Seminarul 3

Tuesday, October 19, 2021 1:43 PM

1. $M(1,2)$, $d_0: 3x - 2y + 2 = 0$ ← ecuație implicită

a) Ec parametrică pt d_0?

Var 1 Aleg 2 pcte pe d_0: $A(2,4)$, $B(-2,-2)$

$3\cdot 2 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = 4$

$3\cdot(-2) - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

$$\Rightarrow d_0: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow d_0: \boxed{\frac{x-2}{-4} = \frac{y-4}{-6}}$$

ec carteziană

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y-4}{-6} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = -6t + 4 \end{cases}$$ ec parametrică

$u = (-4, -6)$ vector director

pct pe dreaptă

Var 2 $3x - 2y + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x = 2y - 2 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}}}_{\text{ec carteziană}} = t$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{2}t + 1 \end{cases}}$$

$\Rightarrow v = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ vector director

$(0,1)$ pct pe dreaptă

Obs E bine, u și v sunt proporționali: $-12u = v$.

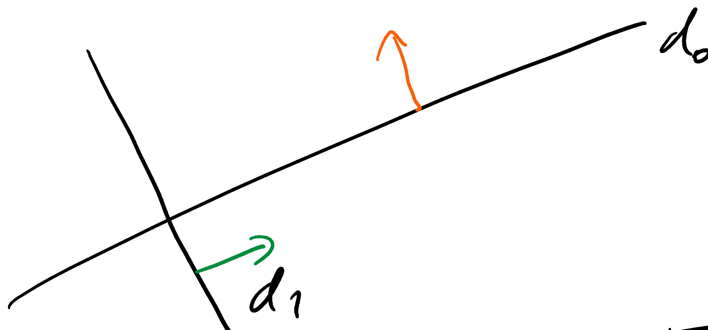
b) Ecuația dreptei d_1 a.î. $d_1 \ni M(1,2)$ și $d_1 \perp d_0$.

b) $\underbrace{\text{Ecuația dreptei}}_{\text{orice tip de ecuație!}}$ ...

$d_0: 3x - 2y + 2 = 0$ $\longrightarrow$ $(3,-2)$ e un vector normal al dreptei d_0

Var 1 Vrem d_1 în ecuație implicită.

$d_1: \underbrace{ax + by}_{(a,b) \text{ vector normal al lui } d_1} + c = 0$

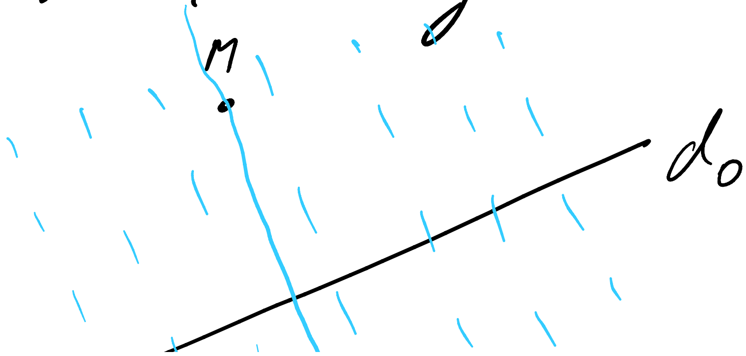


Vrem un $(a,b) \perp (3,-2)$. Aleg $\boxed{(a,b) = (2,3)}$

$$\langle (3,-2), (+2,3) \rangle = +6 + (-6) = 0$$

Obs Dat $v = (x,y) \Rightarrow v' = (-y, x)$ sau $v'' = (y,-x) = -v'$ sunt perpendiculare pe v.

$\Rightarrow d_1: 2x + 3y + c = 0$



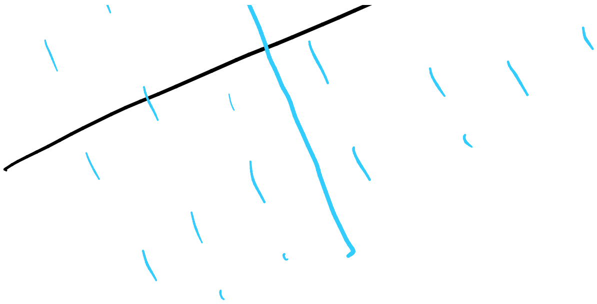
În plus, $M \in d_1$

$\Rightarrow M(1,2)$ respectă ecuația

$2x + 3y + c = 0$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = -8$

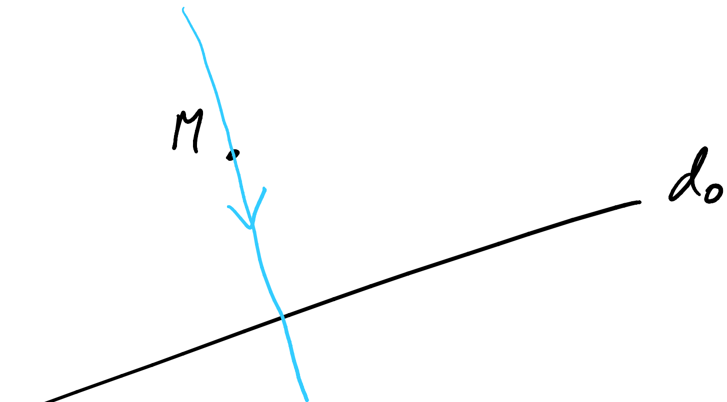


$\Leftrightarrow \underline{c=-8}$

$\Downarrow$

$$\boxed{d_1:\ 2x+3y-8=0}$$

Var 2



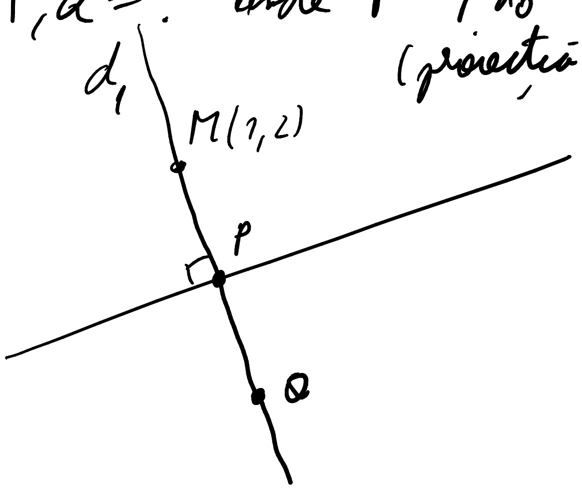
$d_0:\ 3x-2y+2=0$

$d_0: \begin{cases} x=-4t+2 \\ y=-6t+4 \end{cases}$

Ce direcție are d_1? Proporțională cu normala lui d_0 $(3,-2)$.

$$\Rightarrow d_1:\ M+t(3,-2),\ t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{d_1: \begin{cases} x=1+3t \\ y=2-2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}}$$

c) $P, Q = ?$ unde $P = pr_{d_0} M$ și $Q =$ simetricul lui M față de d_0
(proiecția lui M pe d_0)



Var 1 $\{P\} = d_0 \cap d_1 \Leftrightarrow P: \begin{cases} 3x-2y+2=0 \ |\cdot 2 \\ 2x+3y-8=0 \ |\cdot(-3) \end{cases}$ rezolvăm sistemul

$$\Rightarrow -13y = -28 \Rightarrow y = \frac{28}{13} \Rightarrow 3x - \frac{2 \cdot 28}{13} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{30}{13} \Rightarrow x = \frac{10}{13}$$

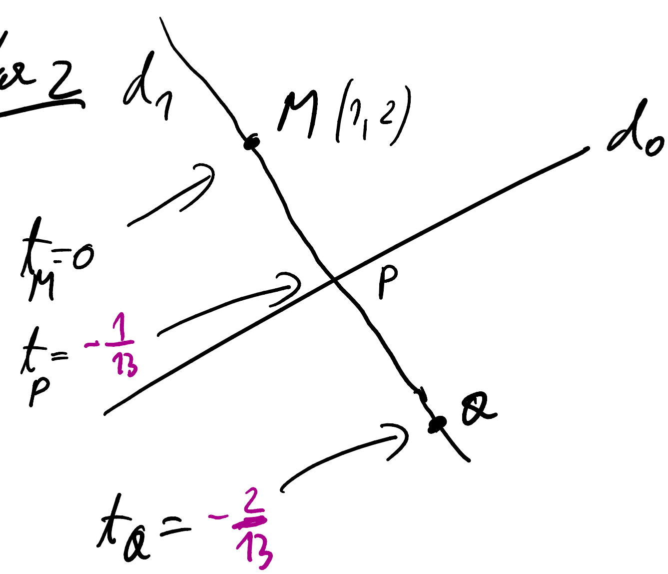
$$\Rightarrow P\left(\frac{10}{13}, \frac{28}{13}\right)$$

P – mijlocul segmentului MQ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} x_P &= \frac{x_M + x_Q}{2} \\ y_P &= \frac{y_M + y_Q}{2} \end{aligned}}$

(de exemplu, data trecută: $\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{OM} + \frac{1}{2}\vec{OQ}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{13} = \frac{1 + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = \frac{20}{13} - 1 = \frac{7}{13} \\ \frac{28}{13} = \frac{2 + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = \frac{56}{13} - 2 = \frac{30}{13} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{7}{13}, \frac{30}{13}\right).$$

<u>Var 2</u>



$$d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_P = 1 + 3t_P \\ y_P = 2 - 2t_P \end{cases} \quad \text{pt un } t_P \in \mathbb{R}$$

$$P \in d_0 \Leftrightarrow 3x_P - 2y_P + 2 = 0$$

$t_Q = \frac{}{13}$

$P \in d_0$

$$3x_P - 2y_P + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(1+3t_P) - 2(2-2t_P) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 13t_P = -1 \Rightarrow t_P = -\frac{1}{13}.$$

$$\Rightarrow P = \left(1+3\cdot\left(-\frac{1}{13}\right), 2-2\cdot\left(-\frac{1}{13}\right)\right) = \left(\frac{10}{13}, \frac{28}{13}\right).$$

Dar $t_Q = 2t_P = -\frac{2}{13} \Rightarrow Q = \left(1+3\cdot\left(\frac{-2}{13}\right), 2-2\cdot\left(-\frac{2}{13}\right)\right)$

$$= \left(\frac{7}{13}, \frac{30}{13}\right).$$

---

2. $d_1: mx + 2y = 8$

$d_2: x + (m-1)y = 4.$

În funcție de $m \in \mathbb{R}$, poziția relativă a dreptelor?

↳ paralele

↳ secante: perpendiculare / neperpendiculare

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow$ vectorii normali sunt proporționali

$\Leftrightarrow (m, 2)$ și $(1, m-1)$ ——

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m(m-1) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(m+1)=0$$

$\nearrow$ $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m \in \{2,-1\}$

$\searrow$ $d_1 \nparallel d_2 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,2\}$

- $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$
- $d_1 \not\perp d_2 \Leftrightarrow m \neq \frac{2}{3}$.

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow$ normalele sunt ortogonale

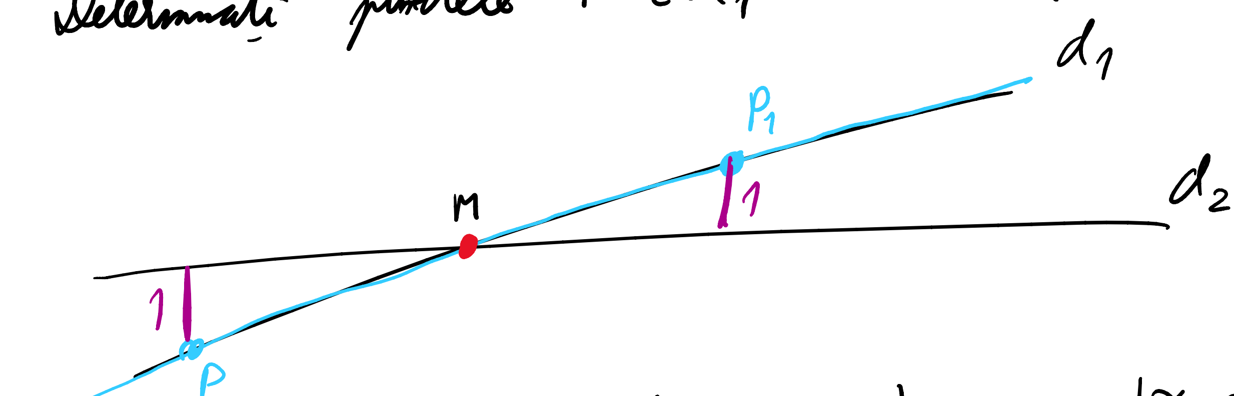
$$\Leftrightarrow \langle (m,2),(1,m-1) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow m + 2(m-1) = 0 \Leftrightarrow 3m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

3. $d_1: 3x - 2y + 2 = 0$.

$d_2: x - 2y + 1 = 0$

Determinați punctele $P \in d_1$ ai $\text{dist}(P, d_2) = 1$.



$$\text{dist}(P, d_2) = \frac{|x_P - 2y_P + 1|}{\sqrt{1+(-2)^2}} = \frac{|x_P - 2y_P + 1|}{\sqrt{5}}.$$

$P \in d_1 \iff 3x_p - 2y_p + 2 = 0$

<u>Var 1</u>

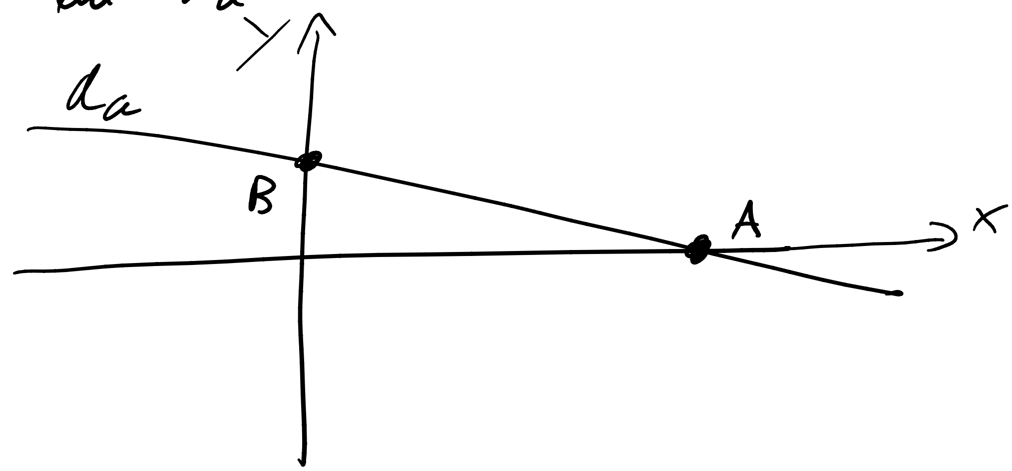
$$\begin{cases} |x_p - 2y_p + 1| = \sqrt{5} \\ 3x_p - 2y_p + 2 = 0 \end{cases} \nearrow \begin{cases} x_p - 2y_p + 1 = \sqrt{5} \\ 3x_p - 2y_p + 2 = 0 \end{cases} \to P_1$$

$$\searrow \begin{cases} x_p - 2y_p + 1 = -\sqrt{5} \\ 3x_p - 2y_p + 2 = 0 \end{cases} \to P_2$$

<u>Var 2</u> $P_1 \Rightarrow P_2$ e simetricul lui P_1 față de $\{M\} = d_1 \cap d_2$.

<u>Ex 4</u> $d_a: \; ax + (2a+1)y + a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

A, B intersecțiile lui d_a cu axele de coordonate



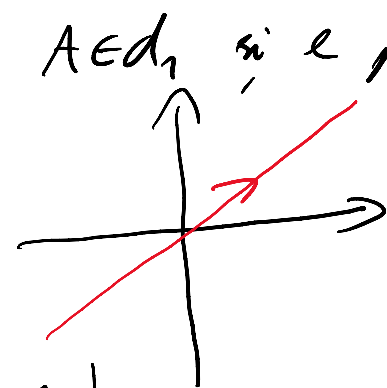
a) Aflați A și B.

$OX: y = 0 \quad \Rightarrow A: \begin{cases} ax + (2a+1)y + a^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow ax = -a^2 \underset{a \neq 0}{\Downarrow} x = -a$

$$\Rightarrow A = (-a, 0)$$

La fel, $B = \left(0, -\frac{a^2}{2a+1}\right)$ $\quad a \neq -\frac{1}{2}, \; a \neq 0.$

a) Scrieți ecuația dreptei d_1 a.î. $A \in d_1$ și e paralelă cu prima bisectoare



prima bisectoare : $\boxed{}x \boxed{-} y = 0$

Var 1 $d_1 \parallel$ prima bisectoare $\Rightarrow d_1: \; A + t\underbrace{(1,1)}_{\text{direcția primei bisectoare}}$

Var 2 (ec implicită) $d_1: \; x - y + \underline{c} = 0$

(are același vector normal cu al primei bisectoare)

$A(-a,0) \in d_1 \Rightarrow \boxed{d_1: \; x - y + a = 0}$

b) $d_2 = ?$ a.î. $B \in d_2$ și $d_2 \perp$ prima bisectoare

$d_2: \boxed{1}x + \boxed{1}y + c = 0$

vect normal pt d_2 = vector director pt prima bisectoare

$B\left(0, -\frac{a^2}{2a+1}\right) \in d_2 \Rightarrow d_2: \; x + y + \frac{a^2}{2a+1} = 0$

c) Aflați a a.î. $d_1 \cap d_2 = \{M\}$ și $M \in d: 2x + y = 1$.

Vrem $d_1 \cap d_2 \cap d_3 \neq \emptyset$!

Vrem sistem

Sistem : $\begin{cases} x - y + a = 0 & d_1 \\ \quad a^2 & d_2 \end{cases}$

Sistem : $\begin{cases} x-y+a=0 & d_1 \\ x+y+\dfrac{a^2}{2a+1}=0 & d_2 \\ 2x+y-1=0 & d \end{cases}$ $\longrightarrow$ Vrem sistem compatibil (determinat)

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}^{\,d_y=2} & -a \\ & -\dfrac{a^2}{2a+1} \\ 2 \quad 1 & 1 \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-a+\frac{2a^2}{2a+1}+2a+\frac{a^2}{2a+1}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2}{2a+1}+a+2=0 \Leftrightarrow \frac{3a^2+a(2a+1)+2(2a+1)}{2a+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 5a^2+5a+2=0 \underset{\Delta<0}{\Leftrightarrow} a\in\mathbb{R} \text{ nu există.}$$

Ex 5 $\quad A=(0,-2),\ B=(2,-3),\ C=(3,4)\in\mathbb{R}^2$

a) Nu sunt coliniare.

Var 1 Cu formula cu det - vedeți mai jos

Var 2 Verificăm că $C\notin AB$.

$$AB:\ \frac{x-0}{2-0}=\frac{y+2}{-3+2} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-1}$$

Dar $C=(3,4) \longrightarrow \dfrac{3}{2}\neq\dfrac{4+2}{-1}$

Dar $C=(3,4)$ $\longrightarrow$ $2 \neq -1$

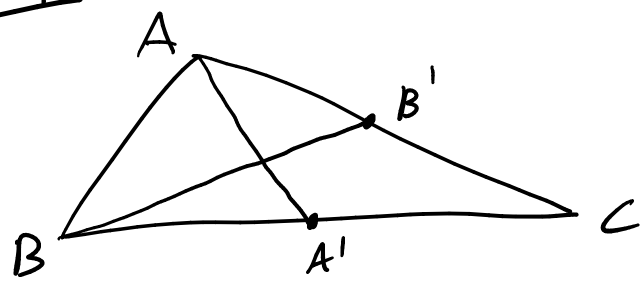
<u>Var 3</u> A, B, C coliniare $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$ și $\vec{AC}$ sunt proporționale

$\vec{AB} = (2,-1)$, $\vec{AC} = (3,6)$ $\leftarrow$ nu sunt.

$\longrightarrow$ ΔABC nedegenerat

b) centrul de greutate?

<u>Var 1</u> G = intersecția medianelor



Aflu A' (mijlocul lui BC)

$\left.\begin{array}{l}\text{ecuația de } AA' \\ \text{ecuația de } BB'\end{array}\right\} \Rightarrow \{G\} = AA' \cap BB'$

<u>Var 2</u> Data trecută $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$

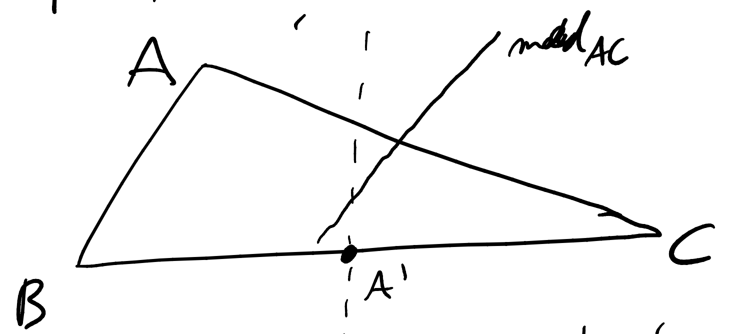
<u>Punctul</u> G are aceleași coordonate ca <u>vectorul</u> $\vec{OG}$ dacă O = originea sistemului de coordonate

$$\Rightarrow G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \left(\frac{0}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3}, \frac{-2}{3} + \frac{-3}{3} + \frac{4}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

c) centrul cercului circumscris ΔABC

I = intersecția mediatoarelor



med_{BC} : ?

$A' = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Un vector normal la med_{BC} este $\vec{BC} = (1, 7)$

$\Rightarrow med_{BC}: x + 7y + c = 0$, $A' \in med_{BC} \Leftrightarrow \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + c = 0$

$\Rightarrow med_{BC}: x + 7y - 6 = 0$

$med_{AC}: 3x + 6y + c = 0$, $B' = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

$\vec{AC}$

$\Rightarrow med_{AC}: 3x + 6y - \frac{21}{2} = 0$

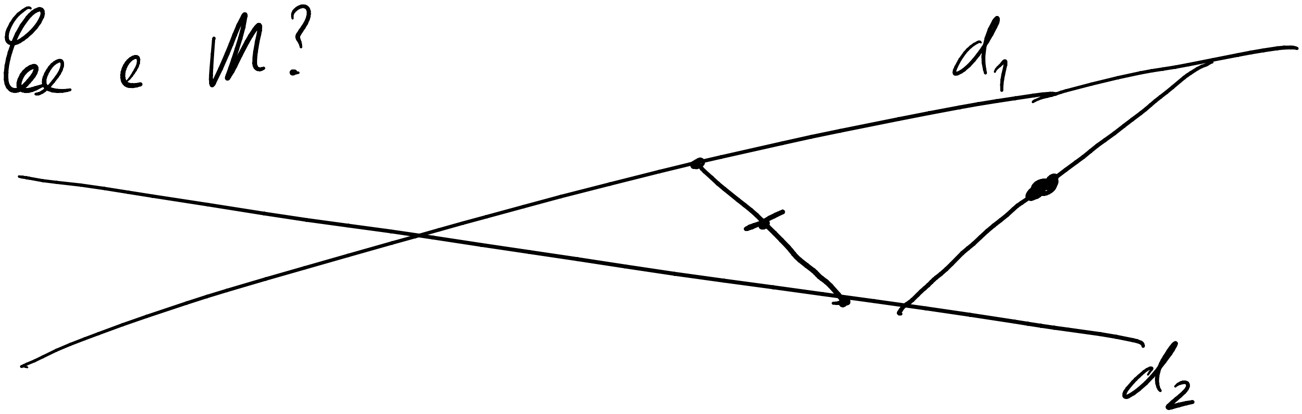
$$\Rightarrow I: \begin{cases} x + 7y - 6 = 0 \\ 3x + 6y - \frac{21}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow I = (-, -)$$

Temă d) (ortocentrul - în 2 moduri), e) $A_{\Delta ABC}$.

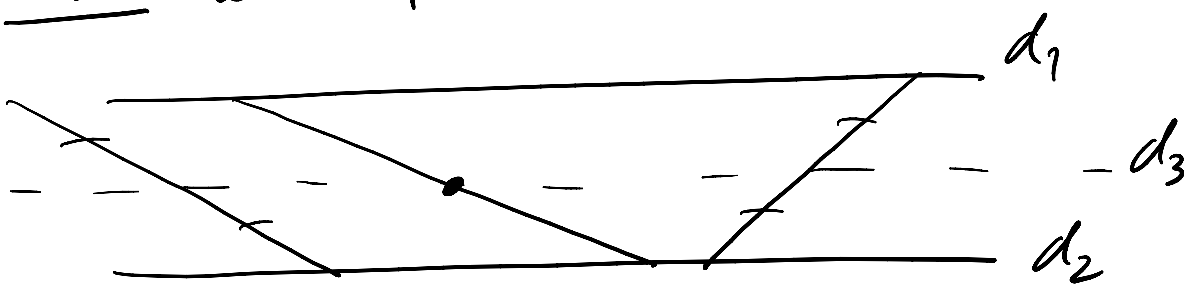
9. Fie d_1, d_2 în plan.

$\mathcal{M} = \{ P \mid P$ mijloc de segment cu capete pe d_1, respectiv $d_2 \}$

Cine e $\mathcal{M}$?

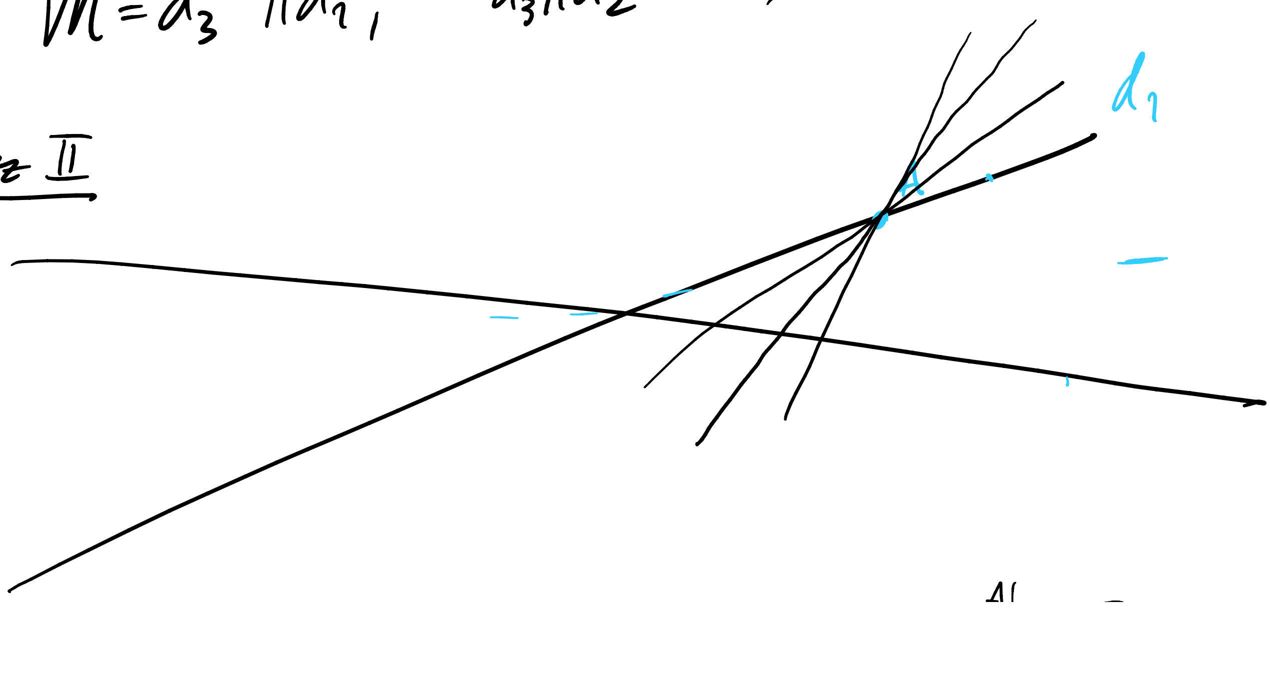


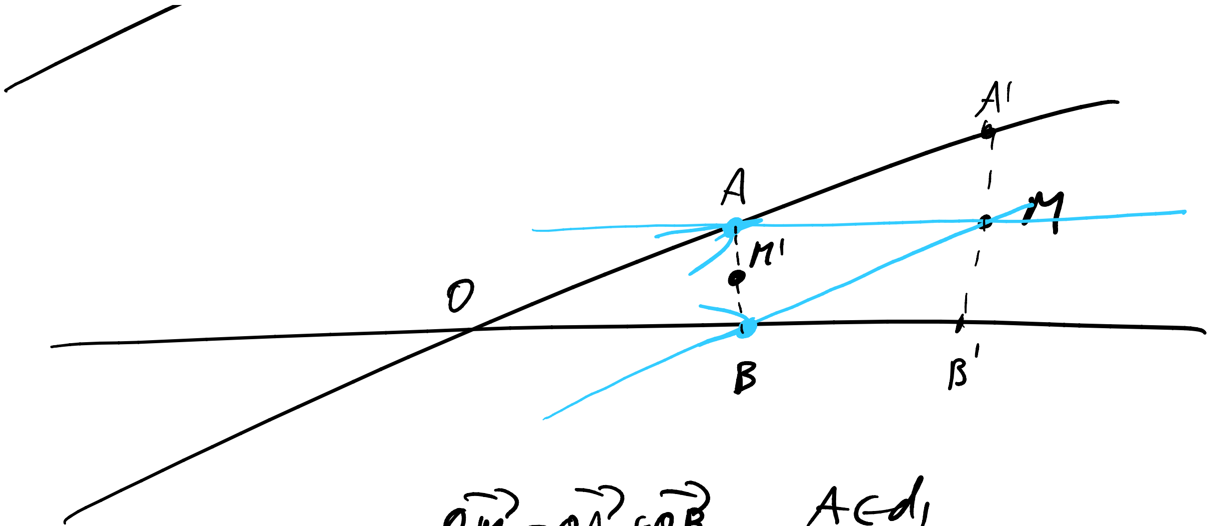
Caz I Dacă $d_1 \parallel d_2$



$\mathcal{M} = d_3 \parallel d_1$, $d_3 \parallel d_2$ echidistantă (Thales)

Caz II





$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$

$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$, $A \in d_1$

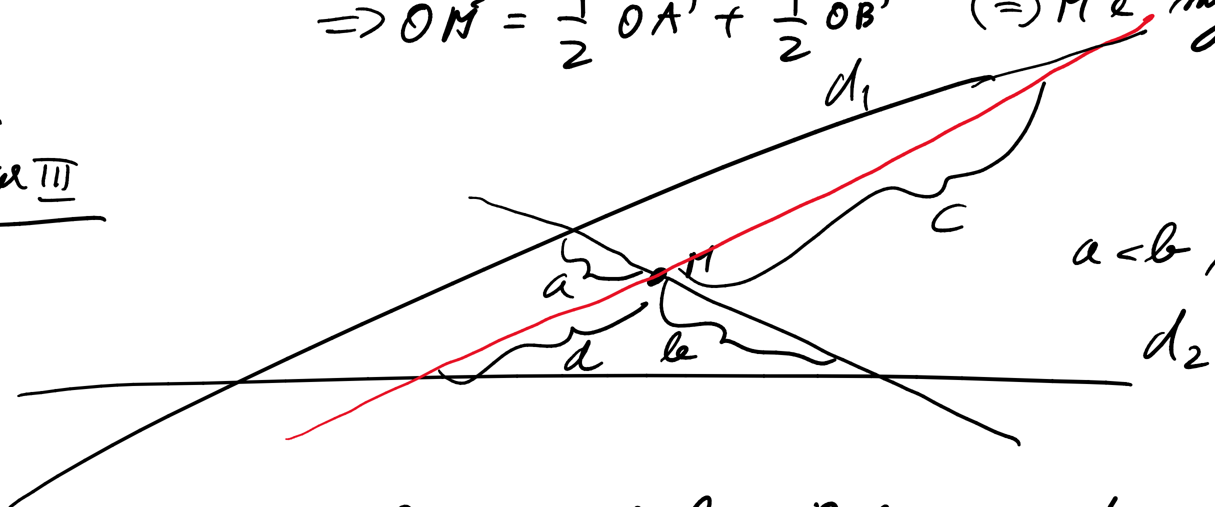
$B \in d_2$

Aleg $A' \in d_1$ a.î. $\vec{OA'} = 2\vec{OA}$

$B' \in d_2$ $\vec{OB'} = 2\vec{OB}$

$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA'} + \frac{1}{2}\vec{OB'}$ $(\Leftrightarrow)$ M e mijlocul lui $A'B'$

<u>Var III</u>



$a < b$, $c > d$

Din principiul lui Darboux, există o dreaptă "bună"