Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Examen

11 Februarie 2018

Timp de lucru 2h. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Aveți 3 subiecte, fiecare valorând 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

Fie X o variabilă aleatoare repartizată

$$\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

unde $\theta \in (0,1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2, \dots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

Exercițiul 2

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbf{1}_{[\theta,+\infty)}(x)$$

cu $\theta > 0$, parametru necunoscut.

1. a) Determinați repartiția lui $\frac{X_1}{\theta} - 1$.
   b) Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestuia.
   c) Găsiți legea limită a lui $\tilde{\theta}$.
2. a) Determinați estimatorul $\hat{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda verosimilității maxime.
   b) Calculați eroarea pătratică medie a lui $\hat{\theta}$ și verificați dacă estimatorul este consistent.
   c) Construiți un interval de încredere pentru θ de nivel de încredere $1 - \alpha$.
   d) Pe care dintre cei doi estimatori îl preferați ?

Exercițiul 3

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = \frac{3}{(x-\theta)^4}\mathbf{1}_{[1+\theta,+\infty)}(x)$$

1. a) Calculați $\mathbb{E}_\theta[X_1]$, $Var_\theta(X_1)$ și funcția de repartiție $F_\theta(x)$ a lui X_1.

   b) În cazul în care $\theta = 2$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0,\ 1]$: $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$ și $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

2. a) Determinați estimatorul $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestui estimator. Care este legea lui limită ?

   b) Găsiți un interval de încredere asimptotic de nivel de încredere de 95% pentru θ.

3. a) Exprimați în funcție de θ mediana repartiției lui X_1 și plecând de la aceasta găsiți un alt estimator $\hat{\theta}_n^Q$ al lui θ.

   b) Determinați legea lui limită a lui $\hat{\theta}_n^Q$ și arătați că, asimptotic, acesta este mai bun decât $\hat{\theta}_n^M$.

   c) Găsiți un interval de încredere asimptotic de nivel de încredere de 95% pentru θ.

4. a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n^{VM}$ a lui θ și verificați dacă este deplasat.

   b) Calculați funcția de repartiție a lui $\hat{\theta}_n^{VM} - \theta$.

   c) Pe care dintre cei trei estimatori îl preferați ?

feb 2018

1 d) $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(1, \frac{1}{I(\theta)}) \rightarrow$ adevărat doar pt. veros. max.

$\log \mathbb{P}_\theta(x) = 2\ln(1-\theta) + \ln(x+1) + x\ln\theta$

$\frac{\partial^2 \log \mathbb{P}_\theta}{\partial \theta^2} = \frac{2}{(1-\theta)^2} - \frac{x}{\theta^2}$

$I_1(\theta) = \mathbb{E}\left[-\frac{2}{(1-\theta)^2} + \frac{x}{\theta^2}\right] = \frac{2}{\theta(1-\theta)} - \frac{2}{(1-\theta)^2} = \frac{2-4\theta}{\theta(1-\theta)^2}$

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\theta(1-\theta)^2}{2-4\theta}\right)$

2. $X_1, \dots, X_n \sim f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{(\theta, +\infty)}(x)$

a) repart. lui $\frac{X_1}{\theta} - 1$

$\mathbb{P}\left(\frac{X_1}{\theta} - 1 \le x\right) = \mathbb{P}(X_1 \le \theta(x+1)) = F_{X_1}(\theta(x+1)) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \int_\theta^{\theta(x+1)} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} dx \end{cases}$

$\frac{1}{\theta}\int_\theta^{\theta(x+1)} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} dx \overset{S.V.}{=} \frac{1}{\theta}\theta \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$

$\Rightarrow F_{X_1}(\theta(x+1)) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

b) Met. mom & MSE

$E[X] = \frac{1}{\theta}\int_\theta^\infty x e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} dx = \theta \int_0^\infty (x+1) e^{-x} dx = \theta \underbrace{\int_0^\infty x e^{-x} dx + \theta \int_0^\infty e^{-x}}_{= \Gamma(2) + \Gamma(1)} = 2\theta$

$2\tilde{\theta}_n = \overline{X_n} \Rightarrow \tilde{\theta}_n = \frac{\overline{X_n}}{2}$

$MSE = Var + b_\theta^2$

$E_\theta[\tilde{\theta}_n] = \frac{1}{2} E_\theta[\overline{X_n}] = \frac{1}{2} \mathbb{E}_\theta[X] = \frac{1}{2} \cdot 2\theta = \theta \Rightarrow b_\theta = 0$

$Var_\theta(\tilde{\theta}_n) = Var_\theta\left(\frac{\overline{X_n}}{2}\right) = \frac{1}{4} Var_\theta(\overline{X_n}) = \frac{1}{4n} Var_\theta(X_1)$

$\mathbb{E}[\overline{X}_n^2] = \frac{1}{\theta}\int_\theta^\infty x^2 e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} dx = \theta^2 \int_0^\infty (x+1)^2 e^{-x} dx = \theta^2(\Gamma(3) + 2\Gamma(2) + \Gamma(1))$

$\parallel \qquad\qquad = 5\theta^2$

$\mathbb{E}[X^2]$

$\Rightarrow Var_\theta(X_1) = \mathbb{E}_\theta[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2$

$= 5\theta^2 - 4\theta^2 = \theta^2 \Rightarrow Var_\theta(\tilde{\theta}_n) = \dfrac{\theta^2}{4n} = MSE_\theta(\tilde{\theta}_n)$

c) Legea limită:

$\tilde{\theta}_n - \theta = \frac{1}{2}(\overline{X_n} - 2\theta) = \frac{1}{2}(\overline{X_n} - \mathbb{E}_\theta[X_1])$

$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) = \frac{\sqrt{n}}{2}(\overline{X_n} - \mathbb{E}_\theta[X_1])$

$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}_\theta[X_1]) \xrightarrow{d} N(0, \theta^2)$

Așadar, $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \frac{\theta^2}{4})$

2) a) $\hat{\theta}$ ver. max ; b) MSE$(\theta)^{+\text{cons.}}$; c) int. de încr. $1-\alpha$; d) care est?

a) $L(\theta; x_1 .. x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \dfrac{e^n}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} \prod_{i=1}^{n} \chi_{[\theta,\infty)}(x_i)$ $\quad \underline{\underline{x_i \in [\theta,\infty) \Rightarrow \theta \in [0, x_i]}}$

$= \left(\frac{e}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} \prod_{i=1}^{n} \chi_{(0,x_i]}(\theta) = \left(\frac{e}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} \chi_{\bigcap_{i=1}^{n}[0,x_i]}(\theta) =$

$= \left(\frac{e}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} \chi_{(0, x_{(1)}]}(\theta)$

$\theta > x_{(1)} \Rightarrow L(\theta; x_1, \dots, x_n) = 0$

$\theta \le x_{(1)} \Rightarrow L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{e}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}}$

$\hat{\theta}_n = \underset{0<\theta\le x_{(1)}}{\arg\max} \left(\frac{e}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} = \underset{0<\theta\le x_{(1)}}{\arg\max} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}}$ $\quad \underline{\underline{\text{lu cresc.}}}$

$= \underset{0<\theta\le x_{(1)}}{\arg\max} -\frac{\sum x_i}{\theta} - n \ln\theta = x_{(1)}$

b) MSE:

$f_{x(1)} = n f_x (1 - F_x)^{n-1}$ ....

c)