Dinoiu Nadia-Ștefania

Stoian Anamaria Roberta

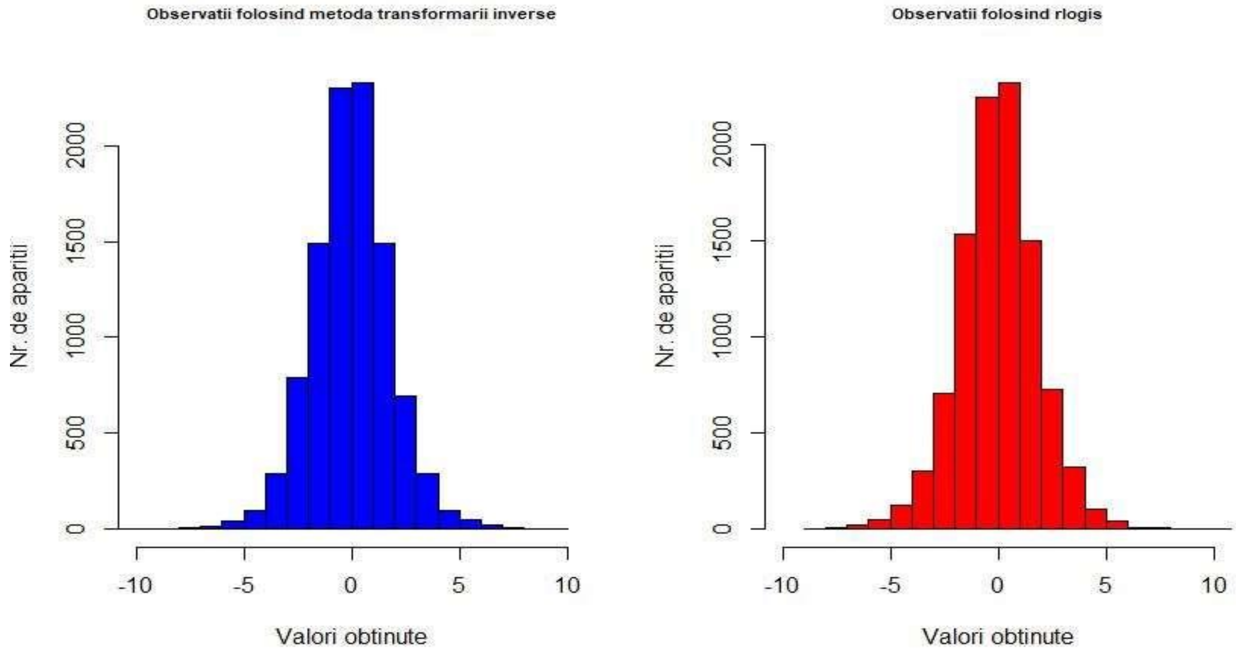
Grupa 311

Proiect la statistică

Exercițiul 1:

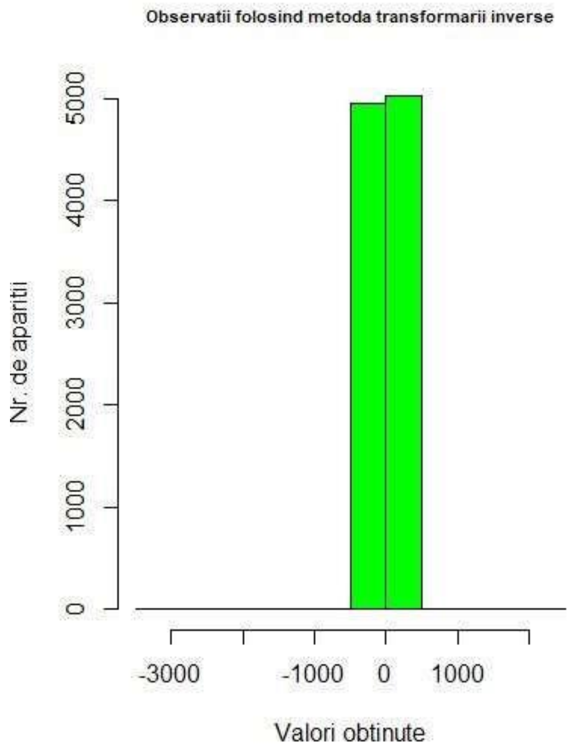
a) Funcția de repartiție este continuă, deci inversa ei este $f(y)=\mu+\beta*\ln(u/(1-u))$, unde $\mu=0$ și $\beta=1$.

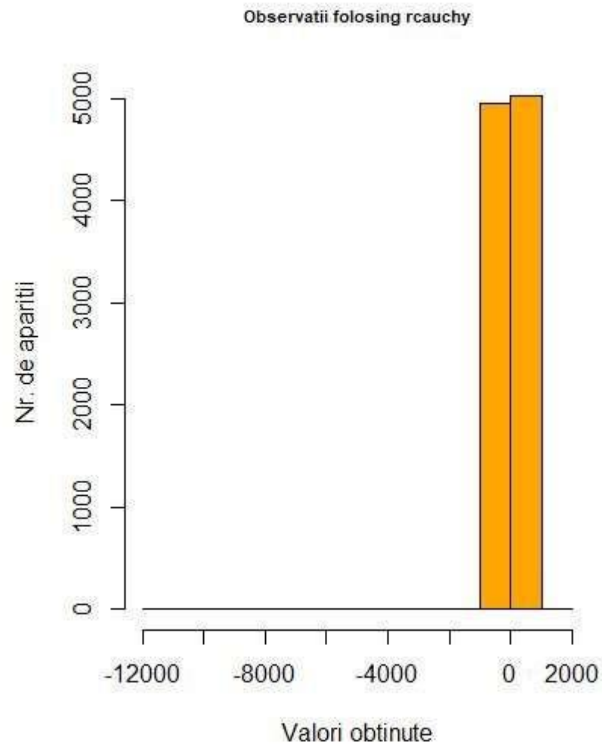
```
n=10000

valRepLogistica=function(nr) {

  u=runif(nr) #10000 de observatii dintr-o uniforma
  return (log(u/(1-u))) #inversa functiei de repartitie
}
test1=valRepLogistica(n)
test2=rlogis(n)

par(mfrow=c(1,2)) #afisam 2 grafice pe o linie

hist(test1,
     main="Observatii folosind metoda transformarii inverse",
     xlab="Valori obtinute",
     ylab="Nr. de aparitii",
     xlim=c(-10, 10),
     cex.main=0.7,
     col="blue");
hist(test2,
     main="Observatii folosind rlogis",
     xlab="Valori obtinute",
     ylab="Nr. de aparitii",
     xlim=c(-10, 10),
     cex.main=0.7,
     col="red");
```



b) De asemenea, funcția de repartiție este continua, având inversa f(y)=β*tan(π*(u-1/2))+μ, unde β=1, μ=0.

```
n=10000

valorRepCauchy=function(nr){

  u=runif(nr) #10000 de observatii dintr-o uniforma
  return(tan(pi*(u-1/2))) #inversa functiei date
}

test1=valorRepCauchy(n) #observatii metoda inversei
test2=rcauchy(n,0,1) #observatii metoda rcauchy

par(mfrow=c(1,2)) #afisam 2 grafice pe o linie

hist(test1,
     main="Observatii folosind metoda transformarii inverse",
     xlab="Valori obtinute",
     ylab="Nr. de aparitii",
     cex.main=0.7,
     col="green");

hist(test2,
     main="Observatii folosing rcauchy",
     xlab="Valori obtinute",
     ylab="Nr. de aparitii",
     cex.main=0.7,
     col="orange");
```





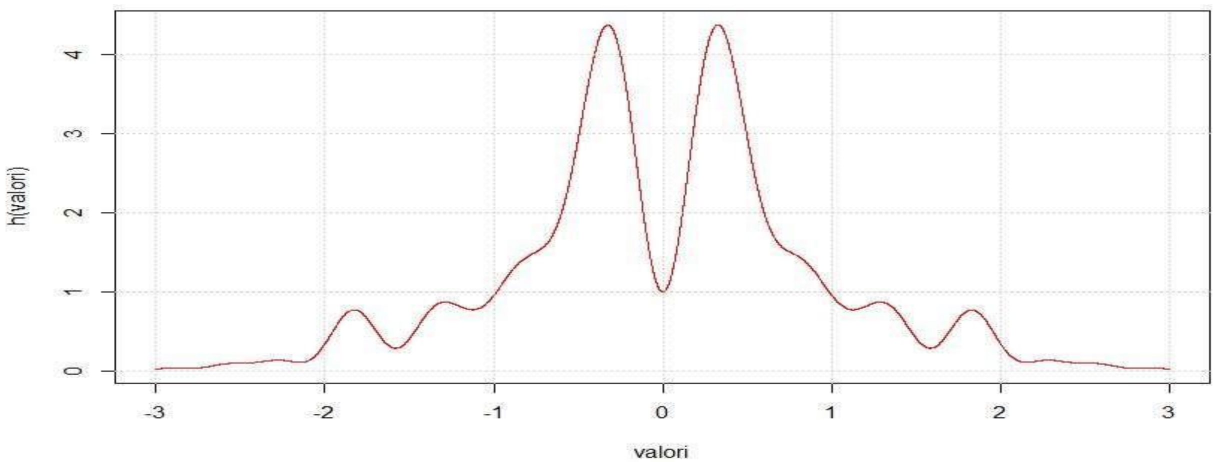
Exercițiul 2:

Am notat expresia $e^{(-x^2)/2}[\sin(6x)^2+3\cos(x)^2\sin(4x)^2+1]$ cu h(x). Considerăm f(x) proporțională cu h(x). Deci, f(x)=C*h(x).

Pentru a determina constanta de normalizare, generăm mai întâi observații sub aria determinată de h(x).

Graficul lui h(x):

```
h=function(x){
  return (exp(-x^2/2)*(sin(6*x)^2+3*(cos(x^2))^2*(sin(4*x))^2+1))
}
valori=seq(-3,3,0.0005)
plot(valori, h(valori), type="l", col="red")
grid(nx=NULL, col="lightgray", lty="dotted",lwd=par("lwd"),equilogs=TRUE)
```



Pentru a găsi constanta M, trebuie să studiem maximul funcției dată de raportul:

$\frac{h(x)}{g(x)}=\sqrt{2\pi}[\sin(6x)^2+3\cos(x)^2\sin(4x)^2+1]$

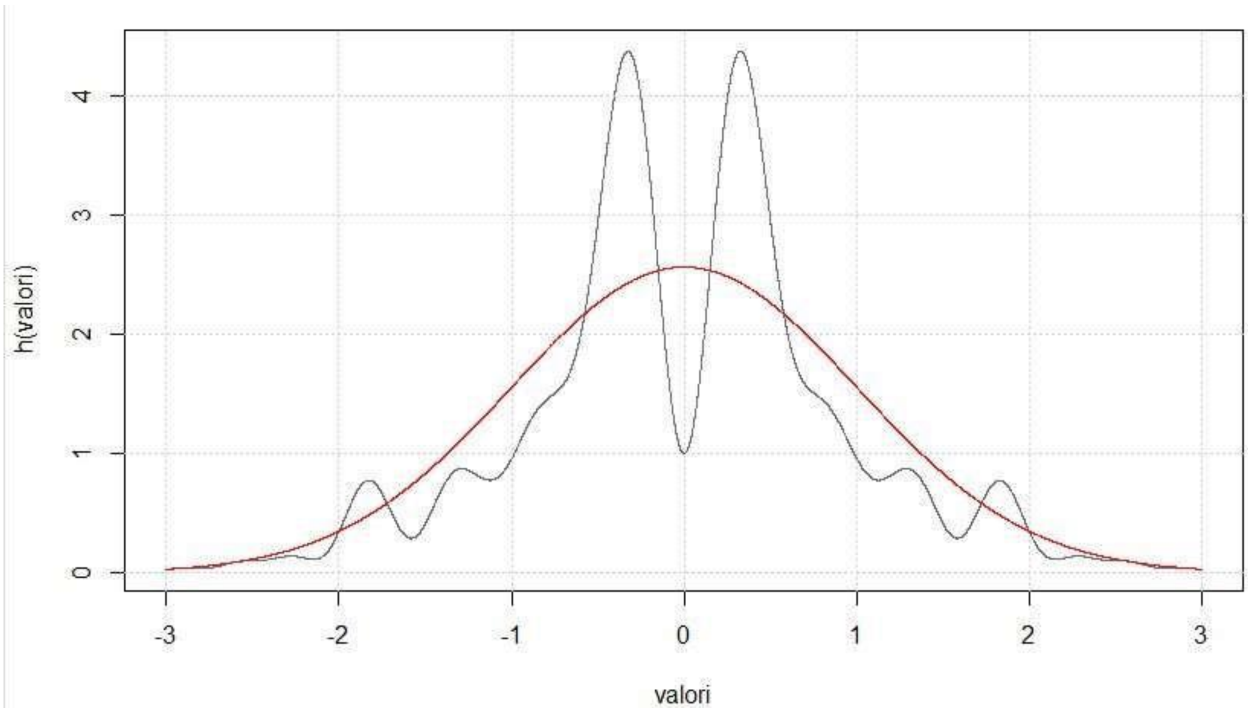
În acest sens, vom folosi funcția predefinită OPTIMISE, așa cum ni s-a sugerat.

```
raport = function(x) {
  return ( sqrt(2*pi) * ( sin(6*x)^2 + 3*(cos(x))^2 * (sin(4*x))^2 + 1) )
}
M = optimise(raport, c(-0.3,0), maximum = TRUE)
M[2]
```

$`objective`
[1] 10.84551

Ne vom folosi de valoarea găsită pentru M ca să mărginim graficul funcției h(x).

```
raport = function(x) {
  return ( sqrt(2*pi) * ( sin(6*x^2) + 3*cos(x^2) * sin(4*x^2) + 1) )
}
M=optimise(raport, c(-0.3,0), maximum = TRUE)
valori = seq(-3,3, 0.0005)
plot(valori, h(valori), type="l", col = "dimgray")
grid(nx = NULL, col = "lightgray", lty = "dotted",
     lwd = par("lwd"), equilogs = TRUE)
lines(valori, dnorm(valori)*M[[2]], col = "red")
```



Urmează să ne folosim de metoda respingerii și să păstrăm valorile acceptate.

```
valoriRetinute = c()
n = 2500 #numar de incercari
contor = 0 #numaram incercarile bune
i = 1
while( i <= n ) {
  u = runif(1,0,1) #generez o observatie din uniforma
  x = rnorm(1,0,1) #generez o observatie din normala standard
  if( u <= h(x)/(M[[2]]*dnorm(x))) {
    valoriRetinute[contor] = x
    contor = contor + 1
  }
  i=i + 1
}
#Astfel procentul de valori obtinute este:
p = contor/n
p
```

[1] 0.8056

După cum am notat, $\int h(x)=\int \frac{f(x)}{c}$. Cum $\int f(x)=1$ și $\int h(x)=\int \frac{f(x)}{c}$, atunci $pM=\frac{1}{c}$,deci $C=\frac{1}{pM}$.

```
M[[2]]*p #integrala lui h
```

[1] 5.18215

```
integrate(h, -Inf, Inf)
```

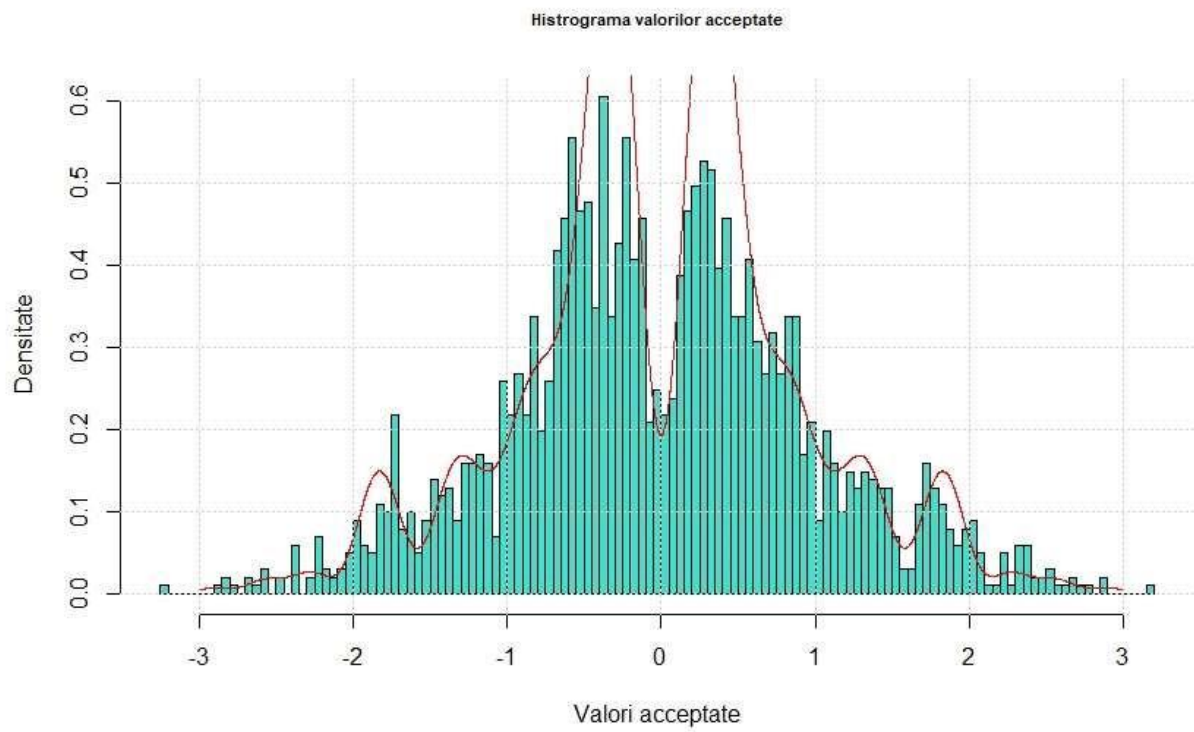
6.252033 with absolute error < 0.00037

```
normF = 1/(M[[2]]*p) #calcuez valoarea aproximativa a constantei
normF
```

[1] 0.1929701

Știind constanta C, putem afla f(x).

```
hist(valoriRetinute, breaks = 100, freq = FALSE, col = "turquoise",
     xlab = "Valori acceptate",
     ylab = "Densitate",
     main = "Histrograma valorilor acceptate",
     cex.main = 0.7) #histrograma valorilor acceptate
lines(valori, normF*h(valori), col = "red", type="l") #graficul functiei normalizate
grid(nx = NULL, col = "lightgray", lty = "dotted",
     lwd = par("lwd"), equilogs = TRUE)
```



Histograma valorilor obținute nu se așează perfect sub graficul funcției normalizate, deoarece nu am generat observații sub graficul lui h(x).

Exercițiul 3:

Fie funcția de repartiție Poisson :

$f_\theta(x) = \frac{\theta^x * e^{-\theta}}{x!}$ unde x in **N** ∪ {0};

Logaritmăm funcția de repartiție Poisson și calculăm derivata I și a II-a ale acesteia:

$$\ln f_\theta(x) = \ln(\theta^x * e^{-\theta}) - \ln(x!) = x * \ln\theta - \theta - \ln(x!)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(x) = \frac{x}{\theta} - 1$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^2}^2 \ln f_\theta(x) = - \frac{x}{\theta^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(x)\right] = \mathbb{E}\left[-\frac{x}{\partial\theta^2}\right] = - \frac{x}{\theta^2}$$

Calculam Marginea Inferioară Rao-Cramer :

$$\text{MIRC} = \frac{1}{-n*(-\frac{x}{\theta^2})} = \frac{\theta^2}{n*x}$$

Codul aferent fiind :

```
lnf1 <- expression(log(lambda^x*exp(-lambda)/factorial(x)))    #logaritmam functia de repartitie Poissoin
deriv1 <- D(lnf1,'lambda')                                     #derivara 1 a functiei de mai sus
deriv2 <- D(deriv1,'lambda')                                   #derivata a 2-a a functiei de mai sus


frcpois <- function(n,lambda,esantion) {

  derivata2 <- function(lambda,esantion) {
    (lambda^((esantion - 1) - 1) * (esantion - 1) * esantion * exp(-lambda) -
       lambda^(esantion - 1) * esantion * exp(-lambda) - (lambda^(esantion - 1) * esantion * exp(-lambda) -
        lambda^esantion * exp(-lambda)))/factorial(esantion)/(lambda^esantion * exp(-lambda)/factorial(esantion)) -
      (lambda^(esantion - 1) * esantion * exp(-lambda) - lambda^esantion * exp(-lambda))/factorial(esantion) *
      ((lambda^(esantion - 1) * esantion * exp(-lambda) - lambda^esantion * exp(-lambda))/factorial(esantion))/(lambda^esantion *
                                                                                                 exp(-lambda)/factorial(esantion))^2
  }


  #rezultatul derivatei a doua

  MIRC <- 1/(-n*mean(eval(derivata2(lambda,esantion))))
  return(MIRC)
}
```

Fie functia de repartiție Exponențială:

$f_\theta(x) = \theta * e^{-\theta x}$

Logaritmăm funcția de repartiție Exponențială și calculăm derivata I și a II-a ale acesteia:

$$\ln f_\theta(x) = \ln(\theta * e^{-\theta x}) = \ln\theta - \theta x$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} - x$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^2}^2 \ln f_\theta(x) = - \frac{1}{\theta^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(x)\right] = \mathbb{E}\left[-\frac{1}{\partial\theta^2}\right] = - \frac{1}{\theta^2}$$

Calculăm marginea inferioară Rao-Cramer:

$$\text{MIRC} = \frac{1}{-n*(-\frac{1}{\theta^2})} = \frac{\theta^2}{n}$$

Codul aferent:

```
lnf2<- expression(log(lambda*exp(-lambda*x)))        #logaritmam functia de repartitie Exponentiala

deriv1 <- D(lnf2,'lambda')                           #derivata 1 a functiei de mai sus
deriv2 <- D(deriv1,'lambda')                         #derivata a 2-a a functiei de mai sus

frcexp <- function(n,esantion,lambda) {

  derivata2 <- function(lambda,esantion) {

    -((exp(-lambda * esantion) * esantion + ((exp(-lambda * esantion) * esantion) - lambda *
                                              (exp(-lambda * esantion) * esantion * esantion)))/(lambda * exp(-lambda * esantion)) +
        (exp(-lambda * esantion) - lambda * (exp(-lambda * esantion) * esantion)) * (exp(-lambda * esantion) -
                                             lambda * (exp(-lambda * esantion) * esantion))/(lambda * exp(-lambda * esantion))^2)
  }

  #rezultatul derivatei a doua

  MIRC <- 1/(-n*mean(eval(derivata2(lambda,esantion))))
  return(MIRC)
}
```

Exercițiul 5:

a) Fie u o observație a lui U, repartizată uniform și funcția de repartiție Logistică:

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

Calculăm inversa funcției de repartiție:

$$\text{F(x)} = \text{u} \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}} = u \Leftrightarrow 1+e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} = \frac{1}{u} \Leftrightarrow e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} = \frac{1}{u} - 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{u} - 1\right) = -\frac{x-\mu}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$-\ln\left(\frac{1-u}{u}\right) = \frac{x-\mu}{\beta} \Leftrightarrow x - \mu = -\beta * \ln\left(\frac{1-u}{u}\right) \Leftrightarrow x = -\beta * \ln\left(\frac{1-u}{u}\right) + \mu \Leftrightarrow$$

$$x = \mu - \beta * (\ln(1-u) - \ln(u)) \Leftrightarrow x = \mu - \beta * \ln(1-u) + \beta * \ln(u)$$

Calculăm funcția de verosimilitate:

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}{\beta * \left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\right)^2}$$

Codul aferent:

```
rlogistic <- function(n,miu,beta){
  U <- runif(n)
  X <- miu+beta*log(U)-beta*log(1-U)          #inversa functiei de repartitie
  return(X)
}

g <- rlogistic(n,0,1)
L <- 1;
beta <- 10;

ver1 <- function(miu){
for(i in 1:n){
  L <- L*exp(-(g[i]-miu)/beta)/beta*(1+exp(-(g[i]-miu)/beta))^2;
}
  return(L)
}
```

Fie u o observație a lui U, repartizată uniform și funcția de repartiție Cauchy:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} * arctan(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

Calculăm inversa funcției de repartiție:

$$\mathrm{F(x) = u} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} * arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{u} \Leftrightarrow u - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} * arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Leftrightarrow$$

$$\pi * \left(u - \frac{1}{2}\right) = arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \tan\left(\pi * \left(u - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x - \mu = \sigma * \tan\left(\pi * \left(u - \frac{1}{2}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$x = \mu + \sigma * \tan\left(\pi * \left(u - \frac{1}{2}\right)\right) \Leftrightarrow x = \mu + \sigma * \tan\left(\pi * \left(\frac{2*u-1}{2}\right)\right)$$

Calculăm funcția de verosimilitate:

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi * \sigma} * \frac{1}{1 + (\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

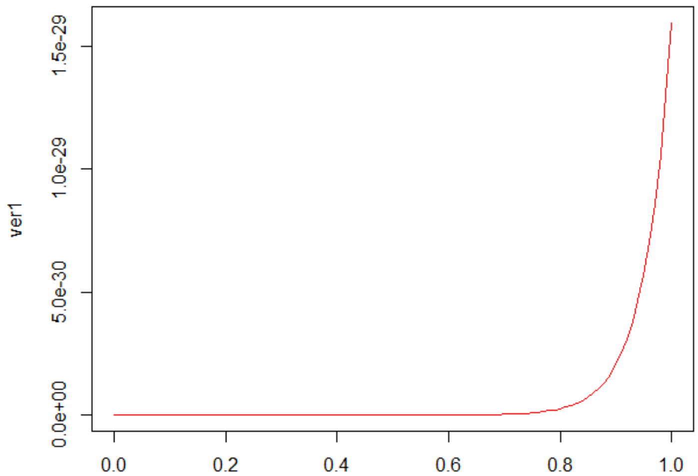
Codul aferent:

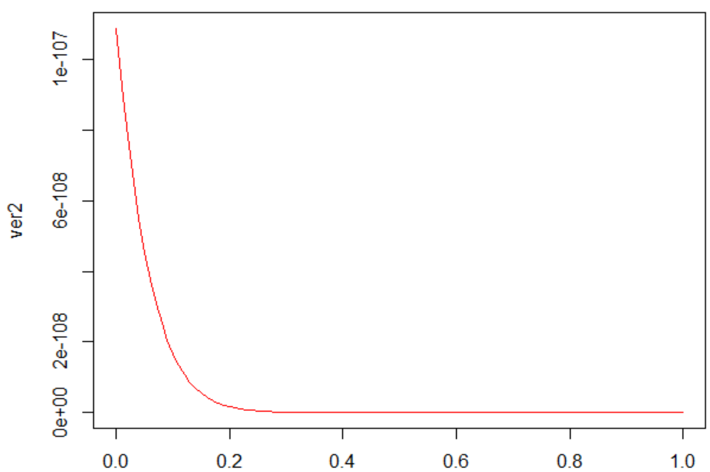
```
rCauchy1 <- function(nr,miu,sigma){
  U <- runif(100000)
  X <- miu+sigma*tan(pi*(2*U-1/2))
  return(X)
}

f <- rCauchy1(1000,0,1)
sigma <- 1;

fverosimil2 <- function(miu){
  for(i in 1:100){
    L <- L*(1/(pi*sigma))*1/(1+((f[i]-miu)/sigma)^2)
  }
  return(L)
}
```

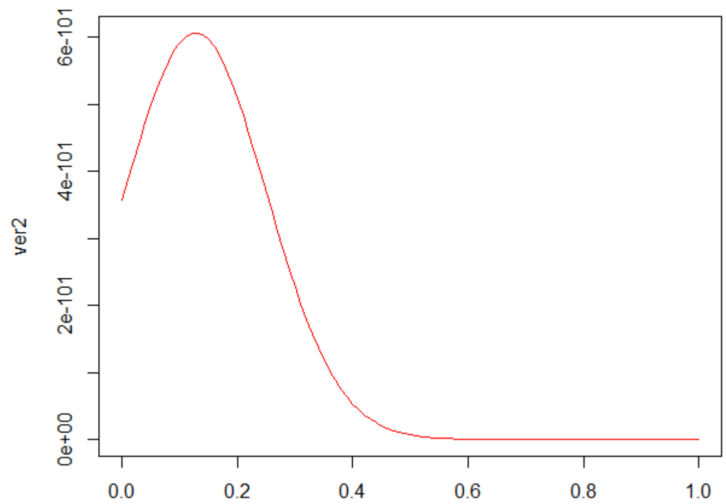
b) Graficele au fost obținute prin codul aferent:

```
plot(ver1, col="red")
miu_optim1 <- optimise(ver1,lower=0,upper=1)

plot(ver2, col="red")
miu_optim2 <- optimise(ver2,lower=0,upper=1)
```

Graficele obținute:







ver2
6e-101
4e-101
2e-101
0e+00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0