

NUME:
PRENUME:
GRUPA:

INSTRUCȚIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menționându-se explicit numărul problemei și subpunctul acesteia.
3. Pe prima pagină a rezolvării fiecărei probleme, vor fi scrise **cu litere de tipar numele și prenumele studentului, precum și grupa acestuia**.
4. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puțin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
5. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 11:00–13:30.**
6. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email:
 - ca fișier PDF, împreună cu fișierul cu subiectele examenului la adresa liviu.marin@fmi.unibuc.ro (Prof. dr. Liviu MARIN);
 - vor avea următoarea **linie de subiect**:
[Examen AnNum - Nume si prenume student, Grupa 3XX](#)
7. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **joi, 28 ianuarie 2021, orele 14:00.**

Analiză Numerică
Examen – Anul III – Subiectul#28

I. Fie $A > 0$ și funcția $\phi(x) = 2x - Ax^2$.

- (a) Arătați că dacă metoda iterativă de punct fix asociată funcției ϕ converge către o limită nenulă, atunci această limită este $1/A$.
- (b) Determinați o vecinătate a lui $1/A$ pentru care metoda iterativă de punct fix asociată funcției ϕ converge dacă aproximarea inițială x_0 se găsește în această vecinătate.

II. Fie $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

- (a) Determinați polinomul de interpolare Hermite $H_3(x)$, $x \in [-1, 1]$, asociat funcției f și nodurilor de interpolare $x_0 = -1$ și $x_1 = 1$.
- (b) Calculați $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$.
- (c) Calculați $\int_{-1}^1 H_3(x) dx$.
- (d) Calculați cuadratura Simpson asociată funcției f și nodurilor $y_0 = -1$, $y_1 = 0$ și $y_2 = 1$, i.e. $I_2(f)$.

III. Câte subintervale egale ale lui $[0, 2]$ sunt necesare pentru a aproxima $I = \int_0^2 (x^3 - 1) dx$ cu o eroare absolută de cel mult 10^{-6} folosind formula de cuadratură sumată a trapezului, $I_{1,m}(f)$.

IV. Fie funcția pondere $w : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- (a) Folosind procedeul Gram-Schmidt, determinați polinoamele ortogonale în raport cu produsul scalar din $L_w^2(-1, 1)$, $\{T_0, T_1, T_2\} \subset \mathbb{P}_2$ (*polinoamele Cebășev*).
- (b) Determinați cea mai bună aproximare polinomială $p_2 \in \mathbb{P}_2$ în norma $\|\cdot\|_{2,w}$ a funcției

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0) \\ 1, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$