EXAMEN LUCRARE SCRISĂ

ALGEBRĂ an 1, sem. 1

27-ian-22, orele 10:00-12:15

• Această lucrare scrisă constă din 9 subiecte.
• Fiecare subiect valorează un punct.
• Se acordă un punct din oficiu.
• Pentru a obţine întreg punctajul, explicaţi în detaliu rezolvările dvs.
• Subiectele de examen depind de ***codul de examen*** calculat astfel. Formăm şirul de litere: nume, prenume 1, prenume 2 etc (in ordinea din C.I.). Transformăm primele 9 litere în cifre după regula:

$a, f, k, p, u, z \mapsto 1$
$b, g, l, q, v \mapsto 2$
$c, h, m, r, w \mapsto 3$
$d, i, n, s, x \mapsto 4$
$e, j, o, t, y \mapsto 5$

obţinând astfel numerele c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9 care reprezintă codul dvs. de examen. Dacă sunt mai puţin de 9 litere se repetă secvenţa anterioară (nume, prenumele 1, apoi prenumele 2 etc).

Exemplu: "Ţîru Ion" dă şirul ***tiruionti*** care dă codul de examen: $c_1 = 5,\ c_2 = 4,\ c_3 = 3,\ c_4 = 1,\ c_5 = 4,\ c_6 = 5,\ c_7 = 4,\ c_8 = 5,\ c_9 = 4.$

• Scrieţi rezolvările cu pix/stilou cu pastă/cerneală albastră sau neagră pe foi de hârtie albă (preferabil neliniată) ca la un examen obişnuit. Incercaţi să obţineţi un contrast bun.
• Pe prima foaie scrieţi clar ***numele*** (ca in C.I.), ***grupa*** şi ***codul de examen***.
• Fotografiaţi lucrarea şi strângeţi toate pozele într-un fişier ***pdf*** purtând numele dvs. (e.g. Moraru.pdf).
• De la adresa dvs. "unibuc" (sau altă adresă), trimiteţi acest fişier prin email la ***ambele*** adrese :

`tiberiu_dumitrescu2003@yahoo.com`
`4l6ebr4@gmail.com`

Ora limită pentru trimitere **12:15** (data 27-ian-22).

Subiectele de examen

1. Fie $A = \{c_1, c_2, c_3\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Arătaţi că relaţia

$$X \sim Y \overset{def}{\Leftrightarrow} X \cup A = Y \cup A$$

este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $\mathcal{P}(B)$ şi listaţi clasele ei de echivalenţă.

2. Fie $n = 4 + c_4 + c_5$. Determinaţi mulţimea

$$\{d \in \mathbb{Z}_n \mid \mathbb{Z}_n - \{d\} \text{ este parte stabilă a monoidului } (\mathbb{Z}_n, \cdot)\}.$$

3. Fie permutările

$$\alpha_1 = (1234),\ \alpha_2 = (1243),\ \alpha_3 = (1324),\ \alpha_4 = (1342),\ \alpha_5 = (1423),$$
$$\beta_1 = (12)(34),\ \beta_2 = (12),\ \beta_3 = (13)(24),\ \beta_4 = (13),\ \beta_5 = (14)(24).$$

Determinaţi subgrupul lui S_4 generat de α_{c_6} şi β_{c_7}.

4. Câte elemente de ordin $(-1)^{c_8} + 4$ are grupul produs direct

$$S_{c_9+4} \times (\mathbb{Z}_{c_1+3}, +)\ ?$$

5. Determinaţi morfismele de grupuri

$$(\mathbb{Z}_{4c_2+2}, +) \to Q$$

unde Q este grupul cuaternionilor.

6. Listaţi elementele idealului generat de $(\widehat{c_5}, \overline{c_6})$ în inelul produs direct

$$\mathbb{Z}_{c_3+3} \times \mathbb{Z}_{c_4+5}.$$

7. Considerăm mulţimea

$$A = \{\begin{pmatrix} a & bc_3 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Presupunem cunoscut faptul că A este subinel în inelul de matrice $M_2(\mathbb{Z})$. Verificaţi dacă A este inel integru.

8. Este inelul factor $\mathbb{Z}[i]/ < c_7 + c_8 i >$ izomorf cu un inel de forma $\mathbb{Z}_n$?

9. Fie cuaternionul $q = c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k$. Există un polinom nenul $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(q) = 0$?

Examen algebră I 27.01.2022

ONUȚU RADU-CONSTANTIN

Grupa 113

ONUȚURADU $\Rightarrow c_1=5, c_2=4, c_3=1, c_4=5, c_5=1, c_6=3, c_7=1, c_8=4, c_9=1$

1. $A=\{5,4,1\}=\{1,4,5\}$

$B=\{1,2,3,4,5\}$

$X \sim Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$

~~$P(B)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\},$~~
~~$\{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{1,2,3\},$~~
~~$\{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{3,4,5\},$~~

$\sim$ este o relație de echivalență $\Leftrightarrow$ $\sim$ este reflexivă, simetrică și tranzitivă

$\sim$ este reflexivă $\Leftrightarrow X \sim X, \forall X \in P(B)$

$X \sim X \Leftrightarrow X \cup A = X \cup A$. Adevărat $\Rightarrow$ $\sim$ reflexivă (1)

$\sim$ este simetrică $\Leftrightarrow X \sim Y \Rightarrow Y \sim X, \forall X, Y \in P(B)$

$X \sim Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A \Leftrightarrow Y \cup A = X \cup A \Leftrightarrow Y \sim X, \forall X, Y \in P(B)$

$\Rightarrow$ $\sim$ simetrică (2)

$\sim$ este tranzitivă $\Leftrightarrow X \sim Y$ și $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z, \forall X, Y, Z \in P(B)$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A \\ Y \sim Z \Leftrightarrow Y \cup A = Z \cup A \end{array}\right| \Rightarrow X \cup A = Z \cup A \Leftrightarrow X \sim Z, \forall X, Y, Z \in P(B)$$

$\Rightarrow$ $\sim$ tranzitivă (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ $\sim$ este o relație de echivalență pe $P(B)$

Pt. $\forall X \in P(A)$, $[X]=\{Y \in P(A)\}$; $P(A) \subset P(B)$

~~Pt. $\forall X \in B-A$, $[X]=\{$~~

~~Pt. $X=\{2\}$, $[\{2\}]=\{\{2\} \cup Y \mid Y \in P(A)\}$~~

~~Pt. $X=\{3\}$, $[\{3\}]=\{\{3\} \cup Y \mid Y \in P(A)\}$~~

~~Pt. $X=\{2,3\}$, $[\{2,3\}]=\{\{2,3\} \cup Y \mid Y \in P(A)\}$~~

Pe. $X \in \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A)$, $[X] = \{X \cup Y \mid Y \in \mathcal{P}(A)\}$

2. $n = 4 + 5 + 1 = 10$

$M = \{ d \in \mathbb{Z}_{10} \mid \mathbb{Z}_{10} - \{d\}$ este parte stabilă a monoidului $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$

Alcătuiesc tabla înmulțirii pe $\mathbb{Z}_{10}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{9}$	$\hat{2}$	$\hat{5}$	$\hat{8}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{7}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$	$\hat{2}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$	$\hat{2}$	$\hat{6}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$
$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{2}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{2}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$
$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{7}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{8}$	$\hat{5}$	$\hat{2}$	$\hat{9}$	$\hat{6}$	$\hat{3}$
$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{6}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{6}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{9}$	$\hat{0}$	$\hat{9}$	$\hat{8}$	$\hat{7}$	$\hat{6}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

$\mathbb{Z}_{10} - \{d\}$ e parte stabilă $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}_{10} - \{d\}$, $x \cdot y \in \mathbb{Z}_{10} - \{d\}$

$\hat{0} \notin M$ pt. că $\mathbb{Z}_{10} - \{\hat{0}\}$ nu e parte stabilă (de ex. $\hat{2} \cdot \hat{5} = \hat{0}$)
$\hat{1} \notin M$ pt. că $\mathbb{Z}_{10} - \{\hat{1}\}$ nu e parte stabilă (de ex. $\hat{7} \cdot \hat{3} = \hat{1}$)
$\hat{2} \notin M$ pt. că $\mathbb{Z}_{10} - \{\hat{2}\}$ nu e parte stabilă (de ex. $\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{2}$)
$\hat{3} \notin M$ pt. că $\mathbb{Z}_{10} - \{\hat{3}\}$ nu e parte stabilă (de ex. $\hat{9} \cdot \hat{7} = \hat{3}$)
$\hat{4} \notin M$ pt. că $\mathbb{Z}_{10} - \{\hat{4}\}$ nu e parte stabilă (de ex. $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4}$)
$\hat{5} \in M$ pt. că $\mathbb{Z}_{10} - \{\hat{5}\}$ e parte stabilă conform tablei
$\hat{6} \notin M$ pt. că $\mathbb{Z}_{10} - \{\hat{6}\}$ nu e parte stabilă (de ex. $\hat{9} \cdot \hat{4} = \hat{6}$)
$\hat{7} \notin M$ pt. că $\mathbb{Z}_{10} - \{\hat{7}\}$ nu e parte stabilă (de ex. $\hat{9} \cdot \hat{3} = \hat{7}$)
$\hat{8} \notin M$ pt. că $\mathbb{Z}_{10} - \{\hat{8}\}$ nu e parte stabilă (de ex. $\hat{9} \cdot \hat{2} = \hat{8}$)
$\hat{9} \notin M$ pt. că $\mathbb{Z}_{10} - \{\hat{9}\}$ nu e parte stabilă (de ex. $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{9}$)

$\Rightarrow M = \{5\}$

3. $c_6 = 3$; $c_7 = 1$

$\Rightarrow \alpha_3$; β_1

$\alpha_3 = (1324)$

$\beta_1 = (12)(34)$

$\mathrm{ord}(\alpha_3) = 4$

$\mathrm{ord}(\beta_1) = 2$

$\alpha_3 \cdot \beta_1 = (1324)(12)(34) = (1423)$

$\alpha_3^2 \cdot \beta_1 = (1324)(1324)(12)(34) = (1234)$

$\alpha_3^3 \cdot \beta_1 = (1324)(1324)(1324)(12)(34) = (3421)$

$\cancel{\alpha_3}$.

$\Rightarrow A < S_4$; $A = \langle \alpha_3, \beta_1 \rangle = \{\alpha_3, \beta_1, (1423), (1234), (3421)\}$

③

6. $c_5 = 1$; $c_6 = 3$; $c_3 = 1$; $c_4 = 5$

$(\hat{1}, \bar{3})$ în $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$

$\hat{1} \cdot \mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_4$

$\bar{3} \cdot \mathbb{Z}_{10} = \cancel{\{\hat{0}, \hat{6}, \hat{2}, \hat{8}, \hat{4}\}} \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}, \hat{2}, \hat{5}, \hat{8}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$

elem.
$\Rightarrow$ idealului generat de $(\hat{1}, \bar{6})$ este $\mathbb{Z}_4 \times \cancel{\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}\}} \mathbb{Z}_{10}$

7. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ $c_3 = 1$

$MN \neq O_2$

A - inel integru $\Leftrightarrow \forall M, N \in A; M, N \neq O_2 \Leftrightarrow a, b \neq 0$

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ $\Rightarrow M \cdot N = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} ac + bd = 0 \Rightarrow a = -\frac{bd}{c} \\ ad + bc = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -\frac{bd^2}{c} + bc = 0$

$\Rightarrow -bd^2 + bc^2 = 0$

$\Rightarrow b(c^2 - d^2) = 0$

$\Rightarrow b = 0$ sau $c^2 = d^2$

$(c-d)(c+d) = 0$

$c = d$

$c = -d$

$b = 0 \Rightarrow \begin{matrix} ac = 0 \\ ad = 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow a = 0$ sau $c = 0$ sau $d = 0$

Pentru $b = 0$ ~~şi~~ $\Rightarrow c = d = 0$ nu convine (trebuie $c \neq d \neq 0$)

Pt. ~~(c-d)(c+~~ $c = d \Rightarrow ac + bc = 0$

$(a+b)c = 0 \Rightarrow a + b = 0$

$a = -b$ nu convine (trebuie $a \neq b \neq 0$)

Pt. $c = -d \Rightarrow ac - bc = 0 \Rightarrow a - b = 0$

$(a-b)c = 0$ $\quad a = b$ nu convine (trebuie $a \neq b \neq 0$)

$\Rightarrow A$ nu are divizori ai lui $O_2 \Rightarrow A$ - inel integru