$.

2). Calculati $\Delta f(x)$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^5$.

3). Aratati ca

$$\Delta(x_3|x|^{-3}) = 0, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 > 0.$$

Consideram functia $u : B_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *data de*

$$u(x) = \frac{|x|^{-\frac{6}{5}}}{|x|^3 + e^{-|x|}}, \quad x = (x_1, \dots, x_4),$$

unde $B_1(0)$ *este bila unitate din* $\mathbb{R}^4$ *centrata in origine.*

4). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ *are loc* $u \in L^p(B_1(0))$.

5). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ *are loc* $u \in L^p(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_1(0)})$.

Problema 2. *(2.5p). Consideram urmatoarea problema de tip "unde"*

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

unde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ *sunt functii date. Consideram*

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{t^3}{6}.$$

1). Scrieti ecuatia satisfacuta de v.

2). Aratati ca pentru orice functie w *de clasa* C^2 *avem*

$$w_{tt}(x,t) - 4w_{xx}(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\frac{\partial}{\partial x}\right) w.$$

3). Pentru v *de mai sus notam*

$$z(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Gasiti ecuatia satisfacuta de z.

4). Gasiti forma generala a functiei z.

5). Cu z *determinat anterior rezolvati ecuatia*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = z(x,t)$$

si scrieti forma generala a lui v.

6). Folosind conditiile asupra lui v *la* $t = 0$ *din enunt obtineti pe* v *si apoi deduceti solutia* u *a problemei* (1).

Problema 3. *(2.5p) Se considera ecuatia de tip "caldura"*

$$(2)\qquad \begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + tu(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = \cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1). Sa se gaseasca o solutie a problemei (2) *de forma*

$$(3)\qquad u(t,x) = A(t)B(x).$$

2). Sa se arate ca functia

$$K(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

verifica ecuatia caldurii $v_t(t,x) - v_{xx}(t,x) = 0$ *pentru orice* $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$.

3). Argumentati pe scurt ca functia

$$(4)\qquad v(t,x) := (K(t,\cdot) * \cos)(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

este solutie a ecuatiei caldurii cu data initiala $v(0,x) = \cos x$.

4). (Bonus 0.5p) Sa se calculeze explicit solutia v *din* (4).

5). Sa se arate ca functia $\tilde{u}(t,x) := e^{-\frac{t^2}{2}} v(t,x)$ *unde* v *este functia din* (4) *este solutie a problemei* (2). *Comparati* u *obtinut in* (3) *cu* $\tilde{u}$.

Problema 4. *(2p) Se considera problema Dirichlet*

$$(5)\qquad \begin{cases} -(\frac{1}{x^2+1} u'(x))' + u = \sin(\cos x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Consideram aplicatia biliniara $a(\cdot,\cdot) : H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ *data de*

$$a(u,v) := \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx.$$

1). Aratati ca $a(\cdot,\cdot)$ *este continua si coerciva. Argumentati pe scurt ca* $a(\cdot,\cdot)$ *este bine definita.*

2). Aratati ca $a(\cdot,\cdot)$ *defineste un produs scalar pe* $H_0^1(0,1)$.

3). Aratati ca $a(\cdot,\cdot)$ *induce o norma pe* $H_0^1(0,1)$ *echivalenta cu norma standard din* $H^1(0,1)$.

4). Definiti notiunea de solutie slaba pentru problema (5).

5). Argumentati ca exista o unica solutie slaba $u \in H_0^1(0,1)$ *pentru* (5).