15.06.2021

Consultații

Examen trecut

1. Care dintre următoarele submulțimi sunt subspații afine în $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ (cu structura afină canonică): ~~a)~~ $\mathcal{A}' = \{(x, y) | x^2 - y^2 = 0\}$; b) $\mathcal{A}' = \{(x, y) | x - 2y = 1\}$; ~~c)~~ $\mathcal{A}' = \{(x, y) | x - \pi y^2 = \pi^2\}$; d) $\mathcal{A}' = \{(x + 1, x) | x \in \mathbb{R}\}$. **(0,7 p)**

$\mathcal{A}' = \{(x,y) | x^2+y^2=0\} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

2. Care dintre următoarele funcții $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sunt transformări afine bijective: a) $f(x, y) = (x + \cos(7), 2y - 1)$; ~~b)~~ $f(x, y) = (7 + \cos(x), 2y)$; ~~c)~~ $f(x, y) = (\cos(7), x + y)$; ~~d)~~ $f(x, y) = (\cos(7)x^3, 2y - 1)$; **(0,7 p)**

Dacă putem scrie funcția ca $AX+B$ matrici

b) nu e transformare afină

c) $f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ nu e bijectivă

d) nu e transformare afină

3. În spațiul afin $\mathbb{R}^2$, care dintre ecuațiile următoare definesc hiperbole: ~~a)~~ $x^2 + 2y^2 = 0$; ~~b)~~ $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$; c) $x^2 - 2y^2 + 4x + 5 = 0$; ~~d)~~ $x^2 - 2y^2 - 2x + 1 = 0$; **(0,7 p)**

parabola $\quad \overset{4}{\emptyset}$

d) $(x-1)^2 - 2y^2 = 0 \iff \begin{cases} x-1 = \sqrt{2}y \\ x-1 = -\sqrt{2}y \end{cases}$ pereche de drepte secante

c) $x^2 - 2y^2 + 4x + 5 = 0$

$(x^2+4x) - 2y^2 + 5 = (x+2)^2 - 4 - 2y^2 + 5$

$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = \sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow (x')^2 - (y')^2 + 1 = 0$ hiperbolă

4. În spațiul afin $\mathbb{R}^3$, dreptele:

$$(d_1) : \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 - 2}{2}; \quad (d_1) : \frac{x_1 - 1}{0} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3 - 2}{-1}$$

sunt: ~~a)~~ paralele; ~~b)~~ concurente; c) coplanare; d) perpendiculare. **(0,7 p)**

$\langle (1,1,2) \rangle = \text{dir}(d_1)$

$\langle (0,2,-1) \rangle = \text{dir}(d_2)$

a) Paralele $\iff (1,1,2) = t \cdot (0,2,-1) \quad t \in \mathbb{R} \quad$ Nu se poate

d) Perpendiculare $\iff \langle (1,1,2), (0,2,-1) \rangle = 1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 0 \Rightarrow$ perp ✓

b) $d_1: \begin{cases} x_1 = t+1 \\ x_2 = t+1 \\ x_3 = 2t+2 \end{cases}$ $\quad d_2: \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2s \\ x_3 = -s+2 \end{cases}$

$\begin{cases} t+1 = 1 \Rightarrow t = 0 \\ 0+1 = 2s \Rightarrow s = \frac{1}{2} \\ 2\cdot 0 + 2 = -\frac{1}{2}+2 \end{cases}$ Fals $\Rightarrow$ nu sunt concurente

5. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ se consideră punctele: $A = (0,0,0)$, $B = (3,1,3)$, $C = (1,3,5)$. Atunci dreapta

$$(d): \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{2}$$

reprezintă (în triunghiul $\Delta(ABC)$):

a) mediana dusă din A; ~~b)~~ bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$; ~~c)~~ înălţimea dusă din A; ~~d)~~ mediatoarea segmentului BC. **(0,7 p)**

b) $\vec{AB}: (3,1,3) \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{19}$, $\vec{AC}: (1,3,5) \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \sqrt{35}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ nu e isoscel

a) $M = (2,2,4) = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = \left(\frac{B+C}{2}\right)$

$M \in d$? : $\frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ Adev

$A \in d$? Da $\Big\}$ d - mediana din A

1. În spaţiul afin $\mathbb{R}^2$ (cu structura afină canonică) se consideră conica:

$$C_\alpha: \; x^2 + 2y^2 + 2\alpha xy - 4y - 1 = 0, \; (\alpha \in \mathbb{R}).$$

a) Pentru $\alpha = 0$ aduceţi C_0 la formă canonică. **(1p)**

b) Pentru ce valori ale lui α conica C_α reprezintă o parabolă? **(1p)**

c) Există valori ale lui α pentru care există o dreaptă $d \subset \mathbb{R}^2$ astfel încât $card(d \cap C_\alpha) \geq 3$? Justificare. **(0.5 p)**

Rez a) $x^2 + 2y^2 - 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(y^2 - 2y) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2[(y-1)^2 - 1] - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(y-1)^2 - 3 = 0 \quad :3$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}(y-1)^2 - 1 = 0$

$\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{3}} \\ y' = \sqrt{\frac{2}{3}}(y-1) \end{cases}$ ec. devine $(x')^2 + (y')^2 - 1 = 0$ elipsă

b) $x^2 + 2y^2 + 2\alpha xy - 4y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[(x+\alpha y)^2 - \alpha^2 y^2\right] + 2y^2 - 4y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+\alpha y)^2 + (2-\alpha^2)\, y^2 - 4y - 1 = 0$

Pt. a fi parabolă $2-\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{2}$

Var 2: facem să avem $x^2 = py$

$x^2 + 2y^2 + 2\alpha xy - 4y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2(y^2 + \alpha xy - 2y) + x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left[\left(y + \frac{\alpha}{2}x - 1\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}x^2 - 1 + \alpha x\right] + x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(y + \frac{\alpha}{2}x - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)x^2 + \underline{2\alpha x} - 3 = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$

c) $(x+\alpha y)^2 + (2-\alpha^2)\, y^2 - 4y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+\alpha y)^2 + (2-\alpha^2)\left[y^2 \; \frac{4}{2-\alpha^2}\, y\right] - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+\alpha y)^2 + (2-\alpha^2)\left[\left(y - \frac{2}{2-\alpha^2}\right)^2 - \frac{4}{(2-\alpha^2)^2}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+\alpha y)^2 + (2-\alpha^2)\left(y - \frac{2}{2-\alpha^2}\right)^2 - \frac{4}{2-\alpha^2} - 1 = 0$

$\frac{4}{2-\alpha^2} + 1 = 0 \Rightarrow 4 + 2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 6$

2. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ (cu structura canonică) se consideră tetraedrul $ABCD$ unde $A = (1,2,2)$, $B = (0,0,0)$, $C = (0,3,2)$, $D = (0,2,3)$.

a) Să se scrie ecuaţiile înălţimii tetraedrului dusă din B. **(1p)**

b) Sše determine volumul tetraedrului $ABCD$. **(0.5p)**

c) Sunt concurente înălţimile tetraedrului $ABCD$? Justificare. **(0.5p)**

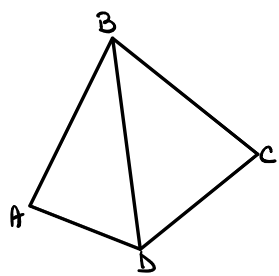
Var 1: $(ACD): x+y+z = 5$

Var 2: $\vec{AC} = (-1, 1, 0)$

$\vec{AD} = (-1, 0, 1)$

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

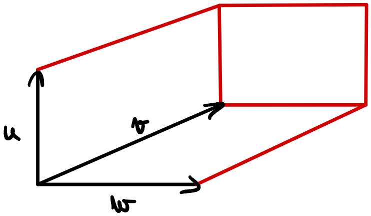


$h_{(ACD)}: x = y = z \qquad (ACD): x+y+z = 5$

$h_{(ACD)} = \frac{|x_B + y_B + z_B - 5|}{\| N_{(ACD)} \|} = \frac{|5|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \qquad N(A,C,D) = (1,1,1)$

$\frac{S_{ACD}}{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}$

$\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{vmatrix} = \Delta, \quad |\Delta| = vol$



3. În spaţiul proiectiv $P(\mathbb{R}^4)$ se consideră punctele

$$A = [-1, 0, 2, 4], B = [1, 1, 2, 0], C = [0, 0, -1, 0], D = [1, -2, \alpha, 0], \ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Să se determine α astfel încât $AB \cap CD \neq \emptyset$. **(1 p)**