# I. Relații

Se numește **relație binară** pe o mulțime X nevidă, o submulțime nevidă $\rho \subseteq X \times X$, unde $X \times X = \{(x,x) : x \in X\}$ (numit produsul cartezian dintre mulțimile X și X). Pentru $(x,y) \in \rho$, notăm $x\rho y$ și citim "x este în relație cu y".

O relație $\rho$ pe o mulțime $X$ se numește:

- **reflexivă**, dacă $x\rho x, \forall x \in X$;
- **simetrică**, dacă $x\rho y \implies y\rho x, \forall x,y \in X$;
- **antisimetrică**, dacă $x\rho y$ si $y\rho x \implies x = y, \forall x,y \in X$;
- **tranzitivă**, dacă $x\rho y$ si $y\rho z \implies x\rho z, \forall x,y,z \in X$.

O relație $\rho$ pe o mulțime $X$ nevidă se numește de **echivalență** dacă este **reflexivă**, **simetrică** și **tranzitivă**. De obicei, relațiile de echivalență se notează cu $\sim$.

O relație $\rho$ pe o mulțime $X$ nevidă se numește de **ordine** dacă este **reflexivă**, **antisimetrică** si **tranzitivă**. De obicei, relațiile de ordine se notează cu $\leq$.

O mulțime $X$ nevidă pe care definim o relație de ordine $\leq$ se numește **mulțime ordonată** și se noteaza $(X, \leq)$.

O mulțime ordonată se numește **total ordonată** dacă orice două elemente ale ei se pot compara, adică dacă pentru orice $x$ și $y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

**Exemple**: mulțimea $(\mathbb{C}, \leq)$ nu este total ordonată, iar mulțimea $(\mathbb{Q}, \leq)$ este total ordonată, unde $\leq$ este relația de ordine uzuală.

# II. Infimumul si supremumul unei mulțimi

Fie $(X, \leq)$ o mulțime nevidă total ordonată, $A \subseteq X$ o submulțime nevidă a lui $X$.

- $x \in X$ se numește majorant al lui $A$ dacă $a \leq x$, pentru orice $a \in A$. Dacă $A$ are cel puțin un majorant, atunci A este mărginită superior;
- $x \in X$ se numește minorant al lui $A$ dacă $x \leq a$, pentru orice $a \in A$. Dacă $A$ are cel puțin un minorant, atunci A este mărginită inferior;
- dacă există un majorant în A, atunci acesta este unic și se numește maximul lui A (notație: $maxA$);
- dacă există un minorant în A, atunci acesta este unic și se numește minimul lui A (notație: $minA$);
- spunem că A este mărginită inferior cu infimum dacă există un cel mai mare minorant in X (notație $infA$);
- spunem că A este mărginită superior cu supremum dacă există un cel mai mic majorant in X (notație $supA$);

**Observații**:

1. Dacă există $minA$, atunci există $infA$ și este egal cu $minA$. Inversa nu este întotdeauna adevarată.
2. Dacă există $maxA$, atunci există $supA$ și este egal cu $maxA$. Inversa nu este întotdeauna adevarată.
3. Dacă există $infA$, atunci orice alt minorant al lui $A$ este mai mic decât $infA$.
4. Dacă există $supA$, atunci orice alt majorant al lui $A$ este mai mare decât $supA$.
5. $A$ este nemărginită superior sau inferior $\iff$ există un șir $(x_n)_n \subseteq A$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.
6. $A$ este finită $\implies$ $A$ este mărginită și are $minA$ și $maxA$.

**Exemplu**: Considerăm mulțimea $(\mathbb{R}, \leq)$, unde $\leq$ este relația de ordine uzuala și mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = (-\sqrt{7}, \sqrt{5}) \cap \mathbb{Q}$. Atunci

- majoranți ai mulțimii $A$ sunt 4, 5, 7.2, etc;
- mulțimea tuturor majoranților este $[\sqrt{5}, \infty)$;
- $supA = \sqrt{5}$, $infA = -\sqrt{7}$;
- nu există $maxA$, $minA$;
- $A$ este mărginită superior și inferior.

# III. Exerciții

1. Fie $A$ și $B \subset \mathbb{R}$. Definim suma acestor mulțimi prin $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Arătați că dacă $A$ si $B$ sunt mărginite, atunci $A+B$ este mărginită si $sup(A+B) = supA + supB$, iar $inf(A+B) = infA + infB$.
2. Fie $A$ și $B$ două submulțimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$ astfel încât $A \subseteq B$. Arătați că $supA \leq supB$ și $infA \geq infB$.
3. Fie $A$ și $B$ două mulțimi măriginite de numere reale. Arătați că $sup(A \cup B) = max(supA, supB)$ și $inf(A \cup B) = min(infA, infB)$.
4. Să se determine $inf(-1, 1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ și $sup(-1, 1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$.
5. Determinați $infA$, $supA$ pentru mulțimile:
   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} : \frac{3x-1}{x+5} < 2\}$
   (b) $A = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m < 5n\}$

(c) $A = \{(-1)^{n+1}\frac{m+n}{2m+1} : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

(d) $A = \{n + \frac{(-1)^n}{4n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

(e) $A = \{\frac{2mp}{m^2+p^2+1} : m, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

# I. Șiruri de numere reale

Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ un șir de numere reale.

Spunem că șirul $(x_n)_n$ este **convergent** cu limita $l \in \mathbb{R}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât $x_n > \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Spunem că sirul $(x_n)_n$ are limita $-\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât $x_n < -\varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Spunem că șirul $(x_n)_n$ este **șir Cauchy** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât $|x_n - x_m| < \varepsilon$, pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$, $n, m \in \mathbb{N}$. Aceasta condiție poate fi reformulată astfel: dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, $n, p \in \mathbb{N}$, atunci șirul $(x_n)_n$ este **șir Cauchy**.

**Teoremă (Weierstrass)**: Un șir **monoton** și **mărginit** este **convergent**.

**Criteriul Cauchy**: Un șir este **convergent** dacă și numai dacă este **șir Cauchy**.

**Criteriul cleștelui**: Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(x_n)_n$ trei șiruri de numere reale cu proprietățile:

- există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a_n)_n \leq (x_n)_n \leq (b_n)_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$

Atunci șirul $(x_n)_n$ este **convergent** cu limita $l$.

**Teorema Stolz-Cesàro**: Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale, astfel încât șirul $(y_n)_n$ este strict crescător și $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \bar{\mathbb{R}}$, atunci există și $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

.

# II. Exerciții

1. Arătați, cu ajutorul definiției (cu $\varepsilon$), că următoarele șiruri au limită:

   (a) $x_n = 2^n - \frac{1}{n^2} + 4$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$, $n \in \mathbb{N}$.

   (c) $x_n = \ln \frac{3n+2}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Folosind criteriul Cauchy, arătați că următoarele șiruri sunt convergente:

   (a)
$$x_n = \frac{(\cos 1)^3}{4^2} + \frac{(\cos 2)^3}{4^4} + ... + \frac{(\cos n)^3}{4^{2n}}, n \geq 1.$$

   (b)
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, n \geq 1.$$

3. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_1 \in [1, 2]$, este convergent și calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.

4. Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$,
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+1}.$$

5. Calculați
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

6. Studiați convergența șirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că
$$|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{3n}{4n-1} \cdot |x_{n+1} - x_n|, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

# I. Exerciții rămase de data trecută

1. Folosind criteriul Cauchy, arătați că următorul șir este convergent:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, n \geq 1.$$

2. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_1 \in [1, 2]$, este convergent și calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.

3. Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+1}.$$

4. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

5. Studiați convergența șirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{3n}{4n-1} \cdot |x_{n+1} - x_n|, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

# II. Limita superioară și inferioară a unui șir

**Definiție 1.** Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale și $l \in \bar{\mathbb{R}}$. $l$ se numește **punct limită** al șirului $(x_n)$ dacă există un subșir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al șirului $(x_n)$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = l$.

**Notație 2.** Notăm cu $\mathcal{L}(x_n) = \{l \in \bar{\mathbb{R}} | l\text{-punct limită al șirului } (x_n)\}$ mulțimea punctelor limită ale șirului $(x_n)$.

**Exemplu 3.** Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = (-1)^n$. Atunci $\mathcal{L}(x_n) = \{-1, 1\}$.

**Observația 4.** Condiția necesară si suficientă ca un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să aibă limită este ca mulțimea punctelor sale limită să se reducă la un singur punct: $|\mathcal{L}(x_n)| = 1$.

**Definiția 5.** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Limita superioară a șirului $(x_n)$ este

$$\limsup(x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = sup(\mathcal{L}(x_n))$$

iar limita inferioară a șirului $(x_n)$este

$$\liminf(x_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = inf(\mathcal{L}(x_n)).$$

# III. Exerciții

1. Determinați limita superioară și inferioară a șirurilor:

(a)
$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}, n \geq 0.$$

(b)
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n} \cdot \left[1+\left(\frac{-1}{6}\right)^n\right] + 3\sin\frac{n\pi}{2}, n \geq 1.$$

(c)
$$x_n = \sin\left(\frac{2n\pi+\pi}{4}\right) + (-1)^{3n}\sqrt[n]{\ln n}, n \geq 2.$$

(d)
$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} + \left(\frac{-1}{6}\right)^n + \cos n\pi, n \geq 0.$$

(e)
$$x_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} + \frac{n^2}{2n^2+3} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n \geq 1.$$

# I. Serii de numere reale

**Definiția 1.** Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ și fie $s_n = \sum\limits_{k\geq 1}^{n} x_k$ șirul sumelor parțiale asociat. Seria $\sum\limits_n x_n$ se numește convergentă dacă șirul $s_n$ este convergent și atunci limita șirului $s_n$ este suma seriei, notată $\sum\limits_n x_n$. În caz contrar, seria se numește divergentă.

**Definiția 2.** Seria $\sum\limits_n x_n$ se numește absolut convergentă dacă seria $\sum\limits_n |x_n|$ este convergentă. Orice serie absolut convergentă este convergentă, reciproca fiind falsa.

**Seria geometrică.** Fie seria geometrică cu rația $q$, $\sum\limits_{n\geq 1} q^n$. Atunci

$$\sum_{n\geq 1} q^n = \begin{cases} \text{convergentă, cu suma } \frac{q}{1-q} & \text{, dacă } q \in (-1,1) \\ \text{divergentă} & \text{, altfel} \end{cases}$$

**Seria armonică generalizată.** Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și fie seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. Atunci

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{convergentă} & \text{, dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă} & \text{, altfel} \end{cases}$$

# II. Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

1. **Criteriul raportului (pentru expresii cu rapoarte, factorial, etc.).** Fie seria $\sum\limits_n a_n$ și fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Atunci

$$\sum_n a_n = \begin{cases} \text{convergentă} & \text{, dacă } l < 1 \\ \text{divergentă} & \text{, dacă } l > 1 \\ \text{nu știm} & \text{, dacă } l = 1. \text{ Încercăm să folosim 5.} \end{cases}$$

2. **Criteriul radicalului (pentru funcții putere, etc.).** Fie seria $\sum\limits_n a_n$ și fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Atunci

$$\sum_n a_n = \begin{cases} \text{convergentă} & \text{, dacă } l < 1 \\ \text{divergentă} & \text{, dacă } l > 1 \\ \text{nu știm} & \text{, dacă } l = 1. \text{ Încercăm să folosim 6.} \end{cases}$$

3. **Criteriul comparației cu limite (pentru $ln$ de ceva care tinde la 1, pentru funcții trigonometrice).** Fie seria $\sum\limits_n a_n$ și seria $\sum\limits_n b_n$ (pe care trebuie să o gasim noi) astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0,\infty)$. Atunci seriile $\sum\limits_n a_n$ și $\sum\limits_n b_n$ au aceeași natură.

4. **Criteriul condensării (pentru $ln$ de ceva care tinde la infinit).** Fie $a_n \geq a_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci seriile $\sum\limits_n a_n$ și $\sum\limits_n 2^n \cdot a_{2^n}$ au aceeași natură.

5. **Criteriul Raabe-Duhamel.** Fie seria $\sum\limits_n a_n$ și fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Atunci

$$\sum_n a_n = \begin{cases} \text{convergentă} & \text{, dacă } l > 1 \\ \text{divergentă} & \text{, dacă } l < 1 \\ \text{nu știm} & \text{, dacă } l = 1. \text{ Încercăm să folosim 3.} \end{cases}$$

6. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

7. **Criteriul comparației.** Fie seria $\sum\limits_n a_n$ și seria $\sum\limits_n b_n$ și presupunem ca $a_n \leq b_n$. Atunci
   - Dacă $\sum\limits_n b_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_n a_n$ este convergentă.
   - Dacă $\sum\limits_n a_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_n b_n$ este divergentă.

# III. Criterii de convergență pentru serii cu termeni alternanți

1. **Criteriul Leibniz.** Fie seria cu termeni alternanți $\sum\limits_n (-1)^n \cdot a_n$. Dacă $a_n$ este șir descrescător care tinde la 0, atunci seria este convergentă.

2. **Criteriul Abel-Dirichlet.** Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subseteq \mathbb{R}$. Dacă este îndeplinit unul dintre cele doua seturi de condiții:
   - șirul $(x_n)_n$ este descrescător și tinde la 0, și există $N \in \mathbb{R}$ astfel încât $|y_1 + y_2 + ... + y_n| \leq N, \forall n \in \mathbb{N}$;
   - șirul $(x_n)_n$ este monoton și mărginit și seria $\sum\limits_n y_n$ este convergentă.

   atunci, seria $\sum\limits_n x_n \cdot y_n$ este convergentă.

# IV. Exerciții

1. Să se studieze natura următoarelor serii:

   (a)
$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m+1)(n-m+2)...(n-1)n^2}{n!}.$$

   (b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2^2} ... \cos\frac{\alpha}{2^n}, \alpha \in (0, \pi).$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{5^n}.$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}).$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)\sqrt{n+1}x^{2n}}, x \in (0,\infty).$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} x^n, x \in (0,\infty).$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}, a > 0.$$

2. Să se studieze convergența și absolut convergența următoarelor serii:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n - \ln n}.$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \arctan \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

# I. Exerciții

1. Să se studieze natura următoarelor serii:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}).$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{-2n}, a, b \in \mathbb{R}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} x^n, x \in (0, \infty).$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}, a > 0.$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{xn^2+7n+8}{n^2+5n+2}\right)^n, x \in (0, \infty).$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (n+3)!}{(2n+1)! x^n}, x \in (0, \infty).$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \cdot \tan\left(\frac{n^2+1}{4^n(n^3+5)}\right).$$

2. Să se studieze convergența și absolut convergența următoarelor serii:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n - \ln n}.$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \arctan \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

# I. Analiza topologică a unei mulțimi din $\mathbb{R}$

**Definiția 1.** Fie $x, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Intervalul deschis $(x-r, x+r)$ se numește **bila de centru x si raza r** și se notează $\mathcal{B}(x,r) = (x-r, x+r)$.

**Definiția 2.** O mulțime $V \subseteq R$ se numește **vecinătate a punctului** $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă există $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ astfel încât $\mathcal{B}(x,r) \subseteq V$. Notăm cu $V_x$ mulțimea tuturor vecinătăților punctului $x$.

**Definiția 3.** Fie o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$. Vom spune că $x \in A$ se numește **punct interior al mulțimii** $A$ dacă $A$ este vecinătate pentru $x$ (altfel spus, dacă există $r > 0$ astfel încât $(x-r, x+r) \subseteq A$). Mulțimea tuturor punctelor interioare ale mulțimii $A$ se numește interiorul mulțimii $A$ și se notează cu $\mathring{A}$.

**Definiția 4.** Mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește **deschisă** dacă $\forall x \in G$, $\exists r > 0$ astfel încât $\mathcal{B}(x,r) \subseteq A$.

**Proprietăți:**

- $\mathring{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în $A$.
- $\mathring{A} \subseteq A$ si $\mathring{A}$ este mulțime deschisă.
- A este deschisă dacă și numai dacă $\mathring{A} = A$.
- $A \subseteq B \implies \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.
- $A \mathring{\cap} B = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
- $A \mathring{\cup} B \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

**Teorema 5.** O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește **închisă** dacă $C_F = \mathbb{R} \setminus A$ este mulțime deschisă.

**Proprietăți:**

1. $\emptyset$ și $\mathbb{R}$ sunt mulțimi deschise;
2. intersecția a două mulțimi deschise este mulțime deschisă;
3. $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ și $\mathbb{Z}$ sunt mulțimi închise;
4. reuniunea a doua mulțimi închise este mulțime închisă;
5. există mulțimi care sunt și deschise și închise;
6. există mulțimi care nu sunt deschise, nici închise ($A = [1,3)$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$);
7. mulțimile deschise din R sunt de forma $(a,b), (-\infty, a), (a, \infty)$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

**Definiția 6.** $x \in \mathbb{R}$ se numește **punct aderent mulțimii** $A$ dacă, $\forall\ V \in V_x$, $V \cap A \neq \emptyset$. Notăm cu $\bar{A}$ mulțimea punctelor aderente.

**Teorema 7.** O mulțime $A$ este **închisă** dacă și numai dacă $A = \bar{A}$.

**Definiția 8.** $x \in \mathbb{R}$ se numește **punct de acumulare al mulțimii** $A$ dacă, $\forall\ V \in V_x$, $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Notăm cu $A'$ mulțimea punctelor de acumulare a mulțimii A.

**Definiția 8'.** $x \in \mathbb{R}$ este **punct de acumulare al mulțimii** $A$ dacă și numai dacă în orice vecinătate a punctului $x$ se găsesc o infinitate de elemente din $A$.

**Definiția 9.** Frontiera mulțimii A este $FrA = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

**Proprietăți:**

- $C_{\bar{A}} = \mathring{C}_A$.
- $C_{\mathring{A}} = \bar{C}_A$.
- $\bar{A}$ este cea mai mică mulțime închisă care conține pe A.
- $\bar{A} \supseteq A$ și $\bar{A}$ este mulțime închisă.
- A este închisă dacă și numai dacă $\bar{A} = A$.
- $A \subseteq B \implies \bar{A} \subseteq \bar{B}$.
- $A \bar{\cap} B = \bar{A} \cap \bar{B}$.
- $A \bar{\cup} B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.
- $A' \subseteq \bar{A}$.
- $\bar{A} = A' \cup A$.
- $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$.
- $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
- $(A')' \subseteq A'$.
- $\bar{A}' = A'$.
- A este deschisă $\iff A \cap FrA = \emptyset$.
- A este închisă $\iff FrA \subseteq A$.
- $FrA$ este mulțime închisă.
- $Fr(A \cup B) \subseteq FrA \cup FrB$
- $Fr(A \cap B) \subseteq FrA \cup FrB$
- A este **mărginită** dacă și numai dacă $\exists\ x, r \in \mathbb{R}, r > 0$ astfel încât $A \subseteq \mathcal{B}(x - r, x + r)$.

# II. Exerciții

1. Determinați $\mathring{A}, \bar{A}, A', FrA$ și decideți dacă A este închisă, deschisă sau mărginită:

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

   (b) $A = (0, 5] \cup \{7\}$

   (c) $A = \mathbb{Q}$

   (d) $A = [1, 2) \cap \mathbb{Q}$

   (e) $A = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

   (f) $A = [0, 1) \cup \{-\frac{1}{4^n} : n \in \mathbb{N}\}$

   (g) $A = [-4, 7) \cup \{10, 11\} \cup [(-9, -8) \cap \mathbb{Q}]$

   (h) $A = (-3, 0] \cup \{\frac{n+\sqrt{2}}{3n+\sqrt{3}} : n \in \mathbb{N}\}$

# I. Analiza topologică a unei mulțimi din $\mathbb{R}$

**Definiția 1.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Vom spune că $A$ este **compactă** dacă $A$ este închisă și mărginită.

**Definiția 2.** O mulțime este conexă într-un spațiu topologic dacă și numai dacă nu este reuniunea a doua mulțimi nevide, deschise, disjuncte.

**Propoziție 3.** O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ este conexă dacă și numai dacă este interval.

# II. Exerciții

1. Determinați $\mathring{A}, \bar{A}, A', FrA$ și decideți dacă A este închisă, deschisă, mărginită, compactă sau conexă:

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

   (b) $A = (0, 5] \cup \{7\}$

   (c) $A = \mathbb{Q}$

   (d) $A = [1, 2) \cap \mathbb{Q}$

   (e) $A = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

   (f) $A = [0, 1) \cup \{-\frac{1}{4^n} : n \in \mathbb{N}\}$

   (g) $A = [-4, 7) \cup \{10, 11\} \cup [(-9, -8) \cap \mathbb{Q}]$

   (h) $A = (-3, 0] \cup \{\frac{n+\sqrt{2}}{3n+\sqrt{3}} : n \in \mathbb{N}\}$

# I. Continuitatea, derivabilitatea funcțiilor. Exerciții

1. Studiați continuitatea și derivabilitatea următoarelor funcții:

   (a)
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (b)
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

   (c)
$$f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} + \frac{\ln(x^2+x+1)}{2x}, \text{ dacă } x > 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (d)
$$f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin(x+1) - \frac{2sinx}{x}, \text{ dacă } x > 0 \\ -2 + \sin 1, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (e)
$$f\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{1}{x^2}) + \frac{\ln(1-x)}{2x}, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{\pi-1}{2}, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (f)
$$f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$$

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Studiați dacă există funcții bijective $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ și care au proprietatea lui Darboux.

3. Fie $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f, g$ continue pe $[a, b]$, derivabile pe $(a, b)$. Știind că $f(a) = f(b) = 0$, arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) + f(c) \cdot g'(c) = 0$.

4. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+3}$. Demonstrați că $f(x+1) - f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

# I. Uniform continuitatea funcțiilor reale

**Definiția 1.** Fie $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H \subseteq A$ o mulțime. Spunem că $f$ este **uniform continuă** pe $H$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x, y \in H$ cu $|x - y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

**Propoziția 1.** O funcție continuă pe un interval compact este uniform continuă.

**Propoziția 2.** O funcție $f\colon H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniform continua duce orice șir Cauchy într-un șir Cauchy.

*Cum folosim această propoziție în exerciții?* Dacă găsim $(x_n)_n \subseteq H$ șir Cauchy (adică convergent), dar $(f(x_n))_n$ nu este șir Cauchy (convergent), atunci $f$ nu este uniform continuă.

**Propoziția 3.** Fie $f\colon H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Atunci sunt echivalente afirmațiile:

- $f$ este uniform continuă pe $H$;
- $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \subseteq H$ cu $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, avem $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

*Cum folosim această propoziție în exerciții?* Dacă găsim $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq H$ astfel încât $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, dar $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$, atunci $f$ nu este uniform continuă.

**Propoziția 4.** Orice funcție Lipschitz ( i.e. $\exists M > 0$ astfel încât $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$, $\forall x, y$) este uniform continuă.

*În exerciții vom folosi următorul **corolar**:* Orice funcție derivabilă cu derivata mărginită este funcție Lipschitz, deci uniform continuă.

**Propoziția 5.** Dacă $f\colon I \cup J \to \mathbb{R}$ astfel încât $I \cap J \neq \emptyset$ și $f$ este uniform continuă pe $I$ si $J$, atunci $f$ este uniform continuă pe $I \cup J$.

**Propoziția 6.** Fie $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ . Atunci sunt echivalente afirmațiile:

- $f$ este uniform continuă pe $(a, b]$;
- $\exists \tilde{f}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă, astfel încât $\tilde{f}\Big|_{(a,b]} = f$.

# II. Exerciții

1. Studiați continuitatea, derivabilitatea si uniform continuitatea următoarelor funcții:

   (a)
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (b)
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

   (c)
$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} + \frac{\ln(x^2+x+1)}{2x}, \text{ dacă } x > 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (d)
$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin(x+1) - \frac{2sinx}{x}, \text{ dacă } x > 0 \\ -2 + \sin 1, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (e)
$$f\colon (-\infty,0] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{1}{x^2}) + \frac{\ln(1-x)}{2x}, \text{ dacă } x \in (-\infty,0) \\ \frac{\pi-1}{2}, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (f)
$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$$

2. Studiați uniform continuitatea următoarelor funcții:

   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$.

   (b) $f\colon (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

   (c) $f\colon (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

   (d) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{x^2+3x}$.

# I. Șiruri de funcții. Convergență simplă și uniformă. Exerciții

1. Considerăm șirul de funcții $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$, pentru orice $x \in [0,1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

2. Considerăm șirul de funcții $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$, pentru orice $x \in [0,1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

3. Considerăm șirul de funcții $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2+nx}{n+x+1}$, pentru orice $x \in [0,\infty)$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n\geq 1}$ pe intervalele $[0,1]$ si $[1,\infty)$.

4. Considerăm șirul de funcții $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{xe^{2x+1}}{x^2+n^2}$, pentru orice $x \in [0,\infty)$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

5. Considerăm șirul de funcții $f_n\colon (-\infty,0) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}$, pentru orice $x \in (-\infty,0)$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

6. Considerăm șirul de funcții $f_n\colon [5,6] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(x+n)^3}{(n+2)^4}$, pentru orice $x \in [5,6]$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

7. Considerăm șirul de funcții $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x+2n}{x+n+1}\sin(x+1)$, pentru orice $x \in [0,\infty)$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

# I. Integrabilitate Riemann. Exerciții.

1. Calculați următoarele limite:

   (a)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\frac{n}{(n+3)^2}+...+\frac{n}{(n+n)^2}\right)$$

   (b)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1-\frac{1}{\sqrt{1}}}+\frac{1}{n+2-\frac{1}{\sqrt{2}}}+...+\frac{1}{n+n-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$$

   (c)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+5}+...+\frac{1}{3n+(3n-1)}\right)$$

   (d)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}\right)$$

   (e)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e}}+\frac{2}{\sqrt[n]{e^2}}+\frac{3}{\sqrt[n]{e^3}}+...+\frac{n}{\sqrt[n]{e^n}}\right)$$

2. Stabiliți dacă următoarele funcții sunt integrabile Riemann:

   (a)
$$f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, \text{ dacă } x\neq 0\\ 2, \text{ dacă } x=0\end{cases}$$

   (b)
$$f\colon[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, \text{ dacă } x\neq 0\\ 0, \text{ dacă } x=0\end{cases}$$

   (c)
$$f\colon[1,4]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{ dacă } x\geq 2\\ x^2+x+1, \text{ dacă } x<2\end{cases}$$