Milostianu Andreea
Mihoci Valentina

17.11.2021

# Tutoriat 5
## Geometrie I
### (exerciții)

**1.** Fie $f: \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ o transformare geometrică de ecuație $X' = AX + X_0$.

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Să se arate că $f$ este o asemănare.

b) Precizați tipul.

SOL. Asemănarea directă are matricea $A = K\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

La noi, $A = \begin{pmatrix} \overset{a=\cos\alpha}{\sqrt{3}} & \overset{b=\sin\alpha}{-1} \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\quad \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4} = 2 = K$

Deci $A = 2\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}_{\alpha = \frac{\pi}{6}}$

Deci, avem $X' = AX + X_0 = 2A\left(\frac{\pi}{6}\right)X + \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{not.}}{\rightsquigarrow} f$

$f = \mathcal{H}_{A,2} \circ \mathcal{R}_{O,\frac{\pi}{6}}$, $A = (-\sqrt{3}, 0)$ unicul punct fix

Astfel, $f$ este o asemănare directă.

**2.** Fie $\mathcal{J}_{O,5}$ inversiunea de pol origine și raport 5 și dreapta $d: x - 3y = 0$. Determinați $\mathcal{J}_{O,5}(d - \{O\})$.

SOL. Avem polul $O(0,0)$. Se observă că $O(0,0) \in d$, deci $d$ este invariantă în raport cu inversiunea $\mathcal{J}_{O,5}$, adică $\mathcal{J}_{O,5}(d - \{O\}) = d - \{O\}$.

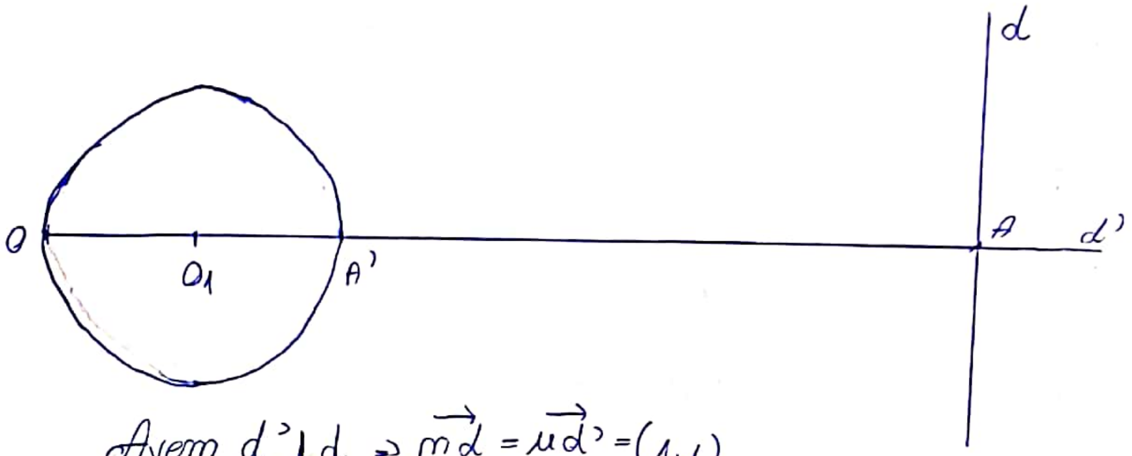
**3.** Fie $\mathcal{J}_{O,2}$ inversiunea de pol origine și raport 2.

a) Să se determine $\mathcal{J}_{O,2}(d)$, unde $d: x + y - 1 = 0$.

b) Fie $M(1,2)$. Precizați poziția punctului $M' = \mathcal{J}_{O,2}(M)$ față de cercul de inversiune.

SOL. a) $\mathcal{J}_{O,2}: \begin{cases} x' = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \end{cases}$

Avem $d: x + y - 1 = 0$ și se obs. că $O(0,0) \notin d$, deci $\mathcal{J}_{O,2}(d) = \mathcal{C}(O_1, R)$.




Avem $d' \perp d \Rightarrow \vec{n_d} = \vec{u_{d'}} = (1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} O(0,0) \in d' \\ \vec{u_{d'}} = (1,1) \end{array}\right| \Rightarrow d': y = x$$

$$d \cap d' = \{A\} : \begin{cases} x+y-1=0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

De asemenea, $A' = J_{O,2}(A)$. Deci $A' = \left(\dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}, \dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}\right) = (2,2)$.

$OA'$ este diametrul cercului cerut, deci $O_1$ este mij. lui $OA'$, acesta fiind centrul cercului.

Așadar, $O_1 = \left(\dfrac{x_O + x_{A'}}{2}, \dfrac{y_O + y_{A'}}{2}\right) = (1,1)$

Vrem să aflăm raza cercului: $R = OO_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

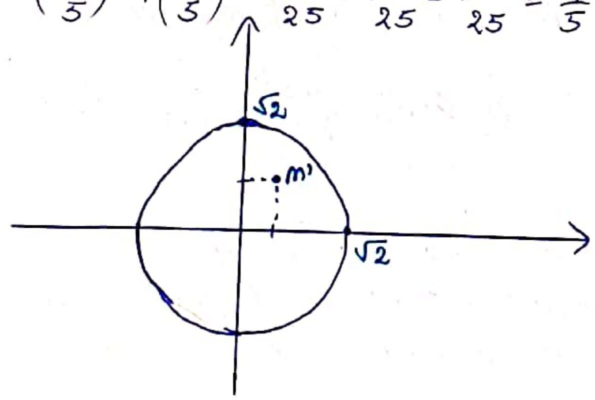
Deci, cercul căutat este : $\mathcal{C}(O_1(1,1), \sqrt{2}) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

! Ecuația unui cerc de centru $M(a,b)$ și rază $R$ este: $\mathcal{C}(M(a,b), R) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ !

b) $M = (1,2)$; $M' = J_{O,2}(M) = \left(\dfrac{2 \cdot 1}{1^2+2^2}, \dfrac{2 \cdot 2}{1^2+2^2}\right) = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

Cercul de inversiune este: $\mathcal{C}(O, \sqrt{2}) : x^2+y^2 = 2$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{16}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} < 2 \Rightarrow M' \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, \sqrt{2}).$$



4. Fie $\mathcal{J}_{0,3}$, $\mathcal{J}_{0,5}$ inversiuni de pol origine și raport 3, respectiv 5.

a) Să se determine transformarea geometrică $f = \mathcal{J}_{0,3} \circ \mathcal{J}_{0,5}$.

b) Precizați locul geometric al punctelor fixe ale inversiunii $\mathcal{J}_{0,3}$.

SOL. $\mathcal{J}_{0,3}: \begin{cases} x' = \dfrac{3x}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{3y}{x^2+y^2} \end{cases}$ $\qquad \mathcal{J}_{0,5}: \begin{cases} x' = \dfrac{5x}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{5y}{x^2+y^2} \end{cases}$

$$f = \mathcal{J}_{0,3} \circ \mathcal{J}_{0,5} : (x,y) \xrightarrow{\mathcal{J}_{0,5}} \Big(\underbrace{\frac{5x}{x^2+y^2}}_{\text{not. } x'}, \underbrace{\frac{5y}{x^2+y^2}}_{\text{not. } y'}\Big) \xrightarrow{\mathcal{J}_{0,3}} \left(\frac{3x'}{x'^2+y'^2}, \frac{3y'}{x'^2+y'^2}\right)$$

$$x'^2+y'^2 = \frac{25x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{25y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{25}{x^2+y^2}$$

Deci, revenind: $\left(3 \cdot \dfrac{5x}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{25}, 3 \cdot \dfrac{5y}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{25}\right) \longrightarrow \left(\dfrac{3}{5}x, \dfrac{3}{5}y\right) \longrightarrow$

$\rightarrow \frac{3}{5}(x,y)$, deci $f = \mathcal{H}_{0,\frac{3}{5}}$, $k = \frac{3}{5}$ $\qquad$ LG $\mathcal{C}(0,\sqrt{3}): x^2+y^2=3$

5. Fie dreptele $d_1: x+y=1$, $d_2: -\sqrt{3}x+y=-\sqrt{3}$.

a) Să se determine izometria $f = S_{d_2} \circ S_{d_1}$.

b) Precizați o mulțime de puncte invariante pentru $f$.

SOL. $d_1: y = 1-x \Rightarrow m_1 = -1 \Rightarrow tg\, d_1 = -1 \Rightarrow \beta = \frac{3\pi}{4}$

$d_2: y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \Rightarrow m_2 = \sqrt{3} \Rightarrow tg\, d_2 = \sqrt{3} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}$

$1-x = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \Rightarrow 1+\sqrt{3} = \sqrt{3}x + x \Rightarrow 1+\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})x \Rightarrow x = 1$, $y = 0$ $\Big| \Rightarrow A(1,0)$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$. Avem $f = R_{A, \frac{5\pi}{12}}$, $A = (1,0)$. deci obținem o rotație

b) La rotații, punctul invariant este centrul acesteia, la noi fiind $A = (1,0)$.

6. Fie dreapta $d: x-y+1=0$, ~~d': x-y+1=0~~. Precizați două drepte invariante pentru $S_d \circ S_d \circ S_d$.

SOL. Simetria axială este o involuție, deci $S_d \circ S_d = id_{\mathcal{E}_2}$. $\Rightarrow S_d \circ S_d \circ S_d = S_d$.
O dreaptă invariantă pentru această compunere este chiar $d: x-y+1=0$.
O altă dreaptă invariantă pentru această compunere este orice dreaptă perpendiculară pe $d$, de tipul $d_1: x+y+a=0$.

$S_d: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_d: \begin{cases} x' = y-1 \\ y' = x+1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_d^{-1}: \begin{cases} y = x'+1 \\ x = y'-1 \end{cases}$

$d_1: x+y+a=0$

$d_1': y'-1+x'+1+a=0 \Rightarrow d_1': x'+y'+a=0$. ✓

**7.** Fie $a_K$ o asemănare. Fie $O(0,0)$, $P(1,2)$, $Q(3,4)$. Dacă $a_K(P)=O$ și $Q$ este un punct fix, atunci să se determine raportul $K$.

SOL. $\left.\begin{array}{l} a_K(P)=O \\ Q \text{ punct fix} \end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{H}_{Q,K}(P)=O \Leftrightarrow \overrightarrow{QO} = K\overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{QO} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\overrightarrow{QP} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Deci $K = \dfrac{5}{2\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$.

**8.** Fie $A, B$ puncte fixate. Să se determine $M$ astfel încât $A$ este un punct fix al izometriei $f = T_{\vec{u}} \circ R_{B,\frac{\pi}{3}}$, unde $\vec{u} = \overrightarrow{MB}$.

SOL. Fixăm $B = O = (0,0)$. $A = (x_A, y_A)$, $M = (x_M, y_M)$, deci $\overrightarrow{MB} = (-x_M, -y_M)$

$f = T_{\vec{u}} \circ R_{\underset{O}{B},\frac{\pi}{3}}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A\left(\frac{\pi}{3}\right)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_M \\ -y_M \end{pmatrix}$ ecuația unei rototranslații

$A$ punct fix $\Rightarrow f(A)=A \Rightarrow \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_M \\ -y_M \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$

Deci $M$ este imaginea punctului $A$ prin $R_{O,\frac{2\pi}{3}}$.