Facultatea de Matematica-Informatica
Universitatea din Bucuresti

25 Ianuarie 2019

Examen final

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale
Tipul examinarii: Examen
Nume student: ______________________________
Grupa 311
Timp de lucru : 3 ore

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest examen contine 5 probleme (toate obligatorii).

Verificati foile cu subiecte fata-verso !

Examenul este individual. La sfarsitul examenului nu uitati sa aduceti foaia cu subiectele o data cu lucrarea scrisa pentru a le capsa impreuna. Astfel, corectura se va face mai usor.
Pentru elaborarea lucrarii scrise puteti folosi ca unic material ajutator o foaie format A4 care sa contina doar notiuni teoretice. Exercitiile rezolvate sunt excluse ca material ajutator.

Pentru redactare tineti cont de urmatoarele sugestii:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **indicati** acest lucru si explicati cum se poate aplica rezultatul respectiv.
- **Organizati-va munca** intr-un mod coerent pentru a avea toti de castigat ! Incercati ca la predarea lucrarii fiecare problema sa fie redactata in ordinea aparitiei pe foaia cu subiecte. Ideal ar fi ca si subpunctele sa fie redactate in ordine. Daca nu stiti a rezolva un anumit subpunct scrieti numarul subpunctului si lasati liber.
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Barem: P1 (2p) + P2 (2p)+ P3 (2p) +P4 (1.5p) + P5 (1.5p)+ 1p oficiu= **10p**.

Rezultatele le veti primi in cel mai scurt timp posibil pe e-mailul sefului de grupa. Pentru orice nelamuriri scrieti-mi la adresa cristian.cazacu@fmi.unibuc.ro.

Problema 1. *(2p). Fie functia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$.

1). Definiti spatiul $H^1(0, 1)$.

2). Argumentati ca $f \in H^1(0, 1)$ *si calculati norma lui* f *in* $H^1(0, 1)$.

Consideram functia $u : B_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *data de*

$$u(x) = |x|^{-\frac{3}{7}}, \quad x = (x_1, \ldots, x_5),$$

unde $B_1(0)$ *este bila unitate din* $\mathbb{R}^4$ *centrata in origine.*

3). Folosind eventual formula operatorului Laplacian Δ *pentru functii cu simetrie radiala din* $\mathbb{R}^4$, *gasiti* $\lambda \in \mathbb{R}$ *astfel incat*

$$\Delta u = \lambda \frac{x \cdot \nabla u}{|x|^2}, \quad \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

4). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ *functia* $v : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, *definita prin* $v(x) := |u(x)|^p e^{-|x|}$, *apartine lui* $L^1(B_1(0))$.

5). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ *are loc* $v \in L^1(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_1(0)})$.

Problema 2. *(2p) Fie* $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 4\}$ *si* $\partial\Omega$ *frontiera lui* Ω. *Fie problema*

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x, y) = 3 \cos y, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

1). Aratati ca problema (1) *are cel mult o solutie* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

2). Gasiti constanta C *astfel incat functia* $v(x, y) = C(x^2 + y^2)$ *sa verifice* $-\Delta v = 3$ *in* Ω.

3). Folosind eventual principiul de maxim pentru functii armonice sa se determine solutia problemei

$$(2) \qquad \begin{cases} -\Delta w(x, y) = 3, & (x, y) \in \Omega \\ w(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

4). Folosind eventual principiul de maxim pentru functii sub/super armonice sa se arate ca solutia problemei (1) *verifica*

$$|u(x, y)| \leq 3, \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Problema 3. *(2p). Consideram urmatoarea problema*

$$(3) \qquad \begin{cases} 2u_{tt}(x, t) + u_{tx}(x, t) - u_{xx}(x, t) = \sin t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

unde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ *sunt functii date.*

1). Gasiti o functie $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel incat functia* $v(x, t) := u(x, t) + \phi(t)$ *sa verifice ecuatia*

$$(4) \qquad 2v_{tt}(x, t) + v_{tx}(x, t) - v_{xx}(x, t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall t > 0.$$

(Se considera faptul ca lucram cu functii de clasa C^2.*)*

2). Pentru ϕ de mai sus scrieti conditiile initiale indeplinite de v.

3). Rezolvati problema cu valori initiale satisfacuta de v (scrieti forma generala a lui v) reducand-o la rezolvarea a doua ecuatii de transport (una omogena si alta neomogena).

4). Folosind conditiile asupra lui v la $t = 0$ deduceti solutia u a problemei (3) *in cazul particular $f(x) = e^x$ si $g(x) = x$.*

Problema 4. *(1.5p). Se considera problema Dirichlet*

$$\begin{cases} -\left(\frac{u'}{1+x^2}\right)' + e^x u = x^2, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

Definim o solutie slaba pentru (5) *ca fiind o functie $u \in H_0^1(0,1)$ ce satisface formularea variationala*

$$\int_0^1 \frac{u'v'}{1+x^2}dx + \int_0^1 e^x uvdx = \int_0^1 x^2 vdx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1). \tag{6}$$

1). Dati exemplu de o norma pe $H_0^1(0,1)$ si aratati ca termenii din membrul stang in (6) *sunt bine definiti pentru $u, v \in H_0^1(0,1)$.*

2). Aratati ca daca $u \in C^2([0,1])$ este solutie clasica pentru (5) *atunci u este solutie slaba pentru* (5) *in sensul lui* (6).

3). Aratati ca functionala liniara $F : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ definita prin $F(v) = \int_0^1 x^2 vdx$ este continua.

4). Aratati ca forma biliniara $a : H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ definita prin

$$a(u,v) := \int_0^1 \frac{u'v'}{1+x^2}dx + \int_0^1 e^x uvdx$$

este coerciva.

Problema 5. *(1.5p) Consideram problema Cauchy*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + tu(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{7}$$

1). Gasiti o functie $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel incat functia $v(x,t) := u(x,t)\phi(t)$ sa verifice ecuatia caldurii

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t > 0. \tag{8}$$

2). Scrieti problema Cauchy verificata de v si calculati $v(0,1)$.

3). $\star$ Determinati explicit solutia problemei (7).