Examen la analiză matematică[1]
an I, sem. I - seria 10
22.01.2021

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. a) Fie $A = \left\{\frac{2^n+3^n}{2^n+5^n} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup ((4,7] \setminus \mathbb{Q})$ o submulţime a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Determinaţi interiorul, aderenţa, mulţimea punctelor de acumulare şi frontiera mulţimii A. Decideţi dacă mulţimea A este compactă sau conexă. Justificaţi!

b) Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e}} + \frac{2}{\sqrt[n]{e^2}} + \frac{3}{\sqrt[n]{e^3}} + ... + \frac{n}{\sqrt[n]{e^n}}\right).$$

Subiectul 2. a) Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots(3n+1)}\right)^2 x^n$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0,\infty)$.

b) Studiaţi convergenţa şirului $\left(\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots(3n+1)}\frac{1}{9^n}\right)^2\right)_{n>0}$ şi calculaţi limita sa (în caz că aceasta există).

Subiectul 3. Considerăm funcţia $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} + \frac{\sin x}{4x} + x\sqrt{x}\,\text{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{dacă } \ x \in (0,\infty), \\ \frac{5}{4}, & \text{dacă } \ x = 0. \end{cases}$$

i) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

ii) Studiaţi uniform continuitatea funcţiei f.

Subiectul 4. Considerăm şirul de funcţii $f_n : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = e^{-nx}\sin x,$$

pentru orice $x \in [1,2]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

Subiectul 5. Fie $f_n, g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii definite prin

$$f_n(x) = \int_0^1 |x^n - t^n|\,dt, \text{pentru orice } x \in [0,1], \ n \in \mathbb{N} \ \text{ şi}$$

,

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valoreaza 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!**

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{dacă} \;\; x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x - x^2, & \text{dacă} \;\; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i) Determinaţi

$$\inf_{x \in [0,1]} f_n(x) \;\; \text{şi} \;\; \sup_{x \in [0,1]} f_n(x).$$

ii) Determinaţi numărul $n \in \mathbb{N}$ pentru care funcţia g_n are cel puţin un punct în care este derivabilă.