Milostianu Andreea
Mihai Valentina

22.12.2021

Tutoriatul 10
(ca nota din examen)

Geometrie I

1. Aducerea conicelor la forma canonică, utilizând izometrii ($\delta=0$)

Avem conica $\Gamma: f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0$

$$f(x,y)=X^TAX+2BX+c=0, \text{ unde}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}=A^T,\ rang(A)=r\geq 1;\ B=(b_1\ \ b_2)$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}A & B^T\\ B & c\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{R},\ rang(\tilde{A})=r',\ r\leq r'\leq r+2.$$

$$\det A=\delta;\ \det\tilde{A}=\Delta.$$

(II) Studiem cazul când conica nu are centru unic, i.e. $\delta=0$.

Considerăm polinomul caracteristic asociat matricei $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$.

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\underbrace{Tr(A)}_{=I}\lambda+\underbrace{\det A}_{=\delta}=0$$

Știm că $\delta=0$, deci avem $\lambda^2-I\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-I)=0 \Rightarrow \lambda_1\neq 0$ și $\lambda_2=0$.

Versorii proprii $e'_k=(l_k\ m_k)$, $k=\overline{1,2}$, asociați valorilor proprii $\lambda_1\neq 0$ și $\lambda_2=0$ determină matricea $R=\begin{pmatrix}l_1 & l_2\\ m_1 & m_2\end{pmatrix}\in SO(2)$.

Considerăm rotația: $\mathcal{R}: X=RX' \Leftrightarrow \begin{cases}x=l_1x'+l_2y'\\ y=m_1x'+m_2y'\end{cases}$, $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Conica devine $f(x,y)=\lambda_1x'^2+2\cdot b_1(l_1x'+l_2y')+2\cdot b_2(m_1x'+m_2y')+c=0$.

$$f(x,y)=\lambda_1x'^2+2\underbrace{(b_1l_1+b_2m_1)}_{=b_1'}x'+2\underbrace{(b_1l_2+b_2m_2)}_{=b_2'}y'+c=0$$

$$f(x,y)=\lambda_1x'^2+2b_1'x'+2b_2'y'+c=0.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & b_1'\\ 0 & 0 & b_2'\\ b_1' & b_2' & c\end{vmatrix}=-(b_2')^2\cdot\lambda_1$$

Distingem următoarele cazuri:

a) $\Delta \neq 0$ (conică nedegenerată) $\Rightarrow b_2' \neq 0$.

$\underline{\lambda_1 x'^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + c = 0}$.

$$\lambda_1 \underbrace{\left(x' + \frac{b_1'}{\lambda_1}\right)}_{=x''}^2 + 2b_2' \underbrace{\left(y' + \frac{c'}{2b_2'}\right)}_{=y''} = 0, \text{ unde } c' = c - \frac{b_1'^2}{\lambda_1}$$

$\Rightarrow \lambda_1 \cdot x''^2 + 2b_2'y'' = 0$. $\rightsquigarrow$ se obține o parabolă

Considerăm translația $T: x' = x'' + x_0$, $x_0 = \begin{pmatrix} -\frac{b_1'}{\lambda_1} \\ -\frac{c'}{2b_2'} \end{pmatrix}$

b) $\Delta = 0$ (conică degenerată) $\Rightarrow b_2' = 0$.

Conica devine $\underline{\lambda_1 \cdot x'^2 + 2 \cdot b_1'x'} + c = 0$.

$$\lambda_1 \underbrace{\left(x' + \frac{b_1'}{\lambda_1}\right)}_{=x''}^2 + c' = 0 \quad \text{și } y'' = y'.$$

Obținem $\lambda_1 \cdot x''^2 + c' = 0$.

Considerăm translația $T: x' = x'' + x_0$, $x_0 = \begin{pmatrix} -\frac{b_1'}{\lambda_1} \\ 0 \end{pmatrix}$

1° $c' = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot x''^2 = 0 \Rightarrow$ drepte confundate

2° $c' \neq 0 \Rightarrow \emptyset$ sau drepte paralele,

Izometria efectuată este: $X = RX'' + RX_0$.

Se obțin următoarele schimbări de reper cartezian:

$R = \{O, e_1, e_2\} \rightarrow R' = \{O, e_1', e_2'\} \rightarrow R'' = \{M_0, e_1', e_2'\}$

unde $RX_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $M_0(\alpha, \beta)$ (în raport cu reperul inițial R).

2. Geometrii analitică în spațiu

În spațiul euclidian 3-dimensional $\mathcal{E}_3$ se consideră reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}=\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, unde $O\in\mathcal{E}_2$ și $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\in\mathcal{V}_3$ reper ortonormat.

Def. Funcția $f:\mathcal{E}_3\to\mathbb{R}^3$, $f(P)=(x,y,z)$ este o bijecție, unde $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. (x,y,z) sunt coordonatele carteziene ale lui P în raport cu reperul $\mathcal{R}$. Dreptele care trec prin originea O și au ca direcții vectorii $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ se numesc axe de coordonate, notate Ox, Oy și Oz. $Oxyz$ reprezintă un sistem cartezian de coordonate în $\mathcal{E}_3$.

Obs. $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$.

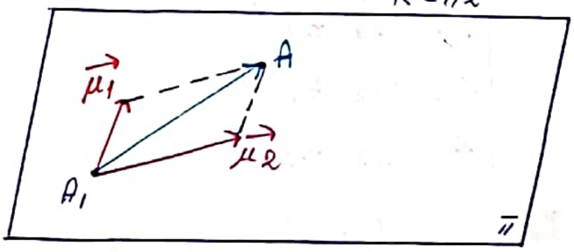
3. Ecuația unui plan în spațiu

Un plan este determinat în mod unic astfel:

1° Planul π determinat de un punct $A_1(x_1,y_1,z_1)$ și vectorii necoliniari $\vec{u}_k=(l_k,m_k,n_k)$, $k=\overline{1,2}$

$A(x,y,z)\in\pi \iff (\exists)\ t_1,t_2\in\mathbb{R}$ a.î.

$$\pi:\ \overrightarrow{A_1A}=\underbrace{\vec{r}}_{\overrightarrow{OA}}-\underbrace{\vec{r}_1}_{\overrightarrow{OA_1}}=t_1\vec{u}_1+t_2\vec{u}_2 \quad \text{(ecuația vectorială)}$$



$$\begin{cases} x-x_1=t_1l_1+t_2l_2 \\ y-y_1=t_1m_1+t_2m_2 \\ z-z_1=t_1n_1+t_2n_2 \end{cases} \quad \text{(ecuațiile parametrice)}$$

$$\pi:\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{array} \\ & \begin{vmatrix} x-x_1 & l_1 & l_2 \\ y-y_1 & m_1 & m_2 \\ z-z_1 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} \end{array}=0 \quad \text{(ecuația sub formă de determinant)}$$

$A_1(x_1,y_1,z_1)\in\pi$

Def. Avem produsul vectorial

dezvoltăm după prima linie

$$\vec{N}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}=(a,b,c) \quad \text{(vectorul normal la planul } \pi)$$

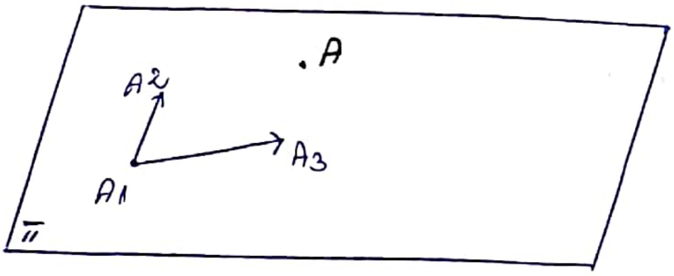
$\vec{N}$ este perpendicular pe ambii vectori $\vec{u}_1,\vec{u}_2$

$$\boxed{\pi:\ \vec{N}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1)=0 \iff (x-x_1)a+(y-y_1)b+(z-z_1)c=0.}$$

2.° Planul π determinat de trei puncte distincte $A_K(x_K, y_K, z_K)$, $K=\overline{1,3}$

Considerăm $\vec{u}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

$\vec{u}_2 = \overrightarrow{A_1A_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$



$A(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow (\exists)\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ a.î.

$\pi: \overrightarrow{A_1A} = \vec{r}-\vec{r}_1 = t_1\overrightarrow{A_1A_2} + t_2\overrightarrow{A_1A_3}$

(ecuația vectorială)

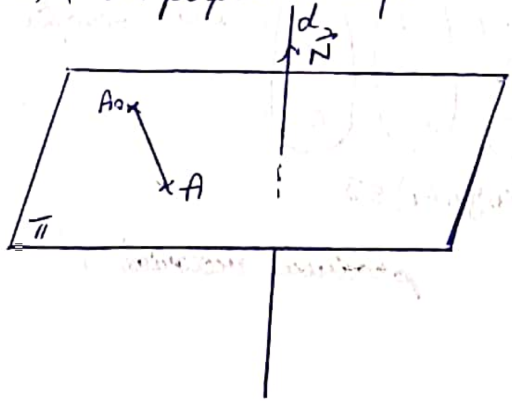
$$\begin{cases} x-x_1 = t_1(x_2-x_1)+t_2(x_3-x_1) \\ y-y_1 = t_1(y_2-y_1)+t_2(y_3-y_1) \\ z-z_1 = t_1(z_2-z_1)+t_2(z_3-z_1) \end{cases}$$ (ecuațiile parametrice)

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ (ecuația sub formă de determinant)

Obs. Punctele $A_K(x_K, y_K, z_K)$, $K=\overline{1,4}$ sunt coplanare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

3.° Planul π care trece printr-un punct $A_0(x_0, y_0, z_0)$ și este perpendicular pe o dreaptă

$d: \dfrac{x-x_1}{\alpha} = \dfrac{y-y_1}{\beta} = \dfrac{z-z_1}{\gamma}$.



$\pi \perp d \Rightarrow \vec{N}_\pi = \vec{u}_d = (\alpha, \beta, \gamma)$

$A(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \pi: \vec{N}\cdot\overrightarrow{A_0A} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{\pi: \alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0.}$

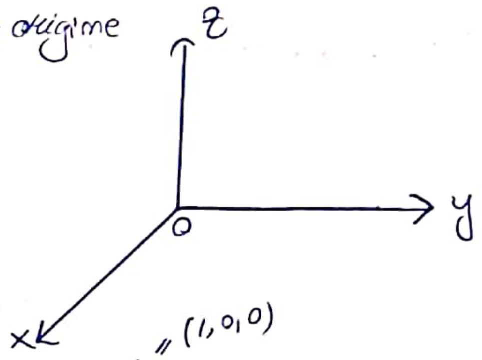
$\overrightarrow{A_0A} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

Obs. Diverse forme ale ecuației carteziene a unui plan

a) Ecuația generală: $\pi: ax+by+cz+d=0$, $a^2+b^2+c^2>0$, $\vec{N}=(a,b,c)$ normala la plan

~ Cazuri particulare ~

1° $\pi: ax+by+cz=0 \rightarrow$ plan care trece prin origine



2° Plane paralele cu axele de coordonate

$\pi: by+cz+d=0 \rightsquigarrow \pi \parallel Ox$

$\pi: ax+cz+d=0 \rightsquigarrow \pi \parallel Oy$

$\pi: ax+by+d=0 \rightsquigarrow \pi \parallel Oz$

Exemplu $\pi: by+cz+d=0$ are $\vec{N_\pi}=(0,b,c)$, $\vec{N_\pi} \perp \vec{i} \Rightarrow \pi \parallel Ox$ (la fel și la celelalte)

3.° Plane paralele cu planele de coordonate

$\pi: ax+d=0 \rightarrow \pi \parallel yOz$

$\pi: by+d=0 \rightarrow \pi \parallel xOz$

$\pi: cz+d=0 \rightsquigarrow \pi \parallel xOy$

Exemplu: $\pi: ax+d=0$ are $\vec{N_\pi}=(1,0,0)=\vec{i}$, este perpendicular pe axa Ox $\Rightarrow \pi \parallel yOz$ (la fel și la celelalte)

b) Ecuația explicită: $\pi: ax+by+cz+d=0 \Rightarrow \pi: z=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y-\frac{d}{c}$, $c\neq 0$.

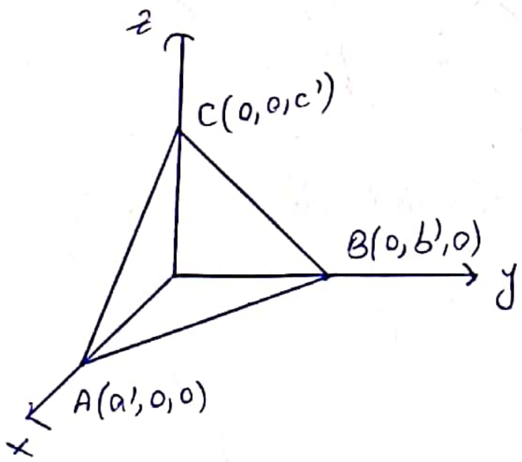
c) Ecuația prin tăieturi: avem $\pi: ax+by+cz+d=0$

$ax+by+cz=-d \,/:(-d) \Rightarrow -\frac{a}{d}x-\frac{b}{d}y-\frac{c}{d}z=1$

$\pi: \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=0$, unde $A(a',0,0)$, $B(0,b',0)$, $C(0,0,c')$ sunt punctele de intersecție ale planului cu axele de coordonate

$$\begin{cases} a' \overset{not.}{=} -\frac{a}{d} \\ b' \overset{not.}{=} -\frac{b}{d} \\ c' \overset{not.}{=} -\frac{c}{d} \end{cases}$$

$d\neq 0$ (planul nu trece prin origine)



d) Ecuația normală a planului : $\pi : x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, unde $\vec{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$
$p = dist(O, \pi) > 0$

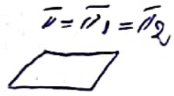
4. Poziția relativă a planelor în spațiu

1°. Poziția relativă a două plane în spațiu

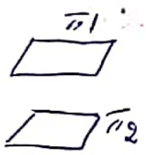
$$\pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \ \bar{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{pmatrix}$$

1° $rg\, A = rg\, \bar{A} = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil simplu nedeterminat
$\pi_1 \cap \pi_2 = d$

2° $rg\, A = rg\, \bar{A} = 1 \Rightarrow$ sistem compatibil dublu nedeterminat și
$\pi_1 = \pi_2 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$



3° $rg\, A = 1$, $rg\, \bar{A} = 2 \Rightarrow$ sistem incompatibil
$\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$



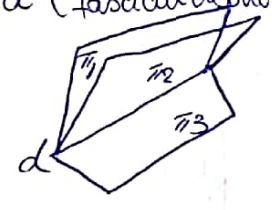
2° Poziția relativă a trei plane în spațiu

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = -d_3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -d_3 \end{pmatrix}$$

1° $\det A \neq 0 \Rightarrow$ sistem compatibil determinat și $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$ (stea/snop de plane)

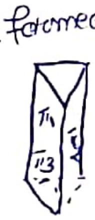
2° $\det A = 0$

a) $rg\, A = rg\, \bar{A} = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil simplu nedeterminat și $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = d$ (fascicul de plane)



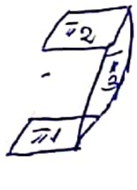
b) $rg\, A = 2$, $rg\, \bar{A} = 3 \Rightarrow$ sistem incompatibil.

Planele se intersectează două câte două în câte o dreaptă (formează o prismă)

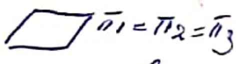


sau

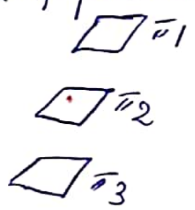
Două dintre plane sunt paralele și intersectează cel de-al treilea plan în câte o dreaptă.



c) $rg\, A = rg\, \bar{A} = 1 \Rightarrow$ sistem compatibil dublu nedeterminat și $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$



d) $rg\, A = 1, rg\, \bar{A} = 2 \Rightarrow$ sistem incompatibil și cele trei plane sunt distincte și paralele



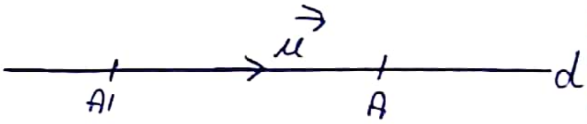
5. Ecuația unei drepte în spațiu

O dreaptă este determinată în mod unic astfel:

1° Dreapta d determinată de un punct $A_1(x_1, y_1, z_1)$ și un vector director ~~[illegible]~~ nenul $\vec{u} = (a, b, c)$.

$A(x, y, z) \in d \Leftrightarrow (\exists)\, t \in \mathbb{R}$ a.î. $d: \vec{r} - \vec{r_1} = \overrightarrow{A_1A} = t \cdot \vec{u}$

(ecuația vectorială)



$$d: \begin{cases} x - x_1 = t \cdot a \\ y - y_1 = t \cdot b \\ z - z_1 = t \cdot c \end{cases}$$ (ecuațiile parametrice)

$d: \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ (ecuațiile canonice) $\rightsquigarrow a, b, c \neq 0$.

Dacă avem cazul contrar, facem următoarea convenție:

a) $d: \dfrac{x - x_1}{0} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}; b \neq 0, c \neq 0$

b) $d: \dfrac{x - x_1}{0} = \dfrac{y - y_1}{0} = \dfrac{z - z_1}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}; c \neq 0.$

2° Dreapta d determinată de două puncte distincte $A_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = \overline{1,2}$.

$A(x, y, z) \in d \Leftrightarrow (\exists)\, t \in \mathbb{R}$ a.î. $d: \vec{r} - \vec{r_1} = \overrightarrow{A_1A} = t \cdot \vec{u}$ (ecuația vectorială)

$\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

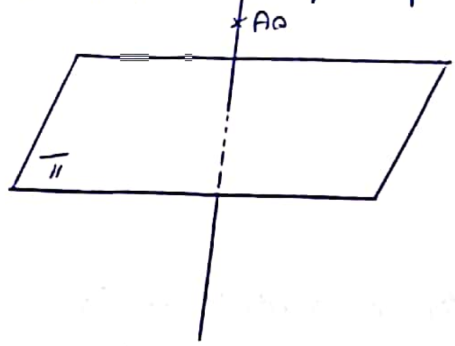
$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1) \\ z - z_1 = t(z_2 - z_1) \end{cases}$$ (ecuațiile parametrice)

$d: \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ (ecuațiile canonice)

3° Dreapta d care trece printr-un punct $A_0(x_0, y_0, z_0)$ și este perpendiculară pe un plan $\pi: ax+by+cz+d=0$.

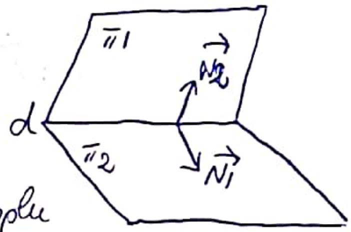
$d \perp \pi$, $\vec{N_\pi} = (a,b,c) \Rightarrow \vec{u_d} = (a,b,c)$

Ecuația lui $\boxed{d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$



4° Dreapta d determinată de intersecția a două plane neparalele $\pi_k: a_k x + b_k y + c_k z + d_k = 0$, $k=\overline{1,2}$

Vectorul director al lui d este $\vec{u_d} = \vec{N_1} \times \vec{N_2}$, unde $\vec{N_k} = (a_k, b_k, c_k)$, $k=\overline{1,2}$.



$\pi_1 \cap \pi_2 = d: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z = -d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z = -d_2 \end{cases}$ sistem liniar compatibil simplu nedeterminat

Prin rezolvarea sistemului, se obțin ecuațiile parametrice ale dreptei.

(Se notează necunoscuta secundară $z = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y = -d_1 - tc_1 \\ a_2x+b_2y = -d_2 - tc_2 \end{cases}$ și se rezolvă.)

Obs. Axele de coordonate au ecuațiile: $Ox: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$; $Oy: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$; $Oz: \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$

Def. Orice mulțime de plane trecând printr-o dreaptă fixă d_0 se numește **fascicul de plane**. d_0 se numește **axa fasciculului**.

Fie $\pi_k: f_k(x,y,z) = a_kx+b_ky+c_kz+d_k = 0$, $k=\overline{1,2}$ două plane distincte care trec prin d_0.

π_1 și π_2 se numesc plane fundamentale sau de bază ale fasciculului.

Ecuația unui plan arbitrar din fascicul se scrie: $r f_1(x,y,z) + s f_2(x,y,z) = 0$, $r^2+s^2>0$, $r,s \in \mathbb{R}$

- $r=0 \Rightarrow \pi_2: f_2(x,y,z)=0$
- $r \neq 0 \Rightarrow f_1(x,y,z) + \lambda f_2(x,y,z) = 0$, $\lambda = \frac{s}{r}$

Propoziție: Planele fundamentale din fascicul se pot schimba cu orice două plane distincte din fascicul.

6. Poziția relativă a două drepte în spațiu

Fie două drepte d_1, d_2 care trec prin $A_1(x_1, y_1, z_1)$, respectiv $A_2(x_2, y_2, z_2)$ și au vector director $\vec{u_1} = (l_1, m_1, n_1)$, respectiv $\vec{u_2} = (l_2, m_2, n_2)$.

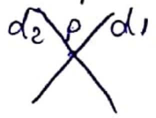
$$d_1: \begin{cases} x = x_1 + t_1 l_1 \\ y = y_1 + t_1 m_1 \\ z = z_1 + t_1 n_1, \ t_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad d_2: \begin{cases} x = x_2 + t_2 l_2 \\ y = y_2 + t_2 m_2 \\ z = z_2 + t_2 n_2, \ t_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$ ecuațiile parametrice

<u>$d_1 \cap d_2$</u>
$$\begin{cases} t_1 l_1 - t_2 l_2 = x_2 - x_1 \\ t_1 m_1 - t_2 m_2 = y_2 - y_1 \\ t_1 n_1 - t_2 n_2 = z_2 - z_1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} l_1 & -l_2 \\ m_1 & -m_2 \\ n_1 & -n_2 \end{pmatrix}, \ \bar{A} = \begin{pmatrix} l_1 & -l_2 & x_2 - x_1 \\ m_1 & -m_2 & y_2 - y_1 \\ n_1 & -n_2 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

1° $rg A = 2$, $rg \bar{A} = 3 \Rightarrow$ sistem incompatibil și $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ i.e. dreptele sunt necoplanare

$$\left(\Delta_c = \begin{vmatrix} l_1 & -l_2 & x_2 - x_1 \\ m_1 & -m_2 & y_2 - y_1 \\ n_1 & -n_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

2° $rg A = rg \bar{A} = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil determinat și dreptele sunt concurente, i.e. $d_1 \cap d_2 = \{P\}$



3° $rg A = rg \bar{A} = 1 \Rightarrow$ sistem compatibil simplu nedeterminat și dreptele coincid, i.e. $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \overrightarrow{A_1A_2}$ sunt coliniari

$d_1 = d_2$

4° $rg A = 1$, $rg \bar{A} = 2 \Rightarrow$ sistem incompatibil și dreptele sunt paralele, i.e. vectorii $\vec{u_1}$ și $\vec{u_2}$ sunt coliniari.

7. Intersecția dintre o dreaptă și un plan

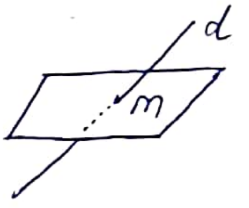
Fie dreapta $d: \frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma} = t \Leftrightarrow d: \begin{cases} x = x_1 + t\alpha \\ y = y_1 + t\beta \\ z = z_1 + t\gamma, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

și planul $\pi: ax+by+cz+d=0$. Studiem $d \cap \pi$.

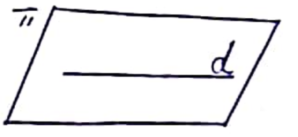
Obținem $a(x_1+\alpha t) + b(y_1+t\beta) + c(z_1+t\gamma) + d = 0$

$t(a\alpha + b\beta + c\gamma) + ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$

1° $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0 \Rightarrow t = -\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a\alpha+b\beta+c\gamma} \Rightarrow d \cap \pi = \{M\}$



2° $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ și $ax_1+by_1+cz_1+d=0 \Rightarrow d \parallel \pi$, $A_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi \Rightarrow d \subset \pi$.



3° $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ și $ax_1+by_1+cz_1+d \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d \parallel \pi$