Examen EDP - 32

Problema 1

1) Calculați gradientul funcției $f(x,y,z)=(\cos(xy))^{xz}$ pe domeniul maxim de definiție pentru $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$f(x,y,z)=(\cos(xy))^{xz}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$\boxed{\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$; $\boxed{f(x)=g(x)^{h(x)}}=e^{\ln g(x)^{h(x)}}=\boxed{e^{h(x)\ln g(x)}}$

La noi: $g(x)=\cos(xy)$
$h(x)=xz$

- $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(xz)\ln(\cos(xy))}\right)=e^{(xz)\ln(\cos(xy))}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left((xz)\ln(\cos(xy))\right)$

$$=e^{(xz)\ln(\cos(xy))}\cdot\left(z\ln(\cos(xy))+(xz)\cdot\frac{1}{\cos(xy)}\cdot(-\sin xy)\cdot y\right)$$

$$=e^{(xz)\ln(\cos xy)}\cdot\left(z\ln(\cos(xy))+\frac{xyz}{\cos(xy)}\cdot(-\sin xy)\right)$$

- $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{xz=ct:\ u^a}=\frac{\partial}{\partial y}\left((\cos(xy))^{xz}\right)=(xz)(\cos(xy))^{xz-1}\cdot\cos'(xy)$

$$=(xz)(\cos(xy))^{xz-1}\cdot(-\sin(xy))\cdot x$$

- $\frac{\partial f}{\partial z}=(\cos(xy))^{xz}\cdot\ln(\cos(xy))\cdot(xz)'_z=(\cos(xy))^{xz}\cdot\ln(\cos(xy))\cdot x$.

$(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$

Morala: ne uităm în funcție de ce derivăm și vedem ce e constantă

2) Calculați $\operatorname{div}(x|x|^7)$, unde $x\in\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$.

$(fg)'=f'g+fg'$

$\operatorname{div}(\underset{\text{vector}}{F}\cdot\underset{\text{scalar}}{g})=\underset{\operatorname{div}F}{F'}g+F\underset{\nabla g}{g'}$

Vreau div $(\underbrace{x}_{\text{vector}}\,\underbrace{|x|^7}_{\text{scalar}}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(x_j\,|x|^7)$

$\frac{x_j}{|x|}$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(x_j\,|x|^7) = \sum_{j=1}^{3}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot x_j}^{1}\cdot|x|^7}_{=1\cdot|x|^7 = |x|^7} + \underbrace{x_j\cdot \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(|x|^7)}^{7|x|^6\cdot\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}(|x|)}}}_{= x_j\cdot 7|x|^{\cancel{6}\,5}\cdot\frac{x_j}{\cancel{|x|}} = 7x_j^2\,|x|^5}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left(|x|^7 + 7x_j^2\,|x|^5\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3}|x|^7 + \sum_{j=1}^{3} 7x_j^2\,|x|^5$$

$$= 3|x|^7 + 7|x|^5\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{3} x_j}_{|x|^2}$$

$$= 10\,|x|^7$$

$|x| = \sqrt{x_1 + x_2 + x_3}$

9) Arătați că $\Delta(x_5\,|x|^{-5}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$

Varianta 1: (definiție)

$$\boxed{\Delta = \sum_{j=1}^{5} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(x_5\,|x|^{-5})}$$

Varianta 2: (formule de calcul)

$$\boxed{\Delta(f\cdot g) = \Delta f\cdot g + f\,\Delta g + 2\,\nabla f\cdot\nabla g}$$

Folosim varianta 2:

Vrem $\Delta(x_5\,|x|^{-5}) = 0$

$f = x_5$

$g = |x|^{-5}$

$$\Delta(x_5 \cdot |x|^{-5}) = \Delta(x_5)\cdot |x|^{-5} + x_5 \cdot \Delta(|x|^{-5}) + 2\nabla x_5 \cdot \nabla(|x|^{-5})$$

$\rightsquigarrow x \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$, x_5 înseamnă $(0\ 0\ 0\ 0\ 1)$

- $\boxed{\Delta(x_5)} = \sum_{j=1}^{5} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(x_5)$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x_5)}_{0} + \underbrace{\dots}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_5^2}(x_5)}_{0}$$

$$= 0$$

- $\boxed{\Delta(|x|^{-5})} = (-5)(\cancel{-5}+\cancel{5}-2)|x|^{-7} = 10\,|x|^{-7}$

$$\boxed{\Delta(|x|^{\lambda}) = \lambda(\lambda+n-2)\,|x|^{\lambda-2}}$$

La noi: $\begin{cases} \lambda = -5 \\ n = 5 \quad (\mathbb{R}^5) \end{cases}$

SAU: f radială $\iff f(x) = g(|x|)$, $g(r) = r^{-5}$

$$\Delta f(x) = \left[g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r)\right]_{r=|x|}$$

$$= \left[(-5)(-6)r^{-7} + \frac{4}{r}(-5)\cdot r^{-6}\right]_{r=|x|}$$

$$= \left[10\, r^{-7}\right]_{r=|x|}$$

$$= 10\,|x|^{-7}$$

- $\boxed{\nabla x_5} = \nabla(0\ 0\ 0\ 0\ \cancel{x_5}) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1)$
- $\boxed{\nabla(|x|^{-5})} = (-5)\cdot|x|^{-6}\cdot \frac{x}{|x|} = (-5)\,x\,|x|^{-7}$ $\overset{\cdot}{\Rightarrow} (-5)\,x_5\,|x|^{-7}$

Revin la $\Delta(x_5 \cdot |x|^{-5}) = 0 \cdot |x|^{-5} + x_5 \cdot 10\,|x|^{-7} + 2\cdot(-5)\,x_5\,|x|^{-7}$

$$= 10\,x_5\,|x|^{-7} - 10\,x_5\,|x|^{-7}$$

$$= 0$$

4) Arătați că dacă o funcție netedă $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ verifică $f(\lambda x) = \lambda^3 f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^4$ și orice $\lambda > 0$, atunci: $x \cdot \nabla f(x) = 3 f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$.

$\boxed{x = (x_1, \dots, x_4)}$

Știm $f(\lambda x) = \lambda^3 f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$

Vrem $x \nabla f(x) = 3 f(x)$.

• $\boxed{\nabla f}$

$$\frac{df}{d\lambda}[f(\lambda x)] = \frac{d}{d\lambda}[f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x) \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\lambda x) \cdot x_2 + \dots$$

$$= \nabla f(\lambda x) \cdot x$$

produs scalar

Dar $\frac{d}{d\lambda}[f(\lambda x)] = \frac{d}{d\lambda}[\lambda^3 f(x)]$

$$= 3\lambda^2 f(x)$$

Deci, $\nabla f(\lambda x) \cdot x = 3\lambda^2 f(x)$

iau $\lambda = 1 \Rightarrow x \nabla f(x) = 3 f(x)$ □.

Problema 2

Fie $\Omega := (-1,1) \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^2$ și notăm cu $\partial\Omega$ frontiera lui Ω.

Considerăm problema: $\begin{cases} -\Delta u(x,y) = \dfrac{|x|}{1+x^2} & , (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0 & , (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$

1) Găsiți constanta C a.î. funcția $v(x,y) = C(x^2+y^2)$ să verifice $-\Delta v = \frac{1}{2}$ în Ω.

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$= 2C + 2C$$

$$= 4C$$

$$-\Delta v = \frac{1}{2} \Rightarrow 4C = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = -\frac{1}{8}$$

Deci, $\boxed{v(x,y) = -\frac{1}{8}(x^2+y^2)}$

2) Folosind eventual "Principiile de Maxim" studiate (comparați eventual u cu v, etc.) și deduceți că:

$$\underbrace{0 < u(x,y)}_{(1)} \underbrace{\le \frac{1}{4}}_{(2)} \quad , \forall (x,y) \in \Omega.$$

(1) $-\Delta u \ge 0$ în $\Omega \Rightarrow u$ superarmonică

$\xRightarrow{PSM} \min\limits_{\Omega} u = \min\limits_{\partial\Omega} u = 0$

$\Rightarrow u \ge 0$ în $\overline{\Omega}$

Pp. prin absurd că $\exists (x_0,y_0) \in \Omega$ a.î. $u(x_0,y_0) = 0$ (vrem $u > 0$)

(x_0,y_0) punct de minim interior pentru u.

$\xRightarrow{PTM} u \equiv ct \Rightarrow \Delta u = c$ abs

Am obținut că $u > 0$ în Ω.

② Acum vrem $u \le \frac{1}{4}$

Fie $U := u - v \Rightarrow -\Delta U = -\Delta u + \Delta v$

$$= \underbrace{\frac{|x|}{1+x^2} - \frac{1}{2}}_{\le 0} \quad \text{în } \Omega$$

$\Rightarrow U$ subarmonică

$$\Rightarrow \max_{\bar\Omega} U = \max_{\partial\Omega} U = \max_{\partial\Omega} \{u - v\} = \max_{\partial\Omega} \{0 - v\} = \max_{\partial\Omega} \frac{1}{8}(x^2+y^2)$$

$\begin{cases} (x,y) \in \Omega \\ x \le 1 \,;\, y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \max_{\partial\Omega} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \max_{\bar\Omega} U = \frac{1}{4}$

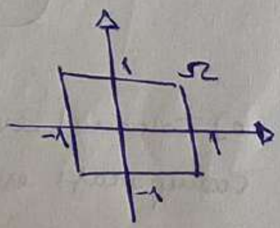
$U \le \frac{1}{4}$ în $\bar\Omega$

$\Rightarrow u - v \le \frac{1}{4}$ în $\bar\Omega$

$\Rightarrow u \le \frac{1}{4} + \underbrace{v}_{\le 0}$ în $\bar\Omega$

$\Rightarrow u \le \frac{1}{4}$ în $\bar\Omega$

$\Rightarrow u \le \frac{1}{4}$ în Ω. □



Problema 3

Considerăm următoarea problemă de tip "unde":

$$(2)\quad \begin{cases} 2u_{tt}(x,t) + 3u_{tx}(x,t) - 2u_{xx}(x,t) = 0 & , x \in \mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0) = f(x) & , x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

unde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ sunt funcții date.

1) Arătați că dacă $v = v(x,t)$ este o funcție de clasă C^2 atunci:

$$(2\partial_t - \partial_x)(v_t(x,t) + 2v_x(x,t)) = 2v_{tt}(x,t) + 3v_{tx}(x,t) - 2v_{xx}(x,t) \quad \forall x, \forall t.$$

$$\underbrace{2v_{tt} + 4v_{xt} - \underbrace{v_{tx}}_{\text{T Schwarz } v_{xt}}}_{3v_{tx}} - 2v_{xx} = 2v_{tt} + 3v_{tx} - 2v_{xx} \quad \square.$$

2) Rezolvați problema (2) cu valori inițiale satisfăcută de u (căutați forma generală a lui u) reducând-o eventual la rezolvarea a două ecuații de transport (una omogenă și alta neomogenă)

Notez $v(x,t) = u_t(x,t) + 2u_x(x,t)$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} 2v_t(x,t) - v_x(x,t) = 0 & , x \in \mathbb{R}, t>0 \quad \leftarrow \text{omogenă} \\ v(x,0) = u_t(x,0) + 2u_x(x,0) \\ \quad = g(x) + 2f'(x) \end{cases}$$

$$\underbrace{(v_x, v_t)}_{\nabla v} \underbrace{(-1, 2)}_{\bar{a}} = 0$$

$\frac{\partial v}{\partial \bar{a}} = 0 \Rightarrow v$ e constantă pe direcția $\bar{a}$.

Vrem $v(x,t) = v\left(\frac{t}{2}(-1,2) + \left(x + \frac{t}{2}, 0\right)\right)$

$= v\left(x + \frac{t}{2}, 0\right)$

$= g\left(x + \frac{t}{2}\right) + 2f'\left(x + \frac{t}{2}\right)$

$$\begin{cases} a u_x(x,t) + b u_t(x,t) = 0 & , x \in \mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0) = f(x) & , f \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$u(x,t) = \boxed{f\left(-\frac{a}{b}t + x\right)}$ soluție

Revin: $v(x,t) = u_t(x,t) + 2u_x(x,t)$

$$= g\left(x+\frac{t}{2}\right) + 2f'\left(x+\frac{t}{2}\right)$$

Deci: $\begin{cases} u_t(x,t) + 2u_x(x,t) = g\left(x+\frac{t}{2}\right) + 2f'\left(x+\frac{t}{2}\right) & \leftarrow \text{neomogenă} \\ \boxed{u(x,0) = f(x)} & \leftarrow \text{trebuie să o punem} \end{cases}$

Fie $w(s) = u(x + 2s, t + 1\cdot s)$ $s \in \mathbb{R}$

$$\boxed{w'(s) = u_x \cdot u_s + u_t \cdot u_s}$$

$$w'(s) = u_x(x+2s, t+s) \cdot 2 + u_t(x+2s, t+s)\ 1$$

$$= u_t(x+2s, t+s) + 2u_x(x+2s, t+s)$$

$$= g\left(x+2s+\frac{t+s}{2}\right) + 2f'\left(x+2s+\frac{t+s}{2}\right)$$

$$= g\left(x+\frac{t}{2}+\frac{5s}{2}\right) + 2f'\left(x+\frac{t}{2}+\frac{5s}{2}\right)$$

- $w(0) = u(x,t)$
- $w(-t) = u(x-2t, 0) = f(x-2t)$

$$\int_{-t}^{0} w'(s)\,ds = \boxed{w(0) - w(-t)} = \int_{-t}^{0} \left[g\left(x+\frac{t}{2}+\frac{5s}{2}\right) + 2f'\left(x+\frac{t}{2}+\frac{5s}{2}\right)\right] ds$$

$$w(0) - w(-t) = u(x,t) - f(x-2t)$$

$$\int_{-t}^{0} \left[g\left(x+\frac{t}{2}+\frac{5s}{2}\right) + 2f'\left(x+\frac{t}{2}+\frac{5s}{2}\right)\right] ds$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{S.V. } \tau = x+\frac{t}{2}+\frac{5s}{2} \\ d\tau = \frac{5}{2}\,ds \Rightarrow ds = \frac{2}{5}\,d\tau \\ s = 0 \Rightarrow \tau = x+\frac{t}{2} \\ s = -t \Rightarrow \tau = x+\frac{t}{2}-\frac{5t}{2} = x-\frac{4t}{2} = x-2t \end{array}\right]$$

$$= \int_{x-2t}^{x+\frac{t}{2}} \left(g(\tau) + 2f'(\tau)\right) \frac{2}{5}\,d\tau$$

$$= \frac{2}{5}\int_{x-2t}^{x+\frac{t}{2}} g(\tau)\,d\tau + \frac{4}{5}\int_{x-2t}^{x+2t} f'(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{2}{5}\int_{x-2t}^{x+\frac{t}{2}} g(\tau)\,d\tau + \frac{4}{5}\left(f(x+\tfrac{t}{2}) - f(x-2t)\right)$$

$$= \frac{2}{5}\int_{x-2t}^{x+2t} g(\tau)\,d\tau + \frac{4}{5} f(x+\tfrac{t}{2}) - \frac{4}{5} f(x-2t)$$

~~$u(x,t) =$~~

Revenim la $u(x,t) - f(x-2t) = \frac{2}{5}\int_{x-2t}^{x+2t} g(\tau)\,d\tau + \frac{4}{5} f(x+\frac{t}{2}) - \frac{4}{5} f(x-2t)$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{2}{5}\int_{x-2t}^{x+2t} g(\tau)\,d\tau + \frac{4}{5} f(x+\tfrac{t}{2}) + \frac{1}{5} f(x-2t).$$

soluția.

Problema 4

Considerăm problema Cauchy : (4) $\begin{cases} u_t(x,t) + 2u_x(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$

unde $u_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă și mărginită.

1) Fie funcția $v : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a.î. funcția $v(x,t) := u(x+2t, t)$.
Arătați că v verifică ecuația $v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0$, $\forall x\in\mathbb{R}, \forall t>0$.

$v(x,t) := u(x+2t,t)$

$v_t(x,t) = (u(x+2t,t))'_t$

$= u_x(x+2t,t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(x+2t) + u_t(x+2t,t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(t)$

$= (2u_x + u_t)(x+2t,t)$

$\overset{(4)}{=} u_{xx}(x+2t,t)$

$= v_{xx}(x+2t,t)$ $\square$

2) Determinați u în problema (4) pentru $u_0(x) = \cos(3x)$.

Schimb u în v : $\begin{cases} v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) = u_0(x) = \cos(3x) \end{cases}$

$$v(x,t) = \underbrace{\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\cdot\cos(3y)\,dy}_{\text{de calculat!}}$$

(integrală parametrică sau metoda sep. var.)

! Dacă avem combinații de sin și cos (exponențiale) în datele inițiale caut soluții de forma $\boxed{v(x,t) = A(x)\,B(t)}$.

$$u_0 = v(x,0) = \begin{cases} c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x) \\ c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\alpha x} \end{cases}$$

Sistemul devine: $\begin{cases} A(x)\,B'(t) - A''(x)\,B(t) = 0 \\ A(x)\,B(0) = \cos(3x) \end{cases} \Rightarrow A(x) = \dfrac{\cos(3x)}{B(0)},\ B(0) \neq 0$

$$\frac{\cos(3x)}{B(0)} \cdot B'(t) + \frac{9\cos(3x)}{B(0)} \cdot B(t) = 0$$

$$\left[A'(x) = -3\frac{\sin(3x)}{B(0)} \quad ; \quad A''(x) = -\frac{9\cos(x)}{B(0)} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(3x)}{B(0)} \left(B'(t) + 9B(t) \right) = 0$$

$$\Rightarrow B'(t) + 9B(t) = 0$$

Ecuația caracteristică: $\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -9$

$$B(t) = \underset{\sim}{c}\, e^{-9t} = \underset{\sim}{B(0)}\, e^{-9t}$$

Am obținut $v(x,t) = \dfrac{\cos(3x)}{\cancel{B(0)}} \cdot \cancel{B(0)}\, e^{-9t} = \cos(3x)\, e^{-9t}$

Acum, ne întoarcem la $u(x,t)$

$$u(x,t) = v(x-2t, t) = A(x-2t)\,B(t)$$
$$= \cos\left(3(x-2t) \cdot e^{-9t}\right).$$