Geometrie (II)
Spații afine

Curs anul 1, Sem. 2

Spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ o mulțime (ale cărei elemente le vom numi "puncte"), V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K și $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$, o aplicație cu proprietățile:
1) $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$, pentru orice $A, B, C \in \mathcal{A}$.
2) Există un punct $O \in \mathcal{A}$ astfel încât aplicația $\varphi_O : \mathcal{A} \to V$, dată prin $\varphi_{\mathrm{O}}(A) = \varphi(O, A)$ este bijecție ("*Un punct este univoc caracterizat de vectorul său de pozitiție*").
Tripletul $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ se numește *spațiu afin* (asociat spațiului vectorial V), iar aplicația φ se numește *structură afină* pe $\mathcal{A}$. V se numește *spațiul (vectorial) director* sau *asociat* spațiului afin, notat $dir(\mathcal{A})$; $V = dir(\mathcal{A})$.

Spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ o mulțime (ale cărei elemente le vom numi "puncte"), V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K și $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$, o aplicație cu proprietățile:
1) $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$, pentru orice $A, B, C \in \mathcal{A}$.
2) Există un punct $O \in \mathcal{A}$ astfel încât aplicația $\varphi_O : \mathcal{A} \to V$, dată prin $\varphi_{\mathrm{O}}(A) = \varphi(O, A)$ este bijecție ("*Un punct este univoc caracterizat de vectorul său de pozitiție*").
Tripletul $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ se numește *spațiu afin* (asociat spațiului vectorial V), iar aplicația φ se numește *structură afină* pe $\mathcal{A}$. V se numește *spațiul (vectorial) director* sau *asociat* spațiului afin, notat $dir(\mathcal{A})$; $V = dir(\mathcal{A})$.

Notație

Vom nota de obicei, $\overrightarrow{AB} \overset{\text{not}}{=} \varphi(A, B)$. Cu aceasta, proprietatea 1) devine:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Această proprietate se va numi și *"regula triunghiului"*. În particular, avem $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}, \ \forall A, B \in \mathcal{A}$.

Exemple de spații afine

Structura afină canonică pe un spațiu vectorial

Fie V un spațiu vectorial . Definim funcția $\varphi : V \times V \to V$

$$\varphi(u, v) = v - u.$$

Atunci tripletul (V, V, φ) este un spațiu afin.

Notație. Dacă $V = K^n$ cu structura canonică de $K-$spațiu vectorial, vom nota $\mathbb{A}^n_K$ spațiul afin obținut astfel. El va fi referit uneori și ca *"K^n cu structura afină canonică"* sau *"spațiu afin standard"*.

Exemple de spații afine

Structura afină canonică pe un spațiu vectorial

Fie V un spațiu vectorial . Definim funcția $\varphi : V \times V \to V$

$$\varphi(u, v) = v - u.$$

Atunci tripletul (V, V, φ) este un spațiu afin.

Notație. Dacă $V = K^n$ cu structura canonică de $K-$spațiu vectorial, vom nota $\mathbb{A}^n_K$ spațiul afin obținut astfel. El va fi referit uneori și ca *"K^n cu structura afină canonică"* sau *"spațiu afin standard"*.

Soluțiile unui sistem liniar

Fie $A \in \mathcal{M}(m, n; K)$, $B \in K^m$ fixate. Submulțimea $\{X \in K^n; AX = B\}$ (mulțimea soluțiilor unui sistem liniar neomogen) este un spațiu afin asociat spațiului vectorial reprezentat de mulțimea soluțiilor sistemului liniar omogen $AX = 0$. Structura afină este aici $\varphi(X, Y) = Y - X$.

Independența de “origine”

Teoremă

Dacă $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ *e un spațiu afin, atunci pentru orice* $A \in \mathcal{A}$ *aplicația* $\varphi_A : \mathcal{A} \to V, \varphi_A(B) = \varphi(A, B)$ *e bijectivă.*

Independența de “origine”

Teoremă

Dacă $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ *e un spațiu afin, atunci pentru orice* $A \in \mathcal{A}$ *aplicația* $\varphi_A : \mathcal{A} \to V, \varphi_A(B) = \varphi(A, B)$ *e bijectivă.*

Demonstrație

Fie $v \in V$ arbitrar. Arătăm că există și e unic un punct B cu proprietatea $\overrightarrow{AB} = v$. Deci ar trebui ca $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = v$, adică $\overrightarrow{OB} = v - \overrightarrow{AO}$. Cum proprietatea 2) din definiție asigură existența unui unic B cu această proprietate, bijectivitatea lui φ_A e demonstrată.

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$ puncte arbitrare și $a_1, \dots, a_n \in K$ astfel încât

$$a_1 + \cdots + a_n = 1.$$

Alegem $O \in \mathcal{A}$ arbitrar. Atunci punctul P unic definit de relația

$$\overrightarrow{OP} = a_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n \overrightarrow{OP_n}$$

nu depinde de alegerea lui O.

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ puncte arbitrare și $a_1, \ldots, a_n \in K$ astfel încât

$$a_1 + \cdots + a_n = 1.$$

Alegem $O \in \mathcal{A}$ arbitrar. Atunci punctul P unic definit de relația

$$\overrightarrow{OP} = a_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n \overrightarrow{OP_n}$$

nu depinde de alegerea lui O.

Demonstrație

Fie O' a altă alegere pentru O și P' definit de $\overrightarrow{O'P'} = a_1 \overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_n \overrightarrow{O'P_n}$.

Adunând $\overrightarrow{OO'}$ rezultă

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ puncte arbitrare și $a_1, \ldots, a_n \in K$ astfel încât

$$a_1 + \cdots + a_n = 1.$$

Alegem $O \in \mathcal{A}$ arbitrar. Atunci punctul P unic definit de relația

$$\overrightarrow{OP} = a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OP_n}$$

nu depinde de alegerea lui O.

Demonstrație

Fie O' a altă alegere pentru O și P' definit de $\overrightarrow{O'P'} = a_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O'P_n}$. Adunând $\overrightarrow{OO'}$ rezultă $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = (\sum_{i=1}^{n} a_i)\overrightarrow{OO'} + a_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O'P_n}$. Deci

$\overrightarrow{OP'} =$

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$ puncte arbitrare și $a_1, \dots, a_n \in K$ astfel încât

$$a_1 + \cdots + a_n = 1.$$

Alegem $O \in \mathcal{A}$ arbitrar. Atunci punctul P unic definit de relația

$$\overrightarrow{OP} = a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OP_n}$$

nu depinde de alegerea lui O.

Demonstrație

Fie O' a altă alegere pentru O și P' definit de $\overrightarrow{O'P'} = a_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O'P_n}$.
Adunând $\overrightarrow{OO'}$ rezultă $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = (\sum_{i=1}^{n} a_i)\overrightarrow{OO'} + a_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O'P_n}$. Deci
$\overrightarrow{OP'} = a_1(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_1}) + \cdots + a_n(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_n}) =$
$=$

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$ puncte arbitrare și $a_1, \dots, a_n \in K$ astfel încât

$$a_1 + \dots + a_n = 1.$$

Alegem $O \in \mathcal{A}$ arbitrar. Atunci punctul P unic definit de relația

$$\overrightarrow{OP} = a_1\overrightarrow{OP_1} + \dots + a_n\overrightarrow{OP_n}$$

nu depinde de alegerea lui O.

Demonstrație

Fie O' a altă alegere pentru O și P' definit de $\overrightarrow{O'P'} = a_1\overrightarrow{O'P_1} + \dots + a_n\overrightarrow{O'P_n}$.
Adunând $\overrightarrow{OO'}$ rezultă $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = (\sum_{i=1}^{n} a_i)\overrightarrow{OO'} + a_1\overrightarrow{O'P_1} + \dots + a_n\overrightarrow{O'P_n}$. Deci

$$\overrightarrow{OP'} = a_1(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_1}) + \dots + a_n(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_n}) =$$
$$= a_1\overrightarrow{OP_1} + \dots + a_n\overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{OP} \text{ deci}$$

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$ puncte arbitrare și $a_1, \dots, a_n \in K$ astfel încât

$$a_1 + \cdots + a_n = 1.$$

Alegem $O \in \mathcal{A}$ arbitrar. Atunci punctul P unic definit de relația

$$\overrightarrow{OP} = a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OP_n}$$

nu depinde de alegerea lui O.

Demonstrație

Fie O' a altă alegere pentru O și P' definit de $\overrightarrow{O'P'} = a_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O'P_n}$.
Adunând $\overrightarrow{OO'}$ rezultă $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = (\sum_{i=1}^{n} a_i)\overrightarrow{OO'} + a_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O'P_n}$. Deci
$\overrightarrow{OP'} = a_1(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_1}) + \cdots + a_n(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_n}) =$
$= a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{OP}$ deci $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}$ ceea ce implică

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$ puncte arbitrare și $a_1, \dots, a_n \in K$ astfel încât

$$a_1 + \cdots + a_n = 1.$$

Alegem $O \in \mathcal{A}$ arbitrar. Atunci punctul P unic definit de relația

$$\overrightarrow{OP} = a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OP_n}$$

nu depinde de alegerea lui O.

Demonstrație

Fie O' a altă alegere pentru O și P' definit de $\overrightarrow{O'P'} = a_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O'P_n}$.
Adunând $\overrightarrow{OO'}$ rezultă $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = (\sum_{i=1}^{n} a_i)\overrightarrow{OO'} + a_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O'P_n}$. Deci
$\overrightarrow{OP'} = a_1(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_1}) + \cdots + a_n(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_n}) =$
$= a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{OP}$ deci $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}$ ceea ce implică $P' = P$.

Combinații afine

Notație

Cu notațiile precedente, dacă P este definit de relația $\overrightarrow{OP} = a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OP_n}$ vom nota

$$P = a_1 P_1 + \cdots + a_n P_n$$

și vom spune că P *este combinația afină a punctelor* $P_1, \ldots, P_n$ *cu ponderile* $a_1, \ldots a_n$.

Combinații afine

Notație

Cu notațiile precedente, dacă P este definit de relația $\overrightarrow{OP} = a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OP_n}$ vom nota

$$P = a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$$

și vom spune că P *este combinația afină a punctelor* $P_1, \ldots, P_n$ *cu ponderile* $a_1, \ldots a_n$.

Exemple

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spațiu afin peste un corp de $char(K) \neq 2$ și fie A, B două puncte distincte. Atunci mijlocul "segmentului" AB este $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Similar, dacă avem $char(K) \neq 3$ și dacă A, B, C sunt trei puncte, centrul de greutate al triunghiului $\Delta(ABC)$ este $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$.

Combinații afine

Notație

Cu notațiile precedente, dacă P este definit de relația $\overrightarrow{OP} = a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OP_n}$ vom nota

$$P = a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$$

și vom spune că P *este combinația afină a punctelor* $P_1, \ldots, P_n$ *cu ponderile* $a_1, \ldots a_n$.

Exemple

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spațiu afin peste un corp de $char(K) \neq 2$ și fie A, B două puncte distincte. Atunci mijlocul "segmentului" AB este $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Similar, dacă avem $char(K) \neq 3$ și dacă A, B, C sunt trei puncte, centrul de greutate al triunghiului $\Delta(ABC)$ este $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$.

Exercițiu

Verificați faptul că în $\mathbb{A}^n_K$ *alegând* $O = 0$ *combinațiile afine se pot calcula prin relațiile algebrice uzuale de la spații vectoriale.*

Închidere afină.

Definiție

Pentru o submulțime M a unui spațiu afin, se numește acoperirea *sau* închiderea afină *a lui M și se notează $\mathrm{Af}(M)$ mulțimea tuturor combinațiilor afine, cu orice ponderi, care se pot forma cu submulțimi finite ale lui M:*

$$\mathrm{Af}(M) = \{\sum_{i=1}^{m} a_i P_i \mid P_i \in M, a_i \in K, \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, m \in \mathbb{N}\}$$

Închidere afină.

Definiție

Pentru o submulțime M a unui spațiu afin, se numește acoperirea *sau* închiderea afină *a lui M și se notează $\mathrm{Af}(M)$ mulțimea tuturor combinațiilor afine, cu orice ponderi, care se pot forma cu submulțimi finite ale lui M:*

$$\mathrm{Af}(M) = \{\sum_{i=1}^{m} a_i P_i \mid P_i \in M, a_i \in K, \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, m \in \mathbb{N}\}$$

Exercițiu

1) Dacă $M_1 \subset M_2$, atunci $\mathrm{Af}(M_1) \subseteq \mathrm{Af}(M_2)$.

2) $M \subseteq \mathrm{Af}(M)$ și $\mathrm{Af}(\mathrm{Af}(M)) = \mathrm{Af}(M)$.

Închidere afină.

Definiție

Pentru o submulțime M a unui spațiu afin, se numește acoperirea *sau* închiderea afină *a lui M și se notează $\mathrm{Af}(M)$ mulțimea tuturor combinațiilor afine, cu orice ponderi, care se pot forma cu submulțimi finite ale lui M:*

$$\mathrm{Af}(M) = \{\sum_{i=1}^{m} a_i P_i \mid P_i \in M, a_i \in K, \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, m \in \mathbb{N}\}$$

Exercițiu

1) *Dacă* $M_1 \subset M_2$, *atunci* $\mathrm{Af}(M_1) \subseteq \mathrm{Af}(M_2)$.

2) $M \subseteq \mathrm{Af}(M)$ *și* $\mathrm{Af}(\mathrm{Af}(M)) = \mathrm{Af}(M)$.

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $S \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este sistem afin de generatori *dacă $\mathrm{Af}(S) = \mathcal{A}$, adică orice punct din $\mathcal{A}$ se poate scrie ca o combinație afină de puncte din S.*

Sisteme afine de generatori

Teorema de caracterizare a sistemelor afine de generatori

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spațiu afin și $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci S este sistem afin de generatori dacă și numai dacă sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ este sistem de generatori pentru spațiul vectorial V.

Sisteme afine de generatori

Teorema de caracterizare a sistemelor afine de generatori

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spațiu afin și $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci S este sistem afin de generatori dacă și numai dacă sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ este sistem de generatori pentru spațiul vectorial V.

Demonstrație

$" \Rightarrow "$ Fie $v \in V$ arbitrar. Există $P \in \mathcal{A}$ astfel încât $v = \overrightarrow{P_0P}$. Din ipoteză, există $a_0, \ldots a_n \in K$ astfel încât $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$. Deducem

Sisteme afine de generatori

Teorema de caracterizare a sistemelor afine de generatori

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spațiu afin și $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci S este sistem afin de generatori dacă și numai dacă sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ este sistem de generatori pentru spațiul vectorial V.

Demonstrație

"$\Rightarrow$" Fie $v \in V$ arbitrar. Există $P \in \mathcal{A}$ astfel încât $v = \overrightarrow{P_0P}$. Din ipoteză, există $a_0, \ldots a_n \in K$ astfel încât $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$. Deducem

$$v = \overrightarrow{P_0P} = a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}.$$

Sisteme afine de generatori

Teorema de caracterizare a sistemelor afine de generatori

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spațiu afin și $S = \{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci S este sistem afin de generatori dacă și numai dacă sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ este sistem de generatori pentru spațiul vectorial V.

Demonstrație

"$\Rightarrow$" Fie $v \in V$ arbitrar. Există $P \in \mathcal{A}$ astfel încât $v = \overrightarrow{P_0P}$. Din ipoteză, există $a_0, \dots a_n \in K$ astfel încât $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \dots + a_nP_n$. Deducem

$$v = \overrightarrow{P_0P} = a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}.$$

"$\Leftarrow$" Fie $P \in \mathcal{A}$ arbitrar. Există $a_1 \dots, a_n \in K$ astfel încât

$\overrightarrow{P_0P} = a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}$.

Sisteme afine de generatori

Teorema de caracterizare a sistemelor afine de generatori

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spațiu afin și $S = \{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci S este sistem afin de generatori dacă și numai dacă sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ este sistem de generatori pentru spațiul vectorial V.

Demonstrație

$" \Rightarrow "$ Fie $v \in V$ arbitrar. Există $P \in \mathcal{A}$ astfel încât $v = \overrightarrow{P_0P}$. Din ipoteză, există $a_0, \dots a_n \in K$ astfel încât $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \dots + a_nP_n$. Deducem

$$v = \overrightarrow{P_0P} = a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}.$$

$" \Leftarrow "$ Fie $P \in \mathcal{A}$ arbitrar. Există $a_1 \dots, a_n \in K$ astfel încât $\overrightarrow{P_0P} = a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}$. Notând $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i$ deducem

$$\overrightarrow{P_0P} = a_0\overrightarrow{P_0P_0} + a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}$$

deci $P =$

Sisteme afine de generatori

Teorema de caracterizare a sistemelor afine de generatori

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spațiu afin și $S = \{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci S este sistem afin de generatori dacă și numai dacă sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ este sistem de generatori pentru spațiul vectorial V.

Demonstrație

" $\Rightarrow$ " Fie $v \in V$ arbitrar. Există $P \in \mathcal{A}$ astfel încât $v = \overrightarrow{P_0P}$. Din ipoteză, există $a_0, \dots a_n \in K$ astfel încât $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \dots + a_nP_n$. Deducem

$$v = \overrightarrow{P_0P} = a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}.$$

" $\Leftarrow$ " Fie $P \in \mathcal{A}$ arbitrar. Există $a_1 \dots, a_n \in K$ astfel încât $\overrightarrow{P_0P} = a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}$. Notând $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i$ deducem

$$\overrightarrow{P_0P} = a_0\overrightarrow{P_0P_0} + a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}$$

deci $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \dots + a_nP_n$.

Afin independență.

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ *un spațiu afin și* $S \subset \mathcal{A}$ *o sumbulțime. Spunem că* S *este* sistem afin independent *dacă pentru orice* $P \in S$ *avem*

$$P \notin \mathrm{Af}(S \setminus \{P\}).$$

Afin independență.

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $S \subset \mathcal{A}$ o sumbulțime. Spunem că S este sistem afin independent *dacă pentru orice $P \in S$ avem*

$$P \notin \mathrm{Af}(S \setminus \{P\}).$$

Teoremă (Criteriu de afin independență)

Fie $S = \{P_0, P_1, \dots P_n\} \subset \mathcal{A}$. Atunci S este afin independent dacă și numai dacă sistemul de vectori

$$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$$

este sistem liniar independent.

Demonstrația criteriului de afin independență.

$\Leftarrow$. Presupunem că unul dintre puncte, P_k e combinație afină de celelalte,

$$P_k = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + \cdots + a_{k-1}P_{k-1} + a_{k+1}P_{k+1} + \cdots + a_nP_n.$$

Rezultă

$$\overrightarrow{P_0P_k} = a_1\overrightarrow{P_0P_1} \cdots + a_{k-1}\overrightarrow{P_0P_{k-1}} + a_{k+1}\overrightarrow{P_0P_{k+1}} + \cdots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}.$$

contradicție cu presupunerea de liniar independență a vectorilor.

$\Rightarrow$ Exercițiu!

Repere afine, repere carteziene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Se numește
a) reper cartezian, *un cuplu $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ unde $O \in \mathcal{A}$ este un punct iar $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ este o bază a lui V;*
b) reper afin, *un sistem $\mathcal{R}_{af} = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ de puncte care este simultan afin independent și sistem afin de generatori.*

Repere afine, repere carteziene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ *un spațiu afin de direcție spațiul vectorial* V*. Se numește*
a) reper cartezian, *un cuplu* $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ *unde* $O \in \mathcal{A}$ *este un punct iar* $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ *este o bază a lui* V*;*
b) reper afin, *un sistem* $\mathcal{R}_{af} = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ *de puncte care este simultan afin independent și sistem afin de generatori.*

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ *un spațiu afin de direcție spațiul vectorial* V*. Punem prin definiție* dimensiunea lui $\mathcal{A}$ *ca fiind*

Repere afine, repere carteziene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ *un spațiu afin de direcție spațiul vectorial* V. *Se numește*
a) reper cartezian, *un cuplu* $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ *unde* $O \in \mathcal{A}$ *este un punct iar* $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ *este o bază a lui* V;
b) reper afin, *un sistem* $\mathcal{R}_{af} = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ *de puncte care este simultan afin independent și sistem afin de generatori.*

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ *un spațiu afin de direcție spațiul vectorial* V. *Punem prin definiție* dimensiunea lui $\mathcal{A}$ *ca fiind dimensiunea spațiului vectorial* V, $\dim(\mathcal{A}) := dim_K(V)$.

Repere afine, repere carteziene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Se numește
a) reper cartezian, *un cuplu $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ unde $O \in \mathcal{A}$ este un punct iar $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ este o bază a lui V;*
b) reper afin, *un sistem $\mathcal{R}_{af} = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ de puncte care este simultan afin independent și sistem afin de generatori.*

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Punem prin definiție dimensiunea lui $\mathcal{A}$ *ca fiind dimensiunea spațiului vectorial V,*
$\dim(\mathcal{A}) := dim_K(V)$.

Remarcă

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin care are un reper afin $\mathcal{R}_{af} = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ atunci el induce un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ cu $O = P_0$ și $\mathcal{B} =$

Repere afine, repere carteziene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Se numește
a) reper cartezian, *un cuplu $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ unde $O \in \mathcal{A}$ este un punct iar $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ este o bază a lui V;*
b) reper afin, *un sistem $\mathcal{R}_{af} = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ de puncte care este simultan afin independent și sistem afin de generatori.*

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Punem prin definiție dimensiunea lui $\mathcal{A}$ *ca fiind dimensiunea spațiului vectorial V,* $\dim(\mathcal{A}) := dim_K(V)$.

Remarcă

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin care are un reper afin $\mathcal{R}_{af} = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ atunci el induce un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ cu $O = P_0$ și $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{P_0 P_i} | i = 1, \ldots, n\}$. În particular, $n = dim(\mathcal{A})$.

Coordonate

Coordonate carteziene

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $P \in \mathcal{A}$ un punct. Dacă am fixat un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ atunci scalarii $x_1, \dots x_n$ astfel încât $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ se numesc *coordonate carteziene ale lui P în raport cu $\mathcal{R}$.*

Coordonate afine

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $P \in \mathcal{A}$ un punct. Dacă am fixat un reper afin $\mathcal{R}_{af} = (P_0, \dots, P_n)$ atunci scalarii $a_0, \dots a_n$ astfel încât $P = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i$ se numesc *coordonate afine ale lui P în raport cu $\mathcal{R}_{af}$.*

Exercițiu

Ce relație există între coordonatele afine ale unui punct în raport cu un reper afin $\mathcal{R}_{af} = (P_0, \dots, P_n)$ și cele carteziene în raport cu reperul indus $\mathcal{R} = \left(P_0, \{\overrightarrow{P_0 P_i} | i = 1, \dots, n\}\right)$?

Schimbarea coordonatelor carteziene

Schimbarea coordonatelor

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots e_n\})$ respectiv $\mathcal{R}_2 = (O_2, \mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots f_n\})$ repere carteziene ale lui $\mathcal{A}$. Fie $P \in \mathcal{A}$ un punct arbitrar ce are coordonatele $(x_1, \dots, x_n)$ în raport cu $\mathcal{R}_1$, respectiv $(y_1, \dots, y_n)$ în raport cu $\mathcal{R}_2$;

$$\overrightarrow{O_1P} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \overrightarrow{O_2P} = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j.$$

Să notăm cu $A = (a_{ij})$ matricea de schimbare de bază (i.e. $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$) și fie $B = (b_1, \dots, b_n)$ coordonatele lui O_2 în raport cu $\mathcal{R}_1$, i.e. $\overrightarrow{O_1O_2} = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$.

Atunci

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) + b_i, \forall i = 1, \dots, n.$$

Schimbarea coordonatelor carteziene

Schimbarea coordonatelor - demonstrație

$\overrightarrow{O_2P} = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j$ deci

$\overrightarrow{O_2P} = \sum_{j=1}^{n} y_j (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j) e_i.$

Dar $\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_2P} + \overrightarrow{O_1O_2}$ deci

$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j) e_i + \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$

Deducem

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) + b_i, \forall i = 1, \ldots, n.$$

Geometrie (II): Subspații afine

Victor Vuletescu

University of Bucharest, Faculty of Mathematics, Bucharest, Romania.

Subspații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție V. O submulțime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ se numește subspațiu afin dacă există $O \in \mathcal{A}'$ astfel încât mulțimea (numită direcția lui $\mathcal{A}'$ din O*)*

$$dir_O(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{OP} | P \in \mathcal{A}'\}$$

este subspațiu vectorial al lui V.

Exemplu

Fie V un spațiu vectorial privit ca spațiu afin cu structura afină canonică. Fie $w \in V$ arbitrar si $V' \subset V$ subspatiu vectorial. Atunci mulțimea

$$V' + w = \{v + w | v \in V'\}$$

este subspațiu afin.

Exercițiu

Verificați faptul că $V" + w$ de mai sus este un subspațiu afin.

Teorema de caracterizare a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă

$$\mathrm{Af}(\mathcal{A}') = \mathcal{A}'.$$

Demonstrație

" $\Rightarrow$ " Suficient să arătăm $\mathrm{Af}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}'$. Fie $P \in \mathrm{Af}(\mathcal{A}')$; deci $P = a_0 P_0 + \cdots + a_n P_n$ cu $P_0, \ldots, P_n \in \mathcal{A}'$. Atunci $\overrightarrow{OP} = a_0 \overrightarrow{OP_0} + \cdots + a_n \overrightarrow{OP_n}$. Deducem $\overrightarrow{OP} \in dir_O(\mathcal{A}')$ deci $P \in \mathcal{A}'$.

" $\Leftarrow$ " Alegem un punct $O \in \mathcal{A}'$ arbitrar; arătăm ca $dir_O(\mathcal{A}')$ este subspațiu vectorial. Fie $v_1, v_2 \in dir_O(\mathcal{A}'), \alpha, \beta \in K$ arbitrare; arătăm că $\alpha v_1 + \beta v_2 \in dir_O(\mathcal{A}')$. Avem $v_1 = \overrightarrow{OP_1}, v_2 = \overrightarrow{OP_2}$ cu $P_1, P_2 \in \mathcal{A}'$. Fie P punctul definit de $P = (1 - \alpha - \beta)O + \alpha P_1 + \beta P_2$; deducem $P \in \mathcal{A}'$.
Dar $\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{OP_1} + \beta \overrightarrow{OP_2} = \alpha v_1 + \beta v_2$ deci $\alpha v_1 + \beta v_2 \in dir_O(\mathcal{A}')$.

Independența direcției de punctul ales

Teoremă

Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este subspațiu afin, atunci direcția $dir_O(\mathcal{A}')$ nu depinde de punctul $O \in \mathcal{A}'$ ales. Ea va fi notată $dir(\mathcal{A}')$.

Demonstrație

Fie $O' \in \mathcal{A}'$ arbitrar. Fie $v \in dir_{O'}(\mathcal{A}')$;deci $v = \overrightarrow{O'P}$ cu $P \in \mathcal{A}'$. Fie $P' = P + O - O'$; din ipoteză, $P' \in \mathcal{A}'$. Avem $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{O'P}$ deci $v = \overrightarrow{OP'}$, i.e. $v \in dir_O(\mathcal{A}')$.

Exercițiu

Este adevărat că dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este o submulțime nevidă astfel încât $dir_O(\mathcal{A}')$ nu depinde de punctul $O \in \mathcal{A}'$ ales, atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin?

O teoremă mai simplă de caracterizare a subspațiilor afine

Teoremă (Cazul $char(K) \neq 2$)

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție V peste un corp K de caracteristică diferită de 2. Fie $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$; atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă pentru orice $P, Q \in \mathcal{A}'$ și pentru orice $\alpha, \beta \in K$ cu $\alpha + \beta = 1$ avem $\alpha P + \beta Q \in \mathcal{A}'$.

Demonstrație

Fie $v \in dir_O(\mathcal{A}')$ și $\alpha \in K$ arbitrari. Avem $v = \overrightarrow{OP}$ cu $P \in \mathcal{A}'$. Fie $R = (1-\alpha)O + \alpha P$ deci $R \in \mathcal{A}'$ si deci $\overrightarrow{OR} \in dir_O(\mathcal{A}')$. Dar $\overrightarrow{OR} = \alpha v$, deci $\alpha v \in dir_O(\mathcal{A}')$.

Fie $O \in \mathcal{A}'$ și fie $v_1, v_2 \in dir_O(\mathcal{A}')$ arbitrari, i.e. $v_1 = \overrightarrow{OP_1}, v_2 = \overrightarrow{OP_2}$ cu $P_1, P_2 \in \mathcal{A}'$. Fie $M = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$; din ipoteză, $M \in \mathcal{A}'$ deci $\overrightarrow{OM} \in dir_O(\mathcal{A}')$. Deducem $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \in dir_O(\mathcal{A}')$. Dar atunci $v_1 + v_2 = 2(\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2) \in dir_O(\mathcal{A}')$

Operații cu subspații afine

Intersecții de subspații afine

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\{\mathcal{A}'_i\}_{i\in I}$ o familie arbitrară de subspații afine. Atunci $\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{A}'_i$ este un subspațiu afin.

Teoremă

Fie A un spațiu afin și $X \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Fie $\{\mathcal{A}'_i\}_{i\in I_X}$ mulțimea tuturor subspațiilor afine ce conțin pe X. Atunci $\mathrm{Af}(X) = \bigcap_{i\in I_X}\mathcal{A}'_i$.

Exercițiu

Arătați că dacă $\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}'_i \neq \emptyset$ atunci $dir\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}'_i\right) = \bigcap_{i\in I} dir(\mathcal{A}'_i)$

Uniunea de subspații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2 \subset \mathcal{A}$ două subspații afine. Definim uniunea lor $\mathcal{A}'_1 \vee \mathcal{A}'_2$ *prin*

$$\mathcal{A}'_1 \vee \mathcal{A}'_2 = \mathrm{Af}(\mathcal{A}'_1 \cup \mathcal{A}'_2).$$

Teoremă (Direcția uniunii a două subspații afine)

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2 \subset \mathcal{A}$ două subspații afine, $O_1 \in \mathcal{A}'_1, O_2 \in \mathcal{A}'_2$ puncte arbitrare fixate. Atunci

$$dir(\mathcal{A}'_1 \vee \mathcal{A}'_2) = dir(\mathcal{A}'_1) + dir(\mathcal{A}'_2) + < \overrightarrow{O_1 O_2} > .$$

Demonstrația teoremei referitoare la direcția uniunii (facultativ)

Incluziunea " $\supset$ " este evidentă.
" $\subset$ " Fie $v \in dir(\mathcal{A}_1' \vee \mathcal{A}_2')$; $v = \overrightarrow{O_1M}$, cu $M \in \mathcal{A}_1' \vee \mathcal{A}_2'$. Deci $M = a_1P_1 + \cdots + a_nP_n + b_1Q_1 + \cdots + b_mQ_M$ cu $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1'$, $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{A}_2'$. Deci
$\overrightarrow{O_1M} = a_1\overrightarrow{O_1P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O_1P_n} + b_1\overrightarrow{O_1Q_1} + \cdots + b_m\overrightarrow{O_1Q_M} =$
$a_1\overrightarrow{O_1P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O_1P_n} + b_1(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2Q_1}) + \cdots + b_m(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2Q_M}) =$
$\left(a_1\overrightarrow{O_1P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{O_1P_n}\right) + \left(b_1\overrightarrow{O_2Q_1} + \cdots + b_m\overrightarrow{O_2Q_M}\right) +$
$\left((b_1 + \cdots + b_m)\overrightarrow{O_1O_2}\right)$

Dimensiunea uniunii a două subspații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $\mathcal{A}_1', \mathcal{A}_2' \subset \mathcal{A}$ două subspații afine. Atunci $dim(\mathcal{A}_1' \vee \mathcal{A}_2')$ este egală cu:

- $dim(\mathcal{A}_1') + dim(\mathcal{A}_2') - dim(\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2'),$ *dacă* $\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2' \neq \emptyset;$
- $dim(\mathcal{A}_1') + dim(\mathcal{A}_2') - dim(dir(\mathcal{A}_1') \cap dir(\mathcal{A}_2')) + 1,$ *dacă* $\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2' = \emptyset.$

Demonstrație

Dacă $\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2' \neq \emptyset$ putem lua $O_1 = O_2$.
Pentru cazul $\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2' = \emptyset$ e suficient să arătăm că

$$< \overrightarrow{O_1 O_2} > \cap (dir(\mathcal{A}_1') + dir(\mathcal{A}_2')) = \{0\}.$$

Presupunând contrariul, am avea $\overrightarrow{O_1 O_2} = \overrightarrow{O_1 P_1} + \overrightarrow{O_2 P_2}$ cu $P_1 \in \mathcal{A}_1', P_2 \in \mathcal{A}_2'$. Deci $\overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{P_1 O_1} = \overrightarrow{O_2 P_2}$ de unde $\overrightarrow{P_1 O_2} = \overrightarrow{O_2 P_2}$; ar rezulta $P_1 \in \mathcal{A}_2'$, deci $\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2' \neq \emptyset$, contradicție.

Geometrie (II): Subspații afine: paralelism, calcule în coordonate

Victor Vuletescu

University of Bucharest, Faculty of Mathematics, Bucharest, Romania.

Paralelism

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Două subspații afine $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ (notat $\mathcal{A}_1 || \mathcal{A}_2$) se numesc *paralele* dacă $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau $dir(\mathcal{A}_1) \supset dir(\mathcal{A}_2)$.

Remarci

1. Relația de paralelism nu este în general relație de echivalență pe mulțimea subspațiilor lui $\mathcal{A}$. Dacă ne restrângem la mulțimea subspațiilor de o dimensiune fixată, ea este banal o relație de echivalență.
2. Dacă $\mathcal{A}_1 || \mathcal{A}_2$ și $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$ atunci $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ sau $A_1 \supset \mathcal{A}_2$.

"Postulatul V"

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ un subspațiu afin și $P \in \mathcal{A}$ un punct. Atunci, există și este unic un subspațiu afin $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $P \in \mathcal{A}''$, $\mathcal{A}' || \mathcal{A}''$ și $dim(\mathcal{A}') = dim(\mathcal{A}'')$.

Ecuațiile carteziene ale unui subspațiu afin

Notații

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție V și $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un reper cartezian fixat al lui $\mathcal{A}$ unde $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază a lui V. Fie $P \in \mathcal{A}$ un punct arbitrar: vom nota X matricea coloană a coordonatelor lui P în raport cu $\mathcal{R}$, i.e.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ca să marcăm faptul că X este matricea de coordonate a lui P vom mai nota aceasta și cu $P(X)$ (și vom citi “punctul P de coordonate X”).

Ecuațiile carteziene ale unui subspațiu afin

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție V și $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un reper cartezian fixat al lui $\mathcal{A}$. O submulțime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este subspațiu afin dacă și numai dacă există $m \in \mathbb{N}$, o matrice $A \in Mat_{n,m}(K)$ și o matrice $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\mathcal{A}' = \{P(X) | AX + B = 0\}$$

Demonstrație

Doar "$\Rightarrow$" trebuie demonstrată. Fixăm un punct $O' \in \mathcal{A}'$ de coordonate X_0. Deoarece $\mathcal{A}'$ e subspațiu afin, $dir(\mathcal{A}') \subset V$ este subspațiu vectorial, deci este dat de o ecuație de forma

$$dir(\mathcal{A}') : \quad AX = 0$$

Fie acum $P(X)$ arbitrar; atunci $P \in \mathcal{A}'$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{O'P} \in dir(\mathcal{A}')$. Cum coordonatele lui $\overrightarrow{O'P}$ sunt $X - X_0$ deducem $A(X - X_0) = 0$ deci notând $B = -AX_0$ deducem $AX + B = 0$.

Ecuațiile carteziene ale unui subspațiu afin

Propoziție

Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspațiu afin de ecuații carteziene $(\mathcal{A}') : \quad AX + B = 0$ atunci ecuațiile carteziene ale lui $dir(\mathcal{A}')$ în baza $\mathcal{B}$ sunt

$$dir(\mathcal{A}') : \quad AX = 0.$$

Corolar

Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspațiu afin de ecuații carteziene

$$(\mathcal{A}'); \quad AX + B = 0$$

atunci

$$dim(\mathcal{A}') = dim(\mathcal{A}) - rang(A).$$

Ecuațiile parametrice ale unui subspațiu afin

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție V și $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un reper cartezian fixat al lui $\mathcal{A}$. O submulțime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este subspațiu afin dacă și numai dacă există $m \in \mathbb{N}$ și matricile $B_0, B_1, \dots B_m \in Mat_{n,1}(K)$ astfel încât

$$\mathcal{A}' = \{P(X) | X = B_0 + t_1 B_1 + \dots + t_m B_m, t_1, \dots, t_m \in K\}$$

Demonstrație

Fixăm $O' \in \mathcal{A}'$ și $\{f_1, \dots, f_m\}$ o bază pentru $dir(\mathcal{A}')$. Fie B_0 =coordonatele lui O' în raport cu $\mathcal{R}$ și respectiv B_i =coordonatele lui f_i în raport cu baza $\mathcal{B}$ ($i = 1, \dots, m$). Atunci un punct $P(X)$ aparține lui $\mathcal{A}'$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{O'P} \in dir(\mathcal{A}')$ ceea ce este echivalent cu a spune că există $t_1, \dots, t_n \in K$ astfel încât $\overrightarrow{O'P} = t_1 f_1 + \dots t_n f_n$. Coordonatele lui $\overrightarrow{O'P}$ fiind $X - B_0$, am terminat.

Ecuații de drepte în spații afine

Ecuațiile parametrice ale unei drepte dată printr-un punct și direcție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1,n})$
Fie $d \subset \mathcal{A}$ o dreaptă ce conține punctul A și are direcția $dir(d) =< v >$. Dacă A are coordonatele $(x_1^A, \dots, x_n^A)$ iar $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ atunci ecuațiile parametrice ale dreptei d sunt:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^A + tv_1 \\ x_2 = x_2^A + tv_2 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ x_n = x_n^A + tv_n \end{cases}$$

Ecuațiile carteziene ale unei drepte dată printr-un punct și direcție

Cu notațiile de mai sus,

$$(d): \quad \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$$

Ecuații de drepte în spații afine

Ecuațiile parametrice ale unei drepte dată prin două puncte

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1,n})$ Fie $A \neq B$ două puncte distincte din $\mathcal{A}$. Dacă A are coordonatele $(x_1^A, \ldots, x_n^A)$ iar B pe $(x_1^B, \ldots, x_n^B)$ atunci ecuațiile parametrice ale dreptei d sunt:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^A + t(x_1^B - x_1^A) \\ x_2 = x_2^A + t(x_2^B - x_2^A) \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ x_n = x_n^A + t(x_n^B - x_n^A) \end{cases}$$

Ecuațiile carteziene ale unei drepte dată prin două puncte

Cu notațiile de mai sus,

$$(d): \quad \frac{x_1 - x_1^A}{x_1^B - x_1^A} = \frac{x_2 - x_2^A}{x_2^B - x_2^A} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{x_n^B - x_n^A}$$

Ecuații de plane în spații afine de dimensiune 3

Ecuațiile parametrice ale unui plan dat printr-un punct și direcția sa

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$, $\pi \subset \mathcal{A}$ un plan, $A \in \pi$ un punct de coordonate (x_1^A, x_2^A, x_3^A) și direcția lui π este $dir(\pi) =< u, v >$. Dacă $u = \sum_{i=1}^{3} u_i e_i, v = \sum_{i=1}^{3} v_i e_i$ atunci ecuațiile parametrice ale lui π sunt:

$$(\pi) : \begin{cases} x_1 = x_1^A + tv_1 + su_1 \\ x_2 = x_2^A + tv_2 + su_2 \\ x_3 = x_3^A + tv_3 + su_3 \end{cases}$$

cu $s, t \in K$.

Ecuații de plane în spații afine de dimensiune 3

Ecuațiile carteziene ale unui plan dat printr-un punct și direcția sa

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$, $\pi \subset \mathcal{A}$ un plan, $A \in \pi$ un punct de coordonate (x_1^A, x_2^A, x_3^A) și direcția lui π este $dir(\pi) =< u, v >$. Dacă $u = \sum_{i=1}^{3} u_i e_i, v = \sum_{i=1}^{3} v_i e_i$ atunci ecuațiile carteziene ale lui π sunt:

$$(\pi) : \quad \begin{vmatrix} x_1 - x_1^A & v_1 & u_1 \\ x_2 - x_2^A & v_2 & u_2 \\ x_3 - x_3^A & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuații de plane în spații afine de dimensiune 3

Ecuațiile parametrice ale unui plan dat prin trei puncte

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$, $\pi \subset \mathcal{A}$ un plan, $A, B, C \in \pi$ puncte necoliniare de coordonate (x_1^A, x_2^A, x_3^A), respectiv (x_1^B, x_2^B, x_3^B),(x_1^C, x_2^C, x_3^C). Atunci ecuațiile parametrice ale lui π sunt:

$$(\pi) : \begin{cases} x_1 = x_1^A + t(x_1^B - x_1^A) + s(x_1^C - x_1^A) \\ x_2 = x_2^A + t(x_2^B - x_2^A) + s(x_2^C - x_2^A) \\ x_3 = x_3^A + t(x_3^B - x_3^A) + s(x_3^C - x_3^A) \end{cases}$$

cu $s, t \in K$.

Ecuații de plane în spații afine de dimensiune 3

Ecuațiile carteziene ale unui plan dat prin trei puncte

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$, $\pi \subset \mathcal{A}$ un plan, $A, B, C \in \pi$ puncte necoliniare de coordonate (x_1^A, x_2^A, x_3^A), respectiv (x_1^B, x_2^B, x_3^B),(x_1^C, x_2^C, x_3^C). Atunci ecuațiile carteziene ale lui π sunt:

$$(\pi) : \begin{vmatrix} x_1 - x_1^A & x_1^B - x_1^A & x_1^C - x_1^A \\ x_2 - x_2^A & x_2^B - x_2^A & x_2^C - x_2^A \\ x_3 - x_3^A & x_3^B - x_3^A & x_3^C - x_3^A \end{vmatrix} = 0$$

Geometrie: Aplicații afine

Victor Vuletescu

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine de direcții respectiv spațiile vectoriale V_1 și V_2peste același corp K.

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine de direcții respectiv spațiile vectoriale V_1 și V_2peste același corp K. O funcție $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numește **aplicație afină** (sau **transformare afină,** sau **morfism afin)** dacă

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine de direcții respectiv spațiile vectoriale V_1 și V_2peste același corp K. O funcție $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numește **aplicație afină** (sau **transformare afină,** sau **morfism afin)** dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ cu $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ și pentru orice $P_1, \ldots P_n \in \mathcal{A}_1$ are loc egalitatea

$$\varphi(\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n) = \alpha_1 \varphi(P_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(P_n).$$

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine de direcții respectiv spațiile vectoriale V_1 și V_2peste același corp K. O funcție $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numește **aplicație afină** (sau **transformare afină,** sau **morfism afin)** dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ cu $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ și pentru orice $P_1, \ldots P_n \in \mathcal{A}_1$ are loc egalitatea

$$\varphi(\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n) = \alpha_1 \varphi(P_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(P_n).$$

În cazul când $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, φ se numește **endomorfism afin**.

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine de direcții respectiv spațiile vectoriale V_1 și V_2peste același corp K. O funcție $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numește **aplicație afină** (sau **transformare afină,** sau **morfism afin)** dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ cu $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ și pentru orice $P_1, \ldots P_n \in \mathcal{A}_1$ are loc egalitatea

$$\varphi(\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n) = \alpha_1 \varphi(P_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(P_n).$$

În cazul când $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, φ se numește **endomorfism afin**.

Exemplu

Funcția $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definită prin formula
$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3 + 2, 3x_2 + 5x_3 - 4)$ este o aplicație afină.

Teorema de caracterizare a aplicațiilor afine

Caracterizarea aplicațiilor afine cu ajutorul urmei vectoriale

Fie $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ spații afine având subspațiile directoare V_1, respectiv V_2 și $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:
(i) φ este aplicație afină.
(ii)

Teorema de caracterizare a aplicațiilor afine

Caracterizarea aplicațiilor afine cu ajutorul urmei vectoriale

Fie $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ spații afine având subspațiile directoare V_1, respectiv V_2 și $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) φ este aplicație afină.

(ii) Există un punct $O \in \mathcal{A}_1$ cu proprietatea că aplicația $f_O : V_1 \to V_2$,

$$f_O(\overrightarrow{OA}) := \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A)}$$

(numită **urma liniară** a lui φ în raport cu O) este o aplicație liniară.

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $v_1, \dots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i}\ . \tag{1}$$

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i} \ . \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 :=$

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i} \,. \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} =$

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $v_1, \dots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i} \,. \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Deci,

$$f_O(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\ def\_urmei}{=} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} \tag{2}$$

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i} \; . \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Deci,

$$f_O(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\ def\_urmei}{=} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} \tag{2}$$

Dar $\varphi(P_0) = \varphi(\alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i) \overset{cf\_ip}{=}$

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

$" \Rightarrow "$ Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i}\ . \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Deci,

$$f_O(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\ def\_urmei}{=} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} \tag{2}$$

Dar $\varphi(P_0) = \varphi(\alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i) \overset{cf\_ip}{=} \alpha_0\varphi(O) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(P_i)$ deci

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} =$$

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i} \,. \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Deci,

$$f_O(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\ def\_urmei}{=} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} \tag{2}$$

Dar $\varphi(P_0) = \varphi(\alpha_0 O + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i) \overset{cf\_ip}{=} \alpha_0 \varphi(O) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(P_i)$ deci

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \tag{3}$$

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $v_1, \dots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i}\ . \qquad (1)$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Deci,

$$f_O(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\ def\_urmei}{=} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} \qquad (2)$$

Dar $\varphi(P_0) = \varphi(\alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i) \overset{cf\_ip}{=} \alpha_0 \varphi(O) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(P_i)$ deci

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \qquad (3)$$

de unde deducem

$f_O(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) \overset{cf\_(2)}{=}$

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $v_1, \dots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i} \ . \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Deci,

$$f_O(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\ def\_urmei}{=} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} \tag{2}$$

Dar $\varphi(P_0) = \varphi(\alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i) \overset{cf\_ip}{=} \alpha_0 \varphi(O) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(P_i)$ deci

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \tag{3}$$

de unde deducem

$f_O(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) \overset{cf\_(2)}{=} f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\_(3)}{=}$

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i}\ . \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Deci,

$$f_O(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = f_O(\overrightarrow{OP_0}) \stackrel{cf\ def\_urmei}{=} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} \tag{2}$$

Dar $\varphi(P_0) = \varphi(\alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i) \stackrel{cf\_ip}{=} \alpha_0 \varphi(O) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(P_i)$ deci

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \tag{3}$$

de unde deducem

$f_O(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) \stackrel{cf\ (2)}{=} f_O(\overrightarrow{OP_0}) \stackrel{cf\ (3)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \stackrel{cf\ (1)}{=}$

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i} \ . \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Deci,

$$f_O(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\ def\_urmei}{=} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} \tag{2}$$

Dar $\varphi(P_0) = \varphi(\alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i) \overset{cf\_ip}{=} \alpha_0 \varphi(O) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(P_i)$ deci

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \tag{3}$$

de unde deducem
$f_O(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) \overset{cf\_(2)}{=} f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\_(3)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \ \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \overset{cf\_(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_O(v_i)$ deci f_O este

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i}\ . \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Deci,

$$f_O(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\ def\_urmei}{=} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} \tag{2}$$

Dar $\varphi(P_0) = \varphi(\alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i) \overset{cf\_ip}{=} \alpha_0\varphi(O) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(P_i)$ deci

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \tag{3}$$

de unde deducem

$f_O(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) \overset{cf\_(2)}{=} f_O(\overrightarrow{OP_0}) \overset{cf\_(3)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \overset{cf\_(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_O(v_i)$ deci f_O este liniară.

Demonstrația teoremei de caracterizare (schiță)

" $\Rightarrow$ " Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V_1$ arbitrari. Există punctele $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ astfel încât

$$v_i = \overrightarrow{OP_i}\ . \tag{1}$$

Fie $P_0 := \alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ unde $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Atunci $\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Deci,

$$f_O(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = f_O(\overrightarrow{OP_0}) \stackrel{cf\ def\_urmei}{=} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} \tag{2}$$

Dar $\varphi(P_0) = \varphi(\alpha_0 O + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i) \stackrel{cf\_ip}{=} \alpha_0 \varphi(O) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(P_i)$ deci

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \tag{3}$$

de unde deducem

$f_O(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) \stackrel{cf\ (2)}{=} f_O(\overrightarrow{OP_0}) \stackrel{cf\ (3)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)} \stackrel{cf\ (1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_O(v_i)$ deci f_O este liniară.

" $\Leftarrow$ " Exercițiu.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Independența urmei liniare de punctul ales

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Independența urmei liniare de punctul ales

Dacă φ este aplicație afină, atunci urma sa f_O nu depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{A}_1$. În particular, $f(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A)}$, oricare ar fi $P \in \mathcal{A}_1$.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Independența urmei liniare de punctul ales

Dacă φ este aplicație afină, atunci urma sa f_O nu depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{A}_1$. În particular, $f(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A)}$, oricare ar fi $P \in \mathcal{A}_1$.

Demonstrație

Fie O' un alt punct.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Independența urmei liniare de punctul ales

Dacă φ este aplicație afină, atunci urma sa f_O nu depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{A}_1$. În particular, $f(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A)}$, oricare ar fi $P \in \mathcal{A}_1$.

Demonstrație

Fie O' un alt punct. Fie $v \in V_1$ arbitrar; atunci v e de forma $v = \overrightarrow{O'P'}$ cu $P' \in \mathcal{A}_1$.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Independența urmei liniare de punctul ales

Dacă φ este aplicație afină, atunci urma sa f_O nu depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{A}_1$. În particular, $f(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A)}$, oricare ar fi $P \in \mathcal{A}_1$.

Demonstrație

Fie O' un alt punct. Fie $v \in V_1$ arbitrar; atunci v e de forma $v = \overrightarrow{O'P'}$ cu $P' \in \mathcal{A}_1$. Dar $f_{O'}(v) =$

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Independența urmei liniare de punctul ales

Dacă φ este aplicație afină, atunci urma sa f_O nu depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{A}_1$. În particular, $f(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A)}$, oricare ar fi $P \in \mathcal{A}_1$.

Demonstrație

Fie O' un alt punct. Fie $v \in V_1$ arbitrar; atunci v e de forma $v = \overrightarrow{O'P'}$ cu $P' \in \mathcal{A}_1$. Dar $f_{O'}(v) = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(P')} =$

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Independența urmei liniare de punctul ales

Dacă φ este aplicație afină, atunci urma sa f_O nu depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{A}_1$. În particular, $f(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A)}$, oricare ar fi $P \in \mathcal{A}_1$.

Demonstrație

Fie O' un alt punct. Fie $v \in V_1$ arbitrar; atunci v e de forma $v = \overrightarrow{O'P'}$ cu $P' \in \mathcal{A}_1$. Dar $f_{O'}(v) = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(P')} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P')} + \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} =$

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Independența urmei liniare de punctul ales

Dacă φ este aplicație afină, atunci urma sa f_O nu depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{A}_1$. În particular, $f(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A)}$, oricare ar fi $P \in \mathcal{A}_1$.

Demonstrație

Fie O' un alt punct. Fie $v \in V_1$ arbitrar; atunci v e de forma $v = \overrightarrow{O'P'}$ cu $P' \in \mathcal{A}_1$. Dar $f_{O'}(v) = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(P')} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P')} + \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} =$
$= f_O(\overrightarrow{OP'}) - f_O(\overrightarrow{OO'}) \overset{liniaritate}{=}$

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Independența urmei liniare de punctul ales

Dacă φ este aplicație afină, atunci urma sa f_O nu depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{A}_1$. În particular, $f(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A)}$, oricare ar fi $P \in \mathcal{A}_1$.

Demonstrație

Fie O' un alt punct. Fie $v \in V_1$ arbitrar; atunci v e de forma $v = \overrightarrow{O'P'}$ cu $P' \in \mathcal{A}_1$. Dar $f_{O'}(v) = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(P')} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P')} + \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} =$
$= f_O(\overrightarrow{OP'}) - f_O(\overrightarrow{OO'}) \overset{liniaritate}{=} f_O(\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OO'}) =$

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Independența urmei liniare de punctul ales

Dacă φ este aplicație afină, atunci urma sa f_O nu depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{A}_1$. În particular, $f(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A)}$, oricare ar fi $P \in \mathcal{A}_1$.

Demonstrație

Fie O' un alt punct. Fie $v \in V_1$ arbitrar; atunci v e de forma $v = \overrightarrow{O'P'}$ cu $P' \in \mathcal{A}_1$. Dar $f_{O'}(v) = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(P')} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P')} + \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} =$
$= f_O(\overrightarrow{OP'}) - f_O(\overrightarrow{OO'}) \overset{\text{liniaritate}}{=} f_O(\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OO'}) = f_O(\overrightarrow{O'P'}) = f_O(v)$.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).

b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină,

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci

$f_O(v) =$

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "⇒" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci

$f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci $f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ și cum $f_O(v) = 0$ rezultă $\varphi(O) =$

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci $f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ și cum $f_O(v) = 0$ rezultă $\varphi(O) = \varphi(P)$, contrad, cu pp. că φ e injectivă.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci $f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ și cum $f_O(v) = 0$ rezultă $\varphi(O) = \varphi(P)$, contrad, cu pp. că φ e injectivă.
Pentru "$\Leftarrow$" procedăm similar.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci $f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ și cum $f_O(v) = 0$ rezultă $\varphi(O) = \varphi(P)$, contrad, cu pp. că φ e injectivă.
Pentru "$\Leftarrow$" procedăm similar. Daca φ nu ar fi injectivă, ar exista $O \neq P \in \mathcal{A}_1$ cu $\varphi(O) = \varphi(P)$.

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci

$f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ și cum $f_O(v) = 0$ rezultă $\varphi(O) = \varphi(P)$, contrad, cu pp. că φ e injectivă.
Pentru "$\Leftarrow$" procedăm similar. Daca φ nu ar fi injectivă, ar exista $O \neq P \in \mathcal{A}_1$ cu $\varphi(O) = \varphi(P)$. Dar atunci vectorul $v = \overrightarrow{OP}$ ar fi

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci $f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ și cum $f_O(v) = 0$ rezultă $\varphi(O) = \varphi(P)$, contrad, cu pp. că φ e injectivă.
Pentru "$\Leftarrow$" procedăm similar. Daca φ nu ar fi injectivă, ar exista $O \neq P \in \mathcal{A}_1$ cu $\varphi(O) = \varphi(P)$. Dar atunci vectorul $v = \overrightarrow{OP}$ ar fi nenul (pt că

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci $f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ și cum $f_O(v) = 0$ rezultă $\varphi(O) = \varphi(P)$, contrad, cu pp. că φ e injectivă.
Pentru "$\Leftarrow$" procedăm similar. Daca φ nu ar fi injectivă, ar exista $O \neq P \in \mathcal{A}_1$ cu $\varphi(O) = \varphi(P)$. Dar atunci vectorul $v = \overrightarrow{OP}$ ar fi nenul (pt că $O \neq P$) însă $f_O(v) =$

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci $f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ și cum $f_O(v) = 0$ rezultă $\varphi(O) = \varphi(P)$, contrad, cu pp. că φ e injectivă.
Pentru "$\Leftarrow$" procedăm similar. Daca φ nu ar fi injectivă, ar exista $O \neq P \in \mathcal{A}_1$ cu $\varphi(O) = \varphi(P)$. Dar atunci vectorul $v = \overrightarrow{OP}$ ar fi nenul (pt că $O \neq P$) însă $f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} =$

Proprietăți ale aplicațiilor afine

Injectivitate, surjectivitate; comportarea la compuneri

a) O aplicație afină este injectivă (resp. surjectivă) dacă și numai dacă urma sa este injectivă (resp. surjectivă).
b) Compunerea a două aplicații afine este o aplicație afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Demonstrație

a) **Injectivitate.** "$\Rightarrow$" Pp. φ injectivă. Dacă urma vectorială f_O nu ar fi injectivă, ar exista $v \in V_1, v \neq 0$ astfel încât $f_O(v) = 0$. Fie $v = \overrightarrow{OP}$; atunci $f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ și cum $f_O(v) = 0$ rezultă $\varphi(O) = \varphi(P)$, contrad, cu pp. că φ e injectivă.
Pentru "$\Leftarrow$" procedăm similar. Daca φ nu ar fi injectivă, ar exista $O \neq P \in \mathcal{A}_1$ cu $\varphi(O) = \varphi(P)$. Dar atunci vectorul $v = \overrightarrow{OP}$ ar fi nenul (pt că $O \neq P$) însă $f_O(v) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} = 0$ (din pp. $\varphi(O) = \varphi(P)$), absurd.

Caracterizarea în coordonate

Teorema de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Fie $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o aplicație afină cu urma $f : V_1 \to V_2$. Fie $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\})$ (respectiv $\mathcal{R}_2 = (O_2, \mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_m\})$) repere carteziene fixate în V_1, respectiv V_2. Pentru un punct arbitrar $P \in \mathcal{A}_1$ (respectiv $Q \in \mathcal{A}_2$) notăm X (resp Y) coordonatele lor în raport cu $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$). Atunci, φ este afină dacă și numai dacă există matric

Caracterizarea în coordonate

Teorema de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Fie $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o aplicație afină cu urma $f : V_1 \to V_2$. Fie $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\})$ (respectiv $\mathcal{R}_2 = (O_2, \mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_m\})$) repere carteziene fixate în V_1, respectiv V_2. Pentru un punct arbitrar $P \in \mathcal{A}_1$ (respectiv $Q \in \mathcal{A}_2$) notăm X (resp Y) coordonatele lor în raport cu $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$). Atunci, φ este afină dacă și numai dacă există matricile $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K), B \in \mathrm{Mat}_{m,1}(K)$ astfel încât pentru orice punct $P \in \mathcal{A}_1$ de coordonate X, dacă Y sunt coordonatele lui $\varphi(P)$ avem

$$Y = AX + B.$$

Caracterizarea în coordonate

Teorema de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Fie $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o aplicație afină cu urma $f : V_1 \to V_2$. Fie $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_n\})$ (respectiv $\mathcal{R}_2 = (O_2, \mathcal{B}_2 = \{f_1, \ldots, f_m\})$) repere carteziene fixate în V_1, respectiv V_2. Pentru un punct arbitrar $P \in \mathcal{A}_1$ (respectiv $Q \in \mathcal{A}_2$) notăm X (resp Y) coordonatele lor în raport cu $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$). Atunci, φ este afină dacă și numai dacă există matricile $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K), B \in \mathrm{Mat}_{m,1}(K)$ astfel încât pentru orice punct $P \in \mathcal{A}_1$ de coordonate X, dacă Y sunt coordonatele lui $\varphi(P)$ avem

$$Y = AX + B.$$

Altfel spus, expresia lui φ este de forma

$$\varphi(X) = AX + B.$$

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^n x_i e_i) =$

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{O_1}(e_i) =$

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right)$

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A=$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j\right)$ deci

$f_{O_1}(v) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right) f_j$.

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right)$ deci

$f_{O_1}(v) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.Ca atare $\overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)} =$

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j\right)$ deci $f_{O_1}(v) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right) f_j$.Ca atare $\overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right) f_j$.

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right)$ deci

$f_{O_1}(v) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.Ca atare $\overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.

Pe de altă parte Y fiind coordonatele lui $\varphi(P)$ avem $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$.

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right)$ deci

$f_{O_1}(v) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.Ca atare $\overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.

Pe de altă parte Y fiind coordonatele lui $\varphi(P)$ avem $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$.

Cum $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} =$

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right)$ deci

$f_{O_1}(v) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.Ca atare $\overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.
Pe de altă parte Y fiind coordonatele lui $\varphi(P)$ avem $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$.
Cum $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} = \overrightarrow{O_2\varphi(O_1)} + \overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)}$,

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right)$ deci $f_{O_1}(v) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.Ca atare $\overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.

Pe de altă parte Y fiind coordonatele lui $\varphi(P)$ avem $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$.

Cum $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} = \overrightarrow{O_2\varphi(O_1)} + \overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)}$,notând $B =$ coordonatele lui $\varphi(O_1)$ (i.e. $\overrightarrow{O_2\varphi(O_1)} =$

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j\right)$ deci $f_{O_1}(v) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right) f_j$.Ca atare $\overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right) f_j$.
Pe de altă parte Y fiind coordonatele lui $\varphi(P)$ avem $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} = \sum_{j=1}^m y_j f_j$.
Cum $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} = \overrightarrow{O_2\varphi(O_1)} + \overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)}$,notând $B =$ coordonatele lui $\varphi(O_1)$ (i.e. $\overrightarrow{O_2\varphi(O_1)} = \sum_{j=1}^m b_j f_j$) deducem

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right)$ deci $f_{O_1}(v) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.Ca atare $\overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$.
Pe de altă parte Y fiind coordonatele lui $\varphi(P)$ avem $\overrightarrow{O_2 \varphi(P)} = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$.
Cum $\overrightarrow{O_2 \varphi(P)} = \overrightarrow{O_2 \varphi(O_1)} + \overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)}$,notând $B =$ coordonatele lui $\varphi(O_1)$ (i.e. $\overrightarrow{O_2 \varphi(O_1)} = \sum_{j=1}^{m} b_j f_j$) deducem $Y = AX + B$, Q.E.D.

Dem. thm. de caracterizare a aplicațiilor afine în coordonate

Demonstrație

Fie $A =$ matricea urmei vectoriale f_{O_1} a lui φ în bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Atunci coordonatele lui $v := \overrightarrow{O_1 P}$ sunt date de matricea coloană X, i.e $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
Atunci $f_{O_1}(v) = f_{O_1}(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_{O_1}(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j\right)$ deci $f_{O_1}(v) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right) f_j$.Ca atare $\overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right) f_j$.
Pe de altă parte Y fiind coordonatele lui $\varphi(P)$ avem $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} = \sum_{j=1}^m y_j f_j$.
Cum $\overrightarrow{O_2\varphi(P)} = \overrightarrow{O_2\varphi(O_1)} + \overrightarrow{\varphi(O_1)\varphi(P)}$,notând $B =$ coordonatele lui $\varphi(O_1)$ (i.e. $\overrightarrow{O_2\varphi(O_1)} = \sum_{j=1}^m b_j f_j$) deducem $Y = AX + B$, Q.E.D.

Exemplu. Aplicația afină din exemplul inițial corespunde matricelor:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Comportarea aplicațiilor afine față de subspații

Proprietăți

Comportarea aplicațiilor afine față de subspații

Proprietăți

Aplicațiile afine au următoarele proprietăți:
(a) transformă subspațiile afine în

Comportarea aplicațiilor afine față de subspații

Proprietăți

Aplicațiile afine au următoarele proprietăți:
(a) transformă subspațiile afine în subspații afine; mai mult, subspațiul director al imaginii este

Comportarea aplicațiilor afine față de subspații

Proprietăți

Aplicațiile afine au următoarele proprietăți:
(a) transformă subspațiile afine în subspații afine; mai mult, subspațiul director al imaginii este imaginea prin aplicația urmă a subspațiului director al varietății liniare transformate, i.e. oricare ar fi $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine, $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ aplicație afină, $\mathcal{A}_1' \subset \mathcal{A}_1$ subspațiu afin avem că $\varphi(\mathcal{A}_1') \subset \mathcal{A}_2$ este subspațiu afin și $dir(\varphi(\mathcal{A}_1')) = f_O(dir(\mathcal{A}_1'))$ (unde $f_O =$urma liniară a lui φ).

Comportarea aplicațiilor afine față de subspații

Proprietăți

Aplicațiile afine au următoarele proprietăți:
(a) transformă subspațiile afine în subspații afine; mai mult, subspațiul director al imaginii este imaginea prin aplicația urmă a subspațiului director al varietății liniare transformate, i.e. oricare ar fi $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine, $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ aplicație afină, $\mathcal{A}_1' \subset \mathcal{A}_1$ subspațiu afin avem că $\varphi(\mathcal{A}_1') \subset \mathcal{A}_2$ este subspațiu afin și $dir(\varphi(\mathcal{A}_1')) = f_O(dir(\mathcal{A}_1'))$ (unde $f_O =$urma liniară a lui φ).

(b) transformă subspații afine paralele între ele în

Comportarea aplicațiilor afine față de subspații

Proprietăți

Aplicațiile afine au următoarele proprietăți:
(a) transformă subspațiile afine în subspații afine; mai mult, subspațiul director al imaginii este imaginea prin aplicația urmă a subspațiului director al varietății liniare transformate, i.e. oricare ar fi $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine, $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ aplicație afină, $\mathcal{A}_1' \subset \mathcal{A}_1$ subspațiu afin avem că $\varphi(\mathcal{A}_1') \subset \mathcal{A}_2$ este subspațiu afin și $dir(\varphi(\mathcal{A}_1')) = f_O(dir(\mathcal{A}_1'))$ (unde $f_O =$urma liniară a lui φ).

(b) transformă subspații afine paralele între ele în subspații afine paralele între ele, i.e. oricare ar fi $\mathcal{A}_1', \mathcal{A}_1" \subset \mathcal{A}_1$ cu $\mathcal{A}_1' || \mathcal{A}_1"$ avem $\varphi(\mathcal{A}_1') || \varphi(\mathcal{A}_1")$.

Grupul afin

Teoremă - Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Atunci mulțimea

$$GrAf(\mathcal{A}) := \{\varphi | \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \varphi = \text{ transformare afină bijectivă}\}$$

formează un

Grupul afin

Teoremă - Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Atunci mulțimea

$$GrAf(\mathcal{A}) := \{\varphi | \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \varphi = \text{ transformare afină bijectivă}\}$$

formează un grup în raport cu

Grupul afin

Teoremă - Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Atunci mulțimea

$$GrAf(\mathcal{A}) := \{\varphi | \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \varphi = \text{ transformare afină bijectivă}\}$$

formează un grup în raport cu compunerea, numit *grupul afin* al lui $\mathcal{A}$.

Grupul afin

Teoremă - Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Atunci mulțimea

$$GrAf(\mathcal{A}) := \{\varphi | \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \varphi = \text{ transformare afină bijectivă}\}$$

formează un grup în raport cu compunerea, numit *grupul afin* al lui $\mathcal{A}$. Dacă notăm cu

$$Aut(V) =$$

Grupul afin

Teoremă - Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Atunci mulțimea

$$GrAf(\mathcal{A}) := \{\varphi | \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \varphi = \text{ transformare afină bijectivă}\}$$

formează un grup în raport cu compunerea, numit *grupul afin* al lui $\mathcal{A}$.
Dacă notăm cu

$$Aut(V) = \{T | T : V \to V, T = \text{transformare liniară bijectivă}\}$$

atunci aplicația

Grupul afin

Teoremă - Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Atunci mulțimea

$$GrAf(\mathcal{A}) := \{\varphi | \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \varphi = \text{ transformare afină bijectivă}\}$$

formează un grup în raport cu compunerea, numit *grupul afin* al lui $\mathcal{A}$. Dacă notăm cu

$$Aut(V) = \{T | T : V \to V, T = \text{transformare liniară bijectivă}\}$$

atunci aplicația

$$Tr : GrAf(\mathcal{A}) \to Aut(V), Tr(\varphi) =$$

Grupul afin

Teoremă - Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Atunci mulțimea

$$GrAf(\mathcal{A}) := \{\varphi | \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \varphi = \text{ transformare afină bijectivă}\}$$

formează un grup în raport cu compunerea, numit *grupul afin* al lui $\mathcal{A}$. Dacă notăm cu

$$Aut(V) = \{T | T : V \to V, T = \text{transformare liniară bijectivă}\}$$

atunci aplicația

$$Tr : GrAf(\mathcal{A}) \to Aut(V), Tr(\varphi) = f_O \quad (4)$$

Grupul afin

Teoremă - Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Atunci mulțimea

$$GrAf(\mathcal{A}) := \{\varphi | \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \varphi = \text{ transformare afină bijectivă}\}$$

formează un grup în raport cu compunerea, numit *grupul afin* al lui $\mathcal{A}$. Dacă notăm cu

$$Aut(V) = \{T | T : V \to V, T = \text{transformare liniară bijectivă}\}$$

atunci aplicația

$$Tr : GrAf(\mathcal{A}) \to Aut(V), Tr(\varphi) = f_O \tag{4}$$

ce asociază automorfismului afin φ

Grupul afin

Teoremă - Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Atunci mulțimea

$$GrAf(\mathcal{A}) := \{\varphi | \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \varphi = \text{ transformare afină bijectivă}\}$$

formează un grup în raport cu compunerea, numit *grupul afin* al lui $\mathcal{A}$. Dacă notăm cu

$$Aut(V) = \{T | T : V \to V, T = \text{transformare liniară bijectivă}\}$$

atunci aplicația

$$Tr : GrAf(\mathcal{A}) \to Aut(V), Tr(\varphi) = f_O \quad (4)$$

ce asociază automorfismului afin φ urma sa vectorială f_O (in raport cu un punct arbitrar $O \in \mathcal{A}$) este un

Grupul afin

Teoremă - Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. Atunci mulțimea

$$GrAf(\mathcal{A}) := \{\varphi | \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \varphi = \text{ transformare afină bijectivă}\}$$

formează un grup în raport cu compunerea, numit *grupul afin* al lui $\mathcal{A}$.
Dacă notăm cu

$$Aut(V) = \{T | T : V \to V, T = \text{transformare liniară bijectivă}\}$$

atunci aplicația

$$Tr : GrAf(\mathcal{A}) \to Aut(V), Tr(\varphi) = f_O \tag{4}$$

ce asociază automorfismului afin φ urma sa vectorială f_O (in raport cu un punct arbitrar $O \in \mathcal{A}$) este un morfism de grupuri.

Geometrie (II): Aplicații afine: clase remarcabile

Translații

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial V. O **translație** a lui $\mathcal{A}$ este un endomorfism afin $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a cărui urmă vectorială este identitatea lui V.

Caracterizarea translațiilor

a) O aplicație $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă există $v \in V$ astfel încât $v = \overrightarrow{P\tau(P)}$ pentru orice $P \in \mathcal{A}$. Vectorul v se numește **vectorul translației**.

b) Fie $\mathcal{R}$ un reper cartezian fixat al lui $\mathcal{A}$. Funcția $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă există $B \in \mathrm{Mat}_{m,1}(K)$ astfel ca $\tau(X) = X + B$.

Demonstrație

a)Fie τ_O urma lui τ și fie $P \in \mathcal{A}$ arbitrar. Avem $\tau_O(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}$ deci $\overrightarrow{\tau(O)\tau(P)} = \overrightarrow{OP}$. Dar atunci, din $\overrightarrow{\mathcal{O}\tau(P)} = \overrightarrow{O\tau(O)} + \overrightarrow{\tau(O)\tau(P)} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P\tau(P)}$ rezultă $\overrightarrow{O\tau(O)} = \overrightarrow{P\tau(P)}$.

Translații

Proprietăți

(i) O translație diferită de translația de vector nul (i.e. diferită de aplicația identică) nu admite puncte fixe, i.e puncte P cu $\tau(P) = P$.
(ii) Mulțimea translațiilor lui $\mathcal{A}$ formează un subgrup normal al lui $GrAf(\mathcal{A})$ (în raport cu compunerea funcțiilor) izomorf cu $(V, +)$.

Demonstrație

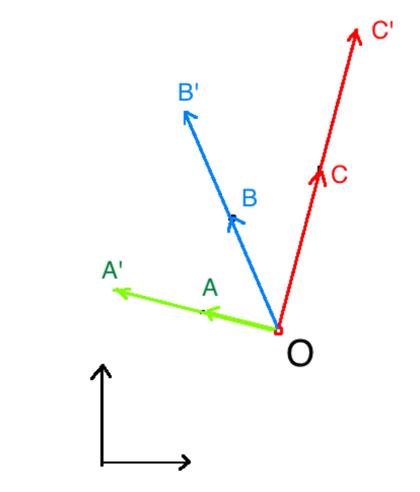
i) Dacă $O \in \mathcal{A}$ e punct fix pentru τ atunci $\tau(O) = O$. Dar atunci vectorul translației este vectorul nul: $v = \overrightarrow{O\tau(O)} = 0$ deci pt. orice punct P avem $\overrightarrow{P\tau(P)} = 0$, i.e. $\tau(P) = P$.
ii) Din definiția translației, vedem că mulțimea translațiilor este exact nucleul morfismului $Tr : GrAf(\mathcal{A}) \to End(V)$, deci este subgrup normal. Asociind fiecărei translații vectorul său obținem izomorfismul dintre grupul translațiilor și $(V, +)$.

Omotetii

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $O \in \mathcal{A}$ un punct și $\lambda \in K \setminus \{0\}$ un scalar nenul (numit *raportul omotetiei* sau *puterea omotetiei*). Se numește **omotetie de centru O și putere (raport) λ** endomorfismul afin al lui $\mathcal{A}$, notat cu H_O^λ, cu proprietatea că $H_O^\lambda(O) = O$ și $\overrightarrow{OH_O^\lambda(P)} = \lambda \overrightarrow{OP}$ pentru orice $P \in K^n$.

Ilustrare a omotetiei de putere 2 în $\mathbb{R}^2$



În figură este reprezentată acțiunea omotetiei de centru O (cu negru) și raport 2 asupra a trei puncte: A, B, C Imaginile lor prin omotetie sunt notate respectiv A', B', C'.

Omotetii

Caracterizare. Proprietăți.

(i) Avem $H_O^\lambda(P) = \lambda P + (1-\lambda)O$, pentru orice $P \in \mathcal{A}$.
ii) În coordonate, avem $H_O^\lambda(X) = \lambda X + B$ pentru un $B \in \mathrm{Mat}_{n,1}(K)$.
(ii) O omotetie de putere diferită de 1 și de centru O admite un unic punct fix, și anume O.

Comportarea la compunere

(iii) Mulțimea omotetiilor de centru fixat formează un grup (în raport cu compunerea funcțiilor) izomorf cu $(K^*, \cdot)$.
(iv) În general, fie $H_{O_1}^{\lambda_1}, H_{O_2}^{\lambda_2}$ două omotetii. Atunci compunerea $H_{O_2}^{\lambda_2} \circ H_{O_1}^{\lambda_1}$ este egală cu:

- omotetia $H_O^{\lambda_1\lambda_2}$, unde $O = \frac{\lambda_2(1-\lambda_1)}{1-\lambda_1\lambda_2}O_1 + \frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2}O_2$, pentru $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$;
- translația de vector $(1-\lambda_2)\ \overrightarrow{O_1O_2}$, pentru $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

Proiecții

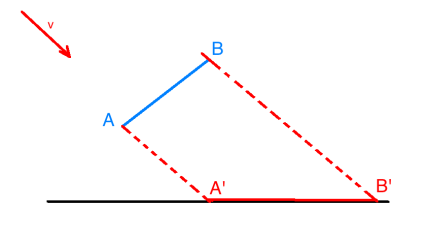
Definiție

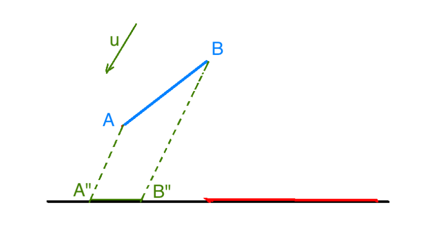
O **proiecție afină** este un endomorfism afin π având cel puțin un punct fix și a cărui urmă este o proiecție vectorială p (i.e. p este liniară și $p \circ p = p$). Nucleul W al urmei p se numește **direcția proiecției afine** π. Se spune că π **este proiecția pe** $\operatorname{Im} \pi$ **paralelă cu** W.

Proprietăți

(i) Un endomorfism π este proiecție afină dacă și numai dacă $\pi^2 = \pi$.
(ii) Un endomorfism π al lui $\mathcal{A}$ este proiecție dacă și numai dacă există un subspațiu vectorial W și un subspațiu afin $L \subset \mathcal{A}$ având subspațiul director complementar lui W (i.e. $dir(L) \oplus W = V$) astfel încât **pentru orice punct P, $\pi(P)$ este intersecția dintre L și subspațiul afin de subspațiu director W care trece prin P.** În particular, punctele imaginii $\operatorname{Im} \pi$ sunt puncte fixe pentru π.

Ilustrări ale proiecției în $\mathbb{R}^2$ pe o dreaptă, paralelă cu o direcție fixată

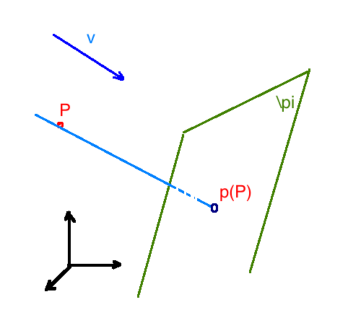


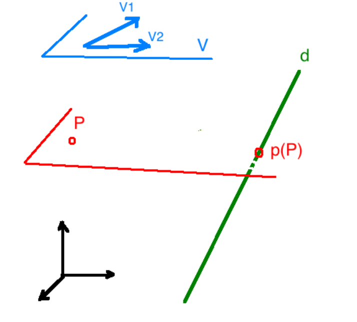


Remarci

In figurile de mai sus, sunt reprezentate proiecțiile (în $\mathbb{R}^2$) paralele cu vectorul v (roșu) respectiv u (verde) ale acelorași două puncte A, B (și implicit a segmentului $[AB]$) pe o dreaptă (negru). Se observă cum schimbând direcția de proiecție, se schimbă imaginile (ele sunt A', B' pentru proiecția de direcție v, respectiv $A"$, $B"$ pt. cea de direcție u).

Ilustrări ale proiecției în $\mathbb{R}^3$ pe o un plan, respectiv pe o dreaptă





Remarci

În figura din stânga este reprezentată proiecția $p(P)$ a punctului P (roșu) pe planul π (verde), paralelă cu direcția generată de vectorul v (albastru). Dreapta cu albastru este dreapta ce trece prin P și are direcția v.
În figura din dreapta este proiecția pe dreapta d (verde) paralelă cu direcția V_2 =subspațiul vectorial generat de vectorii v_1, v_2 (albastru). Planul roșu este planul ce trece prin P și are direcția V.

Exemple

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$ (cu structura afină canonică) să determinăm
a) proiecția p_1 pe planul $(\pi): \ x_1 - x_2 - x_3 = 1$ paralelă cu direcția $V_1 =< (1,1,1) >$;
b) proiecția p_2 pe dreapta $(d): \ \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{1}$ paralelă cu direcția $V_2 := \{(v_1, v_2, v_3) | v_1 + v_2 + v_3 = 0.\}$

a) Fie $P = (a, b, c)$ un punct arbitrar. Dreapta prin P paralelă cu direcția V_1 este $(d'): \ \frac{x_1-a}{1} = \frac{x_2-b}{1} = \frac{x_3-c}{1}$. Proiecția lui P pe π va fi deci $p_1(P) = d' \cap \pi$. Deducem

$$p_1(a, b, c) = (2a - b - c - 1, a - c - 1, a - b - 1).$$

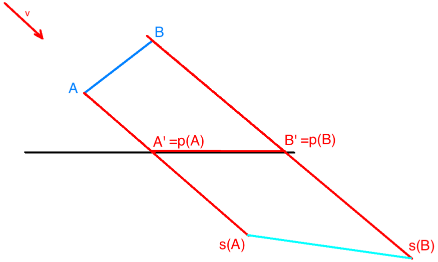
b) Analog. Planul prin P paralel cu direcția V_2 va fi $(\pi'): \ (x_1 - a) + (x_2 - b) + (x_3 - c) = 0$ deci $p_2(P) = d \cap \pi'$. Deducem

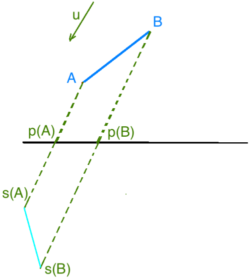
$$p_2(a, b, c) = (a + b + c, -a - b - c + 1, a + b + c - 1).$$

Simetrii

Definiție

O **simetrie afină** este un endomorfism afin având (cel puțin) un punct fix și a cărui urmă este o simetrie vectorială.





Remarci

(i) Un endomorfism afin σ al unui spațiu afin $\mathcal{A}$ este simetrie dacă și numai dacă $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$.
(ii) Dacă σ este o simetrie , atunci $\frac{1}{2}\mathrm{id}_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\sigma$ este o proiecție. Reciproc, **dacă π este o proiecție, atunci $2\pi - \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ este o simetrie.** În consecință, pentru o simetrie putem vorbi de **direcția** simetriei, care este direcția proiecției asociate, și de **axa** simetriei, care este imaginea proiecției asociate și care coincide cu mulțimea punctelor fixe ale simetriei.
(iii) Un endomorfism afin σ este o simetrie dacă și numai dacă există un subspațiu vectorial W al lui $dir(\mathcal{A})$ și un subspațiu afin L având direcția un complement al lui W astfel încât pentru orice $P \in \mathcal{A}$ să avem $\overrightarrow{P\sigma(P)} \in W$ și $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\sigma(P) \in L$.

Simetriii: exemple

Exemple

Ȋn spațiul afin $\mathbb{R}^3$ (cu structura afină canonică) să determinăm
a) simetria s_1 față de planul $(\pi): \ x_1 - x_2 - x_3 = 1$ paralelă cu direcția $V_1 =< (1, 1, 1) >$;
b) simetria s_2 facță de dreapta $(d): \ \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{1}$ paralelă cu direcția $V_2 := \{(v_1, v_2, v_3) | v_1 + v_2 + v_3 = 0.\}$

a) Fie $P = (a, b, c)$ un punct arbitrar. Am văzut că proiecția lui P pe π este

$$p_1(a, b, c) = (2a - b - c - 1, a - c - 1, a - b - 1).$$

Cum $s_1 = 2p_1 - Id$ deducem

$$s_1(a, b, c) = (3a - b - c - 1, a - b - c - 1, a - b - c - 1).$$

b) Analog.Cum $s_2 = 2p_2 - id$ și

$$p_2(a, b, c) = (a + b + c, -a - b - c - 1, a + b + c + 1).$$

deducem

$$s_2(a, b, c) = (a + 2b + 2c, -2a - b - 2c - 2, 2a + 2b + c + 2).$$

Geometrie (II). Spații euclidiene

Definiții

Spații euclidiene

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu afin peste corpul $\mathbb{R}$. O *structură euclidiană pe* $\mathcal{E}$ este dată de alegerea unui produs scalar $<,>$ pe $dir(\mathcal{E})$.

Exemplu: structura euclidiană canonică

Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ cu structura afină canonică. Structura euclidiană canonică pe $\mathcal{E}$ este dată de produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$,

$$< (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) >= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Metrică, unghiuri

Metrica indusă de o structură euclidiană

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu afin cu structura euclidiană $<,>$. Atunci funcția $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ dată de $d(P, Q) := ||\overrightarrow{PQ}||$ este o metrică pe $\mathcal{E}$.

Demonstrație

("Simetrie")

Metrică, unghiuri

Metrica indusă de o structură euclidiană

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu afin cu structura euclidiană $<,>$. Atunci funcția $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ dată de $d(P, Q) := ||\overrightarrow{PQ}||$ este o metrică pe $\mathcal{E}$.

Demonstrație

("Simetrie") Pentru orice două puncte P, Q avem

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = || - \overrightarrow{PQ}|| = ||\overrightarrow{QP}|| = d(Q, P)$$

("Inegalitatea triunghiului")

Metrică, unghiuri

Metrica indusă de o structură euclidiană

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu afin cu structura euclidiană $<,>$. Atunci funcția $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ dată de $d(P,Q) := ||\overrightarrow{PQ}||$ este o metrică pe $\mathcal{E}$.

Demonstrație

("Simetrie") Pentru orice două puncte P, Q avem

$$d(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = ||-\overrightarrow{PQ}|| = ||\overrightarrow{QP}|| = d(Q,P)$$

("Inegalitatea triunghiului") Pentru orice trei puncte P, Q, R avem

$$d(P,R) = ||\overrightarrow{PR}|| = ||\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}|| \leq ||\overrightarrow{PQ}|| + ||\overrightarrow{QR}|| = d(P,Q) + d(Q,R)$$

("Pozitivitate")

Metrică, unghiuri

Metrica indusă de o structură euclidiană

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu afin cu structura euclidiană $<,>$. Atunci funcția $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ dată de $d(P, Q) := ||\overrightarrow{PQ}||$ este o metrică pe $\mathcal{E}$.

Demonstrație

("Simetrie") Pentru orice două puncte P, Q avem

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = || - \overrightarrow{PQ}|| = ||\overrightarrow{QP}|| = d(Q, P)$$

("Inegalitatea triunghiului") Pentru orice trei puncte P, Q, R avem

$$d(P, R) = ||\overrightarrow{PR}|| = ||\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}|| \leq ||\overrightarrow{PQ}|| + ||\overrightarrow{QR}|| = d(P, Q) + d(Q, R)$$

("Pozitivitate") Pentru orice două puncte P, Q avem
$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| \geq 0$ iar $d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = 0 \Rightarrow P = Q$

Metrică, unghiuri

Unghiuri

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian, A, B, C puncte din $\mathcal{E}$. Definim

$$\cos(\widehat{BAC}) := \frac{< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >}{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}||}$$

În particular, $AB \perp AC$ dacă și numai dacă $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >= 0$.

Exemplu

În $\mathbb{R}^3$ considerăm punctele $A = (1, 0, 1), B = (2, -1, 3)$ și $C = (3, 2, 1)$
Atunci $d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = ||(1, -1, 2)|| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$ precum și $\cos(\widehat{BAC}) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>}{||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AC}||}$. Dar $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 2)$ și $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$ deci $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>}{||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AC}||} = 0$.

Perpendicularitate

Definiții

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian și $\mathcal{E}', \mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}$ subspații afine. Spunem că $\mathcal{E}' \perp \mathcal{E}''$ dacă $dir(\mathcal{E}') \perp dir(\mathcal{E}'')$, i.e. $< v', v'' >= 0$ pentru orice $v' \in dir(\mathcal{E}'), v'' \in dir(\mathcal{E}'')$.

Dacă $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ este un subspațiu afin, subspațiul vectorial

$$dir(\mathcal{E}')^{\perp} := \{v \in dir(\mathcal{E}) | v \perp v', \forall v' \in dir(\mathcal{E}')\}$$

se va numi *direcția normală* la $\mathcal{E}'$.

Perpendicularitate

Repere ortonormate

Un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1,\dots,n})$ se numește *reper ortonormat* dacă baza sa $\mathcal{B}$ este bază ortonormată. Orice spațiu afin euclidian admite repere ortonormate.

Calcule în raport cu repere ortonormate

Dacă $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1,\dots,n})$ este reper ortonormat și A (resp. B, C) sunt puncte de coordonate $(a_1, \dots, a_n)$ (resp. $(b_1, \dots, b_n)$, $(c_1, \dots, c_n)$) în raport cu $\mathcal{R}$ atunci:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

și

$$< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >= (b_1 - a_1)(c_1 - a_1) + \dots + (b_n - a_n)(c_n - a_n)$$

Un caz particular remarcabil: direcția normală la un hiperplan

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian și $\mathcal{R}$ un reper afin *ortonormat* al lui $\mathcal{E}$. Dacă $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ este un hiperplan de ecuație

$$(\mathcal{H}): \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$$

atunci direcția normală la $\mathcal{H}$ este subspațiul vectorial

$$\mathcal{H}^{\perp} =< (a_1, \ldots, a_n) > .$$

Avem

$$dir(\mathcal{H}) = \{(v_1, \ldots, v_n) | a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0\}$$

pe care o putem scrie și sub forma

$$dir(\mathcal{H}) = \{(v_1, \ldots, v_n) | < (a_1, \ldots, a_n), (v_1 \ldots, v_n) >= 0\}$$

Un caz particular remarcabil: direcția normală la un hiperplan

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian și $\mathcal{R}$ un reper afin *ortonormat* al lui $\mathcal{E}$. Dacă $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ este un hiperplan de ecuație

$$(\mathcal{H}): \; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$$

atunci direcția normală la $\mathcal{H}$ este subspațiul vectorial

$$\mathcal{H}^{\perp} =< (a_1, \ldots, a_n) > .$$

Avem

$$dir(\mathcal{H}) = \{(v_1, \ldots, v_n) | a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0\}$$

pe care o putem scrie și sub forma

$$dir(\mathcal{H}) = \{(v_1, \ldots, v_n) | < (a_1, \ldots, a_n), (v_1 \ldots, v_n) >= 0\}$$

Deci $(a_1, \ldots, a_n) \in dir(\mathcal{H})^{\perp}$; dar cum $dim(\mathcal{H}) = n - 1$ deducem $dim(\mathcal{H}^{\perp}) =$

Un caz particular remarcabil: direcția normală la un hiperplan

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian și $\mathcal{R}$ un reper afin *ortonormat* al lui $\mathcal{E}$. Dacă $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ este un hiperplan de ecuație

$$(\mathcal{H}): \; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$$

atunci direcția normală la $\mathcal{H}$ este subspațiul vectorial

$$\mathcal{H}^\perp =< (a_1, \ldots, a_n) > .$$

Avem

$$dir(\mathcal{H}) = \{(v_1, \ldots, v_n) | a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0\}$$

pe care o putem scrie și sub forma

$$dir(\mathcal{H}) = \{(v_1, \ldots, v_n) | < (a_1, \ldots, a_n), (v_1 \ldots, v_n) >= 0\}$$

Deci $(a_1, \ldots, a_n) \in dir(\mathcal{H})^\perp$; dar cum $dim(\mathcal{H}) = n - 1$ deducem $dim(\mathcal{H}^\perp) = 1$ deci $\mathcal{H}^\perp =< (a_1, \ldots, a_n) > .$

Definiție

Izometrie= funcție care păstrează metrica, i.e. dacă (X_1, d_1) și (X_2, d_2) sunt două spații metrice, o izometrie este o funcție $f : X_1 \to X_2$ astfel încât

$$d_1(P, Q) = d_2(f(P), f(Q))$$

pentru orice $P, Q \in X_1$.

Exemplu

Fie $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^n$ cu structura euclidiană canonică. Orice translație $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o izometrie.
Dem. τ este de forma $\tau(X) = X + B$. Atunci

$$d(X, Y) = ||X - Y|| = ||(X + B) - (Y + B)|| = ||\tau(X) - \tau(Y)|| = d(\tau(X), \tau(Y)).$$

Remarci

Concept similar

Un concept similar este cel de izometrie între două spații vectoriale normate $(V_1, || \, ||_1)$ și $(V_2, || \, ||_2)$; este o funcție *liniară* $f : V_1 \to V_2$ astfel încât $||v||_1 = ||f(v)||_2, \forall v \in V_1$.

Injectivitate

Orice izometrie $f : X_1 \to X_2$ între spații metrice este aplicație injectivă. Intr-adevăr, dacă $P, Q \in X_1$ sunt astfel încât $f(P) = f(Q)$, atunci $d_2(f(P), f(Q)) = 0$. Dar, cum f este izometrie, rezultă $d_1(P, Q) = 0$ deci $P = Q$.

Observații

În general, nu putem afirma că o izometrie este și surjectivă! Exemplu: $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ cu distanța uzuală $d(n, m) = |n - m|$. Atunci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = n + 7$ este izometrie, dar nu este surjectivă.

Enunțul teoremei

Teoremă

Fie $(\mathcal{E}, <,>)$ un spațiu afin euclidian și fie d metrica pe $\mathcal{E}$ indusă de $<,>$ ($d(P,Q) = \sqrt{<\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}>}$). Fie $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ o izometrie. Atunci
i) τ este aplicație afină;

Enunțul teoremei

Teoremă

Fie $(\mathcal{E}, <,>)$ un spațiu afin euclidian și fie d metrica pe $\mathcal{E}$ indusă de $<,>$ $\left(d(P,Q) = \sqrt{<\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}>}\right)$. Fie $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ o izometrie. Atunci
i) τ este aplicație afină;
ii) dacă $\mathcal{R}$ este reper cartezian ortonormat al lui $\mathcal{E}$ atunci τ are, în raport cu $\mathcal{R}$, expresia $\tau(X) = AX + B$ unde A este o matrice *ortogonală*, i.e.

$$A \cdot A^t = \mathbb{I}.$$

Enunțul teoremei

Teoremă

Fie $(\mathcal{E}, <,>)$ un spațiu afin euclidian și fie d metrica pe $\mathcal{E}$ indusă de $<,>$ $\left(d(P,Q) = \sqrt{< \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} >}\right)$. Fie $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ o izometrie. Atunci
i) τ este aplicație afină;
ii) dacă $\mathcal{R}$ este reper cartezian ortonormat al lui $\mathcal{E}$ atunci τ are, în raport cu $\mathcal{R}$, expresia $\tau(X) = AX + B$ unde A este o matrice *ortogonală*, i.e.

$$A \cdot A^t = \mathbb{I}.$$

iii) reciproc, dacă $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ este o aplicație afină ce are în raport cu $\mathcal{R}$ expresia $\tau(X) = AX + B$ cu A este o matrice ortogonală, atunci τ este izometrie.

Enunțul teoremei

Teoremă

Fie $(\mathcal{E}, <,>)$ un spațiu afin euclidian și fie d metrica pe $\mathcal{E}$ indusă de $<,>$ $\left(d(P,Q) = \sqrt{<\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}>}\right)$. Fie $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ o izometrie. Atunci

i) τ este aplicație afină;

ii) dacă $\mathcal{R}$ este reper cartezian ortonormat al lui $\mathcal{E}$ atunci τ are, în raport cu $\mathcal{R}$, expresia $\tau(X) = AX + B$ unde A este o matrice *ortogonală*, i.e.

$$A \cdot A^t = \mathbb{I}.$$

iii) reciproc, dacă $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ este o aplicație afină ce are în raport cu $\mathcal{R}$ expresia $\tau(X) = AX + B$ cu A este o matrice ortogonală, atunci τ este izometrie.

Geometrie (II): Spații euclidiene: teorema fundamentală a geometriei euclidiene

Enunțul teoremei

Teoremă

Fie $(\mathcal{E}, <,>)$ un spațiu afin euclidian și fie d metrica pe $\mathcal{E}$ indusă de $<,>$ $\left(d(P,Q) = \sqrt{<\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}>}\right)$. Fie $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ o izometrie. Atunci

i) τ este aplicație afină;

ii) dacă $\mathcal{R}$ este reper cartezian ortonormat al lui $\mathcal{E}$ atunci f are, în raport cu $\mathcal{R}$, expresia $\tau(X) = AX + B$ unde A este o matrice *ortogonală*, i.e.

$$A \cdot A^t = \mathbb{I}.$$

iii) reciproc, dacă $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ este o aplicație afină ce are în raport cu $\mathcal{R}$ expresia $\tau(X) = AX + B$ cu A este o matrice ortogonală, atunci τ este izometrie.

Pregătiri pentru demonstrație

"Teorema cosinusului"

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian. Atunci pentru orice trei puncte $A, B, C \in \mathcal{E}$, dacă notăm $a := d(B, C), b := d(A, C), c := d(A, B)$ are loc

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC}).$$

Demonstrație

Avem $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Ca atare, $a^2 = ||\overrightarrow{BC}||^2 = < \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} >$. Dar $< \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} > = < \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} > -2 < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >$. Cum $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} > = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}|| \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ deducem relația dorită.

Corolar

În orice spațiu euclidian funcționează cazurile de congruență pentru triunghiuri.

Pregătiri pentru demonstrație

Aplicații ortogonale (I)

Fie $(V, <,>)$ un spațiu vectorial euclidian. Dacă $f : V \to V$ este o funcție care păstrează produsul scalar, i.e

$$< u, v >=< f(u), f(v) >, \forall u, v \in V$$

atunci f este liniară.

Fie $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrari. Fie $w := \alpha u + \beta v$; evident avem $w - \alpha u - \beta v = 0$ Atunci $< w - \alpha u - \beta v, w - \alpha u - \beta v >= 0$. Deducem $< w, w > +\alpha^2 < u, u > +\beta^2 < v, v > -2\alpha < w, u > -2\beta < w, u > -2\alpha\beta < u, v >= 0$. Cum f păstrează produsul scalar deducem mai departe $< f(w), f(w) > +\alpha^2 < f(u), f(u) > +\beta^2 < f(v), f(v) > -2\alpha < f(w), f(u) > -2\beta < f(w), f(u) > -2\alpha\beta < f(u), f(v) >= 0$. Acesta implică $< f(w) - \alpha f(u) - \beta f(v), f(w) - \alpha f(u) - \beta f(v) >= 0$ deci $f(w) - \alpha f(u) - \beta f(v) = 0$ i.e. $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, deci f este liniară. Q.E.D.

Pregătiri pentru demonstrație

Aplicații ortogonale (II)

Fie $(V, <,>)$ un spațiu vectorial euclidian. Dacă $f : V \to V$ este o funcție care păstrează normele și păstrează unghiurile, i.e. $||v|| = ||f(v)||$ și $\widehat{u, v} = \widehat{f(u), f(v)}$ pentru orice $u, v \in V$, atunci f păstrează produsul scalar, i.e. $< f(u), f(v) >=< u, v >$ pentru orice $u, v \in V$.

Demonstrație

Avem $< u, v >= ||u|| \cdot ||v|| \cos(\widehat{u, v})$ deci
$< u, v >= ||f(u)|| \cdot ||f(v)|| \cos(\widehat{f(u), f(v)}) = < f(u), f(v) >$.

Demonstrația teoremei

Punctul i)

Fie T=urma vectorială a lui τ, în raport cu un punct O arbitrar fixat, $T(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A)}$. Trebuie doar să demonstrăm că T este liniară. Din faptul ca τ e izometrie rezultă imediat că T păstrează normele:

$$||\overrightarrow{OA}|| = d(O, A) = d(\tau(O), \tau(A)) = ||\overrightarrow{\tau(O)\tau(A)}|| = ||T(\overrightarrow{OA})||$$

Fie $u = \overrightarrow{OA}, v = \overrightarrow{OB}$ arbitrari, și fie $O' = \tau(O), A' = \tau(A), B' = \tau(B)$; deci

$$\cos(\widehat{u, v}) = \cos(\widehat{AOB}) = \frac{||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{OA}||^2 - ||\overrightarrow{OB}||^2}{2||\overrightarrow{OA}|| \cdot ||\overrightarrow{OB}||}.$$

Pe de altă parte, $\widehat{T(u), T(v)} = \widehat{A'O'B'}$ deci din nou din thm. cosinusului, avem

$$\cos(\widehat{A'O'B'}) = \frac{||\overrightarrow{A'B'}||^2 - ||\overrightarrow{O'A'}||^2 - ||\overrightarrow{O'B'}||^2}{2||\overrightarrow{O'A'}|| \cdot ||\overrightarrow{O'B'}||} = \cos(\widehat{u, v})$$

deoarece τ e izometrie.

Thm. 1. “Proprietatea de universalitate”

Fe $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian, $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1 = \{e_i = \overrightarrow{O_1A_i}\}_{i=1,\dots,n})$ respectiv $\mathcal{R}_2 = (O_2, \mathcal{B}_2 = \{f_i = \overrightarrow{O_2B_i}\}_{i=1,\dots,n})$ două repere carteziene ortonormate. Atunci există și este unică o izometrie $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ astfel încât $\tau(O_1) = O_2$, $\tau(A_i) = B_i, \forall i = 1, \dots, n$.

Procedăm similar cu cazul afin. Dacă $P \in \mathcal{E}$ este un punct arbitrar de coordonate $(x_1, \dots, x_n)$ în raport cu $\mathcal{R}_1$, definim $\tau(P)$ ca fiind unicul punct de coordonate $(x_1, \dots, x_n)$ în raport cu $\mathcal{R}_2$. Clar, τ este afină. Urma ei vectorială duce baza $\mathcal{B}_1$ în baza $\mathcal{B}_2$ și acestea sunt ambele ortonormate: deducem că urma vectorială a lui τ este aplicație ortogonală, deci τ este izometrie, Q.E.D.

Thm. 2: Generalizare a teoremei anterioare

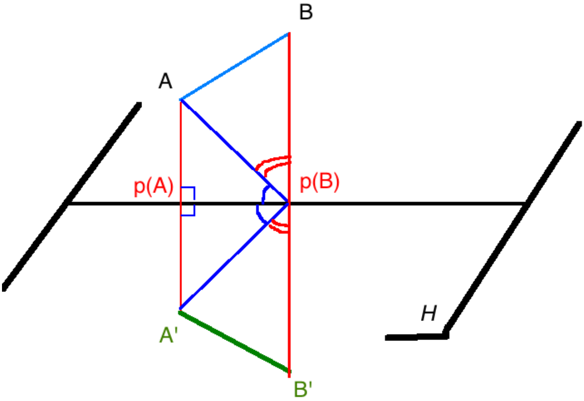
Fe $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian, $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1 = \{e_i = \overrightarrow{O_1A_i}\}_{i=1,\dots,n})$ respectiv $\mathcal{R}_2 = (O_2, \mathcal{B}_2 = \{f_i = \overrightarrow{O_2B_i}\}_{i=1,\dots,n})$ două repere carteziene. Presupunem că pentru orice i avem $||\overrightarrow{O_1A_i}|| = ||\overrightarrow{O_2B_i}||$ și că pentru orice i, j avem

$$\widehat{\overrightarrow{O_1A_i}, \overrightarrow{O_1A_j}} = \widehat{\overrightarrow{O_2B_i}, \overrightarrow{O_2B_j}}$$

Atunci există și este unică o izometrie $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ astfel încât $\tau(O_1) = O_2$, $\tau(A_i) = B_i, \forall i = 1, \dots, n$

Știm că există o transformare afină τ ca în enunț. Trebuie doar să verificăm că este izometrie, i.e. că urma ei vectorială este aplicație ortogonală. Dar aceasta este imediat, deoarece urma vectorială păstrând normele și unghiurile pe o bază, va păstra produsul scalar pe acea bază, iar din liniaritate va păstra produsul scalar; deci urma vectorială este aplicație ortogonală, Q.E.D.

Simetrii ortogonale



Simetriile ortogonale sunt izometrii

Avem $\Delta\,(Ap(A)p(B)) \cong \Delta\,(A'p(A)p(B))$ (cf **LUL**) deci $[Ap(B)] \cong [A'p(B)]$ și $\widehat{Ap(B)p(A)} \cong \widehat{A'p(B)p(A)}$, de unde $\widehat{Bp(B)A} \cong \widehat{B'p(B)A}$. Deducem $\Delta\,(Ap(B)B) \cong \Delta\,(A'p(A)B')$ (similar), deci $[AB] \cong [A'B']$.

Descompunerea unei izometrii în produs de simetrii

Teoremă

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian, $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ o izometrie. Atunci există $k \in \mathbb{N}$ și hiperplanele $H_1, \ldots, H_k \subset \mathcal{E}$ astfel încât $\tau = S_{H_1} \circ \cdots \circ S_{H_k}$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{R} = (O, \{\overrightarrow{OA_i}\}_{i=1,\ldots,n})$ un reper ortonormat al lui $\mathcal{E}$. Pt uniformitate, vom nota $A_0 := O$. Vom construi prin (inducție după l) simetrii S_l astfel încât $\tau_l := S_1 \circ \cdots \circ S_l \circ \tau$ are toate punctele $A_j, j = 0, \ldots l$ drept puncte fixe, $\tau_l(A_j) = A_j$. Cazul $l = 0$. Dacă $A_0 = B_0$ nu avem nimic de construit, deja $\tau(A_0) = A_0$ deci lumăm $\tau_0 := \tau$. Dacă $A_0 \neq B_0$ fie H_0 =hiperplanul mediator al lui $[A_0B_0]$ =(hiperplanul perpendicular pe $\overrightarrow{A_0\tau(A_0)}$ ce trece prin $M_0 := \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}\tau(A_0)$) și fie S_0= simetria ortogonală față de H_0; în particular $S_0(\tau(A_0)) = A_0$. Atunci punând $\tau_0 := S_0 \circ \tau$ avem $\tau_0(A_0) = S_0 \circ \tau(A_0) = A_0$. Pt pasul de inducție, procedăm analog: dacă $\tau_l(A_l) = A_l$ punem $\tau_l := \tau_{l-1}$, altfel considerăm simetria S_l față de hiperplanul mediator segmentului $[A_l\tau_l(A_l)]$ și punem $\tau_l := S_l \circ \tau_{l-1}$. În final, obținem că există k astfel încât $S_1 \circ \cdots \circ S_k \circ \tau(A_i) = A_i$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Deducem $S_1 \circ \cdots \circ S_k \circ \tau = id_{\mathcal{E}}$, deci $\tau = S_k \circ \cdots \circ S_1$.

Geometrie - Hipercuadrice afine

Victor Vuletescu

Forme biafine: definiții

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin peste un corp K. Se numește *formă biafină* o aplicație $F : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to K$ care este afină în fiecare argument, i.e.

$$F(a_1 P_1 + \cdots + a_n P_n, Q) = a_1 F(P_1, Q) + \cdots + a_n F(P_n, Q)$$

respectiv

$$F(P, a_1 Q_1 + \cdots + a_n Q_n) = a_1 F(P, Q_1) + \cdots + a_n F(P, Q_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, orice $P, P_1, \ldots, P_n, Q, Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{A}$ și $a_1, \ldots, a_n \in K$ cu $a_1 + \cdots + a_n = 1$.

O formă biafină F se numește *simetrică* dacă $F(P, Q) = F(Q, P)$ pentru orice $P, Q \in \mathcal{A}$.

Dacă F este o formă biafină simetrică, funcția $q_F : \mathcal{A} \to K$ dată de $q_F(P) := F(P, P)$ se numește *forma pătratică afină* asociată lui F.

Forme biafine: caracterizare în coordonate

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1,\dots,n})$ un reper cartezian fixat. O funcție $F : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to K$ este formă biafină dacă și numai dacă există $A \in \mathrm{Mat}_{nxn}(K)$, $B_1, B_2 \in \mathrm{Mat}_{1xn}(K)$ și $c \in K$ astfel încât

$$F(X, Y) = X^t \cdot A \cdot Y + B_1 X + B_2 Y + c$$

pentru orice două puncte $P, Q \in \mathcal{A}$ (am notat X, respectiv Y, coordonatele lui P, respectiv Q în reperul $\mathcal{R}$).
În plus, F este simetrică dacă și numai dacă avem $A = A^t$ și $B_1 = B_2$. În acest caz, notând $B := B_1$ avem $q_F(X) = X^t \cdot A \cdot X + 2BX + c$.
Partea omogenă de gradul doi, $X^t AX$, se mai numește și *forma pătratică vectorială* asociată lui q_F.

Când F este simetrică, vom nota $D = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & c \end{pmatrix}$.

Remarcă

Ca și în cazul formelor pătratice liniare, forma pătratică determină în mod unic forma biafină din care provine.

Exemplu

Fie forma pătratică afină:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 10.$$

Matricile asociate ei sunt:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = (-1, 3, 1)$ și $c = -10$.

În consecință, "matricea mare" asociată este:

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -10 \end{pmatrix}$, iar forma biafină din care provine q este

$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$
$= x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - (x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) - 10$

Forme biafine: schimbarea matricelor asociate la schimbarea reperului

Fie F o formă biafină simetrică. Fie $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ două repere carteziene fixate. Presupunem ca F are expresile:

$$F(X, Y) = X^t \cdot A \cdot Y + B(X + Y) + c$$

respectiv

$$F(X', Y') = (X')^t \cdot A' \cdot Y' + B'(X' + Y') + c'$$

în raport cu reperele $\mathcal{R}$, respectiv $\mathcal{R}'$ (am notat X, respectiv $X' =$ coordonatele unui punct $P \in \mathcal{A}$ arbitrar în raport cu $\mathcal{R}$, respectiv $\mathcal{R}'$ și analog Y, Y' pentru un punct Q). Atunci există matricile nesingulare $U \in \mathrm{Mat}_{nxn}(K)$, $V \in \mathrm{Mat}_{(n+1)x(n+1)}(K)$ astfel încât

$$A = U^t \cdot A' \cdot U \text{ și } D = V^t \cdot D' \cdot V$$

Demonstrație

Calcul direct. Avem $X' = UX + T$ (cu $\det(U) \neq 0$) deci
$F(X', X') = (UX + T)^t \cdot A' \cdot (UX + T) + 2B'(UX + T) + c' =$
$X^t \cdot (U^t \cdot A' \cdot U)X + 2(B'U + T^tA'U)X + (T^tA'T + 2B'T + c')$.
Deducem $A = U^tA'U$ precum și $B = B'U + T^tA'U$, $c = T^tA'T + 2B'T + c'$.
Deci, notând $V := \begin{pmatrix} U & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avem similar $D = V^t \cdot D' \cdot V$

Remarcă importantă. Numerele naturale $r := rg(A)$ și $R := rg(D)$ sunt invariante la schimbarea reperului afin.

Exemple

În $\mathbb{R}^3$, forma pătratică afină: $q(X) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1 - 2x_2 - 8z - 20$
provine din biliniara având $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = (1, -1, -4)$ și $c = -20$

deci $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & -20 \end{pmatrix}$. Pentru ea avem $r = rg(A) = 3$ și $R = 4$.

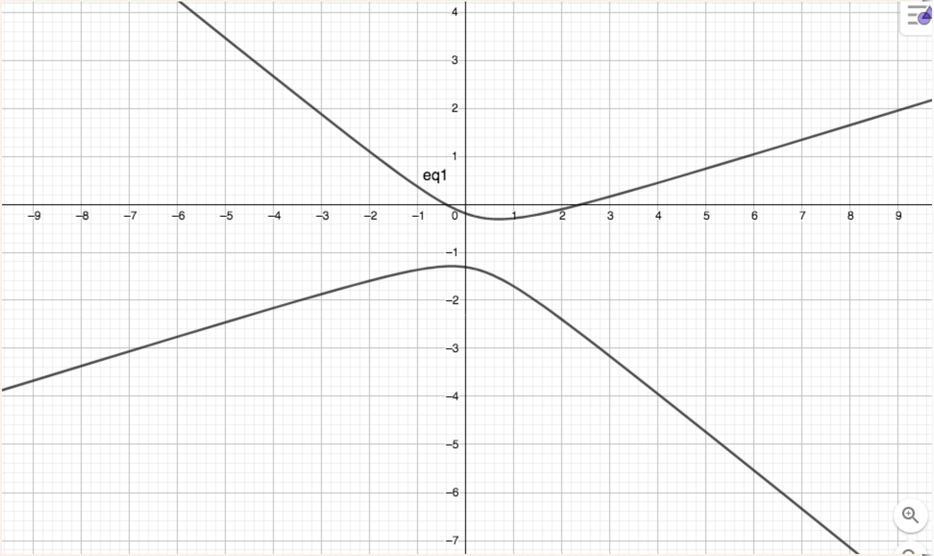
Definiție

Se numește hipercuadrică *algebrică* o clasă de echivalență de forme pătratice afine, modulo relația de proporționalitate, $q_{F'} = \lambda q_F$ (cu $\lambda \neq 0$).
Fie $[q_F]$ o hipercuadrică; un reper cartezian $\mathcal{R}$ în raport cu care q_F are o expresie de una din formele:
$(A) : \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K^*)$
sau
$(B) : \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 - c = 0\ (c, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K^*)$
sau
$(C) : \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 - 2a x_{r+1} = 0\ (a, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K^*)$
se numește *reper canonic* pentru $[q_F]$, iar scrierea de una dintre formele de mai sus se numește *formă canonică* pentru hipercuadrica dată.
Dacă $[q_F]$ este o hipercuadrică algebrică, mulțimea zerourilor ei

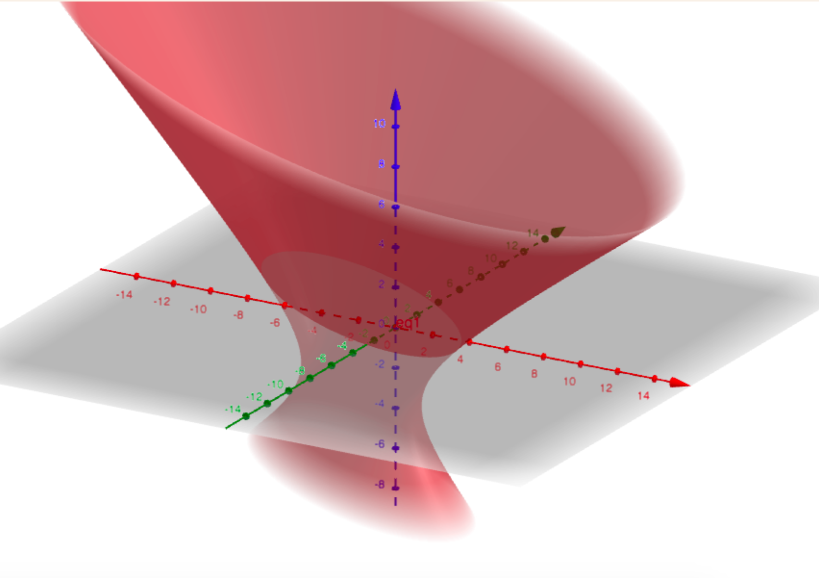
$$\mathcal{Q}_F := \{P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A} | q_F(P) = 0\}$$

se numește *hipercuadrica geometrică* asociată ei.
Remarcă. În general, hipercuadrica geometrică NU determină în mod unic hipercuadrica algebrică din care provine!

Exemplu: hipercuadrica geometrică din $\mathbb{R}^2$, $x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 1 = 0$



Alt exemplu: hipercuadrica geometrică din $\mathbb{R}^3$ $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 20 = 0$



Remarci

1. Dacă există, forma canonică nu este unică. De exemplu, dacă într-un reper afin o hipercuadrică $\mathcal{Q}$ din $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ are ecuația $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ atunci, făcând schimbarea de coordonate afine $\begin{cases} y_1 = 2x_1 \\ y_2 = 3x_2 \end{cases}$ ecuația lui $\mathcal{Q}$ devine $\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} - 1 = 0$.

2. Dacă o hipercuadrică admite formă canonică, atunci tipul ei ((A), (B) sau (C) de mai sus) nu depinde de forma canonică aleasă. Într-adevăr, în cazul (A) avem $r = R$, pentru (B) avem $R = r + 1$ iar pentru (C) avem $R = r + 2$. Dar R și r nu depind de reperul afin ales.

Teoremă

Orice hipercuadrică afină poate fi adusă la formă canonică prin schimbări afine de reper.

Demonstrație

Pasul 1. Știm că făcând o schimbare de bază asupra reperului, putem aduce forma pătratică vectorială la formă canonică (metoda Gauss, completare în sumă de pătrate), i.e. există un reper $\mathcal{R}$ în raport cu care ecuația hipercuadricei este de forma

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2b_1 x_1 + \cdots + 2b_n x_n + c = 0.$$

Pasul 2. Efectuând schimbarea afină de coordonate: $\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \cdot \\ y_r = x_r + \frac{b_r}{\lambda_r} \\ y_{r+1} = x_{r+1} \\ \cdot \\ y_n = x_n \end{cases}$ ecuația poate fi pusă sub forma $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2b_{r+1}x_{r+1} + \cdots + 2b_n x_n + c' = 0$.

Demonstrația teoremei

Pasul 3. Am adus deci $\mathcal{Q}$ la o ecuație de forma:

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2b_{r+1}x_{r+1} + \cdots + 2b_n x_n + c = 0.$$

- Dacă $b_{r+1} = \cdots = b_n = c = 0$ am terminat, am ajuns la o formă canonică de tipul (A);
- Dacă $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$ dar $c \neq 0$, am terminat din nou (avem formă canonică de tipul (B));
- Dacă măcar unul dintre b_i este nenul, renumerotând eventual, putem presupune $b_{r+1} \neq 0$. Facem schimbarea afină de coordonate:
$\begin{cases} y_i = x_i, i < r \\ y_{r+1} = x_{r+1} + \frac{b_{r+2}}{b_{r+1}}x_{r+2} + \cdots + \frac{b_n}{b_{r+1}}x_n + \frac{c}{b_{r+1}} \\ y_j = x_j, j > r \end{cases}$ și găsim în acest fel ecuație canonică de tipul (C).

Exemplu

Să aducem la formă canonică hipercuadrica din $\mathbb{R}^3$ de ecuație
$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 20$.
Aducem mai întâi forma pătratică vectorială $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3^2$ la formă canonică. Avem $\underline{x_1^2 + 2x_1x_2} + 2x_2^2 - x_3^2 = \underline{(x_1 + x_2)^2} + x_2^2 - x_3^2$ deci, făcând schimbarea de coordonate: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ forma pătratică vectorială devine $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
Să urmărim ce devine ecuația hipercuadricei prin această schimbare de coordonate. Avem $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ deci q devine

$(y_1 - y_2)^2 + 2(y_1 - y_2)y_2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 2(y_1 - y_2) - 2y_2 - 8y_3 - 20 =$
$= \underline{y_1^2} + \underline{y_2^2} - \underline{y_3^2} + \underline{2y_1} - \underline{4y_2} - \underline{8y_3} - 20$
$= \underline{[(y_1 + 1)^2 - 1]} + \underline{[(y_2 - 2)^2 - 4]} - \underline{[(y_3 + 4)^2 - 16]} - 20$. Efectuând schimbarea afină de coordonate: $\begin{cases} z_1 = y_1 + 1 \\ z_2 = y_2 - 2 \\ z_3 = y_3 + 4 \end{cases}$ q devine $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - 9$ deci am ajuns la o formă canonică de tip (B).

Definiție - teoremă

O formă canonică în K^n ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) se numește *normală* (sau *redusă*), dacă e de unul dintre tipurile:

- Cazul $K = \mathbb{R}$:

  (A): $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 0$, $(0 \leq p \leq r, 1 \leq r \leq n)$;

  (B): $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 - 1 = 0$;

  (C): $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 - 2x_{r+1} = 0$;

- Cazul $K = \mathbb{C}$:

  (A): $x_1^2 + \cdots + +x_r^2 = 0$, $(1 \leq r \leq n)$;

  (B): $x_1^2 + \cdots + x_r^2 - 1 = 0$;

  (C): $x_1^2 + \cdots + x_r^2 - 2x_{r+1} = 0$

  În aceste două cazuri ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) există formă normală **și aceasta este unică.**

Demonstrație

Știm că putem aduce ecuația hipercuadricei la unul din tipurile:
(A) : $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 0$;
(B) : $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 - 1 = 0$;
(C) : $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 - 2x_{r+1} = 0$.
Mai mult, în cazul $K = \mathbb{R}$ putem presupune, făcând eventual o renumerotare a variabilelor, că $\lambda_1 \ldots, \lambda_p > 0$ și $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_r < 0$. După schimbarea de variabilă

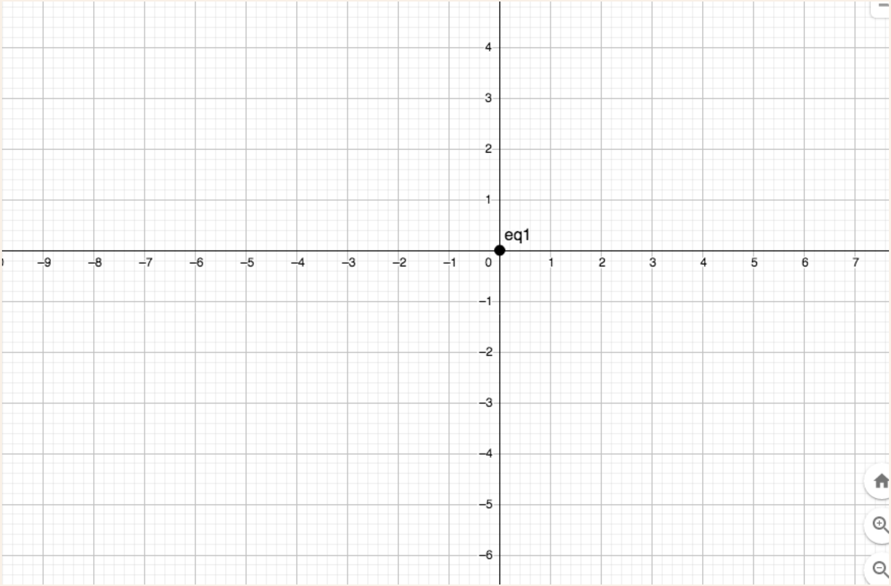
$$\begin{cases} y_i = \sqrt{\lambda_i} x_i, & i \leq p \\ y_i = \sqrt{-\lambda_i} x_i, & p+1 \leq i \leq r \\ y_i = x_i, & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

ecuația devine de unul dintre tipurile enunțate. Analog procedăm în cazul $K = \mathbb{C}$. Pentru unicitate, știm deja că tipul ((A), (B), (C)) precum și r nu depind de reperul canonic ales (tipul fiind dat de diferența $R - r$ care este 0 pt (A), 1 pt. (B) și 2 pentru (C)). În fine, unicitatea lui p rezultă din teorema de inerție Sylvester.

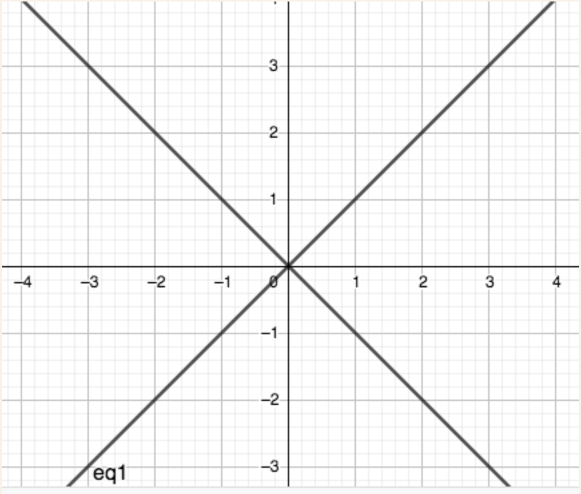
Lista conicelor pe ecuație normală:

- Tip (A):
  - $r = p = 2: \ x_1^2 + x_2^2 = 0;$
  - $r = 2, p = 1: \ x_1^2 - x_2^2 = 0;$
  - $r = 1: \ x_1^2 = 0;$
- Tip (B):
  - $r = p = 2: \ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
  - $r = 2, p = 1: \ x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0;$
  - $r = 2, p = 0: \ -x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0;$
  - $r = p = 1: \ x_1^2 - 1 = 0;$
- Tip (C):
  - $r = 1: \ x_1^2 - 2x_2 = 0;$

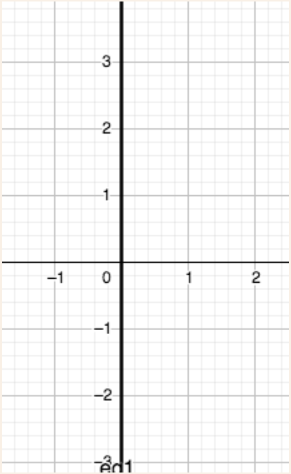
$r = p = 2: \ x_1^2 + x_2^2 = 0$; "punct dublu"



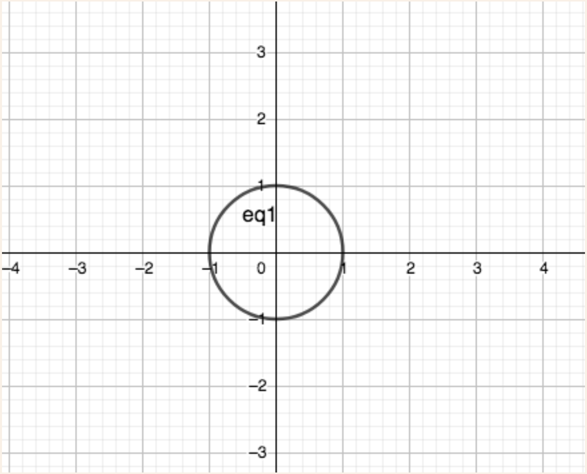
$r = 2, p = 1: \ x_1^2 - x_2^2 = 0$; "pereche de drepte secante"



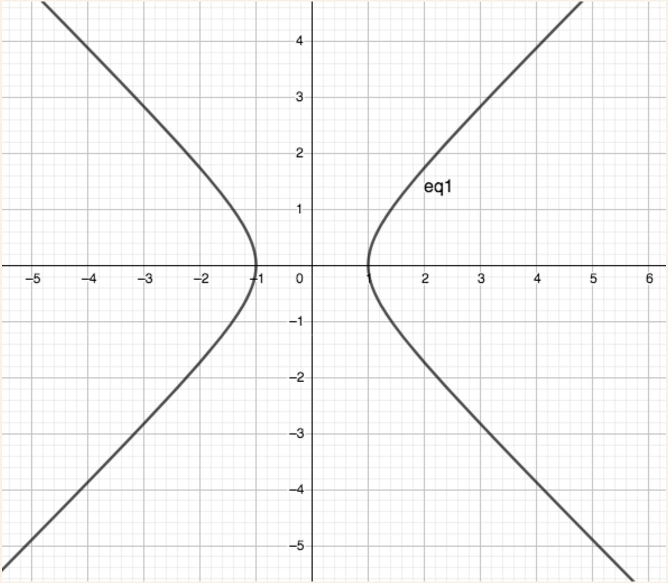
$r = 1: \; x_1^2 = 0$; "dreapta dublă"



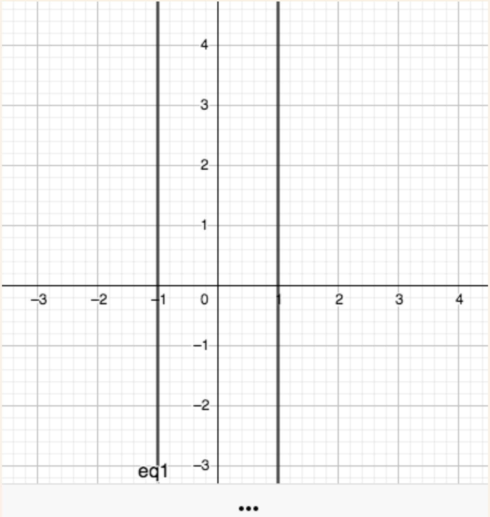
$r = p = 2: \; x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$; "elipsă"



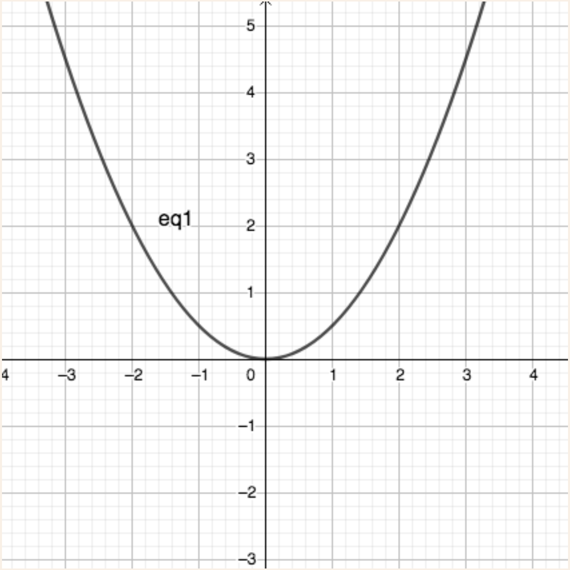
$r = 2, p = 1: \ x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0;$ "hiperbolă"



$r = 1, p = 1: \; x_1^2 - 1 = 0$; "pereche de drepte paralele"



$r = p = 1: \; x_1^2 - 2x_2 = 0$; "parabolă"



Cuadrice de tip (A)

- $r = p = 3: \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0;$
- $r = 3, p = 2: \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0;$
- $r = 2, p = 2: \ x_1^2 + x_2^2 = 0;$
- $r = 2, p = 1: \ x_1^2 - x_2^2 = 0;$
- $r = 1: \ x_1^2 = 0.$

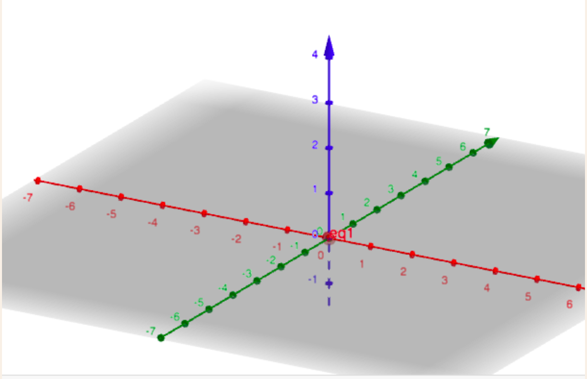
Cuadrice de tip (B)

- $r = p = 3: \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0;$
- $r = 3, p = 2: \; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0;$
- $r = 3, p = 1: \; x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0;$
- $r = 2, p = 2: \; x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
- $r = 2, p = 1: \; x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0;$
- $r = p = 1: \; x_1^2 - 1 = 0.$

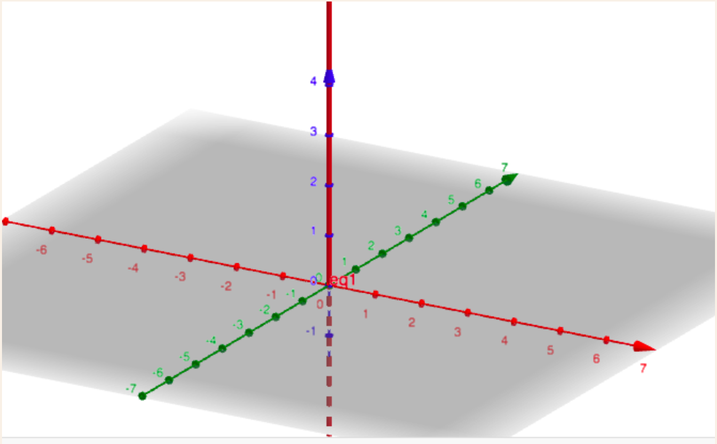
Cuadrice de tip (C)

- $r = 2, p = 2: \ x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0;$
- $r = 2, p = 1: \ x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0;$
- $r = 1: \ x_1^2 - 2x_2 = 0.$

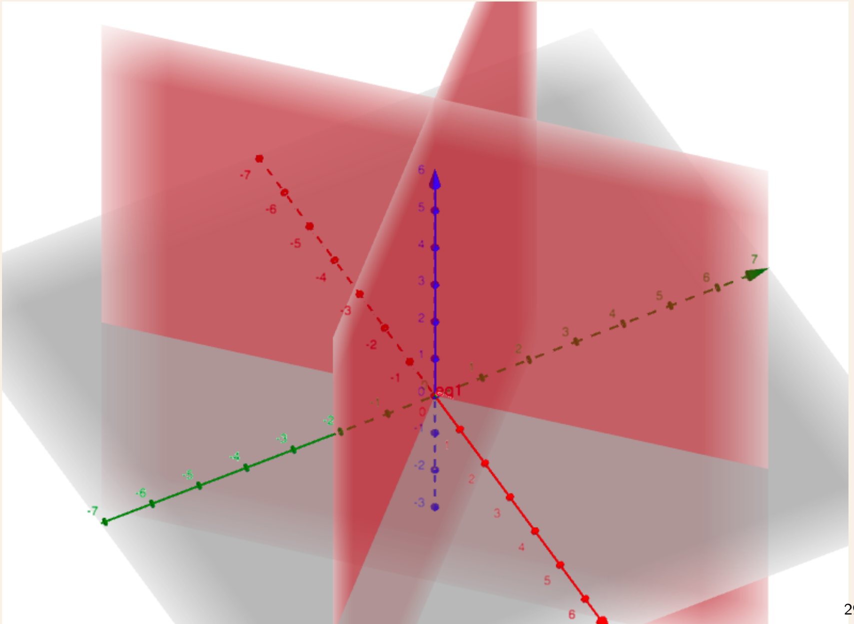
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, "punctul dublu"



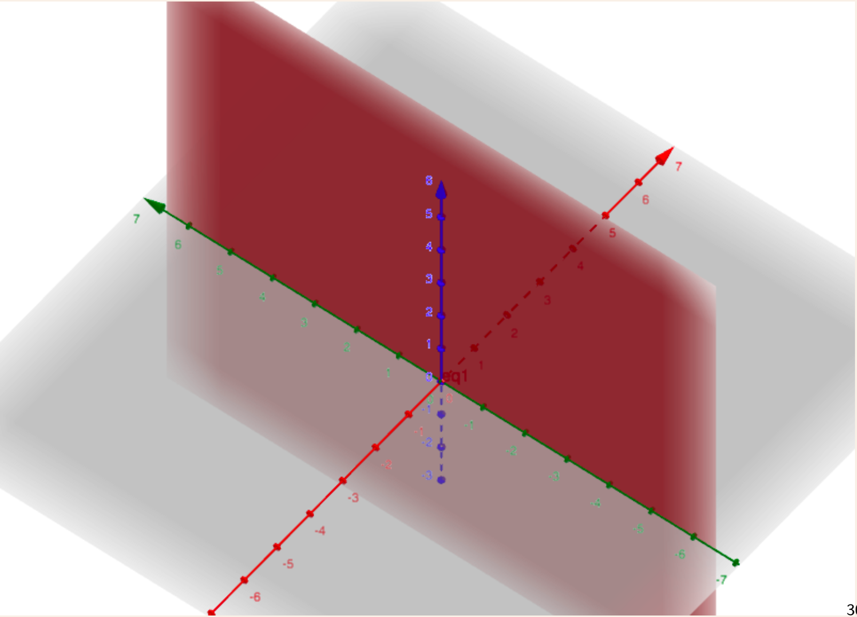
$x_1^2 + x_2^2 = 0$, 'dreapta dublă"



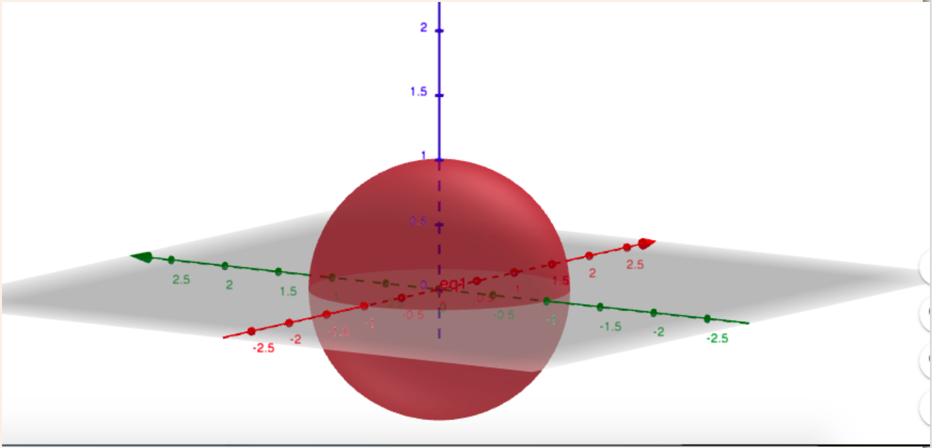
$x_1^2 - x_2^2 = 0$, ‘pereche de plane secante”



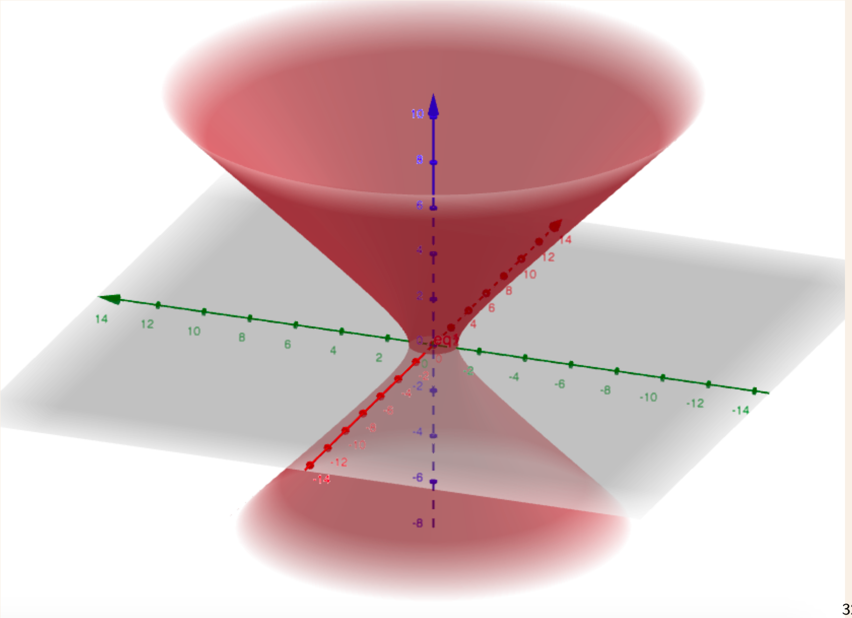
$x_1^2 = 0$, 'plan dublu"



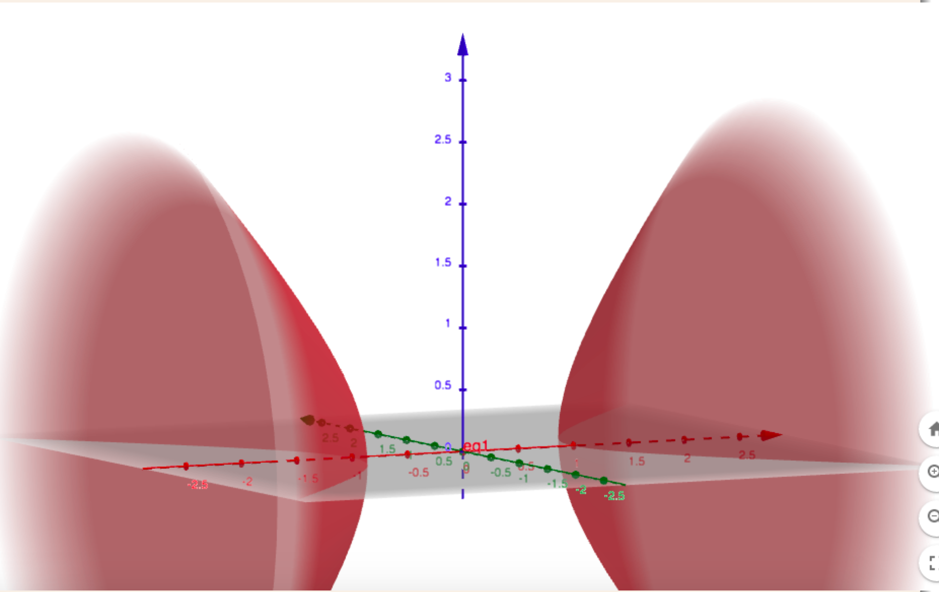
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$, "elipsoid"



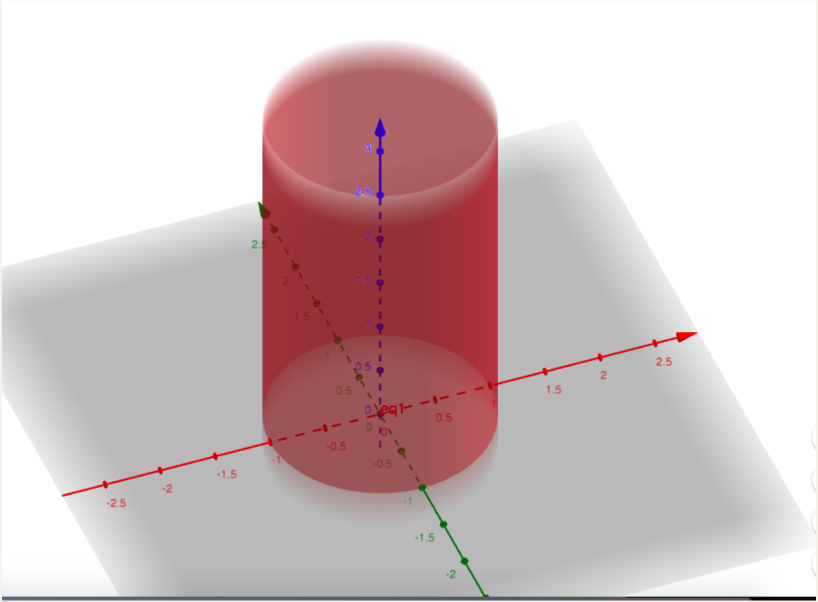
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$, "hiperboloid cu o pânză"



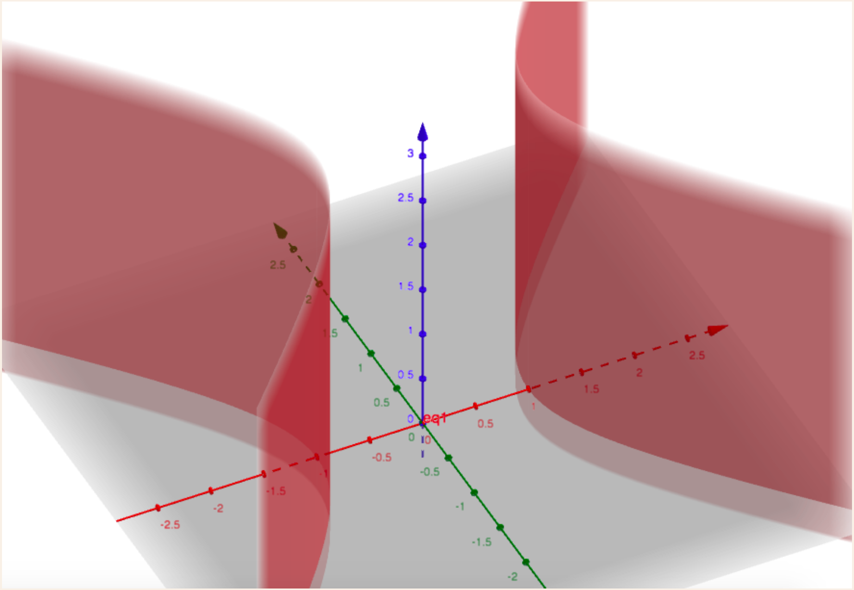
$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$, “hiperboloid cu două pânze”



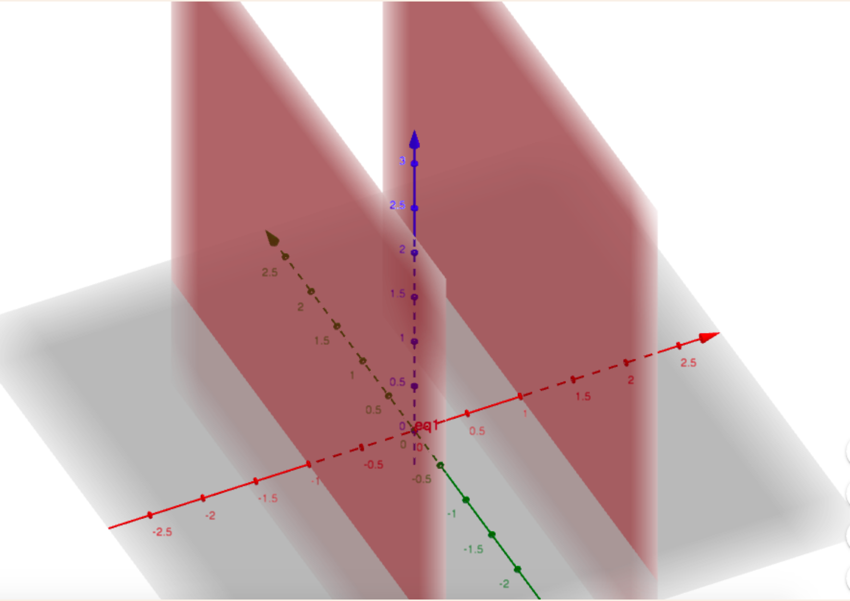
$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, "cilindru eliptic"



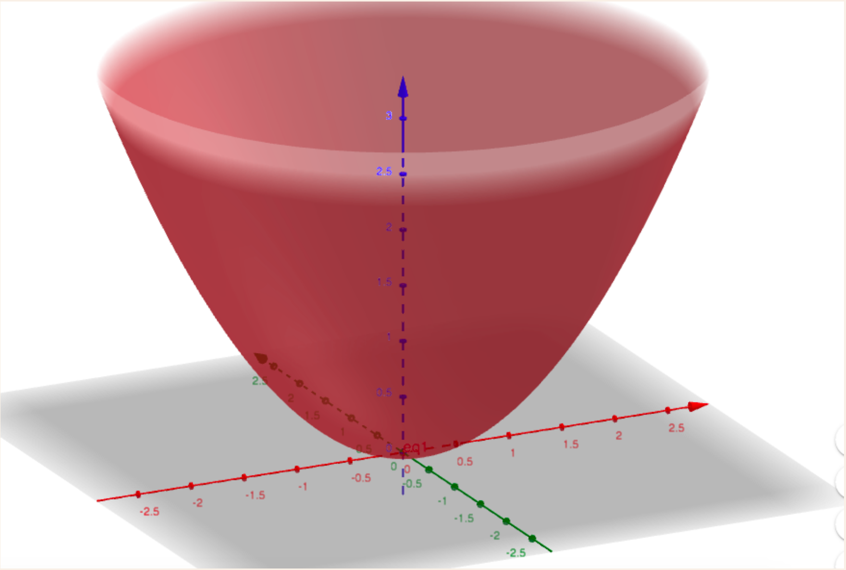
$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$, "cilindru hiperbolic"



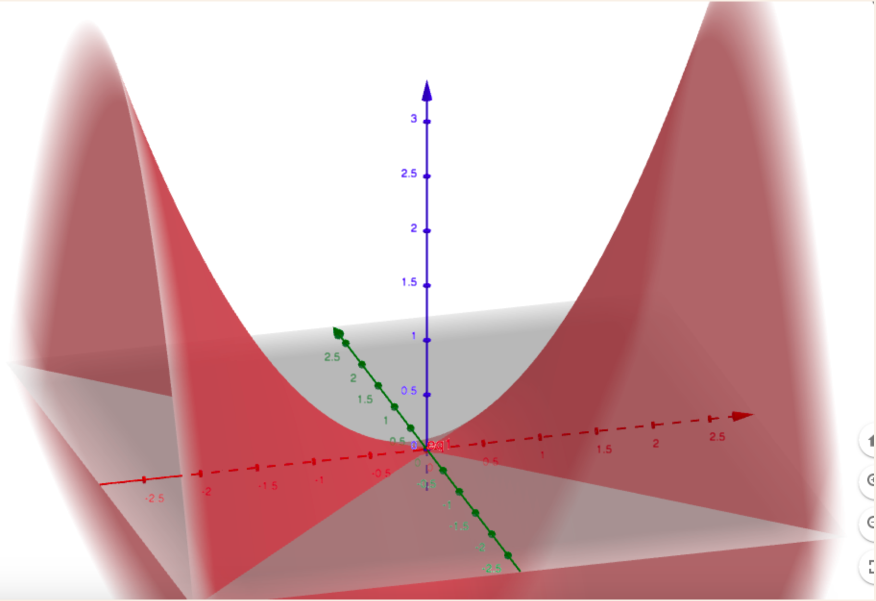
$x_1^2 - 1 = 0$, "pereche de plane paralele"



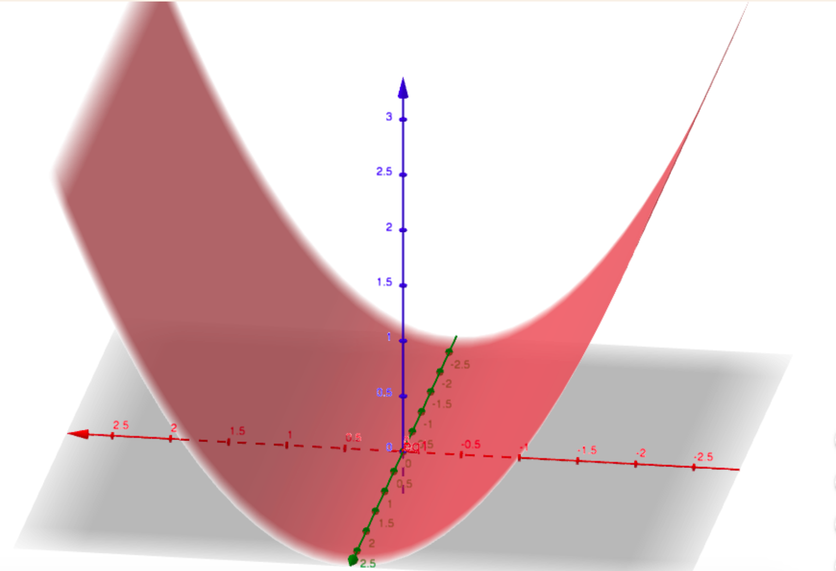
$x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$, “paraboloid eliptic”



$x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$, "paraboloid hiperbolic"



$x_1^2 - 2x_3 = 0$, "cilindru parabolic"



Geometrie -Poziția unei drepte față de o hipercuadrică

Cuadrice de tip (A)

- $r = p = 3: \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0;$
- $r = 3, p = 2: \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0;$
- $r = 2, p = 2: \ x_1^2 + x_2^2 = 0;$
- $r = 2, p = 1: \ x_1^2 - x_2^2 = 0;$
- $r = 1: \ x_1^2 = 0.$

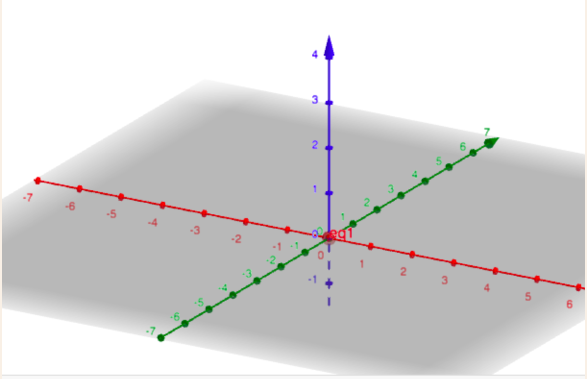
Cuadrice de tip (B)

- $r = p = 3: \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0;$
- $r = 3, p = 2: \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0;$
- $r = 3, p = 1: \ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0;$
- $r = 2, p = 2: \ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
- $r = 2, p = 1: \ x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0;$
- $r = p = 1: \ x_1^2 - 1 = 0.$

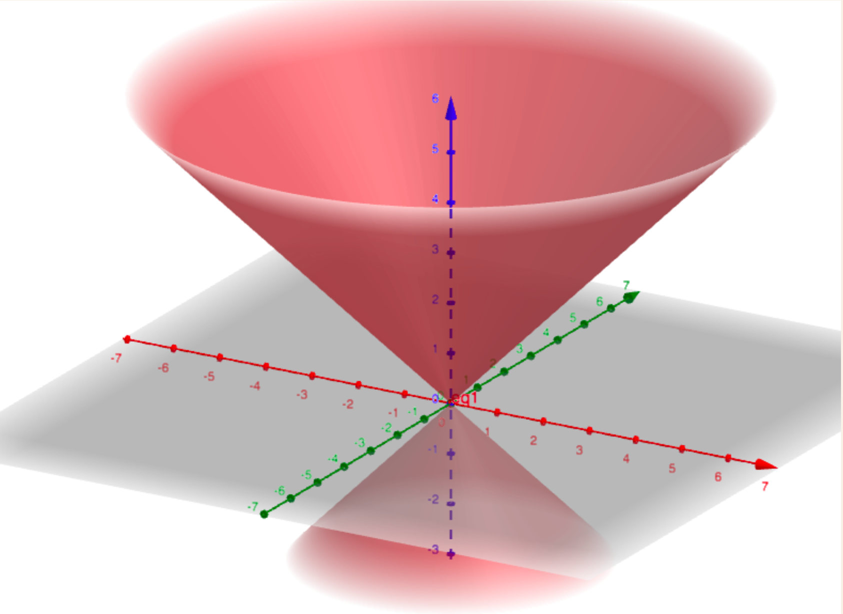
Cuadrice de tip (C)

- $r = 2, p = 2: \; x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0;$
- $r = 2, p = 1: \; x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0;$
- $r = 1: \; x_1^2 - 2x_2 = 0.$

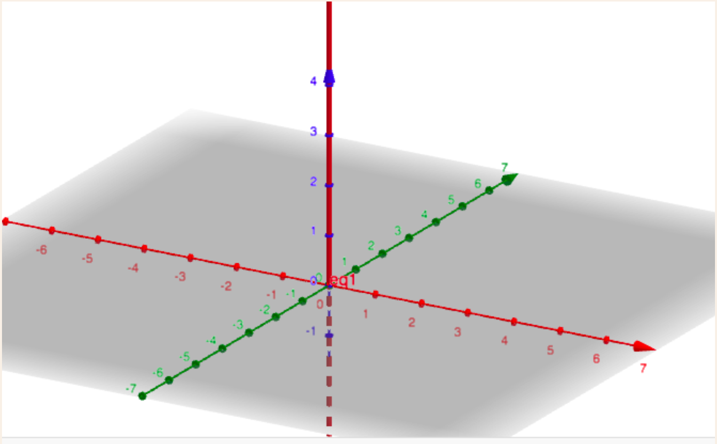
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, "punctul dublu"



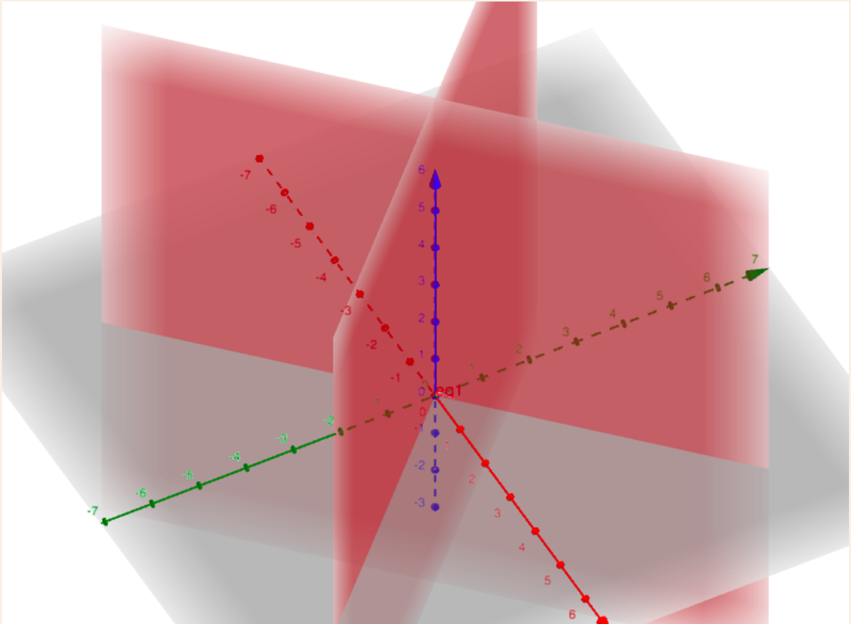
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, "con"



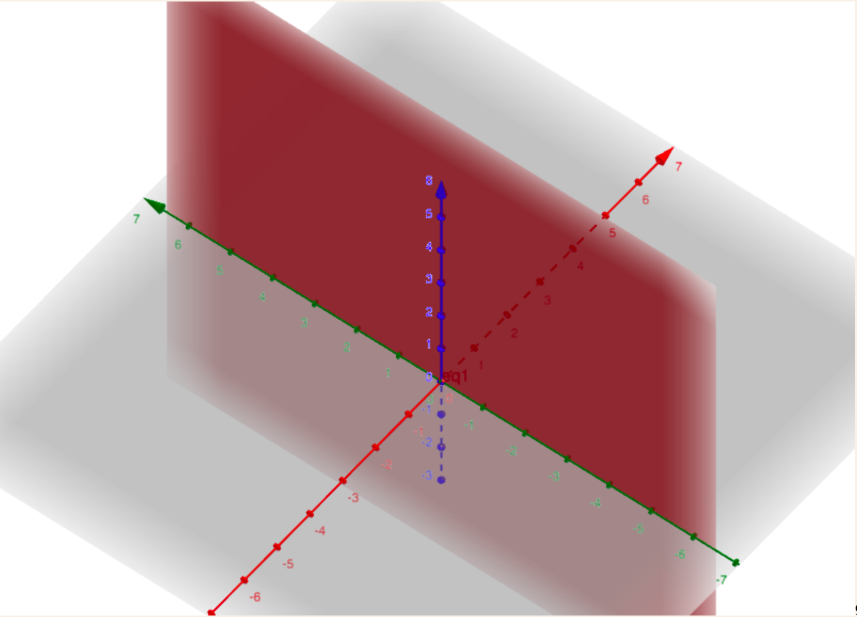
$x_1^2 + x_2^2 = 0$, 'dreapta dublă"



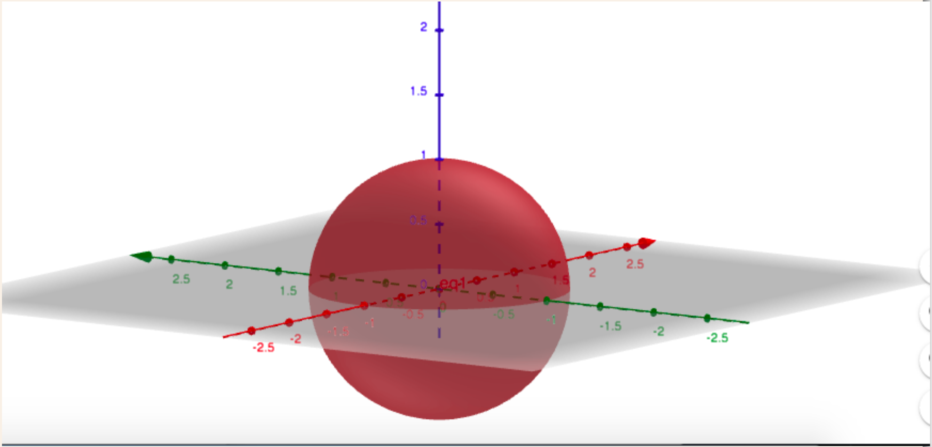
$x_1^2 - x_2^2 = 0$, ‘pereche de plane secante”



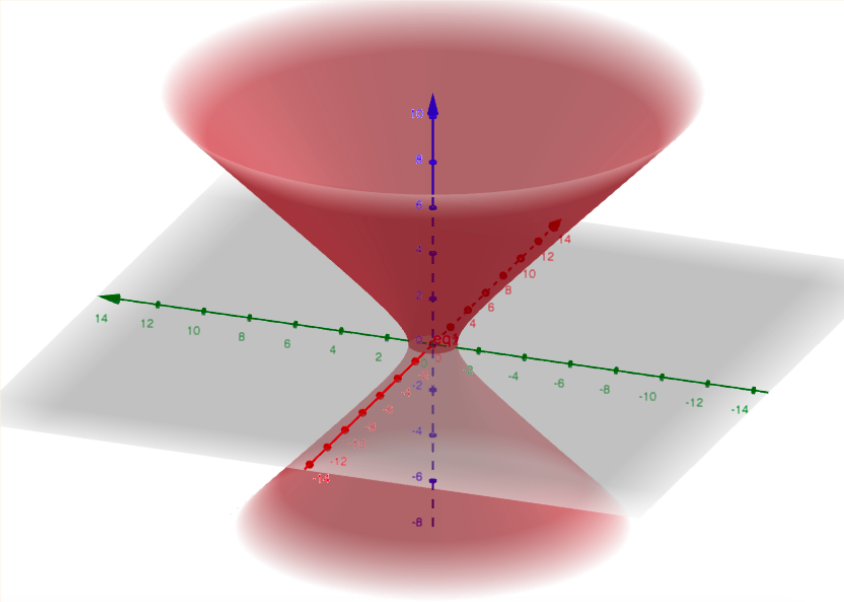
$x_1^2 = 0$, ‘plan dublu”



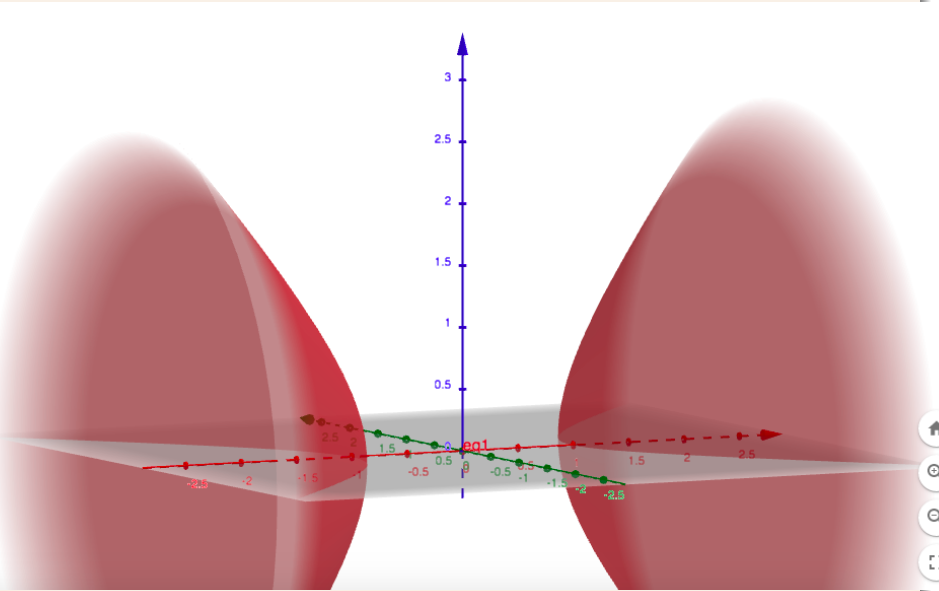
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$, "elipsoid"



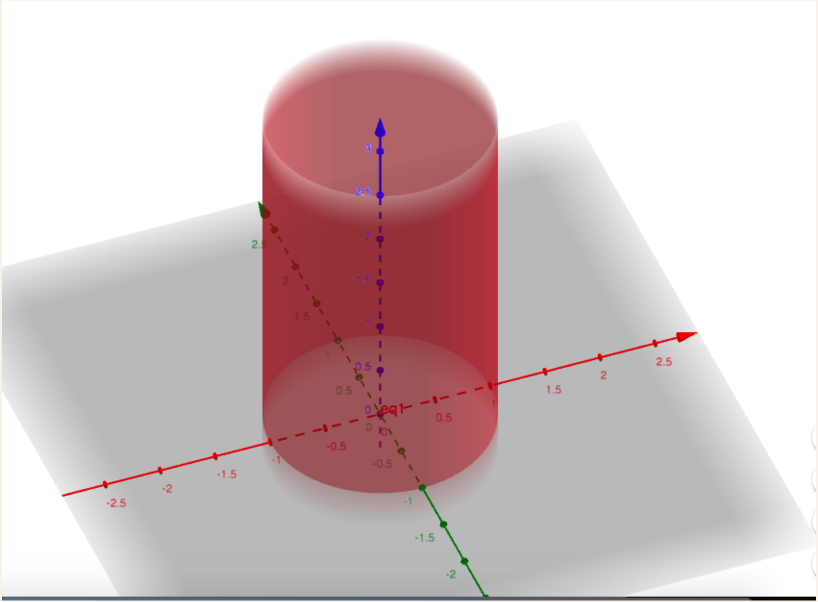
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$, "hiperboloid cu o pânză"



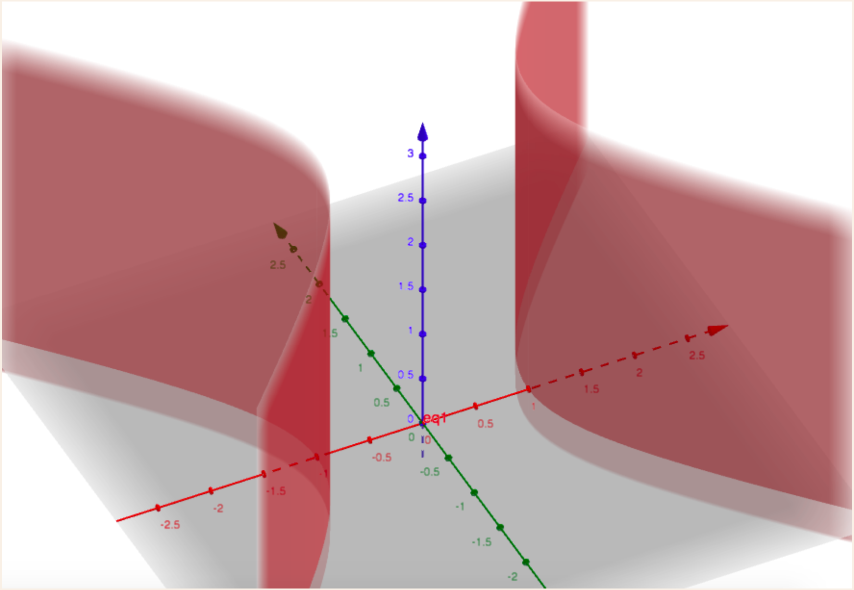
$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$, "hiperboloid cu două pânze"



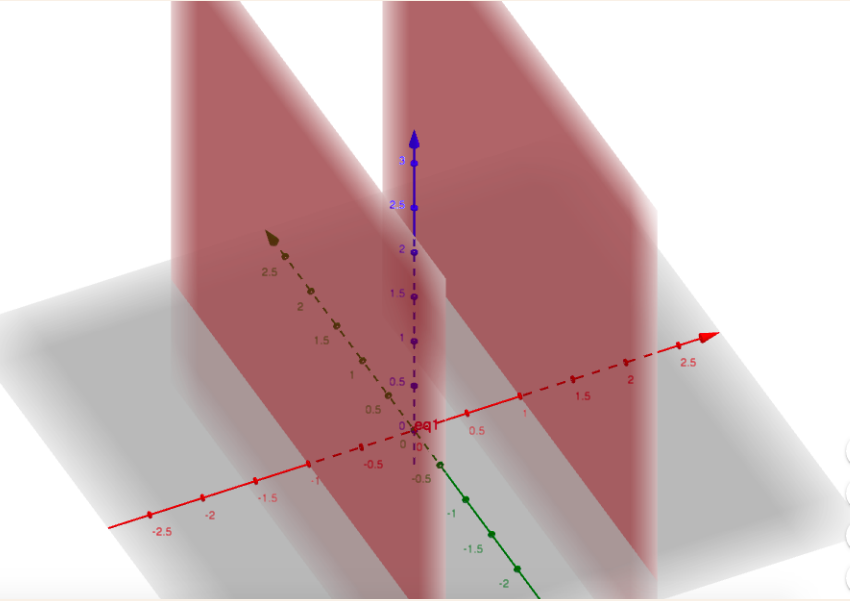
$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, "cilindru eliptic"



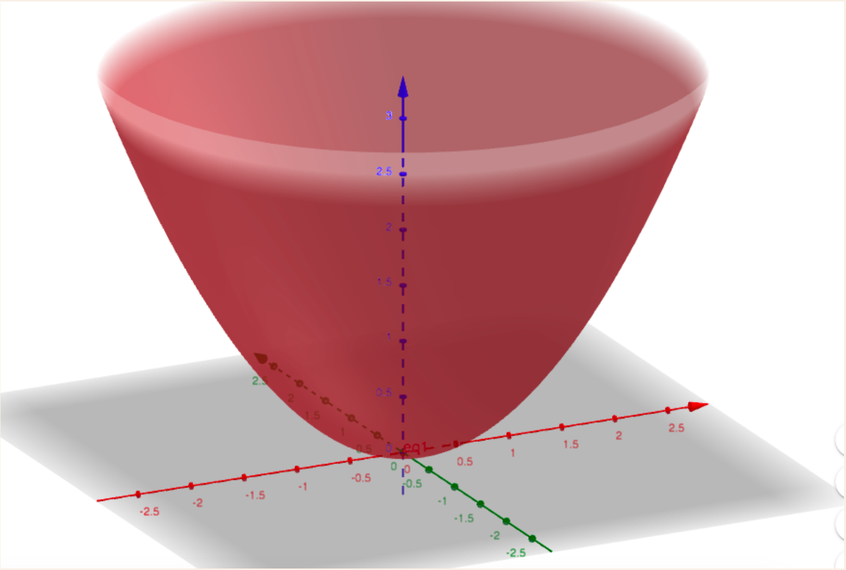
$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$, “cilindru hiperbolic”



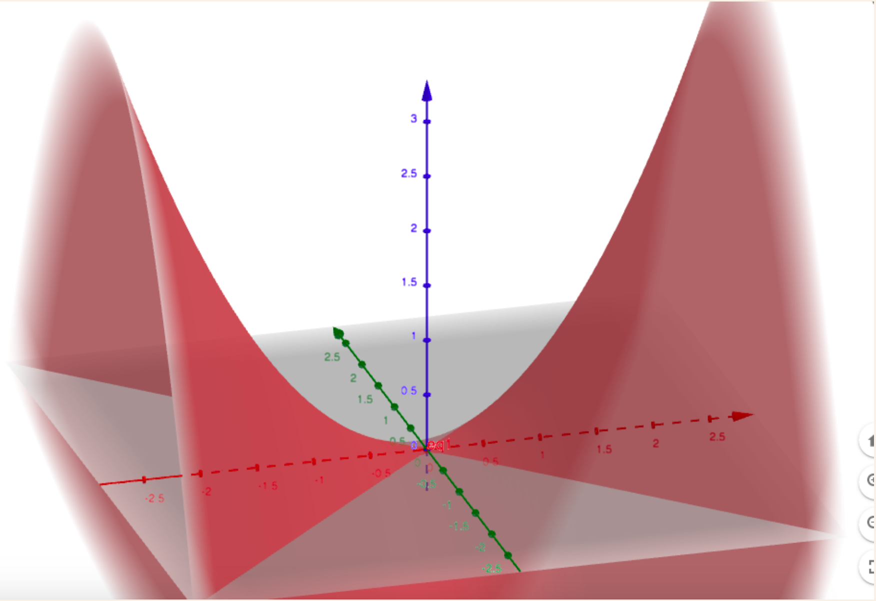
$x_1^2 - 1 = 0$, "pereche de plane paralele"



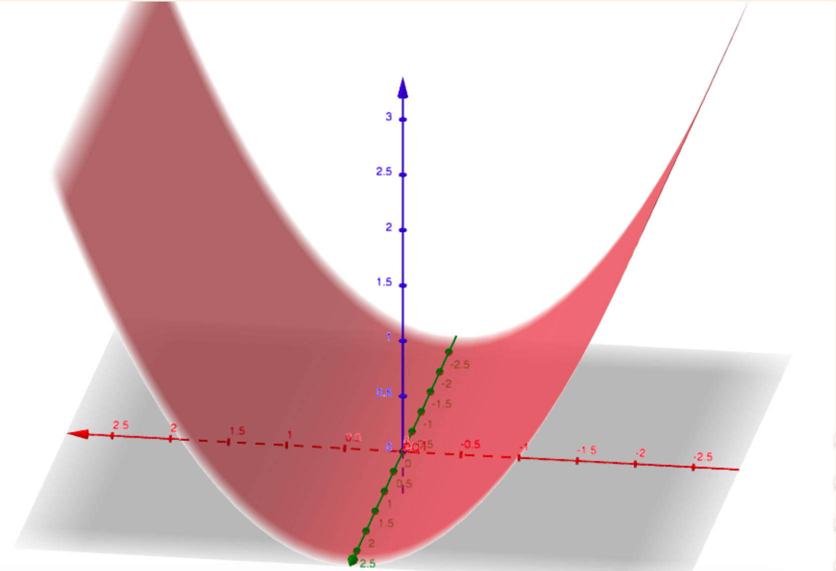
$x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$, "paraboloid eliptic"



$x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$, "paraboloid hiperbolic"



$x_1^2 - 2x_2 = 0$, “cilindru parabolic”



Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin raportat la un reper cartezian $\mathcal{R}$ și fie $\mathcal{Q}$ o hipercuadrică de ecuație $q(X) = 0$ unde $q(X) = X^t AX + 2BX + c$. Un punct X_0 se numește *centru* pentru $\mathcal{Q}$ dacă

$$q(X_0 + X) = q(X_0 - X), \forall X$$

Propoziție

Ecuația centrelor este $X_0^t A + B = 0$ (sau, echivalent, $AX_0 + B^t = 0$).

Demonstrație

Observație utilă. *Dacă* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ *este o matrice simetrică, atunci pentru orice* $X, Y \in \mathrm{Mat}_{n,1}$ *avem* $X^t AY = Y^t AX$.

$(X_0 + X)^t A(X_0 + X) + 2B(X_0 + X) + c = (X_0 - X)^t A(X_0 - X) + 2B(X_0 - X) + c$ $\Leftrightarrow 2X_0^t AX + 2BX = -2X_0^t AX - 2BX \Leftrightarrow (X_0^t A + B)X = 0$. Dar, cum aceasta are loc pentru orice X, deducem $X_0^t A + B = 0$.

Exemple

- Elipsa: $x_1^2 + x_2^2 - 10$. Deoarece $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = (0,0)$, ecuația centrelor este $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ Deducem că elipsa are centru unic, $O = (0,0)$.
- Parabola: $x_1^2 - 2x_2 = 0$. Deoarece $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = (0,-1)$, ecuația centrelor este $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$ Deducem că parabola nu are centre.
- Perechea de plane secante: $x_1^2 - x_2^2 = 0$. Deoarece $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = (0,0,0)$, ecuația centrelor este $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Deducem că perechea de plane secante are o dreaptă de centre, $d = \{(0,0,t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin raportat la un reper cartezian $\mathcal{R}$ și fie $\mathcal{Q}$ o hipercuadrică de ecuație

$$X^t AX + 2BX + c = 0.$$

Fie (d) o dreaptă ce trece printr-un punct $X_0 \in \mathcal{A}$ și are direcția V, deci de ecuație parametrică

$$(d): \ X = X_0 + tV.$$

Ecuația intersecției $\mathcal{Q} \cap d$ este deci

$$(X_0 + tV)^t A(X_0 + tV) + 2B(X_0 + tV) + c = 0$$

adică

$$(*) \quad \left(V^t AV\right) t^2 + 2\left((X_0^t A + B)V\right) t + \left(X_0^t AX_0 + 2BX_0 + c\right) = 0$$

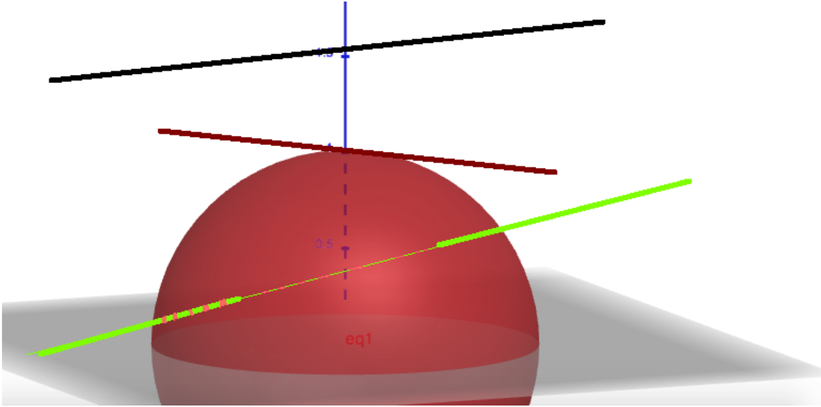
Distingem două cazuri:
a) $V^t AV \neq 0$; în acest caz ecuația $*$ este de gradul al doilea;
b) $V^t AV = 0$; în acest caz spunem că direcția V este *direcție asimptotică* pentru $\mathcal{Q}$. Ecuația $*$ devine o ecuație de grad cel mult 1.

Cazul direcțiilor neasimptotice. Ecuația intersecției era:

$$(*) \quad \left(V^tAV\right)t^2 + 2\left((X_0^tA + B)V\right)t + \left(X_0^tAX_0 + 2BX_0 + c\right) = 0$$

Deducem că sunt posibile trei cazuri:

- Ecuația $*$ nu are nici o soluție în corpul K. Spunem în acest caz că dreapta este *exterioară* hipercuadricei;
- Ecuația $*$ are două soluții distincte; spunem în acest caz că dreapta este *secantă* hipercuadricei (sau *bisecantă*);
- Ecuația $*$ are două soluții confundate; spunem în acest caz că dreapta este *tangentă* hipercuadricei, sau că dreapta are un *contact de ordin doi* cu hipercuadrica.

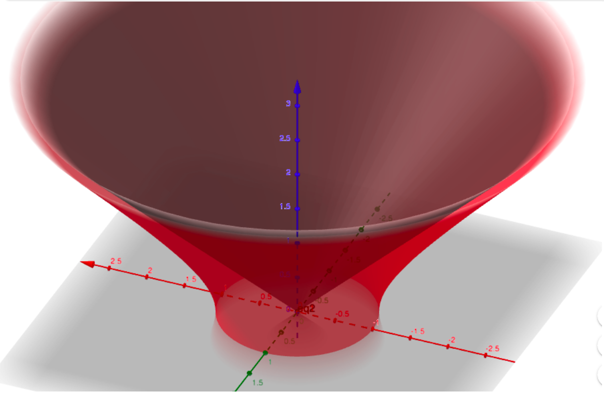


Exemple de poziții relative ale unei drepte față de un elipsoid: cu negru, o dreaptă exterioară, cu roșu o dreaptă tangentă iar cu verde (sau albastru) o (bi)secantă.

Cazul direcțiilor asimptotice.

Definiție

Pentru o hipercuadrică $\mathcal{Q}$ de ecuație $X^tAX + 2BX + c = 0$, mulțimea direcțiilor asimptotice se numește *conul asimptot*. Cu alte cuvinte, conul asimptot este $\{V | V^tAV = 0\}$.



Cu negru, conul asimptot $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ la hiperboloidul cu o pânză $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$

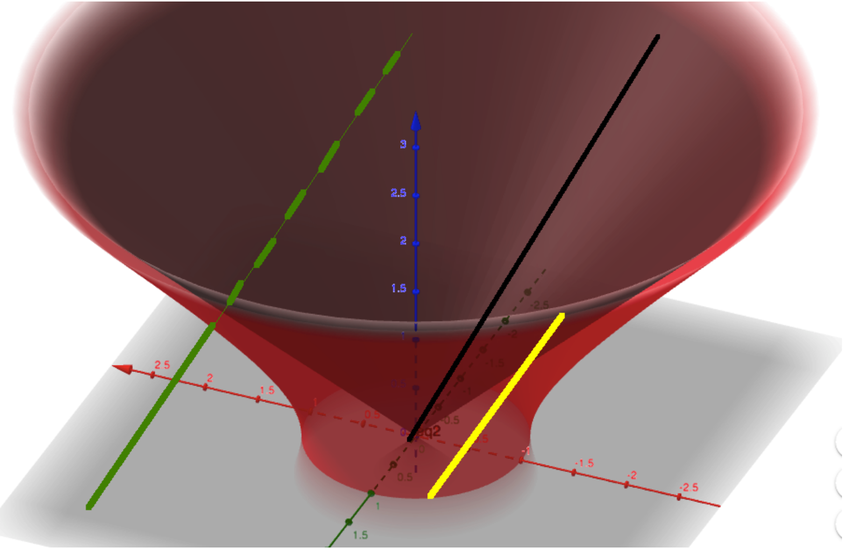
Cazul direcțiilor asimptotice.
Ecuația intersecției devine:

$$(**)\ \ 2\left((X_0^tA+B)V\right)t+\left(X_0^tAX_0+2BX_0+c\right)=0$$

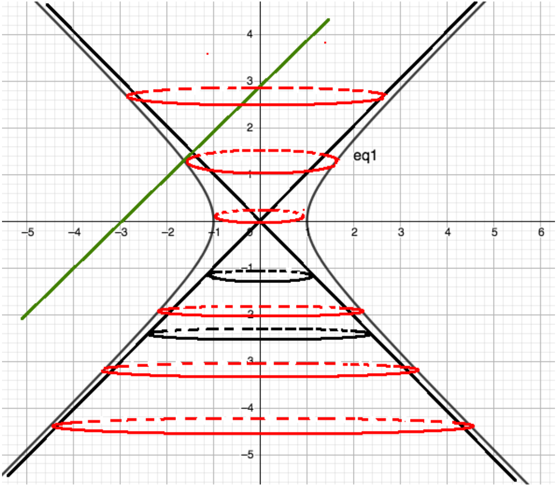
ca atare, avem cazurile:

- ecuația (**) are o soluție unică: spunem în acest caz că dreapta este *secantă* (de direcție asimptotică);
- ecuația (**) nu are soluții(i.e. $(X_0^tA+B)V=0$ dar $X_0^tAX_0+2BX_0+c\neq 0$) spunem în acest caz că dreapta este *exterioară* (de direcție asimptotică);
- ecuația (**) are drept soluții toate elementele lui K (i.e. $(X_0^tA+B)V=0$ și $X_0^tAX_0+2BX_0+c=0$). În acest caz, dreapta este inclusă în $\mathcal{Q}$ și se mai numește *generatoare* pentru $\mathcal{Q}$.

Definiție *O dreaptă d se numește* asimptotă *pentru hipercuadrica $\mathcal{Q}$ dacă are direcție asimptotică și trece printr-un centru al lui $\mathcal{Q}$.*



Exemple de poziții relative ale unei drepte de direcție asimptotică față de un hiperboloid cu o pânză: cu negru, o dreaptă exterioară (chiar asimptotă!), cu verde o secantă, iar cu galben o generatoare.



Exemple de poziții relative ale unei drepte de direcție asimptotică față de un hiperboloid cu o pânză: cu negru, asimptote, iar cu verde o secantă,.

Exemple de generatoare

- Pentru cilindrul eliptic $x_1^2 + x_2^2 = 1$ conul asimptot este dreapta dublă $x_1^2 + x_2^2 = 0$ și pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat, dreapta de ecuații:

$$(d_\alpha) : \begin{cases} x_1 = \cos(\alpha) \\ x_2 = \sin(\alpha) \\ x_3 = t \ (t \in K) \end{cases}$$

este inclusă în cilindru.

- Pentru hiperboloidul cu o pânză $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$, pentru orice $\lambda \in R^*$ dreapta

$$(d_\lambda) : \begin{cases} x_1 - x_3 = \lambda(1 - x_2) \\ x_1 + x_3 = \frac{1}{\lambda}(1 + x_2) \end{cases}$$

este inclusă în hiperboloid.

Exercițiu

Pentru fiecare cuadrică studiată, decideți dacă ea conține drepte, și, în caz afirmativ, determinați-le pe toate.

Definiție

Fie $\mathcal{Q}$ o hipercuadrică și $P_0 \in \mathcal{Q}$. Reuniunea tuturor dreptelor ce trec prin P_0 și sunt tangente sau sunt generatoare pentru $\mathcal{Q}$ numește *spațiul tangent* in P_0 la $\mathcal{Q}$ și se notează $T_{P_0}(\mathcal{Q})$.

Ecuația spațiului tangent. Fie d o dreaptă arbitrară prin $P_0(X_0)$, $(d): \ X = X_0 + tV$. Ecuația intersecției era:
$(*)\ \ (V^tAV)\,t^2 + 2\left((X_0^tA + B)V\right)t + (X_0^tAX_0 + 2BX_0 + c) = 0$. Dar $X_0^tAX_0 + 2BX_0 + c = 0$ pentru că $P_0 \in \mathcal{Q}$. Deci ecuația devine

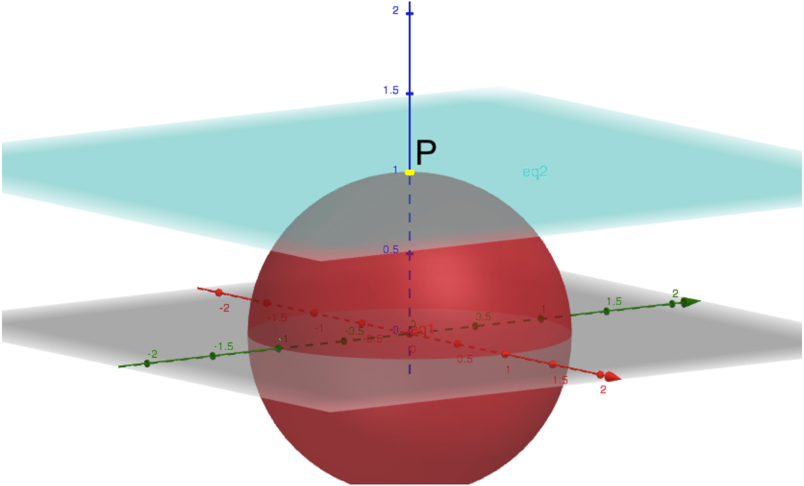
$$\left(V^tAV\right)t^2 + 2\left((X_0^tA + B)V\right)t = 0.$$

Dacă cerem ca această ecuație să admită o soluție dublă, (sau, în cazul $V =$ direcție asimptotică, ca dreapta să fie generatoare) avem că trebuie să aibă loc $(X_0^tA + B)V = 0$. Aceasta este echivalent cu
$(X_0^tA + B)(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X_0^tAX + BX - (X_0^tAX_0 + BX_0)$. Dar $X_0^tAX_0 + BX_0 = -BX_0 - c$ deci **ecuația spațiului tangent** este

$$\boxed{T_{P_0}(\mathcal{Q}): \ \ X_0^tAX + B(X + X_0) + c = 0}$$

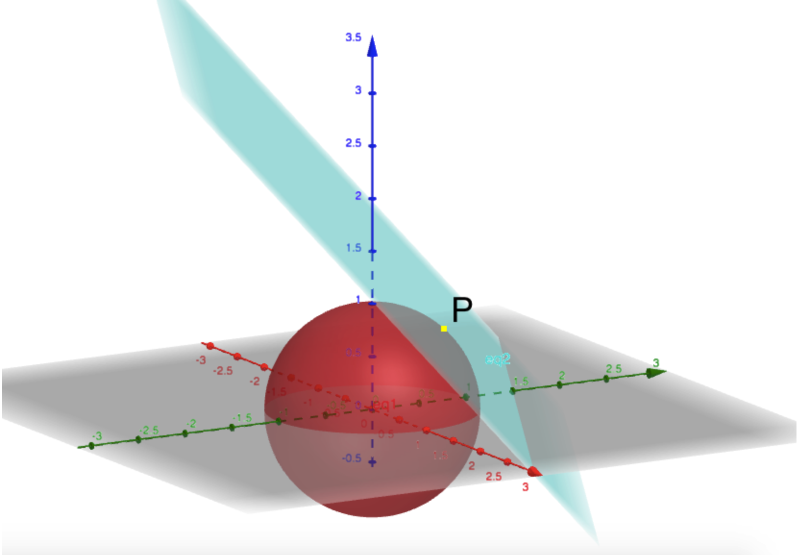
Cu alte cuvinte, dacă F este forma biafină din care provine ecuația lui $\mathcal{Q}$, spațiul tangent in P_0 este dat de $F(P, P_0) = 0$.

Exemplu 1: fie $(\mathcal{E}): \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ și $P = (0, 0, 1)$. Ecuația planului tangent în P la $\mathcal{E}$ este $T_P(\mathcal{E}) : x_3 - 1 = 0$.



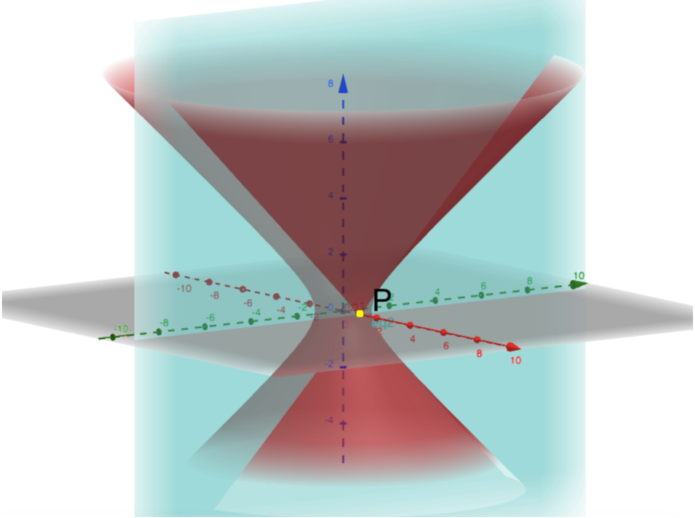
În figură, cu verde=planul tangent.

Exemplu 2: fie $(\mathcal{E}): \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ și $P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Ecuația planului tangent în P la $\mathcal{E}$ este $T_P(\mathcal{E}) : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$.



În figură, cu verde=planul tangent.

Exemplu 3: fie $(\mathcal{H}): \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ și $P = (1, 0, 0)$. Ecuația planului tangent în P la $\mathcal{H}$ este $T_P(\mathcal{H}) : x_1 - 1 = 0$.



În figură, cu verde=planul tangent. Se observă cum în acest caz planul tangent intersectează hiperboloidul (de-a lungul a două drepte generatoare).

Dacă $P_0 \in \mathcal{Q}$ este un punct care este în același timp și centru al lui $\mathcal{Q}$, atunci ecuația spațiului tangent devine $0 = 0$, deci *orice dreaptă prin P_0 este tangentă*! Aceasta contravine intuiției, deci vom spune:

Puncte netede, puncte singulare

Un punct al unei hipercuadrice $\mathcal{Q}$ se numește *singular* dacă este și centru al hipercuadricei; în caz contrar, vom spune că punctul este *neted* sau *regulat*.

Exemple

- Elipsoidul și hiperboloidul cu o pânză au toate punctele netede. Într-adevăr, deși au centre (unice!) aceste centre nu sunt situate pe ele.
- Conul $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ are un punct singular, $(0, 0, 0)$;
- Mulțimea punctelor singulare ale perechii de plane secante $x_1^2 - x_2^2$ formează o dreaptă, mai precis dreapta de intersecție a celor două plane,
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Remarcă

Ecuația spațiului tangent la o hipercuadrică $\mathcal{Q}$ de ecuație $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ într-un punct $P(a_1, \dots, a_n)$ se mai poate scrie įs sub forma

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(P)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(P)(x_n - a_n) = 0.$$

Cu această remarcă, vedem că un punct P este punct singular dacă și numai dacă

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(P) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) = 0.$$

Definiție

O hipercuadrică se numește *netedă* dacă nu are puncte singulare.

Geometrie - Hipercuadrice în spații euclidiene

Dacă într-un spațiu euclidian facem o schimbare afină de coordonate generală, i.e. care nu este izometrie, aceasta va "distorsiona" aspectul obiectelor geometrice. Am văzut că putem aduce ecuația oricărei hipercuadrice la forma cea mai simplă ("formă canonică" sau chiar 'formă normală") prin schimbări afine de coordonate. Dar schimbările care se fac pentru aceasta sunt de tipul

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_j = x_j, j \geq 2 \end{cases}$$

Matricea unei astfel de schimbări afine de coordonate este

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Schimbarea aceasta de coordonate este izometrică dacă și numai dacă $U \cdot U^t = \mathbb{I}_n$; dar, din forma lui U, acesta implică $1 = 1 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, deci *schimbarea este izometrică dacă și numai dacă toți $a_i = 0$, i.e. dacă.... NU FACEM nici o schimbare, de fapt!*

Problemă. Putem aduce ecuația unei hipercuadrice la formă canonică prin izometrii?

Teoremă

Într-un spațiu afin euclidian $\mathcal{E}$, ecuația oricărei hipercuadrice $\mathcal{Q}$ se poate aduce la formă canonică prin schimbări izometrice de coordonate. În plus, forma canonică este unică, i.e. nu depinde de reperul ortonormat canonic ales.

Teoremă

Într-un spațiu afin euclidian $\mathcal{E}$, ecuația oricărei hipercuadrice $\mathcal{Q}$ se poate aduce la formă canonică prin schimbări izometrice de coordonate. În plus, forma canonică este unică, i.e. nu depinde de reperul ortonormat canonic ales.

Lemă

Fie $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ cu $a_1^2 + \cdots + a_m^2 = 1$. Atunci există o matrice ortogonală U ce are prima linie egală cu $(a_1, \ldots, a_m)$.

Teoremă

Într-un spațiu afin euclidian $\mathcal{E}$, ecuația oricărei hipercuadrice $\mathcal{Q}$ se poate aduce la formă canonică prin schimbări izometrice de coordonate. În plus, forma canonică este unică, i.e. nu depinde de reperul ortonormat canonic ales.

Lemă

Fie $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ cu $a_1^2 + \cdots + a_m^2 = 1$. Atunci există o matrice ortogonală U ce are prima linie egală cu $(a_1, \ldots, a_m)$.

Demonstrație.

Vectorul $v_1 := (a_1, \ldots, a_m)$ este nenul; putem găsi (de exemplu, printre vectorii bazei canonice) vectorii $v_2, \ldots v_m$ astfel încât $\{v_1, \ldots, v_m\}$ să fie o bază pentru $\mathbb{R}^m$. Aplicând Gram-Schmidt acestui sistem, ne va rezulta o bază ortonormată $\{f_1 \ldots, f_m\}$ deci matricea $A = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_m \end{pmatrix}$ este ortogonală. Dar $f_1 = v_1$ deoarece $||v_1|| = 1$ din ipoteză.

Demonstrația teoremei.

Pasul 1: aducerea formei pătratice vectoriale la formă canonică. Fie $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1,..,n})$ un reper cartezian ortonormat al lui $\mathcal{E}$ și fie $X^t AX + 2BX + c = 0$ ecuația lui $\mathcal{Q}$ în raport cu $\mathcal{R}$. Cum $A =$ simetrică, știm că există o bază ortonormată $\{f_i\}_{i=1,.,n}$ în raport cu care matricea A se diagonalizează, i.e. $A = U^{-1}\Delta U$ cu $\Delta = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (unde U=matricea de schimbare de bază). În raport cu reperul $\mathcal{R}_1 = (O, \{f_i\}_{i=1,..,n})$ ecuația lui $\mathcal{Q}$ este de forma $X^t A' X + 2B'X + c' = 0$; dar $A = U^t A' U$ iar cum U este matrice ortogonală, avem $U^t = U^{-1}$, deci $A' = \Delta$; deci ecuația lui $\mathcal{Q}$ în raport cu $\mathcal{R}'$ are partea pătratică în formă canonică.

Continuarea demonstrației teoremei. Am ajuns deci la un reper ortonormat $\mathcal{R}'$ în care ecuația lui $\mathcal{Q}$ e de forma
$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2b_1 x_1 + \cdots + 2b_n x_n + c = 0$ (cu $\lambda_1 \ldots, \lambda_r \neq 0$)
Pasul 2. Acest pas este identic cu cel de la cazul afin, deoarece translațiile sunt izometrii, deci putem presupune în continuare că $b_1 = \cdots = b_r = 0$.
Pasul 3. Am ajuns astfel fie la formă canonică de tip (A) sau (B) , fie la o formă de genul $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2b_{r+1} x_{r+1} + \cdots + 2b_n x_n + c = 0$. În acest caz, notăm $\varrho := \sqrt{b_{r+1}^2 + \cdots + b_n^2}$ și respectiv $a_j := \frac{b_j}{\varrho}, j = r+1, \ldots, n$. Aplicând lema pentru $(a_{r+1}, \ldots, a_n)$, găsim că putem efectua o schimbare izometrică de reper astfel încât ecuația lui $\mathcal{Q}$ devine $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2\varrho x_{r+1} = 0$.

Exercțiu. *Demonstrați unicitatea formei canonice prin izometrii.*

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian de dimensiune n raportat la un reper ortonormat.

Transformări care păstrează aria/volumul

Un izomorfism afin $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ păstrează aria/volumul dacă și numai dacă are expresia în coordonate: $\tau(X) = AX + B$ cu $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ astfel încât $det(A) = \pm 1$.

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian de dimensiune n raportat la un reper ortonormat.

Transformări care păstrează aria/volumul

Un izomorfism afin $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ păstrează aria/volumul dacă și numai dacă are expresia în coordonate: $\tau(X) = AX + B$ cu $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ astfel încât $det(A) = \pm 1$.

Demonstrație pentru $n = 2$ (arii)

Cum translațiile sunt izometrii (deci automat păstrează aria), putem să ne reducem la cazul transformărilor de forma $\tau(X) = AX$ cu A de forma $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Reamintim că dacă $B_1 = (a, b), B_2 = (c, d)$ sunt puncte, atunci aria triunghiului $\Delta(B_1OB_2)$ este $\mathcal{S}_{\Delta(B_1OB_2)} = \frac{1}{2}|\det(A)|$
Notând $A_1 := (1, 0), A_2 := (0, 1)$ avem $\tau(O) = O, \tau(A_1) = B_1, \tau(A_2) = B_2$. Dar $\mathcal{S}_{\Delta(A_1OA_2)} = \frac{1}{2}$ iar $\mathcal{S}_{\Delta(B_1OB_2)} = \frac{1}{2}|det(A)|$ deci $\mathcal{S}_{\Delta(B_1OB_2)} = \mathcal{S}_{\Delta(A_1OA_2)}$ dacă și numai dacă $|det(A)| = 1$.

Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian de dimensiune n raportat la un reper ortonormat.

Transformări care păstrează aria/volumul

Un izomorfism afin $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ păstrează aria/volumul dacă și numai dacă are expresia în coordonate: $\tau(X) = AX + B$ cu $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ astfel încât $det(A) = \pm 1$.

Demonstrație pentru $n = 2$ (arii)

Cum translațiile sunt izometrii (deci automat păstrează aria), putem să ne reducem la cazul transformărilor de forma $\tau(X) = AX$ cu A de forma $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Reamintim că dacă $B_1 = (a, b), B_2 = (c, d)$ sunt puncte, atunci aria triunghiului $\Delta(B_1OB_2)$ este $\mathcal{S}_{\Delta(B_1OB_2)} = \frac{1}{2}|\det(A)|$
Notând $A_1 := (1, 0), A_2 := (0, 1)$ avem $\tau(O) = O, \tau(A_1) = B_1, \tau(A_2) = B_2$. Dar $\mathcal{S}_{\Delta(A_1OA_2)} = \frac{1}{2}$ iar $\mathcal{S}_{\Delta(B_1OB_2)} = \frac{1}{2}|det(A)|$ deci $\mathcal{S}_{\Delta(B_1OB_2)} = \mathcal{S}_{\Delta(A_1OA_2)}$ dacă și numai dacă $|det(A)| = 1$.

Grupul special liniar

Mulțimea $S\ell(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | det(A) = 1\}$ formează un grup în raport cu înmulțirea matricelor.

Fixăm $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian de dimensiune n raportat la un reper cartezian ortonormat.

Transformări care păstrează unghiurile

O transformare afină bijectivă τ se numește *conformă* dacă păstrează unghiurile, i.e. pentru orice $A, B, C \in \mathcal{E}$ avem $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ (cu $A' := \tau(A), B' = \tau(B), C' = \tau(C)$). Evident, aceasta este echivalent cu faptul că urma sa vectorială f păstrează unghiurile: $\widehat{u, v} = \widehat{f(u), f(v)}, \forall u, v \in V^*$.

Fixăm $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian de dimensiune n raportat la un reper cartezian ortonormat.

Transformări care păstrează unghiurile

O transformare afină bijectivă τ se numește *conformă* dacă păstrează unghiurile, i.e. pentru orice $A, B, C \in \mathcal{E}$ avem $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ (cu $A' := \tau(A), B' = \tau(B), C' = \tau(C)$). Evident, aceasta este echivalent cu faptul că urma sa vectorială f păstrează unghiurile: $\widehat{u, v} = \widehat{f(u), f(v)}, \forall u, v \in V^*$.

Caracterizarea aplicațiilor conforme

Fie $(V, <,>)$ un spațiu euclidian. O aplicație liniară bijectivă $f : V \to V$ e conformă dacă și numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}^*$ și o aplicație ortogonală $T : V \to V$ astfel încât $f = \lambda T$.

Demonstrație

Exercițiu!

Corolar: transformările conforme ale planului vectorial euclidian

O transformare liniară $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(X)=AX$ e conformă dacă și numai dacă A este de una din formele: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ cu $a^2+b^2\neq 0$.

Corolar: transformările conforme ale planului vectorial euclidian

O transformare liniară $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(X) = AX$ e conformă dacă și numai dacă A este de una din formele: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ cu $a^2 + b^2 \neq 0$.

Demonstrație

"$\Leftarrow$". Fie A o matrice de una din formele de mai sus, pt simplitate prima formă.
Fie $\lambda := \sqrt{a^2 + b^2}$. Atunci $A = \lambda \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$ Cum
$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ există α astfel încât
$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Deci $A = \lambda R_\alpha$ unde R_α este matricea de rotație: $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Pentru cealaltă formă, procedând similar găsim $A = \lambda S_\alpha$ unde S_α este matricea de simetrie $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Recapitulare: grupuri remarcabile de transformări liniare reale

- Grupul general liniar $Gl(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | det(A) \neq 0\}$.

Recapitulare: grupuri remarcabile de transformări liniare reale

- Grupul general liniar $Gl(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | det(A) \neq 0\}$.
- Grupul special liniar $Sl(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | det(A) = 1\}$. Acesta este subgrup al lui $Gl(n, \mathbb{R})$ format din transformările care păstrează volumul și orientarea lui $\mathbb{R}^n$.

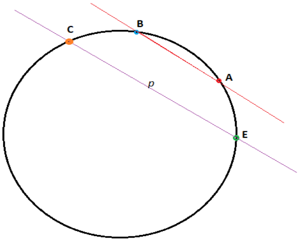
Recapitulare: grupuri remarcabile de transformări liniare reale

- Grupul general liniar $Gl(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | det(A) \neq 0\}$.
- Grupul special liniar $Sl(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | det(A) = 1\}$. Acesta este subgrup al lui $Gl(n, \mathbb{R})$ format din transformările care păstrează volumul și orientarea lui $\mathbb{R}^n$.
- Grupul special ortogonal $SO(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | A \cdot A^t = \mathbb{I}_n, det(A) = 1\}$. Acesta este subgrup a al lui $Gl(n, \mathbb{R})$ format din transformările care păstrează produsul scalar canonic și orientarea.

Recapitulare: grupuri remarcabile de transformări liniare reale

- Grupul general liniar $Gl(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | det(A) \neq 0\}$.
- Grupul special liniar $Sl(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | det(A) = 1\}$. Acesta este subgrup al lui $Gl(n, \mathbb{R})$ format din transformările care păstrează volumul și orientarea lui $\mathbb{R}^n$.
- Grupul special ortogonal $SO(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | A \cdot A^t = \mathbb{I}_n, det(A) = 1\}$. Acesta este subgrup a al lui $Gl(n, \mathbb{R})$ format din transformările care păstrează produsul scalar canonic și orientarea.
- Grupul conform $CO(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | A = \lambda \cdot A', A' \in SO(n, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Acesta este subgrup a al lui $Gl(n, \mathbb{R})$ format din transformările care păstrează unghiurile (în raport cu produsul scalar canonic) și orientarea lui $\mathbb{R}^n$.

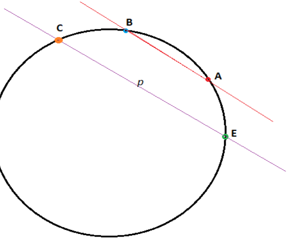
Legea grupală pe cercul $(\mathcal{C})$ $x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Fie A, B puncte de pe cerc. Ducem prin E paralela p la AB și fie $C =$al doilea punct de intersecție al lui p cu $\mathcal{C}$. Punem $C := A \star B$. Se verifică imediat că avem

$$\begin{cases} x_C = x_A x_B - y_A y_B \\ y_C = y_A x_B + y_B x_A \end{cases}$$

Legea grupală pe cercul $(\mathcal{C})$ $x^2 + y^2 - 1 = 0$.



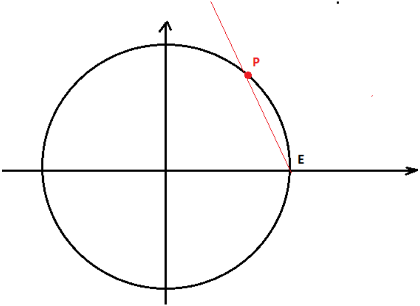
Fie A, B puncte de pe cerc. Ducem prin E paralela p la AB și fie C =al doilea punct de intersecție al lui p cu $\mathcal{C}$. Punem $C := A \star B$. Se verifică imediat că avem

$$\begin{cases} x_C = x_A x_B - y_A y_B \\ y_C = y_A x_B + y_B x_A \end{cases}$$

Izomorfism

Funcția $f : \mathcal{C} \to \mathbb{C}, f(P) = x_P + iy_P$ este un izomorfism între grupurile $(\mathcal{C}, \star)$ și $(U, \cdot)$ unde $U = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}$.

Descrierea punctelor raționale pe cercul $(\mathcal{C})\ x^2 + y^2 - 1 = 0.$



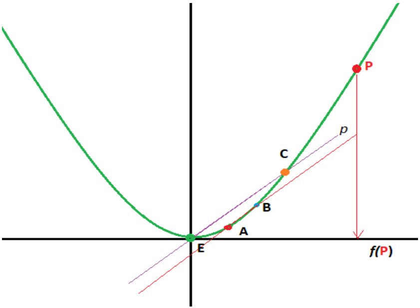
Fie t :=panta dreptei EP. Clar, $P \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dacă și numai dacă $t \in \mathbb{Q}$. Obținem descrierea mulțimii punctelor raționale $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$:

$$\mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \left\{ \left(\frac{t^2 - 1}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right) | t \in \mathbb{Q} \right\}$$

Soluțiile ecuației Pitagora: $x^2 + y^2 = z^2, x, y, z \in \mathbb{Z}$

$x = k(2mn), y = k(m^2 - n^2), z = k(m^2 + n^2)\ k, m, n \in \mathbb{Z}\}.$

Legea grupală pe parabola $(\mathcal{P})$ $y = x^2$



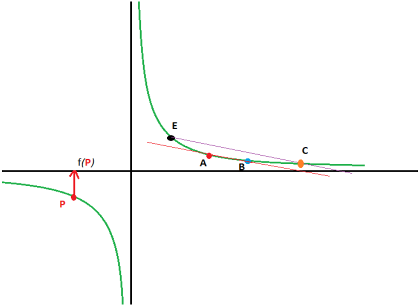
Fixăm $E = (0,0)$. Procedăm la fel ca la elipsă. Obținem:

$$\begin{cases} x_C = x_A + x_B \\ y_C = (x_A + x_B)^2 \end{cases}$$

Izomorfism

Funcția $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}, f(P) = x_P$ este un izomorfism între grupurile $(\mathcal{P}, \star)$și $(\mathbb{R}, +)$.

Legea grupală pe hiperbola $(\mathcal{H})\ y = \frac{1}{x}$



Fixăm $E = (1, 1)$. Procedăm la fel ca în cazurile anterioare. Obținem

$$\begin{cases} x_C = x_A x_B \\ y_C = y_A y_B \end{cases}$$

Izomorfism

Funcția $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^*, f(P) = x_P$ este un izomorfism între grupurile $(\mathcal{P}, \star)$și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Geometrie -Plane și spații proiective

Fie $\mathcal{X}$ o mulțime (ale cărei elemente le vom numi *puncte*) și $\mathcal{D}$ o familie de submulțimi (ale cărei elemente le vom numi *drepte*).

Definiție: Plan proiectiv

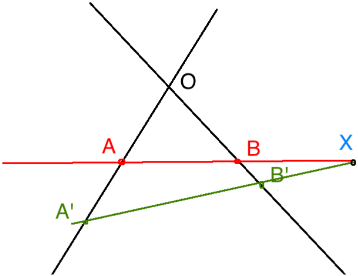
Perechea $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ se numește *plan proiectiv* dacă sunt satisfăcute axiomele:

- **P1.** Pentru orice două puncte distincte $A, B \in \mathcal{X}$ există și este unică o dreaptă $d \in \mathcal{D}$ ce le conține: $A, B \in d$. Vom nota această dreaptă în mod uzual, AB. Există trei puncte necoliniare.
- **P2.** Orice dreaptă din $\mathcal{D}$ conține *cel puțin trei puncte*.
- **P3.** Orice două drepte din $\mathcal{D}$ se intersectează, i.e. $\forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ avem $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$.

Definiție: Spațiu proiectiv

Perechea $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ se numește *spațiu proiectiv* dacă sunt satisfăcute axiomele **P1** și **P2** ale planului, dar în loc de **P3** avem:

- **S3.** Există două drepte din $\mathcal{D}$ care *NU* se intersectează, i.e. $\exists d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ avem $d_1 \cap d_2 = \emptyset$, și
- **S4** ("Axioma lui Veblen") Oricare ar fi dreptele $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ care se intersectează, $d_1 \cap d_2 = \{O\}$, și oricare ar fi $A, A' \in d_1 \setminus \{O\}$, $B, B' \in d_2 \setminus \{O\}$, atunci și dreptele AB respectiv $A'B'$ se intersectează, $AB \cap A'B' \neq \emptyset$.



Definiție: varietate liniară

Fie $\mathcal{X}$ un plan sau spațiu proiectiv. O submulțime $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ se numește *varietate liniară* dacă $\forall A, B \in \mathcal{X}', A \neq B$ avem că $AB \subset \mathcal{X}'$. De asemenea, mulțimea vidă sau mulțimile formate cu un singur punct se vor considera varietăți liniare.

Propoziție

Fie $\mathcal{X}$ un plan sau spațiu proiectiv și $\{\mathcal{X}'_i\}_{i\in I}$ o familie de varietăți liniare în $\mathcal{X}$. Atunci $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{X}'_i$ este o varietate liniară.

Definiție

Fie $\mathcal{X}$ un plan sau spațiu proiectiv și $S \subset \mathcal{X}$ o submulțime. Atunci mulțimea $< S >$ definită prin

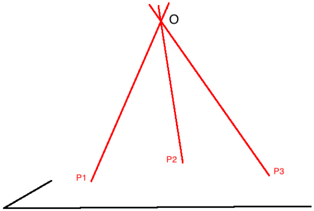
$$< S > := \bigcap_{\substack{\mathcal{X}' = var\ lin.,\\ S \subset \mathcal{X}'}} \mathcal{X}'$$

este o varietate liniară, care se numește *varietatea liniară generată de* S.

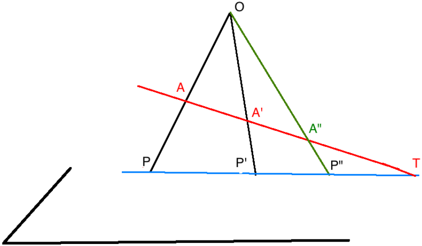
Teoremă

Fie $\mathcal{X}$ un plan sau spațiu proiectiv, $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$ o varietate liniară și $O \in \mathcal{X}$ un punct arbitrar. Atunci

$$< \mathcal{L} \cup \{O\} >= \bigcup_{P \in \mathcal{L}} OP.$$



E suficient să arătăm că $\mathcal{X}' := \bigcup_{P\in\mathcal{L}} OP$ este o varietate liniară. Fie $A, A' \in \mathcal{X}'$; arătăm că $AA' \subset \mathcal{X}'$, deci arătăm că pentru orice $A" \in AA'$ avem $A" \in \mathcal{X}'$. Deoarece $A, A' \in \mathcal{X}'$ avem că există $P, P' \in \mathcal{L}$ astfel încât $A \in OP, A' \in OP'$. Din **S4** deducem că există $T = AA' \cap PP'$ cum $P, P' \in \mathcal{L}$ iar $\mathcal{L}$ este varietate liniară avem că $PP' \subset L$, deci $T \in \mathcal{L}$. Aplicăm din nou **S4** dreptelor AA'' și OP' (care se intersectează în A') și punctelor $A", T \in AA'$, respectiv $O, P' \in OP'$; deducem $A"O \cap TP' \neq \emptyset$. Punând $\{P"\} := A"O \cap TP'$ deducem $P" \in PP'$ deci $P" \in \mathcal{L}$. Dar atunci $A" \in OP"$, ceea ce trebuia demonstrat.



Definiție

Fie $\mathcal{X}$ un plan sau spațiu proiectiv și $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$ o varietate liniară. O submulțime $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}$ se numește *sistem de generatori* pentru $\mathcal{L}$ dacă varietatea liniară generată de $\mathcal{G}$ este întregul $\mathcal{L}$,

$$< \mathcal{G} >= \mathcal{L}.$$

Un sistem de generatori $\mathcal{G}$ se numește *minimal* pentru $\mathcal{L}$ dacă $\forall P \in \mathcal{G}$ avem că $\mathcal{G} \setminus \{P\}$ nu mai este sistem de generatori, i.e. $< \mathcal{G} \setminus \{P\} >\neq \mathcal{L}$.

Teoremă

Cardinalul unui sistem de generatori minimal al lui $\mathcal{L}$ nu depinde de sistem. Când acest cardinal este finit, fie el m, definim *dimensiunea* lui $\mathcal{L}$ prin

$$dim(\mathcal{L}) := m - 1.$$

Exercițiu. Fie $\mathcal{L}$ o varietate liniară. Arătați că:
i) $dim(\mathcal{L}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathcal{L}$ constă dintr-un singur punct;
ii) $dim(\mathcal{L}) = 1$ dacă și numai dacă $\mathcal{L}$ este o dreaptă;
ii) $dim(\mathcal{L}) = 2$ dacă și numai dacă $\mathcal{L}$ este un plan proiectiv.

Fie V un spațiu vectorial peste corpul K, $dim_K(V) = n$. Definim o relație $\simeq$ pe $V \setminus \{0\}$ dată prin:

$$u \simeq v \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*, u = \lambda v.$$

Se verifică imediat că "$\simeq$" este o relație de echivalență. Vom nota $[v]$ =clasa unui vector v modulo $\simeq$.
Definim *proiectivizatul lui* V, $\mathbb{P}(V)$ prin

$$\mathbb{P}(V) := V \setminus \{0\}/ \simeq .$$

Cu alte cuvinte, $\mathbb{P}(V)$ mai poate fi descris și astfel:

$$\mathbb{P}(V) := \{V_1 | V_1 \subset V, V_1 = \text{subspațiu vectorial}, dim(V_1) = 1\}.$$

Mai general, dacă $U \subset V$ este un subpațiu vectorial nenul, notăm

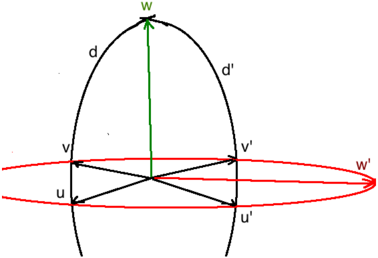
$$[U] := \{[u] | u \in U\}.$$

Evident, $\mathbb{P}(U)$ este proiectivizatul lui U văzut ca spațiu vectorial.
O *dreaptă* în $\mathbb{P}(V)$ este o submulțime de forma $d = [U]$ unde $U \subset V$ este subspațiu vectorial de dimensiune 2.
Cu alte cuvinte, mulțimea dreptelor din $\mathbb{P}(V)$ este $\mathcal{D}(\mathbb{P}(V))$ definită astfel

$$\mathcal{D}(\mathbb{P}(V)) := \{[U] | U \subset V, U = \text{subspațiu vectorial}, dim(U) = 2\}$$

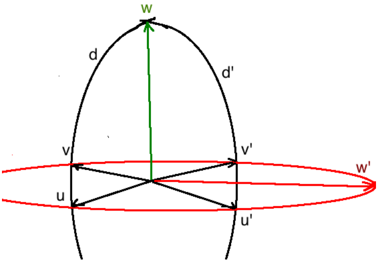
Teoremă. *Fie V un spațiu vectorial și $\mathbb{P}(V)$ =proiectivizatul său.*
a) Dacă $dim(V) = 3$ atunci $\mathbb{P}(V)$ este un plan proiectiv;
b) Dacă $dim(V) \geq 4$ atunci $\mathbb{P}(V)$ este un spațiu proiectiv.
Demonstrație. Arătăm doar b), punctul a) fiind lăsat ca exercițiu. Primele trei axiome, **P1**, **P2** și **S3** sunt imediate.
Într-adevăr, pentru **P1** fie $[u] \neq [v] \in \mathbb{P}(V)$ arbitrare. Atunci subspațiul vectorial $U =< \{u, v\} >$ este de dimensiune 2 iar dreapta generată de U conține punctele $[u]$ și $[v]$.
Pentru **P2** să alegem o dreaptă δ arbitrară corespunzătoare unui subspațiu vectorial U de dimensiune 2. Fie e_1, e_2 o bază a lui U; atunci punctele $[e_1], [e_2], [e_1 + e_2]$ din $\mathbb{P}(V)$ sunt distincte și aparțin dreptei δ.
Pentru **S3,** cum $dim(V) \geq 4$ putem alege patru vectori liniar independenti din V, e_1, e_2, e_3, e_4. Fie $U_1 =< \{e_1, e_2\} >$, $U_2 =< \{e_3, e_4\} >$ și δ_1, respectiv δ_2 dreptele proiective corespunzătoare. Să remarcăm că deoarece e_1, e_2, e_3, e_4 sunt independenți rezultă ca $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Dacă $\delta_1 \cap \delta_2 \neq \emptyset$, rezultă că există un vector nenul w astfel încât $[w] \in \delta_1 \cap \delta_2$; dar atunci $w \in U_1 \cap U_2$, contradicție.

Verificarea axiomei Veblen, S4.



Fie două drepte arbitrare d, d' concurente în punctul $O = [w]$. Fie punctele arbitrare distincte $[u], [v] \in d \setminus \{O\}$, $[u'], [v'] \in d \setminus \{O\}$. Arătăm că $[u][u'] \cap [v][v'] \neq \emptyset$, i.e. că există un vector **nenul** w' astfel încât $[w'] \in [u][u'] \cap [v][v']$.

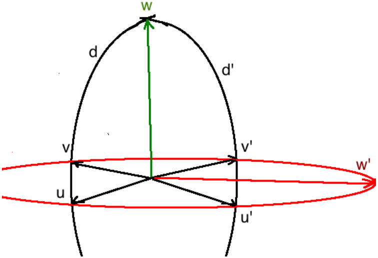
Verificarea axiomei Veblen, S4.



Fie două drepte arbitrare d, d' concurente în punctul $O = [w]$. Fie punctele arbitrare distincte $[u], [v] \in d \setminus \{O\}$, $[u'], [v'] \in d \setminus \{O\}$. Arătăm că $[u][u'] \cap [v][v'] \neq \emptyset$, i.e. că există un vector **nenul** w' astfel încât $[w'] \in [u][u'] \cap [v][v']$.

Deoarece $[u], [v]$ sunt distincte avem că $d = [U]$ unde U este subspațiul generat de u și v; analog $d' = [U']$ unde $U' =< u', v' >$. Din ipoteza $d \cap d' = \{[w]\}$ deducem că $w \in U \cap U'$ deci $dim(U \cap U') = 1$.

Verificarea axiomei Veblen, S4.



Fie două drepte arbitrare d, d' concurente în punctul $O = [w]$. Fie punctele arbitrare distincte $[u], [v] \in d \setminus \{O\}$, $[u'], [v'] \in d \setminus \{O\}$. Arătăm că $[u][u'] \cap [v][v'] \neq \emptyset$, i.e. că există un vector **nenul** w' astfel încât $[w'] \in [u][u'] \cap [v][v']$.

Deoarece $[u], [v]$ sunt distincte avem că $d = [U]$ unde U este subspațiul generat de u și v; analog $d' = [U']$ unde $U' =< u', v' >$. Din ipoteza $d \cap d' = \{[w]\}$ deducem că $w \in U \cap U'$ deci $dim(U \cap U') = 1$. Fie $W := U + U'$; din Grassmann, $dim(W) = 3$ pt ca $dim(U \cap U') = 1$. Fie $V_1 :=< u, u' >, V_2 =< v, v' >$; atunci $[V_1] =$ dreapta $[u][u']$ și $[V_2] = [v][v']$. Dar $V_1 + V_2 = W$ deci $dim(V_1 \cap V_2) = 4 - dim(W) = 1$ deci există un vector nenul $w' \in V_1 \cap V_2$, ceea ce trebuia demonstrat.

Completatul proiectiv. Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, de direcție spațiul vectorial V peste corpul K. Fie $\mathcal{D}_{af}$ = mulțimea dreptelor afine din $\mathcal{A}$. Relația de paralelism este o relație de echivalență pe $\mathcal{D}_{af}$, și vom nota

$$\mathcal{X}_\infty := \mathcal{D}_{af}/``||''$$

mulțimea claselor de echivalență. Elementele din $\mathcal{X}_\infty$ se vor numi *puncte improprii*, sau *puncte de la infinit*. Un element din $\mathcal{X}_\infty$ se va nota $\hat{d}$ și se va numi *punctul de la infinit* al dreptei d.
Vom nota

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \mathcal{X}_\infty;$$

punctele dn $\mathcal{A}$ se vor numi în continuare *puncte proprii*. Mulțimea $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ se va numi *completatul proiectiv al lui $\mathcal{A}$*.

Dreptele din completatul proiectiv.
Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, de direcție spațiul vectorial V peste corpul K și fie $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} =$ completatul său proiectiv. Definim *dreptele proiective* din $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ astfel.
1: Drepte proprii. Acestea vor fi toate submulțimile lui $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ de forma

$$\overline{d} := d \cup \{\hat{d}\}$$

unde $d \subset \mathcal{A}$ este o dreaptă afină. Vom mai spune și că $\overline{d}$ este *închiderea proiectivă* a lui d.
2: Drepte improprii (sau "drepte de la infinit"). Aceste drepte sunt toate submulțimile de forma $\hat{\pi}$ unde $\pi \subset \mathcal{A}$ este un plan afin, iar

$$\hat{\pi} := \{\hat{d} | d \subset \mathcal{A}, d = \text{ dreaptă afină}, d || \pi\}.$$

Recap: mulțimea dreptelor proiective $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ este

$$\mathcal{D} = \{\overline{d} | d \subset \mathcal{A}, d = \text{dreaptă afină}\} \cup \{\hat{\pi} | \pi \subset \mathcal{A}, \pi = \text{ plan afin}\}$$

Remarcă imediată, dar importantă: Dreptele improprii conțin doar puncte improprii!

Verificarea axiomelor pentru planul proiectiv. *Dacă $\mathcal{A}$ este un plan afin (i.e. dim$(\mathcal{A}) = 2$) atunci $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ este un plan proiectiv.*

P1. Fie $A \neq B \in \mathcal{X}$. Distingem cazurile:

- $A, B =$ puncte proprii. Pentru existență, fie d_{AB} =dreapta afină determinată de A și B;atunci $\overline{d}_{AB} = d_{AB} \cup \{\hat{d}_{AB}\}$ este o dreaptă proiectivă ce conține cele două puncte. Unicitatea: dacă $\delta \subset \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ este o dreaptă proiectivă ce conține punctele date, atunci δ este o dreaptă proprie. Atunci δ este de forma $\overline{d} = d \cup \{\hat{d}\}$; dar d fiind o dreaptă afină ce conține punctele, avem $d = d_{AB}$, Q.E.D.
- A =propriu, B =impropriu. Cum B este impropriu, el este de forma $\hat{d}$ cu $d \subset \mathcal{A}$ dreaptă afină. Fie $d' :=$ paralela la d dusă prin A. Atunci $\overline{d'}$ este o dreaptă proiectivă ce conține punctele date. Unicitatea rezultă din unicitatea paralelei d'.
- A și B=ambele improprii: exercițiu!

Verificarea axiomelor pentru planul proiectiv.

P2. Arătăm că *orice dreaptă proiectivă δ conține cel puțin trei puncte*. Distingem două cazuri:

- δ =dreaptă proprie. Atunci δ e de forma $\delta = \overline{d} = d \cup \{\hat{d}\}$ unde $d \subset \mathcal{A}$ este dreaptă afină. Cum d are descrierea parametrică $X = X_0 + tV$ cu $t \in K$, deducem că d are cel puțin două puncte - deoarece $1 \neq 0$ - deci δ conține cel puțin trei puncte.

- $\delta = d_\infty$, unica dreaptă improprie. Fie e_1, e_2 vectori liniar independenți din $dir(\mathcal{A})$ și fie $e_3 := e_1 + e_2$. Fie $d_i, i = 1, 2, 3$ drepte afine de direcții generate respectiv de $e_i, i = 1, 2, 3$. Atunci dreptele d_1, d_2, d_3 sunt neparalele două câte două, deci punctele lor de la infinit, $\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3$ sunt distincte.

P3. *Orice două drepte proiective δ_1, δ_2 se intersectează.*
Dacă δ_1, δ_2 sunt drepte proprii, atunci ele sunt de forma $\delta_1 = \overline{d_1}, \delta_2 = \overline{d_2}$ cu $d_1, d_2 \subset \mathcal{A}$=drepte afine. Atunci:
- dacă $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$ am terminat;
- dacă $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ atunci $d_1 || d_2$, deci $\hat{d}_1 = \hat{d}_2$, deci $\delta_1 \cap \delta_2 \neq \emptyset$.

Izomorfisme de spații proiective

Definiție. Fie $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ două plane sau spații proiective. O funcție $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ bijectivă se numește *izomorfism de spații proiective* dacă are loc:

$\forall A, B, C \in \mathcal{X}$ *avem că* A, B, C *sunt coliniare dacă și numai dacă* $f(A), f(B), f(C)$ *sunt coliniare.*

Definiție. Fie $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ două plane sau spații proiective. O funcție $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ bijectivă se numește *izomorfism de spații proiective* dacă are loc:

$\forall A, B, C \in \mathcal{X}$ *avem că* A, B, C *sunt coliniare dacă și numai dacă* $f(A), f(B), f(C)$ *sunt coliniare.*

Remarci. Au loc proprietățile:

- Dacă $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ și $g : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ sunt izomorfisme, atunci și $g \circ f$ este izomorfism;

Definiție. Fie $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ două plane sau spații proiective. O funcție $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ bijectivă se numește *izomorfism de spații proiective* dacă are loc:

$\forall A, B, C \in \mathcal{X}$ *avem că* A, B, C *sunt coliniare dacă și numai dacă* $f(A), f(B), f(C)$ *sunt coliniare.*

Remarci. Au loc proprietățile:

- Dacă $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ și $g : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ sunt izomorfisme, atunci și $g \circ f$ este izomorfism;
- Dacă $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ este izomorfism, atunci și $f^{-1} : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ este izomorfism;

Definiție. Fie $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ două plane sau spații proiective. O funcție $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ bijectivă se numește *izomorfism de spații proiective* dacă are loc:

$$\forall A, B, C \in \mathcal{X} \textit{ avem că } A, B, C \textit{ sunt coliniare dacă și numai dacă } f(A), f(B), f(C) \textit{ sunt coliniare.}$$

Remarci. Au loc proprietățile:

- Dacă $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ și $g : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$" sunt izomorfisme, atunci și $g \circ f$ este izomorfism;
- Dacă $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ este izomorfism, atunci și $f^{-1} : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ este izomorfism;
- În particular, mulțimea $Aut(\mathcal{X}) := \{f | f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, f = \text{izomorfism}\}$ este un grup în raport cu compunerea funcțiilor.

Proiectivități. Fie $\mathcal{X} = \mathbb{P}(K^n)$ și fie $A \in GL_n(K)$. Atunci funcția $f_A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$f_A([X]) := [AX]$$

este un izomorfim proiectiv.

Proiectivități. Fie $\mathcal{X} = \mathbb{P}(K^n)$ și fie $A \in GL_n(K)$. Atunci funcția $f_A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$f_A([X]) := [AX]$$

este un izomorfim proiectiv. Pentru a vedea aceasta e suficient să vedem că duce puncte coliniare în puncte coliniare, deoarece apoi observăm că f_A este bijectivă și că $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ deci f_A va și întoarce puncte coliniare în puncte coliniare.

Proiectivități. Fie $\mathcal{X} = \mathbb{P}(K^n)$ și fie $A \in GL_n(K)$. Atunci funcția $f_A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$f_A([X]) := [AX]$$

este un izomorfim proiectiv. Pentru a vedea aceasta e suficient să vedem că duce puncte coliniare în puncte coliniare, deoarece apoi observăm că f_A este bijectivă și că $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ deci f_A va și întoarce puncte coliniare în puncte coliniare.
Fie deci $[v_1], [v_2], [v_3] \in \mathbb{P}(K^n)$ coliniare: atunci există $\alpha, \beta \in K$ astfel încât
$v_3 =$

Proiectivități. Fie $\mathcal{X} = \mathbb{P}(K^n)$ și fie $A \in GL_n(K)$. Atunci funcția $f_A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$f_A([X]) := [AX]$$

este un izomorfim proiectiv. Pentru a vedea aceasta e suficient să vedem că duce puncte coliniare în puncte coliniare, deoarece apoi observăm că f_A este bijectivă și că $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ deci f_A va și întoarce puncte coliniare în puncte coliniare.
Fie deci $[v_1], [v_2], [v_3] \in \mathbb{P}(K^n)$ coliniare: atunci există $\alpha, \beta \in K$ astfel încât $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$.

Proiectivități. Fie $\mathcal{X} = \mathbb{P}(K^n)$ și fie $A \in GL_n(K)$. Atunci funcția $f_A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$f_A([X]) := [AX]$$

este un izomorfim proiectiv. Pentru a vedea aceasta e suficient să vedem că duce puncte coliniare în puncte coliniare, deoarece apoi observăm că f_A este bijectivă și că $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ deci f_A va și întoarce puncte coliniare în puncte coliniare.
Fie deci $[v_1], [v_2], [v_3] \in \mathbb{P}(K^n)$ coliniare: atunci există $\alpha, \beta \in K$ astfel încât $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$. Dar atunci $Av_3 = \alpha Av_1 + \beta Av_2$, deci $[Av_1], [Av_2], [Av_3]$ sunt coliniare.

Proiectivități. Fie $\mathcal{X} = \mathbb{P}(K^n)$ și fie $A \in GL_n(K)$. Atunci funcția $f_A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$f_A([X]) := [AX]$$

este un izomorfim proiectiv. Pentru a vedea aceasta e suficient să vedem că duce puncte coliniare în puncte coliniare, deoarece apoi observăm că f_A este bijectivă și că $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ deci f_A va și întoarce puncte coliniare în puncte coliniare.
Fie deci $[v_1], [v_2], [v_3] \in \mathbb{P}(K^n)$ coliniare: atunci există $\alpha, \beta \in K$ astfel încât $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$. Dar atunci $Av_3 = \alpha Av_1 + \beta Av_2$, deci $[Av_1], [Av_2], [Av_3]$ sunt coliniare.

Problemă

De ce este necesară condiția ca $A \in GL_n(K)$?

Transformări galoisiene. Fie $\mathcal{X} = \mathbb{P}(K^n)$ și fie $\sigma : K \to K$ un automorfism de corpuri. Atunci funcția $f^\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$f^\sigma([x_1, \ldots, x_n]) := [\sigma(x_1), \ldots \sigma(x_n)]$$

este corect definită și este un izomorfism proiectiv.

Transformări galoisiene. Fie $\mathcal{X} = \mathbb{P}(K^n)$ și fie $\sigma : K \to K$ un automorfism de corpuri. Atunci funcția $f^\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$f^\sigma([x_1, \ldots, x_n]) := [\sigma(x_1), \ldots \sigma(x_n)]$$

este corect definită și este un izomorfism proiectiv.
Pentru a vedea aceasta e suficient să vedem că duce puncte coliniare în puncte coliniare, deoarece apoi observăm că f^σ este bijectivă și că $(f^\sigma)^{-1} =$

Transformări galoisiene. Fie $\mathcal{X} = \mathbb{P}(K^n)$ și fie $\sigma : K \to K$ un automorfism de corpuri. Atunci funcția $f^\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$f^\sigma([x_1, \dots, x_n]) := [\sigma(x_1), \dots \sigma(x_n)]$$

este corect definită și este un izomorfism proiectiv.
Pentru a vedea aceasta e suficient să vedem că duce puncte coliniare în puncte coliniare, deoarece apoi observăm că f^σ este bijectivă și că $(f^\sigma)^{-1} = f^{\sigma^{-1}}$ deci f^σ va și întoarce puncte coliniare în puncte coliniare.

Transformări galoisiene. Fie $\mathcal{X} = \mathbb{P}(K^n)$ și fie $\sigma : K \to K$ un automorfism de corpuri. Atunci funcția $f^\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$f^\sigma([x_1, \dots, x_n]) := [\sigma(x_1), \dots \sigma(x_n)]$$

este corect definită și este un izomorfism proiectiv.
Pentru a vedea aceasta e suficient să vedem că duce puncte coliniare în puncte coliniare, deoarece apoi observăm că f^σ este bijectivă și că $(f^\sigma)^{-1} = f^{\sigma^{-1}}$ deci f^σ va și întoarce puncte coliniare în puncte coliniare.
Fie deci $[v_1], [v_2], [v_3] \in \mathbb{P}(K^n)$ coliniare: atunci există $\alpha, \beta \in K$ astfel încât $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$. Dar atunci $f^\sigma(v_3) = \sigma(\alpha) f^\sigma(v_1) + \sigma(\beta) f^\sigma(v_2)$, deci $f^\sigma(v_1), f^\sigma(v_2), f^\sigma(v_3)$ sunt coliniare.

Teoremă. *Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n peste corpul K și $\mathcal{X}$=completatul proiectiv al lui $\mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{X}$ este izomorf cu $\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1})$.*

Teoremă. *Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n peste corpul K și $\mathcal{X}$=completatul proiectiv al lui $\mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{X}$ este izomorf cu $\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1})$.*
Demonstrație. Putem presupune că $\mathcal{A} = K^n$, alegând un reper cartezian în $\mathcal{A}$. Definim funcția $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^n$ astfel:

- dacă $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}$ este un punct propriu, punem

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) := [1, x_1, \ldots, x_n];$$

Teoremă. *Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n peste corpul K și $\mathcal{X}$=completatul proiectiv al lui $\mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{X}$ este izomorf cu $\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1})$.*

Demonstrație. Putem presupune că $\mathcal{A} = K^n$, alegând un reper cartezian în $\mathcal{A}$. Definim funcția $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^n$ astfel:

- dacă $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}$ este un punct propriu, punem
$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) := [1, x_1, \ldots, x_n];$$
- dacă $P = \hat{d}$ este un punct impropriu, unde d este o dreaptă afină
$$(d) : \ \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$$
punem
$$\varphi(P) := [0, v_1, \ldots, v_n].$$

1. φ=corect definită. Singurul caz care trebuie studiat este cel al punctelor improprii. Fie deci P un punct impropriu, $P = \hat{d} = \hat{d'}$ unde d' este o dreaptă afină

$$(d') : \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$$

Dacă $\hat{d} = \hat{d'}$ avem deci $d || d'$ deci

1. φ=corect definită. Singurul caz care trebuie studiat este cel al punctelor improprii. Fie deci P un punct impropriu, $P = \hat{d} = \hat{d'}$ unde d' este o dreaptă afină

$$(d') : \ \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$$

Dacă $\hat{d} = \hat{d'}$ avem deci $d||d'$ deci există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(v_1, \dots, v_n) = \lambda(u_1, \dots u_n)$. Dar atunci $(0, v_1, \dots, v_n) = \lambda(0, u_1, \dots u_n)$ deci $[0, v_1, \dots, v_n] = [0, u_1, \dots u_n]$, deci $\varphi(P)$ nu depinde de alegerea dreptei d.

1. φ**=corect definită.** Singurul caz care trebuie studiat este cel al punctelor improprii. Fie deci P un punct impropriu, $P = \hat{d} = \hat{d'}$ unde d' este o dreaptă afină

$$(d') : \ \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$$

Dacă $\hat{d} = \hat{d'}$ avem deci $d || d'$ deci există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(v_1, \ldots, v_n) = \lambda(u_1, \ldots u_n)$. Dar atunci $(0, v_1, \ldots, v_n) = \lambda(0, u_1, \ldots u_n)$ deci $[0, v_1, \ldots, v_n] = [0, u_1, \ldots u_n]$, deci $\varphi(P)$ nu depinde de alegerea dreptei d.

2. φ**=bijectivă.** Arătăm doar injectivitatea, surjectivitatea fiind lăsată drept exercițiu. Fie deci $P, Q \in \mathcal{X}$ astfel încât $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Studiem cazurile:

- $P, Q =$ proprii, $P = (x_1, \ldots, x_n), Q = (y_1, \ldots, y_n)$ Dacă $\varphi(P) = \varphi(Q)$, i.e. $[1, x_1, \ldots, x_n] = [1, y_1, \ldots, y_n]$

1. φ**=corect definită.** Singurul caz care trebuie studiat este cel al punctelor improprii. Fie deci P un punct impropriu, $P = \hat{d} = \hat{d'}$ unde d' este o dreaptă afină

$$(d') : \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$$

Dacă $\hat{d} = \hat{d'}$ avem deci $d||d'$ deci există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(v_1, \dots, v_n) = \lambda(u_1, \dots u_n)$. Dar atunci $(0, v_1, \dots, v_n) = \lambda(0, u_1, \dots u_n)$ deci $[0, v_1, \dots, v_n] = [0, u_1, \dots u_n]$, deci $\varphi(P)$ nu depinde de alegerea dreptei d.

2. φ**=bijectivă.** Arătăm doar injectivitatea, surjectivitatea fiind lăsată drept exercițiu. Fie deci $P, Q \in \mathcal{X}$ astfel încât $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Studiem cazurile:

- $P, Q =$ proprii, $P = (x_1, \dots, x_n), Q = (y_1, \dots, y_n)$ Dacă $\varphi(P) = \varphi(Q)$, i.e. $[1, x_1, \dots, x_n] = [1, y_1, \dots, y_n]$ există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(1, x_1, \dots, x_n) = \lambda(1, y_1, \dots, y_n)$.

1. φ**=corect definită.** Singurul caz care trebuie studiat este cel al punctelor improprii. Fie deci P un punct impropriu, $P = \hat{d} = \hat{d}'$ unde d' este o dreaptă afină

$$(d') : \ \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$$

Dacă $\hat{d} = \hat{d}'$ avem deci $d || d'$ deci există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(v_1, \dots, v_n) = \lambda(u_1, \dots u_n)$. Dar atunci $(0, v_1, \dots, v_n) = \lambda(0, u_1, \dots u_n)$ deci $[0, v_1, \dots, v_n] = [0, u_1, \dots u_n]$, deci $\varphi(P)$ nu depinde de alegerea dreptei d.

2. φ**=bijectivă.** Arătăm doar injectivitatea, surjectivitatea fiind lăsată drept exercițiu. Fie deci $P, Q \in \mathcal{X}$ astfel încât $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Studiem cazurile:

- $P, Q =$ proprii, $P = (x_1, \dots, x_n), Q = (y_1, \dots, y_n)$ Dacă $\varphi(P) = \varphi(Q)$, i.e. $[1, x_1, \dots, x_n] = [1, y_1, \dots, y_n]$ există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(1, x_1, \dots, x_n) = \lambda(1, y_1, \dots, y_n)$. Comparând prima componentă rezultă

1. φ**=corect definită.** Singurul caz care trebuie studiat este cel al punctelor improprii. Fie deci P un punct impropriu, $P = \hat{d} = \hat{d}'$ unde d' este o dreaptă afină

$$(d') : \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$$

Dacă $\hat{d} = \hat{d}'$ avem deci $d||d'$ deci există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(v_1, \ldots, v_n) = \lambda(u_1, \ldots u_n)$. Dar atunci $(0, v_1, \ldots, v_n) = \lambda(0, u_1, \ldots u_n)$ deci $[0, v_1, \ldots, v_n] = [0, u_1, \ldots u_n]$, deci $\varphi(P)$ nu depinde de alegerea dreptei d.

2. φ**=bijectivă.** Arătăm doar injectivitatea, surjectivitatea fiind lăsată drept exercițiu. Fie deci $P, Q \in \mathcal{X}$ astfel încât $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Studiem cazurile:

- $P, Q =$ proprii, $P = (x_1, \ldots, x_n), Q = (y_1, \ldots, y_n)$ Dacă $\varphi(P) = \varphi(Q)$, i.e. $[1, x_1, \ldots, x_n] = [1, y_1, \ldots, y_n]$ există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(1, x_1, \ldots, x_n) = \lambda(1, y_1, \ldots, y_n)$. Comparând prima componentă rezultă $\lambda = 1$ de unde $x_i = y_i, \forall i$ deci $P = Q$.

2. φ=bijectivă; continuare.

- P, Q ambele improprii, $P = \hat{d}, Q = \hat{d}'$ unde $(d): \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$, $(d'): \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$.
Dacă $\varphi(P) = \varphi(Q)$ avem

$$[0, v_1, \ldots, v_n] = [0, u_1, \ldots, u_n]$$

deci

2. φ=bijectivă; continuare.

- P, Q ambele improprii, $P = \hat{d}, Q = \hat{d}'$ unde $(d) : \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$, $(d') : \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$.
  Dacă $\varphi(P) = \varphi(Q)$ avem

$$[0, v_1, \ldots, v_n] = [0, u_1, \ldots, u_n]$$

  deci există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(0, v_1, \ldots, v_n) = \lambda(0, u_1, \ldots, u_n)$. Dar atunci avem; $(v_1, \ldots, v_n) = \lambda(u_1, \ldots, u_n)$ deci $dir(d) = dir(d')$, adică $d||d'$, deci $P = Q$.

2. φ=bijectivă; continuare.

- P, Q ambele improprii, $P = \hat{d}, Q = \hat{d}'$ unde $(d) : \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$, $(d') : \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$. Dacă $\varphi(P) = \varphi(Q)$ avem

$$[0, v_1, \ldots, v_n] = [0, u_1, \ldots, u_n]$$

  deci există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(0, v_1, \ldots, v_n) = \lambda(0, u_1, \ldots, u_n)$. Dar atunci avem; $(v_1, \ldots, v_n) = \lambda(u_1, \ldots, u_n)$ deci $dir(d) = dir(d')$, adică $d || d'$, deci $P = Q$.

- P =propriu, Q = *impropriu*. Acest caz este

2. φ=bijectivă; continuare.

- P, Q ambele improprii, $P = \hat{d}, Q = \hat{d}'$ unde $(d) : \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$, $(d') : \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$. Dacă $\varphi(P) = \varphi(Q)$ avem

$$[0, v_1, \ldots, v_n] = [0, u_1, \ldots, u_n]$$

deci există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(0, v_1, \ldots, v_n) = \lambda(0, u_1, \ldots, u_n)$. Dar atunci avem; $(v_1, \ldots, v_n) = \lambda(u_1, \ldots, u_n)$ deci $dir(d) = dir(d')$, adică $d||d'$, deci $P = Q$.

- P =propriu, $Q =$ *impropriu*. Acest caz este imediat exclus deoarece

2. φ=bijectivă; continuare.

- P, Q ambele improprii, $P = \hat{d}, Q = \hat{d}'$ unde $(d): \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$, $(d'): \frac{x_1 - x_1^{A'}}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^{A'}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{A'}}{u_n}$. Dacă $\varphi(P) = \varphi(Q)$ avem

$$[0, v_1, \ldots, v_n] = [0, u_1, \ldots, u_n]$$

deci există $\lambda \in K^*$ astfel încât $(0, v_1, \ldots, v_n) = \lambda(0, u_1, \ldots, u_n)$. Dar atunci avem; $(v_1, \ldots, v_n) = \lambda(u_1, \ldots, u_n)$ deci $dir(d) = dir(d')$, adică $d || d'$, deci $P = Q$.

- P =propriu, $Q =$ *impropriu*. Acest caz este imediat exclus deoarece prima componentă a lui $\varphi(P)$ este 1 iar a lui $\varphi(Q)$ este zero, deci proporționalitatea ar avea loc doar pentru $\lambda = 0$, exclus.

3. φ **păstrează coliniaritatea proiectivă.** Fie $P, Q, R \in \mathcal{X}$ coliniare; arătăm că $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ sunt coliniare.

- $P, Q, R =$ proprii; $P = (x_1, \ldots x_n), Q = (y_1, \ldots, y_n), R = (z_1, \ldots, z_n)$. Dacă P, Q, R sunt coliniare în sens proiectiv, sunt și coliniare în sens afin, deci există $a \in K$ astfel încât $P = aQ + (1-a)R$. Dar atunci

$$(1, x_1, \ldots, x_n) = a(1, y_1, \ldots, y_n) + (1-a)(1, z_1, \ldots, z_n)$$

deci $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ sunt coliniare proiectiv.

3. φ păstrează coliniaritatea proiectivă. Fie $P, Q, R \in \mathcal{X}$ coliniare; arătăm că $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ sunt coliniare.

- $P, Q, R =$ proprii; $P = (x_1, \dots x_n), Q = (y_1, \dots, y_n), R = (z_1, \dots, z_n)$. Dacă P, Q, R sunt coliniare în sens proiectiv, sunt și coliniare în sens afin, deci există $a \in K$ astfel încât $P = aQ + (1-a)R$. Dar atunci

$$(1, x_1, \dots, x_n) = a(1, y_1, \dots, y_n) + (1-a)(1, z_1, \dots, z_n)$$

  deci $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ sunt coliniare proiectiv.

- P, Q, proprii, $R =$impropriu; $P = (x_1, \dots x_n), Q = (y_1, \dots, y_n)$, $R = \hat{d}$ unde $(d) : \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$. Coliniaritatea proiectivă lui P, Q, R implică faptul că dreapta afină PQ este paralelă cu d, deci există $t \in K$ astfel încât $x_i - y_i = tv_i, \forall i = 1, \dots n$. Dar atunci

$$(1, x_1, \dots, x_n) =$$

3. φ **păstrează coliniaritatea proiectivă.** Fie $P, Q, R \in \mathcal{X}$ coliniare; arătăm că $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ sunt coliniare.

- $P, Q, R =$ proprii; $P = (x_1, \dots x_n), Q = (y_1, \dots, y_n), R = (z_1, \dots, z_n)$. Dacă P, Q, R sunt coliniare în sens proiectiv, sunt și coliniare în sens afin, deci există $a \in K$ astfel încât $P = aQ + (1-a)R$. Dar atunci

$$(1, x_1, \dots, x_n) = a(1, y_1, \dots, y_n) + (1-a)(1, z_1, \dots, z_n)$$

  deci $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ sunt coliniare proiectiv.

- P, Q, proprii, $R =$impropriu; $P = (x_1, \dots x_n), Q = (y_1, \dots, y_n)$, $R = \hat{d}$ unde $(d): \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$. Coliniaritatea proiectivă lui P, Q, R implică faptul că dreapta afină PQ este paralelă cu d, deci există $t \in K$ astfel încât $x_i - y_i = tv_i, \forall i = 1, \dots n$. Dar atunci

$$(1, x_1, \dots, x_n) = (1, y_1, \dots, y_n) + t(0, v_1, \dots, v_n)$$

  deci $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ sunt coliniare proiectiv.

3. φ păstrează coliniaritatea proiectivă. Fie $P, Q, R \in \mathcal{X}$ coliniare; arătăm că $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ sunt coliniare.

- $P, Q, R =$ proprii; $P = (x_1, \dots x_n), Q = (y_1, \dots, y_n), R = (z_1, \dots, z_n)$. Dacă P, Q, R sunt coliniare în sens proiectiv, sunt și coliniare în sens afin, deci există $a \in K$ astfel încât $P = aQ + (1-a)R$. Dar atunci

$$(1, x_1, \dots, x_n) = a(1, y_1, \dots, y_n) + (1-a)(1, z_1, \dots, z_n)$$

  deci $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ sunt coliniare proiectiv.

- $P, Q,$ proprii, $R =$impropriu; $P = (x_1, \dots x_n), Q = (y_1, \dots, y_n),\ R = \hat{d}$ unde $(d) : \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$. Coliniaritatea proiectivă lui P, Q, R implică faptul că dreapta afină PQ este paralelă cu d, deci există $t \in K$ astfel încât $x_i - y_i = tv_i, \forall i = 1, \dots n$. Dar atunci

$$(1, x_1, \dots, x_n) = (1, y_1, \dots, y_n) + t(0, v_1, \dots, v_n)$$

  deci $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ sunt coliniare proiectiv.

Exercițiu. *Completați demonstrația cu unicul caz rămas, $P, Q, R =$ toate improprii.*

Definiție. Fie K un corp, $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polinom de grad d, i.e.

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n, \\ i_1 + \cdots + i_n \leq d}} c_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$$

cu cel puțin un coeficient de forma $c_{i_1 \ldots i_n}$ nenul, cu $i_1 + \cdots + i_n = d$.
Se numește *omogenizat* al lui F în raport cu variabila X_0, polinomul $F^h \in K[X_0, X_1 \ldots, X_n]$ definit prin

$$F^h(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n, \\ i_1 + \cdots + i_n \leq d}} c_{i_1 \ldots i_n} X_0^{d-(i_1 + \cdots + i_n)} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}.$$

Definiție. Fie K un corp, $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ un polinom de grad d, i.e.

$$F(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n, \\ i_1 + \dots + i_n \leq d}} c_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

cu cel puțin un coeficient de forma $c_{i_1 \dots i_n}$ nenul, cu $i_1 + \dots + i_n = d$. Se numește *omogenizat* al lui F în raport cu variabila X_0, polinomul $F^h \in K[X_0, X_1 \dots, X_n]$ definit prin

$$F^h(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n, \\ i_1 + \dots + i_n \leq d}} c_{i_1 \dots i_n} X_0^{d-(i_1 + \dots + i_n)} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}.$$

Exemplu. $F \in K[X_1, X_2, X_3]$

$$F(X_1, X_2, X_3) = 2X_1 + 3X_2^2 X_3^2 + 5X_1^2 X_3.$$

F este un polinom de gradul

Definiție. Fie K un corp, $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polinom de grad d, i.e.

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n, \\ i_1 + \cdots + i_n \leq d}} c_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$$

cu cel puțin un coeficient de forma $c_{i_1 \ldots i_n}$ nenul, cu $i_1 + \cdots + i_n = d$.
Se numește *omogenizat* al lui F în raport cu variabila X_0, polinomul $F^h \in K[X_0, X_1 \ldots, X_n]$ definit prin

$$F^h(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n, \\ i_1 + \cdots + i_n \leq d}} c_{i_1 \ldots i_n} X_0^{d-(i_1 + \cdots + i_n)} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}.$$

Exemplu. $F \in K[X_1, X_2, X_3]$

$$F(X_1, X_2, X_3) = 2X_1 + 3X_2^2 X_3^2 + 5X_1^2 X_3.$$

F este un polinom de gradul 4, deci omogenizatul său va fi $F^h \in K[X_0, X_1, X_2, X_3]$

Definiție. Fie K un corp, $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ un polinom de grad d, i.e.

$$F(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n, \\ i_1 + \dots + i_n \leq d}} c_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

cu cel puțin un coeficient de forma $c_{i_1 \dots i_n}$ nenul, cu $i_1 + \dots + i_n = d$.
Se numește *omogenizat* al lui F în raport cu variabila X_0, polinomul $F^h \in K[X_0, X_1 \dots, X_n]$ definit prin

$$F^h(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n, \\ i_1 + \dots + i_n \leq d}} c_{i_1 \dots i_n} X_0^{d-(i_1 + \dots + i_n)} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}.$$

Exemplu. $F \in K[X_1, X_2, X_3]$

$$F(X_1, X_2, X_3) = 2X_1 + 3X_2^2 X_3^2 + 5X_1^2 X_3.$$

F este un polinom de gradul 4, deci omogenizatul său va fi $F^h \in K[X_0, X_1, X_2, X_3]$

$$F^h(X_0, X_1, X_2, X_3) = 2X_0^3 X_1 +$$

Definiție. Fie K un corp, $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polinom de grad d, i.e.

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n, \\ i_1 + \cdots + i_n \leq d}} c_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$$

cu cel puțin un coeficient de forma $c_{i_1 \ldots i_n}$ nenul, cu $i_1 + \cdots + i_n = d$.
Se numește *omogenizat* al lui F în raport cu variabila X_0, polinomul $F^h \in K[X_0, X_1 \ldots, X_n]$ definit prin

$$F^h(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n, \\ i_1 + \cdots + i_n \leq d}} c_{i_1 \ldots i_n} X_0^{d-(i_1 + \cdots + i_n)} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}.$$

Exemplu. $F \in K[X_1, X_2, X_3]$

$$F(X_1, X_2, X_3) = 2X_1 + 3X_2^2 X_3^2 + 5X_1^2 X_3.$$

F este un polinom de gradul 4, deci omogenizatul său va fi $F^h \in K[X_0, X_1, X_2, X_3]$

$$F^h(X_0, X_1, X_2, X_3) = 2X_0^3 X_1 + 3X_2^2 X_3^2 +$$

Definiție. Fie K un corp, $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ un polinom de grad d, i.e.

$$F(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n, \\ i_1 + \dots + i_n \leq d}} c_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

cu cel puțin un coeficient de forma $c_{i_1 \dots i_n}$ nenul, cu $i_1 + \dots + i_n = d$.
Se numește *omogenizat* al lui F în raport cu variabila X_0, polinomul $F^h \in K[X_0, X_1 \dots, X_n]$ definit prin

$$F^h(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n, \\ i_1 + \dots + i_n \leq d}} c_{i_1 \dots i_n} X_0^{d-(i_1 + \dots + i_n)} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}.$$

Exemplu. $F \in K[X_1, X_2, X_3]$

$$F(X_1, X_2, X_3) = 2X_1 + 3X_2^2 X_3^2 + 5X_1^2 X_3.$$

F este un polinom de gradul 4, deci omogenizatul său va fi $F^h \in K[X_0, X_1, X_2, X_3]$

$$F^h(X_0, X_1, X_2, X_3) = 2X_0^3 X_1 + 3X_2^2 X_3^2 + 5X_0 X_1^2 X_3.$$

Definiție. Fie $\mathcal{X}_\mathcal{A}$ completatul proiectiv al unui spațiu afin, raportat la un reper cartezian (deci $\mathcal{A} \simeq K^n$). Fie $X \subset \mathcal{A}$ o hipersuprafață algebrică, i.e. definită de o ecuație polinomială, $F \in K[X_1, \ldots, , X_n]$,

$$X = \{P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A} | F(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

Definim *închiderea proiectivă* $\overline{X}$ a lui X prin

$$\overline{X} = \{P[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathcal{X}_\mathcal{A} | F^h(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2]|$$

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0x_0 = 0\}.$$

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 x_0 = 0\}.$$

Avem $\overline{d} \cap \mathcal{A} =$

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 x_0 = 0\}.$$

Avem $\overline{d} \cap \mathcal{A} = \{P[1, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$, deci

$$\overline{d} \cap \mathcal{A} = d.$$

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 x_0 = 0\}.$$

Avem $\overline{d} \cap \mathcal{A} = \{P[1, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$, deci

$$\overline{d} \cap \mathcal{A} = d.$$

Pe de altă parte, $\overline{d} \cap \mathcal{X}_\infty = \{P[0, x_1, x_2] |$

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0x_0 = 0\}.$$

Avem $\overline{d} \cap \mathcal{A} = \{P[1, x_1, x_2] | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0\}$, deci

$$\overline{d} \cap \mathcal{A} = d.$$

Pe de altă parte, $\overline{d} \cap \mathcal{X}_\infty = \{P[0, x_1, x_2] | a_1x_1 + a_2x_2 = 0\} = \{$

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 x_0 = 0\}.$$

Avem $\overline{d} \cap \mathcal{A} = \{P[1, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$, deci

$$\overline{d} \cap \mathcal{A} = d.$$

Pe de altă parte, $\overline{d} \cap \mathcal{X}_\infty = \{P[0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\} = \{[0, a_2, -a_1]\}$.

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0x_0 = 0\}.$$

Avem $\overline{d} \cap \mathcal{A} = \{P[1, x_1, x_2] | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0\}$, deci

$$\overline{d} \cap \mathcal{A} = d.$$

Pe de altă parte, $\overline{d} \cap \mathcal{X}_\infty = \{P[0, x_1, x_2] | a_1x_1 + a_2x_2 = 0\} = \{[0, a_2, -a_1]\}$.
Însă ecuația direcției lui d este $dir(d) =$

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 x_0 = 0\}.$$

Avem $\overline{d} \cap \mathcal{A} = \{P[1, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$, deci

$$\overline{d} \cap \mathcal{A} = d.$$

Pe de altă parte, $\overline{d} \cap \mathcal{X}_\infty = \{P[0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\} = \{[0, a_2, -a_1]\}$.
Însă ecuația direcției lui d este $dir(d) = \{v = (v_1, v_2) | a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0\}$ care se mai poate scrie și sub forma

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 x_0 = 0\}.$$

Avem $\overline{d} \cap \mathcal{A} = \{P[1, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$, deci

$$\overline{d} \cap \mathcal{A} = d.$$

Pe de altă parte, $\overline{d} \cap \mathcal{X}_\infty = \{P[0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\} = \{[0, a_2, -a_1]\}$.
Însă ecuația direcției lui d este $dir(d) = \{v = (v_1, v_2) | a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0\}$ care se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{v_1}{a_2} = \frac{v_2}{-a_1}$$

deci $dir(d)$ este generată de vectorul $v = ($

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 x_0 = 0\}.$$

Avem $\overline{d} \cap \mathcal{A} = \{P[1, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0\}$, deci

$$\overline{d} \cap \mathcal{A} = d.$$

Pe de altă parte, $\overline{d} \cap \mathcal{X}_\infty = \{P[0, x_1, x_2] | a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\} = \{[0, a_2, -a_1]\}$.
Însă ecuația direcției lui d este $dir(d) = \{v = (v_1, v_2) | a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0\}$ care se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{v_1}{a_2} = \frac{v_2}{-a_1}$$

deci $dir(d)$ este generată de vectorul $v = (a_2, -a_1)$, deci punctul de la infinit $\hat{d}$ a lui d este

Exemplu. Fie $d \subset K^2$ o dreaptă afină,

$$d = \{P(x_1, x_2) | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0\}$$

Rezultă

$$\overline{d} = \{P[x_0, x_1, x_2] | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0x_0 = 0\}.$$

Avem $\overline{d} \cap \mathcal{A} = \{P[1, x_1, x_2] | a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0\}$, deci

$$\overline{d} \cap \mathcal{A} = d.$$

Pe de altă parte, $\overline{d} \cap \mathcal{X}_\infty = \{P[0, x_1, x_2] | a_1x_1 + a_2x_2 = 0\} = \{[0, a_2, -a_1]\}$.
Însă ecuația direcției lui d este $dir(d) = \{v = (v_1, v_2) | a_1v_1 + a_2v_2 = 0\}$ care se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{v_1}{a_2} = \frac{v_2}{-a_1}$$

deci $dir(d)$ este generată de vectorul $v = (a_2, -a_1)$, deci punctul de la infinit $\hat{d}$ a lui d este $[0, a_2, -a_1]$. Deducem că

$$\overline{d} \cap \mathcal{X}_\infty = \{\hat{d}\};$$

ca atare, $\overline{d}$ este chiar dreapta proiectivă proprie generată de d!

Închiderea proiectivă a unor conice. Fie conicele din $\mathbb{R}^2$
$(\mathcal{E}):\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{H}):\ y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{P}):\ z_1^2 - 2z_2 = 0.$
Închiderile proiective sunt, respectiv:
$(\overline{\mathcal{E}}):$

Închiderea proiectivă a unor conice. Fie conicele din $\mathbb{R}^2$
$(\mathcal{E}): \ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{H}): \ y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{P}): \ z_1^2 - 2z_2 = 0.$
Închiderile proiective sunt, respectiv:
$(\overline{\mathcal{E}}): \ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0;$

Închiderea proiectivă a unor conice. Fie conicele din $\mathbb{R}^2$
$(\mathcal{E}):\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{H}):\ y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{P}):\ z_1^2 - 2z_2 = 0.$
Închiderile proiective sunt, respectiv:
$(\overline{\mathcal{E}}):\ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0;$
$(\overline{\mathcal{H}}):$

Închiderea proiectivă a unor conice. Fie conicele din $\mathbb{R}^2$
$(\mathcal{E}): \ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{H}): \ y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{P}): \ z_1^2 - 2z_2 = 0.$
Închiderile proiective sunt, respectiv:
$(\overline{\mathcal{E}}): \ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0;$
$(\overline{\mathcal{H}}): \ y_1^2 - y_2^2 - y_0^2 = 0;$

Închiderea proiectivă a unor conice. Fie conicele din $\mathbb{R}^2$
$(\mathcal{E}):\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{H}):\ y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{P}):\ z_1^2 - 2z_2 = 0.$
Închiderile proiective sunt, respectiv:
$(\overline{\mathcal{E}}):\ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0;$
$(\overline{\mathcal{H}}):\ y_1^2 - y_2^2 - y_0^2 = 0;$
$(\overline{\mathcal{P}}):$

Închiderea proiectivă a unor conice. Fie conicele din $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{E}): \ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{H}): \ y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{P}): \ z_1^2 - 2z_2 = 0.$

Închiderile proiective sunt, respectiv:

$(\overline{\mathcal{E}}): \ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0;$
$(\overline{\mathcal{H}}): \ y_1^2 - y_2^2 - y_0^2 = 0;$
$(\overline{\mathcal{P}}): \ z_1^2 - 2z_2z_0 = 0.$

Închiderea proiectivă a unor conice. Fie conicele din $\mathbb{R}^2$
$(\mathcal{E}): \ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{H}): \ y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{P}): \ z_1^2 - 2z_2 = 0.$
Închiderile proiective sunt, respectiv:
$(\overline{\mathcal{E}}): \ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0;$
$(\overline{\mathcal{H}}): \ y_1^2 - y_2^2 - y_0^2 = 0;$
$(\overline{\mathcal{P}}): \ z_1^2 - 2z_2z_0 = 0.$
De fapt, TOATE închiderile proiective sunt echivalente proiectiv, în sensul că există schimbări de coordonate proiective care transformă una în celalaltă! De exemplu:

transformăm $(\overline{\mathcal{E}})$ în $(\overline{\mathcal{H}})$ prin: $\begin{cases} y_0 = x_1 \\ y_1 = x_0 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$

Închiderea proiectivă a unor conice. Fie conicele din $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{E}): \ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$

$(\mathcal{H}): \ y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0;$

$(\mathcal{P}): \ z_1^2 - 2z_2 = 0.$

Închiderile proiective sunt, respectiv:

$(\overline{\mathcal{E}}): \ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0;$

$(\overline{\mathcal{H}}): \ y_1^2 - y_2^2 - y_0^2 = 0;$

$(\overline{\mathcal{P}}): \ z_1^2 - 2z_2z_0 = 0.$

De fapt, TOATE închiderile proiective sunt echivalente proiectiv, în sensul că există schimbări de coordonate proiective care transformă una în celalaltă! De exemplu:

transformăm $(\overline{\mathcal{E}})$ în $(\overline{\mathcal{H}})$ prin: $\begin{cases} y_0 = x_1 \\ y_1 = x_0 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$

și $(\overline{\mathcal{H}})$ în $(\overline{\mathcal{P}})$ prin $\begin{cases} z_0 = \frac{y_0+y_2}{\sqrt{2}} \\ z_1 = y_1 \\ z_2 = \frac{y_0-y_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Închiderea proiectivă a unor conice. Fie conicele din $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{E}):\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{H}):\ y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0;$
$(\mathcal{P}):\ z_1^2 - 2z_2 = 0.$

Închiderile proiective sunt, respectiv:

$(\overline{\mathcal{E}}):\ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0;$
$(\overline{\mathcal{H}}):\ y_1^2 - y_2^2 - y_0^2 = 0;$
$(\overline{\mathcal{P}}):\ z_1^2 - 2z_2z_0 = 0.$

De fapt, TOATE închiderile proiective sunt echivalente proiectiv, în sensul că există schimbări de coordonate proiective care transformă una în celalaltă! De exemplu:

transformăm $(\overline{\mathcal{E}})$ în $(\overline{\mathcal{H}})$ prin: $\begin{cases} y_0 = x_1 \\ y_1 = x_0 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$

și $(\overline{\mathcal{H}})$ în $(\overline{\mathcal{P}})$ prin $\begin{cases} z_0 = \frac{y_0+y_2}{\sqrt{2}} \\ z_1 = y_1 \\ z_2 = \frac{y_0-y_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Cu alte cuvinte, din punct de vedere proiectiv, *elipsa, hiperbola și parabola sunt echivalente!*

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0, 0, 0)$

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0, 0, 0)$ nu dă naștere unui punct din planul proiectiv, deci $\overline{\mathcal{E}} \cap d_\infty =$

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0,0,0)$ nu dă naștere unui punct din planul proiectiv, deci $\overline{\mathcal{E}} \cap d_\infty = \emptyset$. Cu alte cuvinte, dreapta de la infinit este *închiderii proiective a elipsei.*

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0,0,0)$ nu dă naștere unui punct din planul proiectiv, deci $\overline{\mathcal{E}} \cap d_\infty = \emptyset$. Cu alte cuvinte, dreapta de la infinit este *exterioară închiderii proiective a elipsei.*

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0, 0, 0)$ nu dă naștere unui punct din planul proiectiv, deci $\overline{\mathcal{E}} \cap d_\infty = \emptyset$. Cu alte cuvinte, dreapta de la infinit este *exterioară închiderii proiective a elipsei.*

Hiperbola $\overline{\mathcal{H}}$. *Similar, ajungem la sistemul* $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ *care implică*

$x_1 =$

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$
Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0, 0, 0)$ nu dă naștere unui punct din planul proiectiv, deci $\overline{\mathcal{E}} \cap d_\infty = \emptyset$. Cu alte cuvinte, dreapta de la infinit este *exterioară închiderii proiective a elipsei.*

Hiperbola $\overline{\mathcal{H}}$. *Similar, ajungem la sistemul* $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ *care implică* $x_1 = \pm x_2$ *deci* $\overline{\mathcal{H}} \cap d_\infty = \{$

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0, 0, 0)$ nu dă naștere unui punct din planul proiectiv, deci $\overline{\mathcal{E}} \cap d_\infty = \emptyset$. Cu alte cuvinte, dreapta de la infinit este *exterioară închiderii proiective a elipsei.*

Hiperbola $\overline{\mathcal{H}}$. *Similar, ajungem la sistemul* $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ *care implică* $x_1 = \pm x_2$ *deci* $\overline{\mathcal{H}} \cap d_\infty = \{[0, t, t], [0, t, -t]\} = \{[0, 1, 1], [0, 1, -1]\}$. *Deci, dreapta de la infinit este* închiderii proiective a hiperbolei.

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0, 0, 0)$ nu dă naștere unui punct din planul proiectiv, deci $\overline{\mathcal{E}} \cap d_\infty = \emptyset$. Cu alte cuvinte, dreapta de la infinit este *exterioară închiderii proiective a elipsei.*

Hiperbola $\overline{\mathcal{H}}$. *Similar, ajungem la sistemul* $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ *care implică* $x_1 = \pm x_2$ *deci* $\overline{\mathcal{H}} \cap d_\infty = \{[0, t, t], [0, t, -t]\} = \{[0, 1, 1], [0, 1, -1]\}$. *Deci, dreapta de la infinit este* secantă închiderii proiective a hiperbolei.

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0, 0, 0)$ nu dă naștere unui punct din planul proiectiv, deci $\overline{\mathcal{E}} \cap d_\infty = \emptyset$. Cu alte cuvinte, dreapta de la infinit este *exterioară închiderii proiective a elipsei.*

Hiperbola $\overline{\mathcal{H}}$. *Similar, ajungem la sistemul* $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ *care implică* $x_1 = \pm x_2$ *deci* $\overline{\mathcal{H}} \cap d_\infty = \{[0, t, t], [0, t, -t]\} = \{[0, 1, 1], [0, 1, -1]\}$. *Deci, dreapta de la infinit este* secantă închiderii proiective a hiperbolei.

Parabola $\overline{\mathcal{P}}$. Sistemul devine: $\begin{cases} x_1^2 - 2x_0x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ care implică $x_1 = 0$ deci

$\overline{\mathcal{P}} \cap d_\infty =$

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".

Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0, 0, 0)$ nu dă naștere unui punct din planul proiectiv, deci $\overline{\mathcal{E}} \cap d_\infty = \emptyset$. Cu alte cuvinte, dreapta de la infinit este *exterioară închiderii proiective a elipsei.*

Hiperbola $\overline{\mathcal{H}}$. *Similar, ajungem la sistemul* $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ *care implică* $x_1 = \pm x_2$ *deci* $\overline{\mathcal{H}} \cap d_\infty = \{[0, t, t], [0, t, -t]\} = \{[0, 1, 1], [0, 1, -1]\}$. *Deci, dreapta de la infinit este* secantă închiderii proiective a hiperbolei.

Parabola $\overline{\mathcal{P}}$. Sistemul devine: $\begin{cases} x_1^2 - 2x_0x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ care implică $x_1 = 0$ deci $\overline{\mathcal{P}} \cap d_\infty = \{[0, 0, t]\} = \{[0, 0, 1]\}$. Deci, dreapta de la infinit este *închiderii proiective a parabolei.*

Închiderea proiectivă a conicelor: interpretare geometrică. Să analizăm diferența, din p.d.v geometric, între cele trei cazuri de mai sus, prin prisma "punctelor de la infinit".
Elipsa. Intersecția dintre închiderea proiectivă a elipsei $\overline{\mathcal{E}}$ și dreapta de la infinit d_∞ este dată de sistemul
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$
Deducem $x_1 = x_2 = 0$; dar $(0,0,0)$ nu dă naștere unui punct din planul proiectiv, deci $\overline{\mathcal{E}} \cap d_\infty = \emptyset$. Cu alte cuvinte, dreapta de la infinit este *exterioară închiderii proiective a elipsei.*

Hiperbola $\overline{\mathcal{H}}$. *Similar, ajungem la sistemul* $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ *care implică* $x_1 = \pm x_2$ *deci* $\overline{\mathcal{H}} \cap d_\infty = \{[0,t,t],[0,t,-t]\} = \{[0,1,1],[0,1,-1]\}$. *Deci, dreapta de la infinit este* secantă închiderii proiective a hiperbolei.

Parabola $\overline{\mathcal{P}}$. Sistemul devine: $\begin{cases} x_1^2 - 2x_0x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ care implică $x_1 = 0$ deci $\overline{\mathcal{P}} \cap d_\infty = \{[0,0,t]\} = \{[0,0,1]\}$. Deci, dreapta de la infinit este *tangentă închiderii proiective a parabolei.*

Închiderea proiectivă a unor cuadrice în $\mathbb{R}^3$.
Conuri și cilindri. Reamintim ecuațile: conul $(\mathcal{K}): \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, cilindrul eliptic: $(\mathcal{C}_e): \ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, cilindrul hiperbolic $(\mathcal{C}_h): \ x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$, și cilindrul parabolic $(\mathcal{C}_p): \ x_1^2 - 2x_2 = 0$.

Închiderile lor proiective vor avea ecuațiile: conul $(\overline{\mathcal{K}}): \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, cilindrul eliptic: $(\overline{\mathcal{C}_e}): \ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$, cilindrul hiperbolic $(\overline{\mathcal{C}_h}): \ x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$, și cilindrul parabolic $(\overline{\mathcal{C}_p}): \ x_1^2 - 2x_2x_0 = 0$.

Se observă imediat, ca și în cazul conicelor, că toate hipersuprafețele proiective de mai sus sunt proiectiv echivalente.

Închiderea proiectivă a unor cuadrice în $\mathbb{R}^3$: interpretare geometrică. În completatul proiectiv $\mathcal{X}$ al lui $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, punctele de la infinit formează un plan proiectiv, $\mathcal{X}_\infty = \{[0, x_1, x_2, x_3] | (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus 0\} \simeq \{[x_1, x_2, x_3] | ...\}$.

Avem $\overline{\mathcal{K}} \cap \mathcal{X}_\infty = \{[0, x_1, x_2, x_3] | (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus 0\}$ deci $\overline{\mathcal{K}} \cap \mathcal{X}_\infty$ este o elipsă proiectivă.

Pentru $\overline{\mathcal{C}_e} \cap \mathcal{X}_\infty$ obținem ecuația $x_1^2 + x_2^2 = 0$ deci $x_1 = x_2 = 0$. Conchidem $\overline{\mathcal{C}_e} \cap \mathcal{X}_\infty = \{[0, 0, 0, 1]\}$.

Pentru $\overline{\mathcal{C}_h} \cap \mathcal{X}_\infty$ obținem ecuația $x_1^2 - x_2^2 = 0$ deci $x_1 = \pm x_2$. Conchidem $\overline{\mathcal{C}_h} \cap \mathcal{X}_\infty = \{[0, t, t, s] | t, s \in \mathbb{R}^2 \setminus 0\} \cup \{[0, t, -t, s] | t, s \in \mathbb{R}^2 \setminus 0\}$. Din definiția dreptelor proiective, vedem că mulțimile $\{[0, t, t, s] | t, s \in \mathbb{R}^2 \setminus 0\}$ și $\{[0, t, -t, s] | t, s \in \mathbb{R}^2 \setminus 0\}$ sunt drepte proiective, deci $\overline{\mathcal{C}_h} \cap \mathcal{X}_\infty$ este o pereche de drepte (proiective).

În fine, pentru $\overline{\mathcal{C}_p} \cap \mathcal{X}_\infty$ obținem ecuația $x_1^2 = 0$ deci $x_1 = 0$. Conchidem $\overline{\mathcal{C}_p} \cap \mathcal{X}_\infty = \{[0, 0, t, s] | t, s \in \mathbb{R}^2 \setminus 0\}$ Din nou, din definiția dreptelor proiective, vedem că mulțimea $\{[0, 0, t, s] | t, s \in \mathbb{R}^2 \setminus 0\}$ este o dreaptă proiectivă, deci $\overline{\mathcal{C}_h} \cap \mathcal{X}_\infty$ este o dreaptă (proiectivă).

Construcția corpului asociat; recuperarea geometriei afine

Notație. Fie X un plan sau spațiu proiectiv, și fie $H \subset X$ un *hiperplan*, adică o varietate liniară $H \subset X$ cu proprietățile: $H \neq X$, dar pentru orice punct $P \in X \setminus H$ avem $< H \cup \{P\} >= X$. Vom nota $\mathcal{A}_H$ (sau, mai simplu $\mathcal{A}$) mulțimea

$$\mathcal{A}_H := X \setminus H.$$

Vom numi *"a-dreaptă"* o submulțime nevidă $d \subset H$ de forma

$$d := \delta \cap \mathcal{A}$$

unde $\delta \subset X$ este o dreaptă proiectivă. Vom nota $\mathcal{D}_H \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ mulțimea tuturor a-dreptelor.

Evident, are loc faptul că *prin două puncte distincte P, Q din $\mathcal{A}$ trece o a-dreaptă, unică cu această proprietate.* Această a-dreaptă va fi notată în mod uzual, PQ.

De asemenea, prin analogie cu situațiile studiate anterior, vom mai nota dreapta proiectivă δ de mai sus și cu $\overline{d}$.

Definiție: paralelism în $\mathcal{A}$

Fie $d_1, d_2 \subset \mathcal{A}$ două a-drepte, $d_1 = \delta_1 \cap \mathcal{A}, d_2 = \delta_2 \cap \mathcal{A}$ cu $\delta_1, \delta_2 \subset X$ drepte proiective. Vom spune că $d_1 || d_2$ dacă $d_1 = d_2$ sau dacă

$$\delta_1 \cap \delta_2 \in H.$$

Remarci

Definiție: paralelism în $\mathcal{A}$

Fie $d_1, d_2 \subset \mathcal{A}$ două a-drepte, $d_1 = \delta_1 \cap \mathcal{A}, d_2 = \delta_2 \cap \mathcal{A}$ cu $\delta_1, \delta_2 \subset X$ drepte proiective. Vom spune că $d_1 || d_2$ dacă $d_1 = d_2$ sau dacă

$$\delta_1 \cap \delta_2 \in H.$$

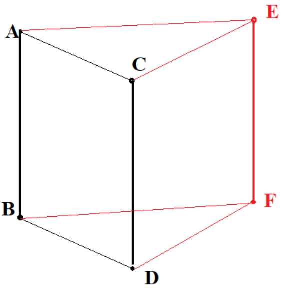
Remarci

- Relația de paralelism este relație de echivalență pe mulțimea a-dreptelor $\mathcal{D}$;
- Are loc "postulatul lui Euclid": *pentru orice a-dreaptă $d \in \mathcal{A}$ și orice punct $P \in \mathcal{A}$, există și este unică o a-dreaptă d' astfel încât $d || d'$ și $P \in d'$.*

Echipolență

Fie $(A, B), (C, D) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Spunem că (A, B) este *echipolent* cu (C, D) (notat $(A, B) \simeq (C, D)$) dacă:

- *dacă* $A \neq B$ *atunci și* $C \neq D$ și există un cuplu $(E, F) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ astfel încât $A \neq E \neq C, B \neq F \neq D$, $AB \neq EF \neq CD$ și au loc $AE || BF, CE || DF$ și $EF || AB || CD$.
- *dacă* $A = B$ atunci și $C = D$.



O problemă majoră!

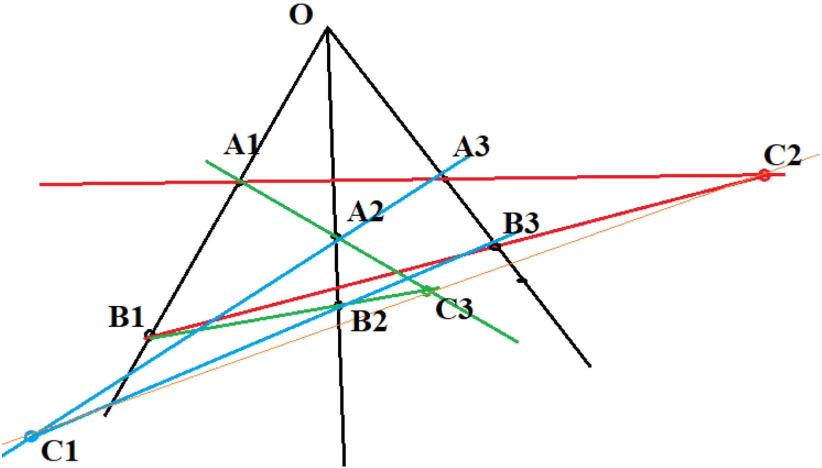
Cu datele pe care le avem acum, **nu putem demonstra că relația de echipolență este relație de echivalență!** Aceasta ne conduce la studiul următoarei:

Propoziția Desargues

Fie X un plan sau spațiu proiectiv, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ drepte din X distincte, concurente într-un punct O : $\{O\} = \delta_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3$. Fie punctele $A_i \neq B_i \in \delta_i \setminus \{O\}$ $(i = 1, 2, 3)$ și fie punctele C_i definite prin

$$\{C_i\} = A_j A_k \cap B_j B_k$$

(unde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$). Atunci C_1, C_2, C_3 sunt coliniare.


O
A1
A3
C2
A2
B3
B1
C3
B2
C1

Teoremă (va fi studiată ulterior)

- Dacă X este un spațiu proiectiv, atunci propoziția Desargues este adevărată.
- Există *plane proiective* pentru care propoziția Desargues este falsă!

Importanța acestei teoreme este:

Propoziție

Fie X un spațiu proiectiv sau un plan proiectiv în care Propoziția Desargues este adevărată. Atunci relația de echipolență este *o relație de echivalență*.

Vom nota $V_H := \mathcal{A} \times \mathcal{A}/ \simeq$ iar clasa de echipolență unui cuplu $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ o vom nota $\overrightarrow{AB}$. Elementele lui V_H se vor numi *vectori liberi* iar cuplurile $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ se vor numi și *vectori legați.*

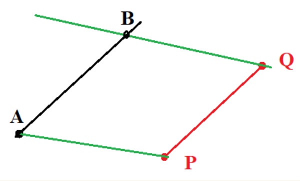
Lema de mobilitate

Fie $v \in V$ un vector liber și $A \in \mathcal{A}$ arbitrare. Atunci există și este unic un punct $B \in \mathcal{A}$ astfel încât

$$\overrightarrow{AB} = v.$$

Schiță de demonstrație.

Alegem $P \in \mathcal{A}$ un punct arbitrar și fie Q astfel încât $\overrightarrow{PQ} = v$. Construim paralela la a-dreapta AP prin Q și paralela la PQ prin A, și punem $B =$ punctul lor de intersecție.



Adunarea vectorilor

Fie $u, v \in V$ vectori arbitrari. Alegem $A \in \mathcal{A}$ arbitrar: există un unic $B \in \mathcal{A}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = u$, și similar există un unic $C \in \mathcal{A}$ astfel încât $\overrightarrow{BC} = v$. Definim

$$u + v := \overrightarrow{AC}.$$

Teoremă

Fie X un spațiu proiectiv sau un plan proiectiv ce satisface Desargues. Atunci adunarea vectorilor este corect definită iar $(V, +)$ este grup abelian.

Schiță de demonstrație

Faptul că adunarea este corect definită rezultă din Desargues. Asociativitatea este imediată, iar elementul neutru este clasa de echipolență vectorului $\overrightarrow{AA}$, unde $A \in \mathcal{A}$ este un punct arbitrar.

Legea de adunare

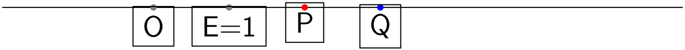
Fie X=spațiu proiectiv sau plan proiectiv ce satisface Desargues, $H \subset X$ hiperplan, $\mathcal{A} := X \setminus H$ și $d \subset \mathcal{A}$ o a-dreaptă. Fixăm două puncte $O \neq E \in d$. Vom defini o structură de corp $K = K_{H,d,O,E}$ pe d astfel.

Adunarea punctelor

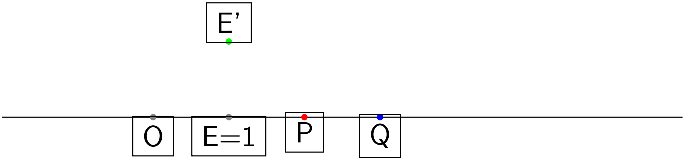
Fie $P, Q \in d$ arbitrare. Conform "lemei de mobilitate" există și e unic $R \in d$ astfel încât $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OP}$. Definim

$$P + Q := R.$$

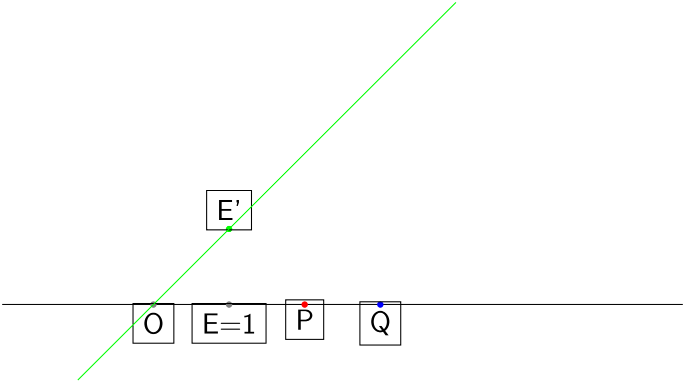
Legea de înmulțire



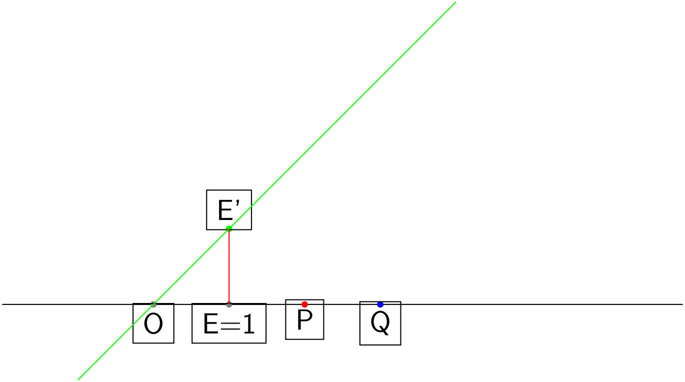
Legea de înmulțire



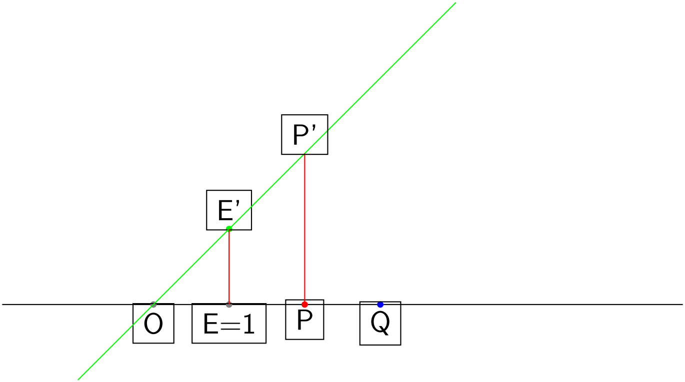
Legea de înmulțire



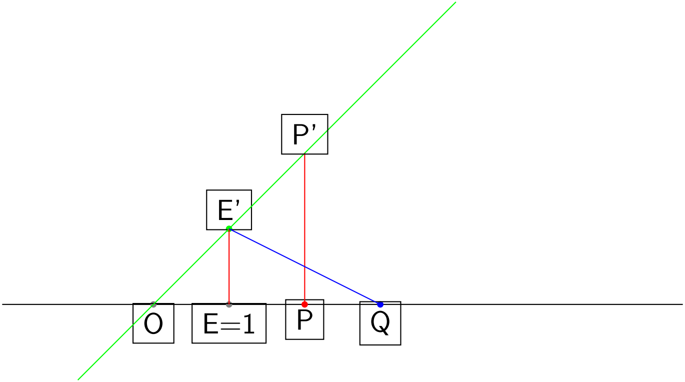
Legea de înmulțire



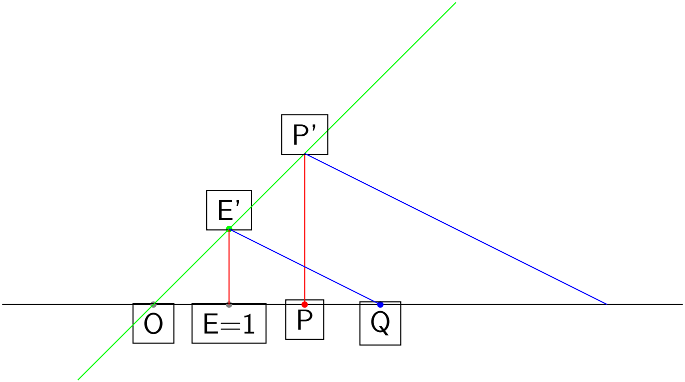
Legea de înmulțire



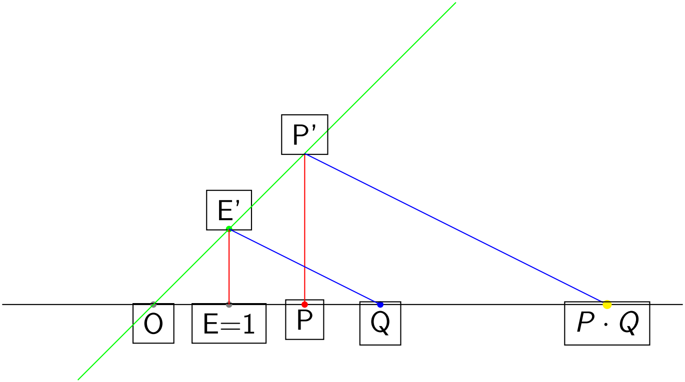
Legea de înmulțire



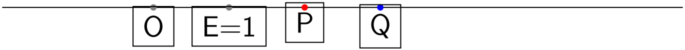
Legea de înmulțire



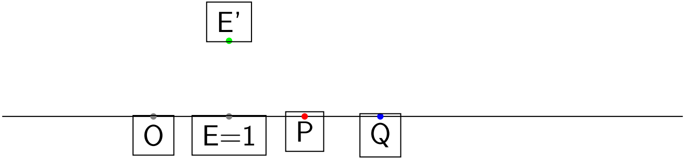
Legea de înmulțire



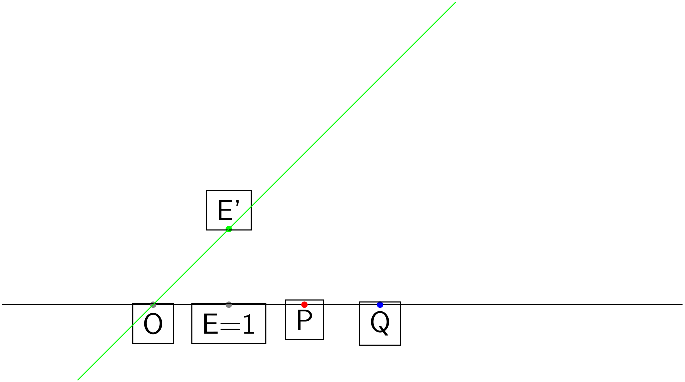
Comutativitatea: construcția lui $Q \cdot P$



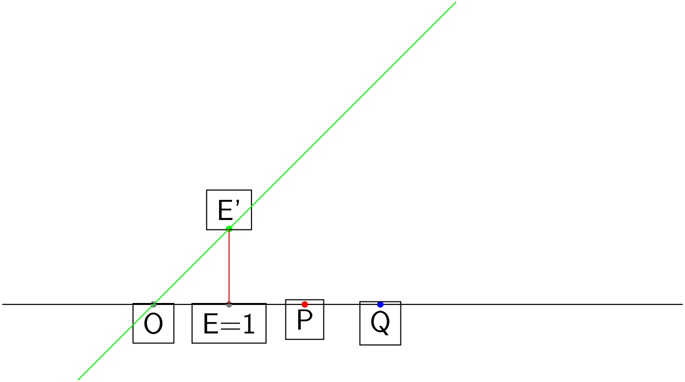
Comutativitatea: construcția lui $Q \cdot P$



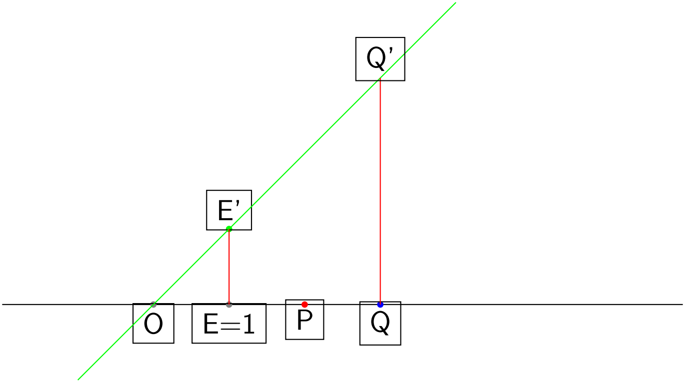
Comutativitatea: construcția lui $Q \cdot P$



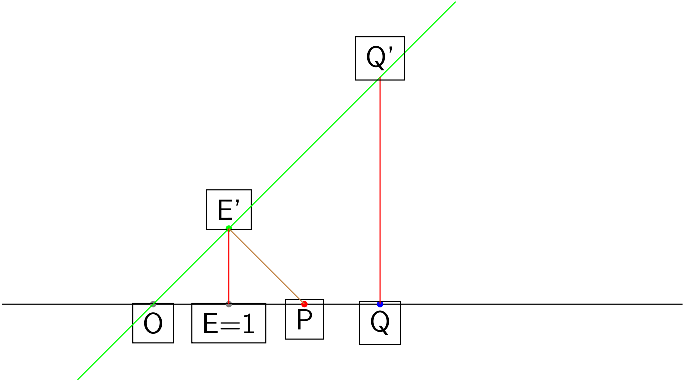
Comutativitatea: construcția lui $Q \cdot P$



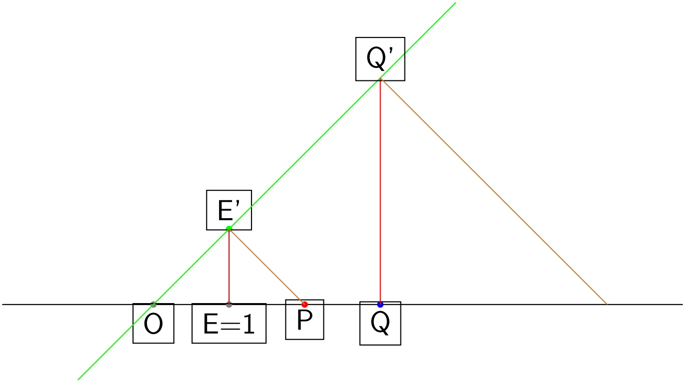
Comutativitatea: construcția lui $Q \cdot P$



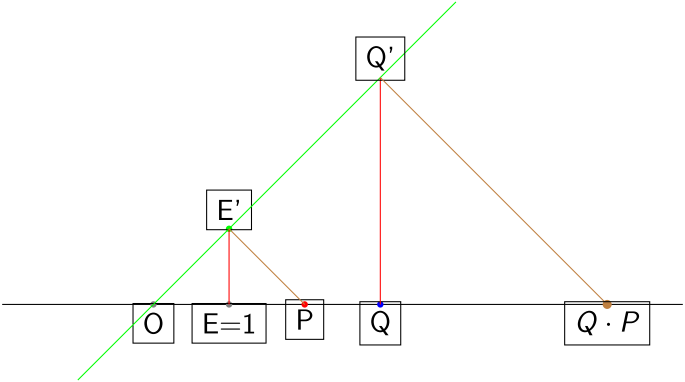
Comutativitatea: construcția lui $Q \cdot P$



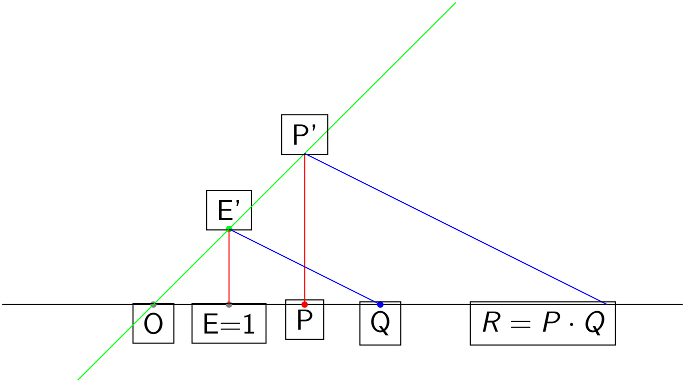
Comutativitatea: construcția lui $Q \cdot P$



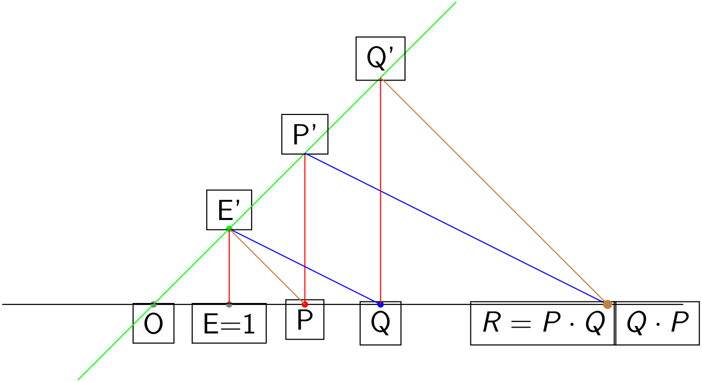
Comutativitatea: construcția lui $Q \cdot P$



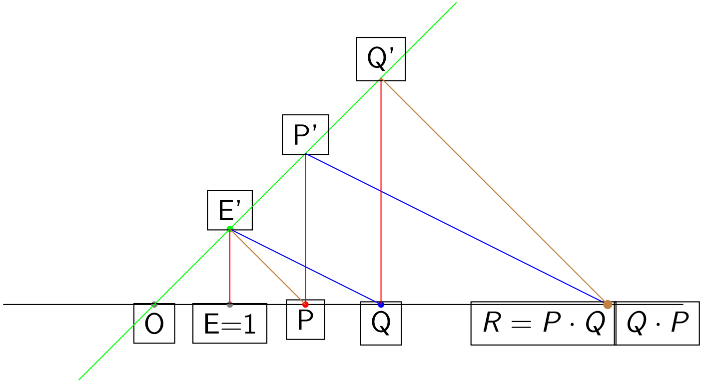
Comutativitatea: condiție necesară și suficientă



Comutativitatea: condiție necesară și suficientă



Comutativitatea: condiție necesară și suficientă

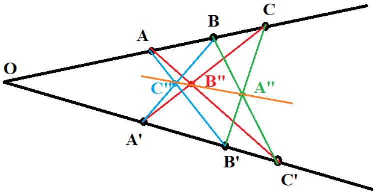


Axioma lui Pappus

Concluzie. Avem comutativitate dacă și numai dacă $Q'P||E'P$!!

Axioma Pappus

Dacă δ, δ' sunt drepte proiective arbitrare, concurente în O, $A, B, C \in \delta \setminus \{O\}$,$A', B', C' \in \delta' \setminus \{O'\}$ arbitrare și notăm $\{A''\} := BC' \cap CB'$,$\{B''\} := AC' \cap CA'$,$\{C''\} := AB' \cap BA'$ atunci A'', B'', C'' sunt coliniare.



În figura anterioară $\{A, B, C\} = \{P, Q, R\}$ iar $\{A', B', C'\} = \{E', P', Q'\}$.