SV (31)

Sume directe interne de subspații

<u>Exemplu</u>. Fie V_1, V_2 sp. vect și $V_1 \times V_2$ produsul cartezian.

Observăm că dacă $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$, atunci

$(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$, $(x_1, 0) \in V_1 \times \{0\}$, $(0, x_2) \in \{0\} \times V_2$,

deci orice element din $V_1 \times V_2$ se scrie ca suma unui element din subspațiul $V_1 \times \{0\}$ cu un element din subspațiul $\{0\} \times V_2$. Mai mult, e clar că o astfel de reprezentare e unică.

<u>Def</u>. Fie V un K-sp. vect și $U_1, \dots, U_n$ subsp. ale lui V. Spunem că V este suma directă internă a subspațiilor $U_1, \dots, U_n$ dacă orice $x \in V$ se scrie în mod unic sub forma $x = x_1 + \dots + x_n$, cu $x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n$. În acest caz vom nota $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$.

<u>Prop.</u> Fie V un K-sp. vect și $U_1, \dots, U_n$ subspații. Sunt echivalente:

1) $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$

2) $\begin{cases} \bullet\ V = U_1 + \dots + U_n \\ \quad \text{și} \\ \bullet\ \text{Pt. orice } 1 \le i \le n \text{ avem } U_i \cap \Big(\sum\limits_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} U_j\Big) = 0 \end{cases}$

<u>Dem</u>. 1) $\Rightarrow$ 2) E clar că $V = U_1 + \dots + U_n$.

Fixăm i și fie $x \in U_i \cap \Big(\sum\limits_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} U_j\Big)$. Atunci $x \in U_i$ și

$x = \sum\limits_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} v_j$ pt niște elemente v_j cu $v_j \in U_j$ pt. orice $j \ne i$.

Avem $\underset{U_1}{\underset{\cap}{0}} = \underset{\underset{U_1}{\cap}}{v_1} + \dots + \underset{\underset{U_{i-1}}{\cap}}{v_{i-1}} + \underset{\underset{U_i}{\cap}}{(-x)} + \underset{\underset{U_{i+1}}{\cap}}{v_{i+1}} + \dots + \underset{\underset{U_n}{\cap}}{v_n} = 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + \dots + 0$, și din unicitatea scrierii rezultă că $v_j=0$ pentru $j\neq i$ și $x=0$. Așadar $V_i \cap \left(\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\neq i}} V_j\right)=0$.

2) $\Rightarrow$ 1). Fie $x\in V$. Știm că $V=U_1+\dots+U_n$, deci x se scrie sub forma $x=x_1+\dots+x_n$ pt. niște $x_1\in U_1,\dots,x_n\in U_n$. Arătăm că scrierea este unică. Într-adevăr, dacă $x=y_1+\dots+y_n$ cu $y_1\in U_1,\dots,y_n\in U_n$, atunci

$x_1+\dots+x_n=y_1+\dots+y_n$. Fixăm i și obținem

$$\underbrace{x_i-y_i}_{\in U_i} = \cancel{(y_1-x_1)+\dots} \sum_{\substack{j=\overline{1,n}\\ j\neq i}} \underbrace{(y_j-x_j)}_{\in U_j}$$

Cum $U_i \cap \left(\sum_{\substack{j=\overline{1,n}\\ j\neq i}} U_j\right)=0$, obținem $x_i-y_i=0$, de unde $x_i=y_i$.

<u>Prop</u>. Fie V un spațiu vectorial finit dimensional și $U_1,\dots,U_n$ subspații pentru care $V=U_1\oplus\dots\oplus U_n$. Atunci $\dim V=\dim U_1+\dots+\dim U_n$.

<u>Dem</u>. Fie $B_1,\dots,B_n$ baze în $U_1,\dots,U_n$. Atunci $B_1\cup\dots\cup B_n$ e bază în V (demonstrație: exercițiu), de unde rezultă relația dorită.

<u>Obs</u>. Dacă $V=U_1\oplus\dots\oplus U_n$, atunci funcția $f: U_1\times\dots\times U_n\to V$, $f(x_1,\dots,x_n)=x_1+\dots+x_n$, e izomorfism (dem: exercițiu). De aici rezultă și altfel că $\dim V=\dim(U_1\times\dots\times U_n)=\dim U_1+\dots+\dim U_n$.

Spații duale

Fie V un K-sp. vect. Notăm $V^* = Hom_K(V, K)$, care este un K-sp. vect. cu:

- adunarea: dacă $f, g \in V^*$, definim $f+g : V \to K$ prin
$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \quad \forall v \in V$$
(exercițiu: $f+g \in V^*$)

- înmulțirea cu scalari: dacă $a \in K$, $f \in V^*$, definim
$af : V \to K$ prin $(af)(v) = af(v) \quad \forall v \in V$
(exercițiu $af \in V^*$).

Exercițiu: verificați că V^* devine astfel sp. vect., numit ~~[illegible]~~ sp. dual al lui V (sau dualul lui V).

Vom nota elementele lui V^* cu $v^*, u^*, \ldots$ (fără ca acestea să aibă legătură directă cu anumite elem. $v, u, \ldots$ din V).

Dacă $f : U \to V$ e apl. liniară, definim funcția
$$f^* : V^* \to U^* \text{ prin } f^*(v^*) = v^* f \text{ pt. orice } v^* \in V^*.$$
$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{v^*} K$$

Atunci f^* e apl. liniară (exercițiu), numită duala lui f.

Exerciții: 1) Fie $f : U \to V$, $g : V \to W$ apl. liniare. Atunci $(gf)^* = f^* g^*$

2) Dacă $1_V : V \to V$ e apl. liniară identitate, atunci $(1_V)^* = 1_{V^*}$.

3) Fie $f : U \to V$ apl. liniară. Atunci:
f^* injectivă $\Leftrightarrow$ f surjectivă; f^* surjectivă $\Leftrightarrow$ f injectivă;
f^* izo $\Leftrightarrow$ f izo.

<u>Prop</u>. Fie V un K-sp. vect finit dimensional. Atunci V^* este finit dimensional și $\dim V^* = \dim V$.

<u>Dem</u>. Dacă $V=0$, atunci e clar că $V^* = Hom_K(V,K) = 0$, deci V^* e f.d. și $\dim V^* = \dim V = 0$.

Fie $\dim V = n \in \mathbb{N}^*$ și fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ o bază a lui V.

Pt. fiecare $1 \le i \le n$ fie $e_i^* : V \to K$ unica ~~al~~ apl. lin. pt. care $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ pt. orice $1 \le j \le n$ (existența și unicitatea lui e_i^* rezultă din Prop. de unice). Arătăm că $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ e bază a lui V^*.

<u>lin. indep.</u> Fie $\sum_{j=1,n} a_j e_j^* = 0$ pt. niște $a_1, \dots, a_n \in K$. ~~Aplicăm lui e~~
Fixăm un i și aplicăm lui $e_i \Rightarrow a_i = 0$.

<u>sist. gen</u>. Fie $v^* \in V^*$. Arătăm că $v^* = \sum_{j=1,n} v^*(e_j) e_j^*$, adică v^* e generat de $e_1^*, \dots, e_n^*$. Într-adevăr, cum ambele sunt apl. liniare, e suficient să arătăm că sunt egale pe e_i $\forall i$.
Dar $\left(\sum_{j=1,n} v^*(e_j) e_j^*\right)(e_i) = v^*(e_i)$, gata!

<u>Terminologie</u>. $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ din dem. s.n. baza duală bazei $\{e_1, \dots, e_n\}$.

<u>Exercițiu</u>. Dacă V ~~e infinit di~~ nu e finit generat, atunci nici V^* nu este finit generat.