Curs geometrie III.

Spații vectoriale. Subspații vectoriale

Operații cu subspații vectoriale

Teorema Grassmann

OBS. $(V,+,\cdot)/_{K}$ sp. vectorial finit generat

$B=\{e_1,e_n\}$ s.n. bază $\Leftrightarrow$

① B este sistem liniar independent $\Leftrightarrow$
$[(\forall)\ a_1,\dots,a_m\in K\ a_1e_1+\dots+a_ne_n=0\Rightarrow$
$\Rightarrow a_1=\dots=a_m=0_K]$ (orice implicație nulă este trivială)

② B este sistem de generatori $\Leftrightarrow$
$\forall x\in V,\ \exists\ a_1,\dots,a_m\in K$ a. î. $x=a_1e_1+\dots+a_ne_n\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle B\rangle=V$

- $\forall$ 2 baze ale unui sp. vectorial au același cardinal card $n=\dim_K V$
- o bază ordonată s. n. reper
- Componentele unui vector în raport cu un reper $R=\{e_1,\dots,e_n\}$
  $\forall x\in V,\ \exists!\ (a_1,\dots,a_n)\in K^n$ a.î. $x=a_1e_1+\dots+a_ne_n$
  (există, unice)

Modificarea componentelor unui vector la schimbarea reperului

$R=\{e_1,\dots,e_n\}\xrightarrow{A=(a_{ji})_{i,j=\overline{1,n}}}R'=\{e_1',\dots,e_n'\}$ repere în V

$(*)\ e_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j$

Fie $x\in V$ $x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$

$x=\sum_{i=1}^{n}x_i'e_i'\overset{(*)}{=}\sum_{i=1}^{n}x_i'\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i'\right)e_j$

$\sum_{j=1}^{n}x_je_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i'\right)e_j\xrightarrow[SLI]{\{e_1..e_n\}}x_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i',\ \forall j=\overline{1,n}$

$X=AX'$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$ matricea comp lui x în rap cu R

$X'=\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$ —— || —— R'

$A=(a_{ji})_{j,i=\overline{1,n}}$

Proprietăți

$R=\{e_1,\dots,e_m\}\to R'=\{e_1',\dots,e_n'\}$ repere în V

$e_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j,\ \forall i=\overline{1,n}\Rightarrow A\in GL(n,K)=\{A\in M_n(K)\mid \det A\neq 0\}$

*GL = generator liniar *

Demonstrație

$R=\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}\xrightarrow{A}R'=\{e_i'\}_{i=\overline{1,n}}\xrightarrow{B}R''=\{e_j''\}_{j=\overline{1,n}}$, $R\xrightarrow{C}R''$

Arătăm că $C=AB$

$e_i''=\sum_{k=1}^{n}c_{ki}e_k,\ \forall i=\overline{1,n}$ (1)

$e_i''=\sum_{j=1}^{n}b_{ji}e_j'=\sum_{j=1}^{n}b_{ji}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}b_{ji}\right)e_k$ (2)

Din (1) și (2) $\xrightarrow[SLI]{\{e_1,\dots,e_n\}}c_{ki}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}b_{ji}$, $\forall k=\overline{1,n}$, $\forall i=\overline{1,n}$

$\Rightarrow C=AB$

$R\xrightarrow{A}R'\xrightarrow{B}R$, $R\xrightarrow{I_n}R$; $R'\xrightarrow{B}R\xrightarrow{A}R'$, $R'\xrightarrow{I_n}R'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB=BA=I_n\Rightarrow B=A^{-1}$

A e inversabilă, $\det A\neq 0\Rightarrow A\in GL(n,K)$

OBS $R=\{e_1,\dots,e_n\}\xrightarrow{A}R'=\{e_1',\dots,e_n'\}$ repere în $V/_{\mathbb{R}}$

A = matricea de trecere de la R la R'

Spunem că R și R' sunt repere la fel orientate $\Leftrightarrow$ $\det A>0$

„a fi la fel orientate" este o relație de echivalență

① Reflexivă
$R\sim R\Leftrightarrow \det I_n>0$
$R\xrightarrow{I_n}R$

② Simetrică
$R\sim R'\Rightarrow R'\sim R$
$R\xrightarrow{A}R'\xrightarrow{A^{-1}}R$
$\det A>0\Rightarrow \det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}>0$

③ Tranzitivă
$R\sim R'$
$R'\sim R''\Rightarrow R\sim R''$
$R\xrightarrow{A}R'\xrightarrow{B}R''$, $R\xrightarrow{AB}R''$

$\det A>0$, $\det B>0\Rightarrow \det AB=\det A\det B>0$

Pe mulțimea reperelor sp. vectorial $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$ se pot considera două relații de echivalență

A alege o orientare $\Leftrightarrow$ a alege un reper pozitiv orientat

Exemplu: $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$ sp. vectorial

$R=\{\underset{e_1}{(1,0)},\underset{e_2}{(0,1)}\}$ reper canonic (convenție: este pozitiv orientat)

$R'=\{\underset{e_1'}{(2,1)},\underset{e_2'}{(1,1)}\}$ reper în $\mathbb{R}^2$

$R\xrightarrow{A}R'$

$e_1'=a_{11}e_1+a_{21}e_2=2(1,0)+1(0,1)$

$e_2'=a_{12}e_1+a_{22}e_2=1(1,0)+1(0,1)$

$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ $\det A=2-1=1>0\Rightarrow$

$\Rightarrow R,R'$ sunt la fel orientate $\Rightarrow$

$\Rightarrow R'$ este pozitiv orientat

Criteriu de liniar independență pentru un sistem de vectori din V

Considerăm un spațiu vectorial $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$, $S=\{v_1,\dots,v_k\}$, $k\le n$

$n=\dim_{\mathbb{K}} V$; $\mathcal{R}=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V

$v_i=\sum_{j=1}^{n} v_{ji}e_j, (\forall) i=\overline{1,k}$ $\quad M=(v_{ij})_{\substack{j=\overline{1,n}\\ i=\overline{1,k}}}$

matricea componentelor vectoriale din S în raport cu reperul $\mathcal{R}$

$S=\{v_1,\dots,v_k\}$ este SI $\Leftrightarrow [\forall a_1,\dots,a_k\in K, a_1v_1+\dots+a_kv_k=0_V \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1=\dots=a_k=0_K]$

$\sum_{i=1}^{k} a_iv_i=0_V \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i\left(\sum_{j=1}^{n} v_{ji}e_j\right)=0_V \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} v_{ji}a_i\right)e_j=0_V \xrightarrow{\{e_1,\dots,e_n\}}$

$\Rightarrow_k S c i$

$\sum_{i=1}^{k} v_{ji}a_i=0, \forall j=\overline{1,n}$

$(*)\begin{cases} v_{11}a_1+v_{12}a_2+v_{13}a_3+\dots+v_{1k}a_k=0\\ \vdots\\ v_{n1}a_1+v_{n2}a_2+v_{n3}a_3+\dots+v_{nk}a_k=0\end{cases}$

$(*)$ este un sistem liniar și omogen cu sol unică nulă $\Rightarrow$ rg $M=k$ (maxim)

TEOREMĂ Un sistem $S=\{v_1,\dots,v_k\}$ este S.L.I. $\Leftrightarrow$ matricea componentelor vectorilor în raport cu $(\forall)$ reper din V are rangul k

Demonstrație

$\mathcal{R}=\{e_1,\dots,e_n\}\xrightarrow{A}\mathcal{R}'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ repere în V

$v_i=\sum_{j=1}^{n} v_{ji}e_j, (\forall) i=\overline{1,k}$

$=\sum_{k=1}^{n} v'_{ki}e'_k$

$M=(v_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n}\\ i=\overline{1,k}}}$ în raport cu $\mathcal{R}$

$M'=(v'_{ki})_{\substack{k=\overline{1,n}\\ i=\overline{1,k}}}$ — // — $\mathcal{R}'$

$M=AM'$, $A\in GL(n,\mathbb{K})$

rg $M=$ rg $M'=k=1$ și. $k\le n=\dim_{\mathbb{K}} V$

Exemplu

$(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$, $S=\{(1,2,3),(-1,1,1)\}$

$\mathcal{R}=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$

$M=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\3&1\end{pmatrix}$ rg $M=2\Rightarrow S$ sistem Li

Operații cu subspații vectoriale

Obs. $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ spațiu vectorial, $V_1,V_2\subset V$ subsp vect.

• $\Rightarrow V_1\cap V_2$ subspațiu vectorial

$\left.\begin{array}{l}\forall x,y\in V_1\cap V_2\\ \forall a,b\in \mathbb{K}\end{array}\right| \Rightarrow ax+by\in V_1\cap V_2$

$x,y\in V_1$ și $x,y\in V_2 \Rightarrow \begin{cases}ax+by\in V_1\\ ax+by\in V_2\end{cases} \Rightarrow ax+by\in V_1\cap V_2$

• În general, $V_1\cup V_2$ nu este subsp vectorial

Considerăm $\langle V_1\cup V_2\rangle \overset{not}{=} V_1+V_2$ subspațiu vectorial generat de $V_1\cup V_2$ sau acoperirea liniară a lui $V_1\cup V_2$

Prop $V_1+V_2=\{v_1+v_2, v_1\in V_1, v_2\in V_2\}$

Demonstrație

$\langle V_1\cup V_2\rangle=\{v_1+v_2, v_1\in V_1, v_2\in V_2\}$

• „$\subseteq$"

$(\forall)x\in\langle V_1\cup V_2\rangle \Rightarrow \exists x_1,\dots,x_n\in V_1\cup V_2$, $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{K}$ a.î.

$x=\sum a_ix_i$

Putem pp, fără a restrânge generalitatea $x_1,\dots,x_k\in V_1$; $x_{k+1},\dots,x_n\in V_2$

$x=\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_ix_i}_{\in V_1}+\underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} a_jx_j}_{\in V_2}=x_1+x_2$, $x_1\in V_1$, $x_2\in V_2$

($V_1\subset V$ subsp vect) ($V_2\subset V$ subsp vect)

• „$\supseteq$" $\{v_1+v_2, v_1\in V_1, v_2\in V_2\}\subset\langle V_1\cup V_2\rangle$

$v_1+v_2=$ comb liniară (particulară) de vectori din $V_1\cup V_2$

$\langle V_1\cup V_2\rangle=V_1+V_2$

Teorema Grassmann

Fie $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vectorial, $V_1,V_2\subset V$ subsp vect. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$

Demonstrație

$\dim_{\mathbb{K}} V_1\cap V_2=k$

$\dim_{\mathbb{K}} V_1=n_1$, $\dim_{\mathbb{K}} V_2=n_2$, $\dim_{\mathbb{K}} V=n$

Considerăm $\{e_1,\dots,e_k\}$ bază în $V_1\cap V_2$

$V_1\cap V_2\subset V_1$ subsp. vectorial

Extindem la o bază în V_1: $\{e_1,\dots,e_k,g_{k+1},\dots,g_{n_1}\}$

$V_1\cap V_2\subset V_2$ subsp vectorial

Extindem la o bază în V_2: $\{e_1,\dots,e_k,f_{k+1},\dots,f_{n_2}\}$

Fie $B=\{e_1,\dots,e_k,g_{k+1},\dots,g_{n_1},f_{k+1},\dots,f_{n_2}\}$

Dem. că B este bază în V_1+V_2

• B sistem liniar independent

Fie $a_1,\dots,a_k,b_{k+1},\dots,b_{n_1},c_{k+1},\dots,c_{n_2}\in\mathbb{K}$ a.î.

$\sum_{i=1}^{k} a_ie_i+\sum_{j=k+1}^{n_1} b_jg_j+\sum_{r=k+1}^{n_2} c_rf_r=0_V\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_ie_i+\sum_{j=k+1}^{n_1} b_jg_j}_{\in V_2}=\underbrace{-\sum_{r=k+1}^{n_2} c_rf_r}_{\in V_1}\in V_1\cap V_2$

$x\in V_1\cap V_2\Rightarrow x=\sum_{i=1}^{k} a'_ie_i$

1) $x=\sum_{i=1}^{k} a_ie_i+\sum_{j=k+1}^{n_1} b_jg_j=\sum_{i=1}^{k} a'_ie_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(a_i-a'_i)e_i+\sum_{j=k+1}^{n_1} b_jg_j=0_V$
$\{e_1,\dots,e_k,g_{k+1},\dots,g_{n_1}\}$ bază în $V_1\Rightarrow$ SLi $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_i-a'_i=0, (\forall)i=\overline{1,k}$
$b_j=0, (\forall)j=\overline{k+1,n_1}$

2) $x=-\sum_{r=k+1}^{n_2} c_rf_r=\sum_{i=1}^{k} a'_ie_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a'_ie_i+\sum_{r=k+1}^{n_2} c_rf_r=0_V\Rightarrow$
$\Rightarrow \{e_1,\dots,e_k,f_{k+1},\dots,f_{n_2}\}$ bază în $V_2\Rightarrow$ SLi $\Rightarrow$

$\Rightarrow a'_i=0, (\forall)i=\overline{1,k}\Rightarrow a_i=0, (\forall)i=\overline{1,n}$

$c_r=0, (\forall) r=\overline{k+1,n_2}$

deci $\sum_{i=1}^{k} a_i e_i + \sum_{j=k+1}^{m_1} b_j g_j + \sum_{s=k+1}^{m_2} c_s f_s = 0_V \Rightarrow$

$\mathbb{K} \ni a_i = 0, (\forall) i = \overline{1,k}$

$\mathbb{K} \ni b_j = 0, (\forall) j = \overline{k+1,m_1}$

$\mathbb{K} \ni c_s = 0, (\forall) s = \overline{k+1,m_2}$

• B este sistem de generatori

$(\forall) x \in V_1+V_2 \Rightarrow \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ a.î. $x = v_1 + v_2$

$\{e_1, \dots, e_k, g_{k+1}, \dots, g_{m_1}\}$ bază în V_1

$\{e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_{m_2}\}$ bază în V_2

$x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i + \sum_{j=k+1}^{m_1} b_j g_j + \sum_{i=1}^{k} a_i' e_i + \sum_{s=k+1}^{m_2} c_s f_s =$

$= \sum_{i=1}^{k} (a_i + a_i') e_i + \sum_{j=k+1}^{m_1} b_j g_j + \sum_{s=k+1}^{m_2} c_s f_s \Rightarrow$

$\Rightarrow B$ este sistem de generatori

$|B| = m_1 + m_2 - k$

$\dim_{\mathbb{K}} (V_1+V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_2 + \dim_{\mathbb{K}} V_2 - \dim_{\mathbb{K}} (V_1 \cap V_2)$

Definiție Spunem că V_1+V_2 este sumă directă și notăm $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

Prop. V_1+V_2 este sumă directă $\Leftrightarrow (\forall) v \in V_1+V_2$, $\exists!\ v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ a.î. $v = v_1 + v_2$

Demonstrație

„⇒" $\underset{\in V_1}{v_1} \oplus \underset{\in V_2}{v_2} \Rightarrow \underset{\in V_1}{v_1} \cap \underset{\in V_2}{v_2} = \{0_V\}$. Pp prin absurd

$v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$

$\underset{V_1}{v_1 - v_1'} = \underset{V_2}{v_2' - v_2} \in V_1 \cap V_2$

$v_1 = v_1', v_2 = v_2'$

„⇐" Pp prin absurd $(\exists) x \in V_1 \cap V_2$, $x \neq 0_V$

$v = v_1 + v_2 = \underset{V_1}{(v_1 + x)} + \underset{V_2}{(v_2 - x)}$ scrierea nu e unică

Contradicție

deci $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

OBS $\dim_{\mathbb{K}} \{0_V\} = 0$

Consecință (T. Grassmann)

$\dim (V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Aplicație

① $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$V_1 = \{A \in V / Tr A = 0\}$

$V_2 = \{A \in V / A = \alpha I_n, \alpha \in \mathbb{K}\}$ (matr. diagonală)

$V = V_1 \oplus V_2$

Soluție

$V_1, V_2 \subset V$ subsp vect

$(\forall) A, B \in V_1$, $a, b \in \mathbb{K}$ $\Rightarrow aA + bB \in V_1$

$Tr(aA + bB) = a Tr A + b Tr B = 0$

• $(\forall) A = \alpha I_n$; $B = \beta I_n$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$ $\Big\} \Rightarrow aA + bB = (\alpha a + \beta b) I_n$

$V_1 \cap V_2 = \{A = \alpha I_n / Tr A = \alpha n = 0 \Rightarrow \alpha = 0\} = \{0\}$

$V_1 + V_2 \subset V$ (din construcție)

$V \subset V_1 + V_2$; $(\forall) A \in V$, $A = \overbrace{A - \frac{1}{n} Tr(A) I_n}^{A1} + \overbrace{\frac{1}{n} Tr(A) I_n}^{A2}$

$Tr(A_1) = Tr(A) - \frac{1}{n} Tr(A) n = 0 \Rightarrow A_1 \in V_1$

$A_2 = \frac{1}{n} Tr(A) I_n \in V_2$

$V = V_1 \oplus V_2$

② $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$V_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A = A^T\}$ (matrice simetrice)

$V_2 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A = -A^T\}$ (matrice antisimetrice)

$V = V_1 \oplus V_2$

Soluție

$V_1, V_2 \subset V$ subsp. vect.

$A \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow A = A^T = -A^T \Rightarrow A = 0_n$

$V_1 + V_2 \subset V$ (din constr)

$V \subset V_1 + V_2$

$\forall A \in V$, $A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{A1} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{A2}$

$A_1^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = A_1$; $A_2^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -A_2$

$A_1 \subset V_1$

$A_2 \subset V_2$

$B = V_1 \oplus V_2$

③ $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$

$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\}$

$V_2' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\}$

$\Rightarrow$ a) $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_2'$

b) det un reper în $\mathbb{R}^3$

$R = R_1 \cup R_2$

R_1 reper în V_1

R_2 reper în V_2

Soluție

$V_1 = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0) + y(0,1,0), x, y \in \mathbb{R}\}$

$R_1 = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ s. gen. pt V_1

$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \xRightarrow[\text{critLi}]{} R_1$ s.l.i. $\Big\} \Rightarrow R_1$ bază pt V_1

$V_2 = \{(0,0,z) / z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,0,1) / z \in \mathbb{R}\}$

$R_2 = \{(0,0,1)\}$ bază pt V_2

$V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = 2 + 1 = 3$

$V_1 \oplus V_2 \subset \mathbb{R}^3$, $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\Big\} \Rightarrow V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$

$R = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ reper în $\mathbb{R}^3$

$V_2' = \{(z, z, z) / z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,1,1), z \in \mathbb{R}\}$

$R_2' = \{(1,1,1)\}$ bază în V_2'

$V_1 \cap V_2' = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Lema schimbului

Fie V/K sp vectorial, $p, q \in \mathbb{N}^*$

$L = \{x_1, \dots, x_p\}$ sistem de vectori LI,

$G = \{y_1, \dots, y_q\}$ sistem de generatori pt V/K

Atunci 1) $p \le q$

2) $\exists\, G' \subset G$ a.î. $L \cup G'$ să fie bază în V/K

Consecințe 1) dacă V/K este sp vectorial finit generat, atunci există $B \subset V$, mulțime finită a.î. B să fie bază a lui V/K

orice 2 baze au același nr de vectori

2) dacă $S \le_K V$ atunci S/K este finit generat (subsp)

$\dim_K S \le \dim_K V$

3) dacă $\dim_K V = n$ și $\{x_1, \dots, x_n\}$ S.L.I., atunci $\{x_1, \dots, x_n\}$ este bază în V/K

$n \in \mathbb{N}^*$, K corp, car $K \ne 2$ $\{1_K + 1_K \ne 0_K\}$

$S_1 = \{A \in M_n(K) / {}^T A = A\}$

$S_2 = \{A \in M_n(K) / {}^T A = -A\}$

Să se determine câte o bază în S_1/K, S_2/K

fie $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in S_1 \Rightarrow {}^T A = A \Rightarrow (\forall)\, i,j \in \overline{1,n}$, $a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \sum_{i,j=\overline{1,n}} a_{ij} E_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \le j < i \le n} a_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} E_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \le i < j \le n} \underset{a_{ji}}{a_{ji}} E_{ji} = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$$

fie $1 = \overline{1,n}$

${}^T E_{ij} = E_{ji}$

Fie $i, j \in \overline{1,n}$, $i < j$ ${}^T(E_{ij} + E_{ji}) = {}^T E_{ij} + {}^T E_{ji} = E_{ji} + E_{ij} =$
$= E_{ij} + E_{ji} \Rightarrow E_{ij} + E_{ji} \in S_1$

Fie $B = \{E_{ii} / i = \overline{1,n}\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} / 1 \le i < j \le n\}$

B este s.g. pt S_1/K

fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $a_{ij} \in K$ $(\forall)\, 1 \le i < j \le n$ a.î.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i E_{ii} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) = O_n \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \alpha_2 & a_{23} \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = O_n \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$(\forall)\, i, j = \overline{1,n}$ $i < j$, $a_{ij} = 0$

B este S.L.I.

$\dim_K S_1 = n + C_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

car $K \ne 2$ $\bar{B} = \{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \le i < j \le n\}$

bază în S_2/K

$\dim_K(S_1 + S_2) = \dim_K S_1 + \dim_K S_2 - \dim_K(S_1 \cap S_2)$

$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} - 0$

$V/\mathbb{R}$ $W = V \times V$

"+": $W \times W \to W$

$(u, v) + (x, y) = (u + x, v + y)$

"·": $\mathbb{C} \times W \to W$

$(a + bi)(u, v) = (au - bv, av + bu)$

$(W, +, \cdot)$ este $\mathbb{C}$ sp vectorial

Fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ bază în $V/\mathbb{R}$. Atunci $\{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0)\}$ este bază în $W/\mathbb{C}$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ bază în V/K $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0)\}$ SLI

Fie $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $z_k = a_k + b_k i$, $k = \overline{1,n}$

$a_k, b_k \in \mathbb{R}$ a.î.

$z_1(e_1, 0) + z_2(e_2, 0) + \dots + z_n(e_n, 0) = 0_W = (0, 0)$

$z_1(e_1, 0) = (a_1 + b_1 i)(e_1, 0) = (a_1 e_1 - b_1 0, a_1 0 + b_1 e_1) =$
$= (a_1 e_1, b_1 e_1)$

$(a_1 e_1, b_1 e_1) + \dots + (a_n e_n, b_n e_n) = (0, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n) = (0, 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \\ b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0_W$

$(a_1 + b_1 i)(e_1, 0) = (a_1 e_1, b_1 e_1)$

Fie $(x, y) \in W$

$x, y \in V$ și $\{e_1, \dots, e_n\}$ este bază $\in V/K$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ a.î. $\begin{cases} x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \\ y = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \end{cases}$

$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \sum_{k=1}^n \beta_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n (\alpha_k e_k, \beta_k e_k) =$
$= \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k i)(e_k, 0)$

Ex1) $M_1 = \{u_1, u_2\}$ $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (0, 1, 1)$

2) $M_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ $u_1 = (2, 1, 2)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (3, 1, 3)$

3) $M_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$

4) $M_4 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 2, 3)$

1) fie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(0, 1, 1) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ $\Rightarrow$ $(\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2)$

$(\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$

L.I.

$\Rightarrow \alpha_2 = 0$

$x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ Căutăm scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$x = \alpha u_1 + \beta u_2 \Rightarrow x = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (0, \beta, \beta) \Rightarrow x = (\alpha, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 2\alpha + \beta \\ x_3 = 3\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \beta = x_2 - 2\alpha \Rightarrow \beta = x_2 - 2x_1 \Rightarrow x_3 = 3x_1 + x_2 - 2x_1$

$\Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow S_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2\} = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \ne \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ nu este sistem de generatori