Tutoriat 1

Paradoxul lui Russel

$\nexists$ R mulțime a.î. $(\forall)\, x : x \in R \Leftrightarrow x \notin x$.

Mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin ca element, nu există.

Axiomele Sistemului ZFC:

1) Axioma extensionalității:

$(\forall)\, x, y$ avem: dacă $(\forall)\, z$, $z \in x \Leftrightarrow z \in y$, atunci $x = y$.

Obs! Dubla incluziune este egalitate

Teoremă: Există cel mult o mulțime vidă

2) Axioma comprehensiunii:

$(\forall)\, x$ și $(\forall)\, P$, $(\exists)\, y$ a.î. $(\forall)\, z$ avem:

$$\boxed{z \in y \Leftrightarrow z \in x \text{ și } \underbrace{P(z)}_{z \text{ verifică prop. } P}}$$

$$\|$$

$$y = \{z \in x \mid P(z)\}$$

Teoremă: Nu există „mulțimea tuturor mulțimilor":

$(\forall)\, x\ (\exists)\, y$ cu $y \notin x$.

Teoremă: Există o mulțime vidă.

Obs! $x \cap y = \{z \in x \mid z \in y\}$

$x \setminus y = \{z \in x \mid z \notin y\}$

3) Axioma perechii:

$(\forall)\ x, y, (\exists)\ z$ a.î. $x \in z$ și $y \in z$.

Def: $(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$ pereche ordonată.

Prop: Fie x, y, u, v cu $(x,y) = (u,v) \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v \end{cases}$.

Corolar: Fie x, y cu $x \neq y \Rightarrow (x,y) \neq (y,x)$

4) Axioma reuniunii

$(\forall)\ F\ (\exists)\ x$ a.î. $(\forall)\ y, z$ cu $z \in y$ și $y \in F$ avem $z \in X$.

Not. $\bigcup F = \{z \mid (\exists) y \in F$ cu $z \in y\}$. (nu este reuniunea obișnuită)

Obs! $x \cup y = \bigcup \{x, y\}$.

Def: Dacă $F \neq \emptyset$: $\bigcap F = \{z \in \bigcup F \mid (\forall) x$ cu $x \in F$, avem $z \in x\}$.

Obs! $\{x, y, z\} = \bigcup \{\{x,y\}, \{z\}\} = \{x,y\} \cup \{z\}$.

Def: $(\forall)\ x$, definim $x^+ = x \cup \{x\}$. succesorul lui x.

Ex: $2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$.

5) Axioma mulțimii părților:

$(\forall)\ x, (\exists)\ y$ a.î. $(\forall)\ z$ cu $z \subseteq x$ avem $z \in y$.

Def: $\mathcal{P}(x) = \{z \mid z \subseteq x\}$ $(\forall)\ x$.

Prop: Fie x, y, X, Y cu $x \in X$ și $y \in Y$.
Atunci $(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$.

Def: $X \times Y = \{w \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) \mid (\exists)\ x \in X, y \in Y$ cu $w = (x,y)\}$.

Definim pt $\forall x$ și y, $[x, y] = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Arătați că această def respectă analogul corespunzător al Proprietății perechilor ordonate.

Proprietatea perechilor ordonate:

Fie x, y, u, v cu $(x, y) = (u, v)$. Atunci $x = u$ și $y = v$

Luăm x, y, u, v a.î. $(x, y) = (u, v)$. Vrem $x = u$ și $y = v$.

2 cazuri: $u = v$ și $u \neq v$

1) Pp că $u = v$

$\{\{u\}, \{u\}\} = \{u\}$

$[x, y] = [u, u] \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, u\}\} = \{u\} \Rightarrow$

$\Rightarrow u = x = y$. Și $u = v$. Deci $x = u$ și $y = v$ ✓

Avem ce ne doream.

2) Pp că $u \neq v$

[recap: ca două mulțimi să fie egale trb ca fiecare membru din prima mulțime să se găsească undeva în a doua mulțime] și invers

Punem din nou cond să se respecte Proprietatea

$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\{u\} = \{x\}$ sau $\{u\} = \{x, y\})$ și $(\{u, v\} = \{x\}$ sau $\{u, v\} = \{x, y\})$ [*]

2) Pp că $u \neq v$

[recap: ca două mulțimi să fie egale trb ca fiecare membru din prima mulțime să se găsească undeva în a doua mulțime] și invers

Punem din nou cond să se respecte Proprietatea

$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\{u\} = \{x\}$ sau $\{u\} = \{x, y\})$ și $(\{u, v\} = \{x\}$ sau $\{u, v\} = \{x, y\})$ [*]

[Și invers]

Hai să luăm pe rând niște condiții din astea 4 și să vedem ce se întâmplă:

· Să pp că $\{u\} = \{x, y\}$. Atunci $x = y = u$ și deci avem

$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\} \Leftrightarrow \{\{x\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow u = v = x$ ↯ [deci eliminăm cazul ăsta]

· Să pp acum că $\{u, v\} = \{x\}$. Rezultă că $u = v = x$, ↯

[eliminăm și cazul ăsta]

pt că duc la ↯

Deci, pt $u \neq v$, trebuie ca (*) să fie adevărată, ceea ce înseamnă că $\{u\} = \{x\}$ și $\{u, v\} = \{x, y\}$ trb să fie ambele adevărate (pt că avem &)

$\{u\} = \{x\} \Rightarrow u = x \Rightarrow \{u, v\} = \{x, y\} \Leftrightarrow \{u, v\} = \{u, y\} \Rightarrow v = u$ sau $v = y$.

Dar $u \neq v$, deci rămâne că $v = y$.

Deci definiția respectă Proprietatea Perechilor ordonate.

(S1.6) Fie A, B, C mulţimi. Demonstraţi că

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

Demonstraţie: În primul rând, iau $x \in A \times (B \cup C) \iff$ există $a \in A$ şi $y \in B \cup C$ cu $x = (a, y) \iff$ există $a \in A$ şi $y \in B$ sau $y \in C$ cu $x = (a, y) \iff$ există $a \in A$ şi $y \in B$ cu $x = (a, y)$ sau există $a \in A$ şi $y \in C$ cu $x = (a, y) \iff x \in A \times B$ sau $x \in A \times C$ $\iff x \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

Apoi, iau $x \in A \times (B \cap C) \iff$ există $a \in A$ şi $y \in B \cap C$ cu $x = (a, y) \iff$ există $a \in A$ şi y element şi al lui B, şi al lui C cu $x = (a, y) \iff$ există $a \in A$ şi $y \in B$ cu $x = (a, y)$ şi există $a \in A$ şi $y \in C$ cu $x = (a, y) \iff x \in A \times B$ şi $x \in A \times C \iff x \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

□