Subiect pentru examenul scris la algebră, grupa 103

Numele şi prenumele ....

Subiectul 1: 15 puncte

5 p	a) Definește morfism de spații vectoriale.
5 p	b) Enunță Teorema Kronecker-Capelli și explică toate noțiunile care apar în enunț.
5 p	c) Dă exemplu de **R** - spațiu vectorial de dimensiune 2. Justifică exemplul dat.

Subiectul 2: 25 puncte

10 p	a) Fie $P = (XY + Z^2) (XZ + Y^2) (YZ + X^2) \in \mathbf{Q} [X, Y, Z]$. Scrie polinomul P în funcție de polinoamele simetrice fundamentale.
15 p	b) Fie V spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți complecși, de grad ≤ 2, peste corpul **C**. Notăm cu $f : V \to V$, aplicația definită prin $f (G) = G + G'$. Demonstrează că f este endomorfism de spații vectoriale, apoi determină forma canonică Jordan a lui f și polinomul său minimal.

Subiectul 3: 20 puncte

10 p	a) Enunță și demonstrează o proprietate a determinantului unei matrice pătratice.
10 p	b) Fie K un corp comutativ, fie *U, V* spații vectoriale de dimensiune finită peste K și fie $f : U \to V$ un morfism de spații vectoriale. Demonstrează că, dacă f este morfism injectiv, atunci $\Lambda^p(f) : \Lambda^p(U) \to \Lambda^p(V)$ este injectiv.

Subiectul 4: 20 puncte

15 p	a) Considerăm polinomul $P(X) = 8X^3 - 6X - 1 \in \mathbf{Q} [X]$. Folosind formula: $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$, arată că una din rădăcinile acestui polinom este $\cos(20^\circ)$. Exprimă $\cos(20^\circ)$ printr-o formulă cu radicali. Calculează apoi dimensiunea **Q** – subspațiului vectorial generat în **R** de $\{\cos(n \cdot 20^\circ) \mid n \in \mathbf{Z}\}$.
5 p	b) Fie *V* spațiul vectorial al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2, cu coeficienți în corpul $\mathbf{Z}_3$. Calculează dimensiunea $\mathbf{Z}_3$ – spațiului vectorial $V \otimes_{\mathbf{Z}_3} V$ și cardinalul acestei mulțimi.