Curs geometrie 6 - 8 noiembrie 2017

Endomorfisme. Vectori proprii

$f \in End(V)$, $(V,+,\cdot)/_K$ sp vect n-dim

Problema. Existența unui reper $R=\{e_1,..,e_n\}$ în V matricea asociată lui f în raport cu R să fie diagonală $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_n\end{pmatrix}$, $f(e_i)=\alpha_i e_i$, $\forall$

· $x \in V$ vector propriu al lui $f \Leftrightarrow \exists \lambda \in K$ (numită
$\neq 0_V$
valoare proprie) a.î. $f(x)=\lambda x$

$V_\lambda = \{0_V\} \cup$ mulțimea vectorilor proprii coresp valorii proprii λ

· $V_\lambda \subset V$ subspațiu vectorial

$f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ subspațiu invariant

· $f(x)=\lambda x \Rightarrow P(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=0$
polinomul caracteristic

$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \cdots (\lambda-\lambda_n)^{m_{\lambda_n}}$ este un invariant la schimbarea de reper, λ_1, λ_2 = val. prop.,
$m_{\lambda_1}, m_{\lambda_n}$ = multiplicitatea lor

Teorema 1

Fie $f \in End(V)$, λ = valoare proprie cu multiplicitatea m_λ și V_λ = subsp propriu coresp valorii proprii $\lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim V_\lambda \le m_\lambda$

Dem. $V_\lambda \subseteq V$ subsp vect, $\dim V_\lambda = n_\lambda \le n = \dim V$

Fie $R_\lambda = \{e_1,..,e_{n_\lambda}\}$ reper în V_λ. Il extindem la $R=\{e_1,\dots,e_{n_\lambda}, e_{n_\lambda+1},\dots,e_n\}$ reper în V

$e_{n_1},\dots,e_{n_\lambda} \in V_\lambda \Rightarrow f(e_1)=\lambda e_1$

$f(e_{n_\lambda})=\lambda e_{n_\lambda}$

$f(e_j)=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k$, $\forall j=\overline{n_\lambda+1,n}$

$$A=\left(\begin{array}{c|c}\lambda \; \ddots \; \lambda & \\ \hline 0 & \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\lambda I_{n_\lambda} & \\ \hline 0 & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$P(x)=\det(A-xI_n)=\left|\begin{array}{c|c}\begin{matrix}\lambda-x & & 0\\ 0 & & \lambda-x\end{matrix} & \\ \hline 0 & \end{array}\right| =$$

$=(\lambda-x)^{n_\lambda}Q(x)$, $Q \in K[x]$, grad $Q = n-n_\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow m_\lambda \ge n_\lambda = \dim V_\lambda$

Teorema 2

$f \in End(V)$

Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte formează un sistem liniar independent.

Demonstrație

Aplicăm metoda inducției matematice, după nr. de vectori proprii.

Fie $n=1$

x vector propriu coresp valorii proprii $\lambda \Rightarrow \{x\}$ SLI
$\neq 0$

Pp. P_k adev: k vectori proprii coresp la valori proprii distincte formează un SLI

Dem $P_k \Rightarrow P_{k+1}$: $(k+1)$ vectori proprii coresp la valori proprii dist formează un SLI.

Fie $\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ sistem de vectori propr coresp la valorile proprii distincte: $\lambda_1,\dots,\lambda_{k+1} \in K$

i.e. $f(v_j)=\lambda_j v_j$, $\forall j=\overline{1,k+1}$

Dem că S este SLI

Pp abs. că S nu este SLI $\Rightarrow \exists a_1,\dots,a_{k+1} \in K$ a.î.

$a_1 v_1 + \dots + a_{k+1}v_{k+1} = 0_V$ (1)
$\neq 0$
(Pp $a_1 \neq 0$; altfel renumerotăm)

Putem pp $\lambda_{k+1} \neq 0$, altfel renumerotăm ($\lambda_1,\dots,\lambda_{k+1}$ distincte)

$(1) \Rightarrow f(a_1v_1+\dots+a_{k+1}v_{k+1})=f(0_V) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 f(v_1)+\dots+a_{k+1}f(v_{k+1})=0_V$

$a_1\lambda_1 v_1+\dots+a_{k+1}\lambda_{k+1}v_{k+1}=0_V$ (2)

Rel(1) $\cdot \lambda_{k+1} \Rightarrow a_1v_1\lambda_{k+1}+\dots+a_{k+1}v_{k+1}\lambda_{k+1}=0$ (3)

(2)-(3): $\underset{\neq 0}{a_1}\underbrace{(\lambda_1-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}v_1+\dots+a_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})v_k=0_V$

$\Rightarrow \{v_1,\dots,v_k\}$ sist de k vectori proprii, corespunzători la k valori proprii $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ care SD. Contrad cu P_k

Pp este falsă și $S=\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ este un SLI.

Teorema 3

Fie $f \in End(V)$, $\dim_K V=n$

$\exists$ un reper $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ în V a.î. matr. asociată lui f în raport cu R este diagonală $\Leftrightarrow$

1) ~~valorile proprii ale~~ rădăcinile polinom. car. sunt în K

2) dimensiunile subspațiilor proprii = multiplicitățile valorilor proprii coresp.

i.e. $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ = răd. dist. ale polinomului caract. $P(\lambda)$, cu multiplicitățile $m_{\lambda_1},\dots,m_{\lambda_r}$

1) $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in K$

2) $\dim V_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$, $i=\overline{1,r}$,

$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_{\lambda_1}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_{\lambda_r}}$, $m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_r}=n$

Demonstrație

"$\Rightarrow$" $\exists R=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V a.î. matricea asociată lui f în raport cu R este de forma

$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$

Fie $\lambda_1..\lambda_r$ valorile dist. pt $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ și $m_{\lambda_1},\dots,m_{\lambda_r}$ nr lor de apariții

Eventual modificând reperul, considerăm

$$A=\begin{pmatrix}\overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{m_{\lambda_1}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \overbrace{\lambda_r \cdots \lambda_r}^{m_{\lambda_r}}\end{pmatrix}$$

$f(e_i)=\lambda_1 e_i$, $i=\overline{1,m_{\lambda_1}}$

$f(e_i)=\lambda_r e_i$, $i=\overline{m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_{r-1}}+1,n}$

Scanned by CamScanner

$\cdot\ \lambda_1,\dots,\lambda_k$ = răd polin. caracteristic $\in K$ ($A \in M_n(K)$)

$\Rightarrow$ 1)

$\cdot\ \{e_1,\dots,e_{m_{\lambda_1}}\} \subset V_{\lambda_1}$ $\quad m_{\lambda_1} \le \dim V_{\lambda_1}$

$\{e_{m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_{k-1}}+1},\dots,e_n\} \subset V_{\lambda_k}$ $\quad m_{\lambda_k} \le \dim V_{\lambda_k}$

$\Rightarrow m_{\lambda_i} \le \dim V_{\lambda_i},\ \forall i=\overline{1,k}$

dar $\dim V_{\lambda_i} \le m_{\lambda_i}$ —//— $\Rightarrow$ 2) $\dim V_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$, $i=\overline{1,k}$

"$\Leftarrow$" $f \in End(V)$

1) Răd pol caract $\in K$
$\lambda_1,\dots,\lambda_k$ răd dist cu mult $m_{\lambda_1},\dots,m_{\lambda_k}$

2) $\dim V_{\lambda_i} = m_{\lambda_i},\ i=\overline{1,k}$

Construim un reper R a.î. mat. asoc. lui f este diag.

$R_1 = \{e_1,\dots,e_{m_{\lambda_1}}\}$ reper în V_{λ_1}

$R_k = \{e_{m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_{k-1}}+1},\dots,e_n\}$ reper în V_{λ_k}

$P(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_{\lambda_1}}\dots(\lambda_k-\lambda)^{m_{\lambda_k}}$, $m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_k}=n$

Dem că $R = R_1 \cup \dots \cup R_k$ este reper în V

$|R| = m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_k} = n$, $\dim V = n$

este suficient să dem că R este SLI

Fie $\underbrace{\sum_{i=1}^{m_{\lambda_1}} a_i e_i}_{f_1} + \dots + \underbrace{\sum_{j=m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_{k-1}}+1}^{n} a_j e_j}_{f_k} = 0$

$f(f_1) = \lambda_1 f_1$, f_1 = vector propriu coresp val pr λ_1, $\lambda_1,\dots,\lambda_k$

$f(f_k) = \lambda_k f_k$, f_k = —//— λ_k dist

Dc $f_1 \ne 0,\dots,f_k \ne 0 \Rightarrow \{f_1,\dots,f_k\}$ este un sist de vectori proprii coresp. val pr. dist. $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ care este SLD Contrad. cu Th 2

$\Rightarrow f_1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m_{\lambda_1}} a_i e_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_{m_{\lambda_1}} = 0$

$f_k = 0 \Rightarrow \sum_{j=m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_{k-1}}+1}^{n} a_j e_j = 0 = 0 \Rightarrow a_{m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_{k-1}}+1} = 0$

$\Rightarrow R = R_1 \cup \dots \cup R_k$ SLI $\Rightarrow$ R reper în V

Matricea asociată lui f este

$f(e_i) = \lambda_1 e_i$ $\quad i=\overline{1,m_{\lambda_1}}$

$f(e_j) = \lambda_k e_j$ $\quad j=\overline{m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_{k-1}}+1,n}$

Aplicație

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2+x_3)$

a) valorile proprii

b) subsp proprii

c) Mat. asociată lui f se poate diagonaliza și să se det reperul în raport cu care este diag.

SOL.

a) $AX = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \det(A-\lambda I_3) = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(-\lambda)^2 = 0$

$C_2' = C_2 - C_1$

$C_3' = C_3 - C_1$

1) $\lambda_1 = 0, m_1 = 2$; $\lambda_2 = 3, m_2 = 1$

b) $V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \ker f$

$\dim V_{\lambda_1} = 3 - rg A = 3 - 1 = 2 = m_1$

Determinăm un reper în V_2

$x_1+x_2+x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1-x_2$

$V_{\lambda_1} = \{(x_1,x_2,-x_1-x_2) / x_1,x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,0,-1)+x_2(0,1,-1)$

$R_1 = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ reper în V_{λ_1}

$V_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 3x\}$

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 3x_1 \\ x_1+x_2+x_3 = 3x_2 \\ x_1+x_2+x_3 = 3x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1+x_2+x_3 = 0 \\ x_1-2x_2+x_3 = \end{cases}$

$M =$

$\begin{cases} -2x_1+x_2 = -x_3 & /\cdot 2 \\ x_1-2x_2 = -x_3 & (+) \end{cases}$

$-3x_1 / = -3x_3 \Rightarrow x_1 = x_3$

$x_2 = 2x_1 - x_3 = x_3$

$V_{\lambda_2} = \{(x_3,x_3,x_3) / x_3 \in \mathbb{R}\}$
$x_3(1,1,1)$

$R_2 = \{(1,1,1)\}$ reper în $V_{\lambda_2} = 1 \Rightarrow \exists\ R = R_1 \cup R_2 =$

$= \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,1)\}$ a.î. matricea asociată lui f este

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Prop $f, h \in End(V)$ diagonalizabile

f și h sunt simultan diagonalizabile (i.e. ∃ un reper $R = \{e_1,\dots,e_n\}$ în V a.î. f și h au mat. în raport cu R simultan diagonale) $\Leftrightarrow f \circ h = h \circ f$

Scanned by CamScanner

Dem

",$\Rightarrow$" un reper $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ în V a.î.

A_f este matr diagonală

A_h —//— $\Rightarrow A_g \cdot A_h = A_h A_f$

$\Rightarrow f\circ h = h\circ f$

OBS $V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{h} V$, $h\circ f = g$ $\qquad f, h \in End(V)$

C matricea asociată lui g

A —//— f în raport cu reperul R

B —//— h

$g(e_i) = \boxed{\sum_{s=1}^{n} c_{si} e_s}, \forall i=\overline{1,n}$

$h\circ f(e_i) = h(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} h(e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} (\sum_{s=1}^{n} b_{sj} e_s) =$

$= \boxed{\sum_{s=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} b_{sj} a_{ji}) e_s} \Rightarrow c_{si} = \sum_{j=1}^{n} b_{sj} a_{ji}, \forall s,i=\overline{1,n} \Rightarrow C = B\cdot A$

$A_{h\circ f} = A_h \cdot A_f$

",$\Leftarrow$" $f, g, h \in End(V)$ diagonalizabile, $f\circ h = h\circ f$.

Fie $x \in V_\lambda$, $x \neq 0$ a.î. $f(x) = \lambda x$, λ = val pr pt f

$f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ subsp invariant

Dem că $h(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ (V_λ = subsp invariant pt h)

$f\circ h(x) = f(h(x))$ $\Rightarrow h(x) \in V_\lambda \Rightarrow h(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$

$h\circ f(x) = h(\lambda x) = \lambda h(x)$ dar $x \in V_\lambda$

OBS f, h sunt diagonalizabile

$f/V_\lambda : V_\lambda \to V_\lambda$ diag.

$h/V_\lambda : V_\lambda \to V_\lambda$

Fie $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ = valorile proprii dist pt f

$V_{\lambda_1},\dots,V_{\lambda_r}$ = subsp proprii coresp, $\dim V_{\lambda_i} = m_i$, $i=\overline{1,r}$

$f/V_{\lambda_i} : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$ $i=\overline{1,r}$ diag.

$h/V_{\lambda_i} : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$

Considerăm R_i reper în V_{λ_i} a.î. f/V_{λ_i}, h/V_{λ_i} diag.

$i=\overline{1,r}$

$R = R_1 \cup \dots \cup R_r$ este un reper în V a.î.

f și h au matricele asociate simultan diag.

Temă (T_3)

Ex1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + 5x_2 + x_3, 3x_1 + x_2 + x_3)$

a) Să se det valorile proprii, subsp proprii și câte un reper în fiecare subsp propr.

b) Se poate diagonaliza matr asoc lui f?

c) Să se det. matr asociată lui f în raport cu reperul $R' = \{(1,1,0), (2,0,0), (1,1,1)\}$

Ex2 $V = V_1 \oplus V_2$, $V_1, V_2 \subset V$ subsp vect

$p_k : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$, $p_k(v_1 + v_2) = v_k$, $k=\overline{1,2}$

a) $p_1 + p_2 = id_V$

b) $p_1 \circ p_2 = 0$, $p_2 \circ p_1 = 0$

c) $Im\, p_1 = Ker\, p_2$, $Im\, p_2 = Ker\, p_1$

Forme biliniare. Forme pătratice

Def $g: V\times V \to K$ s.n. formă biliniară $\Leftrightarrow$ este liniară în ambele argumente

• g este liniară în ambele argumente

1) $g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x,z) + \beta g(y,z)$

2) $g(x, \alpha y + \beta z) = \alpha g(x,y) + \beta g(x,z)$, $\alpha, \beta \in K$

• g s.n. simetrică $\Leftrightarrow g(x,y) = g(y,x)$, $\forall x,y \in V$

• g s.n. antisimetrică $\Leftrightarrow g(x,y) = -g(y,x)$ $\forall x,y \in V$

OBS Dacă g este formă simetrică (resp antisim) și liniară într-un argument, atunci g este biliniară

g sim $\Rightarrow g(x,y) = g(y,x)$

g lin arg I: $g(\alpha x + \beta z, y) = \alpha g(x,y) + \beta g(z,y)$

$g(y, \alpha x + \beta z) = \alpha g(y,x) + \beta g(y,z)$ $\forall x,y,z \in V$, $\alpha,\beta \in K$

Matricea asociată unei forme biliniare

$g: V\times V \to K$ formă biliniară

$R = \{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V

not. $g(e_i, e_j) = g_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$

$g(x,y) = g(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \underbrace{g(e_i,e_j)}_{g_{ij}}$

$g(x,y) = g_{11}x_1y_1 + \dots + g_{nn}x_ny_n + g_{12}x_1y_2 + \dots + g_{n-1\,n}x_{n-1}y_n + g_{n\,n-1}x_n y_{n-1}$

$g(x,y) = X^T G Y = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \dots & g_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$

Modificarea matricei asociate la sch. reperului

$R = \{e_1,\dots,e_n\} \xrightarrow{A} R' = \{e'_1,\dots,e'_n\}$ repere în V

$e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, $\forall i=\overline{1,n}$

$g(e'_s, e'_t) = g'_{st}$, $G' = (g'_{st})_{s,t=\overline{1,n}}$ matr asociată lui g în raport cu R'

$= g(\sum_{i=1}^{n} a_{is} e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{jt} e_j)$

$\sum_{i,j=1}^{n} a_{is} a_{jt} g(e_i,e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{is} g_{ij} a_{jt} \Rightarrow G' = A^T G A$

$G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matr asociată lui g în reperul R

Scanned by CamScanner

Def $g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară
$rg(g) = rg\, G$, G = matricea asociată lui g în raport cu reperul R

OBS. Def este corectă: rangul = invariant la sch. reperului $G' = A^T G A$, $A \in GL(n, \mathbb{K})$
$rg\, G' = rg(A^T G A) = rg\, G'$

Prop $g: V\times V \to \mathbb{K}$ aplicație
• g este formă biliniară $\Leftrightarrow (\forall) R = \{e_1, ..., e_n\}$ reper în V $\forall x, y \in V$, coord lui x, y verifică
$g(x,y) = X^T G Y$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
$x = \sum_1^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, $G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$
$g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $\forall i,j = \overline{1,n}$
• g formă biliniară simetrică $\Leftrightarrow G = G^T$
• — // — antisimetrică $\Leftrightarrow G = -G^T$

OBS $R \xrightarrow{A} R'$, $G' = A^T G A$
$G'^T = (A^T G A)^T = A^T G^T (A^T)^T = A^T G^T A$
Dc $G = G^T \Rightarrow G' = G'^T$
$G = -G^T \Rightarrow G' = -G'^T$

Def $g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară
• $Ker\, g = \{x \in V / g(x,y) = 0, \forall y \in V\}$
• g s.n. formă biliniară nedegenerată $\Leftrightarrow Ker\, g = \{0_V\}$

OBS. $x \in Ker\, g \Rightarrow g(x,y) = 0, \forall y \in V$
Fie $R = \{e_1, ..., e_n\}$ reper în V
$g(x, e_1) = 0$
$g(x, e_n) = 0$
g nedegenerată $\Leftrightarrow G \in GL(n, \mathbb{K})$; $G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$
$g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $\forall i,j = \overline{1,n}$

Def. $Q: V \to \mathbb{K}$ s.n. formă pătratică $\Leftrightarrow$
$\exists\ g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară simetrică a.î. $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$

Prop $(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$, $ch\,\mathbb{K} \neq 2$
$\exists$ o corespondență bijectivă între mulțimea formelor pătratice pe V și mulțimea formelor biliniare simetrice pe V

Dem
„$\Rightarrow$" Fie g: ~~V×V~~ $g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă bl. sim
Construim $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$
„$\Leftarrow$" Fie $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică
Construim $g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară sim asociată
$Q(x+y) = g(x+y, x+y) = g(x,x) + g(y,y) + g(x,y) + g(y,x)$
$= Q(x) + Q(y) + 2g(x,y) \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x,y) = 2^{-1}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)]$, $\forall x, y \in V$
forma polară asociată lui Q

Def. $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică
$rg\, Q = rg\, g = rg\, G$
$Ker\, Q = Ker\, g$

Matr. asociată unei forme pătratice
$Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică $\Rightarrow$
$g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară, sim.
$Q(x) = g(x,x) = X^T G X$ $\quad Q(e_i) = g(e_i, e_i) = g_{ii}$, $\forall i = \overline{1,n}$
G = matr asoc, $G = G^T$
$Q(x) = g_{11} x_1^2 + ... + g_{nn} x_n^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + ... + 2 g_{n-1\, n} x_{n-1} x_n$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Def $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală
Q s.n. pozitiv definită $\Leftrightarrow$
1) $Q(x) > 0$, $\forall x \in V \setminus \{0_V\}$
2) $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

• $g: V\times V \to \mathbb{R}$ formă biliniară sim
g s.n. pozitiv def $\Leftrightarrow$ Q formă pătratică asoc. poz def

Prop $g: V\times V \to \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică pozitiv definită $\Rightarrow g$ este nedegenerată

Dem
Dem $Ker\, g = \{x \in V / g(x,y) = 0, \forall y \in V\}$
Dem $Ker\, g = \{0_V\}$
Fie $x \in Ker\, g \Rightarrow g(x,y) = 0, \forall y \in V \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{g(x,x)}_{Q(x)} = 0 \xrightarrow{\text{poz def}} x = 0_V \Rightarrow Ker\, g = \{0_V\}$

Scanned by CamScanner