Andreea & Valentina

20.10.2021

Tutoriat 1 - Geometrie I

Ex 1 i) Se dau următoarele coordonate polare $(r,\theta)=\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$. Aflați coordonatele carteziene.

ii) Se dau următoarele coordonate carteziene $(x,y)=(3,3)$. Aflați coordonatele polare.

SOL

i) $\begin{cases} x = r\cos\theta = 5\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ y = r\sin\theta = 5\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Deci, $(x,y)=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

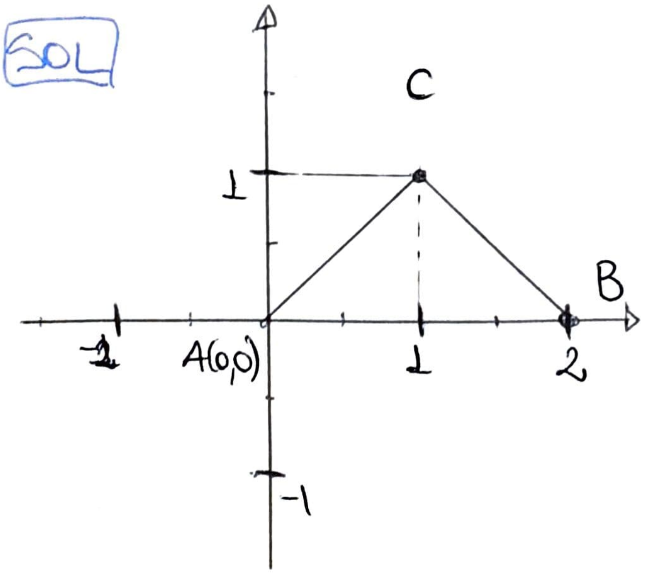
ii) $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$tg\,\theta=\frac{y}{x}=\frac{3}{3}=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

Deci, $(r,\theta)=(3\sqrt{2},\pi/4)$

Ex 2. Fie $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$. Determinați în 2 moduri aria ΔABC.

SOL



Metoda 1

$A_{\Delta ABC}=\frac{|\Delta|}{2}$

$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$

$=(-1)^4\cdot 2=2$

Aşadar, $A_{\Delta ABC} = \frac{|2|}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Metoda 2

Avem $AB = 2$, $AC = BC = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ ΔABC isoscel cu baza AB

De asemenea, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ $\Rightarrow$ (reciproca T. Pitagora) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABC$ dreptunghic în C $\Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{AC \cdot BC}{2}$

$A_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

$\boxed{Ex 3}$. Determinaţi ecuaţia dreptei d ce conţine punctul $M_1(3,4)$ şi:

a) are un vector director $\vec{u}_d = (5,6)$

b) conţine şi punctul $M_2(1,2)$

c) are vectorul normal $\vec{n}_d = (2,4)$

$\boxed{SOL}$

a) $d: \frac{x-3}{5} = \frac{y-4}{6} = t \Rightarrow d: 6x - 18 = 5y - 20$

$d: 6x - 5y + 2 = 0$ (ec. generala) ;

$d: \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 4 + 6t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ (ec. parametrică)

b) $M_1(3,4)$, $M_2(1,2)$

Fie d_1 dreapta determinată de M_1 şi M_2.

$d_1: \frac{x-3}{1-3} = \frac{y-4}{2-4} \Leftrightarrow \frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{-2} \Leftrightarrow x - 3 = y - 4$

$d_1: x - y + 1 = 0$ (ec. generala)

$d_1: \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -2t + 4 \end{cases}$ (ec. parametrică)

c) $M_1(3,4)$, $\vec{n}_d = (2,4)$

Fie $M(x,y) \in d \Rightarrow \vec{n}_d \cdot \overrightarrow{MM_1} = 0 \Rightarrow \vec{n}(\vec{r}-\vec{r}_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2,4)\cdot(x-3, y-4) = 0 \Rightarrow \quad 2x - 6 + 4y - 16 = 0$

$2x + 4y - 22 = 0 \mid :2$

$d: x + 2y - 11 = 0$

$\boxed{Ex\ 4}$. Fie $A(2,-1)$, $d: x - y + 1 = 0$. $A \in d'$, unde $d' \perp d$.

a) Aflați ec. lui d'

b) $dist(A,d) = ?$

c) Scrieți ecuația lui d sub diverse forme carteziene.

$\boxed{SOL}$.

a) $d: x - y + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_d = (1,-1)$

Deoarece $d \perp d' \Rightarrow \vec{n}_d = \vec{u}_{d'} = (1,-1)$

$$\left.\begin{array}{l} A(2,-1) \in d' \\ \vec{u}_d = (1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow d': \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} \Rightarrow d': 2 - x = y + 1$$

$d': x + y - 1 = 0$

b) $$dist(A,d) = \frac{|2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

c) $d: x - y + 1 = 0$ (ec. generala)

$d: y = x + 1$ (ec. explicită)

$d: x - y = -1 \mid :(-1) \Rightarrow d: \frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$ (ec. prin tăieturi)

$d: x - y + 1 = 0 \mid : \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \mid \cdot(-1)$

$$d: -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{p} = 0$$ (ec. forma normală)

$p = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0.$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$\boxed{Ex\,5}$. Determinați valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ a.î. $d_1: mx + y - 2 = 0$ și $d_2: x - y + 2m = 0$ să fie paralele.

$\boxed{SOL}$

Metoda I

Dacă două drepte sunt paralele, atunci $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

$\frac{m}{1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow m = -1 \in \mathbb{R}$.

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{2m} = 1 \neq \frac{b_1}{b_2} = -1$ ✓ $\Rightarrow m = -1 \in \mathbb{R}$.

Metoda II

Avem sistemul $\begin{cases} mx + y = 2 \\ x - y = -2m \end{cases}$ cu $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2m \end{array}\right)$, A fiind matricea formată din primele două coloane.

Pentru a avea drepte paralele ne raportăm la cazul $\det(A) = 0$

$\det(A) = -m - 1 = 0 \Rightarrow m = -1$

De asemenea, $\Delta_c \neq 0$.

Verificăm $\Delta_c = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & -2m \end{vmatrix} = -2m^2 - 2$

Pt. $m = -1 \Rightarrow \Delta_c = -4 \neq 0$ ✓.

$\boxed{Ex\,6}$. Fie $d_1: y = 2x$. Aflați ecuația dreptei d_2, unde $d_1 \parallel d_2$ și $A(3,4) \in d_2$.

$\boxed{\text{SOL}}$ Metoda I

$d_1: y = 2x$ în formă explicită $\Rightarrow m_{d_1} = 2$

$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow m_{d_1} = m_{d_2} = 2$

$\left.\begin{cases} m_{d_2} = 2 \\ A(3,4) \in d_2 \end{cases}\right| \Rightarrow d_2: y-4 = 2(x-3)$

$d_2: y - 2x + 2 = 0$

Metoda II

$d_1: 2x - y = 0 \Rightarrow \vec{n}_{d_1} = (2,-1) \Rightarrow \vec{u}_{d_1} = (1,2)$

$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \vec{u}_{d_1} = \vec{u}_{d_2} = (1,2)$

$d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} \Rightarrow d_2: 2x - 6 = y - 4$

$d_2: y - 2x + 2 = 0$

Metoda III

$\left.\begin{array}{l} d_1: 2x - y = 0 \\ d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_1 \text{ și } d_2 \text{ diferă printr-o constantă} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_2: 2x - y + c = 0.$

$A(3,4) \in d_2 \Rightarrow 2 \cdot 3 - 4 + c = 0$

$6 - 4 + c = 0 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow d_2: 2x - y - 2 = 0$

$\boxed{\text{Ex 7}}$. Fie $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - 3y^2 + 8xy = 0\}$

a) Să se arate că M este reuniunea a două drepte concurente, perpendiculare.

b) Precizați ecuațiile polare pentru dreptele cerute.

$\boxed{\text{SOL}}$ Metoda I

1) $y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ punctul O(0,0)

2) $y\neq 0 \Rightarrow 3x^2-3y^2+8xy=0 \mid : y^2$

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2+8\cdot\frac{x}{y}-3=0$$

$$\frac{x}{y}\overset{not.}{=}t \Rightarrow 3t^2+8\cdot t-3=0$$

$$\Delta=64+4\cdot 9=100$$

$$t_{1,2}=\frac{-8\pm 10}{6} \rightarrow t_1=-3, \quad t_2=\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} t_1=-3 \Rightarrow \frac{x}{y}=-3 \Rightarrow d_1: x=-3y \Rightarrow d_1: x+3y=0 \text{ cu } \vec{n}_{d_1}=(1,3) \\ t_2=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{3} \Rightarrow d_2: y=3x \Rightarrow d_2: 3x-y=0 \text{ cu } \vec{n}_{d_2}=(3,-1) \end{cases}$$

$d_1\cap d_2=\{O\}$

$\vec{n}_{d_1}\cdot\vec{n}_{d_2}=3-3=0 \Rightarrow d_1\perp d_2$

Metoda II

$3x^2-3y^2+8xy=0 \Rightarrow 3x^2-9xy-xy-3y^2=0$

$3x(x+3y)-y(x+3y)=0$

$\underbrace{(3x-y)}_{d_2}\underbrace{(x+3y)}_{d_1}=0$ dreptele cerute

b) $d_1: x+3y=0 \Rightarrow r\cos\theta+3r\sin\theta=0$

$d_2: 3x-y=0 \Rightarrow 3r\cos\theta-r\sin\theta=0.$