Examen final[1] la Algebră II, seria 11, 13.06.2021

Nume și prenume: ROBU VLAD NICOLAE

Grupa: 111

1. Fie polinomul $f(X) = X^3 + 3X + 4$.

a) Există o matrice diagonalizabilă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât polinomul $P_A(X)$ să fie egal cu $f(X)$? **(3p)**

b) Este $f(X)$ polinom ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$? Dar în $\mathbb{Z}_3[X]$? **(4p)**

c) Determinaţi numărul de ideale maximale din $\mathbb{C}[X]$ în care este conţinut idealul generat de polinomul $f(X)$. **(3p)**

2.

a) Daţi exemplu de inel care are 12 ideale maximale şi este un produs direct de 8 inele distincte două câte două. **(3p)**

b) Este idealul $(2X^4 + 7X^3 + 15X^2 + 16X + 10, 2X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 8X + 4)$ maximal în $\mathbb{Q}[X]$? **(4p)**

c) Să se determine (explicit, prin descrierea elementelor) un ideal maximal al inelului comutativ

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}.$$ **(3p)**

3.

a) Daţi un exemplu de polinom simetric omogen de grad 12 în 4 variabile şi cu 6 termeni sau explicaţi de ce un astfel de polinom nu există. **(3p)**

b) Fie polinomul simetric $f(X_1, X_2, X_3) = (X_1^5 + X_2^5)(X_1^5 + X_3^5)(X_2^5 + X_3^5) \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ şi $g \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ astfel încât $f(X_1, X_2, X_3) = g(s_1, s_2, s_3)$, conform Teoremei fundamentale a polinoamelor simetrice. Calculaţi $g(0, 0, 1)$ şi arătaţi că g nu este polinom simetric. **(4p)**

c) Fie $h \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ cu proprietatea că $\sigma^*(h) = \epsilon(\sigma) \cdot h$ pentru orice $\sigma \in S_3$. Demonstraţi că $h(X_1, X_2, X_3) = (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3)h_1(X_1, X_2, X_3)$ pentru un $h_1 \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ polinom simetric. **(3p)**

4. Considerăm inelul $R = \mathbb{Q}[X]/_{(X^2 + 5X + 9)}$.

a) Daţi exemplu de un polinom de grad 5 a cărui clasă în inelul R este clasa polinomului $2X + 3$. **(3p)**

b) Determinaţi $U(R)$. **(3p)**

c) Este inelul R izomorf cu inelul $\mathbb{Q}[X]/_{(X^2 - 25)}$? **(2p)**

d) Determinaţi structura de inel pe mulţimea $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ astfel încât inelul obţinut să fie izomorf cu R. **(2p)**

[1] Fiecare subiect valorează 10p. Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor obţinute pe cele 4 subiecte. Timp de lucru: 2 ore. Succes!

13.06.2021

ROBU VLAD
GRUPA 111

Examen scris - Algebră II

① (a) Presupunem că $(\exists)\ A\in M_3(\mathbb{R})$ diagonalizabilă astfel încât $P_A = f$. Atunci $(\exists)\ S\in M_3(\mathbb{R})$, $\det S\neq 0$, aî $SAS^{-1}=D\in M_3(\mathbb{R})$ e diagonală.

Cum $P_A = P_{SAS^{-1}} = P_D$, notând $D=\begin{pmatrix} a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, avem $f=P_A=P_D=(X-a)(X-b)(X-c)$, ceea ce ar însemna că rădăcinile lui f sunt toate reale. Dar am avea atunci că

$$\begin{cases} a+b+c=0\\ ab+bc+ca=3\\ abc=-4\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-6,$$ contradicție!

Răspunsul e, deci, NU.

(b) ~~Avem că $f\in\mathbb{Z}[X]$, $\deg f=3$. Din lema lui Gauss, f e ireductibil în $\mathbb{Z}[X] \Leftrightarrow f$ e ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, pt. că f e primitiv ($\gcd(1,0,3,4)=1$).~~

~~Dacă $f(k)=0$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k^3+3k+4=0 \Rightarrow k|4 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow k\in\{-4,-2,-1,1,2,4\}$.~~

~~$k=-4 \Rightarrow f(-4)=-64-12+4<0$~~

~~$k=-2 \Rightarrow f(-2)=-8-6+4<0$~~

~~$k=-1$~~

$f=X^3+3X+4=(X+1)(X^2-X+1)+3(X+1)=$
$=(X+1)(X^2-X+4)$, deci f e reductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

În $\mathbb{Z}_3[X]$, $\bar f=(X+\hat 1)(X^2+\hat 2X+\hat 1)=(X+\hat 1)^3$, deci $\bar f$ e reductibil și în $\mathbb{Z}_3[X]$.

(c) În $\mathbb{C}[X]$, polinoamele ireductibile sunt cele de grad 1. Așadar, idealele maximale în $\mathbb{C}[X]$ sunt cele de forma (g), unde $g\in\mathbb{C}[X]$, $\deg g=1$.

Dacă $(f)\subseteq(g) \Rightarrow g|f \Rightarrow$ avem de numărat câte rădăcini distincte are f.

$f=(X+1)(X^2-X+4)=(X+1)\left(X-\frac{1-i\sqrt{15}}{2}\right)\left(X-\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)$, deci răspunsul este 3.

② (a) Fie $R = \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{11^2} \times \mathbb{Z}_{13^2} \times \mathbb{Z}_{2\cdot3\cdot5} \times \mathbb{Z}_{2\cdot3\cdot7}$.

În general, pt. p prim, $\mathbb{Z}_{p^2}$ are un singur ideal maximal, $\overline{p}\,\mathbb{Z}_{p^2}$.

În general, pt. p, q, r prime distincte, $\mathbb{Z}_{pqr}$ are 3 ideale maximale, anume $\overline{q}\,\mathbb{Z}_{pqr}, \overline{p}\,\mathbb{Z}_{pqr}, \overline{r}\,\mathbb{Z}_{pqr}$.

Cum idealele maximale ale produsului direct de inele $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$ au forma

$$R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_{i-1} \times I \times R_i \times \ldots \times R_n,$$

cu $I \in Max(R_i)$,

deducem că inelul definit mai sus are

$$|Max(R)| = 1\cdot 6 + 3\cdot 2 = 12 \text{ ideale maximale.}$$

(b) Fie $f = 2x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 16x + 10 \in \mathbb{Q}[x]$

$g = 2x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 8x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$.

Avem că $(f, g) = (\gcd(f, g))$. Iar

$$\gcd(f,g) = \gcd(2x^4+6x^3+10x^2+8x+4,\ 2x^4+7x^3+15x^2+16x+10) =$$
$$= \gcd(2x^4+6x^3+10x^2+8x+4,\ x^3+5x^2+8x+6) =$$
$$= \gcd(x^4+3x^3+5x^2+4x+2,\ x^3+5x^2+8x+6) =$$
$$= \gcd(-2x^3-3x^2-2x,\ x^3+5x^2+8x+6) =$$
$$= \gcd(7x^2+14x+12,\ x^3+5x^2+8x+6) =$$
$$= \gcd(7x^2+14x+12,\ (x+3)(x^2+2x+2)).$$

Dar $7\cdot(-3)^2 - 14\cdot 3 + 12 > 0$ și $x^2+2x+2 \mid 7x^2+14x+12$

$\Leftrightarrow x^2+2x+2 \mid -2$, fals, deci cum x^2+2x+2 ired, avem că $\gcd(f, g) = 1$, deci $(f, g) = (1) = \mathbb{Q}[x]$, care nu e ideal propriu, deci nici maximal.

(c)

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Fie $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$. Notăm $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

$(\forall) a, b, c \in \mathbb{Q}$. Atunci

$$\begin{cases} M(a,b,c) + M(d,e,f) = M(a+d, b+e, c+f) \\ M(a,b,c)\cdot M(d,e,f) = M(ad,\ ae+bd,\ af+cd) \end{cases}$$

Claim 1. I e ideal în R.

Demo: Avem $M(0,b,c) - M(0,e,f) = M(0, b-e, c-f)$,

deci $(I,+) \leq (R,+)$.

Mai mult, $\underbrace{M(a,b,c)}_{\in R} \cdot \underbrace{M(0,e,f)}_{\in I} = \underbrace{M(0, ae, af)}_{\in I} \Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow I \trianglelefteq R$. ■

Claim 2 I e ideal maximal în R.

Demo Fie $f: R \to \mathbb{Q}$, $f(M(a,b,c)) = a$.

Atunci $f(I_3) = f(M(1,0,0)) = 1$,

$f(M(a,b,c) \cdot M(d,e,f)) = f(M(ad, ae+bd, af+cd))$
$= ad =$
$= f(M(a,b,c)) \cdot f(M(d,e,f))$,

$f(M(a,b,c) + M(d,e,f)) = f(M(a+d, b+e, c+f)) =$
$= a+d =$
$= f(M(a,b,c)) + f(M(d,e,f))$,

deci f e morfism de inele.

Clar f surjectivă.

$M(a,b,c) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow M(a,b,c) \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = I$.

T.F.I $\Rightarrow R/_{I} \simeq \operatorname{Im} f = \mathbb{Q}$, corp $\Rightarrow$

$\Rightarrow I$ ideal maximal în R. ■

③(a) Fie $f = \sum_{1\le i<j\le 4} x_i^6 x_j^6 \in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3,x_4]$, are 4 variabile și f este omogen de grad 12, $\binom{4}{2}=6$ termeni.

(b) $f = (x_1^5+x_2^5)(x_1^5+x_3^5)(x_2^5+x_3^5) \in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]$.

$g \in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]$ a.î. $f(x_1,x_2,x_3) = g(s_1,s_2,s_3)$, conform Teoremei Fundamentale a Polinoamelor Simetrice.

$g(0,0,1) = ?$ g nu e simetric.

Soluție Caut $x_1,x_2,x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ a.î.

$$\begin{cases} s_1 = x_1+x_2+x_3 = 0 \\ s_2 = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = 0 \\ s_3 = x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$

Aceste x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile lui $x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3 = x^3-1$, deci $\{x_1,x_2,x_3\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, unde $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} (\Rightarrow 1+\varepsilon+\varepsilon^2=0)$.

$f(1,\varepsilon,\varepsilon^2) = (1+\varepsilon^5)(\varepsilon^5+\varepsilon^{10})(1+\varepsilon^{10}) =$
$= (1+\varepsilon^2)(\varepsilon^2+\varepsilon)(1+\varepsilon) =$
$= (-\varepsilon)\cdot(-1)\cdot(-\varepsilon^2) = -\varepsilon^3 = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(0,0,1) = f(1,\varepsilon,\varepsilon^2) = -1.$

$0, i, -i$ sunt rădăcinile lui $x^3+x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0,i,-i) = g(0,1,0)$.

Dar $f(0,i,-i) = i^5\cdot(i^5+(-i)^5)\cdot(-i)^5 =$
$= i\cdot(i-i)\cdot(-i) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(0,1,0) = 0 \neq -1 = g(0,0,1)$, deci g nu e simetric.

(c) $\sigma^*(h) = \varepsilon(\sigma)\cdot h$, $(\forall)\ \sigma \in S_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(x,y,z) = -h(y,x,z) & (1) \\ h(x,y,z) = -h(x,z,y) & (2) \\ h(x,y,z) = -h(z,y,x) & (3) \end{cases}$$

Uitându-mă la $h \in \mathbb{Z}[x,z][y]$, (1) ne spune că $h(x,x,z) = 0 \xRightarrow{\text{Bezout}} y-x \mid h(x,y,z)$.

Similar, cu (2), (3) $\Rightarrow z-y \mid h(x,y,z)$, $x-z \mid h(x,y,z)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow h(X,Y,Z) = (X-Y)(Y-Z)(X-Z) \cdot h_1(X,Y,Z)$, $h_1 \in \mathbb{Z}[X,Y,Z]$.
Vrem h_1 polinom simetric. Fie $g = (X-Y)(X-Z)(Y-Z) \in \mathbb{Z}[X,Y,Z]$.

$$\left.\begin{array}{l} g(X,Z,Y) = (X-Z)(X-Y)(Z-Y) = -g(X,Y,Z) \\ g(Y,X,Z) = (Y-X)(Y-Z)(X-Z) = -g(X,Y,Z) \\ g(Z,Y,X) = (Z-Y)(Z-X)(Y-X) = -g(X,Y,Z) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sigma^*(g) = \varepsilon(\sigma)\cdot g$, $(\forall)\ \sigma \in S_3$, pentru că orice $\sigma \in S_3$ se poate scrie ca produs de transpoziții.

$\sigma^*(h) = \varepsilon(\sigma)\cdot h$, $(\forall)\ \sigma \in S_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^*(g\cdot h_1) = \varepsilon(\sigma)\cdot g \cdot h_1$, $(\forall)\ \sigma \in S_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\sigma^*(g)}\cdot \sigma^*(h_1) = \cancel{\varepsilon(\sigma)\cdot g}\cdot h_1$, $(\forall)\ \sigma \in S_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^*(h_1) = h_1$, $(\forall)\ \sigma \in S_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1$ simetric.

Scanned with CamScanner

④ $R = \mathbb{Q}[X]/(X^2+5X+9)$

(a) Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$, $P = X^3\cdot(X^2+5X+9)+2X+3$. Atunci $\deg P = 5$ și, în R,

$$\overline{P} = \overline{X^3}\cdot\underbrace{\overline{(X^2+5X+9)}} + \overline{2X+3} = \overline{2X+3}.$$

(b) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ a.î. $\overline{f} \in U(R) \Rightarrow (\exists)\, g \in \mathbb{Q}[X]$ a.î.

$$\overline{f}\cdot\overline{g} = \overline{1} \Rightarrow \overline{fg-1} = \overline{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X^2+5X+9 \mid fg-1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \gcd(f, X^2+5X+9) = 1.$$

Reciproc, dacă $\gcd(f, X^2+5X+9) = 1$, atunci $(\exists)\, u, v \in \mathbb{Q}[X]$ a.î. $fu + (X^2+5X+9)v = 1 \Rightarrow X^2+5X+9 \mid fu-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{f}\cdot\overline{u} = \overline{1} \Rightarrow \overline{f} \in U(R).$$

Deci $U(R) = \{\overline{f} \mid f \in \mathbb{Q}[X],\ \gcd(f, X^2+5X+9) = 1\}$.

Mai mult, $\Delta = 5^2 - 4\cdot 9 < 0$, deci X^2+5X+9 nu are rădăcini în $\mathbb{R}[X]$, deci nici în $\mathbb{Q}[X]$, deci el e ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. Prin urmare, $\gcd(f, X^2+5X+9) = 1$ e echivalent cu $X^2+5X+9 \nmid f \Rightarrow$

$$\Rightarrow U(R) = \{\overline{f} \mid f \in \mathbb{Q}[X],\ X^2+5X+9 \nmid f\}.$$

(c) Știm că X^2+5X+9 e ired. în $\mathbb{Q}[X]$, deci

$$R = \mathbb{Q}[X]/(X^2+5X+9) \text{ este corp.}$$

Pe de altă parte, dacă $I = (X-5)$, $J = (X+5)$, avem $\gcd(X-5, X+5) = 1$ în $\mathbb{Q}[X]$, deci $I + J = \mathbb{Q}$.

$I \cap J = (X^2-25)$, deci din Lema Chineză a Resturilor obținem

$$\mathbb{Q}[X]/(X^2-25) \simeq \mathbb{Q}[X]/(X-5) \times \mathbb{Q}[X]/(X+5) \simeq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q},$$

pentru că, la general $\mathbb{Q}[X]/(X+a) \simeq \mathbb{Q}$, $(\forall)\, a \in \mathbb{Q}$ (luăm $F: \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}$, $F(P) = P(-a)$, morfism surjectiv cu $\operatorname{Ker} F = (X+a)$ din T. lui Bezout, din care cu T.F.I. iese ce trebuie).

În sfârșit, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ nu e corp ($(1,0) \neq (0,0)$ și $(1,0)$ neinversabil), iar cum R e corp, avem

$$R \not\simeq \mathbb{Q}[X]/(X^2-25).$$

(d) ~~Încât R e corp, caut o structură de corp pe $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.~~
~~Dacă reușesc acest lucru, încât $\deg(X^2+5X+9)=2$, obținem că $R\simeq(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\perp,\top)$.~~

Arătăm că $R\simeq\mathbb{Q}[i\sqrt{11}]$.

Fie $F:\mathbb{Q}[X]\to\mathbb{Q}[i\sqrt{11}]$, $F(f)=f\left(\frac{-5+i\sqrt{11}}{2}\right)$.

Dacă $x,y\in\mathbb{Q}$, atunci $F(2yX+x+5y)=$

$= 2y\cdot\frac{-5+i\sqrt{11}}{2}+x+5y = x+y\cdot i\sqrt{11}$, deci

F e surjectiv.

Clar F e morfism.

$f\in\operatorname{Ker}F \iff f\left(\frac{-5+i\sqrt{11}}{2}\right)=0 \iff$

$\iff m_{\frac{-5+i\sqrt{11}}{2}} \mid f \iff X^2+5X+9\mid f \iff$

$\iff f\in(X^2+5X+9)$.

Deci $\operatorname{Ker}F=(X^2+5X+9)\Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{TFI}} \mathbb{Q}[X]/(X^2+5X+9)\simeq\mathbb{Q}[i\sqrt{11}]\Rightarrow R\simeq\mathbb{Q}[i\sqrt{11}]$.

Putem atunci defini pe $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ operațiile

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,

$(a,b)\perp(c,d)=(ac-11bd,ad+bc)$, caz în

care $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},+,\perp)$ se identifică prin izomorfism cu $\mathbb{Q}[i\sqrt{11}]$ și, deci

$R\simeq(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},+,\perp)$.