Mihoci Valentina
Grupa 311
Seria 31

8.11.2022

Tema Laborator Statistică

SIMULARE V.A.

! Fie X o v.a. având o repartiție continuă.
Dacă $U \sim Unif(0,1)$, F este fct. de repartiție a v.a. continue. Atunci $\boxed{X = F^{-1}(U)}$ are repartiția dată de funcția de repartiție.

$$\begin{cases} F = \text{c.d.f (fct. de repartiție)} \\ f = \text{p.d.f (}\underbrace{\text{fct. de masă}}_{\text{discret}} \mid \underbrace{\text{densitate}}_{\text{continuu}}\text{)} \end{cases}$$

Construiți un algoritm pentru simularea v.a. X în următoarele cazuri:

9) $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{\alpha(\alpha+x)}, & 0 \le x < \alpha \\ 1 - \dfrac{\alpha^2}{x(\alpha+x)}, & x \ge \alpha \end{cases}$$

$$\underset{\text{fct. de densitate}}{F'(x) = f(x)} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x(2\alpha+x)}{\alpha(\alpha+x)^2}, & 0 < x \le \alpha \\ \dfrac{\alpha^2(\alpha+2x)}{x^2(\alpha+x^2)}, & x > \alpha \end{cases}$$

PRECIZARE: Am greșit ceva data trecută la ex. acesta.

SOL: Fie $U \sim Unif(0,1)$. Dacă $X = F^{-1}(U)$ înseamnă că $x = F^{-1}(u)$, $\forall x$, ceea ce se reduce la a rezolva ecuația $u = F(x)$.

I. $u = 0 \Rightarrow$ nu se poate pt. că $u \in (0,1)$

II. $u = \dfrac{x^2}{\alpha(\alpha+x)} \Leftrightarrow x^2 = u\alpha(\alpha+x) \Leftrightarrow x^2 - u\alpha x - \alpha^2 u = 0$

$$x^2 - \alpha u x - \alpha^2 u = 0$$

$$\Delta = u^2\alpha^2 + 4\alpha^2 u = \alpha^2(u^2+4u)$$

$$x_{1,2} = \frac{u\alpha \pm \alpha\sqrt{u^2+4u}}{2} = \frac{\alpha(u \pm \sqrt{u(u+4)})}{2}$$

$$u^2 < u^2 + 4u \Rightarrow u < \sqrt{u^2+4u} \Rightarrow u - \sqrt{u^2+4u} < 0.$$

Cum $x \geq 0 \Rightarrow x = \dfrac{\alpha(u+\sqrt{u(u+4)})}{2}$, $\underbrace{F(0) \leq F(x) < F(\alpha)}$ $\boxed{0 \leq u < 1/2}$

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(x) = u \\ F(\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha^2}{\alpha(\alpha+\alpha)} = 1 - \dfrac{\alpha^2}{2\alpha^2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

III. $u = 1 - \dfrac{\alpha^2}{x(\alpha+x)} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{x(\alpha+x)} = 1-u \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = (1-u)(x\alpha + x^2) \Leftrightarrow \alpha^2 = (1-u)\alpha x + (1-u)x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-u)x^2 + (1-u)\alpha x - \alpha^2 = 0$$

$$\Delta = (1-u)^2\alpha^2 + 4\alpha^2(1-u) = \alpha^2(1-u)[1-u+4] =$$

$$= \alpha^2(1-u)(5-u) = \alpha^2(1-u)[(1-u)+4]$$

$$x_{1,2} = \frac{-(1-u)\alpha \pm \alpha\sqrt{(1-u)[(1-u)+4]}}{2(1-u)} =$$

$$= -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\alpha\sqrt{(1-u)[(1-u)+4]}}{2(1-u)}$$

Cum $x > 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha\sqrt{(1-u)[(1-u)+4]}}{2(1-u)}$, $u \geq F(\alpha)$ $\boxed{u \geq 1/2}$

$\boxed{U \sim Unif(0,1) \Rightarrow 1-U \sim Unif(0,1)}$ putem scrie

deci
$$\boxed{X = \begin{cases} \dfrac{\alpha(U+\sqrt{U(U+4)})}{2}, & 0 \leq U < 1/2 \\ -\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha\sqrt{U(U+4)}}{2(U)}, & 1/2 \leq U < 1 \end{cases}}$$

Algoritm:

1) Generez $U \sim Unif(0,1)$

2) Dacă $(0<U \,\&\, U<1/2)$ atunci $X = \dfrac{\alpha U + \sqrt{U(U+4)}}{2}$

altfel $X = -\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha\sqrt{U(U+4)}}{2U}$

24) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2}, & 2 \le x \le 3 \\ \dfrac{2-\frac{x}{3}}{2}, & 3 < x \le 6 \end{cases}$$

PRECIZARE: Am greșit ceva data trecută la acest exercițiu.

$\boxed{\text{SOL}}$: $f(x)=$ fct. de densitate a lui X

$X \sim f$; $F(x) = ?$ (fct. de repartiție)

I. Dacă $x<2$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

II. Dacă $x \in [2,3]$, $F(x) = \int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int_{2}^{x} \frac{t-2}{2}\,dt = 0 + \left.\frac{\frac{t^2}{2} - 2t}{2}\right|_2^x =$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{2x}{2} - \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} + \frac{2\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}} = \frac{x^2}{4} - x + 1 = \frac{x^2-4x+4}{4} =$$

$$= \frac{(x-2)^2}{4}$$

III. Dacă $3 < x \le 6$, $F(x) = \int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int_{2}^{3} \frac{t-2}{2}\,dt + \int_{3}^{x} \frac{2-\frac{t}{3}}{2}\,dt =$

$$= \left(\frac{t^2}{4} - t\right)\Big|_2^3 + \int_3^x \frac{6-t}{6}\,dt = \left(\frac{9}{4} - 3 - \frac{4}{4} + 2\right) + \left.\frac{6t - \frac{t^2}{2}}{6}\right|_3^x =$$

$$= \left(\frac{5}{4} - 1\right) + \frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} - \frac{x^2}{12} - \frac{\cancel{6}\cdot 3}{\cancel{6}} + \frac{\cancel{9}\,3}{2\cdot\cancel{6}\,2} = \frac{5}{4} - 1 + x - \frac{x^2}{12} - 3 + \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{8}{4} - 4 + x - \frac{x^2}{12} = 2 - 4 + x - \frac{x^2}{12} = -\frac{x^2}{12} + x - 2.$$

IV. Dacă $x > 6$, $F(x) = \int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int_{2}^{3} \frac{t-2}{2}\,dt + \int_{3}^{6} \frac{6-t}{3}\,dt + \int_{6}^{x} 0\,dt =$

$$= 0 + \left(\frac{t^2}{4} - t\right)\Big|_2^3 + \left(t - \frac{t^2}{12}\right)\Big|_3^6 + 0 =$$

$$= \frac{9}{4} - 3 - \frac{4}{4} + 2 + 6 - \frac{\cancel{36}^{3}}{\cancel{12}} - 3 + \frac{9}{12} =$$

$$= {}^{3/}\frac{5}{4} + \frac{9}{12} - 3 + 2 + \cancel{6} - \cancel{3} - \cancel{3} = \frac{15+9}{12} - 1 = \frac{24}{12} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Deci, fct. de repartiție este:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{(x-2)^2}{4}, & 2 \le x \le 3 \\ -\frac{x^2}{12} + x - 2, & 3 < x \le 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Fie $U \sim Unif(0,1)$. Dacă $X = F^{-1}(U)$ înseamnă că $x = F^{-1}(u), \forall x$, ceea ce se reduce la a rezolva ecuația $u = F(x)$.

- $u = 0 \Rightarrow$ nu se poate pt. că $u \in (0,1)$
- $u = \frac{(x-2)^2}{4} \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4u \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4u = 0$

$$\Delta = 16 - 16(1-u) = 16(\cancel{1} - \cancel{1} + u) = 16u$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{u}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{u}.$$

Cum $x \geq 2 \Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{u}$, $F(2) < F(x) < F(3)$

$$\boxed{0 < u \le 1/4}$$

- $u = -\frac{x^2}{12} + x - 2 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 24 - 12u = 0$

$$x^2 - 12x + 24 + 12u = 0$$

$$\Delta = 144 - 4\cdot 12(2+u) = 144 - 48(2+u) =$$
$$= 48(3-2-u) = 48(1-u)$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{48(1-u)}}{2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{3(1-u)}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{3(1-u)}$$

Cum $x \in [3,6) \Rightarrow x = 6 - 2\sqrt{3(1-u)}$, $1/4 < u < 1$.

• $u = 1 \Rightarrow$ nu se poate pt. că $u \in (0,1)$

Cum $U \sim Unif(0,1) \Rightarrow 1-U \sim Unif(0,1)$, și vom avea

$$\boxed{X = \begin{cases} 2+2\sqrt{U}, & 0 < U \leq 1/4 \\ 6-2\sqrt{3U}, & 1/4 < U < 1 \end{cases}}$$

Algoritm:

1) Generez $U \sim Unif(0,1)$

2) Dacă $(0 < U \leq 1/4)$ atunci $X = 2+2\sqrt{U}$

altfel $X = 6-2\sqrt{3U}$

14) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, unde $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. repartizate

a) $Exp(\lambda)$

$\boxed{SOL}$: Cum $X_1, \dots, X_n$ iid repartizate $\sim Exp(\lambda)$, atunci $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n, \lambda)$

$$X_i \sim Exp(\lambda), \lambda > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \\ F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \end{cases}$$

Fie $U_i \sim Unif(0,1)$. Dacă $X_i = F^{-1}(U_i)$ înseamnă că $x_i = F^{-1}(u_i)$, $\forall x_i$, ceea ce se reduce la rezolvarea ecuației $u_i = F(x_i)$.

- $u_i = 0 \Rightarrow$ nu se poate căci $u_i \in (0,1)$
- $u_i = 1 - e^{-\lambda x_i} \Leftrightarrow e^{-\lambda x_i} = 1 - u_i \Leftrightarrow -\lambda x_i = \ln(1-u_i)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-u_i)$.

Cum $1 - U_i \sim Unif(0,1)$, vom avea:

$$\boxed{X_i = -\frac{1}{\lambda} \ln U_i}$$

Deci, tot ce ne rămâne de făcut este să generăm $U_1, \dots, U_n \sim Unif(0,1)$, să ne creăm variabilele aleatoare $X_i = -\frac{1}{\lambda} \ln U_i$, $i = \overline{1,n}$ și apoi să găsim $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \ln(U_i)$

Algoritm:

1) Generez $U_1, \dots, U_n \sim Unif(0,1)$
2) $X = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \ln(U_i)$

REMEMBER

SIMULARE V.A. DISCRETE

Fie X o v.a. discretă cu repartiția:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix} \qquad p_i > 0, \forall i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Pentru a simula valori din v.a. X folosind metoda inversă procedăm altfel:

(algoritm) (*)

1) Generăm $U \sim Unif(0,1)$
2) $$X = \begin{cases} x_1, & U < p_1 \\ x_2, & p_1 \le U < p_1 + p_2 \\ \dots \\ x_j, & \sum_{i=1}^{j-1} p_i \le U < \sum_{i=1}^{j} p_i \end{cases}$$

Dacă F este fct. de repartiție a v.a. X atunci algoritmul ⊛ devine:

$$\boxed{X = x_j \quad \text{pentru } F(x_{j-1}) \leq U < F(x_j)}$$

14) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, unde $X_1, \dots, X_n$ iid. repartizate

b) $Pois(\lambda)$

$\boxed{\text{SOL}}$: $X_i \sim Pois(\lambda) \Rightarrow X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & \dots \\ - & - & - & - & \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^j}{j!} & \dots \end{pmatrix}_{j \geq 0}$

$$\mathbb{P}(X_i = j) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^j}{j!} = p_j, \quad j \geq 0$$

Știm $\boxed{p_{j+1} = \frac{\lambda}{k+1} \cdot p_j}$, $\forall j \geq 0$

(am demonstrat-o la sfârșit de tot în ac. pdf)

Așadar, pentru a genera o v.a. $X_i \sim Pois(\lambda)$ avem următorul ALGORITM:

PAS1: Generez $U \sim Unif(0,1)$

PAS2: Inițializez $\begin{cases} i \leftarrow 0 \\ p \leftarrow e^{-\lambda} \\ F \leftarrow p \end{cases}$

PAS3: Dacă $U < F$, $X = i$, $\boxed{\text{STOP}}$

PAS4: $\begin{cases} p \leftarrow \frac{\lambda p}{i+1} \\ F \leftarrow F + p \\ i \leftarrow i+1 \end{cases}$

PAS5: Mergi la Pas 3

Algoritm (pt. $X=\sum_{i=0} X_i$):

1) Generez $U \sim Unif(0,1)$
2) Generez $X_i \sim Pois(\lambda)$
3) $X[i] \leftarrow X_i$

14) $X=\sum_{i=1}^{m} X_i$, unde $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. repartizate

c) Binom (m, p)

$\boxed{\text{SOL}}$: $X_i \sim Binom(n,p) \Rightarrow X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & m \\ \dots & \dots & \dots & C_n^k p^k \cdot q^{n-k} & \dots & \dots \end{pmatrix}_{\substack{k \geq 0 \\ k=\overline{0,n}}}$

$$\mathbb{P}(X_i = k) = C_n^k p^k \cdot q^{n-k} = p_k, \quad k \geq 0, \ k=\overline{0,n}$$

Știm $\boxed{p_{k+1} = \frac{m-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot p_k}$

(am demonstrat-o la sfârșit în acest pdf)

Așadar, pentru a simula o v.a. $X_i \sim Binom(n,p)$ avem următorul ALGORITM:

PAS1: Generez $U \sim Unif(0,1)$

PAS2: Inițializez $\begin{cases} c \leftarrow \frac{p}{1-p} \\ i \leftarrow 0 \\ prob \leftarrow (1-p) \\ F \leftarrow prob \end{cases}$

PAS3: Dacă $U < F$, atunci $X = i$, $\boxed{\text{STOP}}$

PAS4: $\begin{cases} prob \leftarrow \frac{c(n-i)}{i+1} \cdot prob \\ F \leftarrow F + prob \\ i \leftarrow i+1 \end{cases}$

PAS 5: Mergi la Pas 3.

Algoritm (pt. $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$):

1) Generez $U \sim Unif(0,1)$

2) Generez $X_i \sim Binom(n,p)$ (cu alg. anterior scris)

3) $X[i] \leftarrow X_i$.

(14) $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$, $X_1, X_2, \dots X_m$ i.i.d. repartizate

d) $Geom(p)$

SOL:

$$X_i \sim Geom(p) \Rightarrow X_i : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j & \dots \\ p & p\cdot q & p\cdot q^2 & \dots & p\cdot q^{j-1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(X_i = j) = p \cdot q^{j-1}, \forall j \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}(X_i = k) = 1 - \mathbb{P}(X > j-1) =$$

$= 1 - \mathbb{P}($„primele $j-1$ încercări sunt eșecuri"$) =$

$$= 1 - q^{j-1}, \forall j \geq 1.$$

Deci, folosind metoda inversă:

$$X_i = j \text{ pentru } 1 - q^{j-1} \leq U < 1 - q^j \quad (U \sim Unif(0,1))$$

$$\Leftrightarrow X_i = j \text{ pentru } -q^{j-1} \leq U - 1 < -q^j \;/\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X_i = j \text{ pentru } q^j < 1 - U \leq q^{j-1}}$$

Adică, $X_i = \text{Min}\{j \mid \underbrace{q^j < 1-U}\}$

luăm doar așa pt. că cealaltă parte oricum e irelevantă dacă ne dorim cel mai mic j

$q^j < 1-U \Leftrightarrow \ln q^j < \ln(1-U) \Leftrightarrow j \cdot \underbrace{\ln q}_{<0} < \ln(1-U) \Leftrightarrow$ pt. că $q = 1-p < 1$ ($\ln q < 0$)

$\Leftrightarrow j > \dfrac{\ln(1-U)}{\ln q}$

Cum $U \sim Unif(0,1) \Rightarrow 1-U \sim Unif(0,1)$, deci putem rescrie

$X_i = \text{Min}\{j \mid j > \dfrac{\ln U}{\ln q}\}$, ceea ce se poate rescrie ca:

$$X_i = \left[\frac{\log U}{\log q}\right] + 1.$$

formula clasa a 9-a: $\forall x \in \mathbb{R}$ avem $\boxed{[x] \leq x < [x]+1}$

Iar mai vrem $j > \dfrac{\ln U}{\ln q} \Rightarrow \left[\dfrac{\ln U}{\ln q}\right] < \dfrac{\ln U}{\ln q} < \underline{\left[\dfrac{\ln U}{\ln q}\right]+1}$

Deci cel mai mic j este $\left[\dfrac{\ln U}{\ln q}\right]+1$

Așadar, pentru a simula o v.a. $X_i \sim Geom(n,p)$ am următorul algoritm:

PAS 1: Generez $U \sim Unif(0,1)$

PAS 2: $X_i = \left[\dfrac{\log U}{\log(1-p)}\right] + 1$

Algoritm (pt. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$):

1) Generez $U \sim Unif(0,1)$
2) Generez $X_i \sim Geom(n,p)$
3) $X[i] \leftarrow$ ~~Sum~~ (X_i)

Din pdf-ul „Lab4-Simulare de v.a. discrete"

② . Repartitia Poisson $X \sim Pois(\lambda)$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & \dots \\ \dots & & & & \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^j}{j!} & \dots \end{pmatrix}, j \geq 0$$

Ideea centrală în folosirea metodei inverse este legată de folosirea următoarei relații de recurență:

$$\boxed{p_{j+1} = \frac{\lambda}{j+1} \cdot p_j, j \geq 0}$$

Dem:

I. Verificare: $\boxed{j=0}$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\lambda}{1} \cdot p_0 = \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda}{1} \\ p_1 = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^1}{1!} = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda}{1} \end{cases}$$

egale √

$\boxed{j=1}$:

$$\begin{cases} p_2 = \frac{\lambda}{2} \cdot p_1 = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda}{1} = \frac{\lambda^2\cdot e^{-\lambda}}{2} \\ p_2 = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^2}{2!} \end{cases}$$

egale √

II. Demonstrația:

Presupunem adevărată relația pentru $j=k$, și vom avea

$$p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} \cdot p_k, \text{ unde } p_k = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

Demonstrăm relația pentru $j=k+1$, și vom avea:

$$p_j = p_{k+2} = \frac{\lambda}{k+1+1} \cdot p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+2} \cdot p_{k+1}$$

Vrem să arătăm că $p_{k+2} = \frac{\lambda}{k+2} \cdot p_{k+1}$.

$$\boxed{p_{k+2}} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k+1}}{(k+2)\cdot(k+1)!} = \frac{\lambda}{k+2} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k+1}}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{\lambda}{k+2} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \lambda^{k}}{(k+1)\cdot k!} = \frac{\lambda}{k+2} \cdot \frac{\lambda}{k+1} \cdot \underbrace{\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!}}_{p_k} =$$

$$= \frac{\lambda}{k+2} \cdot \underbrace{\frac{\lambda}{k+1} \cdot p_k}_{p_{k+1} \text{ (pas. de inducție)}} = \boxed{\frac{\lambda}{k+2} \cdot p_{k+1}} \checkmark$$

Algoritm

PAS1: Generez U ($\sim Unif(0,1)$)

PAS2: Inițializez $\underset{\text{contor}}{i=0}$, $\underset{\text{prob. curentă}}{p=e^{-\lambda}}$, $\underset{\text{valoarea fct. de repartiție în pct. curent}}{F=p}$

PAS3: Dacă $U<F$ atunci $X=i$ $\boxed{\text{STOP}}$

PAS4: $p=\frac{\lambda p}{i+1}$, $F=F+p$, $i=i+1$

PAS5: Mergi la PAS3.

③. Repartiția binomială $X \sim Bin(n,p)$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & C_n^k p^k \cdot q^{n-k} & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} k\geq 0 \\ k=\overline{0,n} \end{matrix}$$

Similar, ideea centrală în folosirea metodei inverse este legată de o relație de recurență:

$$\boxed{p_{j+1} = \frac{n-j}{j+1} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot p_j}$$

Dem:

I. Verificarea:

$\boxed{j=0}$: $\begin{cases} P_1 = \dfrac{n-0}{0+1} \cdot \dfrac{p}{1-p} \cdot P_0 = \dfrac{n \cdot p}{1-p} \cdot C_n^0 p^0 q^{n-0} = \dfrac{n \cdot p}{1-p} \cdot 1 \cdot 1 \cdot q^n \\ P_1 = C_n^1 p^1 \cdot q^{n-1} = \dfrac{\cancel{n!}\, n}{\cancel{(n-1)!} \cdot 1!} \cdot p \cdot q^{n-1} = n \cdot p \cdot q^{n-1} \end{cases}$ $\Big| \to$ EGALE ✓

$P_1 = \dfrac{n \cdot p}{1-p} \cdot 1 \cdot q^n = \dfrac{n \cdot p}{q} \cdot q^n = n \cdot p \cdot q^{n-1}$

$\boxed{j=1}$: $\begin{cases} P_2 = \dfrac{n-1}{1+1} \cdot \dfrac{p}{1-p} \cdot P_1 = \dfrac{n-1}{2} \cdot \dfrac{p}{\cancel{1-p}} \cdot n \cdot p \cdot q^{\cancel{n-1}\; n-2} = \dfrac{p^2 (n-1) n q^{n-2}}{2} \\ P_2 = C_n^2 p^2 q^{n-2} = \dfrac{\overset{n(n-1)}{\cancel{n!}}}{\cancel{(n-2)!} \cdot 2!} p^2 q^{n-2} = \dfrac{n(n-1) p^2 q^{n-2}}{2} \end{cases}$

II. Demonstrația

Presupunem adevărată relația pentru $j = k$, și vom avea

$$P_{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot P_k, \quad P_k = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Demonstrăm relația pentru $j = k+1$, adică avem de demonstrat că $P_{k+2} = \dfrac{n-(k+1)}{(k+1)+1} \cdot \dfrac{p}{1-p} \cdot P_{k+1}$.

$$\boxed{P_{k+2}} = C_n^{k+2} p^{k+2} \cdot q^{n-k-2} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-k-2)!} \cdot (k+2)!} \cdot p^{k+2} q^{n-k-2} =$$

$$= \frac{(n-k-1)(n-k)(n-k+1)\ldots n}{(k+2)(k+1)!} \cdot p^{k+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot q^{n-k-1} =$$

$$= \frac{(n-(k+1))}{(k+2)} \cdot \frac{(n-k)(n-k+1)\ldots n}{(k+1)!} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{p}{q} p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \frac{(n-(k+1))}{(k+2)} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{(n-k)}{k+1} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{(n-k+1)\ldots n}{k!} \cdot p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{(m-(k+1))}{k+2} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{(n-k)}{k+2} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \underbrace{C_n^k p^k q^{n-k}}_{p_k} =$$

$$= \frac{(m-(k+1))}{k+2} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \underbrace{\frac{(n-k)}{k+2} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot p_k}_{p_{k+1} \text{ (pas. de inducție}} =$$

$$= \boxed{\frac{(m-(k+1))}{k+2} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot p_{k+1}} \checkmark$$

<u>Caz particular</u>

Dacă $X \sim \underbrace{Unif}_{\text{unif. pe caz discret}}(\{1;2;\ldots;n\})$ atunci:

$X = j$ pentru $\frac{j-1}{n} \leq U < \frac{j}{n}$, ceea ce implică

$$\boxed{X = \underbrace{[n \cdot U]}_{\text{parte întreagă}} + 1}$$

TEMĂ: Justificați relația de mai sus, apoi creați o funcție în R care implementează relația de mai sus. Generați 10^6 valori din v.a. X (alegeți voi un n particular, $n \geq 10$) și faceți histograma comparativă a acestor valori cu cele generate de funcția <u>sample</u> din R.

$\boxed{\text{SOL}}$: Dacă $X \sim Unif(\{1;2;\ldots;n\})$ știm că

$$\mathbb{P}(X=j) = \frac{1}{m} \Rightarrow \sum_{i=0}^{j-1} \mathbb{P}(X=j) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{m} = \frac{j-1}{m}, \quad \forall j \geq 1.$$

Folosind metoda inversă avem

$$X = j \quad \text{pentru} \quad F(x_{j-1}) \leq U < F(x_j) \iff$$

$$\iff X = j \quad \text{pentru} \quad \sum_{i=0}^{j-1} \mathbb{P}(X=i) \leq U < \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}(X=i) \iff$$

$$\iff X = j \quad \text{pentru} \quad \frac{j-1}{n} \leq U < \frac{j}{n} \Big/ \cdot n \iff$$

$$\iff X = j \quad \text{pentru} \quad j-1 \leq U \cdot n < j$$

Adică, $X = \min\{j \mid j-1 \leq U \cdot n < j\}$.

Vrem cel mai mic j pentru care $j-1 \leq U \cdot n < j$.

Știm însă din clasa a 9-a următoarea def. pentru partea întreagă a unui număr real x:

$$\left.\begin{array}{l} [x] \leq x < [x]+1 \\ \text{Noi avem } j-1 \leq U \cdot n < j \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} [x] = j-1 \\ x = U \cdot n \\ [x]+1 = j \end{cases}$$

Deci $j = [U \cdot n] + 1 \Rightarrow \boxed{X = [U \cdot n] + 1}$