Ex. 113

1.   (i) $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(ii) $X \cap Y = \{7,8,9\}$

(iii) $X \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,5,7,8,9\}$

(iv) $Y - \{4,5,6,8,9\} = \{3,7\}$

Sol :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	X	Y	Y	X	Y	XY	XY	XY

motiv: iv   iv   iv   iii   iii   iii   ii   ii   ii

Cf. tabelului $\Rightarrow X = \{1,2,5,7,8,9\}$

$$Y = \{3,4,6,7,8,9\}$$

2. $f : P(\{1,2,3,4\}) \rightarrow P(\{1,2,3,4,5\}) \times P(\{1,2,3\})$

$f(X) = (X \cup \{4,5\}, X \cap \{1,2,3\})$

Sol :

Pt. simplitate voi scrie direct ex : $\{1,2\} = 12$

$P(\{1,2,3,4\}) = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34,$
$123, 124, 234, 1234\}$

$f(\emptyset) = (\{4,5\}, \emptyset)$ $\qquad$ $f(\{1\}) = (\{1,4,5\}, \{1\})$

$A = \{ \{4,5\}, \{1,4,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,4,5\},$
$\qquad \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\} \}$

$B = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$

$\text{Im}(f) = (A, B) \quad A \times B$

$f(\{1,2,3\}) = (\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3\})$ $\quad \Big| \Rightarrow f(\{1,2,3\}) = f(\{1,2,3,5\})$
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad \Big| \; \text{dar } \{1,2,3\} \neq \{1,2,3,5\}$
$f(\{1,2,3,5\}) = (\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3\})$ $\Big| \Rightarrow f$ este
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad \text{non - injectivă}$

$A \neq \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \Rightarrow \text{Im}(f) \neq \text{codomeniu} \Rightarrow f$ este
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad \| \qquad \qquad \qquad \qquad \text{non - surjectivă}$
$\qquad \qquad \qquad \qquad \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \times \mathcal{P}(\{1,2,3\})$

§4. $M = \{ m \leq 259 \mid m \in \mathbb{N}^* \}$; $\text{card}(M) = 259$

$M_2 = \{ m \leq 259 \mid 2 \mid m, m \in \mathbb{N}^* \}$; $\text{card}(M_2) = 129$

$M_5 = \{ m \leq 259 \mid 5 \mid m, m \in \mathbb{N}^* \}$; $\text{card}(M_5) = 51$

$M_7 = \{ m \leq 259 \mid 7 \mid m, m \in \mathbb{N}^* \}$; $\text{card}(M_7) = 37$

Trebuie să aflu: $\text{card}(M) - \text{card}(M_2 \cup M_5 \cup M_7)$

$|M_2 \cup M_5 \cup M_7| = |M_2| + |M_5| + |M_7| - |M_2 \cap M_5| - |M_2 \cap M_7| -$
$- |M_5 \cap M_7| + |M_2 \cap M_5 \cap M_7|$

$M_2 \cap M_5 \Leftrightarrow M_{10}$; $\text{card}(M_{10}) = 25$ $\qquad M_2 \cap M_7 \Leftrightarrow M_{14}$; $\text{card}(M_{14}) = 18$

$M_5 \cap M_7 \Leftrightarrow M_{35}$; $card(M_{35}) = 7$; $M_2 \cap M_5 \cap M_7 \Leftrightarrow M_{70}$; $\overset{card(M...}{}$

$|M_2 \cup M_5 \cup M_7| = 129 + 51 + 37 - 25 - 18 - 7 = \overset{+3}{46} \ne 170$

$|M| - |M_2 \cup M_5 \cup M_7| = 259 - \overset{170}{46 7} = \cancel{92}\ 89$

5. $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - \sqrt{2})^2 + \left(y - \frac{1}{7}\right)^2$

P.p. că f este non-injectivă $\Rightarrow$ pt. $\forall\ x, y, u, v \in \mathbb{Z}$ cu

$f(x, y) = f(u, v)$ atunci $x \ne u$ şi $y \ne v$

$(x - \sqrt{2})^2 + \left(y - \frac{1}{7}\right)^2 = (u - \sqrt{2})^2 + \left(v - \frac{1}{7}\right)^2$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - \frac{2}{7}y + \frac{1}{49} = u^2 - 2\sqrt{2}u + 2 + v^2 - \frac{2}{7}v + \frac{1}{49}$

$x^2 - u^2 + y^2 - v^2 - \frac{2}{7}y + \frac{2}{7}v = 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}u$

$\qquad\qquad\qquad = 2\sqrt{2}(x - u)\ \Big|\cdot \frac{1}{x-u} \qquad x \ne u$

$\dfrac{x^2 - u^2 + y^2 - v^2 - \frac{2}{7}y + \frac{2}{7}v}{x - u} = 2\sqrt{2}$

Fals deoarece membrul stâng este un nr. raţional, iar membrul drept este unul iraţional.

$\Rightarrow$ p.p. făcută este falsă, deci f este injectivă

3. Fie $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - \sqrt{2})^2 + \left(y - \frac{1}{7}\right)^2 = AB^2$, unde

$A(x_A, y_A)$

$B\left(\sqrt{2}, \frac{1}{7}\right)$

Fie $\mathcal{C}(B, BC)$, unde C (x_C, y_C) este al 10-lea cel mai îndepărtat punct de coordonate întregi de centru.

Cf. ex. 5 f este injectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists\, D(x_D, y_D)$ $\left(x_D, y_D \in \mathbb{Z} \text{ și } x_D \neq x_C, y_D \neq y_C\right)$ a. î.:

$$AB^2 = DB^2 \Longrightarrow AB = DB$$

$$CB^2 = DB^2 \Longleftrightarrow CB = DB$$

$\widehat{\text{Î}}$n concluzie, $\mathcal{C}(B, BC)$ are exact 10 pct. de coordonate întregi datorită injectivității funcției f.

(Acest caz se poate generaliza pt. un cerc cu exact m pct. de coordonate întregi.)

Gr. 113

16. Fie tabla

*	1	2
1	1	2
2	2	1

$\{1, 2\}$ (1)

$(1 * 1) * 1 = 1 * (1 * 1) \Leftrightarrow 1 * 1 = 1 * 1$ A

$(1 * 1) * 2 = 1 * (1 * 2) \Leftrightarrow 1 * 2 = 1 * 2$ A

$(1 * 2) * 1 = 1 * (2 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 1 * 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ A

$(2 * 1) * 1 = 2 * (1 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 2 * 1$ A

$(1 * 2) * 2 = 1 * (2 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 1 * 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ A

$(2 * 1) * 2 = 2 * (1 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 2 * 2$ A

$(2 * 1) * 1 = 2 * (1 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 2 * 1$ A

$(2 * 2) * 2 = 2 * (2 * 2) \Leftrightarrow 1 * 2 = 2 * 1 \Leftrightarrow 2 = 2$ A

Fie tabla

*	1	2
1	1	2
2	2	2

$\{1, 2\}$ (2)

$(1 * 1) * 1 = 1 * (1 * 1) \Leftrightarrow 1 * 1 = 1 * 1$ A

$(1 * 1) * 2 = 1 * (1 * 2) \Leftrightarrow 1 * 2 = 1 * 2$ A

$(1 * 2) * 1 = 1 * (2 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 1 * 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ A

$(2 * 1) * 1 = 2 * (1 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 2 * 1$ A

$(1 * 2) * 2 = 1 * (2 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 1 * 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ A

$(2 * 1) * 2 = 2 * (1 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 2 * 2$ A

$(2 * 1) * 1 = 2 * (1 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 2 * 1$ A

$(2 * 2) * 2 = 2 * (2 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 2 * 2$ A

Fie tabla

*	1	2
1	2	1
2	1	1

(3)

$\{1,2\}$

$(1*1)*1 = 1*(1*1) \Leftrightarrow 2*1 = 1*2 \Leftrightarrow 1=1 \; A$

$(1*1)*2 = 1*(1*2) \Leftrightarrow 2*2 = 1*1 \Leftrightarrow 1=2 \; F$

$(1*1)*2 \neq 1*(1*2) \Rightarrow$ Tabla (3) nu este semigrup pe $\{1,2\}$

Fie tabela

*	1	2
1	2	2
2	1	1

(4)

$\{1,2\}$

$(1*1)*1 = 1*(1*1) \Leftrightarrow 2*1 = 1*2 \Leftrightarrow 1=2 \; F$

$(1*1)*1 \neq 1*(1*1) \Rightarrow$ Tabla (5) nu este semigrup pe $\{1,2\}$

În concluzie, doar tablele (1) și (2) sunt semigrupuri pe $\{1,2\}$

18. Submonoizii de ordinul 3 al lui $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ trebuie să fie parte stabilă și să conțină el. neutru, $\hat{1}$, iar asociativitatea are loc pe înmulțirea claselor de resturi.

$M_4 = (\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}, \cdot)$ – submonoid (parte stabilă)

din ex. 30

$(\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}\}, \cdot)$ – submonoid (parte stabilă)

$(\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}\}, \cdot)$ – submonoid (parte stabilă)

$(\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{5}\}, \cdot)$ – submonoid (parte stabilă)

$M_5 = (\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}, \cdot)$ – submonoid (parte stabilă : $\hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{2} \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$)

din ex. 30 $(\{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}, \cdot)$ – submonoid (parte stabilă: $\hat{3} \cdot \hat{5} = \hat{3} \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$)

$A = \left\{ \in \dfrac{a}{2b+1} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$

$\underline{(A, \cdot) - \text{monoid}}$

Fie $\dfrac{a}{2b+1} \in A$ și $\dfrac{c}{2d+1} \in A$

$\dfrac{a}{2b+1} \cdot \dfrac{c}{2d+1} = \dfrac{ac}{4bd + 2b + 2d + 1} = \dfrac{(ac)}{2(2bd + b + d) + 1} \in A$

$ac \in \mathbb{N}$
$2bd + b + d \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow A$ e parte stabilă

$\dfrac{a}{2b+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A \subset \mathbb{Q}$
„·" este asociativă pe $\mathbb{Q}$ $\Bigg| \Rightarrow$ „·" este asociativă pe A

A admite el. neutru 1 pt. $a = 1$ și $b = 0$

$\Rightarrow (A, \cdot)$ monoid

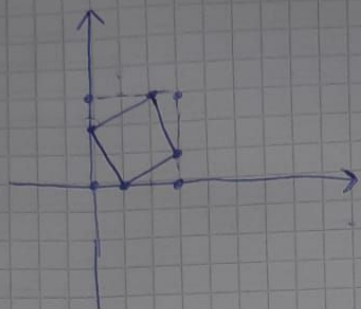Fie $x \in A$ și $x' \in A$ a.î. $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$

$\dfrac{a}{2b+1} \cdot x' = x' \cdot \dfrac{a}{2b+1} = 1$

$x' = \dfrac{2b+1}{a} \Rightarrow U(A) = \left\{ a \in \mathbb{N}^*, a = 2k+1, k \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \right\}$

Tema 5

21.

$\text{sim}(F) = \langle P \rangle$, unde P este pătratul cu vârfurile $(0,0)$,
$(3,0), (3,3), (0,3)$
Dacă aplic o rotație lui P pot ajunge
la același pătrat.

22. $(\mathbb{Z}_m, +)$, $m < 22$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}_{22}, +)$ dacă:

$\forall \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_m \Rightarrow [\hat{a} + (-\hat{b})] \in \mathbb{Z}_m$

$\left. \begin{array}{l} \hat{a} \in \mathbb{Z}_m \\ (-\hat{b}) \in \mathbb{Z}_m \end{array} \right| \Rightarrow [\hat{a} + (-\hat{b})] \in \mathbb{Z}_m \Rightarrow$ pt. $\forall m < 22 \Rightarrow (\mathbb{Z}_m, +)$ subgr.
al lui $(\mathbb{Z}_{22}, +)$

Subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{22}$ sunt: $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \ldots, \mathbb{Z}_{21}$

23. $(\mathbb{Z}_m, \cdot) \subset (\mathbb{Z}_m - \{\hat{0}\}, \cdot)$, $m < 23$ și m nr. prim $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_m - \{\hat{0}\}$

$\left. \begin{array}{l} \hat{a} \in \mathbb{Z}_m - \{\hat{0}\} \\ \hat{b}^{-1} \in \mathbb{Z}_m - \{\hat{0}\} \end{array} \right| \Rightarrow (\hat{a} \cdot \hat{b}^{-1}) \in \mathbb{Z}_m^{-\{\hat{0}\}} \Rightarrow (\mathbb{Z}_m - \{\hat{0}\}, \cdot)$

m nr. prim $\Rightarrow \hat{b}^{-1} \in \mathbb{Z}_m - \{\hat{0}\}$

subgr. al lui
$(\mathbb{Z}_{23} - \{\hat{0}\}, \cdot)$

Subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{23} - \{\hat{0}\}$ sunt: $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11},$
$\mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_{17}, \mathbb{Z}_{19}$