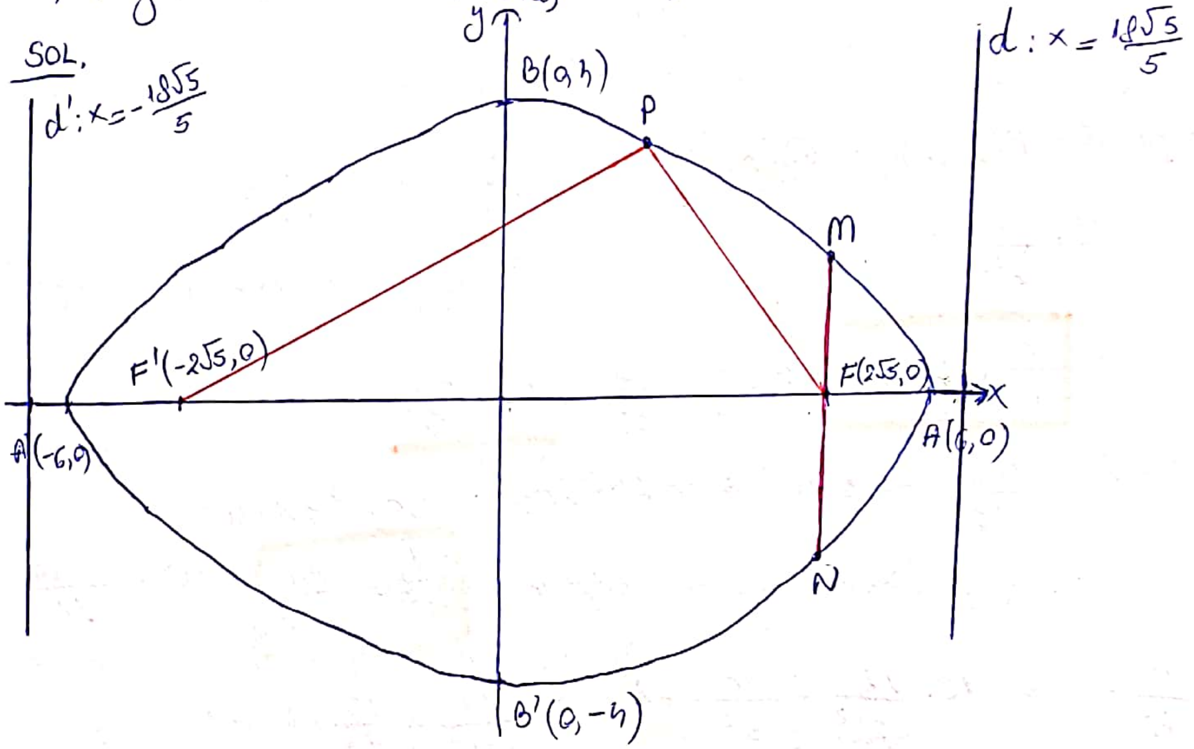
Milostianu Andreea
Mihoci Valentina

1.12.2021

Tutoriat 7
Geometrie I
(exerciții)

1 Fie elipsa $\mathcal{E}: \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. Precizați coordonatele vârfurilor, focarelor, excentricitatea și lungimea latus rectum. Scrieți ecuațiile directoarelor. Aflați și razele focale, distanța focală.

SOL.



Ecuația unei elipse de centru $O(0,0)$ este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Deci, la noi: $a=\pm 6$, $b=\pm 4$. Obținem vârfurile $A(6,0)$, $A'(-6,0)$, $B(0,4)$, $B'(0,-4)$.

Într-o elipsă avem mereu relația: $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=a^2-b^2$

La noi: $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt5$

Focarele elipsei sunt: $F(2\sqrt5,0)$ și $F'(-2\sqrt5,0)$ → focarele se află mereu pe axa mare!

Excentricitatea: $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt5}{6}=\frac{\sqrt5}{3}$.

Cele două directoare ale elipsei sunt: $d \cup d': x=\pm\frac{a^2}{c}$

$d: x=\frac{a^2}{c} \Rightarrow d: x=\frac{36}{2\sqrt5} \Rightarrow d: x=\frac{18\sqrt5}{5}$

$d': x=-\frac{a^2}{c}=-\frac{18\sqrt5}{5}$

Distanța focală: $FF'=2c$. La noi: $FF'=2c=4\sqrt5$.

Lungimea latus rectum: $MN=2MF=2a(1-e^2) \Rightarrow MN=2\cdot6\left(1-\frac{5}{9}\right)=12\cdot\frac{4}{9}=\frac{16}{3}$.

Razele focale: $PF = a - \frac{xc}{a}$ și $PF' = a + \frac{xc}{a}$

$PF = 6 - \frac{x \cdot 2\sqrt{5}}{6} = 6 - \frac{x\sqrt{5}}{3} = \frac{18 - x\sqrt{5}}{3}$

$PF' = 6 + \frac{x \cdot 2\sqrt{5}}{6} = 6 + \frac{x\sqrt{5}}{3} = \frac{18 + x\sqrt{5}}{3}$

3. Să se scrie ecuația elipsei care verifică:

a) Trece prin $A(4,4)$ și are excentricitatea $\frac{5}{6}$.

b) $c = 5$, $e = \frac{1}{2}$

SOL. a) Avem $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$A(4,4) \in \mathcal{E} \Rightarrow \boxed{\frac{16}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1.}$ $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{6} \Rightarrow c = \frac{5a}{6}$

$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + \frac{25a^2}{36} \Rightarrow 36a^2 = 36b^2 + 25a^2 \Rightarrow 36b^2 = 11a^2$

$\boxed{\frac{1}{a^2} = \frac{11}{36b^2}} \Rightarrow a^2 = \frac{36b^2}{11}$

$16 \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow 16 \cdot \frac{11}{36b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{44}{9b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{44 + 144}{9b^2} = 1 \Rightarrow 9b^2 = 188 \Rightarrow \boxed{b^2 = \frac{188}{9}}$

$a^2 = \frac{36}{11} \cdot \frac{188}{9} = \frac{4 \cdot 188}{11} = \frac{752}{11}$

$\mathcal{E}: \frac{x^2}{\frac{752}{11}} + \frac{y^2}{\frac{188}{9}} = 1 \Rightarrow \mathcal{E}: \frac{x^2 \cdot 11}{752} + \frac{y^2 \cdot 9}{188} = 1 \Rightarrow \mathcal{E}: \frac{11x^2}{752} + \frac{36y^2}{752} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{E}: 11x^2 + 36y^2 = 752$

b) $e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{a} \Rightarrow a = 10$. $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} =$

$= 5\sqrt{3}$.

$\mathcal{E}: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$

3. Fie elipsa: $\mathcal{E}: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

a) Să se afle ecuația tangentei în $P(5, 3\sqrt{3})$.

b) Ecuațiile tangente paralele cu dreapta $\Delta: y = 2x$.

c) Ecuațiile tangente din $Q(6, 12)$.

d) Polara lui $Q(6,12)$.

SOL. a) Verificăm poziția punctului $P(5, 3\sqrt{3})$ față de elipsă:

$$\frac{25}{100} + \frac{27}{36} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow P(5, 3\sqrt{3}) \in \mathcal{E}.$$

Aplicăm procedeul de dedublare: $\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$.

$$\frac{x \cdot 5}{100} + \frac{y \cdot 3\sqrt{3}}{36} = 1$$

$$d: \frac{x}{20} + \frac{y\sqrt{3}}{12} = 1$$

b) Tangentele căutate sunt paralele cu $\Delta: y = 2x$, deci au panta $m = 2$.

Aplicăm ecuația magică: $y = mx \pm \sqrt{m^2 a^2 + b^2}$.

$$y = 2x \pm \sqrt{4 \cdot 100 + 36} \Rightarrow y = 2x \pm \sqrt{436} \Rightarrow y = 2x \pm 2\sqrt{109}$$

Tangentele căutate sunt $d_1: y = 2x + 2\sqrt{109}$ și $d_2: y = 2x - 2\sqrt{109}$

c) Verificăm poziția punctului $Q(6,12)$ față de elipsă!

$$\frac{36}{100} + \frac{144}{36} = \frac{36^2 + 14400}{3600} = \frac{15696}{3600} > 1 \Rightarrow Q(6,12) \in Ext\,\mathcal{E}.$$

Avem ecuația magică: $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$.

$$12 = m6 \pm \sqrt{100m^2 + 36} \Rightarrow \underbrace{12 - 6m}_{6(2-m)} = \pm\sqrt{100m^2+36} \,\Big/^2$$

$$36(2-m)^2 = 100m^2 + 36$$

$$36(4 - 4m + m^2) = 100m^2 + 36$$

$$36m^2 - 144m + 144 = 100m^2 + 36$$

$$64m^2 + 144m - 108 = 0 \,/:2$$

$$32m^2 + 72m - 54 = 0 \,/:2$$

$$16m^2 + 36m - 27 = 0$$

$16m^2 + 36m - 27 = 0.$

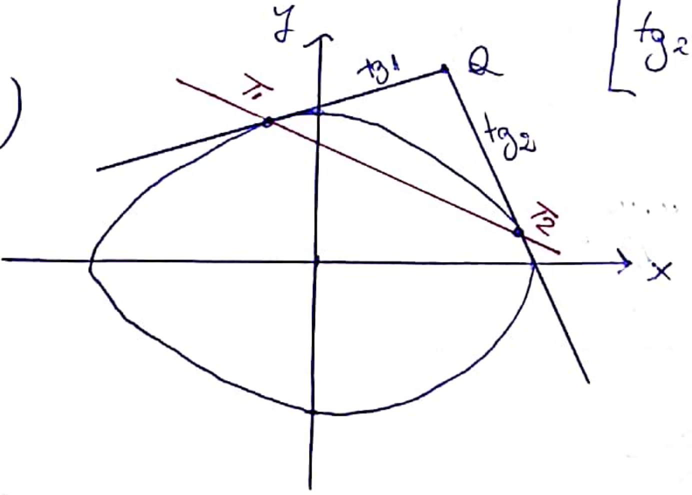
$\Delta = 1296 + 1728 = 3024 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 12\sqrt{21}$

$$m_1 = \frac{-36 - 12\sqrt{21}}{2 \cdot 16} = \frac{-18 - 6\sqrt{21}}{16} = \frac{-9 - 3\sqrt{21}}{8}$$

$$m_2 = \frac{-9 + 3\sqrt{21}}{8}$$

Tangentele în punctul $Q(6,12)$ sunt $\begin{cases} tg_1: y - 12 = -\dfrac{9 + 3\sqrt{21}}{8}(x - 6) \\ tg_2: y - 12 = \dfrac{-9 + 3\sqrt{21}}{8}(x - 6) \end{cases}$

d)



Polara lui $Q(6,12)$ este dată de T_1T_2:

Procedeul de dedublare: $\frac{6x}{100} + \frac{12y}{36} = 1$

$\Rightarrow T_1T_2: \frac{3x}{50} + \frac{y}{3} = 1$

4. a) Să se scrie ecuația elipsei ce are distanța focală $2c = 8$ și trece prin punctul $M(\sqrt{15}, -1)$.

b) Să se scrie ecuația elipsei cu focarele $F(3,0), F'(-3,0)$ și care trece prin punctul $N(4,1)$.

SOL. a) $2c = 8 \Rightarrow c = 4$. $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 16$.

$$\begin{cases} M(\sqrt{15}, -1) \in E \\ E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{15}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{15}{a^2} = 1 - \frac{1}{b^2} \Rightarrow \frac{15}{a^2} = \frac{b^2 - 1}{b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{15b^2}{b^2 - 1}$$

$$\frac{15b^2}{b^2 - 1} - b^2 = 16 \,/\cdot(b^2 - 1) \Rightarrow 15b^2 - b^4 + b^2 = 16b^2 - 16$$

$$\begin{cases} b^4 = 16 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow b = 2$$

$$a^2 = \frac{15 \cdot 4}{3} = 20 \Rightarrow a = \sqrt{20}$$

$E: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1.$

b) Focarele sunt $F(3,0)$ și $F'(-3,0) \Rightarrow c=3$. ; $a^2=b^2+c^2$

$a^2-b^2=9$.

$$\begin{cases} \mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ N(4,1)\in \mathcal{E} \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{16}{a^2}=1-\frac{1}{b^2} \Rightarrow \frac{16}{a^2}=\frac{b^2-1}{b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{16b^2}{b^2-1}$$

$$\frac{16b^2}{b^2-1}-b^2=9 \,/\cdot(b^2-1) \Rightarrow 16b^2-b^4+b^2=9b^2-9$$

$$b^4-8b^2-9=0, \quad b^2 \overset{not.}{=} t>0$$

$$t^2-8t-9=0$$

$$t^2+t-9t-9=0 \Rightarrow t(t+1)-9(t+1)=0$$

$$(t+1)(t-9)=0$$

$$\text{I } t_1=-1<0$$

$$\text{II } t_2=9 \Rightarrow \begin{cases} b^2=9 \\ b>0 \end{cases} \Rightarrow b=3$$

$$a^2=\frac{16\cdot 9}{8}=18 \Rightarrow a=\sqrt{18}$$

$$\mathcal{E}: \frac{x}{18}+\frac{y}{9}=1$$

5. a) Cât este suma semiaxelor elipsei $4x^2+y^2=1$?

b) Fie a semiaxa mare a elipsei care trece prin $A(4,3)$ și are semiaxa mică $b=\sqrt{10}$.

Să se afle a.

SOL. $\mathcal{E}: 4x^2+y^2=1 \Rightarrow \mathcal{E}: \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}, \ a,b>0$

$$a+b=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ A(4,3)\in\mathcal{E},\ b=\sqrt{10} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{16}{a^2}+\frac{9}{10}=\overset{10)}{1} \Rightarrow \frac{16}{a^2}=\frac{1}{10} \Rightarrow a^2=160 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=4\sqrt{10}$$

6. a) Să se scrie ecuația elipsei care trece prin $A(2,-1)$ și este tangentă dreptei $d: x+2y-5=0$

b) Precizați ecuațiile directoarelor și excentricitatea pentru elipsa obținută la punctul

SOL. a). Avem elipsa $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ și $A(2,-1)\in\mathcal{E} \Rightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow 4b^2+a^2=a^2b^2 \quad (1)$

Fie P punctul de tangență al dreptei d la elipsă, deci $P\in\mathcal{E}$, $P(x_0,y_0)$.

Prin dedublare obținem: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0$

$$d: x+2y=5 \Rightarrow x+2y-5=0$$

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{1}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{2}=\frac{-1}{-5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0}{a^2}=\frac{1}{5} \Rightarrow x_0=\frac{a^2}{5} \\ \frac{y_0}{2b^2}=\frac{1}{5} \Rightarrow y_0=\frac{2b^2}{5} \end{cases}$$

$P(x_0,y_0)\in\mathcal{E} \Rightarrow \frac{a^4}{25a^2}+\frac{4b^4}{25b^2}=1 \Rightarrow a^2+4b^2=25 \quad (2)$

Deci, din (1) și (2) $\Rightarrow a^2b^2=25 \Rightarrow a^2=\frac{25}{b^2}$

$\frac{25}{b^2}+4b^2=25 \,/\cdot b^2 \Rightarrow 25+4b^4=25b^2 \Rightarrow 4b^4-25b^2+25=0$

$$4b^4-20b^2-5b^2+25=0$$
$$4b^2(b^2-5)-5(b^2-5)=0$$
$$(4b^2-5)(b^2-5)=0$$

I $b^2=5 \Rightarrow a^2=5$ deci obținem un cerc

II $b^2=\frac{5}{4} \Rightarrow a^2=\frac{25}{\frac{5}{4}}=20 \Rightarrow a=2\sqrt{5}$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{20}+\frac{4y^2}{5}=1$$

b) $a^2-b^2=c^2 \Rightarrow c^2=20-\frac{5}{4}=\frac{75}{4} \Rightarrow c=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$d\cup d': x=\pm\frac{a^2}{c} \Rightarrow d\cup d': x=\pm\frac{20}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x=\pm\frac{8\sqrt{3}}{3}$

7. Fie elipsa $\mathcal{E}: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Este ea în formă canonică? Aflați semiaxele a, b și excentricitatea e.

<u>SOL</u>. În elipsa dată avem $a=2$ și $b=3$, $a<b$. Înseamnă că a devine axa mică, iar b devine axa mare, deci elipsa este rotită la $90°$. Așadar, nu avem o formă canonică. Pentru a ajunge la forma canonică, facem o schimbare de variabile:

$x \longmapsto y$.

Ajungem la faptul că $a=3$, $b=2$. Avem $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

8. Să se găsească ecuația unei elipse având axele de coordonate ca axe de simetrie și trecând prin punctele $M(3,4)$, $N(6,2)$.

<u>SOL</u>. $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\begin{aligned} M(3,4)\in\mathcal{E} &\Rightarrow \\ N(6,2)\in\mathcal{E} &\Rightarrow \end{aligned}\begin{cases} \frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \quad /\cdot 4 \\ \frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{36}{a^2}+\frac{64}{b^2}=4 \\ \frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \end{cases} \quad (-)$$

$$\frac{60}{b^2}=3 \Rightarrow b^2=\frac{60}{3}=20$$

$$\frac{36}{a^2}+\frac{64}{20}=4 \Rightarrow \frac{36}{a^2}+\frac{16}{5}=4 \Rightarrow \frac{36}{a^2}=\frac{4}{5} \Rightarrow a^2=\frac{36\cdot 5}{4}=45$$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1.$$

5. Se consideră cercurile $\mathcal{C}_1(A_1(2,0), \sqrt{2}) : (x-2)^2+y^2=2$

$\mathcal{C}_2(A_2(a_2,b_2), R_2) : x^2+y^2-8x-8=0$

$\mathcal{C}_3(A_3(a_3,b_3), R_3) : x^2+y^2-x=0.$

De asemenea, se dă și dreapta $d: y=x$.

Să se afle la care cercuri este dreapta d tangentă.

SOL. $\mathcal{C}_2: x^2-8x+y^2-8=0 \Rightarrow x^2-\underset{2\cdot 4}{8}x+16+y^2-8-16=0$

$(x-4)^2+y^2=24 \rightsquigarrow \mathcal{C}_2(A_2(4,0), 2\sqrt{6})$

$\mathcal{C}_3: x^2+y^2-x=0 \Rightarrow x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}+y^2-\frac{1}{4}=0$

$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4} \rightsquigarrow \mathcal{C}_3(A_3(\frac{1}{2},0), \frac{1}{2})$

Pentru a stabili poziția dreptei d față de cercuri, aflăm $d \cap \mathcal{C}_K$, $K=\overline{1,3}$.

$d \cap \mathcal{C}_1: \begin{cases} y=x \\ (x-2)^2+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow (y-2)^2+y^2=2 \Rightarrow y^2-4y+4+y^2=2$

$2y^2-4y+2=0$

$y^2-2y+1=0 \Rightarrow (y-1)^2=0 \Rightarrow y=1=x.$

$d \cap \mathcal{C}_1=\{(1,1)\} \Rightarrow d$ tangentă la cercul $\mathcal{C}_1$.

$d \cap \mathcal{C}_2: \begin{cases} y=x \\ x^2+y^2-8x-8=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+x^2-8x-8=0 \Rightarrow 2x^2-8x-8=0 /:2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-4x-4=0$

$\Delta=16+16=32 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4\sqrt{2}$

$x_1=\frac{4-4\sqrt{2}}{2}=2-2\sqrt{2}=y_1 \Rightarrow (2-2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$

$x_2=\frac{4+4\sqrt{2}}{2}=2+2\sqrt{2} \Rightarrow y_2 \Rightarrow (2+2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$

$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$

$d \cap \mathcal{C}_2=\{(2-2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2}), (2+2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})\} \Rightarrow d$ secantă la cercul $\mathcal{C}_2$.

$d \cap \mathcal{C}_3: \begin{cases} y=x \\ x^2+y^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2-x=0 \Rightarrow x(2x-1)=0$

$x_1=0=y_1 \Rightarrow (0,0)$

$x_2=\frac{1}{2}=y_2 \Rightarrow (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$d \cap \mathcal{C}_3=\{(0,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\} \Rightarrow d$ secantă la cercul $\mathcal{C}_3$.

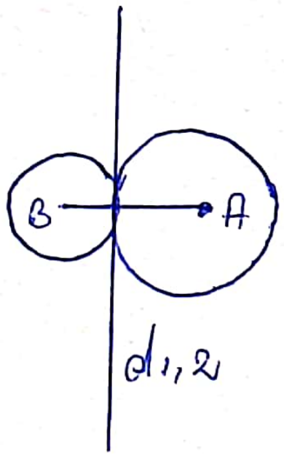
Deci, d este tangentă la cercul $\mathcal{C}_1$.

9. Fie cercurile $\mathcal{C}_1 : x^2+y^2-2x-2y-7=0$ și $\mathcal{C}_2(A(5,4), R_2) ; (x-5)^2+(y-4)^2=R^2$.

Să se afle R a.î. $\mathcal{C}_2$ este tangent exterior lui $\mathcal{C}_1$.

Sol. $x^2+y^2-2x-2y-7=0 \Rightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)-1-1-7=0$

$\Rightarrow \mathcal{C}_1(B(1,1), 3) ; (x-1)^2+(y-1)^2=9$, $R_1=3$



$BA = R_1+R_2$

$BA=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$5=3+R_2 \Rightarrow R_2=2$.