Seminar 7

1) Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 4xy + 1.$$

Soluție: Domeniul de definiție $\mathbb{R}^2$ este o mulțime deschisă și f este de clasă C^2. Punctele de extrem local se găsesc printre punctele critice ale lui f.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y - 4x = 0 \end{cases}$$

$$4y - 4x = 0 \iff x = y \implies x^3 - x = 0$$

Punctele critice sunt $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$ $\Delta_2 = -16 < 0 \Rightarrow (0,0)$ nu este punct de extrem local.

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$ $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 32 > 0$ $\Rightarrow (1,1)$ punct de minim local

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$ $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 32 > 0 \Rightarrow$ $(-1,-1)$ punct de minim local.

2) Să se găsească punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$

Soluție: Domeniul de definiție $\mathbb{R}^2$ al lui f este mulțime deschisă și f este de clasă C^2.
Punctele de extrem local se găsesc printre punctele critice ale lui f.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^{-(x^2+y^2)}(y - 2x^2y) = 0 \\ e^{-(x^2+y^2)}(x - 2xy^2) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{-(x^2+y^2)} + xy \cdot (-2x)e^{-(x^2+y^2)} = e^{-(x^2+y^2)}(y - 2x^2y) \right)$$

Sistemul este echivalent cu:

$$\begin{cases} y-2x^2y=0 \\ x-2xy^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1-2x^2)=0 \\ x(1-2y^2)=0. \end{cases}$$

$y(1-2x^2)=0 \iff y=0$ sau $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y=0 \Rightarrow x(1-2y^2)=x=0.$

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1-2y^2=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1-2y^2=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Punctele critice sunt:

$$(0,0),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-4xye^{-(x^2+y^2)}-2x(y-2x^2y)e^{-(x^2+y^2)}$$
$$=e^{-(x^2+y^2)}(-4xy-2xy+4x^3y)$$
$$=e^{-(x^2+y^2)}(4x^3y-6xy).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}(4xy^3-6xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=(1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}+(-2y^2+4x^2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$
$$=e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2-2y^2+4x^2y^2)$$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

$$H_f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 4x^3y-6xy & 1-2x^2-2y^2+4x^2y^2 \\ 1-2x^2-2y^2+4x^2y^2 & 4y^3x-6xy \end{pmatrix}$$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Delta_2 = -1 < 0 \Rightarrow (0,0)$ nu este punct de extrem local.

$$H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = e^{-1} \cdot (-2) < 0 \\ \Delta_2 = \left| e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right| = 4e^{-2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sunt pct. de maxim local.

$$H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2e^{-1} > 0 \\ \Delta_2 = 4e^{-2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sunt puncte de minim local.

<u>Exercițiu</u> Pentru funcția f din exercițiul anterior să se găsească $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^2} f$ și $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^2} f$

3) Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz-x-y-2z+1$$

Soluție. Domeniul de definiție al funcției f este mulțime deschisă și f este de clasă C^2.
Punctele de extrem local se găsesc printre punctele critice ale lui f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x+y+z-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x+2y+z-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x+y+2z-2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x+2y+z-1=0 \\ x+y+2z-2=0 \end{cases}$$

Există un singur punct critic: $(0,0,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 1$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$H_f(0,0,1)$$

Pentru a determina natura pct critic $(0,0,1)$ putem folosi mai multe metode, după cum urmează:

<u>Metoda 1.</u>

$$H_f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 = 2 > 0 \\ &\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \\ &\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (0,0,1) \text{ punct de minim local.}$$

Metoda II.

Determinăm valorile proprii ale matricii hessiene $H_f(0,0,1)$.

$$\det(\lambda I_3 - H_f(0,0,1)) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)^3 - 3(\lambda-2) - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 4. \end{cases}$$

Deoarece toate valorile proprii sunt strict pozitive rezultă că $(0,0,1)$ este punct de minim local.

Metoda 3. Arătăm că $d^2f(0,0,1)$ este pozitiv definită folosind metoda lui Gauss.

$$d^2f(0,0,1)(u,v,w) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,1)\cdot u^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,1)v^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,1)w^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,1)\cdot uv + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,1)\cdot uw$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,1)\cdot vw$$

$$d^2f(0,0,1)(u,v,w) = 2u^2 + 2v^2 + 2w^2 + 2uv + 2uw + 2vw$$

$$= 2\left(u + \frac{v}{2} + \frac{w}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v + \frac{1}{\sqrt{3}}w\right)^2 + \frac{4}{3}w^2$$

$$d^2f(0,0,1)(u,v,w) > 0, \ \forall (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow d^2f(0,0,1)$ pozitiv definită $\Rightarrow (0,0,1)$ minim local

<u>Remarcă</u>: De fapt $(0,0,1)$ este punct de minim global.

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz-x-y-2z =$$
$$= x^2+y^2+(z-1)^2+xy+x(z-1)+y(z-1)-1.$$
$$= \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x+z-1)^2+\frac{1}{2}(y+z-1)^2-1.$$

$f(x,y,z) \geq -1, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = -1 \iff \begin{cases} x+y=0 \\ x+z-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases} \iff (x,y,z)=(0,0,1).$$

Deci $f(x,y,z) \geq f(0,0,1)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

Asadar $(0,0,1)$ este punct de minim global.

4) Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln(1+|x-y|)$.

Soluție: Funcția f are derivate parțiale pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+x-y}; & x>y \\ \frac{-1}{1+y-x}; & y>x \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{-1}{1+x-y}; & x>y \\ \frac{1}{1+y-x}; & x<y \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x,a)-f(a,a)}{x-a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{\ln(1+x-a)}{x-a} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x,a)-f(a,a)}{x-a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{\ln(1+a-x)}{x-a} = -1$$

Aşadar nu există $\lim_{x \to a} \frac{f(x,a)-f(a,a)}{x-a}$

Astfel, f nu este derivabilă parţial în raport cu x în (a,a), $\forall a \in \mathbb{R}$.

Analog, f nu este derivabilă parţial în raport cu y în (a,a), $\forall a \in \mathbb{R}$.

Fie $(a,a) \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) - f(a,a) = \ln(1+|x-y|) \geq \ln 1 = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Deci (a,a) este punct de minim local şi global pentru f.

Aşadar f are o infinitate de puncte de minim şi niciun punct critic

5.) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x + 12y + 7$$

Soluţie. $\mathbb{R}^2$ - mulţime deschisă, f de clasă C^2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 6x + 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 12y + 12.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2-6x+3=0 \\ 3y^2+12y+12=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Deci f are un singur punct critic: $(1,-2)$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y+12 \end{pmatrix}$$

$H_f(1,-2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ nu putem trage nicio concluzie

$f(x,y)=(x-1)^3+(y+2)^3$, $f(1,-2)=0$.

$f(a+1,-2)<0$ dacă $a<0$

$f(a+1,-2)>0$ dacă $a>0$.

Deci în orice vecinătate a lui $(1,-2)$ există puncte în care funcția f ia valori strict mai mari decât $f(1,-2)=0$ și există puncte în care f ia valori strict mai mici decât $f(1,-2)$.

În concluzie $(1,-2)$ nu este punct de extrem local.

6). Fie $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$

Sa se arate că $(0,0)$ nu este punct de extrem local al funcției f.

Sa se arate că $(0,0)$ este punct de minim local al funcției f de-a lungul oricarei drepte care trece prin origine.

Soluție: Fie $x \neq 0$. Atunci

$$f(x, 2x^2) = (2x^2 - x^2)(4x^2 - 3x^2) = -x^4 < 0$$

$$f(x, -x^2) = (-x^2 - x^2)(-x^2 - 4x^2) = 5x^4 > 0.$$

$$f(0,0) = 0$$

Deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

Sa consideram o dreaptă care trece prin origine.

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \ a^2 + b^2 \neq 0.$$

Trebuie sa verificăm că 0 este punct de minim local al funcției $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(at, bt) = (bt - a^2t^2)(bt - 3a^2t^2)$$

$$g(t) = 3a^4t^4 - 4a^2bt^3 + b^2t^2$$

$$g'(t) = 12a^4t^3 - 12a^2bt^2 + 2b^2t$$

$$g''(t) = 36a^4t^2 - 24a^2b + 2b^2$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(0) = 0 \\ g''(0) = 2b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \text{ este punct de minim local}, \text{ pt } g \text{ daca } b \neq 0.$$

Daca $b = 0$, $g(t) = 3a^4t^4$ - evident 0 pct de minim.