15.03.2021

Tutoriat 2

Exc: Fie A o mulțime. Arătați că: dacă avem „$\leq$" o relație de ordine parțială pe A și dacă definim „$<$" $\subseteq A\times A$ ca fiind mulțimea tuturor perechilor (a,b) cu propr. că $a\leq b$ și $a\neq b$ atunci „$<$" e o relație de ordine strictă în A.

Rez Recap:

-> relație de ordine parțială „$\leq$": rel. binară cu propr: $\begin{cases} \text{reflexivă} \\ \text{antisimetrică} \\ \text{tranzitivă} \end{cases}$

-> relație de ordine strictă „$<$": rel. binară cu propr: $\begin{cases} \text{ireflexivă} \\ \text{asimetrică} \\ \text{tranzitivă} \end{cases}$

Știind că „$\leq$" e o rel. de ordine parțială, verificăm dacă „$<$" este strictă (i.e dacă are proprietățile necesare)

$a<b \Leftrightarrow a\leq b$ și $a=b$ pentru $(\forall)$ $a,b\in A$

Fie $a,b\in A$

-> e ireflexivă?

$a<a \Leftrightarrow a\leq a$ și $a\neq a$ nu se pot întâmpla simultan, deci „$<$" - ireflexivă

-> e asimetrică?

Pentru orice $a,b\in A$ nu pot să coexiste $a<b$ și $b<a$, dar vom presupune că pot

$$\left.\begin{array}{l} a<b \Leftrightarrow a\leq b,\ a\neq b \\ b<a \Leftrightarrow b\leq a,\ b\neq a \\ \text{„}\leq\text{" antisimetrică} \Rightarrow a=b \end{array}\right\} \text{ⅅ și deci „}<\text{" - asimetrică}$$

-> e tranzitivă?

$$\left.\begin{array}{l} a<b \Leftrightarrow a\leq b,\ a\neq b \\ b<c \Leftrightarrow b\leq c,\ b\neq c \\ \text{„}\leq\text{" tranzitivă} \end{array}\right\} \Rightarrow a\leq c \Leftrightarrow a<c,\ a\neq c$$

Dacă $a=c \Rightarrow a\leq b\leq a \Rightarrow a=b$ ⅅ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ singura posibilitate este $a\neq c$, ceea ce înseamnă că „$<$"- tranzitivă

Așadar „$<$" este relație de ordine strictă.