

Tema 5

Exercițiul 1

Considerăm T_1 și T_2 , doi estimatori nedeplasați ai parametrului θ de varianțe V_1 și respectiv V_2 . Fie T_3 estimatorul

$$T_3 = \alpha T_1 + (1 - \alpha) T_2.$$

- Arătați că estimatorul T_3 este nedeplasat.
- Determinați constanta α pentru care estimatorul T_3 are varianța minimă.
- Presupunând că ipotezele teoremei Rao-Cramer sunt verificate, este posibil ca ambii estimatori T_1 și T_2 să fie eficienți?

Exercițiul 2

Fie X_1, X_2, \dots, X_n un eșantion de talie n dintr-o populație $f_\theta(x)$ dată de:

- $f_\theta(x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$, $\theta > 0$
- $f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$
- $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x > 0$, $\theta > 0$ iar $\alpha > 0$ cunoscut

Pentru fiecare caz în parte determinați un estimator pentru θ și studiați calitățile acestuia (deplasare, consistență, eficiență).

Exercițiul 3

Dintr-un total de 100 de persoane chestionate, 51 au declarat că vor vota cu candidatul Bugs Bunny la următoarele alegeri parlamentare. Dați un interval de încredere de nivel 95% pentru proporția p , de intenții de vot pentru acest candidat în populație. Aceeași întrebare dacă sondajul ar fi avut loc pentru un eșantion de 1000 de persoane. Câți electori ar trebui întrebați pentru a avea o precizie de cel puțin 2%?

Exercițiul 4

Un producător de becuri anunță că durata medie a becurilor pe care le produce este de 170 de ore. Pentru a verifica această afirmație, un corp de control al protecției consumatorilor extrage aleator un eșantion de 100 de becuri dintr-un lot de fabricație și, după experimentare, constată că eșantionul are o durată medie de viață de 158 de ore cu o abatere standard de 30 de ore. Dacă presupunem că durata de viață a becurilor urmează o lege normală, putem deduce din această investigație că afirmația producătorului este falsă?

Exercițiul 5

Pentru a estima precizia unui termometru, s-au realizat $n = 100$ de măsurători independente a temperaturii dintr-un lichid menținut la temperatura constantă de 20 de grade Celsius. Observațiile x_1, x_2, \dots, x_{100} au condus la valoarea $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 40011$. Construiți un interval de încredere de nivel de încredere de 95% pentru precizia termometrului, măsurată prin varianța σ^2 a măsurătorilor.

Exercițiul 6

Numărul de blocaje de trafic mai mari de un minut de pe linia tramvaiului 41, pe parcursul unei zile, se presupune că urmează o repartiție Poisson de medie necunoscută și ne propunem să estimăm acest parametru plecând de la un eșantion de talie 200 (s-au urmărit blocajele pe parcursul a 200 de zile). Momentele empirice calculate pe acest eșantion au condus la $\bar{x}_{200} = 3$ și $s_{200}^2 = 3.2$. Determinați un interval de încredere de nivel de încredere de 95% pentru media numărului de blocaje.

Tema 5

Soluții

Exercițiul 1



Considerăm T_1 și T_2 , doi estimatori nedeplasați ai parametrului θ de varianțe V_1 și respectiv V_2 . Fie T_3 estimatorul

$$T_3 = \alpha T_1 + (1 - \alpha) T_2.$$

- Arătați că estimatorul T_3 este nedeplasat.
- Determinați constanta α pentru care estimatorul T_3 are varianța minimă.
- Presupunând că ipotezele teoremei Rao-Cramer sunt verificate, este posibil ca ambii estimatori T_1 și T_2 să fie eficienți?

- a) Pentru a arăta că T_3 este un estimator nedeplasat este suficient să verificăm că $\mathbb{E}[T_3] = \theta$. Observăm că

$$\mathbb{E}[T_3] = \mathbb{E}[\alpha T_1 + (1 - \alpha) T_2] = \alpha \mathbb{E}[T_1] + (1 - \alpha) \mathbb{E}[T_2] = \alpha \theta + (1 - \alpha) \theta = \theta.$$

- b) Dacă notăm cu $V_3 = V_3(\alpha) = \text{Var}(T_3)$, atunci

$$V_3(\alpha) = \text{Var}(\alpha T_1 + (1 - \alpha) T_2) = \alpha^2 \text{Var}(T_1) + (1 - \alpha)^2 \text{Var}(T_2) = \alpha^2 V_1 + (1 - \alpha)^2 V_2.$$

Pentru a determina minimul funcției $V_3(\alpha)$ rezolvăm ecuația $\frac{dV_3}{d\alpha} = 0$ de unde găsim că $2\alpha V_1 - 2(1 - \alpha)V_2 = 0$, prin urmare $\alpha = \frac{V_2}{V_1 + V_2}$ este punct critic. Cum $\frac{d^2 V_3}{d\alpha^2} = 2(V_1 + V_2) > 0$, deci $V_3(\alpha)$ este convexă, deducem că valoarea minimă se atinge pentru $\alpha = \frac{V_2}{V_1 + V_2}$ și aceasta este $V_3 = \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2}$.

- c) Să presupunem prin reducere la absurd că ambii estimatori T_1 și T_2 sunt eficienți, ceea ce implică atingerea bornei Rao-Cramer, i.e.

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{nI_1(\theta)}.$$

Cum din punctul b) am găsit că estimatorul T_3 , de dispersie minimă are dispersia $V_3 = \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2}$, deducem că

$$V_3 = \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{V_1^2}{2V_1} = \frac{V_1}{2} < \frac{1}{nI_1(\theta)},$$

ceea ce contrazice teorema Rao-Cramer și prin urmare T_1 și T_2 nu pot fi simultan eficienți.

Exercițiul 2



Fie X_1, X_2, \dots, X_n un eșantion de talie n dintr-o populație $f_\theta(x)$ dată de:

- a) $f_\theta(x) = e^{-\theta \frac{\theta^x}{x!}}, x = 0, 1, 2, \dots, \theta > 0$

$$b) f_{\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, x \in \mathbb{R}, \theta > 0$$

$$c) f_{\theta}(x) = \frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0 \text{ iar } \alpha > 0 \text{ cunoscut}$$

Pentru fiecare caz în parte determinați un estimator pentru θ și studiați calitățile acestuia (deplasare, consistență, eficiență).

a) Folosind metoda verosimilității maxime avem că funcția de verosimilitate este

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = e^{n\theta} \frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! x_2! \dots x_n!}$$

de unde, pentru a găsi maximul, rezolvăm ecuația $\frac{\partial \log(L)}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta} = 0$ care conduce la $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$. Cum $\frac{\partial^2 \log(L)}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2} < 0, \forall \theta > 0$ concluzionăm că $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$ este estimatorul de verosimilitate maximă.

Cum pentru o variabilă aleatoare $X \sim \text{Pois}(\theta)$ avem că $\mathbb{E}[X] = \text{Var}(X) = \theta$, deducem că $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \theta$, deci $\hat{\theta}_n$ este un estimator nedeplasat, și $\text{Var}(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta}{n}$.

Observăm că $MSE_{\theta}(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ din relația $MSE_{\theta}(\hat{\theta}_n) = \text{Var}(\hat{\theta}_n) + b_{\theta}(\hat{\theta}_n)^2$, de unde găsim că $\hat{\theta}_n$ este un estimator consistent pentru θ .

Pentru a verifica dacă este sau nu eficient trebuie să calculăm Informația lui Fisher care conduce la:

$$I_n(\theta) = nI_1(\theta) = -n\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f_{\theta}(X)}{\partial \theta^2}\right] = -n\mathbb{E}\left[-\frac{X}{\theta^2}\right] = \frac{n}{\theta} = \frac{1}{\text{Var}(\hat{\theta}_n)}.$$

Deoarece dispersia estimatorului $\hat{\theta}_n$ este egală cu marginea din inegalitatea Rao-Cramer deducem că estimatorul este eficient.

b) Observăm că densitatea din problemă corespunde cu a unei normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{\theta})$ iar funcția de verosimilitate este

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Rezolvând ecuația $\frac{\partial \log(L)}{\partial \theta} = 0$ găsim că $-\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$ de unde $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ (momentul empiric de ordin doi). Proprietățile acestui estimator au fost văzute la curs.

c) Observăm că densitatea de repartiție $f_{\theta}(x) = \frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$ corespunde unei repartiții Gamma. Prin metoda verosimilității maxime avem că funcția de verosimilitate este

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = \frac{1}{\theta^{n\alpha}\Gamma(\alpha)^n} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i}$$

de unde logaritmul ei este

$$l(\theta|x_1, \dots, x_n) = \log L(\theta|x_1, \dots, x_n) = -n\alpha \log \theta - n \log \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i$$

și rezolvând ecuația $\frac{\partial \log(L)}{\partial \theta} = 0$ găsim că $-\frac{n\alpha}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2} = 0$ de unde $\hat{\theta}_n = \frac{\bar{X}_n}{\alpha}$ iar din faptul că funcția $\frac{\partial \log(L)}{\partial \theta}$ este pozitivă la stânga soluției și negativă la dreapta concluzionăm că $\hat{\theta}_n$ este estimatorul de verosimilitate maximă.

Pentru a determina calitățile acestui estimator vom folosi proprietățile repartiției Gamma și anume că $\mathbb{E}[X] = \alpha\theta$ iar $\text{Var}(X) = \alpha\theta^2$. Prin urmare avem că

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \theta \quad \text{și} \quad \text{Var}(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{n\alpha}$$

ceea ce arată că estimatorul $\hat{\theta}_n$ este nedeplasat și consistent.

Informația lui Fisher pentru eșantionul X_1, X_2, \dots, X_n de talie n este $I_n(\theta) = nI_1(\theta)$ și cum

$$I_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial \log f_\theta(X)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathbb{E}_\theta \left[\frac{\partial^2 \log f_\theta(X)}{\partial \theta^2} \right]$$

iar $\frac{\partial^2 \log f_\theta(X)}{\partial \theta^2} = \frac{\alpha}{\theta^2} - \frac{2X}{\theta^3}$ găsim că

$$I_1(\theta) = \frac{\alpha}{\theta^2}.$$

Prin urmare $I_n(\theta) = \frac{n\alpha}{\theta^2}$ de unde deducem că estimatorul $\hat{\theta}_n$ este eficient.

Exercițiul 3



Dintr-un total de 100 de persoane chestionate, 51 au declarat că vor vota cu candidatul Bugs Bunny la următoarele alegeri parlamentare. Dați un interval de încredere de nivel 95% pentru proporția p , de intenții de vot pentru acest candidat în populație. Aceeași întrebare dacă sondajul ar fi avut loc pentru un eșantion de 1000 de persoane. Câți electori ar trebui întrebați pentru a avea o precizie de cel puțin 2%?

Pentru a determina un interval de încredere de nivel de încredere $1 - \alpha$ pentru proporția p de intenții de vot pentru candidatul Bugs Bunny la alegerile parlamentare să observăm că suntem în contextul unui interval de încredere pentru o proporție. Fie X_1, \dots, X_n variabilele aleatoare care descriu intenția de vot a celor $n = 100$ de candidați eșantionați, cu $X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

Am văzut că un interval de încredere, de tip Wald, pentru p este dat de

$$IC_1^{1-\alpha}(p) = \left[\hat{p}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}, \hat{p}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}} \right]$$

unde $\hat{p}_n = \bar{X}_n$ este estimatorul de verosimilitate maximă a lui p iar $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ este cuantila de ordin $1 - \frac{\alpha}{2}$ a repartiției normale standard. Înlocuind cu valorile din ipoteza problemei, $n = 100$, $\alpha = 0.05$ și respectiv $\sum_{i=1}^n X_i = 51$, găsim că

$$IC_1^{0.95}(p) = [0.412, 0.607].$$

În cazul în care am fi avut un eșantion de talie $n = 1000$ și 510 alegători (pentru a păstra proporția $\hat{p}_{1000} = 0.51$) ar fi declarat că îl preferă pe candidatul Bugs Bunny atunci intervalul ar fi devenit

$$IC_1^{0.95}(p) = [0.479, 0.540].$$

Am văzut la curs că un alt interval de încredere pentru p , de nivel de încredere $1 - \alpha$, se obține rezolvând după p inecuația din interiorul probabilității

$$\mathbb{P} \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \approx 1 - \alpha$$

care conduce la

$$IC_2^{1-\alpha}(p) = \left[\frac{\hat{p}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2n}}{1 + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n}} - \frac{1}{1 + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n}} \sqrt{\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n} \hat{p}_n(1-\hat{p}_n) + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^4}{4n^2}}, \frac{\hat{p}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2n}}{1 + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n}} \sqrt{\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n} \hat{p}_n(1-\hat{p}_n) + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^4}{4n^2}} \right]$$

iar numeric pentru $n = 100$

$$IC_2^{0.95}(p) = [0.413, 0.605]$$

iar pentru $n = 1000$

$$IC_2^{0.95}(p) = [0.479, 0.540].$$

Exercițiul 4



Un producător de becuri anunță că durata medie a becurilor pe care le produce este de 170 de ore. Pentru a verifica această afirmație, un corp de control al protecției consumatorilor extrage aleator un eșantion de 100 de becuri dintr-un lot de fabricație și, după experimentare, constată că eșantionul are o durată medie de viață de 158 de ore cu o abatere standard de 30 de ore. Dacă presupunem că durata de viață a becurilor urmează o lege normală, putem deduce din această investigație că afirmația producătorului este falsă?

Pentru a construi un interval de încredere de nivel de încredere $1 - \alpha$ pentru media μ a unei populații normale de abatere standard necunoscută σ vom folosi statistica $T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}$ care știm că este repartizată t -Student cu $n - 1$ grade de libertate.

Un interval de încredere bilateral pentru μ este

$$IC_1^{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{x}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right]$$

care pentru $n = 100$, $\alpha = 0,01$, $\bar{x}_n = 158$ și $s_n = 30$ devine

$$IC_1^{0.99}(\mu) = \left[158 - 2.626 \frac{30}{\sqrt{100}}, 158 + 2.626 \frac{30}{\sqrt{100}} \right] = [150.12, 165.87]$$

și cum valoarea anunțată de producător este în afara acestui interval concluzionăm că reclama este falsă.

Dacă ne interesăm la un interval de încredere de nivel de încredere $1 - \alpha$ unilateral spre stânga atunci am avea că

$$\mathbb{P}(T_n > t) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} > t\right) = 1 - \alpha$$

de unde

$$IC_2^{1-\alpha}(\mu) = \left[0, \bar{x}_n - t_{\alpha}^{n-1} \frac{s_n}{\sqrt{n}}\right] = \left[0, 158 + 2,364 \frac{30}{\sqrt{100}}\right] = [0, 165,09]$$

prin urmare afirmația producătorului este falsă.

Exercițiul 5



Pentru a estima precizia unui termometru, s-au realizat $n = 100$ de măsurători independente a temperaturii dintr-un lichid menținut la temperatura constantă de 20 de grade Celsius. Observațiile x_1, x_2, \dots, x_{100} au condus la valoarea $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 40011$. Construiți un interval de încredere de nivel de încredere de 95% pentru precizia termometrului, măsurată prin varianța σ^2 a măsurătorilor.

Cum măsurătorile pot fi presupuse ca un eșantion de talie n , X_1, X_2, \dots, X_n dintr-o populație $\mathcal{N}(\mu = 20, \sigma^2)$ considerăm ca estimator al varianței estimatorul

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu^2$$

iar din $\frac{n\hat{\sigma}_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ deducem că un interval de încredere bilateral pentru σ^2 de nivel de încredere $1 - \alpha$ este

$$IC_1^{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{n\hat{\sigma}_0^2}{\chi_{n,1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{n\hat{\sigma}_0^2}{\chi_{n,\frac{\alpha}{2}}^2}\right].$$

Înlocuind cu valorile din ipoteză, $n = 100$, $\alpha = 0.05$, $\mu = 20$ și $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 40011$ găsim că

$$IC_1^{0.95}(\sigma^2) = \left[\frac{100\hat{\sigma}_0^2}{\chi_{100,0.975}^2}, \frac{100\hat{\sigma}_0^2}{\chi_{100,0.025}^2}\right] = \left[\frac{100 \cdot 0.11}{129.56}, \frac{100 \cdot 0.11}{74.22}\right] = [0.0849, 0.1482].$$

Dacă ne uităm după un interval de încredere unilateral, de nivel de încredere $1 - \alpha$, la stânga atunci

$$IC_2^{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[0, \frac{n\hat{\sigma}_0^2}{\chi_{n,\alpha}^2}\right] = \left[0, \frac{100 \cdot 0.11}{77.929}\right] = [0, 0.1411].$$

Exercițiul 6



Numărul de blocaje de trafic mai mari de un minut de pe linia tramvaiului 41, pe parcursul unei zile, se presupune că urmează o repartiție Poisson de medie necunoscută și ne propunem să estimăm acest parametru plecând de la un eșantion de talie 200 (s-au urmărit blocajele pe parcursul a 200 de zile). Momentele empirice calculate pe acest eșantion au condus la $\bar{x}_{200} = 3$ și $s_{200}^2 = 3.2$. Determinați un interval de încredere de nivel de încredere de 95% pentru media numărului de blocaje.

Fie X_1, X_2, \dots, X_n eșantionul de talie $n = 200$ din populația $Pois(\theta)$ care descrie numărul de blocaje de trafic mai mari de un minut pe linia tramvaiului 41. Pentru a găsi un interval de încredere pentru θ să ne aducem aminte că estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ este \bar{X}_n și aplicând Teorema Limită Centrală avem

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Un interval de încredere de tip Wald pentru θ , de nivel de încredere $1 - \alpha$, este obținut prin înlocuirea la numitor a lui θ cu estimatorul său \bar{X}_n , deci

$$\mathbb{P} \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\bar{X}_n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \approx 1 - \alpha$$

de unde

$$IC_{Wald}^{1-\alpha}(\theta) = \left[\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} \right].$$

Înlocuind cu valorile din ipoteză, $n = 200$, $\alpha = 0.05$ și $\bar{x}_{200} = 3$ obținem $IC_{Wald}^{0.95}(\theta) = [2.759, 3.240]$.

Un alt interval de încredere pentru θ , de nivel de încredere $1 - \alpha$, se poate obține rezolvând inecuația din probabilitate

$$\mathbb{P} \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \approx 1 - \alpha$$

după θ .

În acest caz găsim că

$$IC_2^{1-\alpha}(\theta) = \left[\bar{X}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2n} - \sqrt{\frac{\bar{X}_n z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^4}{4n^2}}, \bar{X}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2n} + \sqrt{\frac{\bar{X}_n z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^4}{4n^2}} \right]$$

și înlocuind cu valorile din ipoteză rezultă $IC_2^{0.95}(\theta) = [2.769, 3.249]$.