Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

9 februarie 2019

| | |
|---|---|
| **NUME:** | ................................... |
| **PRENUME:** | ................................... |
| **GRUPA:** | ................................... |

**Examen Analiză Numerică & Metode Numerice**
**Matematică Aplicată & Matematică-Informatică, Anul III**

I. (a) Prezentaţi algoritmul metodei secantei.

(b) Enumeraţi avantajele şi dezavantajele metodei secantei (i.e. cerinţele, dependenţa de prima aproximare, izolarea soluţiei, viteza de convergenţă a metodei).

(c) Determinaţi relaţia dintre două erori consecutive ale şirului de aproximări date de metoda secantei.

(d) Propuneţi o metodă iterativă de punct fix cu viteza de convergenţă pătratică pentru determinarea unei soluţii, $x^\star \in [a,b]$, cu ordinul de multiplicitate $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, a ecuaţiei neliniare $f(x) = 0$, $x \in [a,b]$, presupunând că ordinul de multiplicitate este cunoscut.

Justificaţi răspunsul demonstrând că metoda iterativă propusă este o metodă iterativă de punct fix cu viteza de convergenţă pătratică.

II. Fie $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$, o matrice tridiagonală astfel încât

$$a_{ii} = 2, \quad i = \overline{1,n}\,; \qquad a_{i,\,i+1} = a_{i+1,\,i} = -1, \quad i = \overline{1,n-1}\,;$$

şi matricele $\mathbf{A}^{(k)} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,k}} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$, $k = \overline{1,n}$.

(a) Daţi definiţia normelor matriciale $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_\infty$, precum şi formulele de calcul ale acestora. Calculaţi $\|\mathbf{A}\|_1$ şi $\|\mathbf{A}\|_\infty$.

(b) Calculaţi $\det\left(\mathbf{A}^{(k)}\right)$, $k = \overline{1,n}$, şi arătaţi că matricea $\mathbf{A}$ admite factorizarea LU fără pivotare, i.e. $\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$, unde $\mathbf{L} = \left(\ell_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ inferior triunghiulară, cu $\ell_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$, şi $\mathbf{U} = \left(u_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ superior triunghiulară.

(c) Determinaţi $\ell_{ij}$ şi $u_{ij}$, $i,j = \overline{1,n}$.

III. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ fixat şi nodurile echidistante $x_0 = x - h$, $x_1 = x$ şi $x_2 = x + h$, unde $h > 0$.

(a) Determinaţi polinomul de interpolare Lagrange, $P_2 \in \mathscr{P}_2$, asociat funcţiei $f$ şi nodurilor de interpolare $x_0$, $x_1$ şi $x_2$.

(b) Dacă $f \in \mathrm{C}^3[x_0,x_2]$, aplicaţi teorema de interpolare Lagrange pentru $f(y)$ şi $P_2(y)$, unde $y \in [x_0,x_2]$.

(c) Folosind (a) şi (b), determinaţi formula de aproximare cu diferenţe finite centrale pentru $f'(x)$ şi ordinul său de aproximare.

(d) Aplicaţi un pas al metodei de extrapolare Richardson pentru formula de aproximare cu diferenţe finite centrale obţinută la punctul (c).

IV. O formulă de cuadratură pentru funcţiile integrabile $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, notată cu $\widetilde{I}(f)$, foloseşte nodurile $x_0 = -\alpha$ şi $x_1 = \alpha$, unde $\alpha \in (0, 1]$, şi ponderile $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$.

(a) Dacă formula de cuadratură $\widetilde{I}(f)$ este exactă pentru orice $f \in \mathscr{P}_1$, arătaţi că $w_0 = w_1 = 1$ independent de valoarea lui $\alpha \in (0, 1]$.

(b) Determinaţi $\alpha \in (0, 1]$ pentru care formula de cuadratură $\widetilde{I}(f)$ este exactă pentru orice $f \in \mathscr{P}_2$. Arătaţi că, în acest caz, formula de cuadratură $\widetilde{I}(f)$ este exactă pentru orice $f \in \mathscr{P}_3$.

(c) Aproximaţi integrala $I(f) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ prin formula de cuadratură sumată a trapezului pentru $m \in \mathbb{N}^\star$ subintervale egale. Rezultatul trebuie obţinut în formă închisă.

(d) Să se arate că în cazul formulelor de cuadratură Newton-Cotes închise cu $n+1$ noduri de interpolare, $x_k$, $k = \overline{0, n}$, pentru o funcţie integrabilă $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, ponderile, $w_k$, $k = \overline{0, n}$, satisfac relaţia:

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_n = b - a \,.$$

**BAREM:**

| Problema | Oficiu | (a) | (b) | (c) | (d) |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| II | 1 | 3 | 3 | 4 | – |
| III | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| IV | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 |

**TIMP DE LUCRU: 180 minute**