Facultatea de Matematica-Informatica
Universitatea din Bucuresti

26 Noiembrie 2019

Test EDP -varianta A

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale
Tipul examinarii: lucrare partiala
Nume student: ______________________________
Grupele 321, 322
Timp de lucru : 90 minute

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest test contine 3 probleme (toate obligatorii).

Testul este individual. In cazul fraudarii (redactare identica cu a altui coleg) se anuleaza punctajul tuturor partilor implicate.

Pentru redactarea solutiilor incercati sa aplicati urmatoarele reguli:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **trebuie sa indicati** acest lucru si sa explicati de ce rezultatul respectiv se poate aplica.
- Pe cat posibil, **organizati-va munca** astfel incat la sfarsitului timpului de lucru sa returnati rezolvarile in ordinea de pe subiecte.
- Va sugerez sa rezolvati mai intai ce stiti sa faceti la prima vedere pentru a nu intra in criza de timp la finalul timpului de lucru !
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Punctaj: Problema 1 (3 p), Problema 2 (3.5 p), Problema 3 (2.5 p). Un punct este din oficiu, deci se **pleaca din nota 10**.

Problema 1. *(3p)*

(a). Aratati prin calcul direct ca functia

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\cos(3x)\cosh(3y)$$

verifica ecuatia lui Laplace $\Delta f(x,y)=0$ *in* $\mathbb{R}^2$.

(b). Calculati (pe domeniul maxim de definitie) $\frac{\partial f}{\partial x}$ *pentru functia*

$$f(x,y)=y^{y\cos(xy)}$$

(c). Integrati problema Cauchy

$$\begin{cases} xu_x(x,y)+3u_y(x,y)=u, & (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\\ u(x,0)=\cos(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Problema 2. *(3.5p) Fie* $\Omega:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad x^2+y^2<4\}$ *si* $\partial\Omega$ *frontiera lui* Ω. *Fie problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y)=3\cos x, & (x,y)\in\Omega\\ u(x,y)=0, & (x,y)\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

(a). Aratati ca problema (2) *are cel mult o solutie* $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$.

(b). Aratati ca u *este functie para in raport cu variabila* x. *Calculati* $u_x(0,0)$.

(c). Gasiti constanta C *astfel incat functia* $v(x,y)=C(x^2+y^2)$ *sa verifice* $-\Delta v=3$ *in* Ω.

(d). Folosind (eventual) principiul de maxim pentru functii armonice sa se determine solutia problemei

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y)=3, & (x,y)\in\Omega,\\ u(x,y)=0, & (x,y)\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

(e). Folosind (eventual) principiul de maxim pentru functii sub/super armonice sa se arate ca solutia problemei (2) *verifica*

$$|u(x,y)|\le 3,\quad \forall(x,y)\in\overline{\Omega}.$$

Problema 3. *(2.5p)*

(a). Fie functia $g(x):=|x|^{\frac{7}{2}}-x_1x_2,\quad x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. *Calculati* $x\cdot\nabla g$ *intr-un punct oarecare din domeniul de definitie si apoi in punctul (1,1,0).*

(b). Calculati $\operatorname{div}(x|x|^5),\quad x\in\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$.

(c). Dati exemplu de o functie armonice netriviala in $\mathbb{R}^2$ *care se anuleaza pe dreapta* $x-2y=0$.

(d). Determinati p *numar real astfel incat functia* $f:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *definita prin*

$$f(x):=e^{-|x|}|x|^p,\quad x=(x_1,x_2,x_3),$$

sa fie local integrabila.

(e). Fie E *solutia fundamentala a Laplacianului in* $\mathbb{R}^4$. *Aratati ca* $\frac{\partial E}{\partial x_1}$ *este local integrabila.*