CURS VIII

ANALIZĂ

Def: Fie $\Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^p$, $f: \Delta \to \mathbb{R}^q$, $a \in \Delta$, $k \in \mathbb{N}$

Spunem că f este de clasă C^k pe Δ dc. f are derivate parțiale de orice ordin ≤ 1 pe Δ și derivatele parțiale de ordin k sunt cont. pe Δ.

f. diferențiabilă pe Δ ~~în $a \in \Delta$~~ $x \longmapsto df(x)$

$$df: \Delta \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$$

$$(df(x): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, \text{ liniară } (x \in \Delta))$$

Dacă df. este dif. în $a \in \Delta$, spunem că f este de 2 ori dif. în a.

$$d(df)(a) = d^2 f(a): \mathbb{R}^p \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$$

$$d^2 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)) \simeq \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$$

diferențiala de ordin 2 a lui f în punctul a

$$\underbrace{d^2 f(a)}_{\text{aplicație biliniară}}: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$$

f de n ori diferențiabilă pe Δ și $d^n f: \Delta \to \underbrace{\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)}_{\text{aplicatie } n\text{-liniară}}$

$\{T: \underbrace{\mathbb{R}^p \times \ldots \times \mathbb{R}^p}_{n \text{ ori}} \to \mathbb{R}^q \mid T \text{ } n\text{-liniară}\}$ este difb în a

$\Rightarrow f$ este de $n+1$ ori difb. în a

$$\cancel{d^{n+1} f(a) = d(d^n f(a))}$$

$$d^{n+1} f(a) = d(d^n f)(a)$$

f este de clasă $C^2 \Rightarrow f$ este difb. de ordin 2 pe Δ.

Teoremă (Schwartz) Fie $\Delta = \mathring{\Delta} \subset \mathbb{R}^p$

$f : \Delta \to \mathbb{R}$, $a \in \Delta$, a.î. $\exists \ \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial x_i x_j} : \Delta$

și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{ij} i}$ continuă în a. (Δ - o vecinătate a lui

Atunci $\exists$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(a)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

$(i,j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j)$

Dem: Pp. $p = 2$, $x = (x_1, \dots, x_p) \longmapsto (x, y) \in \Delta$

$a = (a_1, \dots, a_p) \longmapsto (a, b) \in \Delta$

Pp. $\exists \ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \Delta \to \mathbb{R}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ este continuă în (a, b)

Fie $\varepsilon > 0$

Din Δ deschis $\Rightarrow \exists \ r > 0$ a.î. $B((a,b), 2r) \subseteq \Delta$

$\Rightarrow \forall \ t, \tau \in \mathbb{R}$, $|t| < r$, $|\tau| < r$ $\quad (a+t, b+\tau) \in B((a,b), 2r) \underset{\Delta}{\cap}$

$(\|(a+t, b+\tau) - (a, b)\| = \|(t, \tau)\| = \sqrt{t^2 + \tau^2} < 2r)$

Știu $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ continuă în a $\to \exists r_\varepsilon > 0$, $r_\varepsilon < r$ a.î. $\forall (x, y) \in B((a,b), r_\varepsilon)$

avem $\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \right\| < \varepsilon$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+t, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{t}$

Aplicăm inegalitatea Lagrange funcției, pe intervalul $[0, \tau]$.

$t \xrightarrow{F} f(a+t', b+\tau) - f(a+t', b) - t'\tau \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$

$(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+t,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{t} =$

$= \lim_{\tau\to 0} \frac{f(a+t, b+\tau) - f(a+t, b)}{\tau} - \lim_{\tau\to 0} \frac{f(a, b+\tau) - f(a,b)}{\tau} =$

$= \lim_{\substack{\tau\to 0\\ t\to 0}} \frac{f(a+t, b+\tau) - f(a+t, b) - f(a, b+\tau) + f(a,b)}{t\cdot\tau}$.

$(\|F(t) - F(0)\| = |t| \, \| dF(t^*)\|)$

$\|\underbrace{f(a+t, b+\tau) - f(a+t, b) - \tau \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)}_{F(b)} - f(a, b+\tau) + f(0)\| \leq$

$\leq |t| \cdot \| \frac{\partial f}{\partial x}(a+t^*, b+\tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+t^*, b) - \tau \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\|$ ①

$\forall \tau, t \in \mathbb{R}$, $|t| < r_\varepsilon$, $|\tau| < r_\varepsilon$, t^* între 0 și t

Aplic ineg. Lagrange funcției:

$\tau' \xmapsto{G} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a+t^*, b+\tau') - \tau \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)}_{G(\tau')}$ pe $[0,\tau]$.

$\uparrow\in$
$[0,\tau]$

$(\| G(\tau) - G(0)\| \leq |\tau| \cdot \| dG(\tau^*)\|$, τ^* între 0 și τ.

$\|\frac{\partial f}{\partial x}(a+t^*, b+\tau) - \tau \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(t^*+a, b)\| \leq$

$\leq |\tau| \cdot \|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+t^*, b+\tau^*) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\| \leq |\tau| \cdot \varepsilon$ ②

τ^* între 0 și τ, $|\tau^*|, |t^*| < r_\varepsilon$

Deci $\forall t, \tau_t \in \mathbb{R}$

$|t| < r_\varepsilon$, $|\tau| < r_\varepsilon$ avem:

$\| \frac{f(a+t, b+\tau) - f(a+t, b) - f(a, b+\tau) + f(a)}{t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\| < \varepsilon$ (**)

$$\left\| \frac{\frac{f(a+t,\, b+\tau) - f(a+t,\, b)}{\tau} - \frac{f(a,\, b+\tau) - f(a)}{\tau}}{t} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, \ldots \right.$$

$\tau \to 0$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $|t| < r_\varepsilon$ avem:

$$\left\| \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+t,\, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{t} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right\| \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+t,\, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \text{ și}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

Corolar: Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p$ de clasă C^2 pe D. Atunci $\forall\, i,j \in \{1, \ldots, p\}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall\, a \in D$.

Obs: 1) $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p$ de clasă C^2, $a \in D$

$d^2 f(a): \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$d^2 f(a)(u,v) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i u_j, \quad \forall\, u,v \in \mathbb{R}^p$$

~~$d^2 f(a)(u,v)$~~ $= \Sigma$

$u = (u_1, \ldots, u_p)$
$v = (v_1, \ldots, v_p)$

2) f de clasă C^2, $a \in D$

Matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_p}(a) \end{pmatrix} = H_f(a)$$

s.n. HASSIANA (MATRICEA HASSIANA) asociată funcției f în punctul a

$f(a)$ este matricea $d^2f(a)$

$$d^2f(a)(u,v) = (u_1 \dots u_p)\, Hf(a) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i v_j$$

Folosim notația

$$d^2f(a)(u,u) = d^2f(a)(u)^2 = d^2f(a)(u)(u)$$

$$d^2f(a)(u)^2 = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i u_j$$

$$d^2f(a) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, dx_i\, dx_j$$

f de clasă C^3.

$$d^3f(a)(u,u,u) = d^3f(a)(u)^3 = \sum_{i,j,k=1}^{p} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k$$

Teoremă (YOUNG)

Fie $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}$ de două ori dif. în a (de clasă C^2)

Atunci $d^2f(a)$ este simetrică.

$(d^2f(a)(u,v) = d^2f(a)(v,u),\ \forall\, u,v \in \mathbb{R}^p)$

Def: Fie $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p$ $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$

Pp. că f este de n ori dif. pe D. Atunci:

$$T_{f,n,a}(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(x-a) + \frac{1}{2!} d^2f(a)(x-a, x-a) + \dots + \frac{1}{n!} \underset{n \text{ ori}}{d^nf(a)} \underbrace{(x-a \dots x-a)}$$

$$= f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(x-a) + \frac{1}{2!} d^2f(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} d^nf(a)(x-a)^n$$

se numește POLINOM TAYLOR de grad n asociat funcției f în punctul a.

($T_{f,n,a} \to$ polinom în p variabile)

2) Fie $x \in D$. Atunci:

$R_{f,n,a}(x) = f(x) - T_{f,n,a}(x)$ s.n. RESTUL TAYLOR de ordin n asociat funcției f ~~în~~ punctului a.

Ex: $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ $f: D \to \mathbb{R}$ $(a,b) \in D$

$$T_{f,2}(a,b)(x,y) = f(a,b) + df(a,b)(x-a, y-b) + d^2 f(a,b)(x-a, y-b)$$

$$T_2(x,y) = f(a,b) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b)\right]$$

$$T_3(x,y) = T_2(x,y) + \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x}(a,b)(x-a)^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y}(a,b)(y-b)^3 + \right.$$

$$\left. + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)(x-a)^2 \cdot (y-b) + 3 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b)^2\right].$$

TEOREMĂ (TAYLOR CU RESTUL LAGRANGE)

Fie $D = \mathring{D} = \mathbb{R}^p$, D convexă, $f: D \to \mathbb{R}$ de $n+1$ ori difb., $a \in D$.

Atunci, pt. $\forall\ x \in D$, există c pe segmentul de capete a și b a.î.

$$f(x) = T_{f,n,a}(x) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(c)(x-a)^{n+1}$$

adică $f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(a)(x-a)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(c)(x-a)^{n+1}}_{R_{f,n,a}(x)}$

Dem:

P_p. $p=2$ $a \longmapsto (a,b)$

$x = (x_1, \dots x_p) \longmapsto (x,y)$

$[(a,b),(x,y)]$, $c = (\eta, \xi)$

Fie $r>0$ a.î. $B((a,b),r) \subset D$.

Fie $(x,y) \in D$. Definim $\ell: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\ell(t) = f(a + t(x-a), b + t(y-b))$

ℓ este derivabilă (diferențiabilă) de $n+1$ ori.

$$\underbrace{t \longmapsto (a + t(x-a), b + t(y-b)) \xrightarrow{f} f(\dots)}_{\ell}$$

Aplicăm teorema Taylor cu rest Lagrange funcției ℓ (în jurul lui)

$$\ell(1) = \ell(0) + \frac{1}{1!}\ell'(0)(1-0) + \frac{1}{2!}\ell''(0)(1-0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\ell^{(n)}(0)(1-0) + \frac{1}{(n+1)!}\ell^{(n+1)}(\theta)(1-0)$$

unde θ este inclus între 0 și 1.

$$\Rightarrow \ell(1) = \ell(0) + \frac{1}{1!}\ell'(0) + \frac{1}{2!}\ell''(0) + \dots + \frac{1}{n!}\ell^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)}\ell^{(n+1)}(\theta) \quad (1)$$

$\varphi(0) = f(a,b)$, $\varphi(1) = f(x,y)$

$\varphi(t) = f(a + t(x-a), b + t(y-b))$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + t(x-b), b + t(y-b))(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a + t(x-1), b + t(y-b))(y-b).$$

$$= df(a + t(x-a), b + t(y-b))(x-a, y-b) \Rightarrow \varphi'(0) = df(a,b)(x-a, y-b)$$

$$\varphi''(t) = (\varphi'(t))' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + t(x-a), b + t(y-b))(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + t(x-a), b + t(y-b)) \cdot (y-b)(x-a)$$

$$+ \cancel{\varphi''(t)}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + t(x-a), b + t(y-b))(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + t(x-a), b + t(y-b))(y-b)^2 \ \cancel{(y-b)(x-a)}$$

$$\Rightarrow \varphi''(t) = d^2 f(a + t(x-a), b + t(y-b))(x-a, y-b)^2$$

$$\Rightarrow \varphi''(0) = d^2 f(a,b)(x-a, y-b)^2$$

Inductie, $\boxed{\varphi^{(k)} = d^k f(a,b)(x-a, y-b)^k}$

$$\varphi^{n+1}(\theta) = d^{n+1} f(\underbrace{a + \theta(x-a)}_{\eta}, \underbrace{b + \theta(y-b)}_{\xi})(x-a, y-b)^{n+1}.$$

$c = (\eta, \xi)$

$$\Rightarrow f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!} d^1 f(a,b)(x-a, y-b)^1 + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(a,b)(x-a, y-b)^n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot d^{n+1} f(c)(x-a, y-b)^{n+1}$$

Puncte de extrem local

Def: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a \in D$

1) Spunem că a este punct de minim local pt f dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}^a$ a.î. $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in D \cap V$

2) — " ——— " — maxim — " ———

——— " ——— " — $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in D \cap V$.

3) Dc. a este punct de minim sau maxim local spunem că a este punct de extrem local pt funcția f.

VII

TEOREMA LUI FERMAT

Fie $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ și $a \in D$ a.î. a este punct de extrem local și f difb în a. Atunci $df(a) = 0$.

(i.e. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \ \forall i \in \{1, \dots, p\}$.)

Fie $u \in \mathbb{R}^p$, $u \neq 0$ $\exists r > 0$ a.î. $B(a, r) \subseteq D$

$\left(a + t \cdot u \in B(a, r) \iff \|(a + tu) - a\| < r \iff \|tu\| = |t| \, \|u\| < r \Rightarrow |t| < \frac{r}{\|u\|} \right)$

Definim $\varphi : \left(\frac{-r}{\|u\|}, \frac{r}{\|u\|} \right) \to \mathbb{R}$ $\varphi(t) = f(a + tu)$

Pp. că a este un punct de maxim local și $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in B(a, r') \subseteq D$.

$\Rightarrow \varphi(t) \leq \varphi(0)$, $\forall t \in \left(-\frac{r'}{\|u\|}, \frac{r'}{\|u\|} \right) \Rightarrow 0$ punct de maxim local pt φ (1)

Dar φ difb în 0 (2)

$t \xrightarrow[h]{\text{deriv. în } 0.} a + tu \xrightarrow{\text{deriv. în } f(0) = a} f(a + tu)$ φ derivab. în 0.

T. Fermat $\Rightarrow \varphi'(0) = 0$. Dar $\varphi'(t) = df(a + tu)(u) \Rightarrow \varphi'(0) = df(a)(u)$

$\Rightarrow df(a)(u) = 0$ $\forall u \in \mathbb{R}, u \neq 0$. $\Big| \Rightarrow df(a) = 0$

$df(a)(0) = 0$

$\Downarrow$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad i = \overline{1, p}$

Def: Fie $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ difb, $a \in D$.

Spunem că a este punct critic pt f dacă $df(a) = 0$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0. \quad 0 \in \mathbb{R}$

0 nu este punct de extrem local

Def: Fie $B : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ biliniar simetric

$(B > 0)$ Atunci B s.n. poz. def. dc. $B(u, u) > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^p$ $u \neq 0$.

$(B < 0)$ B s.n. neg. def. dc. $B(u, u) < 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^p$, $u \neq 0$

$(B \geq 0)$ B s.n. poz. semidefinită dc. $B(u, u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^p$

$(B \leq 0)$ B s.n. neg. semidef. dc. $B(u, u) \leq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^p$

Teoremă: (I) Fie $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de cls. C^1, $a \in D$

1) a punct max local $\Rightarrow df(a) = 0$; $d^2 f(a) \leq 0$.

2) a punct min local $\Rightarrow df(a) = 0$; $d^2 f(a) \geq 0$.

(II) Dc. $\left. \begin{array}{l} df(a) = 0 \\ d^2 f(a) > 0 \end{array} \right| \Rightarrow$ min local

Dc. $\left. \begin{array}{l} df(a) = 0 \\ d^2 f(a) < 0 \end{array} \right| \Rightarrow$ maxim local