Seminarul 1 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

1 Geometrie analitică în spaţiul euclidian tridimensional. Recapitulare

Exercițiul 1.1: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm punctele

$$A = (1, -2, -2), B = (-5, 0, -1), C_\alpha = (-2, -1, \alpha)\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Determinaţi α astfel încât A, B, C_α coliniare.

b) Daţi exemplu, dacă există, de punct D_α ale cărui coordonate sunt expresii de gradul 1 în α astfel încât A, B, D_α să nu fie coliniare pentru niciun $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 1.2: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm punctele

$$A = (1, 0, 0), B = (1, -1, 1), C = (2, 0, 3).$$

Determinaţi punctul D astfel încât $ABCD$ să fie paralelogram.

Exercițiul 1.3: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm punctele

$$A = (1, 0, 0), B = (1, -1, 1), C = (1, \alpha, \beta),\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Determinaţi α, β astfel încât $\triangle ABC$ este dreptunghic.

Exercițiul 1.4: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm punctele $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 1)$ şi planul $\pi : 2x - 3y + 5z - 2 = 0$.

Determinaţi locul geometric al punctelor C din planul π astfel încât $\triangle ABC$ este dreptunghic în B.

Exercițiul 1.5: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm dreapta

$$d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$$

şi planul $\pi : 4x - y - z = 1$. Determinaţi poziţia relativă a lui d şi π.

Exercițiul 1.6: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm punctele

$$A = (0, 0, 0), B = (2, 3, 1), C = (1, -1, 1).$$

Determinaţi:

a) Centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABC$.

b) Centrul cercului circumscris triunghiului $\triangle ABC$.

c) Ortocentrul triunghiului $\triangle ABC$.

d) Centrul cercului înscris în triunghiul $\triangle ABC$.

Exercițiul 1.7: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm dreaptele

$$d_1 : \frac{x+\alpha-1}{\alpha} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+\alpha-1}{\alpha} \text{ şi } d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

a) Arătaţi că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, dreptele d_1 şi d_2 sunt coplanare şi, pentru $\alpha = 1$, găsiţi ecuaţia planului determinat de d_1 şi d_2.

b) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $d_1 \perp d_2$ şi, în acest caz, aflaţi distanţa de la punctul $P = (2, 3, 4)$ la dreapta d_1.

Exercițiul 1.8: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm dreaptele

$$d_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \text{ şi } d_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-8}{-6} = \frac{z-3}{-2}.$$

Demonstraţi că dreptele sunt coplanare şi scrieţi ecuaţia planului pe care îl determină.

Exercițiul 1.9: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm dreaptele

$$d_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \text{ şi } d_2 : \frac{x+1}{7} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z-3}{1}.$$

Demonstraţi că dreptele sunt coplanare şi scrieţi ecuaţia planului pe care îl determină.

Exercițiul 1.10: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm dreaptele

$$d_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \text{ şi } d_2 : \frac{x+1}{7} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z-4}{1}.$$

Studiaţi dacă dreptele sunt coplanare, iar dacă nu, aflaţi ecuaţia perpendicularei comune la ele.

Exercițiul 1.11: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, fie $\pi_1 : 2x-y-z-2 = 0$, $\pi_2 : x+2y+2z+1 = 0$, $\pi_3 : x + 7y + 7z + \alpha = 0$ şi $A = (1, -2, 5)$.

a) Aflaţi ecuaţia parametrică a dreptei $d = \pi_1 \cap \pi_2$.

b) Calculaţi simetricul punctului A faţă de planul π_2.

c) Calculaţi simetricul punctului A faţă de dreapta d.

d) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât π_1, π_2, π_3 se intersectează după o dreaptă.

Seminarul 2 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

2 Spaţii afine. Combinaţii afine. Exerciţii

Exercițiul 2.1: Fie K un corp comutativ şi sistemul de ecuaţii liniare $AX = b$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), b \in K^m$.

Dacă

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} = \{X \in K^n \mid AX = b\} \subset K^n \\ &V = \{X \in K^n \mid AX = 0\} \subset K^n \\ &\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V, \varphi(X, Y) = Y - X, \end{aligned}$$

demonstraţi că $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ este un spaţiu afin.

Exercițiul 2.2: Fie $\mathbb{A}^3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3_{/\mathbb{R}}, \varphi)$ spaţiul real tridimensional cu structura afină canonică. Demonstraţi că punctele A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă $\{A, B, C\}$ este o mulţime afin dependentă.

Exercițiul 2.3: Fie $\mathbb{A}^2 = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2_{/\mathbb{R}}, \varphi)$ spaţiul real bidimensional cu structura afină canonică şi $A, B, C \in \mathbb{A}^2$. Demonstraţi că $\{A, B, C\}$ este sistem afin de generatori dacă şi numai dacă A, B, C nu sunt coliniare.

Exercițiul 2.4: Fie $\mathbb{A}^4 = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4_{/\mathbb{R}}, \varphi)$. Verificaţi dacă:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{A}^4,$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{A}^4,$

sunt sisteme afin independente şi sisteme afine de generatori.

Exercițiul 2.5: În $\mathbb{A}^2$, fie $A_1, ..., A_6$ vârfurile unui hexagon. Pentru orice $\Delta \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |\Delta| = 3$, fie

$$\begin{aligned} G_\Delta &= \frac{1}{3}A_{i_1} + \frac{1}{3}A_{i_2} + \frac{1}{3}A_{i_3},\ \{i_1, i_2, i_3\} = \Delta, \\ G_{\Delta'} &= \frac{1}{3}A_{j_1} + \frac{1}{3}A_{j_2} + \frac{1}{3}A_{j_3},\ \{j_1, j_2, j_3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \Delta. \end{aligned}$$

Demonstraţi că toate $G_\Delta G_{\Delta'}$ sunt concurente.

Exercițiul 2.6: Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ un spaţiu afin şi $M = \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \mathcal{A}$. Demonstraţi că $P \in \mathrm{Af}(M)$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Af}(M) = \mathrm{Af}(M \cup \{P\})$.

Exercițiul 2.7: Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ un spaţiu afin si $M \subset \mathcal{A}$. Demonstraţi că

$$\mathrm{Af}(\mathrm{Af}(M)) = \mathrm{Af}(M).$$

Exercițiul 2.8: Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ un spaţiu afin şi $M \subset \mathcal{A}$. Este adevărat că

$$\mathrm{Af}(M) = \{\alpha P + (1-\alpha)Q \mid P, Q \in M, \alpha \in K\}?$$

Exercițiul 2.9: Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ un spaţiu afin, $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{A}$ şi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in K$ nu toate nule cu $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$.

a) Demonstraţi că funcţia

$$L : \mathcal{A} \to V,\ L(M) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

este constantă.

b) Demonstraţi că $L \equiv 0$ dacă şi numai dacă $A_1, A_2, ..., A_k$ sunt afin dependente.

Exercițiul 2.10: (convexitate în spații afine reale) Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin real. O mulțime $M \subset \mathcal{A}$ se numește *convexă* dacă

$$\forall A, B \in M,\ tA + (1-t)B \in M,\ \forall t \in [0,1].$$

a) Demonstrați că M este convexă $\iff$ $\forall k \geq 2,\ \forall P_1, ..., P_k \in M,\ \forall \alpha_1, ..., \alpha_k \in [0,1]$ cu $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, avem $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i \in M$.

b) Demonstrați că o intersecție arbitrară de mulțimi convexe este convexă.

c) Pentru o submulțime $N \subset \mathcal{A}$, numim *acoperirea convexă* a lui N cea mai mică submulțime convexă ce conține N, notată $\mathrm{conv}(N)$. Demonstrați că

$$\mathrm{conv}(N) = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i \mid k \geq 2,\ P_1, ..., P_k \in N,\ \alpha_1, ..., \alpha_k \in [0,1] \text{ cu } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}.$$

d) Fie $N \subset \mathcal{A}$ o submulțime finită, $|N| \geq 2$. Atunci există o partiție a lui N, $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, astfel încât $\mathrm{conv}(N_1) \cap \mathrm{conv}(N_2) = \emptyset$.

e) (Teorema lui Radon) Fie $N \subset \mathcal{A}$ o submulțime finită, $|N| = m$ și $\dim \mathcal{A} = n$. Presupunem $m \geq n+2$. Atunci există o partiție a lui N, $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, astfel încât $\mathrm{conv}(N_1) \cap \mathrm{conv}(N_2) \neq \emptyset$.

f) (Teorema lui Helly) Fie $M_1, ..., M_r$ submulţimi convexe ale lui $\mathbb{R}^n$ cu $r \geq n+1$. Dacă intersecţia a oricare $n+1$ dintre ele este nevidă, atunci intersecţia tuturor este nevidă.

Seminarul 3 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

3 Repere afine. Subspaţii afine. Exerciţii

Exercițiul 3.1: Fie $\mathbb{A}^3$ spaţiul afin real canonic şi $P_0 = (...), P_1 = (...), P_2 = (...), P_3 = (...)$. Arătaţi că $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ este un reper afin şi determinaţi coordonatele afine ale punctului $M = (...)$ în raport cu $\mathcal{R}$.

Exercițiul 3.2: Fie $(\mathcal{A}, V/K, \varphi)$ un spațiu afin şi $M \subset \mathcal{A}$. Demonstraţi că

$$\mathrm{Af}(M) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}' \supset M \\ \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \text{ subspaţiu afin}}} \mathcal{A}'.$$

Exercițiul 3.3: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p^n$ cu structura afină canonică.

a) Determinaţi numărul de puncte ale unui subspaţiu afin de dimensiune k (în particular, demonstraţi că toate au acelaşi număr de puncte).

b) Determinaţi numărul de subspaţii afine ale lui $\mathbb{Z}_p^n$ de dimensiune k.

- Definiţia paralelismului pentru subspaţii afine.

Exercițiul 3.4: Fie $(\mathcal{A}, V/K, \varphi)$ un spațiu afin și $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$ subspații afine. Arătați că, dacă $\mathcal{A}' \parallel \mathcal{A}''$ și $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' \neq \emptyset$, atunci $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$ sau $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$.

Exercițiul 3.5: Fie $(\mathcal{A}, V/K, \varphi)$ un spațiu afin, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ subspațiu afin, $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}$ și $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ hiperplan afin. Arătați că

$$\mathcal{A}' \parallel \mathcal{H} \iff \mathcal{A}' \subset \mathcal{H} \text{ sau } \mathcal{A}' \cap \mathcal{H} = \emptyset.$$

Exercițiul 3.6: Fie $(\mathcal{A}, V/K, \varphi)$ un spațiu afin. Arătați că orice subspațiu afin al lui $\mathcal{A}$ este o intersecție de hiperplane afine.

Exercițiul 3.7: Fie $(\mathcal{A}, V/K, \varphi)$ un spațiu afin, $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ subspaţii afine şi $k \in K$. Demonstraţi că

$$\mathcal{A}_k = \{(1-k)A_0 + kA_1 \mid A_0 \in \mathcal{A}_0, A_1 \in \mathcal{A}_1\}$$

este subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$. Determinaţi dimensiunea sa.

Seminarul 4 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

4 Subspaţii afine. Aplicaţii afine. Exerciţii

Exercițiul 4.1: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^4$ cu structura canonică de spațiu afin și punctele $A = (1, 0, 1, 2), B = (0, 1, 2, 3), C = (0, 0, 1, -1)$. Fie $\mathcal{A}' = \langle \{A, B, C\} \rangle$, subspațiul afin generat de cele trei puncte.

Descrieți $\mathcal{A}'$ prin ecuații implicite și aflați $\dim \mathcal{A}'$.

Exercițiul 4.2: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{C}^3$ cu structura canonică de spațiu afin și dreapta

$$d : \begin{cases} z_1 - iz_2 & = 0 \\ 2z_2 + z_3 + 1 & = 0 \end{cases} .$$

Găsiți ecuațiile parametrice ale lui d. $\mathcal{D}ir(d) =?$

Exercițiul 4.3: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^4$ cu structura canonică de spațiu afin și dreptele

$$\begin{aligned} d_1 &: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0} = \frac{w}{2}, \\ d_2 &: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{0} = \frac{w-1}{2}, \\ d_3 &: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1} = \frac{w-1}{1}. \end{aligned}$$

Calculați $d_1 \vee d_2$ și $d_1 \vee d_3$.

Exercițiul 4.4: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ cu structura canonică de spațiu afin. Arătați că orice hiperplan în $\mathcal{A}$ separă spațiul. Pentru $\mathcal{A} = \mathbb{C}^n$, arătați că acest rezultat nu mai rămâne valabil.

Exercițiul 4.5: Găsiţi, dacă există, dreptele spațiului afin $\mathbb{R}^3$ care taie simultan dreptele de ecuații:

$$d_1 : \begin{cases} x & = 3z \\ y & = -\frac{3}{2} \end{cases}, d_2 : \begin{cases} x + z & = 0 \\ y & = \frac{3}{2} \end{cases}, d_3 : \begin{cases} x - z & = 3 \\ y & = z \end{cases}, d_4 : \begin{cases} x - z & = 0 \\ y & = z \end{cases} .$$

Exercițiul 4.6: Decideţi dacă următoarele trei plane din spațiul afin $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ aparțin unui aceluiași fascicol:

$$\begin{aligned} &\pi_1 : x - y + z + 5 = 0, \\ &\pi_2 : 2x - 2y + 2z + 77 = 0, \\ &\pi_3 : -x + y - z = 0. \end{aligned}$$

Exercițiul 4.7: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spațiu afin și dreapta

$$d : \begin{cases} x + y & = 1 \\ x - z & = 2 \end{cases} .$$

a) Găsiți ecuații implicite pentru d.

b) Determinați fasciculul de plane care îl conțin pe d.

c) Aflați planul din acel fascicul care conține punctul $P = (1, 0, 0)$.

d) Aflați planele din acel fascicul care intersectează dreapta d', unde

$$d : \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x - y & = 2 \end{cases} .$$

Exercițiul 4.8: Fie $\mathbb{A}^4 = \mathbb{R}^4$ cu structura afină canonică şi $\mathbb{A}^3 = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică. Fie

$$P_0 = (1, -3, 2, 0), P_1 = (2, -2, 3, 0), P_2 = (2, -2, 2, 1),$$
$$P_3 = (2, -3, 3, 1), P_4 = (1, -2, 3, 1).$$

a) Verificaţi că $\mathbb{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$ este un reper afin în $\mathbb{A}^4$.

b) Considerăm $f : \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^3$ unica aplicaţie afină pentru care

$$f(P_0) = ..., f(P_1) = ..., f(P_2) = ..., f(P_3) = ..., f(P_4) = ...$$

Verificaţi dacă f este injectivă, surjectivă, bijectivă.

c) Scrieţi ecuaţia lui f în raportul cu reperele *canonice* din $\mathbb{A}^4$ şi $\mathbb{A}^3$.

Exercițiul 4.9: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică. Considerăm funcţia

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y + 3, 3x + z + 1).$$

a) Arătaţi că f este aplicaţie afină.

b) Fie π planul de ecuaţie

$$\pi : x + y - z = 1$$

şi d dreapta de ecuaţie

$$d : \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z}{3}.$$

Determinaţi ecuaţii pentru $f(\pi)$ şi $f(d)$.

c) Există plane $\pi' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(\pi')$ este dreaptă? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

d) Există plane $\pi' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(\pi')$ este plan şi $\pi' \parallel f(\pi')$? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

e) Există drepte $d' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(d) = d$? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

Exercițiul 4.10: Fie K un corp comutativ şi $n \geq 1$. Înzestrăm K^n şi K cu structurile canonice de spaţii afine peste K. Fie $f : K^n \to K$ o aplicaţie afină.

a) Demonstraţi că, dacă f nu este constantă, atunci, pentru orice $\alpha \in K$, există un hiperplan $\mathcal{H} \subset K^n$ astfel încât $\mathcal{H} = f^{-1}(\{\alpha\})$. **(0,6p)**

b) Demonstraţi că dacă există $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ hiperplane, $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$, astfel încât $f_{|\mathcal{H}_1} = f_{|\mathcal{H}_2} = c \in K$, atunci f este constantă. **(0,4p)**

Seminarul 5 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

5 Aplicaţii afine. Exerciţii

Exercițiul 5.1: Fie $\mathbb{A}^4 = \mathbb{R}^4$ cu structura afină canonică şi $\mathbb{A}^3 = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică. Fie

$$P_0 = (1, -3, 2, 0), P_1 = (2, -2, 3, 0), P_2 = (2, -2, 2, 1),$$
$$P_3 = (2, -3, 3, 1), P_4 = (1, -2, 3, 1).$$

a) Verificaţi că $\mathbb{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$ este un reper afin în $\mathbb{A}^4$.

b) Considerăm $f : \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^3$ unica aplicaţie afină pentru care

$$f(P_0) = ..., f(P_1) = ..., f(P_2) = ..., f(P_3) = ..., f(P_4) = ...$$

Verificaţi dacă f este injectivă, surjectivă, bijectivă.

c) Scrieţi ecuaţia lui f în raportul cu reperele *canonice* din $\mathbb{A}^4$ şi $\mathbb{A}^3$.

Exercițiul 5.2: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică. Considerăm funcţia

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y + 3, 3x + z + 1).$$

a) Arătaţi că f este aplicaţie afină.

b) Fie π planul de ecuaţie

$$\pi : x + y - z = 1$$

şi d dreapta de ecuaţie

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{3}.$$

Determinaţi ecuaţii pentru $f(\pi)$ şi $f(d)$.

c) Există plane $\pi' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(\pi')$ este dreaptă? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

d) Există plane $\pi' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(\pi')$ este plan şi $\pi' \parallel f(\pi')$? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

e) Există drepte $d' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(d) = d$? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

Exercițiul 5.3: Fie K un corp comutativ şi $n \geq 1$. Înzestrăm K^n şi K cu structurile canonice de spaţii afine peste K. Fie $f : K^n \to K$ o aplicaţie afină.

a) Demonstraţi că, dacă f nu este constantă, atunci, pentru orice $\alpha \in K$, există un hiperplan $\mathcal{H} \subset K^n$ astfel încât $\mathcal{H} = f^{-1}(\{\alpha\})$. **(0,6p)**

b) Demonstraţi că dacă există $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ hiperplane, $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$, astfel încât $f_{|\mathcal{H}_1} = f_{|\mathcal{H}_2} = c \in K$, atunci f este constantă. **(0,4p)**

Exerciţiul 5.4: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică şi

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ f(x, y, z) = (4x - 12, 4y + 6, 4z - 3).$$

a) Demonstraţi că f este o omotetie şi aflaţi centrul şi raportul ei.

b) Fie planul $\pi : 4x + 9y - z = 2$. Determinaţi $f(\pi)$.

Exerciţiul 5.5: Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi omotetiile $H_{O_1,\lambda_1}, H_{O_2,\lambda_2}$.

a) Demonstraţi că dacă $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, $H_{O_1,\lambda_1} \circ H_{O_2,\lambda_2}$ este o omotetie şi determinaţi centrul şi raportul ei.

b) Demonstraţi că dacă $\lambda_1\lambda_2 = 1$, $H_{O_1,\lambda_1} \circ H_{O_2,\lambda_2}$ este o translaţie şi determinaţi vectorul de translaţie.

Exerciţiul 5.6: Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi omotetiile $H_1 = H_{O_1,\lambda_1}, H_2 = H_{O_2,\lambda_2}$. Presupunem că există $A \in \mathcal{A}$ astfel încât $(H_1 \circ H_2)(A) = (H_2 \circ H_1)(A)$.

Ce puteţi spune despre H_1 şi H_2?

Exerciţiul 5.7: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică, planul $\pi : 4x + 9y - z = 2$ şi $W = \langle(1, 2, 3)\rangle \leq \mathbb{R}^3$.

Determinaţi ecuaţile proiecţiei pe planul π de-a lungul lui W şi a simetriei faţă de planul π de-a lungul lui W.

Reamintire de la curs: Am demonstrat că o aplicaţie liniară $p : V \to V$ este proiecţie vectorială (pe un subspaţiu de-a lungul unui subspaţiu complementar) dacă şi numai dacă $p^2 = p$.

Exerciţiul 5.8: Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ aplicaţie afină.

a) Demonstraţi că π este o proiecţie afină $\iff$ urma sa liniară $p : V \to V$ e proiecţie vectorială şi π are un punct fix.

b) Demonstraţi că π este o proiecţie afină $\iff$ $\pi^2 = \pi$.

Seminarul 6 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

6 Spaţii euclidiene. Exerciţii

Exercițiul 6.1: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică şi dreptele

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$$
$$d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0}$$

Găsiţi o perpendiculară comună pe d_1 şi d_2. Este ea unică?

Exercițiul 6.2: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică, dreapta

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$$

şi planul $\pi : x - 2y + 2z = 1$.

Determinaţi:

a) direcţia normală la planul π.

b) ecuaţia proieţiei ortogonale pe planul π.

c) proieţia ortogonală a dreptei d pe planul π.

d) măsura unghiului format de dreapta d şi planul π.

e) măsura unghiului format de planul π cu planul $\pi' : x + y = 1$.

Exercițiul 6.3: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică. Considerăm planul

$$\pi : \ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$$

şi dreapta

$$d : \ \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 1}{0} = \frac{x_3 - 2}{-1}.$$

Determinaţi

a) $S_\pi(d)$ unde S_π este simetria ortogonală faţa de π;

b) $S_d(\pi)$ unde S_d este simetria ortogonală faţa de d.

Exercițiul 6.4: Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu euclidian şi $H : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ o omotetie de raport λ, $|\lambda| \neq 1$. Arătaţi că H nu se poate descompune în produs de simetrii ortogonale.

Exercițiul 6.5: în $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică considerăm două plane π_1, π_2 astfel încât $\pi_1 \parallel \pi_2, \pi_1 \neq \pi_2$. Fie $O_1 \in \pi_1$, $O_2 \in \pi_2$ puncte astfel încât $O_1O_2 \perp \pi_1$

şi $R_1, R_2 > 0$. Notăm cu $\mathcal{C}_1 \subset \pi_1$ cercul de centru O_1 şi rază R_1 şi cu $\mathcal{C}_2 \subset \pi_2$ cercul de centru O_2 şi rază R_2.

Ce reprezintă mulţimea

$$\mathcal{C}_{R_1,R_2} = \left\{ P \in \mathcal{E} \mid \exists P_1 \in \mathcal{C}_1, P_2 \in \mathcal{C}_2,\ P = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 \right\} ?$$

Exerciţiul 6.6:

a) Demonstraţi că $-I_n \in SO(n) \iff n$ e par.

b) Demonstraţi că $SO(n)$ este subgrup normal al lui $O(n)$ şi calculaţi $O(n)/SO(n)$.

c) Demonstraţi că, dacă n e impar şi $H = \{\pm I_n\}$, atunci $O(n) = SO(n) \times H$ (i.e. $SO(n) \cap H = \{I_n\}$ şi $SO(n)H = O(n)$).

d) Demonstraţi că, dacă n e par, $O(n) \not\simeq SO(n) \times \mathbb{Z}_2$.

Exerciţiul 6.7:

a) Fie $A \in O(n)$ de ordin 2 *i.e.* $A^2 = I_n$. Demonstraţi că A este matricea unei simetrii s faţă de un subspaţiu vectorial i.e. există o bază ortonormală $\{f_1, ..., f_k, f_{k+1}, ..., f_n\}$ astfel încât

$$\begin{aligned} sf_i &= f_i, \forall i = \overline{1,k}, \\ sf_j &= -f_j, \forall j = \overline{k+1,n}. \end{aligned}$$

pentru un $1 \leq k \leq n$.

Echivalent, există $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A = PSP^{-1}$, unde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Demonstraţi că $O(n) \simeq O(m)$ dacă şi numai dacă $n = m$.

Seminarul 7 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

6 Prezentări - raportul a trei puncte coliniare

7 Spaţii euclidiene II. Exerciţii

Exercițiul 7.1: (curs) Demonstraţi că orice matrice $A \in SO(3)$ are 1 ca valoare proprie.

Exercițiul 7.2: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică. Considerăm planul

$$\pi : \; x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$$

şi dreapta

$$d : \; \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 1}{0} = \frac{x_3 - 2}{-1}.$$

Determinaţi

a) $S_\pi(d)$ unde S_π este simetria ortogonală faţa de π;

b) $S_d(\pi)$ unde S_d este simetria ortogonală faţa de d.

Exercițiul 7.3: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ cu structura canonică de spaţiu euclidian. Demonstraţi că o funcţie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o izometrie dacă şi numai dacă există $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, astfel încât

$$f(z) = az + b \text{ sau } f(z) = a\overline{z} + b.$$

Exercițiul 7.4: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ cu structura canonică de spaţiu euclidian şi punctele $A, B, C \in \mathcal{E}$ având coordonatele complexe $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Demonstraţi că $\triangle ABC$ este echilateral (pozitiv orientat) dacă şi numai dacă $a + b\epsilon + c\epsilon^2 = 0$, unde ϵ este rădăcina de ordin 3 a unităţii.

Exercițiul 7.5: (teorema lui Napoleon) Fie un triunghi ABC şi A^*, B^*, C^* celelalte vârfuri ale triunghiurilor echilaterale construite pe laturile acestui triunghi, ca în primul exerciţiu.

Fie E, F, G centrele de greutate ale triunghiurilor A^*BC, B^*AC, C^*AB. Demonstraţi că triunghiul EFG este echilateral.

Seminarul 8 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

8 Hipercuadrice. Exerciţii

Exercițiul 8.1: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ cu structura canonică de spaţiu afin. Aduceţi la formă normală conicele următoare, precizând denumirea lor.

a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$;

b) $x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$;

c) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$;

d) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2 = 0$.

Exercițiul 8.2: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spaţiu afin. Aduceţi la formă normală cuadricele următoare, precizând denumirea lor.

a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$;

b) $x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_3^2 + 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$;

c) $4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$;

d) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2 - 8x_3 - 1 = 0$.

Exercițiul 8.3: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spaţiu afin. Verificaţi că orice conică nedegenerată se poate obţine ca intersecţia conului $x^2+y^2-z^2 = 0$ cu un plan.

Exercițiul 8.4: Fie K un corp, $\mathcal{A} = K^2$ cu structura afină canonică şi $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ conica $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 = 1$. Considerăm $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ o transformare afină cu proprietatea că $\tau(P) = P$ pentru orice $P \in \mathcal{C}$.

a) Arătaţi că dacă $K = \mathbb{R}$ atunci $\tau = id_{\mathcal{A}}$.

b) Rămâne adevărată concluzia de la punctul a) pentru K corp arbitrar?

Exercițiul 8.5: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu euclidian.

a) Scrieţi ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotaţia dreptei de ecuaţii $z = 0, x + 2y = 4$ în jurul axei OX.

b) Scrieţi ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotaţia dreptei de ecuaţii $z = 2, x + y = 1$ în jurul axei OX.

Exercițiul 8.6: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ cu structura euclidiană canonică şi $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ o conică nevidă. Notăm

$$I(\mathcal{C}) := \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid f \text{ izometrie cu } f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}.$$

a) Arătaţi că $I(\mathcal{C})$ este un grup în raport cu compunerea funcţiilor.

b) Determinaţi numărul de elemente ale lui $I(\mathcal{C})$ dacă $\mathcal{C}$ este o parabolă.

c) Determinaţi toate conicele $\mathcal{C}$ pentru care grupul $I(\mathcal{C})$ este infinit.

Exercițiul 8.7: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ cu structura euclidiană canonică, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ un poligon nedegenerat şi

$$\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) := \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid f \text{ izometrie }, f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\}.$$

a) Arătaţi că există $\mathcal{P}$ a.i. $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) \simeq S_3$.

b) Există $\mathcal{P}$ a.i. $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{Z}_4$?

c) Există $\mathcal{P}$ a.i. $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) \simeq S_4$?

Exercițiul 8.8: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu euclidian. Determinaţi planele care intersectează hiperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

după cercuri.

Seminarul 9 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

9 Hipercuadrice euclidiene. Exerciţii

Exercițiul 9.1: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spaţiu euclidian. Aduceţi la formă canonică prin izometrii următoarele cuadrice, precizând denumirea lor.

a) $z^2 + 4xy - 1 = 0$;

b) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz - 27 = 0$;

c) $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$;

d) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 3x - 5y - z = 0$;

e) $x^2 + 6x - 2y + 8z + 3 = 0$.

Exercițiul 9.2: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ cu structura euclidiană canonică şi $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ o conică nevidă. Notăm

$$I(\mathcal{C}) := \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid f \text{ izometrie cu } f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}.$$

a) Arătaţi că $I(\mathcal{C})$ este un grup în raport cu compunerea funcţiilor.

b) Determinaţi numărul de elemente ale lui $I(\mathcal{C})$ dacă $\mathcal{C}$ este o parabolă.

c) Determinaţi toate conicele $\mathcal{C}$ pentru care grupul $I(\mathcal{C})$ este infinit.

Exercițiul 9.3: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ cu structura euclidiană canonică, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ un poligon nedegenerat şi

$$\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) := \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid f \text{ izometrie, } f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\}.$$

a) Arătaţi că există $\mathcal{P}$ a.i. $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) \simeq S_3$.

b) Există $\mathcal{P}$ a.i. $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{Z}_4$?

c) Există $\mathcal{P}$ a.i. $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) \simeq S_4$?

Exercițiul 9.4: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu euclidian. Determinaţi planele care intersectează hiperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

după cercuri.

Exercițiul 9.5: Decideţi dacă există o sferă pe care să se afle cercurile: Γ_1 de centru $(1, -2, -2)$ de rază 2 din planul de ecuaţie $x + y + z + 3 = 0$ şi Γ_2 de centru $(1, 0, 0)$ şi rază 2 din planul de ecuaţie $x - y - z - 1 = 0$. Dacă da, scrieţi ecuaţia sferei.

Exercițiul 9.6: Scrieţi ecuaţia axei de simetrie a conului $\Gamma : x^2 = yz$.

Exercițiul 9.7: Scrieţi ecuaţia conului cu vârful în punctul $(0, 0, 1)$ peste elipsa de ecuaţii $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,\ z = 3$.

Exercițiul 9.8: Decideţi care dintre cuadrice conţin drepte şi determinaţi ecuaţiile lor în cazul în care cuadricele sunt în formă normală.

Exercițiul 9.9: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu euclidian şi $d_1, d_2 \subset \mathcal{E}$ necoplanare. Demonstraţi că reuniunea perpendicularelor din punctele lui d_1 pe d_2 este o conică şi aflaţi tipul ei.

Seminarul 10 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

9 Hipercuadrice euclidiene. Exerciţii

Exercițiul 9.1:

a) Scrieţi ecuaţiile generatoarelor hiperboloidului cu o pânză $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

b) Determinaţi locul geometric al punctelor de pe $\mathcal{H}$ în care generatoarele sunt perpendiculare.

Exercițiul 9.2:

a) Scrieţi ecuaţiile generatoarelor paraboloidului hiperbolic $\mathcal{P} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$.

b) Determinaţi locul geometric al punctelor de pe $\mathcal{P}$ în care generatoarele sunt perpendiculare.

Exercițiul 9.3: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu euclidian şi $d_1, d_2 \subset \mathcal{E}$ necoplanare cu $d_1 \not\perp d_2$. Demonstraţi că reuniunea perpendicularelor din punctele lui d_1 pe d_2 este un paraboloid hiperbolic echilater.

Exercițiul 9.4:

a) Fie $\Gamma \subset K^n$ o hipercuadrică cu centru X_0. Demonstraţi că $T_X\Gamma \parallel T_{S_{X_0}(X)}\Gamma$, pentru orice $X \in \Gamma$.

b) Reciproc, demonstraţi că dacă pentru o hipercuadrică $\Gamma \subset K^n$ există două puncte $X, Y \in \Gamma$ cu $T_X\Gamma \parallel T_Y\Gamma$, atunci Γ are un centru.

Exercițiul 9.5: Scrieţi ecuaţia sferei care conţine cercul de ecuaţii $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 5$, $x + y + z = 1$ şi e tangentă în punctul $(0, 0, 1)$ la planul de ecuaţie $z = 1$.

10 Axiomele planului afin şi ale planului proiectiv. Exerciţii

Axiomele planului afin

Fie $\mathcal{A}$ o mulţime şi $\mathcal{D} \subset 2^{\mathcal{A}}$ (mulţimea părţilor lui $\mathcal{A}$). Vom numi elemente din $\mathcal{D}$ "drepte".

Perechea $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ se numeşte *plan afin* dacă satisface:

A1. Prin orice două puncte distince trece o unică dreaptă.

A2. Există trei puncte necoliniare.

A3. Orice dreaptă conţine cel puţin două puncte.

A4. Pentru orice punct şi orice dreaptă, există o unică paralelă la acea dreaptă prin acel punct.

(unde prin drepte paralele întelegem drepte care nu se intersectează sau coincid)

Axiomele planului proiectiv

Fie $\mathcal{P}$ o mulţime şi $\mathcal{D} \subset 2^{\mathcal{P}}$ (mulţimea părţilor lui $\mathcal{P}$). Vom numi elemente din $\mathcal{D}$ "drepte".

Perechea $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ se numeşte *plan proiectiv* dacă satisface:

P1. Prin orice două puncte distince trece o unică dreaptă.

P2. Există trei puncte necoliniare.

P3. Orice dreaptă conţine cel puţin trei puncte.

P4. Orice două drepte se intersectează.

Exercițiul 10.1: Demonstraţi că orice două drepte dintr-un plan afin au acelaşi număr de puncte.

Exercițiul 10.2: Demonstraţi că orice două drepte dintr-un plan proiectiv au acelaşi număr de puncte.

Exercițiul 10.3: Verificaţi că proiectivizarea unui spaţiu vectorial de dimensiune 3 *i.e.* $\mathbb{P}^2 K$ este un plan proiectiv.

Exercițiul 10.4: Verificaţi că completarea proiectivă (cu dreapta de la infinit) a unui plan afin este un plan proiectiv.

Seminarul 11 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

11 Spaţii afine şi spaţii proiective. Exerciţii

Axiomele spaţiului afin

Fie $\mathcal{A}$ o mulţime, $\Delta \subset 2^{\mathcal{A}}$ (numite "drepte) şi $\Pi \subset 2^{\mathcal{A}}$ (numite "plane").

Tripletul $(\mathcal{A}, \Delta, \Pi)$ se numeşte *spaţiu afin* dacă satisface:

A1. Prin orice două puncte distince trece o unică dreaptă.

A2. Orice dreaptă conţine cel puţin două puncte.

A3. Orice plan $\pi \in \Pi$ (împreună cu dreptele conţinute în el) este un plan afin şi orice trei puncte necoliniare se află într-un un unic plan.

A4. Paralelismul este tranzitiv.

(unde prin drepte paralele întelegem drepte **coplanare** care nu se intersectează sau coincid)

Axiomele spaţiului proiectiv

Fie $\mathcal{P}$ o mulţime şi $\mathcal{D} \subset 2^{\mathcal{P}}$ (numite "drepte").

Perechea $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ se numeşte *spaţiu proiectiv* dacă satisface:

P1. Prin orice două puncte distince trece o unică dreaptă.

P2. Orice dreaptă conţine cel puţin trei puncte.

P3. (Veblen) Dacă $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, $d_1 \cap d_2 = \{O\}$ şi $A_1, B_1 \in d_1$, $A_1 \neq O, B_1 \neq O$, $A_2, B_2 \in d_2$, $A_2 \neq O, B_2 \neq O$, atunci $A_1A_2 \cap B_1B_2 \neq \emptyset$.

Exercițiul 11.1: Verificaţi că, pentru un corp comutativ K, $\mathbb{P}^n K$ este un spaţiu proiectiv.

Exercițiul 11.2: Fie planul proiectiv $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ şi punctele $A = [1 : 0 : 2], B = [2 : 4 : 8]$, $C = [0 : 2 : 1], D = [2 : 1 : 3]$. Găsiţi punctul de intersecţie $AB \cap CD$.

Exercițiul 11.3: Fie spaţiul proiectiv $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ şi punctele $A = [1 : 0 : 2 : 2], B = [2 : 4 : 8 : 0]$, $C = [0 : 2 : 1 : -1], D = [2 : 1 : 3 : -2]$. Decideţi dacă dreptele AB şi CD se intersectează.

Exercițiul 11.4: Pentru un plan proiectiv $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, definim *dualul* său astfel:

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{D};$$
$$\mathcal{D}^* = \{P^* \mid P \in \mathcal{P}\}, \text{ unde } P^* = \{d \in \mathcal{D} \mid P \in d\} \text{ pentru orice } P \in \mathcal{P}.$$

a) Demonstraţi că $(\mathcal{P}^*, \mathcal{D}^*)$ este un plan proiectiv.

b) Demonstraţi că un plan proiectiv se identifică în mod canonic cu bidualul său.

c) Demonstraţi că dualul planului proiectiv $\mathbb{P}^2 K$ este canonic izomorf[1] cu $\mathbb{P}^2 K$ dacă $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

d) Puteţi generaliza construcţia dualului pentru un spaţiu proiectiv de orice dimensiune?

Exercițiul 11.5: Demonstraţi că, pentru un plan proiectiv $(\mathcal{P}, \Delta)$ şi o dreaptă $d \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \setminus d$ este un plan afin.

Exercițiul 11.6*:

a) Demonstraţi că, pentru un spaţiu afin $(\mathcal{A}, \Delta, \Pi)$, completarea sa cu puncte la infinit (definită la curs) este un spaţiu proiectiv.

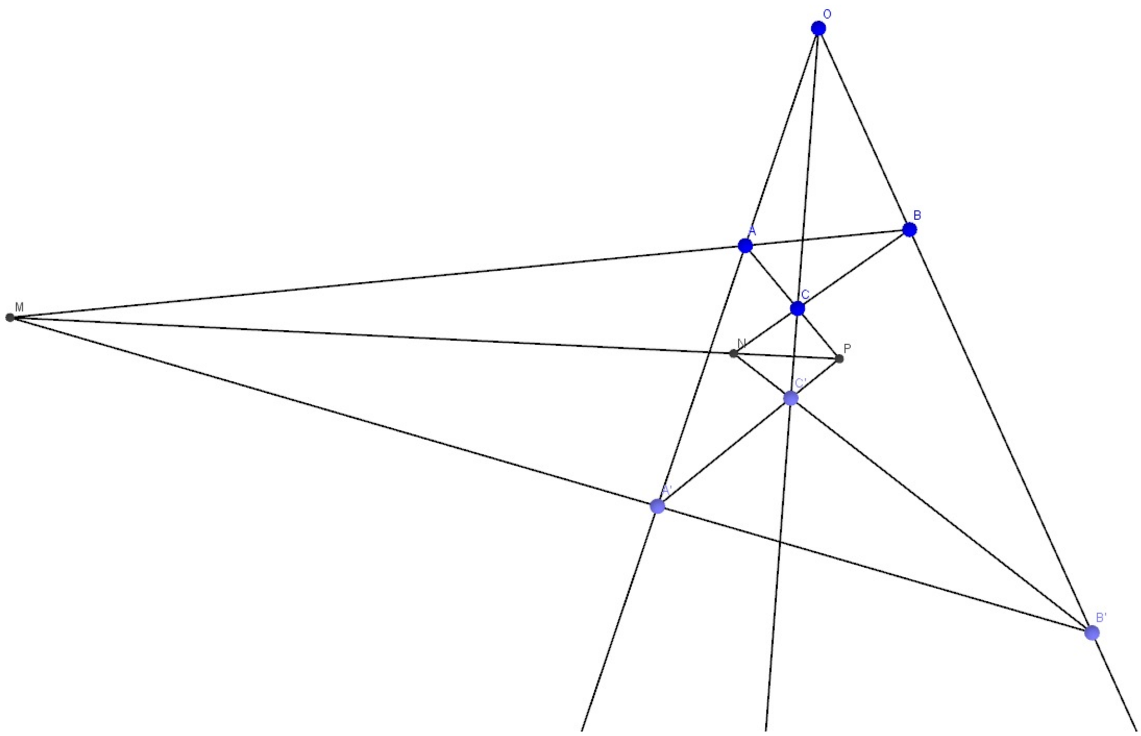
b) Demonstraţi că, pentru un spaţiu proiectiv $(\mathcal{P}, \Delta)$ şi un hiperplan $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \setminus \mathcal{H}$ este un spaţiu afin.

Exercițiul 11.7: Demonstraţi Teorema lui Desargues:

Fie $\mathcal{P}$ un spațiu proiectiv de dimensiune $n \geq 3$. Fie $O, A, B, C \in \mathcal{P}$ oricare trei necoliniare și $A' \in OA, B' \in OB, C' \in OC$.

Fie $\{M\} = AB \cap A'B'$, $\{N\} = BC \cap B'C'$ și $\{P\} = AC \cap A'C'$. Atunci M, N, P sunt coliniare.

[1] Izomorfism = aplicaţie bijectivă care duce drepte proiective în drepte proiective



Exercițiul 11.8: Folosind Exercițiul 11.6, scrieţi toate variantele Teoremei Desargues într-un spaţiu afin de dimensiune $n \geq 3$.

Exercițiul 11.9: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = &\{\text{drepte de pantă pozitivă sau verticale}\}\\ &\cup \{\text{drepte frânte de pantă negativă a.î. panta se dublează la intersecţia cu axa OY}\}.\end{aligned}$$

Demonstraţi că $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ este un plan afin (planul Moulton) în care Teorema lui Desargues este falsă.

Seminarul 12 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

12 Izomorfisme proiective. Spaţiul proiectiv $\mathbb{P}^n K$. Exerciţii

Exercițiul 12.1: Fie $A, B \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$. Demonstraţi că pentru proiectivităţile asociate $f_A, f_B : \mathbb{P}^n K \to \mathbb{P}^n K$, $f_A = f_B$ dacă şi numai dacă există $\lambda \in K$ cu $A = \lambda B$.

Exercițiul 12.2: Fie $P_1, ..., P_{n+2} \in \mathbb{P}^n K$ oricare $n+1$ nesituate în acelaşi hiperlan şi $Q_1, ..., Q_{n+2} \in \mathbb{P}^n K$ oricare $n+1$ nesituate în acelaşi hiperlan. Demonstraţi că există o unică proiectivitate $f : \mathbb{P}^n K \to \mathbb{P}^n K$ astfel încât $f(P_i) = Q_i \ \forall i = \overline{1, n+2}$.

Exercițiul 12.3: Fie planul proiectiv $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ şi punctele $A = [1 : 0 : 2], B = [2 : 1 : 2]$, $C = [1 : 0 : -1], D = [1 : -2 : 1]$. Daţi exemplu de o transformare proiectivă $f : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ astfel încât $f(AB) = CD$.

Exercițiul 12.4: Fie $\mathcal{P}$ un plan proiectiv, $d \subset \mathcal{P}$ o dreaptă fixată şi $O \in \mathcal{P} \setminus d$ un punct fixat. Este adevărat că orice izomorfism proiectiv $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ care fixează P şi toate punctele lui d este identitatea?

Exercițiul 12.5: Fie $\mathcal{P}$ un plan proiectiv şi $d_1, d_2 \subset \mathcal{P}$ drepte distincte fixate. Demonstraţi că orice izomorfism proiectiv $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ care fixează punctele lui $d_1 \cup d_2$ este identitatea.

Exercițiul 12.6: Demonstraţi că spaţiul proiectiv $\mathbb{P}^n K$ este izomorf cu completarea proiectivă a spaţiului afin K^n.

Exercițiul 12.7: În spaţiul afin $\mathbb{R}^5$, fie subspaţiul afin

$$W : \begin{cases} y_1 - 2y_2 = 0 \\ y_3 - y_4 = 1 \\ y_5 + 2 = 0 \end{cases}$$

Scrieţi ecuaţiile închiderii proiective a lui W şi determinaţi punctele ei improprii.

Exercițiul 12.8: O conică proiectivă $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ definită de polinomul omogen $P(X) = {}^T X A X$ (unde $X = {}^T(X_0, X_1, X_1)$ şi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) se numeşte *nedegenerată* dacă $\det A \neq 0$.

Demonstraţi că Γ este nedegenerată dacă şi numai dacă spaţiul tangent

$$T_Y \Gamma = \left\{ [X_0 : X_1 : X_2] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid \frac{\partial P}{\partial X_0}(Y) \cdot X_0 + \frac{\partial P}{\partial X_1}(Y) \cdot X_1 + \frac{\partial P}{\partial X_2}(Y) \cdot X_2 = 0 \right\}$$

este o dreaptă proiectivă, pentru orice $Y \in \Gamma$.

Exercițiul 12.9: Fie $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ o conică proiectivă nedegenerată. Demonstraţi că există o proiectivitate $f : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ astfel încât $f(\Gamma) = \Gamma_0$, unde $\Gamma_0 : X_0^2 - X_1 X_2 = 0$.

Seminarul 13 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

13 Spaţiul proiectiv $\mathbb{P}^n K$. Exerciţii

Exercițiul 13.1: În spaţiul afin $\mathbb{R}^5$, fie subspaţiul afin

$$W : \begin{cases} y_1 & - & 2y_2 & = & 0 \\ y_3 & - & y_4 & = & 1 \\ y_5 & + & 2 & = & 0 \end{cases}$$

Scrieţi ecuaţiile închiderii proiective a lui W şi determinaţi punctele ei improprii.

Exercițiul 13.2: O conică proiectivă $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ definită de polinomul omogen $P(X) = {}^TXAX$ (unde $X = {}^T(X_0, X_1, X_1)$ şi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) se numeşte *nedegenerată* dacă $\det A \neq 0$.

Demonstraţi că Γ este nedegenerată dacă şi numai dacă spaţiul tangent

$$T_Y\Gamma = \left\{[X_0 : X_1 : X_2] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid \frac{\partial P}{\partial X_0}(Y) \cdot X_0 + \frac{\partial P}{\partial X_1}(Y) \cdot X_1 + \frac{\partial P}{\partial X_2}(Y) \cdot X_2 = 0\right\}$$

este o dreaptă proiectivă, pentru orice $Y \in \Gamma$.

Exercițiul 13.3: Fie $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ o conică proiectivă nedegenerată. Demonstraţi că există o proiectivitate $f : \mathbb{P}^2\mathbb{C} \to \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ astfel încât $f(\Gamma) = \Gamma_0$, unde $\Gamma_0 : X_0^2 - X_1X_2 = 0$.

Este aceasta unică?

Exercițiul 13.4: În planul proiectiv $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$, fie conica $\Gamma_0 : X_1^2 - X_0X_2$.

a) Demonstraţi că aplicaţia $q : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \to \mathbb{P}^2\mathbb{C}$,

$$q(t) = [1 : t : t^2],\ q(\infty) = [0 : 0 : 1],$$

este o parametrizare a lui Γ_0, unde am identificat $t = [1 : t]$ şi $\infty = [0 : 1]$.

b) Demonstraţi că pentru orice conică nedegenerată $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ există o parametrizare polinomială de grad 2 în $t \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

Exercițiul 13.5: Demonstraţi că există o bijecţie canonică între $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ şi $\mathrm{SO}(3)$.

Exercițiul 13.6: În $\mathbb{P}^2 K$, fie P_1, P_2, P_3 puncte coliniare, d_1, d_1' drepte concurente în P_1, d_2, d_2' drepte concurente în P_2 şi d_3, d_3' drepte concurente în P_3.

Cu notaţiile $d_1 \cap d_2 = \{Q_{12}\}, d_1' \cap d_2' = \{Q_{12}'\}$, $d_1 \cap d_3 = \{Q_{13}\}, d_1' \cap d_3' = \{Q_{13}'\}$, $d_2 \cap d_3 = \{Q_{23}\}, d_2' \cap d_3' = \{Q_{23}'\}$, demonstraţi că dreptele $Q_{12}Q_{12}', Q_{13}Q_{13}'$ şi $Q_{23}Q_{23}'$ sunt concurente.

Exercițiul 13.7: Fie $d_1, d_2, d_3 \subset \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ drepte concurente şi $P_1 \in d_1, P_2 \in d_2$. Pentru orice $P \in d_3$, notăm cu $P_1' = PP_2 \cap d_1$ şi cu $P_2' = PP_1 \cap d_2$.

Demonstraţi că dreptele $P_1'P_2'$ au un punct comun (independent de alegerea lui $P \in d_3$).

Exercițiul 13.8: Fie K un corp şi $n \geq 1$.

- Pentru orice ideal $I \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$, introducem notaţia

$$\mathcal{Z}(I) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in K^n \mid f(x) = 0,\ \forall f \in I\}$$

(mulţimea zerourilor comune ale tuturor polinoamelor din I).

- Pentru orice submulţime $A \subset K^n$, introducem notaţia

$$\mathcal{I}(A) = \{f \in K[X_1, ..., X_n] \mid f(x) = 0,\ \forall x \in A\}$$

(mulţimea polinoamelor care se anulează pe A).

Demonstraţi următoarele:

a) Pentru orice $A \subset K^n$, $\mathcal{I}(A) \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$ şi $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(A)) \supset A$.

b) Pentru orice $I \trianglelefteq K[X_1, .., X_n]$, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) \supset \sqrt{I}$.

c) Demonstraţi că există o topologie pe K^n pentru care mulţimile **închise** sunt exact cele de tipul $\mathcal{Z}(I)$ pentru un $I \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$ (se numeşte *topologia Zariski*).

Seminarul 14 de Geometrie II

Seria 11 - 2021-2022

14 Spaţiul proiectiv $\mathbb{P}^n K$. Exerciţii

Exercițiul 14.1: Teorema Hessenberg (*O introducere în geometrie*, cap. 3.7).

Exercițiul 14.2*: Fie $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ o hipercuadrică geometrică. Demonstraţi că dacă există o dreaptă care intersectează Γ în două puncte distincte, atunci există o unică hipercuadrică algebrică (pâna la înmulţirea cu scalari) care îi corespunde lui Γ.

Exercițiul 14.3: Fie K un corp şi $n \geq 1$.

- Pentru orice ideal $I \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$, introducem notaţia

  $$\mathcal{Z}(I) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in K^n \mid f(x) = 0,\ \forall f \in I\}$$

  (mulţimea zerourilor comune ale tuturor polinoamelor din I).

- Pentru orice submulţime $A \subset K^n$, introducem notaţia

  $$\mathcal{I}(A) = \{f \in K[X_1, ..., X_n] \mid f(x) = 0,\ \forall x \in A\}$$

  (mulţimea polinoamelor care se anulează pe A).

Demonstraţi următoarele:

a) Pentru orice $A \subset K^n$, $\mathcal{I}(A) \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$ şi $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(A)) \supset A$.

b) Pentru orice $I \trianglelefteq K[X_1, .., X_n]$, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) \supset \sqrt{I}$.

c) Demonstraţi că există o topologie pe K^n pentru care mulţimile **închise** sunt exact cele de tipul $\mathcal{Z}(I)$ pentru un $I \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$ (se numeşte *topologia Zariski*).