Examen Restanță - Sesiunea Iunie 2023

9 Iunie 2023

⚠ Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Sunt autorizate doar cele două foi A4 semnate și eventual calculatoare electronice de mână. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Se va ține cont de modul de redactare a soluției. Dacă nu puteți rezolva un subpunct, îl puteți folosi pentru restul exercițiului. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de volum n dintr-o populație Geometrică, $\mathrm{Geom}(\theta)$, a cărei funcție de masă este dată de

$$f_\theta(x) = \mathbb{P}_\theta(X = x) = \theta(1-\theta)^{x-1}, \quad \forall x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

unde $\theta \in (0, 1)$ este necunoscut.

1. Fie $(B_k)_{k\geq 1}$ un șir de variabile aleatoare i.i.d. repartizate $\mathcal{B}(\theta)$. Plecând de la acest șir propuneți o metodă de simulare din populația f_θ știind că $\theta = \frac{1}{3}$. Scrieți un cod R care să implementeze această metodă. 1.5p
2. Descrieți cum se aplică metoda inversă pentru a genera o observație din populația f_θ știind că $\theta = \frac{1}{3}$. Scrieți un cod R care să implementeze această metodă. 1.5p
3. Fie $\lambda > 0$, Y o variabilă aleatoare repartizată $\mathrm{Exp}(\lambda)$ și $T = \lceil Y \rceil$ partea întreagă superioară a lui Y (adică $\lceil 0.3 \rceil = 1$ și $\lceil 3 \rceil = 3$). Determinați repartiția variabilei aleatoare T și propuneți o metodă de simulare din populația f_θ. Pentru $\theta = \frac{1}{3}$, scrieți un cod R care să implementeze această metodă. 2p
4. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ pentru θ. 1p
5. Arătați că estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ este consistent și derivați repartiția asimptotică a acestuia. 2p
6. Determinați marginea Rao-Cramer și verificați dacă estimatorul $\hat{\theta}_n$ este eficient. 2p

Exercițiul 2

10p

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de volum n dintr-o populație de densitate f_θ dată de

$$f_\theta = A(\theta)e^{-\theta x}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x),$$

cu $\theta > 0$ un parametru necunoscut iar $A(\theta)$ o funcție care depinde de θ.

1. Determinați $A(\theta)$ astfel încât f_θ să fie densitate de repartiție și calculați funcția de repartiție F_θ. Scrieți un cod R care să traseze graficul funcției F_θ pentru 3 valori alese de voi pentru θ. . 1p
2. Pentru $\theta = 8$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0, 1]$: $u_1 = 0.693$, $u_2 = 0.773$ și $u_3 = 0.024$. Descrieți procedura și scrieți un cod R care să permită acest lucru. 1p
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ și verificați dacă este bine definit. 1p
4. Studiați consistența estimatorului $\hat{\theta}_n$ și determinați repartiția lui asimptotică. 2p
5. Calculați eroarea pătratică medie pentru $\hat{\theta}_n$[1]. 2p
6. Fie $\tilde{\theta}_n = \frac{n-1}{n}\hat{\theta}_n$. Verifică $\tilde{\theta}_n$ proprietăți similare de convergență cu $\hat{\theta}_n$ (consistență, repartiție limită)? 1.5p
7. Pe care dintre cei doi estimatori, $\hat{\theta}_n$ sau $\tilde{\theta}_n$, îl preferați? MSE 1.5p

Exercițiul 3

10p

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de volum n dintr-o populație cu funcția de repartiție $F(x - \theta)$ unde:

a) F admite ca densitate de repartiție $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$ pe $[-1, 1]$;

b) F admite ca densitate de repartiție $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Pentru fiecare caz în parte:

1. Propuneți o metodă de simulare din populația f. Scrieți un cod R care să implementeze aceste metode. 2p
2. Determinați estimatorul pentru θ obținut prin metoda momentelor $\tilde{\theta}_n$. 2p
3. Determinați mediana $x_{1/2}$ repartiției $F(x - \theta)$. Plecând de la aceasta deduceți un estimator $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ. 2p
4. Comparați varianțele repartițiilor asimptotice ale lui $\tilde{\theta}_n$ și $\hat{\theta}_n^M$. 4p