Tema 3

Exercițiul 1

Calculați $\mathbb{P}(X < \mathbb{E}[X])$ știind că X este o variabilă aleatoare repartizată binomial cu $X \notin \mathbb{N}$ și $\mathbb{E}[X] = 2Var[X]$.

Exercițiul 2

Fie E o populație cu N indivizi dintre care N_1 sunt de tipul T. Efectuăm extrageri succesive, fără întoarcere, din E până obținem n, $1 \leq n \leq N_1$, indivizi de tipul T și notăm cu Z variabila aleatoare care reprezintă numărul de extrageri necesare. Determinați repartiția lui Z, $\mathbb{E}[Z]$ și $Var[Z]$.

Exercițiul 3

Fie X şi Y două v.a. independente repartizate Poisson de parametrii λ şi respectiv μ. Determinaţi legea (repartiţia) condiţionată a lui X la $X + Y = n$.

Exercițiul 4

Numărul de clienţi care intră în magazinul Unirea pe durata unei zile este o v.a. de medie 50. Suma cheltuită de fiecare dintre clienţii magazinului poate fi modelată ca o v.a. de medie 30 RON. Presupunem că sumele cheltuite de clienţi, ca v.a., sunt independente între ele şi independente de numărul total de clienţi care intră în magazin într-o zi dată. Care este media cifrei de afaceri a magazinului în ziua considerată ?

Exercițiul 5

Ştim că intr-un lot de 5 tranzistori avem 2 care sunt defecţi. Tranzistorii sunt testaţi, unul cate unul, pană cand cei doi tranzistori au fost identificaţi. Fie N_1 numărul de teste pentru identificarea primului tranzistor defect şi N_2 numărul de teste suplimentare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Scrieţi un tablou in care să descrieţi legea cuplului (N_1, N_2). Calculaţi $\mathbb{E}[N_1]$ şi $\mathbb{E}[N_2]$.

Exercițiul 6

Tabloul următor reprezintă legea cuplului (X, Y): unde putem considera că X este numărul de copii dintr-o familie şi Y este numărul de televizoare din acea familie (am considerat numai familii cu $1 - 3$ copii şi cu $1 - 3$ televizoare).

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0.22	0.11	0.02
2	0.2	0.15	0.1
3	0.06	0.07	0.07

Determinaţi:

a) Legile marginale ale lui X şi respectiv Y.

b) Media şi varianţa lui X şi respectiv Y.

c) Coeficientul de corelaţie dintre X şi Y.

d) Legea condiţionată a lui X la $Y = 2$ şi respectiv legea condiţionată a lui Y la $X = 2$.

e) Media şi varianţa acestor legi condiţionate.

Exercițiul 7

Fie (X, Y) un cuplu de variabile aleatoare (vector aleator) a cărui repartiţie este:

$X\backslash Y$	2	4	6
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0
3	0.05	0	0.05

a) Calculaţi $\mathbb{E}[Y]$ şi $Var(Y)$.

b) Determinaţi repartiţia v.a. $\mathbb{E}[Y|X]$ şi $Var(Y|X)$.

c) Verificaţi formula varianţei condiţionate:

$$Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}[Y|X]).$$

Tema 3

Soluții

Exercițiul 1

Calculați $\mathbb{P}(X < \mathbb{E}[X])$ știind că X este o variabilă aleatoare repartizată binomial cu $\mathbb{E}[X] \notin \mathbb{N}$ și $\mathbb{E}[X] = 2Var[X]$.

Dacă X este o variabilă aleatoare repartizată $\mathcal{B}(n,p)$ atunci $\mathbb{E}[X] = np$ iar $Var[X] = np(1-p)$. Din relația $\mathbb{E}[X] = 2Var[X]$ deducem

$$np = 2np(1-p)$$

ceea ce conduce la $p = \frac{1}{2}$ iar $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{2}$. Avem

$$\mathbb{P}(X < \mathbb{E}[X]) = \mathbb{P}(X < \frac{n}{2}) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{i} \frac{1}{2^n}.$$

Făcând schimbarea de variabilă $j = n - i$ în sumă obținem

$$\mathbb{P}(X < \frac{n}{2}) = \sum_{j=n-[\frac{n}{2}]}^{n} \binom{n}{n-j} \frac{1}{2^n}.$$

Cum $[x] \leq x < [x] + 1$ avem

$$[\frac{n}{2}] \leq \frac{n}{2} < [\frac{n}{2}] + 1$$

prin urmare $2[\frac{n}{2}] \leq n < 2[\frac{n}{2}] + 2$ și ținând cont de faptul că $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ găsim că $n = 2[\frac{n}{2}] + 1$.
Astfel $n - [\frac{n}{2}] = [\frac{n}{2}] + 1$ și

$$\mathbb{P}(X < \frac{n}{2}) = \sum_{j=n-[\frac{n}{2}]}^{n} \binom{n}{n-j} \frac{1}{2^n} = \sum_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{n} \binom{n}{n-j} \frac{1}{2^n} = \mathbb{P}(X > \frac{n}{2}).$$

Știm că

$$\mathbb{P}(X < \frac{n}{2}) + \mathbb{P}(X = \frac{n}{2}) + \mathbb{P}(X > \frac{n}{2}) = 1$$

ceea ce conduce la $\mathbb{P}(X < \frac{n}{2}) = \frac{1}{2}$ deoarece $\mathbb{P}(X = \frac{n}{2}) = 0$.

Exercițiul 2

Fie E o populație cu N indivizi dintre care N_1 sunt de tipul T. Efectuăm extrageri succesive, fără întoarcere, din E până obținem n, $1 \leq n \leq N_1$, indivizi de tipul T și notăm cu Z variabila aleatoare care reprezintă numărul de extrageri necesare. Determinați repartiția lui Z, $\mathbb{E}[Z]$ și $Var[Z]$.

Pentru a determina repartiția lui Z să notăm cu A_{k-1} evenimentul ca în primele $k-1$ extrageri să avem $n-1$ elemente de tip T, $n \geq 2$ și cu B_k evenimentul ca la a k-a extragere să fi obținut un element de tip T. În acest context, observăm că

$$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(A_{k-1} \cap B_k) = \mathbb{P}(A_{k-1})\mathbb{P}(B_k|A_{k-1}).$$

Pentru determinarea $\mathbb{P}(A_{k-1})$ să remarcăm faptul că ne aflăm în situația unei repartiții Hipergeometrice de parametrii N, N_1, $k-1$ ($\mathcal{H}(N, N_1, k-1)$ - într-o urnă avem N bile dintre care N_1 sunt albe și efectuăm $k-1$ extrageri fără întoarcere), astfel

$$\mathbb{P}(A_{k-1}) = \frac{\binom{N_1}{n-1}\binom{N-N_1}{k-n}}{\binom{N}{k-1}}.$$

După $k-1$ extrageri în care am găsit $n-1$ indivizi de tip T, în populație rămân $N-k+1$ indivizi dintre care N_1-n+1 sunt de tip T, prin urmare probabilitatea ca la a k-a extragere să avem un individ de tip T este

$$\mathbb{P}(B_k|A_{k-1}) = \frac{N_1-n+1}{N-k+1}$$

ceea ce conduce la

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(A_{k-1})\mathbb{P}(B_k|A_{k-1}) &= \frac{\binom{N_1}{n-1}\binom{N-N_1}{k-n}}{\binom{N}{k-1}} \frac{N_1-n+1}{N-k+1} \\
&= \frac{N_1!(N-N_1)!(k-1)!(N-k)!}{(n-1)!(N_1-n)!(k-n)!(N-N_1-k+n)!N!} = \frac{\binom{k-1}{n-1}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}}.
\end{aligned}$$

Pentru determinarea $\mathbb{E}[Z]$ avem

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=n}^{N} k \frac{\binom{k-1}{n-1}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}} = \frac{n}{\binom{N}{N_1}} \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n}\binom{N-k}{N_1-n}$$

deoarece $k\binom{k-1}{n-1} = n\binom{k}{n}$. Făcând schimbarea de variabilă $j = k+1$ în sumă obținem

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n}{\binom{N}{N_1}} \sum_{j=n+1}^{N+1} \binom{j-1}{n}\binom{(N+1)-j}{N_1-n} = \frac{n}{\binom{N}{N_1}} \sum_{j=n+1}^{N+1} \binom{j-1}{(n+1)-1}\binom{(N+1)-j}{(N_1+1)-(n+1)}$$

și cum (suntem în situația unei populații cu $N+1$ indivizi din care N_1+1 sunt de tip T și efectuăm extrageri fătă întoarcere până obținem $n+1$ astfel de indivizi - Z')

$$\sum_{j=n+1}^{N+1} \mathbb{P}(Z'=j) = \sum_{j=n+1}^{N+1} \frac{\binom{j-1}{(n+1)-1}\binom{(N+1)-j}{(N_1+1)-(n+1)}}{\binom{N+1}{N_1+1}} = 1$$

rezultă că

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n}{\binom{N}{N_1}} \sum_{j=n+1}^{N+1} \binom{j-1}{(n+1)-1}\binom{(N+1)-j}{(N_1+1)-(n+1)} = \frac{n}{\binom{N}{N_1}}\binom{N+1}{N_1+1} = \frac{n(N+1)}{N_1+1}.$$

În cazul determinării $Var[Z]$ vom începe prin a observa că

$$Var[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \mathbb{E}[Z(Z+1)] - \mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[Z]^2.$$

Calculul $\mathbb{E}[Z(Z+1)]$ este similar cu cel al mediei și avem

$$\mathbb{E}[Z(Z+1)] = \sum_{k=n}^{N} k(k+1)\frac{\binom{k-1}{n-1}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}} = \sum_{k=n}^{N} n(n+1)\frac{\binom{k+1}{n+1}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}}$$

deoarece $k(k+1)\binom{k-1}{n-1} = n(n+1)\binom{k+1}{n+1}$.
Efectuăm schimbarea de variabilă $j = k+2$ și găsim că

$$\mathbb{E}[Z(Z+1)] = \sum_{k=n}^{N} n(n+1)\frac{\binom{k+1}{n+1}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}} = \sum_{j=n+2}^{N+2} n(n+1)\frac{\binom{j-1}{n+1}\binom{(N+2)-j}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}}$$

și notând cu $M = N+2$, $M_1 = N_1+2$ și $m = n+2$ avem

$$\mathbb{E}[Z(Z+1)] = \frac{n(n+1)}{\binom{N}{N_1}} \sum_{j=m}^{M} \binom{j-1}{m-1}\binom{M-j}{M_1-m}.$$

Am văzut că

$$\sum_{j=m}^{M} \frac{\binom{j-1}{m-1}\binom{M-j}{M_1-m}}{\binom{M}{M_1}} = 1$$

prin urmare

$$\mathbb{E}[Z(Z+1)] = \frac{n(n+1)}{\binom{N}{N_1}}\binom{M}{M_1} = \frac{n(n+1)(N+1)(N+2)}{(N_1+1)(N_1+2)}$$

de unde

$$Var[Z] = \frac{n(N+1)(N-N_1)(N_1-n+1)}{(N_1+1)^2(N_1+2)}.$$

Exercițiul 3

Fie X şi Y două v.a. independente repartizate Poisson de parametrii λ şi respectiv μ. Determinaţi legea (repartiţia) condiţionată a lui X la $X+Y=n$.

Pentru legea condiţionată a lui X la $X+Y=n$ avem:

$$\mathbb{P}(X=k|X+Y=n)=\frac{\mathbb{P}(X=k,X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}=\frac{\mathbb{P}(X=k,Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\overset{indep.}{=}\frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

dacă $k\in\{0,1,\dots,n\}$ şi $\mathbb{P}(X=k|X+Y=n)=0$ in caz contrar.

Observăm că pentru a calcula legea condiţionată trebuie să găsim legea sumei $X+Y$. Pentru aceasta avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n)&=\mathbb{P}(X\in\Omega,X+Y=n)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}\{X=k\},X+Y=n\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k,X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k,Y=n-k)\\&\overset{indep.}{=}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)=\sum_{k=0}^{n}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\\&=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k}=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!},\end{aligned}$$

prin urmare $X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. Astfel găsim că

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k|X+Y=n)&=\frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}=\frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\times e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}\\&=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

deci $(X|X+Y=n)\sim\mathcal{B}\left(n,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

Exercițiul 4

Numărul de clienţi care intră în magazinul Unirea pe durata unei zile este o v.a. de medie 50. Suma cheltuită de fiecare dintre clienţii magazinului poate fi modelată ca o v.a. de medie 30 RON. Presupunem că sumele cheltuite de clienţi, ca v.a., sunt independente între ele şi independente de numărul total de clienţi care intră în magazin într-o zi dată. Care este media cifrei de afaceri a magazinului în ziua considerată ?

Fie N numărul de clienţi care intră in magazin şi fie X_k v.a. care reprezintă suma cheltuită de clientul k. Din ipoteză ştim că $\mathbb{E}[N]=50$, $\mathbb{E}[X_i]=30$, $X_i\perp\!\!\!\perp X_j$ şi $X_i\perp\!\!\!\perp N$ ($\perp\!\!\!\perp$ - semnul pentru independenţă). Putem observa că cifra de afaceri a magazinului este dată de v.a. $Z=\sum_{i=1}^{N}X_i$. Avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{cifrei de afaceri}] = \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right]\right] = \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n\right]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | N=n\right]\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_i | N=n\right]\right)\mathbb{P}(N=n) \\
&\overset{indep.}{=} \sum_{n\geq 1} n\mathbb{E}[X_1]\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}[X_1]\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N] \\
&= 30\times 50 = 1500,
\end{aligned}$$

prin urmare cifra de afaceri pe care o inregistrează magazinul in ziua respectivă este de 1500 RON.

Exercițiul 5

Ştim că intr-un lot de 5 tranzistori avem 2 care sunt defecţi. Tranzistorii sunt testaţi, unul cate unul, pană cand cei doi tranzistori au fost identificaţi. Fie N_1 numărul de teste pentru identificarea primului tranzistor defect şi N_2 numărul de teste suplimentare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Scrieţi un tablou in care să descrieţi legea cuplului (N_1, N_2). Calculaţi $\mathbb{E}[N_1]$ şi $\mathbb{E}[N_2]$.

Fie N_1 numărul de teste necesare pentru indentificarea primului tranzistor defect, şi N_2 numărul de teste suplimentare necesare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Cum sunt 5 tranzistori avem $0 \leq N_1 + N_2 \leq 5$. Dacă notăm cu T_s al s-lea tranzistorul, $1 \leq s \leq 5$, avem $\mathbb{P}((T_i, T_j)) = \frac{1}{\binom{2}{5}} = \frac{1}{10}$ deoarece tranzistorii au aceeaşi şansă să fie defecţi. Prin urmare

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_1, T_2)) = \frac{1}{10}, \\
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_1, T_3)) = \frac{1}{10}, \\
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 3) = \mathbb{P}((T_1, T_4) \cup (T_1, T_5)) = \frac{2}{10}, \ (N_1 = 1 \text{ şi } 2,\ 3,\ 4^e \text{ OK deci } 5 \text{ e defect}) \\
&\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_2, T_3)) = \frac{1}{10}, \\
&\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_2, T_4) \cup (T_2, T_5)) = \frac{2}{10}, \ (N_1 = 2 \text{ şi } N_2 = 2 \text{ sau } 4 \text{ sau } 5 \text{ defecte}) \\
&\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_3, T_4) \cup (T_3, T_5)) = \frac{2}{10}, \ (N_1 = 3 \text{ şi } N_2 = 1 \text{ sau } 4 \text{ sau } 5 \text{ defecte}) \\
&\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 0) = \mathbb{P}((T_4, T_5)) = \frac{1}{10}, \ (N_1 = 3 \text{ şi primele } 3 \text{ OK atunci } 4 \text{ şi } 5 \text{ defecte})
\end{aligned}$$

N_1 \ N_2	0	1	2	3	$\sum$
1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
$\sum$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	

Legea lui N_1 este dată de suma pe linii şi legea lui N_2 de suma pe coloane. Astfel

$$N_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad N_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci $\mathbb{E}[N_1] = 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$ şi $\mathbb{E}[N_2] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times 0 = \frac{16}{10}$.

Exerciţiul 6

Tabloul următor reprezintă legea cuplului (X, Y): unde putem considera că X este numărul de copii dintr-o familie şi Y este numărul de televizoare din acea familie (am considerat numai familii cu $1-3$ copii şi cu $1-3$ televizoare).

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0.22	0.11	0.02
2	0.2	0.15	0.1
3	0.06	0.07	0.07

Determinaţi:

a) Legile marginale ale lui X şi respectiv Y.

b) Media şi varianţa lui X şi respectiv Y.

c) Coeficientul de corelaţie dintre X şi Y.

d) Legea condiţionată a lui X la $Y = 2$ şi respectiv legea condiţionată a lui Y la $X = 2$.

e) Media şi varianţa acestor legi condiţionate

a) Legile marginale ale lui X şi Y se obţin făcand suma pe linii respectiv pe coloane, astfel

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.35 & 0.45 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.48 & 0.33 & 0.19 \end{pmatrix}.$$

b) Din legile marginale ale lui X şi Y se obţine imediat că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x] &= 1 \times 0.35 + 2 \times 0.45 + 3 \times 0.2 = 1.85, \\
\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \left(1^2 \times 0.35 + 2^2 \times 0.45 + 3^2 \times 0.2\right) - 1.85^2 = 0.5375, \\
\mathbb{E}[Y] &= 1 \times 0.48 + 2 \times 0.33 + 3 \times 0.19 = 1.71, \\
\mathbb{V}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \left(1^2 \times 0.48 + 2^2 \times 0.33 + 3^2 \times 0.19\right) - 1.71^2 = 0.5859.
\end{aligned}$$

c) Pentru a calcula coeficientul de corelaţie dintre X şi Y trebuie mai intai să calculăm covarianţa dintre cele două variabile. Avem că $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ iar

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x_i, y_j} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = 1 \times 1 \times 0.22 + 1 \times 2 \times 0.11 + \cdots + 3 \times 3 \times 0.07 = 3.33$$

de unde rezultă $Cov(X, Y) = 0.1665$. Astfel coeficientul de corelaţie este

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\mathbb{V}[Y]}} = \frac{0.1665}{\sqrt{0.5275 \times 0.5859}} = 0.2995.$$

d) Pentru legea lui X condiţionată la $Y=2$ avem

$$\mathbb{P}(X=1|Y=2)=\frac{\mathbb{P}(X=1,Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)}=\frac{0.11}{0.33}=\frac{11}{33}$$
$$\mathbb{P}(X=2|Y=2)=\frac{\mathbb{P}(X=2,Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)}=\frac{0.15}{0.33}=\frac{15}{33}$$
$$\mathbb{P}(X=3|Y=2)=\frac{\mathbb{P}(X=3,Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)}=\frac{0.07}{0.33}=\frac{7}{33}$$

de unde rezultă că $(X|Y=2)\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{11}{33} & \frac{15}{33} & \frac{7}{33}\end{pmatrix}$.

In mod similar, pentru legea lui $Y|X=2$ avem

$$\mathbb{P}(Y=1|X=2)=\frac{\mathbb{P}(X=2,Y=1)}{\mathbb{P}(X=2)}=\frac{0.2}{0.45}=\frac{4}{9}$$
$$\mathbb{P}(Y=2|X=2)=\frac{\mathbb{P}(X=2,Y=2)}{\mathbb{P}(X=2)}=\frac{0.15}{0.45}=\frac{3}{9}$$
$$\mathbb{P}(Y=3|X=2)=\frac{\mathbb{P}(X=2,Y=3)}{\mathbb{P}(X=2)}=\frac{0.1}{0.45}=\frac{2}{9}$$

de unde $(Y|X=2)\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$.

e) Avem că

$$\mathbb{E}[X|Y=2]=1\times\mathbb{P}(X=1|Y=2)+2\times\mathbb{P}(X=2|Y=2)+3\times\mathbb{P}(X=3|Y=2)=\frac{62}{33},$$
$$\mathbb{E}[X^2|Y=2]=1\times\mathbb{P}(X=1|Y=2)+2^2\times\mathbb{P}(X=2|Y=2)+3^2\times\mathbb{P}(X=3|Y=2)=\frac{134}{33},$$
$$\mathbb{E}[Y|X=2]=1\times\mathbb{P}(Y=1|X=2)+2\times\mathbb{P}(Y=2|X=2)+3\times\mathbb{P}(Y=3|X=2)=\frac{16}{9},$$
$$\mathbb{E}[Y^2|X=2]=1\times\mathbb{P}(Y=1|X=2)+2^2\times\mathbb{P}(Y=2|X=2)+3^2\times\mathbb{P}(Y=3|X=2)=\frac{34}{9},$$

deci $\mathbb{V}[X|Y=2]=0.5307$ şi $\mathbb{V}[Y|X=2]=0.6172$.

Exerciţiul 7

Fie (X,Y) un cuplu de variabile aleatoare (vector aleator) a cărui repartiţie este:

$X\backslash Y$	2	4	6
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0
3	0.05	0	0.05

a) Calculaţi $\mathbb{E}[Y]$ şi $Var(Y)$.

b) Determinaţi repartiţia v.a. $\mathbb{E}[Y|X]$ şi $Var(Y|X)$.

c) Verificaţi formula varianţei condiţionate:

$$Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}[Y|X]).$$

a) Observăm că legea lui X este (făcand suma pe linii) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$ şi legea lui Y este (făcand suma pe coloane) $Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0.35 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$ prin urmare

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= 2 \times 0.35 + 4 \times 0.4 + 6 \times 0.25 = 3.8, \\
Var[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \left(2^2 \times 0.35 + 4^2 \times 0.4 + 6^2 \times 0.25\right) - 3.8^2 = 2.36.
\end{aligned}$$

b) Pentru legea v.a. condiţionate $\mathbb{E}[Y|X]$ avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y|X=0] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=0) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=0) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=0) \\
&= 2 \times \frac{0.1}{0.4} + 4 \times \frac{0.2}{0.4} + 6 \times \frac{0.1}{0.4} = 4, \\
\mathbb{E}[Y|X=1] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=1) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=1) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=1) \\
&= 2 \times \frac{0.1}{0.3} + 4 \times \frac{0.1}{0.3} + 6 \times \frac{0.1}{0.3} = 4, \\
\mathbb{E}[Y|X=2] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=2) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=2) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=2) \\
&= 2 \times \frac{0.1}{0.2} + 4 \times \frac{0.1}{0.2} + 6 \times \frac{0}{0.2} = 3, \\
\mathbb{E}[Y|X=3] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=3) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=3) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=3) \\
&= 2 \times \frac{0.05}{0.1} + 4 \times \frac{0}{0.1} + 6 \times \frac{0.05}{0.1} = 4,
\end{aligned}$$

deci $\mathbb{E}[Y|X] \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ deoarece $\mathbb{E}[Y|X]$ ia valoarea 3 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=2)$ şi valoarea 4 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X \neq 2)$.

Pentru legea v.a. $Var(Y|X)$ observăm că

$$\begin{aligned}
Var[Y|X=0] &= \mathbb{E}[Y^2|X=0] - \mathbb{E}[Y|X=0]^2 = \left(2^2 \times \frac{0.1}{0.4} + 4^2 \times \frac{0.2}{0.4} + 6^2 \times \frac{0.1}{0.4}\right) - 16 = 2, \\
Var[Y|X=1] &= \mathbb{E}[Y^2|X=1] - \mathbb{E}[Y|X=1]^2 = \left(2^2 \times \frac{0.1}{0.3} + 4^2 \times \frac{0.1}{0.3} + 6^2 \times \frac{0.1}{0.3}\right) - 16 = 2.66, \\
Var[Y|X=2] &= \mathbb{E}[Y^2|X=2] - \mathbb{E}[Y|X=2]^2 = \left(2^2 \times \frac{0.1}{0.2} + 4^2 \times \frac{0.1}{0.2} + 6^2 \times \frac{0}{0.2}\right) - 9 = 1, \\
Var[Y|X=3] &= \mathbb{E}[Y^2|X=3] - \mathbb{E}[Y|X=3]^2 = \left(2^2 \times \frac{0.05}{0.1} + 4^2 \times \frac{0}{0.1} + 6^2 \times \frac{0.05}{0.1}\right) - 16 = 4,
\end{aligned}$$

astfel $Var(Y|X) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.66 & 4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$ deoarece v.a. $Var(Y|X)$ ia valoarea 1 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=2)$, valoarea 2 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=0)$, valoarea 2.66 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=1)$ şi valoarea 4 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=3)$.

c) Cunoscand legile variabilelor aleatoare $\mathbb{E}[Y|X]$ şi $Var(Y|X)$ observăm că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Var[Y|X]] &= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.4 + 2.66 \times 0.3 + 4 \times 0.1 \approx 2.2,\\
Var[\mathbb{E}[Y|X]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]^2] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2 = \left(3^2 \times 0.2 + 4^2 \times 0.8\right) - \mathbb{E}[Y]^2 = 0.16,\\
Var[Y] &= 2.36,
\end{aligned}$$

deci $Var[Y] = 2.2 + 0.16 = 2.26$ de unde $Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}[Y|X])$.