

Test EDP -varianta B

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale

Tipul examinarii: lucrare partiala

Nume student: _____

Grupele 311, 312

Timp de lucru : 90 minute

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest test contine 3 probleme (toate obligatorii).

Testul este individual. In cazul fraudarii (redactare identica cu a altui coleg) se anuleaza punctajul tuturor partilor implicate.

Pentru redactarea solutiilor incercati sa aplicati urmatoarele reguli:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **trebuie sa indicati** acest lucru si sa explicati de ce rezultatul respectiv se poate aplica.
- Pe cat posibil, **organizati-va munca** astfel incat la sfarsitului timpului de lucru sa returnati rezolvarile in ordinea de pe subiecte.
- Va sugerez sa rezolvati mai intai ce stiti sa faceti la prima vedere pentru a nu intra in criza de timp la finalul timpului de lucru !
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Punctaj: Problema 1 (2.5 p), Problema 2 (3.5 p), Problema 3 (3 p). Un punct este din oficiu, deci se **pleaca din nota 10**.

Problema 1. (2.5p)

(a). Calculati (pe domeniul maxim de definitie) $\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru functia

$$f(x, y) = \arctan \left(3^{x \sin(y)} \right).$$

(b). Calculati

$$\int_{B_2(0)} |x|^{-\frac{4}{3}} dx,$$

unde $B_2(0) \subset \mathbb{R}^4$ este bila de raza 2 centrata in origine.

(c). Integrati problema Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} xu_x(x, y) - (4 + y^2)u_y(x, y) = 2u, & u = u(x, y) \\ u(x, 0) = e^{-x}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Problema 2. (3.5p) Fie $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 4\}$ si $\partial\Omega$ frontiera lui Ω . Fie problema

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u(x, y) = x^2, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

(a). Aratati ca problema (2) are cel mult o solutie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(b). Aratati ca u este functie para in raport cu variabila x . Calculati $u_x(0, 0)$.

(c). Gasiti constanta C astfel incat functia $v(x, y) = C(x^2 + y^2)$ sa verifice $-\Delta v = 4$ in Ω .

(d). Folosind (eventual) principiul de maxim pentru functii armonice sa se determine solutia problemei

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta u(x, y) = 4, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

(e). Folosind (eventual) principiul de maxim pentru functii sub/super armonice sa se arate ca solutia problemei (2) verifica

$$0 < u(x, y) \leq 4, \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Problema 3. (3p)

(a). Fie functia $g(x) := |x|^{\frac{5}{2}} - x_1x_2$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Calculati $\operatorname{div}(g(x)x)$ intr-un punct oarecare din domeniul de definitie si apoi in punctul $(1, 1, 0)$.

(b). Calculati $\Delta(x \cdot \nabla(|x|^3))$, $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$.

Se considera problema la limita

$$(4) \quad \begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, 0) = u(x, 1) = u(1, y) = 0, & x \in (0, 1), y \in (0, 1) \\ u_x(0, y) - u(0, y) = \sin(2\pi y), & y \in (0, 1), \end{cases}$$

(c). Aratati ca (4) are cel mult o solutie de clasa C^2 .

(d). Gasiti solutia problemei (4) cautand-o sub forma $u(x, y) = A(x)B(y)$.