Tutoriat 3

Def: $\mathcal{F}$ familie indexată după I (mulțime) = un grafic cu domeniul I.

Not. $\mathcal{F}_i = (i, x) \in \mathcal{F}$ (perechea unică)

Not. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i \in I}$.

Def. $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ se definesc ca fiind reuniunea, respectiv intersecția imaginii ca grafic a lui $\mathcal{F}$.

Produsul cartezian al lui $\mathcal{F} = \{(f_i)_{i \in I} \mid f_i \in \mathcal{F}_i \ (\forall)\, i \in I\}$.

Această mulțime există căci orice element din ea, este element al lui $\mathcal{P}(I \times \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i)$.

TIPURI DE RELAȚII BINARE:

Fie A mulțime, R rel. pe A. Scriem xRy pentru $(x,y) \in R$, $(\forall)\, x, y$. Spunem că R este:

- reflexivă: $(\forall)\, x \in A$, xRx
- simetrică: $(\forall)\, x, y \in A$ cu $xRy \Rightarrow yRx$
- tranzitivă: $(\forall)\, x, y, z \in A$ cu xRy și $yRz \Rightarrow xRz$
- de echivalență: reflexivă + simetrică + tranzitivă
- totală: $(\forall)\, x, y \in A$ avem xRy sau yRx
- antisimetrică: $(\forall)\, x, y \in A$ cu xRy și $yRx \Rightarrow x = y$.
- de ordine parțială: reflexivă + antisimetrică + tranzitivă
- ireflexivă: $(\forall)\, x \in A$ nu avem xRx
- asimetrică: $(\forall)\, x, y \in A$ cu xRy nu avem yRx.

Prop: Fie R rel. tranzitivă pe A. Atunci R ireflexivă $\Leftrightarrow$ R asimetrică.

Def: R s.n. rel. de ordine strictă dacă este ireflexivă și tranzitivă

Prop: Fie A mulțime

- Dacă $\leq$ rel. de ord. parț. pe A și $< \subseteq A \times A$ definită ca $\{(a,b) / a \leq b$ și $a \neq b\}$, atunci $<$ este relație de ordine strictă pe A.
- Dacă $<$ rel. de ord. strictă pe A. și $\leq \subseteq A \times A$ definită ca $\{(a,b) / a<b$ sau $a=b\}$, atunci $\leq$ relație de ordine parțială pe A.

Def: Fie A mulțime, $\leq$ relație de ordine. și $S \subseteq A$.

- $m \in A$ este maximul dacă $a \leq m$ $(\forall)$ $a \in A$.
- $m \in A$ este minimul dacă $a \geq m$ $(\forall)$ $a \in A$
- $m \in A$ este element maximal dacă :

$(\forall) s \in A$ cu $m \leq s \implies s \leq m$.

- $m \in A$ este element minimal dacă:

$(\forall)$ $s \in A$ cu $s \leq m \implies m \leq s$.

- $m \in A$ este minorant al lui S dacă $m \leq s$ $(\forall) s \in S$.
- $m \in A$ este majorant al lui S dacă $m \geq s$ $(\forall) s \in S$.
- un element (m) minorant din A pentru S se numește infimum al lui S dacă

$(\forall)$ y minorant al lui S în A, $y \leq m$.

- un element (m) majorant în A al lui S s.n. supremum al lui S dacă:

$(\forall)$ y majorant al lui S în A, $y \geq m$.

Def: $(\forall)\, x \in A$, clasa de echivalență $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$

Prop: 1) $A = \bigcup_{x \in A} [x]$

Dem: „$\supset$" Fie $y \in \bigcup_{x\in A} [x] \Rightarrow (\exists)\, x_0 \in A$ a.î. $y \in [x_0] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \in A$ a.î. $x_0 \sim y$. Deci $\bigcup_{x\in A} [x] \subset A$.

„$\subset$" Fie $x_0 \in A$.

$\sim$ rel. de echiv. $\Rightarrow \sim$ sim. i.e. $x_0 \sim x_0 \ (\forall)\, x_0 \in A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0 \in [x_0] \ (\forall)\, x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in \bigcup_{x\in A} [x]$.

Deci $A \subset \bigcup_{x\in A} [x]$.

În concluzie, $A = \bigcup_{x\in A} [x]$.

2) $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$

Dem: Fie $[x] = \{a \in A /\ a \sim x\}$ și $[y] = \{b \in A /\ b \sim y\}$.

$[x] = [y] \Leftrightarrow$ ~~$((\forall)\, a \in [x] \Leftrightarrow a \in [y])$~~

~~Fie $a \in [x]$~~ $\Leftrightarrow a \in A$ și $x \sim a \Leftrightarrow a \in A$ și $y \sim a$.

Avem $(\forall)\, a \in [x]$: $\left\{\begin{array}{l} x \sim a \\ a \sim y \end{array}\right\} \xLeftrightarrow{\text{tranz}} x \sim y$

3) $[x] \cap [y] = \emptyset \Leftrightarrow x \not\sim y \Leftrightarrow [x] \neq [y]$

Dem: Din 2) avem: $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$, negăm

$[x] \neq [y] \Leftrightarrow x \not\sim y$.

Demonstrăm prima echivalență:

„$\Rightarrow$" $[x] \cap [y] = \emptyset$

P.p. $x \sim y \xRightarrow{\text{sim}} \begin{array}{l} x \in [y] \\ y \in [x] \end{array}$

Dar $\sim$ reflexivă $\Rightarrow \begin{array}{l} x \in [x] \\ y \in [y] \end{array}$

$\Rightarrow [x] \cap [y] = \{x, y\}$ abs.

Deci $x \not\sim y$.

„$\Leftarrow$" $x \not\sim y$.

P.p. $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists)\, \underset{a \in A}{a \in [x] \cap [y]} \Leftrightarrow \underset{a\in A}{a \in [x] \text{ și } a \in [y]}. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \sim x \\ a \sim y \\ a \in A \end{array}\right. \xRightarrow{\text{sim}} \left\{\begin{array}{l} a \sim x \\ y \sim a \end{array}\right. \xRightarrow{\text{tranz}} x \sim y$ abs

Deci $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Am obținut, $[x] \cap [y] = \emptyset \Leftrightarrow x \not\sim y \Leftrightarrow [x] \neq [y]$.