

EXAMEN EDP - 10 FEBRUARIE 2016/2017 (GRUPELE 311 SI 321)

VARIANTA B

• NUME si PRENUME:

Cateva instructiuni:

- Cu exceptia unei singure foi nu sunt permise alte materiale ajutatoare.
- Telefoanele si orice alte dispozitive electronice trebuie mentinute inchise pe tot parcursul examenului.
- 1 punct din oficiu
- Durata examen: 3 ore

Problema 1. (4p). Fie functia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|e^{-x}$.

- 1). Definiti spatiile $W^{1,1}(-1, 1)$ si $W^{1,\infty}(-1, 1)$.
- 2). Determinati derivata slaba f' a lui f si aratati ca $f' \in L^1(-1, 1) \cap L^\infty(-1, 1)$.
- 3). Calculati norma lui f' in $L^\infty(-1, 1)$.
- 4). Calculati norma lui f in $W^{1,1}(-1, 1)$.

Consideram functia $u : B_1(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ data de

$$u(x) = |x|^{-1}, \quad x = (x_1, \dots, x_6),$$

unde $B_1(0)$ este bila unitate din \mathbb{R}^6 centrata in origine.

- 5). Sa se scrie formula operatorului Laplacian Δ pentru functii cu simetrie radiala din \mathbb{R}^6 .
- 6). Calculati Δu .
- 7). Aratati ca

$$\Delta(\Delta u) = 9 \frac{u}{|x|^4}, \quad \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

- 8). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ are loc $u \in L^p(B_1(0))$.
- 9). Aratati ca

$$\operatorname{div} \left(\frac{x}{|x|^2} \right) = \frac{4}{|x|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^6 \setminus \{0\}.$$

Problema 2. (3p). Consideram urmatoarea problema de tip "unde"

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) + 2u_{tx} - 3u_{xx}(x, t) = t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

unde $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ sunt functii date. Consideram

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{t^3}{6}.$$

- i). Scrieti ecuatia satisfacuta de v
- ii). Aratati ca pentru orice functie w de clasa C^2 avem

$$w_{tt}(x, t) + 2w_{tx} - 3w_{xx}(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + 3 \frac{\partial}{\partial x} \right) w.$$

iii). Pentru v de mai sus notam

$$z(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + 3 \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Gasiti ecuatia satisfacuta de z .

iv). Gasiti forma generala a functiei z .

v). Cu z determinat anterior rezolvati ecuatia

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} = z(x, t)$$

si scrieti forma generala a lui v .

vi). Folosind conditiile asupra lui v la $t = 0$ din enunt obtineti pe v si apoi deduceti solutia u a problemei (1) in cazul particular $f(x) = 1$ si $g(x) = x^2$.

Problema 3. (3p). Se considera problema Dirichlet omogena

$$(2) \quad \begin{cases} -u''(x) + e^x u(x) = x, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Definim o solutie slaba pentru (2) ca fiind o functie $u \in H_0^1(0, 1)$ ce satisface formularea variationala

$$(3) \quad \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 e^x u v dx = \int_0^1 x v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

1). Aratati cat mai detaliat ca daca $u \in C^2([0, 1])$ este solutie clasica pentru (2) atunci u este solutie slaba pentru (2) in sensul lui (3).

2). Aratati cat mai detaliat ca formularea variationala (3) se gaseste in conditiile aplicarii lemei Lax-Milgram si aratati ca exista o unica solutie slaba $u \in H_0^1(0, 1)$ in sensul lui (3).