Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

30 ianuarie 2018

NUME:	....
PRENUME:	....
GRUPA:	....

Examen Analiză Numerică & Metode Numerice
Matematică-Informatică şi Matematică Aplicată, Anul III

I. **Ecuaţii neliniare (1 punct din oficiu):**

a) Prezentaţi algoritmul corespunzător *metodei bisecţiei* pentru rezolvarea numerică a ecuaţiei $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, unde $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă a.i. $f(a)\, f(b) < 0$. (**2 puncte**)

b) Demonstraţi că şirul de aproximări generat de *metoda bisecţiei* converge către soluţia exactă, $x^* \in [a, b]$, a ecuaţiei $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, unde $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă a.i. $f(a)\, f(b) < 0$. (**2 puncte**)

c) Câte iteraţii, $n \in \mathbb{N}$, sunt necesare pentru ca soluţia numerică, x_n, obţinută prin *metoda bisecţiei*, să aproximeze cu o eroare absolută de cel mult 10^{-5} soluţia exactă, x^*, a ecuaţiei $x^3 + x - 1 = 0$ în intervalul $[0, 1]$. Folosiţi aproximarea $\log_2 10 \approx 3,32$. (**2 puncte**)

d) Enumeraţi avantajele şi dezavantajele *metodei secantei* (i.e. cerinţele, dependenţa de prima aproximare, izolarea soluţiei, viteza de convergenţă a metodei). (**2 puncte**)

e) Propuneţi o metodă iterativă de punct fix pentru aproximarea numărului $\sqrt{3}$ şi justificaţi răspunsul dat. (**2 puncte**)

II. **Interpolare polinomială (1 punct din oficiu):**

Fie funcţia

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x\,, \tag{1}$$

nodurile/punctele de interpolare $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

a) Determinaţi setul de date, D, şi gradul n al polinomului de interpolare Lagrange, $P_n(x)$, asociate funcţiei f dată de (1) şi nodurilor/punctelor de interpolare $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$. (**1 punct**)

b) Determinaţi diferenţele divizate $f[x_0]$, $f[x_1]$, $f[x_2]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_1, x_2]$ şi $f[x_0, x_1, x_2]$. (**2 puncte**)

c) Determinaţi polinomul de interpolare Lagrange de grad n, P_n, asociat funcţiei f dată de (1) şi nodurilor/punctelor de interpolare $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$, folosind *metoda lui Newton fără diferenţe divizate*. (**3 puncte**)

d) Presupunând că polinomul de interpolare Lagrange de grad n, P_n, asociat funcţiei f dată de (1) şi nodurilor/punctelor de interpolare $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$, se calculează folosind *metoda naivă*, determinaţi numărul de operaţii elementare efectuate în acest caz fără a aplica efectiv metoda naivă. (**2 puncte**)

e) Fie nodurile/punctele de interpolare $x_j = j$, $j = \overline{0, 3}$. Ştiind că au loc relaţiile $P_{0,1}(x) = x + 1$, $P_{1,2}(x) = 3x - 1$ şi $P_{1,2,3}(3/2) = 4$, să se determine $P_{0,1,2,3}(3/2)$. (**2 puncte**)

III. **Derivare numerică. Integrare numerică (1 punct din oficiu):**

Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2\big([a,b]\big)$.

a) Folosind dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei f în raport cu $x \in (a,b)$, determinaţi formula de aproximare prin *diferenţe finite descendente* pentru $f'(x)$ şi *eroarea de trunchiere* corespunzătoare, notată prin $e_t(x)$. (**2 puncte**)

b) Estimaţi *eroarea de trunchiere*, $e_t(x)$, determinată la punctul a). (**2 puncte**)

c) Presupunând că evaluarea valorii $f(x)$ conţine *eroarea de rotunjire*, notată prin $e_r(x)$, datorată reprezentării în virgulă mobilă a numerelor reale, i.e. în fapt, în locul lui $f(x)$ se evaluează

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + e_r(x)\,, \quad \forall\, x \in [a,b]\,, \quad \text{unde} \quad |e_r(x)| \le \varepsilon\,, \quad \forall\, x \in [a,b]\,, \tag{2}$$

cu $\varepsilon > 0$ cunoscut, să se estimeze *eroarea de aproximare*, notată cu $e(x)$, obţinută prin aproximarea lui $f'(x)$ prin formula de *diferenţe finite descendente* obţinută la punctul a). (**2 puncte**)

d) Notând cu $h > 0$ distanţa de la punctul $x \in (a,b)$, în care se aproximează $f'(x)$ prin formula de *diferenţe finite descendente*, la punctul adiţional folosit în această formulă, să se determine valoarea sa optimă, h_{opt}, pentru care *eroarea de aproximare*, $e(x)$, este minimă. (**2 puncte**)

e) Fie $g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă şi integrala $I(g) = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$. Cu notaţiile folosite la curs, dacă au loc relaţiile $I_1(g) = 4$ şi $I_2(g) = 2$, să se determine $g(1)$. (**2 puncte**)

IV. **Sisteme de ecuaţii liniare. Metode numerice pentru EDO (1 punct din oficiu):**

a) Folosind *metoda de eliminare Gauss fără pivotare*, să se rezolve sistemul liniar:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ \;\; x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \tag{3}$$

unde $\varepsilon = O\left(10^{-20}\right) \ll 1$. Verificaţi rezultatul obţinut şi identificaţi punctul slab al metodei în acest caz. Menţionaţi, fără a efectua calculele, cum se poate remedia *metoda de eliminare Gauss fără pivotare* pentru a obţine soluţia corectă. (**2 puncte**)

b) Enunţaţi *teorema de existenţă şi unicitate a factorizării* LU *fără pivotare*. Demonstraţi unicitatea factorizării LU fără pivotare. (**2 puncte**)

c) Deduceţi *metoda explicită a lui Euler* pentru rezolvarea numerică a problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big)\,, \quad t \in (t_0, t_f] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

unde $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă în raport cu ambele argumente şi Lipschitz continuă în raport cu al doilea argument. (**2 puncte**)

d) Definiţi *eroarea globală/eroarea de convergenţă*, *convergenţa*, *eroarea de trunchiere locală/eroarea de consistenţă*, *consistenţa* şi *eroarea de discretizare locală* ale unei metode numerice de aproximare a problemei Cauchy (4). (**2 puncte**)

e) Determinaţi *eroarea de trunchiere locală/eroarea de consistenţă* a metodei explicite a lui Euler pentru problema Cauchy (4). (**2 puncte**)

TIMP DE LUCRU: 180 minute