

## Examen<sup>1</sup> la Analiză Complexă, seria 20, 30.06.2023

Nume și prenume: \_\_\_\_\_

Grupa: \_\_\_\_\_

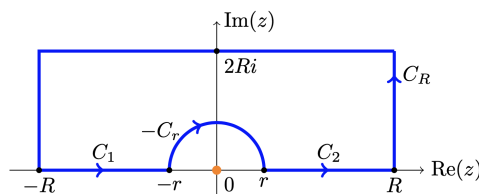
### Subiectul I

1. Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f(x + iy) = x^2 - axy^2 - y^2 + ibxy$  să fie olomoră pe  $\mathbb{C}$ . (0,5p)
2. Dați exemplu de  $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ , olomoră, cu poli simpli în 0 și 1, astfel încât  $\text{res}(f, 0) = \text{res}(f, 1) = 1$ . (0,5p)
3. Determinați seria Taylor a funcției olomorfe  $f(z) = \cosh z + \cos z$  în punctul  $z_0 = 0$ . (0,5p)
4. Justificați dacă este adevărată sau falsă afirmația: *dacă funcția olomoră  $f(z)$  are pol de ordin 3 în punctul  $z_0$ , atunci  $f(z^2)$  are pol de ordin 6 în  $z_0$* . (0,5p)
5. Demonstrați că  $\sinh(z) = -i \sin(iz)$  pentru orice  $z \in \mathbb{C}$ . (0,5p)
6. Considerăm funcția  $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$ . Determinați polii funcției  $f$  și ordinele lor și calculați  $\text{res}(f, 0)$ . (1p)

### Subiectul II

1. Determinați numărul soluțiilor ecuației  $z^5 + 9z^3 + 2z^2 + 12 = 0$  din coroana circulară  $A = \{1 < |z| < 2\}$ . (1p)
2. Considerăm funcția  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ .
  - a) Determinați  $\text{res}(f, 0)$ . (0,25p)
  - b) Demonstrați că  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-C_r} f(z) dz = -i\pi$ , unde  $-C_r$  este semicercul din semiplanul superior centrat în 0, de rază  $r$ , orientat în sens invers trigonometric (din desenul de mai jos). (0,75p)
  - c) Calculați  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx$ . (1p)

**Hint:** Folosim Teorema Cauchy pentru funcția  $f$  definită mai sus și conturul de integrare din desenul următor:



3. Considerăm domeniul  $T = \{x + iy \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$  și funcția  $f(z) = \frac{1}{z}$ .
  - a) Reprezentați în plan mulțimea  $T$ . (0,5p)
  - b) Reprezentați în plan mulțimea  $f(T)$ . (1p)
4. Demonstrați (fără a folosi teorema Picard) că dacă  $f$  este o funcție întregă și  $f(\mathbb{C}) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ , atunci  $f$  este constantă. (1p)

<sup>1</sup>Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 2h 30m. Succes!