Logică Matematică

Anul I, Semestrul II 2022

Laurențiu Leuștean

Pagina web: https://cs.unibuc.ro//~lleustean/Teaching/2022-LOGICMATH/index.html

Preliminarii

Operații cu mulțimi

Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$\begin{array}{rcl} A \cup B & = & \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \\ A \cap B & = & \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\} \\ A - B & = & \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\} \\ C_T A & = & T - A = \{x \in T \mid x \notin A\} \end{array}$$

Notații: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ este mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Z}$ este mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor reale; $\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor raționale.

Mulțimea părților lui T se notează 2^T sau $\mathcal{P}(T)$. Așadar, $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.

Exemplu. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Produsul cartezian

Notăm cu (a, b) perechea ordonată formată din a și b (care sunt componentele lui (a, b)).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$; $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale ddacă $a = c$ și $b = d$.

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$\begin{array}{rcl} A \times (B \cup C) & = & (A \times B) \cup (A \times C) \\ A \times (B \cap C) & = & (A \times B) \cap (A \times C) \end{array}$$

Funcții

Fie A și B mulțimi și $f : A \to B$ o funcție.
Spunem că f este definită pe A cu valori în B, A se numește domeniul de definiție al funcției f și B se numește domeniul valorilor lui f sau codomeniul lui f.

Notație: Mulțimea funcțiilor de la A la B se notează $Fun(A, B)$, B^A sau $(A \to B)$.

Fie $f : A \to B$ o funcție, $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este imaginea directă a lui X prin f; $f(A)$ este imaginea lui f.
- $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este imaginea inversă a lui Y prin f.
- Fie $f|_X : X \to B$, $f|_X(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Funcția $f|_X$ este restricția lui f la X.

Funcții

Fie $f : A \to B$ o funcție.

- f este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- f este surjectivă dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- f este bijectivă dacă f este injectivă și surjectivă.

Funcții

Fie $f : A \to B$ și $g : B \to C$ două funcții. Compunerea lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcția identică a lui A este $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$.

O funcție $f : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Funcția g este unică, se numește inversa lui f și se notează f^{-1}.

O funcție este bijectivă ddacă este inversabilă.

Fie $f : A \to A$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim $f^n : A \to A$ astfel:

$$f^0 = 1_A, \quad f^{n+1} = f^n \circ f \text{ pentru } n \geq 0.$$

Funcția caracteristică

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. Funcția caracteristică a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \to \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Proprietăți

Dacă $A, B \subseteq T$ și $x \in T$ atunci

$$\begin{aligned} \chi_{A\cap B}(x) &= \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{A\cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{C_T A}(x) &= 1 - \chi_A(x). \end{aligned}$$

Observație

Funcția caracteristică se poate folosi pentru a arăta că două mulțimi sunt egale: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.

Relații binare

Definiție

O relație binară între A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.
O relație binară pe A este o submulțime a lui $A \times A$.

Exemple

- $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$| = \{(k, n) \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$$

- $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$<= \{(k, n) \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$$

Operații cu relații

Fie A, B, C mulțimi.

Definiție

- Dacă $R \subseteq A \times B$, atunci relația inversă $R^{-1} \subseteq B \times A$ este definită astfel:
$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$
- Dacă $R \subseteq A \times B$ și $Q \subseteq B \times C$, atunci compunerea lor $Q \circ R \subseteq A \times C$ este definită astfel:
$$Q \circ R = \{(a, c) \mid \text{ există } b \in B \text{ a.î. } (a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in Q\}.$$
- Diagonala lui A este $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Exercițiu

- Compunerea relațiilor este asociativă.
- Dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$.

Relații binare

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A \times A$ o relație binară pe A.
Notație: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiție

- R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- R este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx.
- R este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,
$$xRy \text{ și } yRx \text{ implică } x = y.$$
- R este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
$$xRy \text{ și } yRz \text{ implică } xRz.$$
- R este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx.

Relații de echivalență

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A se numește relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Notații: Vom nota relațiile de echivalență cu $\sim$. Scriem $x \sim y$ dacă $(x, y) \in \sim$ și $x \not\sim y$ dacă $(x, y) \notin \sim$.

Fie A o mulțime nevidă și $\sim$ o relație de echivalență pe A.

Definiție

Pentru orice $x \in A$, clasa de echivalență $[x]$ a lui x este definită astfel: $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Relații de echivalență

Proprietăți

- $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Definiție

Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte ale elementelor lui A se numeșt mulțimea cât a lui A prin $\sim$ și se notează $A/\sim$. Aplicația $\pi : A \to A/\sim, \quad \pi(x) = [x]$ se numește funcția cât.

Relații de ordine

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A este relație de

- ordine parțială dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ordine strictă dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu $\leq$, iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

Definiție

Dacă $\leq$ este o relație de ordine parțială (totală) pe A, spunem că $(A, \leq)$ este mulțime parțial (total) ordonată.

Mulțimi parțial ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Proprietăți

- Orice relație de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulțime total ordonată este mulțime parțial ordonată.
- Relația $<$ definită prin $x < y \iff x \leq y$ și $x \neq y$ este relație de ordine strictă.
- Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci $(S, \leq)$ este mulțime parțial ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Mulțimi parțial ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in S$ se numește

- element minimal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \leq e$ implică $a = e$;
- element maximal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $e \leq$ a implică $a = e$;
- cel mai mic element (sau minim) al lui S, notat $\min S$, dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- cel mai mare element (sau maxim) al lui S, notat $\max S$, dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$.

Mulțimi parțial ordonate

Proprietăți

- Atât minimul, cât și maximul lui S sunt unice (dacă există).
- Dacă $\min S$ există, atunci $\min S$ este element minimal al lui S.
- Dacă $\max S$ există, atunci $\max S$ este element maximal al lui S.
- S poate avea mai multe elemente maximale sau minimale.
- Un element minimal (maximal) al lui S nu este în general minim (maxim) al lui S.

Dem.: Exercițiu.

Mulțimi parțial ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in A$ se numește

- majorant al lui S dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$;
- minorant al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- supremum al lui S, notat $\sup S$, dacă e este cel mai mic majorant al lui S;
- infimum al lui S, notat $\inf S$, dacă e este cel mai mare minorant al lui S.

Proprietăți

- Atât mulțimea majoranților, cât și mulțimea minoranților lui S pot fi vide.
- Atât supremumul, cât și infimumul lui S sunt unice (dacă există).

Mulțimi bine ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

Spunem că $(A, \leq)$ este mulțime bine ordonată dacă orice submulțime nevidă a lui A are minim. În acest caz, $\leq$ se numește relație de bună ordonare pe A.

Exemple

$(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, \leq)$ nu este bine ordonată.

Observație

Orice mulțime bine ordonată este total ordonată.

Mulțimi inductiv ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

$(A, \leq)$ se numește inductiv ordonată dacă orice submulțime total ordonată a sa admite un majorant.

Lema lui Zorn

Orice mulțime inductiv ordonată are un element maximal.

- un instrument foarte util în demonstrații.

Familii

Fie I o mulțime nevidă.

Fie A o mulțime. O familie de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i\in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i, obținem o familie (indexată) de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$.
Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T. Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i\in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in T \mid \text{ există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$

Dacă $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i, j \in I, i \neq j$, spunem că $\bigcup_{i\in I} A_i$ este o reuniune disjunctă.

Produsul cartezian al unei familii

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} A_i &= \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.\end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, aplicația $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$, $\quad \pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$ se numește proiecție canonică a lui $\prod_{i\in I} A_i$. π_j este surjectivă.

Exercițiu. Fie I, J mulțimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j \quad \text{și} \quad \bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j.$$

$I = \{1, \ldots, n\}$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \ldots, n\}$ și $A_1, \ldots, A_n \subseteq T$.

- $(x_i)_{i\in I} = (x_1, \ldots, x_n)$, un n-tuplu (ordonat)
- $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $\prod_{i\in I} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

Definiție

O relație n-ară între $A_1, \ldots, A_n$ este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$.
O relație n-ară pe A este o submulțime a lui A^n. Dacă R este relație n-ară, spunem că n este aritatea lui R.

Axioma alegerii

Axioma alegerii (în engleză Axiom of Choice) (AC)

Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci există o funcție f_C care asociază la fiecare $i \in I$ un element $f_C(i) \in A_i$.

- formulată de Zermelo (1904)
- a provocat discuții aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi funcția alegere f_C.

Reformulare

Următoarea afirmație este echivalentă cu Axioma alegerii:
Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci $\prod_{i\in I} A_i$ este o mulțime nevidă.

Axioma alegerii

- Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- Cohen (1963) a demonstrat că negația axiomei alegerii este consistentă cu ZF. Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF. Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- Lema lui Zorn
- Principiul bunei ordonări: Orice mulțime nevidă X poate fi bine ordonată (adică, pentru orice X există o relație binară $\leq$ pe X a.î. $(X, \leq)$ este mulțime bine ordonată).

H. Rubin, J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice II, North Holland, Elsevier, 1985

Echipotență

Definiția 1.1

Spunem că A este echipotentă cu B dacă există o bijecție $f : A \to B$. Notație: $A \sim B$.

Propoziția 1.2

Pentru orice mulțimi A, B, C au loc:

(i) $A \sim A$;

(ii) Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$.

(iii) Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

Dem.: Exercițiu.

Observație

Prin urmare, A este echipotentă cu B ddacă B este echipotentă cu A. De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.

Mulțimi finite, numărabile

Definiția 1.3

O mulțime A se numește finită dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. A este echipotentă cu $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. În acest caz, notăm cu $|A|$ numărul elementelor lui A.

O mulțime care nu este finită se numește infinită.

Definiția 1.4

O mulțime A este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.

O mulțime finită sau numărabilă se numește cel mult numărabilă.

Exemple

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.
- Orice submulțime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Teoremă Cantor

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nu este mulțime numărabilă.

Cardinale

Numerele cardinale sau cardinalele sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Definiția 2.1

Pentru orice mulțime A, cardinalul lui A (sau numărul cardinal al lui A) este un obiect $|A|$ asociat lui A a.î. sunt satisfăcute următoarele:

- *$|A|$ este unic determinat de A.*
- *pentru orice mulțimi A, B, avem că $|A| = |B|$ ddacă $A \sim B$.*

Această definiție nu specifică natura obiectului $|A|$ asociat unei mulțimi A.

Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.

Un posibil răspuns este:

definim $|A|$ ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipotente cu A.

Un alt răspuns este definiția lui von Neumann din teoria axiomatică a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime A, $|A|$ este tot o mulțime.

Colecția tuturor cardinalelor nu este mulțime, ci clasă. Vom nota cu Card clasa tuturor cardinalelor.

Notăm cardinalele cu α, β, γ, κ, ...

Definiția 2.2

α este cardinal ddacă există o mulțime A a.î. $\alpha = |A|$. Spunem, în acest caz, că A este un reprezentant al lui α.

Desigur, orice mulțime echipotentă cu A este, de asemenea, reprezentant al lui α.

Definiția 2.3

Fie $\alpha = |A|$ un cardinal. Dacă A este finită (respectiv infinită), spunem că α este un cardinal finit (respectiv cardinal infinit).

Notații

- Notăm $0 := |\emptyset|$ și, pentru orice $n \geq 1$, $n := |\{0, 1, \ldots, n-1\}|$.
- $|\mathbb{N}|$ se notează $\aleph_0$ (se citește *alef zero*).
- $|\mathbb{R}|$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și puterea continuumului.

Observația 2.4

(i) *O mulțime A este finită ddacă există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n = |A|$. Prin urmare, putem identifica cardinalul $|A|$ cu numărul elementelor lui A.*

(ii) *O mulțime A este numărabilă ddacă $|A| = \aleph_0$.*

Observația 2.5

(i) *Pentru orice mulțime A, $Fun(\emptyset, A)$ are un singur element, funcția vidă. Prin urmare, $|Fun(\emptyset, A)| = 1$.*

(ii) *Pentru orice mulțime nevidă A, $Fun(A, \emptyset) = \emptyset$, deci $|Fun(A, \emptyset)| = 0$.*

Definiția 2.6

Definim următoarea relație: pentru orice cardinale $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$,

$$\alpha \leq \beta \iff \text{există o funcție injectivă } f : A \to B.$$

Observația 2.7

Definiția relației $\leq$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \to A'$ și $v : B \to B'$. Demonstrăm că

$$\alpha \leq \beta \iff \text{există o funcție injectivă } g : A' \to B'.$$

$\Rightarrow$ Fie $f : A \to B$ o funcție injectivă. Atunci $g := v \circ f \circ u^{-1} : A' \to B'$ este injectivă.
$\Leftarrow$ Avem că $f := v^{-1} \circ g \circ u : A \to B$ este injectivă.
Deci, definiția nu depinde de reprezentanții A și B. □

Relației $\leq$ se asociază o nouă relație, definită astfel:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \leq \beta \text{ și } \alpha \neq \beta.$$

Propoziția 2.8

- (i) *Pentru orice mulțimi A, B, dacă $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$.*
- (ii) *Pentru orice cardinal finit α, avem că $\alpha < \aleph_0$.*
- (iii) *Pentru orice mulțime A și orice cardinal α, dacă $\alpha \leq |A|$, atunci există o submulțime B a lui A a.î. $|B| = \alpha$.*
- (iv) *$0 \leq \alpha$ pentru orice cardinal α.*
- (v) *$1 \leq \alpha$ pentru orice cardinal $\alpha \neq 0$.*
- (vi) *Relația $\leq$ este reflexivă și tranzitivă.*

Dem.: Exercițiu.

Următorul rezultat este fundamental.

Teorema 2.9 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie A și B două mulțimi astfel încât există $f : A \to B$ și $g : B \to A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.

Dem.: (Schiță). Pentru orice $n \geq 0$, definim

$$h_n := (g \circ f)^n : A \to A, \quad A_n := h_n(A) \subseteq A, \quad B_n := h_n(g(B)) \subseteq A.$$

Evident, $h_0 = 1_A$, $A_0 = A$ și $B_0 = g(B)$. De asemenea, h_n este injectivă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $h_m \circ h_n = h_{m+n}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

Afirmația 1: Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subseteq A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$. Prin urmare, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt șiruri descrescătoare de mulțimi a.î. $\bigcap_{n\geq 0} A_n = \bigcap_{n\geq 0} B_n$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Introducem următoarele notații:

$$C := \bigcap_{n\geq 0} A_n \quad \text{și, pentru orice } n \in \mathbb{N},\ A'_n := A_n - B_n,\ B'_n := B_n - A_{n+1}.$$

Deoarece h_n, g sunt injective, avem că

$$\begin{aligned} A'_n &= A_n - B_n = h_n(A) - h_n(g(B)) = h_n(A - g(B)), \\ B'_n &= B_n - A_{n+1} = h_n(g(B)) - h_{n+1}(A) \\ &= (h_n \circ g)(B) - (h_n \circ g)(f(A)) = (h_n \circ g)(B - f(A)) \end{aligned}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Se observă ușor că mulțimile C, $\bigcup_{n\geq 0} A'_n$ și $\bigcup_{n\geq 0} B'_n$ sunt disjuncte două câte două.

Afirmația 2: $A = C \cup \bigcup_{n\geq 0} A'_n \cup \bigcup_{n\geq 0} B'_n$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Definim

$$\Phi : A \to B, \ \ \Phi(a) = \begin{cases} f(a) & \text{dacă } a \in C \cup \bigcup_{n\geq 0} A'_n \\ b & \text{dacă } a \in \bigcup_{n\geq 0} B'_n \text{ și } b \text{ este unicul element} \\ & \text{din } B \text{ a.î. } g(b) = a. \end{cases}$$

Observăm că Φ e bine definită pe a doua ramură: deoarece

$$\bigcup_{n\geq 0} B'_n \subseteq \bigcup_{n\geq 0} B_n = B_0 = g(B),$$

avem, în acest caz, $a \in g(B)$. Din injectivitatea funcției g, rezultă că există un unic $b \in B$ a.î. $g(b) = a$.

Afirmația 3: Φ este bijectivă.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Prin urmare, $A \sim B$. □

O reformulare a Teoremei Cantor-Schröder-Bernstein este

Teorema 2.10

Relația $\leq$ este antisimetrică, adică pentru orice cardinale α, β avem:

$$\alpha \leq \beta \text{ și } \beta \leq \alpha \text{ implică } \alpha = \beta.$$

Dem.: Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$. Atunci

- $\alpha \leq \beta$ ddacă există o funcție injectivă $f : A \to B$.
- $\beta \leq \alpha$ ddacă există o funcție injectivă $g : B \to A$.
- $\alpha = \beta$ ddacă $A \sim B$. □

Teorema 2.11

Relația $\leq$ este totală, adică pentru orice cardinale α, β avem că $\alpha \leq \beta$ sau $\beta \leq \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$. Definim

$$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A \text{ și } f : X \to B \text{ este funcție injectivă}\}.$$

Evident, $\mathcal{F}$ este nevidă. Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1} = f_1.$$

Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 1: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g). Deoarece $Y \subseteq A$ și $g : Y \to B$ este injectivă, avem că $|Y| \leq \alpha$ și $|Y| \leq \beta$. Distingem următoarele două cazuri:

- g este surjectivă. Atunci g este bijectivă, deci $|Y| = |B|$. Obținem că $\beta = |B| = |Y| \leq \alpha$.
- g nu este surjectivă. Atunci există $b \in B - g(Y)$. Dacă $Y \neq A$, luăm $a \in A - Y$ și definim funcția $f : Y \cup \{a\} \to B$ astfel:
  $$f|_Y = g \text{ și } f(a) = b.$$
  Se observă ușor că $(Y \cup \{a\}, f) \in \mathcal{F}$ și $(Y, g) < (Y \cup \{a\}, f)$, ceea ce este o contradicție cu faptul că (Y, g) este element maximal al lui $\mathcal{F}$. Prin urmare, trebuie să avem $Y = A$. Rezultă atunci că $\alpha = |A| = |Y| \leq \beta$. □

Teorema 2.12

Relația $\leq$ este o relație de ordine totală.

Dem.: Exercițiu.

Rezultă ușor că

Corolar 2.13

Relația $<$ este o relație de ordine strictă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.14

Pentru orice mulțime infinită A, $\aleph_0 \leq |A|$. Prin urmare, orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.

Dem.: Definim inductiv șirul $(a_n)_{n \in N}$ din A cu proprietatea că $a_i \neq a_j$ pentru orice $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$.
Deoarece A este nevidă, există $a_0 \in A$.
Cum A este infinită, $A - \{a_0\}$ este nevidă, deci există $a_1 \in A$ a.î. $a_1 \neq a_0$.
Cum A este infinită, $A - \{a_0, a_1\}$ este nevidă, deci există $a_2 \in A$ a.î. $a_2 \neq a_0$ și $a_2 \neq a_1$.
În general, presupunem că am definit $a_0, \ldots, a_n \in A$ distincte două câte două. Cum A este infinită, $A - \{a_0, \ldots, a_n\}$ este nevidă, deci există $a_{n+1} \in A$ diferit de toți $a_0, \ldots, a_n$.

Definind funcția $f : \mathbb{N} \to A$ prin $f(n) = a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că f este injectivă. Prin urmare, $\aleph_0 \leq |A|$.
Deoarece f este injectivă, avem că $f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$. Rezultă că $f(\mathbb{N})$ este o submulțime numărabilă a lui A. $\square$

Propoziția 2.15

Fie α un cardinal finit și β un cardinal infinit. Atunci $\alpha < \beta$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.16

Fie A o mulțime infinită și $F \subseteq A$ o submulțime finită a sa. Atunci $|A - F| = |A|$.

Dem.: Exercițiu.

Definiția 2.17

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale, reprezentanții A și B fiind aleși a.î. $A \cap B = \emptyset$. Definim suma cardinalelor α și β prin

$$\alpha + \beta := |A \cup B|.$$

Observația 2.18

Observăm mai întâi că pentru orice cardinale α, β putem alege mulțimi A, B cu $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$ și $A \cap B = \emptyset$. Într-adevăr, dacă $\alpha = |U|$ și $\beta = |V|$, atunci luăm $A = U \times \{1\}$ și $B = V \times \{2\}$.

Observația 2.19

Definiția operației + nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$ cu $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$. Considerăm bijecțiile $u : A \to A'$ și $v : B \to B'$. Definim

$$f : A \cup B \to A' \cup B', \quad f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \in A \\ v(x) & \text{dacă } x \in B. \end{cases}$$

Se demonstrează ușor că f este bijectivă. Prin urmare, $\alpha + \beta = |A \cup B| = |A' \cup B'|$. □

Propoziția 2.20

(i) *0 este element neutru al lui +.*

(ii) *Operația + este comutativă și asociativă.*

(iii) *Pentru orice cardinale α, β, γ,*

$$\beta \leq \gamma \textit{ implică } \alpha + \beta \leq \alpha + \gamma.$$

În particular, $\alpha \leq \alpha + \gamma$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.21

Pentru orice cardinal infinit α, avem $\alpha + \alpha = \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Definim

$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid \emptyset \neq X \subseteq A$ și $f : X \times \{0, 1\} \to X$ este funcție bijectivă$\}$.

Afirmația 1: $\mathcal{F}$ este nevidă.

Dem.: Deoarece A este infinită, putem aplica Propoziția 2.14 pentru a obține o submulțime numărabilă $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a lui A. Definim

$$f : X \times \{0, 1\} \to X, \quad f(x_n, 0) = x_{2n}, \; f(x_n, 1) = x_{2n+1}.$$

Se observă ușor că f este bijecție. Prin urmare, $(X, f) \in \mathcal{F}$. ■.

Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1 \times \{0,1\}} = f_1.$$

Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 2: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Demonstrație: Fie $\mathcal{G} = (X_i, f_i)_{i \in I}$ o submulțime total ordonată a lui $\mathcal{F}$. Fie $X := \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq A$. Definim $f : X \times \{0, 1\} \to X$ astfel:

dacă $x \in X$, alegem un $i \in I$ a.î. $x \in X_i$ și definim $f(x, t) = f_i(x, t)$ pentru orice $t \in \{0, 1\}$.

Definiția lui f este corectă, deoarece pentru orice $i, j \in I, i \neq j$, dacă $x \in X_i \cap X_j$, atunci $f_i(x, t) = f_j(x, t)$. De asemenea, se observă ușor că $(X_i, f_i) \leq (X, f)$ pentru orice $i \in I$. Rămâne să mai arătăm că f este bijectivă.

Suma cardinalelor

Demonstrăm că f este surjectivă. Fie $y \in X$ arbitrar. Atunci există $i \in I$ a.î. $y \in X_i$. Deoarece f_i este surjectivă, există $x \in X_i$, $t \in \{0,1\}$ a.î. $f_i(x,t) = y$. Conform definiției lui f, rezultă că $f(x,t) = f_i(x,t) = y$.

Demonstrăm că f este injectivă. Fie $x, y \in X, s, t \in \{0,1\}$ a.î. $f(x,s) = f(y,t)$. Atunci există $i, j \in I$ a.î. $x \in X_i$ și $y \in X_j$. Rezultă că $f(x,s) = f_i(x,s)$ și $f(y,t) = f_j(y,t)$, deci $f_i(x,s) = f_j(y,t)$. Deoarece $\mathcal{G}$ este total ordonată, avem următoarele două posibilități:

- $(X_i, f_i) \leq (X_j, f_j)$. Atunci $x \in X_i \subseteq X_j$ și $f_j|_{X_i \times \{0,1\}} = f_i$, deci $f_j(x,s) = f_i(x,s)$. Obținem că $f_j(x,s) = f_j(y,t)$. Deoarece f_j este injectivă, rezultă că $x = y$ și $s = t$.
- $(X_j, f_j) \leq (X_i, f_i)$. Se demonstrează similar că $x = y$ și $s = t$.

■

Suma cardinalelor

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g). Așadar, $\emptyset \neq Y \subseteq A$ și $g : Y \times \{0,1\} \to Y$ este bijecție, deci $|Y \times \{0,1\}| = |Y|$.

Afirmația 3: $A - Y$ este finită.

Demonstrație: Presupunem că $A - Y$ este infinită. Din Propoziția 2.14, rezultă că $A - Y$ are o submulțime numărabilă C. Obținem, ca în demonstrația Afirmației 1, o bijecție $h : C \times \{0,1\} \to C$. Definim

$$p : (Y \cup C) \times \{0,1\} \to Y \cup C, \quad p(x,t) = \begin{cases} g(x,t) & \text{dacă } x \in Y \\ h(x,t) & \text{dacă } x \in C. \end{cases}$$

Deoarece g și h sunt bijecții, se arată ușor că p este, de asemenea, bijecție. Rezultă că $(Y \cup C, p) \in \mathcal{F}$ și $(Y, g) < (Y \cup C, p)$, ceea ce contrazice maximalitatea lui (Y, g). Prin urmare, $A - Y$ este finită. ■

Suma cardinalelor

Aplicând Propoziția 2.16, avem că $|Y| = |A - (A - Y)| = |A| = \alpha$. Obținem

$$\begin{aligned} \alpha &= |Y| = |Y \times \{0,1\}| = |(Y \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})| \\ &= |Y \times \{0\}| + |Y \times \{1\}| = |Y| + |Y| = \alpha + \alpha. \end{aligned}$$ □

Propoziția 2.22

Dacă α și β sunt cardinale cu α infinit și $\beta \leq \alpha$, atunci $\alpha + \beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.23

Fie α, β cardinale a.î. cel puțin unul dintre ele este infinit. Atunci $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dem.: Exercițiu.

Produsul cardinalelor

Definiția 2.24

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale. Definim produsul cardinalelor α și β prin

$$\alpha \cdot \beta := |A \times B|.$$

Observația 2.25

Definiția operației $\cdot$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \to A'$ și $v : B \to B'$. Definim

$$f : A \times B \to A' \times B', \quad f(a,b) = (u(a), v(b)).$$

Se demonstrează ușor că f este bijectivă. Prin urmare, $\alpha \cdot \beta = |A \times B| = |A' \times B'|$. □

Propoziția 2.26

(i) $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$ *pentru orice cardinal* α.

(ii) 1 *este element neutru al lui* $\cdot$.

(iii) *Pentru orice cardinale* α, β, γ,

$$\beta \leq \gamma \text{ implică } \alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \gamma.$$

(iv) *Pentru orice cardinale* α, β *a.î.* $\beta \neq 0$, $\alpha \leq \alpha \cdot \beta$.

(v) *Operația* $\cdot$ *este comutativă, asociativă și distributivă față de* $+$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.27

Pentru orice cardinal infinit α, *avem* $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Definim

$$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A, X \text{ infinită și } f : X \to X \times X \text{ este funcție bijectivă}\}.$$

Afirmația 1: $\mathcal{F}$ este nevidă.

Demonstrație: Deoarece A este infinită, putem aplica Propoziția 2.14 pentru a obține o submulțime numărabilă $B \subseteq A$. Prin urmare, există o bijecție $g : B \to \mathbb{N}$. Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, există o bijecție $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Definim

$$h : B \times B \to B, \quad h(x, y) = (g^{-1} \circ f)(g(x), g(y)).$$

Se arată ușor că h este bijecție. Rezultă că $(B, h^{-1}) \in \mathcal{F}$. ■

Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1} = f_1.$$

Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 2: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g). Fie $\beta := |Y|$. Cum Y este o submulțime infinită a lui A, avem că β este un cardinal infinit și $\beta \leq \alpha$. Deoarece $g : Y \to Y \times Y$ este bijecție, avem că

$$(*) \quad \beta = |Y| = |Y \times Y| = |Y| \cdot |Y| = \beta \cdot \beta.$$

Afirmația 3: $\beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Aplicăm acum $(*)$ pentru a conclude că $\alpha \cdot \alpha = \alpha$. □

Definim inductiv α^n pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ astfel:

$$\alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha.$$

Propoziția 2.28

Pentru orice cardinal infinit α *și orice* $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^n = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.29

Dacă α *și* β *sunt cardinale cu* α *infinit și* $0 \neq \beta \leq \alpha$, *atunci* $\alpha \cdot \beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.30

Fie α, β cardinale nenule a.î. cel puțin unul dintre ele este infinit. Atunci $\alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dem.: Presupunem că α este infinit. Deoarece $\leq$ este totală, avem următoarele două cazuri:

- $\beta \leq \alpha$. Atunci $\max\{\alpha, \beta\} = \alpha$ și $\alpha \cdot \beta = \alpha$, conform Propoziției 2.29.
- $\alpha \leq \beta$. Atunci β este, de asemenea, infinit, $\max\{\alpha, \beta\} = \beta$ și $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = \beta$, conform Propoziției 2.29. □

Definiția 2.31

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale. Definim

$$\alpha^{\beta} := |A^{B}| = |Fun(B, A)|.$$

Observația 2.32

Definiția lui α^{β} nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \to A'$ și $v : B \to B'$. Definim $\Phi : Fun(B, A) \to Fun(B', A')$ astfel:

$$\text{pentru orice funcție } f : B \to A, \quad \Phi(f) := u \circ f \circ v^{-1} : B' \to A'.$$

Se demonstrează ușor că Φ este inversabilă, inversa sa fiind

$$\Psi : Fun(B', A') \to Fun(B, A), \quad \Psi(g) = u^{-1} \circ g \circ v$$

Prin urmare, $\alpha^{\beta} = |Fun(B, A)| = |Fun(B', A')|$. □

Observația 2.33

(i) *Pentru orice cardinal α, $1^{\alpha} = 1, \alpha^{0} = 1$.*

(ii) *Pentru orice cardinal nenul α, $0^{\alpha} = 0$.*

Dem.: Exercițiu.

Lema 2.34

Fie A, B, C mulțimi. Atunci

(i) *$Fun(A, Fun(B, C)) \sim Fun(A \times B, C)$.*

(ii) *$Fun(A, B \times C) \sim Fun(A, B) \times Fun(A, C)$.*

(iii) *Dacă în plus $A \cap B = \emptyset$, atunci $Fun(A \cup B, C) \sim Fun(A, C) \times Fun(B, C)$.*

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.35

Fie α, β, γ cardinale arbitrare.

(i) *$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$, $(\alpha \cdot \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma}$ și $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.*

(ii) *Dacă $\alpha \leq \beta$, atunci $\alpha^{\gamma} \leq \beta^{\gamma}$.*

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.36

Fie α un cardinal infinit și β un cardinal a.î. $2 \leq \beta \leq 2^{\alpha}$. Atunci $\beta^{\alpha} = 2^{\alpha}$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.37

Fie α un cardinal.

(i) *Pentru orice reprezentant A al lui α, are loc $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$.*

(ii) *$\alpha < 2^\alpha$.*

Dem.: Fie $\alpha = |A|$.

(i) Avem că $2^\alpha = |Fun(A, \{0,1\})|$. Definim

$$\Psi : \mathcal{P}(A) \to Fun(A, \{0,1\}), \quad \Psi(B) = \chi_B,$$

unde χ_B este funcția caracteristică a submulțimii B a lui A. Se demonstrează ușor că Ψ este bijectivă.

(ii) Deoarece funcția $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(a) = \{a\}$ este injectivă, avem că $\alpha \leq 2^\alpha$. Conform (S1.1), nu există funcții surjective cu domeniul A și codomeniul $\mathcal{P}(A)$. Rezultă că $\alpha \neq 2^\alpha$. Prin urmare, $\alpha < 2^\alpha$. □

Propoziția 2.38

Fie α un număr cardinal și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi a.î. $|A_i| \leq \alpha$ pentru orice $i \in I$. Atunci

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \alpha \cdot |I|.$$

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Pentru orice $i \in I$, deoarece $|A_i| \leq \alpha$, există o funcție injectivă $f_i : A_i \to A$.
Definim $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to A \times I$ astfel:

dacă $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$, alegem $i_a \in I$ cu $a \in A_{i_a}$ și definim
$$f(a) = (f_{i_a}(a), i_a).$$

Rezultă ușor că f este injectivă: dacă $a, b \in \bigcup_{i\in I} A_i$ sunt a.î. $(f_{i_a}(a), i_a) = (f_{i_b}(b), i_b)$, atunci $i_a = i_b$ și $f_{i_a}(a) = f_{i_b}(b)$. Rezultă că $f_{i_a}(a) = f_{i_a}(b)$, deci $a = b$, deoarece f_{i_a} este injectivă.
Prin urmare, $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq |A \times I| = \alpha \cdot |I|$. □

Propoziția 2.39

Fie $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ două cardinale nenule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) *$\alpha \leq \beta$.*

(ii) *Există o funcție surjectivă $g : B \to A$.*

Dem.: (i)⇒(ii) Fie $f : A \to B$ injectivă. Fixăm $a_0 \in A$. Definim

$$g : B \to A, \quad g(b) = \begin{cases} a_0 & \text{dacă } b \in B - f(A) \\ a & \text{dacă } b \in f(A) \text{ și } a \text{ este unicul element} \\ & \text{din } A \text{ a.î. } f(a) = b. \end{cases}$$

Deoarece f este injectivă, g este bine definită. De asemenea, se observă imediat că g este surjectivă.

(ii)⇒(i) Fie $g : B \to A$ surjectivă. Pentru fiecare $a \in A$, alegem un element $b_a \in B$ a.î. $g(b_a) = a$. Definim

$$f : A \to B, \quad f(a) = b_a.$$

Se arată ușor că f este injectivă: dacă $a_1, a_2 \in A$ a.î. $b_{a_1} = b_{a_2}$, atunci $a_1 = g(b_{a_1}) = g(b_{a_2}) = a_2$. Prin urmare, $\alpha \leq \beta$. □

Propoziția 2.40

Pentru orice mulțime infinită A, $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A^n\right| = |A|$.

Dem.: Exercițiu.

Cardinale

Propoziția 2.41

Fie A o mulțime infinită și $\mathcal{P}_f(A)$ mulțimea tuturor submulțimilor finite ale lui A. Atunci $|\mathcal{P}_f(A)| = |A|$.

Dem.: Definim funcția $g : A \to \mathcal{P}_f(A)$, $g(a) = \{a\}$. Deoarece g este injectivă, rezultă că

$$|A| \leq |\mathcal{P}_f(A)|.$$

Prin urmare, $\mathcal{P}_f(A)$ este o mulțime infinită. Fie $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_f(A) - \{\emptyset\}$.
Conform Propoziției 2.16, avem că $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}_f(A)|$.
Definim $h : \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A^n \to \mathcal{P}'$ astfel:

dacă $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ $(n \geq 1)$, atunci $h(a) = A'$, unde A' este mulțimea obținută luând toți a_i diferiți.

Se observă ușor că h este surjectivă. Aplicând Propozițiile 2.39 și 2.40, rezultă că $|\mathcal{P}_f(A)| = |\mathcal{P}'| \leq \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A^n\right| = |A|$.
Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein. $\square$

Cardinale - numărabilitate

Propoziția 2.42

(i) Dacă A este numărabilă, atunci A^k este numărabilă pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Orice submulțime infinită a unei mulțimi numărabile este numărabilă.

(iii) O reuniune cel mult numărabilă de mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

(iv) $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

(v) $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Dem.:

(i) Avem că $|A| = \aleph_0$. Prin urmare, $|A^k| = \aleph_0^k = \aleph_0$, conform Propoziției 2.28.

(ii) Fie B o mulțime numărabilă și $A \subseteq B$ o mulțime infinită. Atunci $|A| \leq |B| = \aleph_0$. Pe de altă parte, avem din Propoziția 2.14 că $\aleph_0 \leq |A|$. Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein.

Cardinale - numărabilitate

(iii) Fie I o mulțime cel mult numărabilă (deci $|I| \leq \aleph_0$) și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi cel mult numărabile. Rezultă că $|A_i| \leq \aleph_0$ pentru orice $i \in I$. Obținem

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| &\leq \aleph_0 \cdot |I| \quad \text{conform Propoziției 2.38}\\
&\leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 \quad \text{din Propoziția 2.26.(iii)}\\
&= \aleph_0 \quad \text{din Propoziția 2.27.}
\end{aligned}$$

(iv) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup A$, unde $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{-n\}$. Aplicăm (iii) de două ori pentru a obține că A este cel mult numărabilă și, apoi, că $\mathbb{Z}$ este cel cel mult numărabilă. Cum $\mathbb{Z}$ este infinită, avem că $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

(v) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $A_n := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ și $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$, $f_n(m) = \frac{m}{n}$. Este evident că f_n este bijectivă, deci A_n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, aplicăm (iii) și faptul că $\mathbb{Q}$ este infinită. $\square$

Cardinale

Propoziția 2.43

$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Dem.: Demonstrăm că $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ și apoi aplicăm Propoziția 2.37.(i). Definim următoarea funcție

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_A(i)}{3^i}.$$

Demonstrăm că seria considerată mai sus este convergentă. Deoarece seria este cu termeni pozitivi, e suficient să arătăm că șirul sumelor parțiale $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este majorat. Observăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{3^i} = 2\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i} = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} < 3.$$

Așadar, Φ este bine definită.

Afirmația 1: Φ este injectivă.

Demonstrație: Presupunem că $A \neq B$ și demonstrăm că $\Phi(A) \neq \Phi(B)$. Deoarece A și B sunt diferite, există $l := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \chi_A(i) \neq \chi_B(i)\}$. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $\chi_A(l) = 0$ și $\chi_B(l) = 1$. Definim

$$a := \sum_{i=0}^{l-1} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \text{ dacă } l \neq 0 \quad \text{și} \quad a := 0 \text{ dacă } l = 0.$$

Pentru orice $n \geq l+1$ avem

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} &= a + \frac{2\cdot 0}{3} + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq a + \frac{2}{3^{l+1}} \sum_{i=0}^{n-l-1} \frac{1}{3^i}\\ &= a + \frac{2}{3^{l+1}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-l}}{1-\frac{1}{3}} < a + \frac{2}{3^{l+1}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = a + \frac{1}{3^l}.\end{aligned}$$

Rezultă că

$$\Phi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq a + \frac{1}{3^l}.$$

Pentru orice $n \geq l+1$ avem

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} = a + \frac{2\cdot 1}{3^l} + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq a + \frac{2}{3^l}.$$

Așadar,

$$\Phi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq a + \frac{2}{3^l} > a + \frac{1}{3^l}.$$

Obținem astfel că $\Phi(A) < \Phi(B)$, deci $\Phi(A) \neq \Phi(B)$. ■

Cum Φ este injectivă, avem că

$$(*) \quad |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq \mathfrak{c}.$$

Deoarece $\mathbb{Q}$ este numărabilă, există o bijecție $j : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Definim funcția

$$\Psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \Psi(r) = \{n \in \mathbb{N} \mid j(n) \leq r\}.$$

Afirmația 2: Ψ este injectivă.

Demonstrație: Fie $r_1 \neq r_2$ două numere reale. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $r_1 < r_2$. Deoarece $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$, există $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $r_1 < q < r_2$. Cum j este bijectivă, există $m \in \mathbb{N}$ a.î. $j(m) = q$. Rezultă că $m \in \Psi(r_2)$ și $m \notin \Psi(r_1)$, demonstrând astfel că $\Psi(r_1) \neq \Psi(r_2)$. ■

Prin urmare,

$$(**) \quad \mathfrak{c} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein pentru a obține, din (*) și (**), că $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. □

Propoziția 2.44

$\mathbb{R}$ nu este numărabilă.

Dem.: Aplicând Propozițiile 2.43 și 2.37.(ii), obținem că $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, deci $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$. □

Lema 2.45

Pentru orice numere reale $a < b$, $c < d$, $|(a,b)| = |(c,d)|$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.46

Pentru orice numere reale $a < b$,

$$|(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = |[a,b]| = \mathfrak{c}.$$

Dem.: Exercițiu.

LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Logica propozițională - informal

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe propoziții sau enunțuri declarative, despre care se poate argumenta în principiu că sunt adevărate sau false.

Propoziții declarative

- Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- Andrei este deștept.
- Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- Pleacă!

Logica propozițională - informal

Considerăm anumite propoziții ca fiind atomice și le notăm $p, q, r, \ldots$ sau $p_1, p_2, p_3, \ldots$.
Exemple: p=Numărul 2 este par. q=Mâine plouă. r=Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate φ, ψ, χ, $\cdots$) folosind conectorii logici $\neg$ (negația), $\rightarrow$ (implicația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\leftrightarrow$ (echivalența).

Exemple:

$\neg p$	=	Numărul 2 nu este par.
$p \vee q$	=	Numărul 2 este par sau mâine plouă.
$p \wedge q$	=	Numărul 2 este par și mâine plouă.
$p \rightarrow q$	=	Dacă numărul 2 este par, atunci mâine plouă.
$p \leftrightarrow q$	=	Numărul 2 este par dacă și numai dacă mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).
Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

Logica propozițională - informal

Exemplu:

Fie propoziția:

φ=*Azi este joi, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

p=*Azi este joi.* q=*Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$=*Azi este joi și nu avem curs de logică.*

Logica propozițională - informal

Exemplu:

Fie propoziția:

φ=Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.

Considerăm propozițiile atomice

p = *Trenul întârzie.*
q = *Sunt taxiuri la gară.*
r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \to r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q? q este adevărată.

Logica propozițională LP - Limbajul

Definiția 3.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- *o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;*
- *conectori logici: $\neg$ (se citește non), $\to$ (se citește implică)*
- *paranteze: (,).*

- Mulțimea *Sim* a simbolurilor lui *LP* este

$$Sim := V \cup \{\neg, \to, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \ldots$

Logica propozițională LP - Limbajul

Definiția 3.2

Mulțimea Expr a expresiilor lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ. Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui *LP* de lungime n.
- Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:

$((((v_7,\ v_1\neg \to (v_2),\ \neg v_1 v_2,\ ((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1)),\ (\neg(v_1 \to v_2))$.

Logica propozițională LP - Limbajul

Definiția 3.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in Sim$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

- *Dacă $0 \le i \le j \le k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numește (i,j)-subexpresia lui θ;*
- *Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \le i \le j \le k-1$ a.î. ψ este (i,j)-subexpresia lui θ.*

Formule

Definiția formulelor este un exemplu de definiție inductivă.

Definiția 3.4

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

(F0) *Orice variabilă propozițională este formulă.*

(F1) *Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.*

(F2) *Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.*

(F3) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.*

Notații: Mulțimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.

- Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

Formule

Exemple:

- $v_1 \neg \to (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- $((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \to v_2))$ sunt formule.

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziția 3.5

Mulțimea Form a formulelor lui LP este numărabilă.

Dem.: Exercițiu.

Principiul inducției pe formule

Propoziția 3.6 (Principiul inducției pe formule)

*Fie **P** o proprietate. Presupunem că:*

(0) *Orice variabilă are proprietatea **P**.*

(1) *Pentru orice formulă φ, dacă φ are proprietatea **P**, atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea **P**.*

(2) *Pentru orice formule φ, ψ, dacă φ și ψ au proprietatea **P**, atunci $(\varphi \to \psi)$ are proprietatea **P**.*

*Atunci orice formulă φ are proprietatea **P**.*

Dem.: Pentru orice formulă φ, notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea **P**.

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ, $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea **P**.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea **P**, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea **P**. Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea **P**.
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea **P**. Rezultă din (2) că φ are proprietatea **P**.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea **P**. $\square$

Principiul inducției pe formule

Propoziția 3.7 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- $V \subseteq \Gamma$;
- *Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;*
- *Γ este închisă la $\rightarrow$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.*

Atunci $\Gamma = Form$.

Dem.: Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ ddacă } \varphi \in \Gamma.$$

Conform definiției lui Γ, rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 3.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea $\boldsymbol{P}$, deci orice formulă φ este în Γ. Așadar, $\Gamma = Form$. □

Subformule

Definiția 3.8

Fie φ o formulă a lui LP. O subformulă a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ.

Notație: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \rightarrow v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

Formule

Conectorii derivați $\vee$ (se citește sau), $\wedge$ (se citește și), $\leftrightarrow$ (se citește dacă și numai dacă) sunt introduși prin abrevierile:

$$\begin{aligned}
(\varphi \vee \psi) &:= ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)\\
(\varphi \wedge \psi) &:= (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))\\
(\varphi \leftrightarrow \psi) &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).
\end{aligned}$$

Convenții

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $(((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

Principiul recursiei pe formule

Propoziția 3.9 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_\neg : A \rightarrow A, \quad G_\rightarrow : A \times A \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : Form \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ *pentru orice variabilă* $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_\neg(F(\varphi))$ *pentru orice formulă* φ.

(R2) $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_\rightarrow(F(\varphi), F(\psi))$ *pentru orice formule* φ, ψ.

Principiul recursiei pe formule

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da definiții recursive ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : Form \to \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ,

$c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ.

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned} c(v) &= 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v \\ c(\neg\varphi) &= c(\varphi)+1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi \\ c(\varphi\to\psi) &= c(\varphi)+c(\psi)+1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi. \end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \to A$, $G_0(v) = 0$,

$$G_\neg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad G_\neg(n) = n+1,$$
$$G_\to : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad G_\to(m,n) = m+n+1.$$

Principiul recursiei pe formule

Notație:

Pentru orice formulă φ, notăm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ.

Observație

Mulțimea $Var(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.

SEMANTICA LP

Tabele de adevăr

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr: 1 pentru adevărat și 0 pentru fals. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0,1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0,1\}$ folosind tabelele de adevăr.

$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$\to : \{0,1\}\times\{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \to q = 1 \iff p \le q$.

Tabele de adevăr

Operațiile $\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ și $\leftrightarrow$: $\{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0,1\}$, $p \vee q = \neg p \to q$, $p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Dem.: Exercițiu.

Evaluări

Definiția 3.10

O evaluare (sau interpretare) este o funcție $e : V \to \{0,1\}$.

Teorema 3.11

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$ există o unică funcție

$$e^+ : Form \to \{0,1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- $e^+(v) = e(v)$ *pentru orice* $v \in V$.
- $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ *pentru orice* $\varphi \in Form$,
- $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$ *pentru orice* $\varphi, \psi \in Form$.

Dem.: Aplicăm Principiul Recursiei pe formule (Propoziția 3.9) cu $A = \{0,1\}$, $G_0 = e$, $G_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$, $G_\neg(p) = \neg p$ și $G_\to : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $G_\to(p,q) = p \to q$. $\square$

Evaluare (Interpretare)

Propoziția 3.12

Dacă $e : V \to \{0,1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ,

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi),$$
$$e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi),$$
$$e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi).$$

Dem.: Exercițiu.

Modele. Satisfiabilitate. Tautologii

Fie φ o formulă.

Definiția 3.13

- *O evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notație: $e \vDash \varphi$.*
- *φ este satisfiabilă dacă admite un model.*
- *Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este nesatisfiabilă sau contradictorie.*
- *φ este tautologie dacă orice evaluare este model al lui φ. Notație: $\vDash \varphi$.*

Notație: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziția 3.14

(i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Dem.: Exercițiu.

Consecință semantică. Echivalență

Definiția 3.15

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- *φ este consecință semantică a lui ψ dacă $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$. Notație: $\psi \vDash \varphi$.*
- *φ și ψ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$. Notație: $\varphi \sim \psi$.*

Observație

Relația $\sim$ este o relație de echivalență pe mulțimea *Form* a formulelor lui *LP*.

Propoziția 3.16

Fie φ, ψ formule. Atunci

(i) $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\vDash \psi \to \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Dem.: Exercițiu.

Evaluare (Interpretare)

Propoziția 3.17

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

(*) $e_1(v) = e_2(v)$ *pentru orice* $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: Definim următoarea proprietate ***P***: pentru orice formulă φ,

φ are proprietatea ***P*** ddacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea ***P*** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.

Evaluare (Interpretare)

Propoziția 3.17

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

(*) $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$ și ψ satisface ***P***. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\varphi) = Var(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$. Așadar, aplicând ***P*** pentru ψ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface ***P***.

Evaluare (Interpretare)

Propoziția 3.17

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

(*) $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: (continuare)

- $\varphi = (\psi \to \chi)$ și ψ, χ satisfac ***P***. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\psi) \subseteq Var(\varphi)$ și $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$ și pentru orice $v \in Var(\chi)$. Așadar, aplicând ***P*** pentru ψ și χ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \to e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \to e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface ***P***. $\square$

Metoda tabelului

Fie φ o formulă arbitrară și $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \dots, e(x_k)$, conform Propoziției 3.17.
Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \dots, x_k\} \to \{0,1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2 \dots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$ subformule ale lui φ $\dots$	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	$\dots$	$e'_1(x_k)$	$\dots$	$e'^+_1(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	$\dots$	$e'_2(x_k)$	$\dots$	$e'^+_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	$\dots$	$e'_{2^k}(x_k)$	$\dots$	$e'^+_{2^k}(\varphi)$

Pentru orice i, $e'^+_i(\varphi)$ se definește similar cu Teorema 3.11.

φ este tautologie ddacă $e'^+_i(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \dots, 2^k\}$.

Metoda tabelului

Exemplu:
Fie

$$\varphi = v_1 \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că $\vDash \varphi$.

$$Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

v_1	v_2	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \to (v_1 \wedge v_2)$	φ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

Propoziția 3.18

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

terțul exclus	$\vDash \varphi \vee \neg\varphi$	(1)
modus ponens	$\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \psi$	(2)
afirmarea concluziei	$\psi \vDash \varphi \to \psi$	(3)
contradicția	$\vDash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	(4)
dubla negație	$\varphi \sim \neg\neg\varphi$	(5)
contrapoziția	$\varphi \to \psi \sim \neg\psi \to \neg\varphi$	(6)
negarea premizei	$\neg\varphi \vDash \varphi \to \psi$	(7)
modus tollens	$\neg\psi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \neg\varphi$	(8)
tranzitivitatea implicației	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$	(9)

Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

legile lui de Morgan	$\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$		(10)
	$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$		(11)
exportarea și importarea	$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \varphi \wedge \psi \to \chi$		(12)
idempotența	$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$		(13)
slăbirea	$\vDash \varphi \wedge \psi \to \varphi$	$\vDash \varphi \to \varphi \vee \psi$	(14)
comutativitatea	$\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$	(15)
asociativitatea	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$		(16)
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$		(17)
absorbția	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$		(18)
	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$		(19)
distributivitatea	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$		(20)
	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$		(21)

Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

$$\varphi \to \psi \wedge \chi \sim (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \quad (22)$$
$$\varphi \to \psi \vee \chi \sim (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi) \quad (23)$$
$$\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi) \quad (24)$$
$$\varphi \vee \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \quad (25)$$
$$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \psi \to (\varphi \to \chi) \sim (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi) \quad (26)$$
$$\neg\varphi \sim \varphi \to \neg\varphi \sim (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \quad (27)$$
$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \quad (28)$$
$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \to \psi) \to \psi \quad (29)$$
$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$
$$\vDash (\varphi \to \psi) \vee (\neg\varphi \to \psi) \quad (31)$$
$$\vDash (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \neg\psi) \quad (32)$$
$$\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi)) \quad (33)$$
$$\vDash (\varphi \to \psi) \to (((\varphi \to \chi) \to \psi) \to \psi) \quad (34)$$

Dem.: Exercițiu.

Exemplu de demonstrație

Demonstrăm (1): $\vDash \varphi \vee \neg\varphi$.
Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$.
Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.

$\top$ și $\bot$

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație

$v_0 \to v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \to v_0)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Exercițiu.

Notații

Notăm $v_0 \to v_0$ cu $\top$ și o numim adevărul. Notăm $\neg(v_0 \to v_0)$ cu $\bot$ și o numim falsul.

- φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \bot$.

Conjuncții și disjuncții finite

Notații

Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$. Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$
$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \ldots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$.
- $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$.

Conjuncții și disjuncții finite

Propoziția 3.19

Pentru orice evaluare $e: V \to \{0,1\}$,

- $e^+(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1$ *ddacă* $e^+(\varphi_i) = 1$ *pentru orice* $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $e^+(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) = 1$ *ddacă există* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *a.î* $e^+(\varphi_i) = 1$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 3.20

$$\neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n$$
$$\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$$

Dem.: Exercițiu.

Mulțimi de formule

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 3.21

- *O evaluare $e: V \to \{0,1\}$ este model al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \vDash \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).* *Notație:* $e \vDash \Gamma$.
- *Γ este satisfiabilă dacă are un model.*
- *Γ este finit satisfiabilă dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.*
- *Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este nesatisfiabilă sau contradictorie.*

Notații: Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$. Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

- $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$.

Mulțimi de formule

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 3.22

O formulă φ este consecință semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$. Notație: $\Gamma \vDash \varphi$.
Dacă φ nu este consecință semantică a lui Γ, scriem $\Gamma \not\vDash \varphi$.

Notăm cu $Cn(\Gamma)$ mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ. Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Definiția 3.23

- *Δ este consecință semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$.* *Notație:* $\Gamma \vDash \Delta$.
- *Γ și Δ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$.* *Notație:* $\Gamma \sim \Delta$.

Proprietăți

Observație

- $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \{\varphi\}$.
- $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 3.24

- *$Mod(\emptyset) = \{0,1\}^V$, adică orice evaluare $e: V \to \{0,1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.*
- *$Cn(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \vDash \varphi$.*

Dem.: Exercițiu ușor.

SINTAXA LP

Sistemul deductiv

Folosim un sistem deductiv de tip Hilbert pentru *LP*.

Axiomele logice

Mulțimea *Axm* a axiomelor lui *LP* constă din toate formulele de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$,

unde φ, ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Γ-teoreme

Fie Γ o mulțime de formule. Definiția Γ-teoremelor este un nou exemplu de definiție inductivă.

Definiția 3.25

Γ-teoremele sunt formulele lui LP definite astfel:

(T0) *Orice axiomă este Γ-teoremă.*

(T1) *Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.*

(T2) *Dacă φ și $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.*

(T3) *Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ-teoreme.*

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Γ-teoreme

Notații

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ-teoremelor	Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ este Γ-teoremă	$\vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	$:\Leftrightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.			

Definiția 3.26

O formulă φ se numește teoremă a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația $\vdash$, obținem

Propoziția 3.27

(i) *dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;*

(ii) *dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;*

(iii) *dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.*

Γ-teoreme

O definiție alternativă a Γ-teoremelor:

Mulțimea $Thm(\Gamma)$ este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

(i) $Axm \subseteq \Sigma$;

(ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;

(iii) Σ este închisă la modus ponens:

$$\text{dacă } \varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma, \text{ atunci } \psi \in \Sigma.$$

Γ-teoreme

Definiția Γ-teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin inducție după Γ-teoreme.

Versiunea 1

Fie $\boldsymbol{P}$ o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisface $\boldsymbol{P}$ astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea $\boldsymbol{P}$;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea $\boldsymbol{P}$;

(iii) demonstrăm că dacă φ și $\varphi \to \psi$ au proprietatea $\boldsymbol{P}$, atunci ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Versiunea 2

Fie Σ o mulțime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă este în Σ;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ;

(iii) demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Γ-teoreme

Propoziția 3.28

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

(i) *Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ,*

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

(ii) *$Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,*

$$\vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iii) *Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,*

$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) *$Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,*

$$Thm(\Gamma) \vdash \varphi \;\text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Γ-demonstrații

Definiția 3.29

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) *θ_i este axiomă;*

(ii) *$\theta_i \in \Gamma$;*

(iii) *există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$.*

O $\emptyset$-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Lema 3.30

Dacă $\theta_1, \ldots, \theta_n$ este o Γ-demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \text{ pentru orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dem.: Exercițiu.

Γ-demonstrații

Definiția 3.31

Fie φ o formulă. O Γ-demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ-demonstrației.

Propoziția 3.32

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ-demonstrație a lui φ.

Proprietăți sintactice

Propoziția 3.33

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ, $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.

Dem.: "$\Leftarrow$" Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 3.28.(i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.
"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 3.32, φ are o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$ este o Σ-demonstrație a lui φ, deci $\Sigma \vdash \varphi$. □

$\vdash \varphi \to \varphi$

Propoziția 3.34

Pentru orice formulă φ, $\vdash \varphi \to \varphi$.

Dem.:

(1) $\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$
(A2) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 3.27.(i)

(2) $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$
(A1) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$) și Propoziția 3.27.(i)

(3) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 3.27.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)

(4) $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$
(A1) (cu φ, $\psi := \varphi$) și Propoziția 3.27.(i)

(5) $\vdash \varphi \to \varphi$
(MP): (3), (4) □

Teorema deducției

Teorema 3.35 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \subseteq Form$ și $\varphi, \psi \in Form$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Dem.: "$\Leftarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 3.28.(i)
(3)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 3.27.(ii)
(4)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$	(MP): (2), (3).

"$\Rightarrow$" Fie
$$\Sigma := \{\psi \in Form \mid \Gamma \vdash \varphi \to \psi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după $\Gamma \cup \{\varphi\}$-teoreme.

- Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \psi$	Propoziția 3.27.(i), (ii)
(2)	$\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	(A1) și Propoziția 3.27.(i)
(3)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	(MP): (1), (2).

Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \to \psi = \varphi \to \varphi$ este teoremă, conform Propoziției 3.34, deci $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\psi, \psi \to \chi \in \Sigma$ și trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză inducție
(2)	$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	ipoteză inducție
(3)	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	(A2) și P.3.27.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (2), (3).
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (1), (4).

Așadar $\chi \in \Sigma$. $\square$

Teorema deducției este un instrument foarte util pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Propoziția 3.36

Pentru orice formule φ, ψ, χ,
$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \tag{35}$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că
$$\vdash \boxed{(\varphi \to \psi)} \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi\} \vdash \boxed{(\psi \to \chi)} \to (\varphi \to \chi)$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \boxed{\varphi} \to \chi$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

(1)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 3.27.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 3.27.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$	Propoziția 3.27.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$	(MP): (3), (4). $\square$

Propoziția 3.37

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formule* φ, ψ, χ,

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \to \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \chi.$$

Dem.:

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	P.3.36 și P.3.28.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (3), (4). $\square$

Propoziția 3.38

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)) \qquad (36)$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 3.39

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formule* φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 3.40

Pentru orice formule φ, ψ,

$$
\begin{array}{rcll}
\{\psi, \neg\psi\} & \vdash & \varphi & (37)\\
& \vdash & \neg\psi \to (\psi \to \varphi) & (38)\\
& \vdash & \psi \to (\neg\psi \to \varphi) & (39)\\
& \vdash & \neg\neg\varphi \to \varphi & (40)\\
& \vdash & \varphi \to \neg\neg\varphi & (41)\\
& \vdash & (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) & (42)\\
\{\psi, \neg\varphi\} & \vdash & \neg(\psi \to \varphi) & (43)\\
& \vdash & (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi & (44)\\
& \vdash & (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi & (45)
\end{array}
$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 3.41

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formule* φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.:

(1)	$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducției
(3)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$	ipoteză
(4)	$\Gamma \vdash \neg\psi \to \varphi$	Teorema deducției
(5)	$\Gamma \vdash (\psi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(42) și P.3.28.(ii)
(6)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	(MP): (2), (5)
(7)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \varphi$	(6), (4) și P. 3.37
(8)	$\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	(45) și P.3.28.(ii)
(9)	$\Gamma \vdash \varphi$	(MP): (7), (8).

Câteva consecințe

Propoziția 3.42

Pentru orice formule φ, ψ,

$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \quad (46)$$
$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \quad (47)$$
$$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi \quad (48)$$
$$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \quad \textit{ddacă} \quad \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi \quad (49)$$
$$\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi \quad (50)$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

SINTAXA și SEMANTICA

Corectitudine

Teorema 3.43 (Teorema de corectitudine (Soundness Theorem))

Orice Γ*-teoremă este consecință semantică a lui* Γ*, adică,*

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ *și* $\Gamma \subseteq Form$*.*

Dem.: Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după Γ-teoreme.

- Axiomele sunt în Σ (exercițiu).
- Evident, $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. Rezultă ușor că $\Gamma \vDash \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$. □

Completitudinea

Teorema 3.44 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Prin urmare, tautologiile coincid cu teoremele.

Teorema 3.45 (Teorema de completitudine tare)

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formulă* φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

Mai general, Γ-teoremele coincid cu consecințele semantice ale lui Γ.

LOGICA DE ORDINUL I

Limbaje de ordinul I

Definiția 4.1

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I este format din:

- *o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;*
- *conectorii $\neg$ și $\rightarrow$;*
- *paranteze: (,);*
- *simbolul de egalitate $=$;*
- *cuantificatorul universal $\forall$;*
- *o mulțime $\mathcal{R}$ de simboluri de relații;*
- *o mulțime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcții;*
- *o mulțime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;*
- *o funcție aritate $ari : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{N}^*$.*

- $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{ari})$.
- τ se numește signatura lui $\mathcal{L}$ sau vocabularul lui $\mathcal{L}$ sau alfabetul lui $\mathcal{L}$ sau tipul de similaritate al lui $\mathcal{L}$

Limbaje de ordinul I

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea $Sim_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui $\mathcal{L}$ este

$$Sim_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc simboluri non-logice.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc simboluri logice.

- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \ldots$, simbolurile de relații cu $P, Q, R \ldots$, simbolurile de funcții cu $f, g, h, \ldots$ și simbolurile de constante cu $c, d, e, \ldots$.

- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m$:= mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m;

$\mathcal{R}_m$:= mulțimea simbolurilor de relații de aritate m.

Limbaje de ordinul I

Definiția 4.2

Mulțimea $Expr_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ.

Definiția 4.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$, unde $\theta_i \in Sim_{\mathcal{L}}$ pentru orice i.

- *Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numește (i, j)-subexpresia lui θ;*
- *Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j)-subexpresia lui θ;*
- *Notăm cu $Var(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ.*

Termeni

Definiția 4.4

Termenii lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:

(T0) *Orice variabilă este termen.*

(T1) *Orice simbol de constantă este termen.*

(T2) *Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci $ft_1 \ldots t_m$ este termen.*

(T3) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt termeni.*

Notații:

- Mulțimea termenilor se notează $Term_{\mathcal{L}}$.
- Termeni: $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \ldots$.
- $Var(t)$ este mulțimea variabilelor care apar în termenul t.

Definiția 4.5

Un termen t se numește închis dacă $Var(t) = \emptyset$.

Formule

Definiția 4.6

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- $(s = t)$, *unde s, t sunt termeni;*
- $(Rt_1 \ldots t_m)$, *unde $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni.*

Definiția 4.7

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:

(F0) *Orice formulă atomică este formulă.*

(F1) *Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.*

(F2) *Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.*

(F3) *Dacă φ este formulă, atunci $(\forall x \varphi)$ este formulă pentru orice variabilă x.*

(F4) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.*

Formule

Notații

- Mulțimea formulelor se notează $Form_{\mathcal{L}}$.
- Formule: $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
- $Var(\varphi)$ este mulțimea variabilelor care apar în formula φ.

Convenție

De obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem $s = t$ în loc de $(s = t)$, $Rt_1 \ldots t_m$ în loc de $(Rt_1 \ldots t_m)$, $\neg\varphi$ în loc de $(\neg\varphi)$, $\varphi \to \psi$ în loc de $(\varphi \to \psi)$, $\forall x \varphi$ în loc de $(\forall x \varphi)$. Scriem însă $(\varphi \to \psi) \to \chi$.

Formule

Conectori derivați

Conectorii $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ și cuantificatorul existențial $\exists$ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$
\begin{aligned}
\varphi \vee \psi &:= ((\neg\varphi) \to \psi) \\
\varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \to (\neg\psi))) \\
\varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\
\exists x \varphi &:= (\neg \forall x (\neg\varphi)).
\end{aligned}
$$

Formule

Convenții

- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedență mai mare decât conectorii $\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$.
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.
- Prin urmare, formula $(((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.
- Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- Așadar, $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ este $(\forall x\varphi) \rightarrow \psi$ și nu $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.

Notații

De multe ori identificăm un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

- Scriem de multe ori $f(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $ft_1 \ldots t_m$ și $R(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \ldots t_m$.
- Pentru simboluri f de operații binare scriem $t_1 f t_2$ în loc de $ft_1 t_2$.
- Analog pentru simboluri R de relații binare: scriem $t_1 R t_2$ în loc de $Rt_1 t_2$.

$\mathcal{L}$-structura

Definiția 4.8

O $\mathcal{L}$-structură este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- *A este o mulțime nevidă;*
- *$\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea m, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \rightarrow A$;*
- *$\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea m, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;*
- *$\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.*
- *A se numește universul structurii $\mathcal{A}$. Notație: $A = |\mathcal{A}|$*
- *$f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește denotația sau interpretarea lui f (respectiv R, c) în $\mathcal{A}$.*

Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulțimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$

Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$; $\dot{<}$ este simbol de relație binară, adică are aritatea 2;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare și $\dot{S}$ este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$-structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <,\ \dot{+}^{\mathcal{N}} = +,\ \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot,\ \dot{S}^{\mathcal{N}} = S,\ \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar
- $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- $\mathcal{L}_R$-structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară

- Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\dot{\leq}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $\dot{<}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul $\dot{E}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- Dacă suntem interesați de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\dot{\in}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.

Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{^{-1}}\}$; $\dot{*}$ simbol binar, $\dot{^{-1}}$ simbol unar
- $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{^{-1}}; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{^{-1}}, \dot{e})$.

Exemple naturale de $\mathcal{L}_{Gr}$-structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$. Prin urmare, $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{^{-1}}^{\mathcal{G}} = ^{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.

SEMANTICA

Interpretare (evaluare)

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură.

Definiția 4.9

O interpretare sau evaluare a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \to A$.

În continuare, $e : V \to A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$.

Definiția 4.10 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește interpretarea $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e:

- *dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;*
- *dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;*
- *dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.*

Interpretarea formulelor

Prin inducție pe formule se definește interpretarea

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a *formulei φ sub evaluarea e.*

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

Negația și implicația

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \mathbin{\boldsymbol{\to}} \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$\mathbin{\boldsymbol{\to}} : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{0, 1\}$,

p	q	$p \mathbin{\boldsymbol{\to}} q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \big(\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1\big)$.

Interpretarea formulelor

Notație

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretarea $e_{x \leftarrow a} : V \to A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Relația de satisfacere

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 4.11

Fie φ o formulă. Spunem că:

- *e satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.*
- *e nu satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Notație: $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.*

Corolar 4.12

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x,

(i) $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *implică* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
$\iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ *pentru orice* $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Relația de satisfacere

Propoziția 4.13

(i) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *și* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *ddacă* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iv) $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ *există* $a \in A$ *a.î.* $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] &\iff \mathcal{A} \vDash (\neg\forall x\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \nvDash (\forall x\neg\varphi)[e] \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \nvDash (\neg\varphi)[e_{x\leftarrow a}] \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}].
\end{aligned}
$$

Exemple

Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) și $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$ și

$$t = \dot{S}x\dot{\times}\dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y).$$

Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \to \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$.

Dem.: Pentru orice interpretare $e : V \to \mathbb{N}$, avem

$$
\begin{aligned}
t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\
&= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\
&= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))).
\end{aligned}
$$

Prin urmare, dacă $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

Exemple

Fie

$$\varphi = x\dot{<}\dot{S}y \to (x\dot{<}y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x, y) \vee x = y).$$

Să se arate că $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

Dem.: Pentru orice interpretare $e : V \to \mathbb{N}$, avem

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \nvDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\
&\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x), S(e(y)) \text{ nu e satisfăcută sau} \\
&\qquad \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (x = y)[e] \\
&\iff <(e(x), S(e(y)) \text{ nu e satisfăcută sau } <(e(x), e(y)) \\
&\qquad \text{sau } e(x) = e(y) \\
&\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\
&\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y).
\end{aligned}
$$

Prin urmare, $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

Semantică

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 4.14

Spunem că φ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ satisface φ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui φ.

Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Definiția 4.15

Spunem că φ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\vDash \varphi$

Semantică

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 4.16

φ și ψ sunt logic echivalente dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \mathrel{=\!\!\vDash} \psi$

Definiția 4.17

ψ este consecință semantică a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vDash \psi$

Observație

(i) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

(ii) $\varphi \mathrel{=\!\!\vDash} \psi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Echivalențe și consecințe logice

Propoziția 4.18

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y,

$$\begin{aligned}
\neg\exists x\varphi &\mathrel{=\!\!\vDash} \forall x\neg\varphi && (51)\\
\neg\forall x\varphi &\mathrel{=\!\!\vDash} \exists x\neg\varphi && (52)\\
\forall x(\varphi\wedge\psi) &\mathrel{=\!\!\vDash} \forall x\varphi\wedge\forall x\psi && (53)\\
\forall x\varphi\vee\forall x\psi &\vDash \forall x(\varphi\vee\psi) && (54)\\
\exists x(\varphi\wedge\psi) &\vDash \exists x\varphi\wedge\exists x\psi && (55)\\
\exists x(\varphi\vee\psi) &\mathrel{=\!\!\vDash} \exists x\varphi\vee\exists x\psi && (56)\\
\forall x(\varphi\to\psi) &\vDash \forall x\varphi\to\forall x\psi && (57)\\
\forall x(\varphi\to\psi) &\vDash \exists x\varphi\to\exists x\psi && (58)\\
\forall x\varphi &\vDash \exists x\varphi && (59)
\end{aligned}$$

Echivalențe și consecințe logice

$$\begin{aligned}
\varphi &\vDash \exists x\varphi && (60)\\
\forall x\varphi &\vDash \varphi && (61)\\
\forall x\forall y\varphi &\mathrel{=\!\!\vDash} \forall y\forall x\varphi && (62)\\
\exists x\exists y\varphi &\mathrel{=\!\!\vDash} \exists y\exists x\varphi && (63)\\
\exists y\forall x\varphi &\vDash \forall x\exists y\varphi. && (64)
\end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.
Dăm câteva demonstrații ca exemplu. Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$.

(51): $\mathcal{A} \vDash (\neg\exists x\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\neg\neg\forall x\neg\varphi)[e] \iff$ nu este adevărat că $\mathcal{A} \vDash (\neg\forall x\neg\varphi)[e] \iff$ nu este adevărat că nu este adevărat că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\neg\varphi)[e]$.

Echivalențe și consecințe logice

(53): $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$) și (pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}]$) $\iff \mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e]$ și $\mathcal{A} \models (\forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

(57): Avem că $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \iff$

$$(*) \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}).$$

Similar obținem că $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e] \iff$

$$(**) \quad (\forall x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) \leq (\forall x\psi)^{\mathcal{A}}(e).$$

Presupunem (*) și trebuie să demonstrăm (**).

Dacă $(\forall x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0$, (**) este evident.
Presupunem, așadar, că $(\forall x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică

$$(***) \quad \text{pentru orice } b \in A,\ \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b}) = 1.$$

Ne rămâne de arătat că $(\forall x\psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică

$$\text{pentru orice } c \in A,\ \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1.$$

Fie $c \in A$. Din (*), avem că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c})$, iar din (***), că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$. Rezultă că $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$, ceea ce trebuia să demonstrăm. $\square$

Variabile legate și libere

Definiția 4.19

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui $\mathcal{L}$ și x o variabilă.

- *spunem că variabila x apare legată pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ și o formulă ψ a.î. (i, j)-subexpresia lui φ este $\forall x\psi$;*
- *spunem că x apare liberă pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ;*
- *x este variabilă legată (*bounded variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ;*
- *x este variabilă liberă (*free variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ.*

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$. Variabile libere: x, y, z. Variabile legate: x.

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ.

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$\begin{aligned}
FV(\varphi) &= Var(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\
FV(\neg\varphi) &= FV(\varphi); \\
FV(\varphi \rightarrow \psi) &= FV(\varphi) \cup FV(\psi); \\
FV(\forall x\varphi) &= FV(\varphi) \setminus \{x\}.
\end{aligned}$$

Notație: $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Interpretarea termenilor și formulelor

Propoziția 4.20

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.

Propoziția 4.21

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice formulă φ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$.

Enunțuri

Definiția 4.22

O formulă φ se numește enunț (sentence) *dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.*
Notație: $Sent_{\mathcal{L}} :=$ mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziția 4.23

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 4.21 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. □

Definiția 4.24

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ este un model *al lui φ dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \to A$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$*

Echivalențe și consecințe logice

Propoziția 4.25

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \;\text{⊨⫤}\; \exists x\varphi \quad (65)$$
$$\varphi \;\text{⊨⫤}\; \forall x\varphi \quad (66)$$
$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \;\text{⊨⫤}\; \varphi \wedge \forall x\psi \quad (67)$$
$$\forall x(\varphi \vee \psi) \;\text{⊨⫤}\; \varphi \vee \forall x\psi \quad (68)$$
$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \;\text{⊨⫤}\; \varphi \wedge \exists x\psi \quad (69)$$
$$\exists x(\varphi \vee \psi) \;\text{⊨⫤}\; \varphi \vee \exists x\psi \quad (70)$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \;\text{⊨⫤}\; \varphi \to \forall x\psi \quad (71)$$
$$\exists x(\varphi \to \psi) \;\text{⊨⫤}\; \varphi \to \exists x\psi \quad (72)$$
$$\forall x(\psi \to \varphi) \;\text{⊨⫤}\; \exists x\psi \to \varphi \quad (73)$$
$$\exists x(\psi \to \varphi) \;\text{⊨⫤}\; \forall x\psi \to \varphi \quad (74)$$

Dem.: Exercițiu.

Echivalențe și consecințe logice

Dăm câteva demonstrații ca exemplu. Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$.

(65):

$\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ (aplicând Propoziția 4.21) $\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.

(67):

$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}]$ $\iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ și $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ $\iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ (aplicând Propoziția 4.21) $\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ și pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ $\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \vDash (\forall x\psi)[e]$ $\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

Substituția

Fie x o variabilă a lui $\mathcal{L}$ și u termen al lui $\mathcal{L}$.

Definiția 4.26

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, definim

$t_x(u) \quad := \quad$ *expresia obținută din t prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui x cu u.*

Propoziția 4.27

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, $t_x(u)$ este termen al lui $\mathcal{L}$.

Substituția

- Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.
- De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$. Avem

- Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu $|A| \geq 2$, avem $\mathcal{A} \models \forall x\varphi$.
- $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.

Substituția

Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 4.28

Spunem că x este liberă pentru u în φ sau că u este substituibil pentru x în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u, nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y\psi$ nu conține apariții libere ale lui x.

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- u nu conține variabile;
- φ nu conține variabile care apar în u;
- nici o variabilă din u nu apare legată în φ;
- x nu apare în φ;
- φ nu conține apariții libere ale lui x.

Substituția

Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ.

Definiția 4.29

$\varphi_x(u) \quad := \quad$ *expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.*

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o substituție liberă.

Propoziția 4.30

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui $\mathcal{L}$.

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

Propoziția 4.31

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x,

(i) *pentru orice termen t,*

$$\models u_1 = u_2 \to t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) *pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ,*

$$\models u_1 = u_2 \to (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Propoziția 4.32

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) *Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ,*

$$\models \forall x\varphi \to \varphi_x(u), \qquad \models \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

(ii) $\models \forall x\varphi \to \varphi, \qquad \models \varphi \to \exists x\varphi.$

(iii) *Pentru orice simbol de constantă c,*

$$\models \forall x\varphi \to \varphi_x(c), \qquad \models \varphi_x(c) \to \exists x\varphi.$$

În general, dacă x si y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie $\mathcal{L}_{ar}$, $\mathcal{N}$ și $e : V \to \mathbb{N}$ a.î. $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

$$\mathcal{N} \models (x \dot{<} z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \not\models (x \dot{<} z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

Propoziția 4.33

Pentru orice formulă φ, variabile distincte x și y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ și y este substituibil pentru x în φ,

$$\exists x\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 4.33 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (i.e. x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.

Definiția 4.34

Pentru orice formulă φ și orice variabile $y_1, \ldots, y_k$, varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- *dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ;*
- *dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;*
- *dacă $\varphi = \psi \to \chi$, atunci φ' este $\psi' \to \chi'$;*
- *dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci*

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w \psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \ldots, y_k\} \\ \forall z\psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$

unde w este prima variabilă din șirul $v_0, v_1, \ldots,$ care nu apare în ψ' și nu este printre $y_1, \ldots, y_k$.

Substituția

Definiția 4.35

φ' este variantă a lui φ dacă este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ pentru anumite variabile $y_1, \ldots, y_k$.

Propoziția 4.36

(i) Pentru orice formulă φ, dacă φ' este o variantă a lui φ, atunci $\varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi'$;

(ii) Pentru orice formulă φ și orice termen t, dacă variabilele lui t se află printre $y_1, \ldots, y_k$ și φ' este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ, atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.

Forma normală prenex

Definiția 4.37

O formulă care nu conține cuantificatori se numește liberă de cuantificatori ("quantifier-free").

Definiția 4.38

O formulă φ este în formă normală prenex dacă

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește matricea lui φ și $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n$ este prefixul lui φ.

Teorema 4.39 (Teorema de formă normală prenex)

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Forma normală prenex

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y(g(y,z) = c) \wedge \neg\exists x(f(x) = d)$$

Avem

$$\begin{aligned} \varphi &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y\big(g(y,z) = c \wedge \neg\exists x(f(x) = d)\big) \\ &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y\big(g(y,z) = c \wedge \forall x \neg(f(x) = d)\big) \\ &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y \forall x\big(g(y,z) = c \wedge \neg(f(x) = d)\big) \end{aligned}$$

Prin urmare, $\varphi^* = \exists y \forall x\big(g(y,z) = c \wedge \neg(f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.

Forma normală prenex

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg\forall y(S(y) \to \exists z R(z)) \wedge \forall x(\forall y P(x,y) \to f(x) = d).$$

Avem că

$$\begin{aligned} \varphi &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y \neg(S(y) \to \exists z R(z)) \wedge \forall x(\forall y P(x,y) \to f(x) = d) \\ &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y \neg\exists z(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x(\forall y P(x,y) \to f(x) = d) \\ &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y \neg\exists z(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x \exists y(P(x,y) \to f(x) = d) \\ &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y \forall z \neg(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x \exists y(P(x,y) \to f(x) = d) \\ &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y \forall z\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x \exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\big) \\ &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y \forall z \forall x\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge \exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\big) \\ &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y \forall z \forall x\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge \exists v(P(x,v) \to f(x) = d)\big) \\ &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y \forall z \forall x \exists v\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge (P(x,v) \to f(x) = d)\big) \end{aligned}$$

$\varphi^* = \exists y \forall z \forall x \exists v\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge (P(x,v) \to f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.

Tautologii

Noțiunile de tautologie și consecință semantică din logica propozițională se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectorilor $\neg, \rightarrow$.

Definiția 4.40

O $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr este o funcție $F : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0,1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ,

- $F(\neg\varphi) = \neg F(\varphi)$;
- $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$.

Propoziția 4.41

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$, funcția

$$V_{e,\mathcal{A}} : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0,1\}, \quad V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr.

Tautologii

Definiția 4.42

φ este tautologie dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr F.

Exemple de tautologii: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

Propoziția 4.43

Orice tautologie este validă.

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e,\mathcal{A}}$ este $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. $\square$

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu este tautologie.

Tautologii

Definiția 4.44

Două formule φ și ψ sunt tautologic echivalente dacă $F(\varphi) = F(\psi)$ pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr F.

Exemplul 4.45

$\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3)$ şi $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$ sunt tautologic echivalente.

Definiția 4.46

O formulă φ este consecință tautologică a unei mulțimi de formule Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr F,

$$F(\gamma) = 1 \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad F(\varphi) = 1.$$

Mulțimi de enunțuri

Fie φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ și Γ o mulțime de enunțuri.

Definiția 4.47

Spunem că Γ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \gamma \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ este un model al lui Γ. Notație: $\mathcal{A} \vDash \Gamma$

Definiția 4.48

Spunem că φ este consecință semantică a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \implies \mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\Gamma \vDash \varphi$

Mulțimi de enunțuri

Notație: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, notăm

$$Mod(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

Lema 4.49

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ,

(i) $\Gamma \vDash \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.

(ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.

(iii) Γ *este satisfiabilă* $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 4.50

Dacă φ este consecință tautologică a lui Γ, atunci $\Gamma \vDash \varphi$.

Teorii

Definiția 4.51

O $\mathcal{L}$-teorie este o mulțime T de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \vDash \varphi \implies \varphi \in T.$$

Definiția 4.52

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, teoria generată de Γ este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \vDash \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Teorii

Propoziția 4.53

Fie Γ o mulțime de enunțuri.

(i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(ii) $Th(\Gamma)$ *este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.*

Dem.: Exercițiu.

- O teorie prezentată ca $Th(\Gamma)$ se numește teorie axiomatică sau teorie prezentată axiomatic. Γ se numește mulțime de axiome pentru $Th(\Gamma)$.
- Orice teorie poate fi prezentată axiomatic, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

Teorii

Definiția 4.54

O teorie T este finit axiomatizabilă dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ.

Definiția 4.55

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ. Spunem și că Γ axiomatizează $\mathcal{K}$.

Definiția 4.56

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este finit axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime finită de enunțuri Γ.

Exemple - Teoria egalităţii

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunţ cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \big(\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \ldots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)\big),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziţia 4.57

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice $n \geq 2$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff A \text{ are cel puţin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exerciţiu uşor.

Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$.

Exemple - Teoria egalităţii

Notaţii

Fie $n \geq 1$.

- $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziţia 4.58

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \exists^{\leq n} &\iff A \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\ \mathcal{A} \models \exists^{=n} &\iff A \text{ are exact } n \text{ elemente.} \end{aligned}$$

Dem.: Exerciţiu uşor.

Propoziţia 4.59

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models T \iff A \text{ este mulţime infinită.}$$

Dem.: Exerciţiu uşor.

Exemple - Teoria grafurilor

Un graf este o pereche $G = (V, E)$ de mulţimi a.î. E este o mulţime de submulţimi cu 2 elemente ale lui V. Elementele lui V se numesc vârfuri, iar elementele lui E se numesc muchii.

- $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- $\mathcal{L}_{Graf}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relaţie binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x, x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \to \dot{E}(y, x)). \end{aligned}$$

Definiţie

Teoria grafurilor este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt grafurile.
- Γ axiomatizează clasa grafurilor. Prin urmare, clasa grafurilor este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii parţiale

- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relaţie binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (ANTISIM), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{aligned} (REFL) &:= \forall x (x \dot{\leq} x) \\ (ANTISIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \to x = y) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \to x \dot{\leq} z) \end{aligned}$$

Definiţie

Teoria ordinii parţiale este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulţimile parţial ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulţimilor parţial ordonate. Prin urmare, clasa mulţimilor parţial ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii totale

Fie $\Gamma := \{(ANTISIM), (TRANZ), (TOTAL)\}$, unde

$$(TOTAL) \quad := \quad \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \vee y \dot{\leq} x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile total ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor total ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor total ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii stricte

- $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{aligned} (IREFL) \quad &:= \quad \forall x \neg (x \dot{<} x) \\ (TRANZ) \quad &:= \quad \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor strict ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor strict ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii dense

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)\}$, unde

$$\begin{aligned} (TOTAL) \quad &:= \quad \forall x \forall y (x = y \vee x \dot{<} y \vee y \dot{<} x) \\ (DENS) \quad &:= \quad \forall x \forall y \big(x \dot{<} y \rightarrow \exists z (x \dot{<} z \wedge z \dot{<} y)\big). \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii dense este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor dens ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor dens ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}} = (\dot{\equiv}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\equiv})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (SIM), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{aligned} (REFL) \quad &:= \quad \forall x (x \dot{\equiv} x) \\ (SIM) \quad &:= \quad \forall x \forall y (x \dot{\equiv} y \rightarrow y \dot{\equiv} x) \\ (TRANZ) \quad &:= \quad \forall x \forall y \forall z (x \dot{\equiv} y \wedge y \dot{\equiv} z \rightarrow x \dot{\equiv} z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- Fie $\mathcal{K}$ clasa structurilor $(A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație de echivalență pe A. Avem că $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$, așadar Γ axiomatizează $\mathcal{K}$. Prin urmare, $\mathcal{K}$ este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y \big(\neg(x = y) \land x \dot{\equiv} y \land \forall z (z \dot{\equiv} x \to (z = x \lor z = y))\big),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.

Teorema de compactitate

Teorema 4.60 (Teorema de compactitate)

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi

Teorema de compactitate - aplicații

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 4.61

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

(*) pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură finită a.î. $|A| \geq \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$ și $\mathcal{A} \vDash \Gamma$ deoarece $\mathcal{A}$ este finită.

Teorema de compactitate - aplicații

Prin urmare, $\mathcal{A} \vDash \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \vDash \Delta_0$. Așadar, Δ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compactitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model $\mathcal{B}$.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \Gamma$, $\mathcal{B}$ este finită.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.
Am obținut o contradicție. $\square$

Corolar 4.62

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Propoziția 4.63

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu $\mathcal{K}_{Inf}$ clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite.
Conform Propoziției 4.59, pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff A \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.

Presupunem că $\mathcal{K}_{Inf}$ este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = Mod(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\varphi)$.
Rezultă că pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \text{ este finită} \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi \iff \mathcal{A} \vDash \neg\varphi.$$

Așadar, clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 4.61. $\square$.

Corolar 4.64

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Propoziția 4.65

Fie Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci Γ are un model infinit.

Dem.: Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compactitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit $\mathcal{A}$ a.î. $|A| \geq m$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$, deci $\mathcal{A} \vDash \Delta_0$.
Aplicând Teorema de compactitate, rezultă că Δ are un model $\mathcal{B}$.
Prin urmare, $\mathcal{B}$ este un model infinit al lui Γ. $\square$

Propoziția 4.66

Dacă un enunț φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$-structură infinită, atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$-structură finită de cardinal $\geq m$.

Dem.: Presupunem că nu e adevărat. Fie $\Gamma := \{\neg\varphi\}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.
Aplicând Propoziția 4.65, rezultă că Γ are un model infinit $\mathcal{A}$. Prin urmare, $\mathcal{A} \nvDash \varphi$, ceea ce contrazice ipoteza. $\square$

Teorema de compactitate - aplicații

Propoziția 4.67

Fie Γ o mulțime de enunțuri cu proprietatea că

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci

(i) Γ are un model infinit.

(ii) Clasa modelelor finite ale lui Γ nu este axiomatizabilă.

(iii) Clasa modelelor infinite ale lui Γ este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Exercițiu.

Modele non-standard ale aritmeticii

Considerăm limbajul $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, unde $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare, $\dot{S}$ este simbol de operație unară și $\dot{0}$ este simbol de constantă.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim prin inducție $\mathcal{L}$-termenul $\Delta(n)$ astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n+1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. Atunci $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 4.68

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ se numește non-standard dacă există $a \in A$ a.î. $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de element a se numește element non-standard.

Modele nonstandard ale aritmeticii

Teoria lui $\mathcal{N}$ se definește astfel:

$$Th(\mathcal{N}) := \{\varphi \in Sen_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{N} \vDash \varphi\}.$$

Se poate demonstra ușor că $Th(\mathcal{N})$ este o teorie.

Teorema 4.69

Există un model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$.

Dem.: Fie c un simbol de constantă nou, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c\}$ și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \ldots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$

Modele nonstandard ale aritmeticii

Fie $n_0 > \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Considerăm extensia $\mathcal{N}^+$ a lui $\mathcal{N}$ la $\mathcal{L}^+$ definită astfel: $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$. Atunci $\mathcal{N}^+ \vDash \Gamma_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}).$$

Rezultă că $a := c^{\mathcal{A}}$ este element non-standard al lui $\mathcal{A}$. $\square$

Teoria Ramsey este o ramură a combinatoricii, a cărei temă principală este:

"Complete disorder is impossible." (T.S. Motzkin)

O structură mare, oricât de haotică ar fi, conține substructuri cu regularități.

Problemă tipică

O anumită structură este partiționată într-un număr finit de clase. Ce tip de substructură rămâne intactă în cel puțin una din clase?

- Rezultatele din teoria Ramsey sunt foarte puternice, deoarece ele sunt generale, se obțin presupunând ipoteze foarte slabe.
- Graham, Rothschild, Sperner, Ramsey Theory, 1990.

X mulțime, $\mathcal{G}$ colecție de submulțimi bune ale lui X, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definiția 4.70

O r-colorare a lui X este o funcție $c : X \to \{1, 2, \ldots, r\}$. Pentru $x \in X$, $c(x)$ este culoarea lui x. O submulțime $A \subseteq X$ se numește monocromatică dacă toate elementele din A au aceeași culoare.

Definiția 4.71

O familie de mulțimi $C_1, \ldots, C_r$ se numește partiție a lui X dacă $X = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ și $C_i \cap C_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

- Pentru orice partiție $X = \cup_{i=1}^{r} C_i$ a lui X, există $i \in \{1, \ldots, r\}$ și $G \in \mathcal{G}$ a.î. $G \subseteq C_i$.
- Pentru orice r-colorare a lui X există o mulțime $G \in \mathcal{G}$ monocromatică.

Teorema Schur (1916)

Fie $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ și $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ o partiție a lui $\mathbb{N}$. Atunci există $i \in \{1, \ldots, r\}$ a.î.

$$\{x, y, x + y\} \subseteq C_i \quad \text{pentru } x, y \in \mathbb{N}.$$

$$X = \mathbb{N}, \quad \mathcal{G} = \{\{x, y, x + y\} \mid x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Versiunea cu colorări: Pentru orice r-colorare a lui $\mathbb{N}$ există $x, y \in \mathbb{N}$ a.î. mulțimea $\{x, y, x + y\}$ este monocromatică.

Teorema van der Waerden (1927)

Fie $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ și $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ o partiție a lui $\mathbb{N}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $i \in \{1, \ldots, r\}$ a.î. C_i conține progresii aritmetice de lungime k.

- rezultat central în teoria Ramsey
- una din cele trei perle în teoria numerelor Khintchin (1948)
- demonstrație combinatorială prin inducție dublă după r și k.

$$X = \mathbb{N}, \quad \mathcal{G} = \text{ mulțimea progresiilor aritmetice de lungime } k.$$

Versiunea cu colorări: Orice colorare finită a lui $\mathbb{N}$ conține progresii aritmetice monocromatice de lungime finită arbitrară.

Y mulțime, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notăm cu $[Y]^k$ mulțimea submulțimilor lui Y cu k elemente: $[Y]^k = \{A \subseteq Y \mid |A| = k\}$.
Putem să ne gândim la $[Y]^2$ ca fiind mulțimea muchiilor grafului complet peste Y.

Teorema 4.72 (Teorema Ramsey)

Fie Y o mulțime infinită, $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ și $[Y]^k = \bigcup_{i=1}^r C_i$ o partiție a lui $[Y]^k$. Atunci există $i \in \{1, \ldots, r\}$ și o submulțime infinită B a lui Y a.î. $[B]^k \subseteq C_i$.

- rezultat structural general, nu depinde de proprietățile aritmetice ale lui $\mathbb{N}$;
- articolul lui Ramsey: On a problem of formal logic (1930);
- teorema lui Ramsey a fost popularizată de Erdös și Szekeres, care au redescoperit-o într-un articol clasic din 1935.

Teorema 4.73 (Teorema Ramsey - versiunea cu colorări)

Fie Y o mulțime infinită și $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice r-colorare a lui $[Y]^k$, există o submulțime infinită B a lui Y a.î. $[B]^k$ este monocromatică.

Versiune echivalentă

Teorema 4.74 (Teorema Ramsey - versiunea cu colorări)

Fie $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice r-colorare a lui $[\mathbb{N}]^k$, există o submulțime infinită B a lui $\mathbb{N}$ a.î. $[B]^k$ este monocromatică.

Consecință: Principiul cutiei - varianta infinită (Infinite Pigeonhole Principle)

Fie Y o mulțime infinită și $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice r-colorare a lui Y, există o submulțime infinită monocromatică B a lui Y.

Notăm $[n] := \{1, \ldots, n\}$ și $[n]^k = \{A \subseteq [n] \mid |A| = k\}$.

Teorema 4.75 (Teorema Ramsey finitară)

Fie $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice r-colorare a lui $[n]^k$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m cu proprietatea că $[D]^k$ este monocromatică.

Generalizare a Principiului cutiei (Pigeonhole Principle): Dacă avem r cutii și $r+1$ obiecte, atunci cel puțin într-o cutie vor fi două obiecte. $\iff$ Dacă colorăm $r+1$ obiecte cu r culori, atunci există două obiecte care au aceeași culoare.

Pentru k, r, m date, notăm cel mai mic n cu proprietatea de mai sus cu $R(k, r, m)$. Atunci $R(1, r, 2) = r + 1$.

Vom demonstra folosind Teorema de compacitate că Teorema Ramsey implică Teorema Ramsey finitară.
Pentru simplitate, considerăm $r = 2, k = 2$.

Teorema 4.76 (Teorema Ramsey finitară)

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că teorema nu are loc. Atunci există $M \in \mathbb{N}$ cu următoarea proprietate:

(*) pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există o 2-colorare a lui $[n]^2$ a.î. $[n]$ nu are submulțimi D de cardinal M cu proprietatea că $[D]^2$ este monocromatică.

În continuare, fixăm M ca mai sus.

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare)
Pentru orice mulțime nevidă D,

- oricărei 2-colorări c a lui $[D]^2$, îi asociem relația binară R_c pe D definită astfel:
$$R_c = \{(a,b) \in D^2 \mid c(\{a,b\}) = 1\}.$$
- oricărei relații binare R pe D îi asociem 2-colorarea c_R a lui $[D]^2$ definită astfel: pentru orice $\{a,b\} \subseteq D$,
$$c_R(\{a,b\}) = 1 \iff (a,b) \in R.$$

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Fie $\mathcal{L}$ limbajul de ordinul întâi care conține simbolurile de constantă $\{c_k \mid k \geq 1\}$ și un simbol U de relație binară. Pentru orice $n \geq M$, definim un enunț φ_n din $\mathcal{L}$ cu următoarea proprietate: pentru orice $\mathcal{A} = (A, \{c_k^{\mathcal{A}} \mid k \geq 1\}, U^{\mathcal{A}})$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi_n \iff \begin{array}{l} c_i^{\mathcal{A}} \neq c_j^{\mathcal{A}} \text{ pentru orice } i \neq j \in \{1, \ldots, n\} \\ \text{și pentru orice } D \subseteq \{c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_n^{\mathcal{A}}\} \text{ de cardinal } M, \\ [D]^2 \text{ nu este monocromatică relativ la 2-colorarea } c_{U^{\mathcal{A}}}. \end{array}$$

$$\varphi_n = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(c_i = c_j) \wedge \bigwedge_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_M \leq n} \psi_{i_1, \ldots, i_M}, \text{ unde}$$

$$\psi_{i_1, \ldots, i_M} = \bigvee_{\substack{1 \leq j,k,p,q \leq M, \\ j \neq k, p \neq q, (j,k) \neq (p,q)}} U(c_{i_j}, c_{i_k}) \wedge \neg U(c_{i_p}, c_{i_q}).$$

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Evident, pentru $m \geq p$, avem că $\varphi_m \vDash \varphi_p$. Fie

$$\Gamma := \{\varphi_n \mid n \geq M\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ,

$$\Gamma_0 = \{\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}\}, \quad \text{unde } n_1, \ldots, n_k \geq M.$$

Fie $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Atunci orice model al lui φ_{n_0} este model al lui Γ_0. Aplicând (*) pentru n_0, rezultă că există o 2-colorare c_{n_0} a lui $[n_0]^2$ a.î. $[D]^2$ nu este monocromatică pentru nicio submulțime $D \subseteq [n_0]$ de cardinal M.

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Fie $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{A}$ definită astfel:

- $|\mathcal{A}| = [n_0]$;
- pentru orice $i = 1, \ldots, n_0$, $c_i^{\mathcal{A}} = i$ și $c_k^{\mathcal{A}}$ arbitrar pentru $k > n_0$;
- $U^{\mathcal{A}} = R_{c_{n_0}}$.

Atunci $\mathcal{A} \vDash \varphi_{n_0}$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{B} = (B, \{c_n^{\mathcal{B}} \mid n \geq 1\}, U^{\mathcal{B}}).$$

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Fie

$$C = \{c_n^{\mathcal{B}} \mid n \geq 1\} \subseteq B.$$

Deoarece $\mathcal{B} \vDash \Gamma$, avem că $c_n^{\mathcal{B}} \neq c_m^{\mathcal{B}}$ pentru $n \neq m$. Prin urmare, $|C| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Aplicând Teorema Ramsey 4.73 pentru mulțimea infinită C și 2-colorarea $c_{U^{\mathcal{B}}}$ a lui $[B]^2$ (deci și a lui $[C]^2$), rezultă că C are o submulțime infinită D a.î. $[D]^2$ este monocromatică. Deoarece D este infinită, există N a.î. mulțimea $D_N := D \cap \{c_1^{\mathcal{B}}, \ldots, c_N^{\mathcal{B}}\}$ are cardinal M. Cum $[D_N]^2 \subseteq [D]^2$ este monocromatică, am obținut o contradicție cu faptul că $\mathcal{B} \vDash \varphi_N$. □

Definiția 4.77

Mulțimea $Axm_{\mathcal{L}} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ a axiomelor (logice) ale lui $\mathcal{L}$ constă din:

(i) toate tautologiile.

(ii) formulele de forma

$$t = t, \quad s = t \to t = s, \quad s = t \wedge t = u \to s = u,$$

pentru orice termeni s, t, u.

(iii) formulele de forma

$$t_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t_m = u_m \quad \to \quad ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m,$$
$$t_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t_m = u_m \quad \to \quad (Rt_1 \ldots t_m \leftrightarrow Ru_1 \ldots u_m),$$

pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni t_i, u_i $(i = 1, \ldots, m)$.

(iv) formulele de forma

$$\varphi_x(t) \to \exists x \varphi,$$

unde $\varphi_x(t)$ este o substituție liberă ($\exists$-axiomele).

Definiția 4.78

Regulile de deducție (sau inferență) sunt următoarele: pentru orice formule φ, ψ,

(i) din φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

(ii) dacă $x \notin FV(\psi)$, atunci din $\varphi \to \psi$ se inferă $\exists x \varphi \to \psi$ ($\exists$-introducerea):

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi} \quad \text{dacă } x \notin FV(\psi).$$

Fie Γ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 4.79

Γ-teoremele lui $\mathcal{L}$ sunt formulele definite astfel:

(Γ0) Orice axiomă logică este Γ-teoremă.

(Γ1) Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.

(Γ2) Dacă φ și $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.

(Γ3) Dacă $\varphi \to \psi$ este Γ-teoremă și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\exists x \varphi \to \psi$ este Γ-teoremă.

(Γ4) Numai formulele obținute aplicând regulile (Γ0) (Γ1), (Γ2) și (Γ3) sunt Γ-teoreme.

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Notații

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \varphi$ este Γ-teoremă $\qquad \vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

Definiția 4.80

O formulă φ se numește teoremă (logică) a lui $\mathcal{L}$ dacă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Reformulând condițiile din definiția Γ-teoremelor folosind notația $\vdash$, obținem

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, au loc următoarele:

(i) Dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$;

(ii) Dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$;

(iii) Dacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ și $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

(iv) Dacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$ și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \exists x\varphi \to \psi$.

Definiția 4.81

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) a lui $\mathcal{L}$ este o secvență de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ astfel încât pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) *θ_i este axiomă;*

(ii) *$\theta_i \in \Gamma$;*

(iii) *există $k, j < i$ astfel încât $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$;*

(iv) *există $j < i$ astfel încât*

$$\theta_j = \varphi \to \psi \text{ și } \theta_i = \exists x\varphi \to \psi, \text{ unde } x \notin FV(\psi).$$

O $\emptyset$-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Definiția 4.82

Fie φ o formulă. O Γ-demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ astfel încât $\theta_n = \varphi$.

Propoziția 4.83

Fie Γ o mulțime de formule. Pentru orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \quad \text{ddacă există o } \Gamma\text{-demonstrație a lui } \varphi.$$

Fie Γ o mulțime de formule.

Teorema 4.84 (Teorema Tautologiei (Post))

Fie $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ astfel încât

(i) *ψ este consecință tautologică a mulțimii $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.*

(ii) *$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_2, \ldots, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$.*

Atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

Teorema 4.85 (Teorema Deducției)

Fie ψ o formulă și φ un enunț. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi \quad \text{ddacă} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi.$$

Propoziția 4.86

Pentru orice formulă φ și orice variabilă x,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \forall x\varphi.$$

Sintaxa

Definiția 4.87

Fie φ o formula cu $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Închiderea universală a lui φ este enunțul

$$\overline{\forall\varphi} := \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi.$$

Notații 4.88

$\overline{\forall\Gamma} := \{\overline{\forall\psi} \mid \psi \in \Gamma\}$.

Propoziția 4.89

Pentru orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \overline{\forall\varphi} \iff \overline{\forall\Gamma} \vdash \varphi \iff \overline{\forall\Gamma} \vdash \overline{\forall\varphi}.$$

Mulțimi consistente

Definiția 4.90

Fie Γ o mulțime de formule. Spunem că

(i) *Γ este consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.*

(ii) *Γ este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ pentru orice formulă φ.*

Propoziția 4.91

Pentru orice mulțime de formule Γ, următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) *Γ este inconsistentă.*

(ii) *Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.*

(iii) *Există o formulă ψ astfel încât $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.*

Teorema de completitudine

Teorema de completitudine - prima versiune

Fie Γ o mulțime de enunțuri.

$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Teorema de completitudine - a doua versiune

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ și orice enunț φ,

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \iff \Gamma \vDash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

- Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat.
- Henkin a dat în teza sa de doctorat din 1947 o demonstrație simplificată.