TEORIA MĂSURII

SEMINAR

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{ F \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mid F \text{ închisă} \})$$

Dem:

Fie $\mathcal{A}$ σ-algebră în $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{D}$ = mulțimea deschișilor

$\mathcal{I}$ = mulțimea închișilor

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \iff \mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\substack{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-alg în } \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)}} \mathcal{A} = \bigcap_{\substack{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-alg în } \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)}} \mathcal{A} = \checkmark$$

Propoziție

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(S)$

$S = \{ [a,b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b \}$

Dem:

Fie $\mathcal{A}$ o σ-alg. în $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Claim:

$S \subseteq \mathcal{A} \iff \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$

($\mathcal{D}$ = mulțimea deschișilor)

Temă: Pe $\mathbb{R}$, toți deschișii sunt reuniuni cel mult numărabile de intervale deschise disjuncte

Proof: „<=" $D \subseteq A$ (știu)

$$[a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a-\frac{1}{n}, b\right)$$

$\left(a-\frac{1}{n}, b\right) \in A$

A e σ-alg.

$\Rightarrow [a,b) \in A$

$(\forall)$ a, b ca în def. lui S

Rezultă $S \subseteq A$

„=>" $S \subseteq A$ (știu)

Fie $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ deschisă

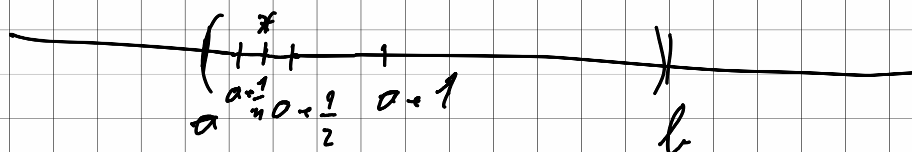
Cf. lemei, $(\exists)$ $a_n, b_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$a_n < b_n$

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

Claim $(a, b) \in A$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbb{R}$
$a < b$

Proof:

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right)$$



Știm

$\left[a + \frac{1}{n}, b\right) \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, $(\forall) n$ $\Rightarrow$

$\mathcal{A}$ e σ-algebră

$\Rightarrow (a, b) \in \mathcal{A}$

Am demonstrat că $(a_n, b_n) \in \mathcal{A}$, $(\forall) n$

Atunci $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \in \mathcal{A}$

Deci $D \subseteq \mathcal{A}$

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \iff \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$

Concluzia ca pe prima pagină

(a, b) în funcție de $(\cdot, \cdot]$

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right]$$

$[a, b]$ în funcție de $(\cdot, \cdot)$

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

Măsuri Delta Dirac

Def: Fie $a \in X$ și

$$\delta_a : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

Arătați că δ_a e măsură

$\delta_a(\emptyset) = 0$, căci $a \notin \emptyset$

Fie $(A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ disjuncte

I $(\exists)\ n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a \in A_{n_0}$

$$\delta_a(A_{n_0}) = 1$$

$$\delta_a(A_m) = 0, \ (\forall)\ n \neq m$$

$$\delta_a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \quad , \quad \text{căci}$$

$$a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_a(A_n) = 1$$

II $(\forall)\ n \in \mathbb{N} \quad a \notin A_n$

Echivalent $a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\delta_a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

$$\delta_a(A_n) = 0, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N} \qquad \square$$

Proprietate: $\delta_a(\{a\}) = 1$

<u>Temă</u> $a, b \in X$

$$\delta_a + \delta_b : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty)$$

măsură

Continuitatea în jos a unei măsuri (finite)

Remember:

Continuitatea <u>în sus</u> a unei măsuri

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. măsurabil

$(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ a.î.

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \ (\forall) \ n \in \mathbb{N}$$

(adică $(A_n)_n \nearrow$)

Atunci

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Propoziție:

Fie $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$

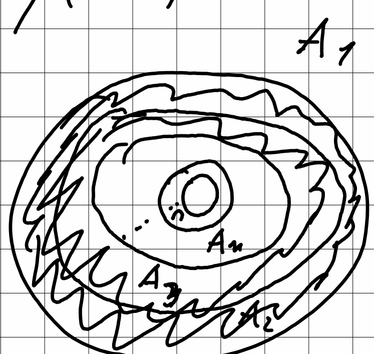
$$A_{n+1} \subseteq A_n, \ (\forall)\ n$$

(adică $(A_n)_n \searrow$)

$\mu(A_1) < \infty$

Atunci:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$



Dem:

Fie $B_1 = A_1 \setminus A_1$

$= \emptyset$

$B_2 = A_1 \setminus A_2$

$B_3 = A_1 \setminus A_3$

$\vdots$

$B_n = A_1 \setminus A_n$

Remarcăm

$$\emptyset = B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots \subseteq B_n \subseteq \dots$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)$$

$$= A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

De ce?

- $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_1$

$[\ A \subseteq B \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)\ ]$

- $\mu(A_1) < \infty$

La fel,

$$\mu(B_n) = \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n),$$
$$(\forall) n$$

Deci

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) =$$

$$= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) =$$

$$= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A_1) - \mu(A_n)\right)$$

$$= \cancel{\mu(A_1)} - \cancel{\mu(A_1)} + \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda((0,\infty) \cup (-\infty,-1]) +$$

$$+ \lambda((-1,0]) \quad ✓$$

$$\infty = \infty + 1$$

$$\lambda((-1,0]) = \lambda(\mathbb{R}) - \lambda((0,\infty) \cup (-\infty,-1])$$

$$1 = \infty - \infty$$

PROSTIE

Def (Măsură exterioară)

$(X, \mathcal{A})$ sp. măsurabil

$\mu^* : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty)$ măs. exterioară dacă:

① $\mu^*(\emptyset) = 0$

② $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

③ (subaditivitate)

$(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Pentru simplitate, luăm $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$

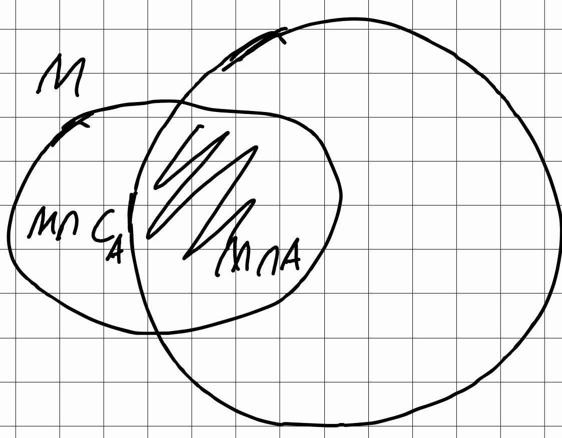
Def Mulțime măsurabilă în raport cu μ^*

$M \subseteq \mathcal{P}(X)$ e măsurabilă în raport cu μ^* dacă

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap C_A)$$

„$\geq$"

$(\forall)\, A \in \mathcal{P}(X)$



Propoziție:

$M \in \mathcal{P}(X)$

Dacă $\mu^*(M) = 0$ sau $\mu^*(C_M) = 0$,

atunci M e măsurabilă.

Dem:

Fie $A \in \mathcal{P}(X)$

Vreau

$$\mu^*(M) \geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap C_A) \quad (1)$$

I $\left.\begin{array}{l} \mu^*(M) = 0 \\ M \cap A \subseteq M \\ M \cap C_A \subseteq M \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \mu^*(M \cap A) = 0 \\ \mu^*(M \cap C_A) = 0 \end{cases}$,

deci (1) e satisfăcută

Rezultă M măsurabilă

$M \in \mathcal{M}(\mu^*)$

II $\quad \mathcal{M}(\mu^*)$ este σ - algebră

Conform I , $C_M \in \mathcal{M}(\mu^*)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow M \in \mathcal{M}(\mu^*)$

$\square$

<u>Propoziție</u> $\quad (\mathbb{R}, \mathcal{M}(\lambda^*), \lambda)$

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ numărabilă

Atunci $A \in \mathcal{M}(\lambda^*)$ și $\lambda(A) = 0$

Dem: $\quad$ Fie $A = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x_n\}}_{\substack{\text{închisă,} \\ \text{deci în } \mathcal{B}(\mathbb{R})}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad x_n \neq x_m, \ (\forall) n \neq m$$

Cum $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(\lambda^*)$, A e măsurabilă Lebesgue

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x_n\}) = 0,$$

căci $\lambda(\{x\}) = 0, \ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$

Dem. că $\lambda(\{x\}) = 0, \ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

$$\{x\} \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon), \ (\forall)\ \varepsilon > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\{x\}) \leq \lambda((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = 2\varepsilon, \ (\forall)\ \varepsilon > 0$$

În final, $\lambda(\{x\}) = 0$ $\square$

Propoziție: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^*)$

Dem. că

$$\lambda^*(M) = \inf \{ \lambda(D) \mid D \text{ deschis}, M \subseteq D \}$$

Dem:

Clar $\lambda^*(M) \leq \inf \{ \lambda(D) \mid D \text{ deschis}, M \subseteq D \}$

Fie $\varepsilon > 0$. Din definiția lui λ^*,

$(\exists)$ $I_1, I_2, \dots I_n, \dots$ intervale deschise a.î.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \geq \lambda^*(M) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) - \varepsilon$$

$$M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Fie $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ mulțime deschisă.

λ e subaditivă $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda(D) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \lambda^*(M) + \varepsilon$$

$$\lambda^*(M) \leq \lambda(D) \leq \lambda^*(M) + \varepsilon,$$

Atunci $\inf\{\lambda(D) \mid D \text{ deschis}, M \subseteq D\} \leq$

$$\leq \lambda^*(M) + \varepsilon,$$

$(\forall)\ \varepsilon > 0$.

În final, $\lambda^*(M) = \inf\{\dots\}$ $\square$

Temă:

Fie $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^*)$

$(\forall)\ A \subseteq \mathcal{P}(X)$

$(\exists)\ B \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a.î.

$$m^*(A) = m(B)$$

Hint. folosim prop. anterioară și un șir de deschiși $U_n \supseteq M$ a.î.

$$\lambda(U_n) \longrightarrow \lambda^*(M)$$