

Tema 4

Exercițiul 1

Arătați că:

- a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori în \mathbb{N} atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

- b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x) dx.$$

Exercițiul 2

Se consideră v.a. X cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, k > 0.$$

- a) Să se determine constanta α .
b) Să se afle funcția de repartiție.
c) Să se calculeze $\mathbb{P}(0 < X < k^{-1})$.

Exercițiul 3

- a) Fie X o variabilă repartizată exponențial (de parametru α). Arătați că are loc următoarea relație (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \quad (1)$$

- b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relația (1). Arătați că X este repartizată exponențial.

Exercițiul 4

- a) Nivelul de zgomot al unei mașini de spălat este o v.a. de medie 44 dB și de abatere standard 5 dB. Admițând aproximarea normală care este probabilitatea să găsim o medie a zgomotului superioară la 48 dB într-un eșantion de talie 10 mașini de spălat ?
b) O telecabină are o capacitate de 100 de persoane. Știind că greutatea populației (țării) este o v.a. de medie 66.3 Kg și o abatere standard de 15.6 Kg și presupunând că persoanele care au urcat în telecabină au fost alese în mod aleator din populație, care este probabilitatea ca greutatea totală acestora să depășească 7000 Kg ?

Exercițiul 5

Fie cuplul de v.a. (X, Y) cu densitatea de repartiție $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, unde

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k(x + y + 1), & x \in [0, 1], y \in [0, 2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

- a) Să se determine constanta k .
- b) Să se determine densitățile marginale.
- c) Să se verifice dacă X și Y sunt independente.
- d) Să se afle funcțiile de repartiție marginale și funcția de repartiție a vectorului (X, Y) .
- e) Să se determine densitățile v.a. $X|Y = y$ și $Y|X = x$.

Exercițiul 6

Un tehnician dintr-un laborator de biologie face două măsurători considerate independente și repartizate normal de medie 0 și de varianță 1. Calculați corelația dintre valoarea cea mai mică și cea mai mare a celor două măsurători.

Exercițiul 7

- a) O femeie însărcinată este programată, de doctor, să nască pe data de 22 Decembrie 2018. Bineînțeles că data efectivă de naștere nu este neapărat data prevăzută de doctor. Pe o scară de timp, considerăm că momentul în care începe ziua de 22 Decembrie este notat cu 0 și să presupunem că momentul T , la care femeia naște, este repartizat normal de medie 0 și abatere standard 4 zile. Care este probabilitatea ca femeia să nască în ziua programată de doctor?
- b) O altă femeie însărcinată are aceeași dată de naștere programată ca și femeia de la punctul a). În contextul de la a), fie T_0 momentul primei nașteri, din cele două. Presupunând că cele două momente ale nașterilor sunt independente și indentic repartizate să se determine varianța lui T_0 .¹

¹Indicație: Folosiți proprietatea de simetrie a repartiției normale și schimbarea de variabilă în coordonate polare!

Tema 4

Soluții

Exercițiul 1



Arătați că:

a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori în \mathbb{N} atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x) dx.$$

a) Observăm că:

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X = n+1) + \mathbb{P}(X = n+2) + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

și

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) &= (\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \dots) + (\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \dots) \\ &\quad + (\mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \dots) + \dots \\ &= 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

O altă idee ar fi să luăm $X = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X > i\}}$ și să inversăm \sum cu \mathbb{E} (de ce putem?).

b) Avem

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x) dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \geq x\}}] dx \stackrel{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{X \geq x\}} dx \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^X dx \right] = \mathbb{E}[X].$$

Exercițiul 2



Se consideră v.a. X cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, k > 0.$$

- a) Să se determine constanta α .
- b) Să se afle funcția de repartiție.
- c) Să se calculeze $\mathbb{P}(0 < X < k^{-1})$.

a) Din condiția $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ obținem

$$\int_0^{\infty} \alpha x^2 e^{-kx} dx \stackrel{y=kx}{=} \frac{\alpha}{k^3} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = \frac{2\alpha}{k^3} = 1$$

de unde rezultă $\alpha = \frac{k^3}{2}$. Pentru această valoare a lui α se indeplinește și condiția $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

b) Aplicând definiția funcției de repartiție, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, efectuând calculele obținem

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{k^2 x^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

c) Avem

$$\mathbb{P}\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) = F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e}.$$

Exercițiul 3



- a) Fie X o variabilă repartizată exponențial (de parametru α). Arătați că are loc următoarea relație (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \quad (1)$$

- b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relația (1). Arătați că X este repartizată exponențial.

- a) Dacă $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ atunci densitatea sa este $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$ și are funcția de repartiție $F(x) = (1 - e^{-\alpha x}) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$. Observăm că $\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t}$, deci

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha s}} = e^{-\alpha t} = \mathbb{P}(X > t).$$

Interpretare: Să presupunem că X reprezintă durata de viață a unei componente electrice. Știind că X a funcționat deja un timp s ($X > s$), probabilitatea ca X să funcționeze un timp t suplimentar ($X > t + s$) este egală cu probabilitatea ca X să funcționeze un timp t . Faptul că a funcționat deja un timp s nu influențează probabilitatea să funcționeze un timp t în plus.

- b) Din relația

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \mathbb{P}(X > t)$$

obținem $\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$ de unde notând cu $h(t) = \mathbb{P}(X > t)$ avem $h(s + t) = h(s)h(t)$ pentru $s > 0, t > 0$.

Pentru a verifica că v.a. X este distribuită exponențial trebuie să rezolvăm ecuația funcțională Cauchy. Observăm pentru început că dacă $s = t$ atunci $h(2s) = h^2(s)$ și prin inducție avem $h(ks) = h^k(s)$ pentru $k \in \mathbb{N}$. Luând $s = \frac{1}{2}$ avem $h(1) = h^2(\frac{1}{2})$ de unde $h(\frac{1}{2}) = h^{\frac{1}{2}}(1)$ și pentru $s = \frac{1}{k}$ rezultă că $h(\frac{1}{k}) = h^{\frac{1}{k}}(1)$ (prin aceeași argumentare). Combinând rezultatele avem $h(\frac{m}{n}) = h(m\frac{1}{n}) = h^m(\frac{1}{n}) = h^{\frac{m}{n}}(1)$. Prin urmare $h(q) = h^q(1)$ pentru orice $q \in \mathbb{Q}_+$. Dacă $r \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+$ există un șir $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}_+$ așa încât $q_n \downarrow r$ și folosind continuitatea la dreapta avem $h(q_n) \downarrow h(r)$ deci $h(r) = a^r$, unde $a = h(1)$. În final am găsit că $h(t) = e^{-t \log \frac{1}{h(1)}}$.

Exercițiul 4



- a) Nivelul de zgomot al unei mașini de spălat este o v.a. de medie 44 dB și de abatere standard 5 dB. Admițând aproximarea normală care este probabilitatea să găsim o medie a zgomotului superioară la 48 dB într-un eșantion de talie 10 mașini de spălat ?
- b) O telecabină are o capacitate de 100 de persoane. Știind că greutatea populației (țării) este o v.a. de medie 66.3 Kg și o abatere standard de 15.6 Kg și presupunând că persoanele care au urcat în telecabină au fost alese în mod aleator din populație, care este probabilitatea ca greutatea totală acestora să depășească 7000 Kg ?

- a) Fie X nivelul de zgomot produs de o mașină de spălat luată la intamplare și \bar{X}_{10} media unui eșantion de talie 10. Presupunem că aproximarea gaussiană are loc pentru $n = 10$. Avem

$$\bar{X}_{10} \sim \mathcal{N}\left(44, \frac{5^2}{10}\right),$$

de unde $\mathbb{P}(\bar{X}_{10} > 48) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{48-44}{5/\sqrt{10}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.53) = 1 - 0.9943 = 0.0057$, unde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Observăm că această probabilitate este foarte mică.

- b) Fie X greutatea unei persoane luate la intamplare și \bar{X}_{100} greutatea media a unui eșantion de 100 de persoane. Aplicând aproximarea gaussiană (Teorema Limită Centrală) avem

$$\bar{X}_{100} \simeq \mathcal{N}\left(66.3, \frac{15.6^2}{100}\right),$$

de unde $\mathbb{P}(\bar{X}_{100} > \frac{7000}{100}) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{70-66.3}{15.6/\sqrt{100}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.37) = 0.0089$, unde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercițiul 5



Fie cuplul de v.a. (X, Y) cu densitatea de repartiție $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, unde

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k(x + y + 1), & x \in [0, 1], y \in [0, 2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

- a) Să se determine constanta k .
- b) Să se determine densitățile marginale.
- c) Să se verifice dacă X și Y sunt independente.

- d) Să se afle funcțiile de repartiție marginale și funcția de repartiție a vectorului (X, Y) .
e) Să se determine densitățile v.a. $X|Y = y$ și $Y|X = x$.

- a) Pentru ca $f_{(X,Y)}$ să fie densitate trebuie ca $f_{(X,Y)}(x, y) \geq 0$ de unde $k \geq 0$ și

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = 1,$$

altfel spus $\int_0^1 \int_0^2 k(x+y+1) dx dy = 1$ de unde $k = \frac{1}{5}$.

- b) Pentru a găsi densitățile marginale avem pentru X

$$f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x, y) dy = \int_0^2 \frac{x+y+1}{5} \mathbb{I}_{[0,1]}(x) dy = \frac{2x+4}{5} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

și pentru Y

$$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x, y) dx = \int_0^1 \frac{x+y+1}{5} \mathbb{I}_{[0,2]}(y) dx = \frac{2y+3}{10} \mathbb{I}_{[0,2]}(y).$$

- c) Observăm că X și Y nu sunt independente deoarece $f_{(X,Y)}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.
d) Funcția de repartiție a vectorului (X, Y) este dată de

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(u, v) du dv$$

prin urmare dacă $x \in (0, 1]$ și $y \in (0, 2]$ avem

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{u+v+1}{5} du dv = \frac{xy}{10}(x+y+2),$$

dacă $x \in (1, \infty)$ și $y \in (0, 2]$ atunci

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^y \frac{u+v+1}{5} du dv = \frac{y}{10}(y+3),$$

dacă $x \in (0, 1]$ și $y \in (2, \infty)$ atunci

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^2 \frac{u+v+1}{5} du dv = \frac{x}{5}(x+4),$$

iar dacă $x \in (1, \infty)$ și $y \in (2, \infty)$ atunci

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{u+v+1}{5} du dv = 1.$$

Pentru a găsi funcțiile de repartiție marginale putem sau să folosim densitățile marginale sau să folosim relațiile

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y), \quad F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y).$$

Obținem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{5}(x+4), & x \in (0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

și

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{y}{10}(y+3), & y \in (0, 2] \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

e) Folosind definiția densității marginale avem

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2(x+y+1)}{2y+3} \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \mathbb{I}_{[0,2]}(y)$$

și

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y+1}{2x+4} \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \mathbb{I}_{[0,2]}(y).$$

Exercițiul 6



Un tehnician dintr-un laborator de biologie face două măsurători considerate independente și repartizate normal de medie 0 și de varianță 1. Calculați corelația dintre valoarea cea mai mică și cea mai mare a celor două măsurători.

Fie X și Y cele două măsurători, iar conform ipotezei acestea sunt variabile aleatoare independente și $\mathcal{N}(0, 1)$ repartizate. Fie de asemenea $M = \max(X, Y)$ și $L = \min(X, Y)$, cea mai mare și respectiv cea mai mică dintre valori. Cum pentru $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$\max(x, y) + \min(x, y) = x + y \quad \text{și} \quad \max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$$

deducem că

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[L] &= \mathbb{E}[M + L] = \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 0 \\ \mathbb{E}[M] - \mathbb{E}[L] &= \mathbb{E}[M - L] = \mathbb{E}[|X - Y|]. \end{aligned}$$

Pentru a calcula $\mathbb{E}[|X - Y|]$ să observăm că $X - Y \sim \mathcal{N}(0, 2)$ (deoarece X și Y sunt independente) prin urmare notând $X - Y = Z\sqrt{2}$, cu $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, obținem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X - Y|] &= \sqrt{2}\mathbb{E}[|Z|] = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Astfel deducem că $\mathbb{E}[M] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ și $\mathbb{E}[L] = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ iar

$$\text{Cov}(M, L) = \mathbb{E}[ML] - \mathbb{E}[M]\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[XY] + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

deoarece $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$. Cum corelația dintre M și L este definită prin

$$\rho(M, L) = \frac{\text{Cov}(M, L)}{\sqrt{\text{Var}(M)}\sqrt{\text{Var}(L)}},$$

trebuie să mai calculăm $\text{Var}(M)$ și $\text{Var}(L)$. Cum $M + L = X + Y$, luând varianța avem

$$\text{Var}(M + L) = \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2$$

de unde

$$\text{Var}(M) + \text{Var}(L) + 2\text{Cov}(M, L) = 2$$

deci $\text{Var}(M) + \text{Var}(L) = 2(1 - \frac{1}{\pi})$. Cum $\max(X, Y) = -\min(-X, -Y)$ și cum, din simetria repartiției normale standard, $(-X, -Y)$ este repartizat la fel ca (X, Y) deducem că

$$\text{Var}(M) = \text{Var}(\max(X, Y)) = \text{Var}(-\min(-X, -Y)) = \text{Var}(\min(-X, -Y)) = \text{Var}(\min(X, Y)) = \text{Var}(L)$$

prin urmare $\text{Var}(M) = \text{Var}(L) = 1 - \frac{1}{\pi}$ de unde

$$\rho(M, L) = \frac{\text{Cov}(M, L)}{\sqrt{\text{Var}(M)}\sqrt{\text{Var}(L)}} = \frac{\frac{1}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\pi - 1}.$$

Exercițiul 7



- a) O femeie însărcinată este programată, de doctor, să nască pe data de 22 Decembrie 2018. Bineînțeles că data efectivă de naștere nu este neapărat data prevăzută de doctor. Pe o scară de timp, considerăm că momentul în care începe ziua de 22 Decembrie este notat cu 0 și să presupunem că momentul T , la care femeia naște, este repartizat normal de medie 0 și abatere standard 4 zile. Care este probabilitatea ca femeia să nască în ziua programată de doctor?
- b) O altă femeie însărcinată are aceeași dată de naștere programată ca și femeia de la punctul a). În contextul de la a), fie T_0 momentul primei nașteri, din cele două. Presupunând că cele două momente ale nașterilor sunt independente și indentic repartizate să se determine varianța lui T_0 .¹

- a) Pentru a răspunde la cerința problemei este necesar să calculăm $\mathbb{P}(0 \leq T < 1)$, unde $T \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 16$, măsurat în zile. Avem

$$\mathbb{P}(0 \leq T < 1) = \mathbb{P}\left(0 \leq \frac{T}{\sigma} < \frac{1}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi(0) \stackrel{\sigma=4}{=} \Phi(0.25) - \Phi(0) \approx 0.0987$$

unde $\Phi(x)$ este funcția de repartiție a normalei standard.

- b) Observăm că momentul primei nașteri, din cele două, este dat de $T_0 = \min(T_1, T_2)$ unde T_i este momentul nașterii femeii cu numărul i . Pentru a calcula $Var(T_0)$ vom calcula pentru început densitatea variabilei T_0 plecând de la

$$\mathbb{P}(T_0 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t) \stackrel{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(T_1 > t)^2 = \left(1 - \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)^2.$$

Astfel

$$f_{T_0}(t) = \frac{d}{dt} F_{T_0}(t) = \frac{d}{dt} \left[1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)^2 \right] = \frac{2}{\sigma} \left(1 - \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right) \varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

unde $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ este densitatea repartiției normale standard.

Prin urmare²

$$Var(T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_{T_0}(t) dt - \left(\int_{-\infty}^{\infty} t f_{T_0}(t) dt \right)^2.$$

Pentru a finaliza problema trebuie să calculăm cele două integrale care apar în membrul drept al relației de mai sus. Să observăm că pentru prima integrală avem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_{T_0}(t) dt &= \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left(1 - \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right) \varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt \stackrel{y=\frac{t}{\sigma}}{=} 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 (1 - \Phi(y)) \varphi(y) dy \\ &= 2\sigma^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \varphi(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \Phi(y) \varphi(y) dy \right) = 2\sigma^2 \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \Phi(y) \varphi(y) dy \right) \end{aligned}$$

unde am utilizat momentul de ordin doi al unei normale standard, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \varphi(y) dy = 1$.

Cum

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \Phi(y) \varphi(y) dy &\stackrel{z=-y}{=} \int_{\infty}^{-\infty} z^2 \Phi(-z) \varphi(-z) - dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 (1 - \Phi(z)) \varphi(z) dz \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \Phi(z) \varphi(z) dz \end{aligned}$$

unde am folosit că $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ și că $\varphi(-z) = \varphi(z)$ din simetria repartiției normale, deducem că

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \Phi(y) \varphi(y) dy = \frac{1}{2}$$

de unde $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_{T_0}(t) dt = \sigma^2$.

Pentru a doua integrală avem

²Punctaj parțial până în punctul ăsta!

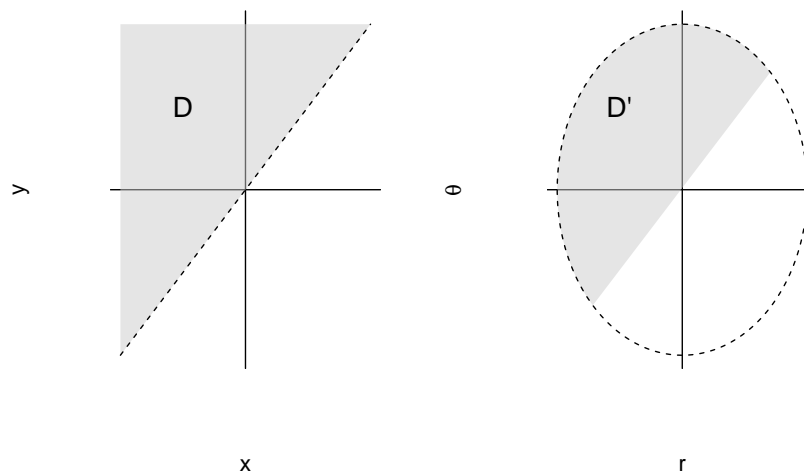
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t f_{T_0}(t) dt &= \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} t \left(1 - \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right) \varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt \stackrel{y=\frac{t}{\sigma}}{=} 2\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y (1 - \Phi(y)) \varphi(y) dy \\ &= 2\sigma \left(\int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} y \Phi(y) \varphi(y) dy \right) = -2\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y \Phi(y) \varphi(y) dy\end{aligned}$$

deoarece $\int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(y) dy = 0$ (media unei normale standard). Pentru integrala $\int_{-\infty}^{\infty} y \Phi(y) \varphi(y) dy$ avem că

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} y \Phi(y) \varphi(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^y \varphi(x) dx \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y y \varphi(x) \varphi(y) dx dy \\ &= \iint_D y \varphi(x) \varphi(y) dx dy\end{aligned}$$

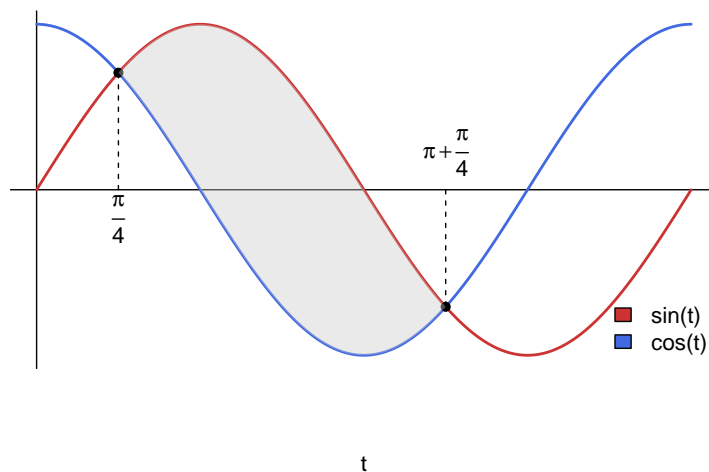
unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$. Prin trecerea la coordonate polare, $x = r \cos \theta$ și $y = r \sin \theta$ avem că regiunea D se transformă în regiunea

$$D' = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \mid \cos \theta \leq \sin \theta\}$$



și rezolvând ecuația $\cos \theta = \sin \theta$ sau $\tan(\theta) = 1$ găsim că $\theta \in \{\frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}\}$ prin urmare regiunea D' devine

$$D' = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times \left[\frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}\right)\}.$$



Ținând cont că $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = e^{-\frac{r^2}{2}}$ și de faptul că Jacobian-ul transformării este r , deci $dx dy = r dr d\theta$ avem

$$\begin{aligned} \iint_D y \varphi(x) \varphi(y) dx dy &= \iint_{D'} r \sin \theta \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}} r^2 \sin \theta e^{-\frac{r^2}{2}} d\theta dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^\infty r \left(-e^{-\frac{r^2}{2}} \right)' dr \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Înlocuind în expresia lui $\int_{-\infty}^\infty t f_{T_0}(t) dt$ găsim că

$$\int_{-\infty}^\infty t f_{T_0}(t) dt = -\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

de unde $Var(T_0) = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$.