Tutoriat 8

SINTAXA LP:

Def: Mulțimea Axm a axiomelor lui LP constă din formule de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg \psi \to \neg \varphi) \to (\varphi \to \psi)$

unde $\varphi, \psi, \chi \in Form$.

Regula de deducție:

Modus Ponens $\overset{not}{=}$ MP : $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \psi$

Def*: Fie Γ o mulțime de formule.

Γ - teoremele sunt sunt formulele lui LP def. astfel:

(T0) Orice axiomă e Γ - teoremă

(T1) Orice formulă din Γ e Γ - teoremă

(T2) Dacă φ și $\varphi \to \psi$ sunt Γ - teoreme $\Rightarrow \psi$ e Γ - teoremă

(T3) Doar aceste reguli putem folosi pentru a obține Γ - teoreme.

Not: $Thm(\Gamma)$ = mulț. Γ - teoremelor $\qquad$ $Thm = Thm(\emptyset)$

$\Gamma \vdash \varphi \iff \varphi$ este Γ - teoremă $\qquad$ $\vdash \varphi \iff \emptyset \vdash \varphi$

$\Gamma \vdash \Delta \iff \Gamma \vdash \varphi \ (\forall) \varphi \in \Delta$.

Def: O formulă φ s.n. teoremă a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Def. alternativă a Γ - teoremelor:

$Thm = \bigcap \Sigma$, Σ mulțime de formule ce satisfac:

i) $Axm \subseteq \Sigma$

ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$

iii) Σ închisă la MP i.e. $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$ atunci $\psi \in \Sigma$

Inducția după Γ-teoreme:

(V1) Fie P o prop. Dem. că orice Γ-teoremă satisface P astfel: DEM. CĂ

i) $(\forall)$ axiomă are P

ii) $(\forall)\ \varphi \in \Gamma$, φ are P

iii) dacă $\varphi, \varphi \to \psi$ au $P \Rightarrow \psi$ are P

(V2) Fie Σ o mulțime de formule. Dem. că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel: DEM. CĂ

i) $(\forall)$ axiomă $\in \Sigma$

ii) $(\forall)\ \varphi \in \Gamma$, $\varphi \in \Sigma$

iii) dacă φ și $\varphi \to \psi \in \Sigma \Rightarrow \psi \in \Sigma$

Prop 3.39:

Fie Γ, Δ mulțimi de formule. Atunci:

i) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$ $\big($i.e. $(\forall)\varphi \in Form : \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Delta \vdash \varphi\big)$

Dem: Fie $\varphi \in Form$, avem $\Gamma \subseteq \Delta$.

Folosim (V2)

- $\varphi \in Axm \overset{\star 0}{\Longrightarrow} \Delta \vdash \varphi$
- $\varphi \in \Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \varphi \in \Delta \overset{\star 1}{\Longrightarrow} \Delta \vdash \varphi$
- dacă $\psi, \psi \to \varphi \in Thm(\Delta) \overset{\star 2}{\Longrightarrow} \varphi \in Thm(\Delta)$.

ii) $\big(Thm \subseteq Thm(\Gamma)\big)$ i.e. $(\forall)\ \varphi \in Form : \ \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

Dem: $\vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in Axm \overset{\star 0}{\Longrightarrow} \Gamma \vdash \varphi$

iii) $\Gamma \vdash \Delta \Rightarrow Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$ i.e. $(\forall)\ \varphi \in Form: \Delta \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

Dem: Fie $\varphi \in Form$, avem $\Gamma \vdash \Delta \ (\Rightarrow) \ (\forall)\ \varphi \in \Delta,\ \Gamma \vdash \varphi$.

Folosim (V2)

- $\varphi \in Axm \overset{\star 0}{\Longrightarrow} \Gamma \vdash \varphi$
- $\varphi \in \Delta \overset{ip}{\Longrightarrow} \Gamma \vdash \varphi$
- dacă $\psi, \psi \to \varphi \in Thm(\Gamma) \overset{\star 2}{\Longrightarrow} \varphi \in Thm(\Gamma)$

iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$ $\big($i.e. $(\forall)\ \varphi \in Form : Thm(\Gamma) \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi\big)$

Dem: Fie $\varphi \in Form$. Folosim (V2)

"$\subseteq$"
- $\varphi \in Axm \overset{\star 0}{\Longrightarrow} \Gamma \vdash \varphi$
- $\varphi \in Thm(\Gamma)$
- $\psi, \psi \to \varphi \in Thm(\Gamma) \Rightarrow \varphi \in Thm(\Gamma)$

"$\supseteq$" Evident $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(Thm(\Gamma))$ deoarece $(\forall)\ \varphi \in Thm(\Gamma)$ avem $\varphi \in Thm(Thm(\Gamma))$ (din $\star 1$)

Def: O Γ-demonstrație este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $(\forall)\, i = \overline{1,n}$ avem una din următoarele:

1) $\theta_i \in Axm$
2) $\theta_i \in \Gamma$
3) $(\exists)\, k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$

Lema 3.41:

Dacă $\theta_1, \dots, \theta_n$ e Γ-dem., atunci: $\Gamma \vdash \theta_i \quad (\forall)\, i = \overline{1,n}$

Dem: $\theta_1, \dots, \theta_n$ este Γ-dem $\Rightarrow (\forall)\, i = \overline{1,n}$ avem una din:

a) $\theta_i \in Axm \xrightarrow{*0} \Gamma \vdash \theta_i$

b) $\theta_i \in \Gamma \xRightarrow{*1} \Gamma \vdash \theta_i$

c) $\left.\begin{array}{l} (\exists)\, k, j < i \text{ a.î. } \theta_k = \theta_j \to \theta_i \\ \text{Consider } \theta_k, \theta_j \in Thm(\Gamma) \end{array}\right\} \xRightarrow{*2} \theta_i \in Thm(\Gamma)$

Def: Fie $\varphi \in Form$. O Γ-dem a lui φ e o Γ-dem. $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$.
Și n s.n. lungimea Γ-dem.

Prop 3.43:

Fie Γ o mulțime de formule și $\varphi \in Form$.
Atunci $\Gamma \vdash \varphi \iff (\exists)$ o Γ-dem a lui φ.

Justif:
"$\Leftarrow$" Fie $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$ o Γ-dem. a lui φ. $\xRightarrow{3.41} \Gamma \vdash \varphi$.
"$\Rightarrow$" • $\varphi \in Axm \Rightarrow (\exists)$ o Γ-dem. de lung. 1 a lui φ și anume $\theta_1 = \varphi$

• $\varphi \in \Gamma \Rightarrow (\exists)$ o Γ-dem. de lung. 1 a lui φ și anume $\theta_1 = \varphi$

• dacă $\psi, \psi \to \varphi \in Thm(\Gamma) \Rightarrow (\exists)$ o Γ-dem. a lui φ de lungime 3 și anume:

$\theta_1 = \psi$
$\theta_2 = \psi \to \varphi$
$\theta_3 = \varphi$

Propoziții:

1) $(\forall)\ \Gamma,\ \varphi \in Form.\ :\ \Gamma \vdash \varphi \iff (\exists)\ \Sigma \subseteq \Gamma$ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$

2) $(\forall)\ \varphi \in Form\ :\ \vdash \varphi \to \varphi$

Teorema deducției:

Fie $\Gamma \subseteq Form$ și $\varphi, \psi \in Form$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff \Gamma \vdash \varphi \to \psi$$

3) $(\forall)\ \varphi, \psi, \chi \in Form$

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$$

4) $(\forall)\ \Gamma \subseteq Form$ și $(\forall)\ \varphi, \psi, \chi \in Form$, avem:

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \to \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \chi$$

5) $(\forall)\ \varphi, \psi, \chi \in Form$

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$$