

Restanță la TEORIA MĂSURII ȘI INTEGRĂRII ¹
an II, sem. I, grupele 201, 202, 221, 222

5.06.2021

Numele și prenumele

Grupa

Punctaj seminar

Subiectul 1. Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(\frac{1}{2}, \infty)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n d\lambda,$$

unde λ este măsura Lebesgue pe \mathbb{R} .

Subiectul 2. a) Considerăm mulțimile

$$A = [-2, 2] \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}; \quad B = \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Decideți dacă mulțimile A și B sunt măsurabile Lebesgue și, dacă este posibil, calculați $\lambda(A)$ și $\lambda(B)$.

b) Pentru orice $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R})$ definim $\mu(A) = \int_A \frac{x}{x+1} 1_{[0, \infty)} d\lambda(x)$. Demonstrați că $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}), \mu)$ este un spațiu cu măsură și calculați $\mu(\mathbb{R})$.

Subiectul 3. Considerăm funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x \in (1, 2] \cup \{0\} \\ 2n, & \text{dacă } x \in (\frac{1}{(n+1)^4}, \frac{1}{n^4}], \text{ pentru } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Decideți dacă funcția f este măsurabilă Lebesgue.

b) Decideți dacă funcția f este integrabilă Lebesgue.

Subiectul 4. Calculați integrala curbilinie următoare în două moduri (direct și folosind teorema lui Green):

$$I = \int_{\gamma} (2x + 1)dx + (2xy + 3)dy,$$

unde γ este conturul triunghiului OAB , $O(0, 0)$, $A(-2, 2)$ și $B(4, 4)$, parcurs în sens trigonometric.

Subiectul 5. Considerăm X o mulțime cu cel puțin două elemente și (X, \mathcal{N}) un spațiu măsurabil.

a) Demonstrați că pentru orice funcție $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ măsurabilă, funcția $|f|$ este măsurabilă.

b) Dați exemplu de σ -algebră \mathcal{N} și funcție $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ cu proprietatea că $|f|$ este măsurabilă, dar funcția f nu este măsurabilă.

c) Determinați toate σ -algebrele \mathcal{N} ale mulțimii X care au proprietatea că pentru orice funcție $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$, f este măsurabilă dacă și numai dacă $|f|$ este măsurabilă.

¹Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10. Rezolvările trebuie scanate și trimise împreună cu subiectul primit sub forma unui singur fișier pdf în formularul Google corespunzător. Succes!