$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-3x-6 & 17x^2+51x+51 \\ \hline -x^3-3x^2-3x & \frac{1}{17}x-\frac{2}{17} \\ \hline \quad -2x^2-6x-6 & \\ \quad 2x^2+6x+6 & \\ \hline \quad = \;\; = \;\; = & \end{array}$$

Dacă cmmdc-ul lor este ired atunci idealul generat de acele 2 pol este maximal.

$$x^3+x^2-3x-6=(17x^2+51x+51)\left(\frac{1}{17}x-\frac{2}{17}\right)+0$$

$(2,4)=(2)$ e ca asta!

Așadar $(2x^4+9x^3+18x^2+18x+9,\ 2x^4+8x^3+17x^2+21x+15)=$

$=17x^2+51x+51=$ $(f,g)=x^2+3x+3$ nu are sol în $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ ideal max

4. $=x^2+3x+3\neq 1 \Rightarrow$ ~~(f,g) nu e ideal maximal în $\mathbb{Q}[x]$~~

4 max 3(b) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^5+x_2^5)(x_1^5+x_3^5)(x_2^5+x_3^5)\in\mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]$

$g\in\mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]$ a.î. $f(x_1,x_2,x_3)=g(s_1,s_2,s_3)$

$g(0,0,1)=?$ g nu e simetric

Îl scriem pe f ca produs de pol. sim ired.

$LT_< f = LT_<(x_1^5+x_2^5)LT_<(x_1^5+x_3^5)LT_<(x_2^5+x_3^5)$

$= x_1^5\cdot x_1^5\cdot x_2^5 = x_1^{10}\cdot x_2^5$

La ultimele consultații cu Stanciu am ales $1,\varepsilon,\varepsilon^2$ pt. ca semnele din rel lui Viète să dea $1,\varepsilon,\varepsilon^2$. Și am observat că pt pol sym fund ar fi calcule prea mari cu gradul 15.

$\cancel{x_1^{10}x_2^5}$

$$g(0,0,1)\Rightarrow\begin{cases}s_1=0\\ s_2=0\\ s_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=\varepsilon\\ x_3=\varepsilon^2\end{cases}$$

$g(0,0,1)=f(1,\varepsilon,\varepsilon^2)=(1^5+\varepsilon^5)(1^5+\varepsilon^{10})(\varepsilon^5+\varepsilon^{10})=$

~~$=\varepsilon^2\cdot(1+\varepsilon)(\varepsilon^2+\varepsilon)=$~~

~~$=(\varepsilon^3+1)(\varepsilon^2+\varepsilon)=$~~

~~$=\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon=1+\varepsilon^2+2\varepsilon=(\varepsilon+1)^2$~~

o greșeală la calcule

~~g simetric ⇒~~

$f(1,\varepsilon,\varepsilon^2)=(1^5+\varepsilon^5)(1^5+\varepsilon^{10})(\varepsilon^5+\varepsilon^{10})=$

$=(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon)(\varepsilon^2+\varepsilon)=$

$=(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3)(\varepsilon^2+\varepsilon)=$

$=(\varepsilon^2+\varepsilon+2)(\varepsilon^2+\varepsilon)=$

$=\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^3+\varepsilon^2+2\varepsilon^2+2\varepsilon=2+3\varepsilon^2+3\varepsilon=$

$=3(\varepsilon^2+\varepsilon+1)-1=3\cdot 0-1=-1$ ✓

calcule, îi explic cum înmulțesc fiecare cu fiecare

$$\begin{cases}\varepsilon^3=1\\ \varepsilon^2+\varepsilon+1=0\end{cases}$$ am uitat să scriu

Dacă găsesc o transpoziție la care îmi dă dif $\Rightarrow$ nu e simetric

g simetric $\Leftrightarrow \sigma^*(g) = g$ unde σ^* o transpoziție din S_3

$\sigma^* = (1\ 3) \Rightarrow g(1,0,0) = g(0,0,1)$

$$g(1,0,0) = \begin{cases} s_1 = 1 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$g(1,0,0) = f(1,0,0) = (1+0)(1+0)(0+0) = 1 \neq -1 \Rightarrow$

$g(1,0,0) \neq g(0,0,1) \Rightarrow g$ nu este pol. simetric.

0/3 c) $h \in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]$ $\sigma^*(h) = \varepsilon(\sigma)\cdot h$ $(\forall)\ \sigma \in S_3$

$h(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\,h_1(x_1,x_2,x_3)$

$h_1 \in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]$ pol. simetric

$\sigma = (1\ 2) \Rightarrow h(x_2,x_1,x_3) = h(x_1,x_2,x_3)$

$(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_1-x_3)\,h_1 = h(x_1,x_2,x_3)$

$\sigma = (1\ 3) \Rightarrow h(x_3,x_2,x_1) = h(x_1,x_2,x_3)$

$(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\,h_1 = h(x_1,x_2,x_3)$

$\sigma = (2\ 3) \Rightarrow h(x_1,x_3,x_2) = h(x_1,x_2,x_3)$

$(x_1-x_3)(x_1-x_2)(x_3-x_2)\,h_1 = h(x_1,x_2,x_3)$

M-am gândit să scriu măcar ce înseamnă acele transp.

$x\cdot(x-1) = 0$ în inel

$\neq 0 \quad \neq 0$

$a\cdot(a-1) = 0$

5.5

M-am grăbit și am uitat că gradul polinomului căutat e 4

4. $R = \mathbb{Q}[X]/(X^2+2X+10) = \{\widehat{ax+b} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$

0,5/3 a) Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg(P)=4$

Mi-am dat seama după. Trebuia să iau $Q = X^2 \Rightarrow P = X^4+2X^3+10X^2+2X+3$

Caut $P = \widehat{2X+3}$ în R

Th. împărțirii cu rest $\Rightarrow P = Q(X^2+2X+10) + 2X+3$

Iau $Q = \cancel{X}\,X^2 \Rightarrow P = X^2+2X+10+2X+3 = X^2+4X+13$

3 max b) $U(R)$ - mulțimea elem. inversabile

$X^2+2X+10$ polinom ireductibil în $\mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Delta = 4-4\cdot 10 < 0 \Rightarrow$ soluții complexe

$\Rightarrow \mathbb{Q}[X]/(X^2+2X+10) = R$ - corp și deci $U(R) = R \setminus \{\hat{0}\}$

Def corpului: Un inel s.n. corp dacă orice elem. cu excepția lui 0 este inversabil $\rightarrow$ concluzia

2 max c) $R \simeq \mathbb{Q}[X]/(X^2-4)$

$X^2-4 = (X-2)(X+2)$

$(X-2)$ și $(X+2)$ sunt comaximale: $X-2-(X+2) = -4 \in U(\mathbb{Q})$

Astfel $\mathbb{Q}[X]/(X^2-4) \underset{\text{LCR}}{\simeq} \mathbb{Q}[X]/(X-2) \times \mathbb{Q}[X]/(X+2) = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

Rămâne de verificat $R \simeq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

$\text{Idem}(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\} \Rightarrow 4$ idemp

Caut idemp în R:

2 inele sunt izomorfe dacă păstrează aceleași proprietăți. Una dintre aceste este nr. de idemp.

Seminar 4 ex 3 am văzut că dacă nu are același nr. de idemp nu sunt izomorfe

$(\widehat{ax+b})^2 = \widehat{ax+b}$

$\widehat{a^2x^2+2abx+b^2} = \widehat{ax+b}$

$\widehat{a^2x^2+(2ab-a)x+b^2-b} = \hat{0}$

$$\left\{\begin{array}{ll} a^2=0 & a=0 \\ 2ab-a=0 & \\ b^2-b=0 & b(b-1)=0 \end{array}\right\} \rightarrow (0,1),(0,0)\ 2 \text{ idemp}$$

Am încercat să aflu idemp după b)

Așadar $R \not\simeq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ nr. dif. de idemp.

4c nu știu nmc.