Geometrie curs 7

Forme biliniare. Forme pătratice

- $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vectorial

$g: V\times V\to\mathbb{K}$ formă biliniară $\Leftrightarrow$ g este liniară în fiecare argument

- g sm simetrică $\Leftrightarrow g(x,y)=g(y,x), \forall x,y\in V$
- g sm antisimetrică $\Leftrightarrow g(x,y)=-g(y,x)$ – // –

Not $L(V,V;\mathbb{K})=\{g: V\times V\to\mathbb{K} \mid g$ formă biliniară$\}$

$L^s(V,V;\mathbb{K})=\{g\in L(V,V;\mathbb{K}) \mid g$ simetrică$\}$

$L^a(V,V;\mathbb{K})=\{g\in L(V,V;\mathbb{K}) \mid g$ antisimetrică$\}$

$(L(V,V;\mathbb{K}),+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect

$L^s(V,V;\mathbb{K}), L^a(V,V;\mathbb{K})\subset L(V,V;\mathbb{K})$ subspații vectoriale

- Matricea asociată unei forme biliniare

$R=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V

Not $g(e_i,e_j)=g_{ij}$, $G=(g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$g(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x_iy_j = x^TGY$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$, $y=\sum_{j=1}^{n}y_je_j$

$g(x,y)=\underbrace{g_{11}x_1y_1+\dots+g_{nn}x_ny_n}_{\text{diagonala}}+g_{12}x_1y_2+\dots+g_{n-1n}x_{n-1}y_n$

$R=\{e_1,\dots,e_n\}\xrightarrow{A}R'=\{e_1',\dots,e_n'\}$

$e_i'=\sum a_{ji}e_j$

$\forall i=\overline{1,n}$

$g(e_r',e_s')=g_{rs}'$, $G'=(g_{rs}')_{r,s=\overline{1,n}}$

$G'=A^TGA$

- $rg\, g = rg\, G = rg\, G'$, $A\in GL(n,\mathbb{K})$

Def $g\in L^s(V,V;\mathbb{K})$

$Ker\, g=\{x\in V \mid g(x,y)=0, \forall y\in V\}$

- g sm. nedegenerată $\Leftrightarrow Ker\, g=\{0_V\}\Leftrightarrow \det G\neq 0$

$$\begin{cases} g(x,e_1)=0\\ g(x,e_n)=0\end{cases} (*)$$

$(*)$ are sol unică nulă $\Leftrightarrow \det G\neq 0$

$Q: V\to\mathbb{K}$ sm formă pătratică $\Leftrightarrow$

$\exists\, g: V\times V\to\mathbb{K}$ formă biliniară simetrică a.î. $Q(x)=g(x,x), \forall x\in V$

- $\exists$ o coresp. bijectivă între mulțimea formelor pătratice și mulțimea formelor biliniare și simetrice.

$ch\,\mathbb{K}\neq 2$

$g(x,y)=2^{-1}(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)), \forall x,y\in V$

g sm forma polară asociată lui Q

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$Q: V\to\mathbb{R}$ formă pătratică reală

Q sm pozitiv definită $\Leftrightarrow$ 1) $Q(x)>0, \forall x\in V\setminus\{0_V\}$

2) $Q(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$g: V\times V\to\mathbb{R}$ formă biliniară simetrică reală

g sm pozitiv definită $\Leftrightarrow$ Q poz def

Q = forma pătratică reală asoc.

- g poz def $\Rightarrow$ g nedeg.

Exemple

1) $g:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$g(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ $\quad G=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

$\det G\neq 0\Rightarrow g$ nedeg $\Rightarrow Ker\, g=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

SAU

$x\in Ker\, g\Rightarrow \begin{matrix}g(x,e_1)=0\\ g(x,e_2)=0\\ g(x,e_3)=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow x=0_{\mathbb{R}^3}$

$Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=g(x,x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$Q(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$Q(x)=0\Leftrightarrow x=0_{\mathbb{R}^3}$ $\Rightarrow$ Q pozitiv definit, g pozitiv definit

2) Fie $G=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$

matricea asociată formei biliniare $g:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, în raport cu reperul canonic

$G=-G^T\Rightarrow g\in L^a(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4;\mathbb{R})$

$g(x,y)=x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3$

OBSERVAȚIE $G\in M_n(\mathbb{K})$

$G=\underbrace{\frac{1}{2}(G+G^T)}_{\substack{\shortparallel\\ G_1\\ \text{matr simi}}}+\underbrace{\frac{1}{2}(G-G^T)}_{\substack{\shortparallel\\ G_2\\ \text{matr antisimetrică}}}$

$g_1: V\times V\to\mathbb{K}$

$g_1(x,y)=x^TG_1Y$, $G_1\in L^s(V,V;\mathbb{K})$

$g_2: V\times V\to\mathbb{K}$, $g_2(x,y)=x^TG_2Y$, $g_2\in L^a(V,V;\mathbb{K})$

$Q_1: V\to\mathbb{K}$, $Q_1(x)=g_1(x,x), \forall x\in V$

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect

$Q_1(x)=x^TG_1X$

Problemă $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect, $Q:V\to\mathbb{K}$ formă pătratică

$Q(x)=x^TGX=g_{11}x_1^2+\dots+g_{nn}x_n^2+2g_{12}x_1x_2+\dots+2g_{n-1n}x_{n-1}x_n$

Determinăm un reper $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ în V a.î. matricea asociată lui Q (în raport cu R) să fie diagonală

$G=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&\ddots&&0\\&&a_r&\\0&&&0\end{pmatrix}$, $r=rg\,Q=rg\,g$

$Q(x)=a_1x_1^2+\dots+a_rx_r^2$ (formă canonică a lui Q)

Teorema Gauss

Fie $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect, $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică $\Rightarrow \exists$ un reper $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ în V a.î. Q are o formă canonică

Demonstrație

1) Dacă $Q: V \to \mathbb{K}$, $Q(x) = 0$ (formă canonică)

2) $Q(x) \neq 0$

Aplicăm metoda ind. matematice după m
m ($m \leq n$, $n = \dim_{\mathbb{K}} V$) a coordonatelor lui x

Dacă $m = 1 \Rightarrow Q(x) = g_{11} x_1 = a_1 x_1^2$ (formă can)

P.p adev pasul P_{k-1}:
$\exists$ un reper în V a.î. Q are o formă canonică, dacă Q conține $k-1$ coordonate ale lui x.

Dem că prop. P_k este adev:

$Q(x) = g_{11} x_1^2 + 2g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1k} x_1 x_k + Q'(x)$

apar $x_2, \dots, x_k$

① $g_{11} \neq 0$

② $g_{11} = 0$

a) $\exists i \in \{2, \dots, n\}$ a.î. $g_{ii} \neq 0$

Renumerotăm indicii (schimbare de reper) a.î. $g_{11} \neq 0$

b) Cum $G \neq 0_n$ (altfel $Q(x) = 0, \forall x \in V$ abs) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists g_{ij} \in G$, a.î. $g_{ij} \neq 0$, $i \neq j$

Considerăm schimbarea de reper

$$\begin{cases} y_i = x_i + x_j \\ y_j = x_i - x_j \\ y_k = x_k, \forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\} \end{cases}$$

$x_i = \frac{1}{2}(y_i + y_j)$

$x_j = \frac{1}{2}(y_i - y_j)$

$2 g_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} g_{ij} (y_i^2 - y_j^2) = \underbrace{(\tfrac{1}{2} g_{ij})}_{\neq 0} y_i^2 - \frac{1}{2} g_{ij} y_j^2$

În concluzie, putem schimba reperul a.î. $g_{11} \neq 0$

$Q(x) = \underset{\neq 0}{g_{11}} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1k} x_1 x_k + Q'(x)$

$= \frac{1}{g_{11}} (g_{11}^2 x_1^2 + 2 g_{12} g_{11} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1k} g_{11} x_1 x_k) + Q''(x)$

$= \frac{1}{g_{11}} (g_{11} x_1 + g_{12} x_2 + \dots + g_{1k} x_k)^2 + Q''(x)$

apar $x_2, \dots, x_k$
$(k-1)$ coordonate

Considerăm schimbarea de reper

$$\begin{cases} y_1 = g_{11} x_1 + \dots + g_{1k} x_k \\ y_i = x_i, \forall i = \overline{2,n} \end{cases}$$

$Q(x) = \frac{1}{g_{11}} y_1^2 + Q''(x) = a_1 y_1^2 + Q''(x)$

Not $\frac{1}{g_{11}} = a_1$

$\exists$ un reper în V a.î. Q'' are o formă canonică

Fie $z_1, \dots, z_n$ coord lui x în raport cu acest reper.

$z_1 = y_1$

$Q(x) = a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + \dots + a_r z_r^2$, $r = \text{rang } Q$

formă canonică a lui Q

Def. $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$

forma normală a lui Q

Teoremă $\forall Q: V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică reală $\Rightarrow \exists$ un reper în V a.î. Q are forma normală

Demonstrație

Cf T. Gauss $\Rightarrow \exists R = \{e_1, \dots, e_n\}$ în V a.î. Q are o formă canonică:

$Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$, $r = \text{rg } Q$

Eventual, schimbând reperul, considerăm
$a_1 > 0, \dots, a_p > 0$
$a_{p+1} < 0, \dots, a_r < 0$

$Q(x) = (\sqrt{a_1}\, x_1)^2 + \dots + (\sqrt{a_p} \cdot x_p)^2 - (\sqrt{-a_{p+1}}\, x_{p+1})^2 \dots (\sqrt{a_r}\, x_r)^2$

Considerăm sch. de reper

$y_1 = \sqrt{a_1}\, x_1$
$\vdots$
$y_p = \sqrt{a_p}\, x_p$
$y_{p+1} = \sqrt{-a_{p+1}}\, x_{p+1}$
$y_r = \sqrt{-a_r}\, x_r$
$y_j = x_j$, $j = \overline{r+1, n} \Rightarrow Q(x) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$
(forma normală)

Teorema de inerție Sylvester

Fie $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală peste sp vectorial real $(V,+,\cdot)/\mathbb{R} \Rightarrow$ Nr. „+" din forma normală este un invariant al schimbării de reper

OBS. $(p, r-p)$ = signatura lui Q (invariant la sch. reperelor)
p — Nr. „+"
$r-p$ — Nr. „−"

Dem. Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V a.î. Q are forma normală

$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$

Fie $R' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ reper în V a.î. Q are forma normală

$Q(x) = x_1'^2 + \dots + x_{p'}'^2 - x_{p'+1}'^2 - \dots - x_r'^2$, $r = \text{rg } Q$

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j'$

Considerăm $U_1 = \langle \{e_1, \dots, e_p, e_{r+1}, \dots, e_n\} \rangle \subseteq V$ sub. vect.

$\dim U_1 = p + n - r$

$\forall x \in U_1 \Rightarrow x_{p+1} = \dots = x_r = 0$

$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 \geq 0$

Considerăm $U_2 = \langle \{e'_{p'+1}, \dots, e'_r\} \rangle$

$\dim U_2 = n - p'$

$\forall x \in U_2 \Rightarrow x_1' = \ldots = x'_{p'} = 0 \quad x'_{r+1} = \ldots = x'_n = 0$

$\neq 0_V$

$Q(x) = -x'^2_{p'+1} - \ldots - x'^2_r < 0$

$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

$U_1 + U_2 \subseteq U$ sp vect, $\dim(U_1 \cap U_2) \leq n$

Pp abs $p' < p$

$\dim(U_1 + U_2) = p + n - r + r - p' - \dim(U_1 \cap U_2) = n + \overbrace{p - p'}^{>0} - \dim(U_1 \cap U_2)$

$\Rightarrow \exists\, x \in U_1 \cap U_2$ $\neq 0_V$ absurd deoarece $Q(x) < 0$, $Q(x) > 0$

Analog pt $p < p'$ absurd

Deci $p = p'$

Aplicații

1. $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară și simetrică

$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea asociată lui g în raport cu reperul canonic

a) $g = ?$

b) $\ker g$

c) $Q = ?$ forma pătratică asociată

Să se determine forma normală, f. canonică

Este Q poz def.

a) $g(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1x_2 + x_2x_1 - x_2y_3 - x_3y_2$

b) $\det G \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \ker g = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

c) $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 =$

$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_3^2$

Sch. reper $y_1 = x_1 + x_2$
$y_2 = x_2 - x_3$
$y_3 = x_3$

$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $(2,1)$ = signatura

OBS $Q: V \to \mathbb{R}$ este formă pătratică pozitiv definită $\Leftrightarrow$ $\exists$ un reper în V ai forma normală este

$Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_r^2$ signatura $(r, 0)$, $r = \operatorname{rg} Q$

Q are $(2,1)$ ca signatură $\Rightarrow Q$ nu este poz definită

2. Fie $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_3y_1 + 2x_1y_3$

a) g formă biliniară simetrică

b) Q formă pătratică asociată

Să se det o formă canonică, resp forma normală

Este Q poz def.

a) $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad G = G^T$

$g(x,y) = x^T G y \Rightarrow g$ formă bilin + sim

b) $Q(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) + 2y_1y_3 + 2y_2y_3$

Considerăm schimbarea de reper

$g_{12} \neq 0$

$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$Q(x) = \frac{1}{2}y_1^2 + 2y_1y_3 - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3$

$= 2\left(\frac{1}{4}y_1^2 + y_1y_3\right) - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3 =$

$= 2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3 - 2y_3^2 =$

$2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}y_2^2 - y_2y_3 + y_3^2\right) =$

$= 2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}y_2 - y_3\right)^2$

Considerăm schimbarea de reper

$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}y_1 + y_3 \\ z_2 = \frac{1}{2}y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

Q are forma canonică: $Q(x) = 2z_1^2 - 2z_2^2$

Sch de reper $u_1 = \sqrt{2}z_1$
$u_2 = \sqrt{2}z_2$

$Q(x) = u_1^2 - u_2^2$

Signatura este $(1,1)$. Q nu este formă pozitiv definită!

OBS. $g: V \times V \to K$ formă biliniară simetrică

$g_1: V \to V^*$

$g_1(w) = g(v, w)$, $\forall w \in V$, v = fixat

$g_2: V \to V^*$ apl lin

$g_2(v) = g(v, w)$, $\forall v \in V$, w fixat

$g_1, g_2: V \to V^*$ izomorfisme $\Leftrightarrow \ker g = \{0_V\}$

$\Leftrightarrow g$ nedegenerată

($\dim V = \dim V^* = n$)

$\mathcal{R} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ reper în V

$\mathcal{R}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ — // — V^*, $e_i^*: V \to K$

$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Spații vectoriale euclidiene

Def $(V,+,\cdot)/\mathbb{R}$ sp vect real

$g: V\times V \to \mathbb{R}$ s.n. produs scalar $\Leftrightarrow$

1) g este formă biliniară simetrică

2) g este pozitiv definită

(V,g) s.n. spațiu vectorial euclidian

$(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(E,(\cdot,\cdot))$ sp vectorial euclidian

Def. $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{g(x,x)} = \sqrt{Q(x)}$

norma vectorului x

Def. a) Fie $x,y \in E$. x,y s.n. vectori ortogonali $\Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$

b) $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V

R s.n. reper ortogonal $\Leftrightarrow \langle e_i,e_j\rangle = 0, \forall i\neq j$

R s.n. reper ortonormat $\Leftrightarrow \langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall i,j=\overline{1,n}$

OBS

$R=\{e_1,\dots,e_n\} \xrightarrow{A} R'=\{e_1',\dots,e_n'\}$ repere ortonormate

$e_r' = \sum_{i=1}^{n} a_{ir} e_i, \forall r=\overline{1,n}$

$\langle e_r', e_s'\rangle = \delta_{rs}$

$\langle \sum_{i=1}^{n} a_{ir} e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{js} e_j\rangle$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ir}a_{js}\underbrace{\langle e_i,e_j\rangle}_{\delta_{ij}}$

$= \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{is} = \delta_{rs}} \Rightarrow A^T A = I_n$

$A\in O(n)$

$SO(n) = \{A\in O(n) / \det A = 1\}$

• dacă R, R' sunt repere ortonormate, la fel orientate $\Rightarrow$

$\Rightarrow A\in SO(n)$

Prop $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ sp vectorial euclidian real

Fie $S=\{x_1,\dots,x_k\}$, $k\le n$, $n=\dim_{\mathbb{R}} E$,

sistem de vectori nenuli, mutual ortogonali $\Rightarrow S$ este SLI

Dem.

Fie $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$ a.î. $a_1x_1+\dots+a_kx_k=0_{\mathbb{R}}$

$$\begin{cases}\langle a_1x_1+\dots+a_kx_k, x_1\rangle = 0_{\mathbb{R}}\\ \vdots\\ \langle a_1x_1+\dots+a_kx_k, x_k\rangle = 0_{\mathbb{R}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1\langle x_1,x_1\rangle + a_2\langle x_2,x_1\rangle + \dots + a_k\langle \overset{0}{x_k}, x_1\rangle = 0\\ \vdots\\ a_1\underbrace{\langle x_1,x_k\rangle}_{0} + a_2\underbrace{\langle x_2,x_k\rangle}_{0} + \dots + a_k\langle x_k,x_k\rangle = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1\|x_1\|^2 = 0\\ \vdots\\ a_k\|x_k\|^2 = 0\end{cases}$$

x_j nenuli $\Rightarrow \|x_j\|\neq 0, \forall j=\overline{1,k} \Rightarrow a_1=\dots=a_k$

Ex $g_0: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_0(x,y) = x_1y_1+\dots+x_ny_n$

$(\mathbb{R}^n, g_0)$ g_0 = produs scalar canonic

$G=I_n$, $G=G^T$

$Q(x) = g_0(x,x) = x_1^2+\dots+x_n^2$ $(n,0)$

Q poz def.

Ex. $(\mathbb{R}^3, g_0)$ sp vectorial real cu str canonică

$u=(-1,-2,0)$

$v=(2,-1,0)$

Să se determine $w\in\mathbb{R}^3$ a.î. $\{u,v,w\}$ reper ortogonal în $\mathbb{R}^3$

$g_0: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_0(x,y) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = \langle x,y\rangle$

$u=(1,-2,0)$

$v=(2,+1,0)$

$\langle u,v\rangle = 2-2=0 \Rightarrow u\perp v$

$\{u,v\}$ SLI

Construim $w = u\times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix} =$

$= e_1\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} + e_3\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix} =$

$= e_1\cdot 0 + e_2\cdot 0 + e_3\cdot 5 = (0,0,5)$

$w=(0,0,5)$

$\langle w,u\rangle = 0$

$\langle w,v\rangle = 0$

$\{(1,-2,0),(2,1,0),(0,0,5)\}$ reper ortogonal în $\mathbb{R}^3$

$u_0 = \frac{u}{\|u\|} \Rightarrow \|u_0\| = \frac{1}{\|u\|}\cdot\|u\| = 1 \Rightarrow u_0 =$ versor

OBS. $u=\alpha w$

$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{\langle\alpha w,\alpha w\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle w,w\rangle} = |\alpha|\,\|w\|$

$\|u\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt5$; $\|v\|=\sqrt5$; $\|w\|=5$

$\{\frac{1}{\sqrt5}(1,-2,0), \frac{1}{\sqrt5}(2,1,0), (0,0,1)\}$ reper ordonat în $\mathbb{R}^3$

Obs. $R_0 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ reperul canonic

Prin convenție este pozitiv orientat

$R_0 \xrightarrow{A} R$ $\det A>0$?

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & 0\\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\det A = \frac15(1+4) = 1 \Rightarrow R$ pozitiv orientat

$A\in SO(3)$