Examen

11 Februarie 2018

Timp de lucru 2h. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Aveți 3 subiecte, fiecare valorând 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

Fie X o variabilă aleatoare repartizată

$$\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

unde $\theta \in (0, 1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2, \dots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

Exercițiul 2

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbf{1}_{[\theta,+\infty)}(x)$$

cu $\theta > 0$, parametru necunoscut.

1. a) Determinați repartiția lui $\frac{X_1}{\theta} - 1$.
   b) Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestuia.
   c) Găsiți legea limită a lui $\tilde{\theta}$.
2. a) Determinați estimatorul $\hat{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda verosimilității maxime.
   b) Calculați eroarea pătratică medie a lui $\hat{\theta}$ și verificați dacă estimatorul este consistent.
   c) Construiți un interval de încredere pentru θ de nivel de încredere $1 - \alpha$.
   d) Pe care dintre cei doi estimatori îl preferați ?

Exercițiul 3

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = \frac{3}{(x-\theta)^4}\mathbf{1}_{[1+\theta,+\infty)}(x)$$

1. a) Calculați $\mathbb{E}_\theta[X_1]$, $Var_\theta(X_1)$ și funcția de repartiție $F_\theta(x)$ a lui X_1.

   b) În cazul în care $\theta = 2$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0,\,1]$: $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$ și $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

2. a) Determinați estimatorul $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestui estimator. Care este legea lui limită ?

   b) Găsiți un interval de încredere asimptotic de nivel de încredere de 95% pentru θ.

3. a) Exprimați în funcție de θ mediana repartiției lui X_1 și plecând de la aceasta găsiți un alt estimator $\hat{\theta}_n^Q$ al lui θ.

   b) Determinați legea lui limită a lui $\hat{\theta}_n^Q$ și arătați că, asimptotic, acesta este mai bun decât $\hat{\theta}_n^M$.

   c) Găsiți un interval de încredere asimptotic de nivel de încredere de 95% pentru θ.

4. a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n^{VM}$ a lui θ și verificați dacă este deplasat.

   b) Calculați funcția de repartiție a lui $\hat{\theta}_n^{VM} - \theta$.

   c) Pe care dintre cei trei estimatori îl preferați ?

EXAMEN STATISTICĂ

11 Februarie 2018

Exercițiul 1: $\mathbb{P}(X=k) = A(1+k)\cdot\theta^k$, $k\in\mathbb{N}$, $\theta\in(0,1)$

1) $A=?$, $\mathbb{E}[X]=?$, $Var(X)=?$

Avem $\sum_{k\geq 0} A(1+k)\cdot\theta^k = 1$

$$\sum_{k\geq 0} A(1+k)\theta^k = A\sum_{k\geq 0}(1+k)\theta^k = A\sum_{k\geq 0}\frac{d}{d\theta}\theta^{k+1} =$$

$$= A\frac{d}{d\theta}\sum_{k\geq 0}\theta^{k+1} = A\frac{d}{d\theta}\frac{\theta}{1-\theta} = A\frac{1-\cancel{\theta}+\cancel{\theta}}{(1-\theta)^2} =$$

$$= A\cdot\frac{1}{(1-\theta)^2} = 1 \Rightarrow \boxed{A=(1-\theta)^2}$$

$$\sum_{k\geq 0}\theta^{k+1} = \lim_{k\to\infty}(\theta+\theta^2+\dots+\theta^k) = \lim_{k\to\infty}\theta\frac{(\theta^k-1)}{\theta-1} =$$

$\theta^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $(\theta\in(0,1))$

$$= -\frac{\theta}{\theta-1} = \frac{\theta}{1-\theta}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\geq 0} k\cdot\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\geq 0} k(1-\theta)^2(1+k)\theta^k =$$

$$= \sum_{k\geq 1} k(1-\theta)^2(1+k)\theta^k = \sum_{k\geq 0}(1+k)(1-\theta)^2(2+k)\theta^{k+1} =$$

$$= \sum_{k\geq 0} 2(1+k)(1-\theta)^2\theta^{k+1} + \sum_{k\geq 0} k(1+k)(1-\theta)^2\theta^{k+1} > 0$$

$$= (1-\theta)^2\left(2\sum_{k\geq 0}(1+k)\theta^{k+1} + \sum_{k\geq 0}k(k+1)\theta^{k+1}\right) =$$

$$= 2(1-\theta)^2\cdot\theta\sum_{k\geq 0}(1+k)\theta^k + \theta\sum_{k\geq 0}(1-\theta)^2 k(k+1)\theta^k =$$

$$= 2(1-\theta)^2\cdot\theta\left(\sum_{k\geq 0}\theta^{k+1}\right)' + \theta\,\mathbb{E}[X] =$$

$$= 2(1-\theta)^2\cdot\theta\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)' + \theta\,\mathbb{E}[X] =$$

$$= 2\cancel{(1-\theta)^2}\theta\cdot\frac{1}{\cancel{(1-\theta)^2}} + \theta\,\mathbb{E}[X] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X](1-\theta) = 2\theta \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{2\theta}{1-\theta}$

$Var(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}^2[X_1]$

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \sum_{k\geq 0} k^2 \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\geq 0} k^2 (1-\theta)^2 (1+k)\theta^k =$$

$$= \sum_{k\geq 1} k^2 (1-\theta)^2 (k+1)\theta^k =$$

$$= \sum_{k\geq 0} (k+1)^2 (1-\theta)^2 (k+2)\theta^{k+1} =$$

$$= (1-\theta)^2 \sum_{k\geq 0} (k+1)(k^2+3k+2)\theta^{k+1} =$$

$$= (1-\theta)^2 \sum_{k\geq 0} (k+1)k^2\theta^{k+1} + 3(1-\theta)^2 \sum_{k\geq 0} (k+1)k\theta^{k+1} +$$

$$+ 2(1-\theta)^2 \sum_{k\geq 0} (k+1)\theta^{k+1} =$$

$$= \theta\, \mathbb{E}[X_1^2] + 3\theta\, \mathbb{E}[X_1] + 2\cancel{(1-\theta)^2}\cdot\theta \frac{1}{\cancel{(1-\theta)^2}} =$$

$$= \theta\, \mathbb{E}[X_1^2] + 3\theta \cdot \frac{2\theta}{1-\theta} + 2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_1^2](1-\theta) = \frac{6\theta^2 + 2\theta(1-\theta)}{1-\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_1^2] = \frac{6\theta^2 + 2\theta - 2\theta^2}{(1-\theta)^2} = \frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^2}$$

$$Var(X_1) = \frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^2} - \left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right)^2 = \frac{\cancel{4\theta^2}+2\theta-\cancel{4\theta^2}}{(1-\theta)^2} = \frac{2\theta}{(1-\theta)^2}$$

2) $\tilde{\theta} = ?$ şi $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0) = ?$

Metoda momentelor: $\mathbb{E}[X_1] = \overline{X_n}$, i.e.

$$\frac{2\theta}{1-\theta} = \overline{X_n} \Rightarrow 2\theta = \overline{X_n}(1-\theta) = \overline{X_n} - \theta\overline{X_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\overline{X_n}+2) = \overline{X_n} \Rightarrow \theta = \frac{\overline{X_n}}{2+\overline{X_n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\overline{X_n}}{2+\overline{X_n}}$$

$\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0) = \int \mathbb{1}_{\tilde{\theta}=0} \, d\mathbb{P}$

$$\mathbb{1}_{\tilde{\theta}=0} = \begin{cases} 1, & \tilde{\theta} = 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\tilde{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\overline{X_m}}{2+\overline{X_m}} = 0 \Rightarrow \overline{X_m} = 0$$

3) Estimatorul de verosimilitate max $\hat{\theta}_m = ?$, $\hat{\theta}_m$ - bine def

$$L(\theta; x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}_\theta(X = x_i) = \prod_{i=1}^{m} (1-\theta)^2 (1+x_i) \cdot \theta^{x_i} =$$

$$= (1-\theta)^{2m} (x_1+1) \dots (x_m+1)\, \theta^{\sum_{i=1}^{m} x_i}$$

$$l(\theta; x_1, \dots, x_m) = \log L(\theta; x_1, \dots, x_m) =$$

$$= 2m \log(1-\theta) + \log(x_1+1) + \dots + \log(x_m+1) + \sum_{i=1}^{m} x_i \log(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta; x_1, \dots, x_m) = -\frac{2m}{1-\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{\theta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2m\theta + \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot (1-\theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta\left(-2m - \sum_{i=1}^{m} x_i\right) + \sum_{i=1}^{m} x_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta\left(2m + \sum_{i=1}^{m} x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m} \cdot \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \hat{\theta}_m = \frac{\overline{X_m}}{2} + 1 = \frac{\overline{X_m}+2}{2} > 0$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_m$ e bine definit

4) Studiați consistența estimatorului $\hat{\theta}_m$ și det. legea lui limită

LNM: $\overline{X_m} \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}[X] = \frac{2\theta}{1-\theta}$

Fie $g(x) = \frac{x+2}{2}$, $\forall x$, g e continuă

Conform th. aplicațiilor continue $\Rightarrow g(\overline{X_m}) \xrightarrow{a.s.} g\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right)$

i.e. $$\frac{\overline{X_m}+2}{2} \xrightarrow{a.s.} \frac{\frac{2\theta}{1-\theta} + 2}{2} = \frac{2\theta+4}{2(1-\theta)} = \frac{\cancel{2}(\theta+2)}{\cancel{2}(1-\theta)} = \frac{\theta+2}{1-\theta}$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_m \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\theta+2}{1-\theta} \Rightarrow \hat{\theta}_m$ nu e consistent