TAFALAN ALEXANDRU

TUTORIAT GEOMETRIE – Nr 7 (SĂPTĂMÂNA 7)

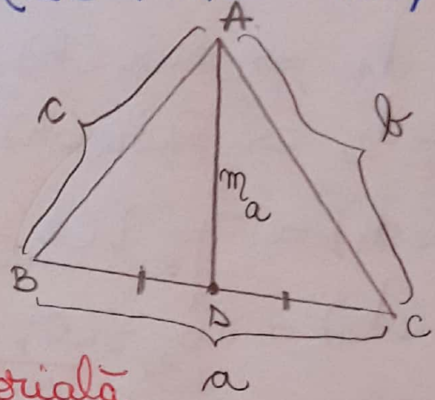
Spații afine euclidiene

Exercițiul 1:

Fie $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2/\mathbb{R}, \langle \cdot ; \cdot \rangle_{can})$ spațiu afin euclidian.
Considerăm sistemul de puncte necoliniare $\{A, B, C\}$.
Să se arate că $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

(TEOREMA MEDIANEI)

Soluție:



$m_a = \|\overrightarrow{AD}\|$

$D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ → relația vectorială a medianei

$$m_a^2 = \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} ; \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \rangle =$$

$$= \tfrac{1}{4}\langle \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB} \rangle + \tfrac{1}{4}\langle \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \rangle + \tfrac{1}{4}\langle \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \rangle + \tfrac{1}{4}\langle \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC} \rangle$$

$$\Rightarrow m_a^2 = \tfrac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \tfrac{1}{4}\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \tfrac{2}{4}\langle \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \rangle \quad (1)$$

Propoziție:
$\{O, A, B\}$ afin independente. Are loc:
$$\langle \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB} \rangle = \tfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2)$$

$\{A, B, C\}$ sunt puncte necoliniare $\Rightarrow$ $\{A, B, C\}$ sunt afin independente $\Rightarrow \langle \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{4}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)$

$\Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2b^2 - a^2)$ ∎

Exercițiul 2:

Fie $(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3/\mathbb{R}; <\cdot;\cdot>_{can})$ spațiu afin euclidian. Considerăm dreptele $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z$ și $d_2: \frac{x}{0} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{0}$. Să se scrie ecuația perpendicularei comune celor două drepte. #

Soluție:

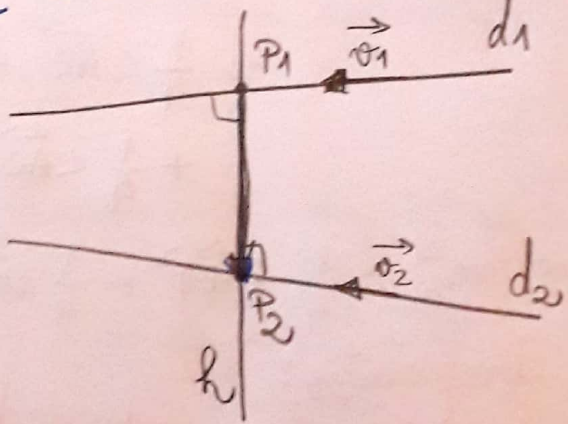
Vreau ecuația unei drepte h a. î.

$$(5)\begin{cases} h \perp d_1 \Rightarrow Dir(h) \perp Dir(d_1) \\ h \perp d_2 \Rightarrow Dir(h) \perp Dir(d_2) \end{cases}$$

$$Dir(d_1) = Sp_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(2,-1,1)}_{\vec{v_1}}\}$$

$$Dir(d_2) = Sp_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(0;-1;0)}_{\vec{v_2}}\}$$

$$d_1: \begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = 2-\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \; ; \quad d_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = -2-s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$



$P_1(1+2\alpha; 2-\alpha; \alpha) \in d_1$

$P_2(0, -2-s, 0) \in d_2$

(5) devine echivalent cu

$$Dir(d_1) \perp \overrightarrow{P_1P_2} \perp Dir(d_2) \rightarrow$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-2\alpha-1; -s+\alpha-4; -\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Dir(d_1) \perp \overrightarrow{P_1P_2} \\ Dir(d_2) \perp \overrightarrow{P_1P_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} <\vec{v_1}; \overrightarrow{P_1P_2}> = 0 \\ <\vec{v_2}; \overrightarrow{P_1P_2}> = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha-2+s-\alpha+4-\alpha = 0 \\ s-\alpha+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\alpha+s = -2 \\ s-\alpha = -4 \mid (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s - 6\alpha = -2 \\ -s + \alpha = 4 \end{cases}$$

$$\oplus \quad -5\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{-2}{5}$$

$$s = -4 + \alpha = -4 - \frac{2}{5} = \frac{-22}{5}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \left(-\frac{1}{5};\ 0;\ \frac{2}{5}\right) \in Dir(h)$$

$$P_2 \in h \Rightarrow P_2\left(0; \frac{12}{5}; 0\right)$$

Deci, $P_2 \in h$ și $Dir(h) = Sp_{\mathbb{R}}\left\{\left(-\frac{1}{5}; 0; \frac{2}{5}\right)\right\}$

$$\Rightarrow h: \frac{x}{-\frac{1}{5}} = \frac{y - \frac{12}{5}}{0} = \frac{z}{\frac{2}{5}} \Rightarrow h: y = \frac{12}{5}$$

Exercițiul 3:

Fie vectorii $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{b} = \vec{u} - 3\vec{v}$, unde $\|\vec{u}\| = 5$; $\|\vec{v}\| = 3$; $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.

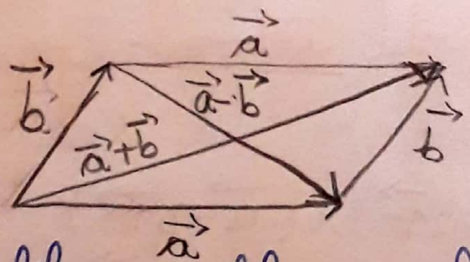
Să se calculeze:

a) lungimea diagonalelor paralelogramului construit pe $\vec{a}$ și $\vec{b}$;

b) unghiul dintre diagonale;

c) aria paralelogramului determinat de $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Soluție:



$$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{u} - \vec{v}$$
$$\vec{a} - \vec{b} = 5\vec{v}$$

Diagonalele paralelogramului det de $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt $\vec{a} + \vec{b}$ și $\vec{a} - \vec{b}$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{\langle \vec{a} + \vec{b}; \vec{a} + \vec{b} \rangle} = \sqrt{\langle 2\vec{u} - \vec{v}; 2\vec{u} - \vec{v} \rangle} =$$

$$= \sqrt{4\langle \vec{u}; \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle - 2\langle \vec{v}; \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle} =$$

$$= \sqrt{4\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 4\langle \vec{u};\vec{v}\rangle}$$

$$\boxed{\sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \langle \vec{u};\vec{v}\rangle = 0} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{4\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2} = \sqrt{4\cdot 25+9} = \sqrt{109}$$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{\langle 5\vec{v};5\vec{v}\rangle} = \sqrt{25\|\vec{v}\|^2} = 5\|\vec{v}\| = 15$$

b) Teorema cosinusului

$\{A,B,C\} \in \mathcal{E}$ – puncte necoliniare.

$$\cos(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = \frac{\langle \vec{AB};\vec{AC}\rangle}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|}$$

Calculăm: $\langle \vec{a}+\vec{b};\vec{a}-\vec{b}\rangle = \langle 2\vec{u}-\vec{v}; 5\vec{v}\rangle$

$$= 10\underbrace{\langle \vec{u};\vec{v}\rangle}_{=0} - 5\langle \vec{v};\vec{v}\rangle = -5\|\vec{v}\|^2 = -45$$

$$\cos(\vec{a}+\vec{b};\vec{a}-\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}+\vec{b};\vec{a}-\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}+\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}-\vec{b}\|} = \frac{-\cancelto{3}{45}}{\cancel{15}\cdot\sqrt{109}} = -\frac{3}{\sqrt{109}}$$

$$\Rightarrow \widehat{\vec{a}+\vec{b};\vec{a}-\vec{b}} = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{109}}\right)$$

c) Teoremă

Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt necoliniari, atunci norma $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe reprezentanții într-un punct ai vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

Calculăm: $\vec{a}\times\vec{b} = (\vec{u}+2\vec{v})\times(\vec{u}-3\vec{v})$

$$= \underbrace{\vec{u}\times\vec{u}}_{=\vec{0}} - 3\vec{u}\times\vec{v} + 2\vec{v}\times\vec{u} - 6\underbrace{\vec{v}\times\vec{v}}_{\vec{0}} =$$

$$= -3\vec{u}\times\vec{v} - 2\vec{u}\times\vec{v}$$

$$= -5\vec{u}\times\vec{v}$$

Deci $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|-5\vec{u}\times\vec{v}\| = 5\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| = 5\cdot5\cdot3 = 75$

1). Ecuația hiperplanului perpendicular pe o dreaptă dată într-un punct dat

Fie $(d): \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$ și

$A(x_1^A, \dots, x_n^A) \in d$; $Dir(d) = Sp_{\mathbb{R}}\{(v_1, \dots, v_n)\}$

Vreau ecuația lui $(\mathcal{H})$ a.î. $(\mathcal{H}) \perp d$ în A.

Ecuația este:

$$\boxed{(\mathcal{H}): v_1(x_1 - x_1^A) + v_2(x_2 - x_2^A) + \dots + v_n(x_n - x_n^A) = 0}$$

2. Ecuația perpendicularei pe un hiperplan dat, ce trece printr-un punct dat.

Fie $(\mathcal{H}): a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b = 0$ și

$B(x_1^B, \dots, x_n^B) \in \mathcal{E}$

Ecuația este:

$$\boxed{(d): \frac{x_1 - x_1^B}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^B}{a_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^B}{a_n}}$$

Exercițiul 4

Fie $(\mathbb{R}^3; (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}; \langle ; \rangle_{can}); f_{can})$ spațiu afin euclidian.

Fie $M(2,1,0)$ și planul $\pi: 2x + 2y + z = -3$. Să se determine:

a) proiecția lui M pe plan;

b) simetricul lui M față de planul π;

c) distanța de la M la planul π.

Soluție:

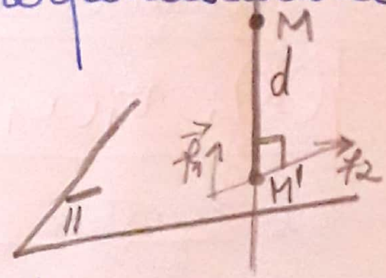
a) Proiecția ortogonală a unui punct A pe un hiperplan $(\mathcal{H})$ este $\begin{cases} A, & \text{dacă } A \in (\mathcal{H}) \\ A', \text{ unde } \overrightarrow{AA'} \perp v, (\forall) v \in Dir(\mathcal{H}), A' \in (\mathcal{H}) & \text{dacă } A \notin (\mathcal{H}) \end{cases}$

La noi $M \notin \Pi$ $(2\cdot 2+2 \neq -3)$

Scriu ecuația perpendicularei pe planul Π, ce trece prin M:

$$(d): \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

Notez cu M' – proiecția pe planul Π a lui M.
M' se obține ca fiind piciorul perpendicularei pe planul Π ce trece prin M.



Deci intersectez ecuația lui (d) cu planul Π:

$$M': \begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \\ 2x+2y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = y-1 \\ y-1 = 2z \\ 2x+2y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y+1 \Rightarrow x = 2z+2 \\ y = 2z+1 \\ 2x+2y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow 4z+4+4z+2+z=-3$$

$$\Rightarrow 9z=-9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=-1$$

$x = -2+2=0$
$y=-2+1=-1$
Deci $M'(0,-1,-1)$

b) Simetricul lui M față de planul Π se obține ca fiind $2\cdot pr_M(\Pi)$ și simetricul aparține dreptei (d). Fie M'' proiecția lui M față de planul Π. Avem că $\begin{cases} M'' \in d \\ M'' = 2\cdot pr_M(\Pi) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow M'$ este mijlocul segmentului MM'' $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = \frac{x_M + x_{M''}}{2} \\ y_{M'} = \frac{y_M + y_{M''}}{2} \\ z_{M'} = \frac{z_M + z_{M''}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M''} = 2x_{M'} - x_M \\ y_{M''} = 2y_{M'} - y_M \\ z_{M''} = 2z_{M'} - z_M \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{M''} = -2 \\ y_{M''} = -2-1 = -3 \\ z_{M''} = -2 - \end{cases} \Rightarrow M''(-2; -3; -2)$$

c) Distanta de la M la planul π:

$$d(M, \pi) = \frac{|2\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$$

Exercițiul 5

Să se găsească pe dreapta:

$$(d) \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$$ un punct egal depărtat

de punctele $A(0,0,0)$ și $B(2,1,2)$.

Soluție:

Punctul căutat se află la intersecția dreptei (d) cu planul mediator al segmentului [AB].

Planul mediator al segmentului [AB] este planul (hiperplanul în $\mathbb{R}^3$) care trece prin mijlocul segmentului [AB] și este perpendicular pe dreapta (AB)*.

(AB): $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$, $Dir(AB) = Sp_{\mathbb{R}}\{(2,1,2)\}$

Fie M mijlocul segmentului $[AB] \Rightarrow M(1; \frac{1}{2}; 1)$

Deci ecuația planului mediator este:

$$(\pi)^{*}: 2\cdot(x-1) + 1\cdot\left(y - \frac{1}{2}\right) + 2\cdot(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\pi): 2x + y + 2z - \frac{9}{2} = 0 \quad |\cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\pi): 4x + 2y + 4z - 9 = 0$$ (*mai e cunoscut și ca ecuația planului ce trece prin M și are direcția normală $= \overrightarrow{AB} = (2,1,2)$)

Pentru a rezolva cerința intersectăm (d) cu (π)

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x-y+4z-29=0 \\ 4x+2y+4z-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-y+4z=29 \\ 4x+2y+4z=-9 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -\cancel{4}+6+16+\cancel{4}-8-12$$
$$= 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ S.C.D și soluția unică este $\begin{cases} x = -\frac{25}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \\ z = 16 \end{cases}$

$\Rightarrow O\left(-\frac{25}{2}; -\frac{5}{2}; 16\right)$ este punctul căutat, i.e $O \in (d)$ și este egal depărtat de A și B.

Tema 3

1p. of.

2p. $\boxed{1}$ Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,2,2)$ la dreapta $(d): \frac{x-1}{-5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{3}$.

3p $\boxed{2}$ Să se scrie ecuația perpendicularei comune a dreptelor

$(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0}$ și $(d_2): \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$

$\boxed{3}$ Să se determine α și β astfel încât planele

$(\Pi_1): x+2y-z=\alpha$

$(\Pi_2): \alpha x = 3$ să se:

$(\Pi_3): x+\beta y+z=0$

2p a) intersecteze după o dreaptă;

1p b) să se intersecteze într-un punct.

Să se calculeze, pentru α și β obținute la a),

1p distanța de la $A(1,1,1)$ la planul (Π_1). SUCCES!

8|8