

**EXAMEN LA ANALIZA MATEMATICA - SEMESTRUL II**

**I.** (1) [1 punct] Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  o functie diferentiabila in  $a \in \mathbb{R}^2$  si  $u$  un versor din  $\mathbb{R}^2$ . Aratati ca  $f$  este derivabila dupa directia  $u$  si

$$df(a)(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a).$$

(2) [0.75 puncte] Aratati ca daca  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  este o functie integrabila Riemann atunci oricare ar fi sirul de diviziuni  $(\Delta_n)_{n \geq 1}$  ale lui  $[0, 1]$  cu  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$  si oricare ar fi sirul de sisteme de puncte intermediare  $(\xi_n)_{n \geq 1}$ , cu  $\xi_n$  asociat diviziunii  $\Delta_n$  pentru  $n \geq 1$ , rezulta ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

(3) [0.75 puncte] Dati exemplu de o functie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  marginita si care nu e integrabila Riemann. Justificati alegerea!

**II.** [1 punct] Sa se dezvolte in serie de puteri ale lui  $x$  functia  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x + x^2}$$

**III.** (1) [1 punct] Folosind formula  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  pentru orice  $p, q > 0$  sa se determine  $\Gamma(\frac{1}{2})$ .

(Cu exceptia formulei mentionate, orice alta formula utilizata trebuie demonstrata!).

(2) [1 punct] Sa se calculeze integrala

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx.$$

**IV.** [1.5 puncte] Fie functia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^5}{x^8 + y^8}, & \text{daca } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{daca } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sa se calculeze derivatele partiale de ordinul intai ale functiei  $f$ . Sa se studieze diferentiabilitatea lui  $f$  in  $(0, 0)$ .

**V.** [2 puncte] Sa se arate ca ecuatia  $yz + xe^z - 1 = 0$  defineste intr-o vecinatate a punctului  $(0, 1, 1)$  functia implicita  $z = z(x, y)$  si sa se calculeze  $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 1)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 1)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1)$  si  $d^2 z(0, 1)$ .

**Nota** Timpul de lucru este 2 ore. Solutiile trebuie sa fie scrise clar si detaliat. Telefoanele mobile si orice alte echipamente de comunicatii vor fi inchise pe parcursul examenului. Incalcarea acestei reguli atrage eliminarea din examen! (2)