Examen la analiză matematică[1]
an I, sem. I - seria 10
22.01.2021

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. a) Fie $A = \left\{\frac{2^n+1}{2^n+1} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup (3,6)$ o submulţime a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Determinaţi interiorul, aderenţa, mulţimea punctelor de acumulare şi frontiera mulţimii A. Decideţi dacă mulţimea A este compactă sau conexă. Justificaţi!

b) Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{4n^3+1^3}+\frac{2^2}{4n^3+2^3}+\frac{3^2}{4n^3+3^3}+....+\frac{n^2}{4n^3+n^3}\right).$$

Subiectul 2. a) Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(5n^2+2n+1)x^n}$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0,\infty)$.

b) Studiaţi convergenţa şirului $\left(\frac{3^{n+2}(n+3)}{5n^2+2n+1}\right)_{n>0}$ şi calculaţi limita sa (în caz că aceasta există).

Subiectul 3. Considerăm funcţia $f : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\ln(x^2-x+1)}{x-1} + e^{\frac{1}{1-x}}, & \text{dacă } x \in (1,\infty), \\ 2, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

i) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

ii) Studiaţi uniform continuitatea funcţiei f.

Subiectul 4. Considerăm şirul de funcţii $f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{e^{nx}},$$

pentru orice $x \in [0,\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

Subiectul 5. Fie $f_n, g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii definite prin

$$f_n(x) = \int_0^1 |x^n - t^n|\, dt, \text{pentru orice } x \in [0,1], \ n \in \mathbb{N} \ \text{ şi}$$

,

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valoreaza 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!**

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{dacă } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x - x^2, & \text{dacă } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i) Determinaţi

$$\inf_{x\in[0,1]} f_n(x) \text{ şi } \sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$

ii) Determinaţi numărul $n \in \mathbb{N}$ pentru care funcţia g_n are cel puţin un punct în care este derivabilă.