TAFALAN ALEXANDRU-MARIAN

TUTORIAT GEOMETRIE - Nr 1 (SĂPTĂMÂNA 2)

Spații afine. Noțiuni introductive

Definiție: (spațiu afin)

- Se numește SPAȚIU AFIN un TRIPLET $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ unde
- $\mathcal{A}$ este o mulțime de "puncte" nevidă;
- V este un spațiu vectorial peste un corp $\mathbb{K}$;
  "DIRECȚIA SPAȚIULUI AFIN"
- $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow V$ este o funcție care satisface următoarele proprietăți:

i) $(\forall) A, B, C \in \mathcal{A}$ are loc:

$\varphi(A,B) + \varphi(B,C) = \varphi(A,C)$ → RELAȚIA LUI CHARLES

ii) $(\exists)$ $O \in \mathcal{A}$ a.î. $\varphi_0 : \mathcal{A} \to V$, dată de

$\varphi_0(A) = \overrightarrow{OA}$ este bijectivă.

Terminologie

a) Elementele lui $\mathcal{A}$ se vor numi puncte

b) Spațiul vectorial V = DIRECTOR / DIRECȚIA LUI $\mathcal{A}$

c) Elementele lui V = VECTORI LIBERI

d) φ = STRUCTURĂ AFINE → e o funcție

e) $\overrightarrow{AB} = \varphi(A,B)$

↳ vector legat generat de A și B.

f) $r_0(A) = \overrightarrow{OA}$

↳ vector de poziție a lui A în raport cu O

PROPRIETATE

$\dim \mathcal{A} = \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{dir}(\mathcal{A}))$

Exemplu: $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n/_\mathbb{R}, \varphi_{can})$ spațiu afin unde:

$\varphi_{can} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

$A \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A = (a_1, \dots, a_n)$

$B \in \mathbb{R}^n \Rightarrow B = (b_1, \dots, b_n)$

$\varphi_{can}(A,B) = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; \dots ; b_n - a_n)$

PROPRIETĂȚI: Fie $(\mathcal{A}, V/_K, \varphi)$ spațiu afin

a) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}_V$, $(\forall) A \in \mathcal{A}$

b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, $(\forall) A, B \in \mathcal{A}$

c) proprietatea ii) din def. spațiului afin e adevărată pentru orice

Definiție (combinație afină)

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$ și $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Atunci

$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$ se numește combinație afină.

Vectorial scriem:

$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OP_i}$, P este unic definit de ac. relație, ce nu depinde de alegerea lui O.

Q: Cum fac legătura între puncte și vectori?

R: $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = C \rightsquigarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AA} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Exercițiul 1:

Fie $(\mathcal{A}, V/_K, \varphi_{can})$ spațiu afin, char $\neq 2$. și fie $\{A, B\} \subset \mathcal{A}$. Fie M mijlocul segmentului

[AB]. Să se arate că M e baricentru de ponderi egale.

Observație

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n \Rightarrow P$ s.m. BARICENTRU DE PONDERI EGALE

Soluție:

$$\left.\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\\&\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \text{ (deoarece M e mijlocul segmentului)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB}$$

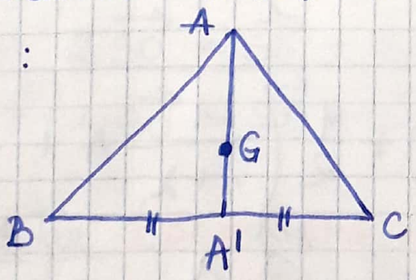
$$\Rightarrow M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

∎

Exercițiul 2:

Fie $(A, V_{/K}, \varphi_{can})$ spațiu afin, char $\neq 3$. Fie $\{A, B, C\} \subset A$. Consider G centru de greutate al ΔABC. Să se arate că G e baricentru de ponderi egale al sistemului $\{A, B, C\}$

Soluție:



RELAȚIA VECT. A MEDIANEI

$$\left.\begin{aligned}&AA' \text{ mediană în } \Delta ABC \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}\\&G - \text{centru de greutate} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA}$$

$\Rightarrow G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$

$\blacksquare$

Exercițiul 3:

Fie $(\mathcal{A}, V_{/\mathbb{K}}, f_{can})$ spațiu afin a.î. $char(\mathbb{K}) \neq 2$ și $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Fie $\{A, B\} \in \mathcal{A}$ a.î.:

i) C e baricentru de ponderi $\frac{1}{1-\lambda}$ și $\frac{-\lambda}{1-\lambda}$ al sistemului $\{A, B\}$

ii) D e baricentru de ponderi $\frac{1}{1+\lambda}$ și $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ al sistemului $\{A, B\}$

iii) E e baricentru de ponderi egale al sistemului $\{C, D\}$

Să se arate că $\overrightarrow{EA} = \lambda^2 \overrightarrow{EB}$

Soluție:

Din i) $\Rightarrow C = \frac{1}{1-\lambda}A + \frac{-\lambda}{1-\lambda}B$

ii) $\Rightarrow D = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B$

iii) $\Rightarrow E = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\lambda}A + \frac{-\lambda}{1-\lambda}B\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B\right)$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2(1-\lambda)}A + \frac{1}{2(1+\lambda)}A + \frac{\lambda}{2(1+\lambda)}B + \frac{-\lambda}{2(1-\lambda)}B$

$\Rightarrow E = \frac{1}{1-\lambda^2}A + \frac{-\lambda^2}{1-\lambda^2}B \xrightarrow[\text{aleg}\ \text{în}\ E]{\text{mă}}$

$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{EE}}_{=\overrightarrow{0_V}} = \frac{1}{1-\lambda^2}\overrightarrow{EA} + \frac{-\lambda^2}{1-\lambda^2}\overrightarrow{EB}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-\lambda^2}\,\overrightarrow{EA} = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\,\overrightarrow{EB} \quad \Big| \cdot \underbrace{(1-\lambda^2)}_{\neq 0 \text{ de } \lambda \neq \pm 1}$$

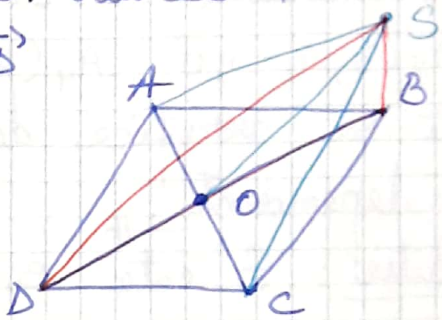
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{EA} = \lambda^2 \overrightarrow{EB}$$

q.e.d ■

Exercițiul 4:

Fie ABCD un paralelogram și fie O punctul de intersecție al diagonalelor sale. Fie S un punct arbitrar din spațiu. Atunci avem:

$$4\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$$



Soluție:

Cum ABCD e paralelogr

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} \end{cases}$$

Fie S un punct arbitrar din spațiu

Fie ΔSAC. Aplic relația vectorială a medianei $\Rightarrow 2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$

Fie ΔSDB. Aplic rel vect a medianei

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB}$$

Deci

$$2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$$
$$2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB}$$
$$\overline{}$$
$$(+)\quad 4\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$$

■

Definiție (acoperire afină)

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și fie $S \subset \mathcal{A}$. Numim ACOPERIREA AFINĂ a lui S, mulțimea $Af(S)$ a tuturor punctelor lui $\mathcal{A}$ ce se pot obține ca și combinații afine de elemente din S, i.e

$$Af(S) = \{ P \in \mathcal{A} \mid (\exists)\, n \in \mathbb{N}, (\exists)(\alpha_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, (\exists)\{P_i\}_{i=\overline{1,n}} \subseteq S \text{ a.î. } P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i \}$$

↑ cel mai mic subspațiu care îl conține pe S

PROPOZIȚIE: $S=\{P_1,\dots,P_n\}\subseteq A$. Atunci

i) S este SISTEM AFIN INDEPENDENT $\Leftrightarrow$ $\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1P_n}\}\subseteq V$ este S.L.I

ii) S este SISTEM AFIN DE GENERATORI pentru X $\Leftrightarrow$ $\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1P_n}\}\subseteq V$ este Sist de GENERATORI PENTRU $dir(A)=V$.

Exercițiul 5: Fie $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4/\mathbb{R}, f_{can})$ spațiu afin.
Considerăm $S=\{A_1(1,1,-1,-1), A_2(2,2,0,-2), A_3(3,1,-1,0), A_4(2,0,-2,1), A_5(-2,3,3,-2)\}$.
Să se verifice dacă S este un sistem afin independent.

Soluție: S este S.A.I $\Leftrightarrow$ $\{\underbrace{\overrightarrow{A_1A_2}}_{\vec{e_1}}, \underbrace{\overrightarrow{A_1A_3}}_{\vec{e_2}}, \underbrace{\overrightarrow{A_1A_4}}_{\vec{e_3}}, \underbrace{\overrightarrow{A_1A_5}}_{\vec{e_4}}\}$ e S.L.I în $\underbrace{\mathbb{R}^4/\mathbb{R}}_{\text{ca sp. vectorial}}$.

$\vec{e_1}=\overrightarrow{A_1A_2}=(1,1,1,-1)$
$\vec{e_2}=\overrightarrow{A_1A_3}=(2,0,0,+1)$
$\vec{e_3}=\overrightarrow{A_1A_4}=(1,-1,-1,2)$
$\vec{e_4}=\overrightarrow{A_1A_5}=(-3,2,4,-1)$

Ne reamintim $M=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4}\}$ e S.L.I $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ rang $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=4$ (nr de vectori) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$

Dar $\det=0$ de $C_2=C_1+C_3$ $\Rightarrow$ M e S.L.D $\Rightarrow$ S nu e S.A.I, ci e S.A.D.

Exercițiul 6. Fie $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \varphi_{can})$ sp. afin.
Fie $S = \{A_1 = (1, 1, \lambda), A_2 = (1, -\lambda, 0), A_3 = (1, \lambda+1, 0)$
și $A_4 = (1, 1, 2\lambda)\}$. Determinați valorile
lui λ pt care S este - S.A.I
- S.A.D.