Examen[1] la Geometrie I, seria 11, 31.01.2021

Nume și prenume: [redacted]

Grupa: 113

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Dacă parabola $\mathcal{P}$ are ecuaţia $\mathcal{P} : y^2 - 6x = 0$, atunci punctul $P = (6, -3)$ aparţine dreptei directoare a lui $\mathcal{P}$. **(0,7p)**

2. Dreptele din plan $d_1 : 2x + \alpha y - 1 = 0$ şi $d_2 : \beta x - 3y + 5 = 0$ sunt paralele dacă şi numai dacă $3\alpha = 2\beta$. **(0,7p)**

3. Dacă $A = (2, 0), B = (\alpha, -1)$ şi $C = (5, 1)$, atunci aria triunghiul ABC nu depinde de numărul $\alpha \in \mathbb{R}$. **(0,7p)**

4. Dacă în spaţiul real $\mathbb{R}^3$ avem $d : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & - & 3y & + & z & - & 1 & = & 0 \\ x & & & + & 3z & & & = & 0 \end{array} \right.$ şi $\pi : 4x - 2y + 2z - 3 = 0$, atunci $d \parallel \pi$. **(0,7p)**

5. Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f \neq id_{\mathbb{R}^2}$, este o izometrie şi $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$, atunci f este o simetrie (centrală sau axială). **(0,7p)**

II. Redactaţi rezolvările complete[2]:

1. În planul $\mathbb{R}^2$, fie dreapta $d : x + 3y - 2 = 0$ şi funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2)$.

a) Arătaţi că f este o simetrie axială şi determinaţi axa de simetrie. **(0,75p)**

b) Aflaţi ecuaţia dreptei $d' = f(d)$ şi calculaţi $\cos \angle(d, d')$. **(0,75p)**

c) Găsiţi ecuaţia unei conice nedegenerate care este tangentă la d şi d'. **(0,5p)**

2. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie conica

$$\Gamma : 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$$

a) Aflaţi natura conicei Γ. Precizaţi dacă este nedegenerată şi dacă are centru unic. **(0,5p)**

b) Aduceţi Γ la o formă canonică şi precizaţi reperul ortonormat pozitiv orientat în care are această formă. **(1p)**

3. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie cercurile neconcentrice

$$\mathcal{C}_1 : f_1(x, y) = x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$\mathcal{C}_2 : f_2(x, y) = x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

şi d axa lor radicală.

Considerăm mulţimea de conice

$$\mathcal{F} = \{\Gamma_{\alpha_1, \alpha_2} : \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0\}.$$

a) Demonstraţi că $d \in \mathcal{F}$ şi este singura dreaptă din $\mathcal{F}$. **(0,25p)**

b) Demonstraţi că cercurile din $\mathcal{F}$, diferite de $\mathcal{C}_1$, au axa radicală cu $\mathcal{C}_1$ dreapta d. **(0,75p)**

c) Demonstraţi că dacă $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B\}$, atunci cercurile din $\mathcal{F}$ sunt exact cercurile ce trec prin punctele A şi B. **(0,25p)**

d) Demonstraţi că dacă $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, atunci cercurile din $\mathcal{F}$ sunt disjuncte două câte două. **(0,25p)**

4. Considerăm $\mathbb{R}^2$ planul euclidian.

a) Fie $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ o conică. Demonstraţi că dacă $A, B, C, D \in \Gamma$ sunt vârfurile unui paralelogram cu centru O, atunci O este şi centru al conicei Γ. **(1p)**

b) Demonstraţi că singura conică în care nu poate fi înscris un paralelogram (eventual degenerat) este parabola. **(0,5p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. Nota pe lucrare este minimul dintre suma punctajelor şi 10. Timp de lucru: 3 ore. Succes!

[2] Puteţi presupune un subpunct adevărat în subpunctele următoare, chiar dacă nu aţi reuşit să îl demonstraţi.

NUME: [redacted]
GRUPA: 113

Examen geometrie 31.01.2021.

Subiectul I

1. $P: y^2-6x=0$ $\quad P(6,3)\in d$?

d- dreapta directoare

$P: y^2=2px \Rightarrow d: x=\frac{-p}{2}$

$P: y^2=6x \Rightarrow p=3 \Rightarrow d: x=\frac{-3}{2}$

$P\in d \Leftrightarrow 6=\frac{-3}{2}$ (F) $\Rightarrow P(6,3)\notin d$ - dreapta directoare a lui P. $\Rightarrow$ Fals

2. $d_1: 2x+\alpha y-1=0$

$d_2: \beta x-3y+5=0$

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ unde a_1, b_1 - coef din d_1
a_2, b_2 - coef din d_2

$\begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ \beta & -3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -6=\alpha\beta$

$3\alpha=2\beta$ Fals

3. $A(2,0)$ $\quad B(\alpha,-1)$ $\quad C(5,1)$

aria nu depinde de α?

$\mathcal{A}_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2+0+\alpha-(-5+2+0)=-2+\alpha+5-2=1+\alpha$

Fals, aria depinde de α.

4. În spațiul $\mathbb{R}^3$ avem

$$d: \begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x \quad\quad + 3z \quad = 0 \end{cases} \qquad \pi: 4x - 2y + 2z - 3 = 0$$

$d \parallel \pi$?

~~$d \parallel \pi \Leftrightarrow \quad \ldots \quad a_2, b_2, c_2)\rangle_{\mathbb{R}} \perp \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$~~

$d \parallel \pi \Leftrightarrow (a, b, c) \in \langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)\rangle_{\mathbb{R}}$

(a, b, c) - vectorul normal la $\pi = (4, -2, 2)$

$(a_1, b_1, c_1) = (2, -3, 1)$

$(a_2, b_2, c_2) = (1, 0, 3)$

Sau $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -36 - 2 + 0 - (-6 + 0 - 12) =$$
$$= -38 + 18 = -20 \neq 0 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 3$$

Deci $d \not\parallel \pi \Rightarrow$ Fals

5. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f \neq id_{\mathbb{R}^2}$ este o izometrie

$f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$ atunci f este o simetrie (centrală sau axială)

f izometrie $\Rightarrow$ din teorema fundamentală a geometriei euclidiene, în plan:

$(\exists)\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I_2$ și $b \in \mathbb{R}^2$ a.î.

$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$

$f \circ f = f(f(x, y)) = f\left(A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b\right) = A\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b\right) + b$

Din teorema 4.2.2. $\Rightarrow$ orice izometrie a planului este o compunere de (cel mult) trei simetrii axiale.

Subiectul I

1\. În planul $\mathbb{R}^2$ fie $d: x+3y-2=0$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2\right)$

a) f - simetrie axială și determinați axa de simetrie

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verificăm dacă ${}^tA \cdot A = I_2 = A \cdot {}^tA$, unde $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$$A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} + \frac{16}{25} & \frac{12}{25} - \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} - \frac{12}{25} & \frac{16}{25} + \frac{9}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A \in O(2)$ - grupul matricelor ortogonale, deci A este izometrie.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{vmatrix} = \frac{-9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-25}{25} = -1 \Rightarrow f\text{- simetrie axială.}$$

Punctele fixe ale lui f sunt soluțiile ecuației $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = x \\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 = y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{5}x - x + \frac{4}{5}y = 1 \\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = 1 & |\cdot 2 \\ \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y = -2 & (+) \end{cases}$$

$0 = 0 \Rightarrow$ f are puncte fixe

Fie $B(0,0) \Rightarrow f(B) = (-1,2)$

$C(5,5) \Rightarrow f(C) = (6,3)$

Fie M - mijlocul lui $B, f(B)$ $\quad M\left(\frac{x_B + x_{f(B)}}{2}, \frac{y_B + y_{f(B)}}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$

M' - mijlocul lui $C, f(C)$ $\quad M'\left(\frac{x_C + x_{f(C)}}{2}, \frac{y_C + y_{f(C)}}{2}\right) \Rightarrow M'\left(\frac{11}{2}, 4\right)$

Ecuația axei de simetrie va fi determinată de punctele M și M'

$$MM': \frac{x - x_M}{x_{M'} - x_M} = \frac{y - y_M}{y_{M'} - y_M} \Leftrightarrow \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{11}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow 3x + \frac{3}{2} = 6y - 6 \quad |\cdot 3$$

$MM': 6x - 36y + 15 = 0$

b) $d' = f(d)$ $\cos \sphericalangle(d, d') = ?$

$d: x+3y-2=0$ $A(2,0) \in d : 2+3\cdot 0 - 2 = 0$

$B(-1,1) \in d : -1+3-2=0$

$f(A) = \left(\frac{3}{5}\cdot 2 + \frac{4}{5}\cdot 0 - 1, \frac{4}{5}\cdot 2 - \frac{3}{5}\cdot 0 + 2\right) = \left(\frac{6}{5} - 1, \frac{8}{5} + 2\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{18}{5}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow A'\left(\frac{1}{5}, \frac{18}{5}\right)$

$f(B) = \left(\frac{3}{5}\cdot(-1) + \frac{4}{5}\cdot 1 - 1, \frac{4}{5}\cdot(-1) - \frac{3}{5}\cdot 1 + 2\right) = \left(\frac{1}{5} - 1, \frac{-7}{5} + 2\right) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow B'\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Am calculat coordonatele a 2 puncte care aparțin lui d și le-am trecut prin funcția f, deci d' va fi ecuația dreptei determinată de punctele A' și B'.

$A'B': \frac{x - x_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{y - y_{A'}}{y_{B'} - y_{B}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x - \frac{1}{5}}{-\frac{4}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{y - \frac{18}{5}}{\frac{3}{5} - \frac{18}{5}} \Leftrightarrow \frac{5x-1}{-5} = \frac{5y-18}{-15} \overset{(-5)}{\Leftrightarrow} 5x - 1 = \frac{5y-18}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d': 15x - 3 = 5y - 18$

$\Leftrightarrow d': 15x - 5y + 15 = 0 \quad |:5$

$\Leftrightarrow d': 3x - y + 3 = 0$

$\vec{AB} = (-1-2, 1-0) = (-3, 1)$ - vector director pt d

$\vec{A'B'} = \left(-\frac{4}{5} - \frac{1}{5}, \frac{3}{5} - \frac{18}{5}\right) = (-1, -3)$ - vector director pt d'

$\langle \vec{AB} \cdot \vec{A'B'} \rangle = -3\cdot(-1) + 1\cdot(-3) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow d \perp d' \Rightarrow m(\widehat{d, d'}) = 90^\circ$

$\cos(\widehat{d, d'}) = \cos 90^\circ = 0$

2. În planul $\mathbb{R}^2$, fie conica $\Gamma: 2x^2+4xy+2y^2+4x-6y+3=0$

$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ $\det A = \delta = \begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ conica nu are centru unic

$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 3\end{pmatrix}$ $\det\tilde{A} = \Delta = \begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 3\end{vmatrix} = \cancel{12}-\cancel{12}-12-8-18-12 =$
$= -50 \neq 0 \Rightarrow$ conică nedegenerată

Conica este nedegenerată, fără centru unic cu $\delta=0$ și $\Delta\neq 0 \Rightarrow$ parabolă

$P(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=0$

$\det(A-\lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}2-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{pmatrix} =$

$= \begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = \cancel{4}-4\lambda+\lambda^2-\cancel{4} =$

$= \lambda(\lambda-4)$

$\lambda(\lambda-4)=0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ și $\lambda_2=4$

$V_{\lambda_1} = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\}$

$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases}2x+2y=0\\ 2x+2y=0\end{cases} \Rightarrow x=-y$

$V_{\lambda_1} = \{(-y,y) \mid y\in\mathbb{R}\} = \langle(-1,1)\rangle$

$V_{\lambda_2} = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\}$

$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x\\ 4y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2x+2y=4x\\ 2x+2y=4y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-2y=0\\ 2x-2y=0\end{cases} \Rightarrow x=y$

$V_{\lambda_2} = \{(x,x) \mid x\in\mathbb{R}\} = \langle(1,1)\rangle$

$\rightsquigarrow$ baza ortogonală pozitiv orientată $B' = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$\det(B') = \begin{vmatrix}\frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = -1$

Alegem $B' = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{-1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ a.î. $\det(B') = 1$

Facem schimbarea $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B' \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$$

Conica devine:

$$\Gamma: 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 +$$

$$+4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 3 = 0$$

$$\Gamma: 2\left(\frac{1}{2}x'^2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}x'\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{2}y'^2\right) + 4\left(\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}x'^2 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}x'\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{y'^2}{2}\right)$$

$$+\frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{4}{\sqrt{2}}y' - \frac{6}{\sqrt{2}}x' - \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 3 = 0$$

$$\Gamma: x'^2 - \cancel{2x'y'} + y'^2 + 2x'^2 - 2y'^2 + x'^2 + \cancel{2x'y'} + y'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{10}{\sqrt{2}}y' + 3 = 0$$

$$\Gamma: 4x'^2 + y'^2 - 2y'^2 + y'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{10}{\sqrt{2}}y' + 3 = 0$$

$$\Gamma: 4x'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{10}{\sqrt{2}}y' + 3 = 0$$

$$\Gamma: 4\left(x'^2 - 2\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}x' + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2\right) - \frac{10}{\sqrt{2}}y' + 3 - \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2\cdot 4 = 0$$

$$\Gamma: 4\left(x' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{10}{\sqrt{2}}y' \overset{8}{+3} - \frac{1}{8} = 0$$

$$\Gamma: 4\left(x' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{10}{\sqrt{2}}y' - \frac{23}{8} = 0 \quad | \, 4$$

$$\Gamma: \left(x' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{5}{2\sqrt{2}}y' - \frac{23}{32} = 0$$

$$\Gamma: \left(x' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{5}{2\sqrt{2}}\left(y' + \frac{5}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{23}{32}\right) = 0$$

Facem schimbarea

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ y'' = y' + \frac{5}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{23}{32} \end{cases}$$

Conica devine $x''^2 - \frac{5}{2\sqrt{2}}y'' = 0$ – parabolă

reperul ortonormat pozitiv orientat este $B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. În $\mathbb{R}^2$ avem $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ neconcentrice

$\mathscr{C}_1 : f_1(x,y) = x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$

$\mathscr{C}_2 : f_2(x,y) = x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$

d-axa lor radicală

Fie $\mathcal{F} = \{ \Gamma_{\alpha_1,\alpha_2} : \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1^2+\alpha_2^2>0 \}$

a) $d \in \mathcal{F}$ și este singura dreaptă din $\mathcal{F}$

Axa radica a $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ este o dreaptă perpendiculară pe O_1O_2

$$\begin{array}{l} \mathscr{C}_1 : x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \\ \mathscr{C}_2 : x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0 \quad (-) \\ \hline d: (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0 \end{array}$$

$d \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (\exists) \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\alpha_1^2+\alpha_2^2>0$ a.î. $d: \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2)x^2 + (\alpha_1+\alpha_2)y^2 + (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)x + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)y + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = 0 \Rightarrow$

$$d \in \mathcal{F} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=0 & \text{(nu avem } x^2 \text{ și } y^2\text{)} \\ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = a_1 - a_2 & \text{(coeficienții lui } x\text{)} \\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = b_1 - b_2 & \text{(coeficienții lui } y\text{)} \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = c_1 - c_2 & \text{(termenii liberi)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$, dar $\alpha_1^2+\alpha_2^2>0 \Rightarrow \alpha_1 \neq 0$

Deci $d: \alpha_1 f_1 - \alpha_1 f_2 = 0$

$d: \alpha_1(f_1 - f_2) = 0$