Examen la Cercetări operaţionale seria 31

Cristian Niculescu

13 ianuarie 2021

1) Fie sistemul primal:

$$\begin{cases} \begin{array}{rrrcl} -3x_1 & +4x_2 & +8x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & +ix_2 & +2x_3 & = & 8 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \geq & 7 \end{array} \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

a) Scrieţi sistemul dual.
b) Care dintre cele 2 sisteme este compatibil şi care este incompatibil? Justificaţi răspunsul.

2) Rezolvaţi prin metoda celor 2 faze:

$$\begin{cases} \inf\,(10x_1 + x_2) \\ 36x_1 - x_2 + x_3 = i \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

3) Fie problema:

$$\begin{cases} \inf\,(-2x_1 - x_2) \\ x_1 + x_2 + x_3 = i \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 80 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

a) Rezolvaţi problema.
b) Reoptimizaţi pentru $b = \begin{pmatrix} 36 - i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Înlocuiţi i cu numărul corespunzător din următoarea listă:
ALBU MIHAI-PAVEL 1
ALECU FLORIN-GABRIEL 2
ANGHELESCU DIANA-LIVIA 3
APOSTOL CRISTIANA-CLAUDIA 4
AVRAMESCU ROBERT-VALENTIN 5
BALTATESCU ELENA-ECATERINA 6

URMUZACHE
Ştefan-Bogdan
grupa 312

Examen CO

$i = 69$

(2) $b = \begin{pmatrix} 69 \\ -1 \end{pmatrix} \not\geq 0$, înmulțim ecuația 2 cu -1

$$\Rightarrow \begin{cases} \inf(10x_1 + x_2) \\ 36x_1 - x_2 + x_3 = 69 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 36 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Faza I

$$\begin{cases} \inf(x_5) \\ 36x_1 - x_2 + x_3 = 69 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 36 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = (a^3, a^5) = I_2 \Rightarrow B^{-1} b = I_2 \begin{pmatrix} 69 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow B$ primal admisibilă

			0	0		0	
c'_B	VB	VVB	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	69	36	-1	1	0	0
1	$\leftarrow x_5$	1	1	-1	0	-1	1
	z'	1	1	-1	0	-1	0

$$z'_B = c'^T_B \bar{x}_B = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 69 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

- Test optim: nu e îndeplinit ($z_1^B - c_1 = 1 \not\leq 0$)
- Nu se aplică testul de optim infinit la faza I
- Criteriul de intrare în bază: $\max(z_1^B - c_1) = \max(1) \Rightarrow x_1$ intră
- Criteriul de ieșire din bază: $\min\left(\frac{69}{36}, \frac{1}{1}\right) = \frac{x_5^B}{y_{51}^B} = 1$

  pivotul e 1 $\Rightarrow x_5$ iese

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	33	0	35	1	36	-36
x_1	1	1	-1	0	-1	1
z'		0		0		

Faza II (eliminăm coloana x_5 și recalculăm linia z')

				1		0
c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	33	0	35	1	36
10	x_1	1	1	-1	0	-1
	z	10	0	-11	0	-10

$\bar{z}_B = c_B^T \bar{x}^B = (0 \quad 10)\begin{pmatrix} 33 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$

Testul de optim = îndeplinit

mulțimea soluțiilor optime este $P^* = \{(1, 0, 33, 0)\}$

cu $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 33$, $x_4^* = 0$

și valoarea optimă $= 10$

1)

a) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 2 \iff u_1 \\ x_1 + 69x_2 + 2x_3 = 8 \iff u_2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 7 \iff u_3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ arbitrar},\ x_3 \leq 0 \end{cases}$

Pt. x_1: $3u_1 - u_2 - 5u_3 \geq 0$

Pt. x_2: $-4u_1 - 69u_2 + 3u_3 = 0$

Pt. x_3: $-8u_1 - 2u_2 - 2u_3 \leq 0$

$u_1 \leq 0$

u_2 arbitrar

$u_3 \geq 0$

$2u_1 + 8u_2 + 7u_3 > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 3u_1 - u_2 - 5u_3 \geq 0 \\ -4u_1 - 69u_2 + 3u_3 = 0 \\ -8u_1 - 2u_2 - 2u_3 \leq 0 \\ u_1 \leq 0,\ u_2 \text{ arbitrar},\ u_3 \geq 0 \\ 2u_1 + 8u_2 + 7u_3 > 0 \end{cases}$

b) Primul sistem are soluția $(8,0,0) \Rightarrow$ primul este compatibil $\overset{TFM}{\Longrightarrow}$ sistemul dual este incompatibil

③ $\begin{cases} \inf(-2x_1 - x_2) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 69 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 80 \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,4} \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = (a^3 \ a^4) \Rightarrow B^{-1} b = I_2 \begin{pmatrix} 69 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ 80 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow B$ primal admisibilă

$\mathcal{B} = \{3, 4\}, \ R = \{1, 2\}$

c_B	VB	VVB	x_1 (−2)	x_2 (−1)	x_3	x_4
0	x_3	69	1	1	1	0
0	x_4	80	1	2	0	1
	z	0	2	1	0	0

$z^B = c_B^T x^B = (0 \ 0)\begin{pmatrix} 69 \\ 80 \end{pmatrix} = 0$

- Test optim: nu e îndeplinit $(z_1^B - c_1 = 2 \not\leq 0)$
- Test optim infinit nu e îndeplinit $(Y_K^B \not\leq 0, \forall K)$
- Criteriul de intrare în bază: $\max(2, 1) = 2 \Rightarrow x_1$ intră
- Criteriul de ieșire din bază: $\min\left(\frac{69}{1}, \frac{80}{1}\right) = 69 \Rightarrow x_3$ iese

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	69	1	1	1	0
x_4	11	0	1	−1	1
z	−138	0	−1	−2	0

- Test optim: îndeplinit

$x_1^* = 69$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 11$

Soluția optimă $= -138$

b) Reoptimizați pentru $b = \begin{pmatrix} 36-69 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se modifică VVB din ultimul tabel

$a^j = e^i \Rightarrow (B^{-1})^i = B^{-1} e^i = B^{-1} a^j = y_j^B$

$\begin{cases} a^3 = e^1 \\ a^4 = e^2 \end{cases} \Rightarrow B^{-1} = (y_3^B, y_4^B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\bar{x}^B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ 34 \end{pmatrix}$

C_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
-2	x_1	-33	1	1	1	0
0	x_4	34	0	1	-1	1
	z	66	0	-1	-2	0

$(-2 \quad 0) \begin{pmatrix} -33 \\ 34 \end{pmatrix} = 66$

$\bar{x}^B = \begin{pmatrix} -33 \\ 34 \end{pmatrix} \not\geq 0 \Rightarrow$ testul de optim nu e îndeplinit

$\bar{x}_1^B = -33 < 0$, $\begin{cases} y_{11}^B = 1 \geq 0 \\ y_{12}^B = 1 \geq 0 \\ y_{13}^B = 1 \geq 0 \\ y_{14}^B = 0 \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ testul de incompatibilitate este îndeplinit

$\Rightarrow$ problema nu are soluție admisibilă

5