CURS VI
ANALIZĂ

25.03.2022

Funcții diferențiabile

$p, q \in \mathbb{N}^*$

$D = \mathring{D}$, $f : D \to \mathbb{R}^q$, $a \in D$

$\mathbb{R}^p$ f diferențiabilă în a d.c. $\exists\ T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ liniară

a.î. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0\ (\in \mathbb{R}^q) = (0, 0 \dots 0)$

$\lim\limits_{x \to a} \left\| \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} \right\| = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0 \in \mathbb{R}$

$T = df(a) \to$ diferențiala lui f în a

Obs: f diferențiabilă în $a \Rightarrow \exists\ \varepsilon_f : D \to \mathbb{R}^q$ a.î.:

$\varepsilon_f(x) = \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} \Rightarrow f(x) = f(a) + T(x-a) + \varepsilon_f(x)\|x-a\|$

$\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_f(x) = 0$

Prop: Fie $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^q$. Atunci f diferențiabilă în $a \Leftrightarrow \exists\ T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ liniară și $\exists\ \varepsilon_f : D \to \mathbb{R}^q$ a.î.

1) $f(x) = f(a) + T(x-a) + \varepsilon_f(x)\|x-a\|$, $\forall x \in D$

2) $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_f(x) = 0$

Dem: $\boxed{\Rightarrow}$ f diferențiabilă în $a \Rightarrow \exists\ T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ liniară a.î.:

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$

Notăm: $\varepsilon_f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(a) + T(x-a) + \varepsilon_f(x)\|x-a\|$, $\forall x \in D$

$\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_f(x) = 0$ (din (1))

$\boxed{\Leftarrow}$ Pp. $\exists\ T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ liniară și $\exists\ \varepsilon_f : D \to \mathbb{R}^q$ cu

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + T(x-a) + \varepsilon_f(x)\|x-a\| , \forall x \in D & ② \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_f(x) = 0 & ① \end{cases}$$

③.

Din ② $\Rightarrow \varepsilon_f(x) = \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}$, $x \neq a$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \Rightarrow f$ diferențiabilă în a

$(df(a) = T)$

Prop 2: $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, $a \in D$

Atunci f diferențiabilă în a $\Rightarrow$ f continuă în a

(!!! f continuă în a $\not\Rightarrow$ f diferențiabilă în a)

Dem: f diferențiabilă în a $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_f : D \to \mathbb{R}^2$, a.î.:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_f(x) = 0. \\ f(x) = f(a) + T(x-a) + \varepsilon_f(x)\|x-a\| , \forall x \in D \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall x \in D$, $f(x) - f(a) = T(x-a) + \varepsilon_f(x)\|x-a\|$

$\|f(x) - f(a)\| = \|T(x-a) + \varepsilon_f(x)\|x-a\|\| \leq \|T(x-a)\| + \|\varepsilon_f(x)\|\|x-a\|$

Din $\lim\limits_{x \to a} \|T(x-a)\| = 0$ (T cont. în a)

$\lim\limits_{x \to a} \|\varepsilon_f(x)\|\|x-a\| = 0.$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ adică f cont. în a

($a \in \mathring{D} \Rightarrow$ a pct. de acumulare pt D).

Prop. 3: Fie $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2$, $a \in D$, f diferențiabilă în a

Atunci există o unică aplicație $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2$ liniară a.î.:

$T = df(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \right)$

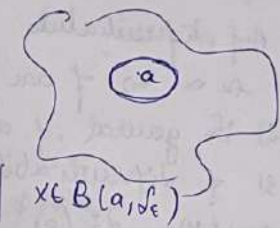
(i.e. diferențiala unei funcții într-un punct este unică)

...ui: P.p. că $\exists T, T_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ liniară a.î.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}=0 \text{ și } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-T_1(x-a)}{\|x-a\|}$$

$\lim_{x\to a} \frac{T_1(x-a)-T(x-a)}{\|x-a\|}=0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0$ a.î.: $\forall x\in D$, $\|x-a\|<\delta_\varepsilon$

$\left\|\frac{T_1(x-a)-T(x-a)}{\|x-a\|}\right\|$ $x\in B(a,\delta_\varepsilon)$



$x\in\mathbb{R}^p$ $\|T_1(x)-T(x)\|=$

$=\left\|T_1\left(\frac{ty}{t}\right)-T\left(\frac{ty}{t}\right)\right\|=$

$=\left\|T_1\left(\frac{(a+ty)-a}{t}\right)-T\left(\frac{(a+ty)-a}{t}\right)\right\|=\left\|\frac{T_1(a+ty)-a)-T(a+ty)-a)}{\|(a+ty)-a\|}\right\|\|y\|$

Atunci, $\forall t\in\mathbb{R}$, $|t|<\frac{\delta_\varepsilon}{\|y\|}$, avem:

$$\|T_1(y)-T(y)\|=\left\|\frac{T_1((a+ty)-a)-T((a+ty)-a)}{\|(a+ty)-a\|}\cdot\|y\|\right\|<\varepsilon\|y\|$$

Pt. $\forall y\in\mathbb{R}^p$, $\underbrace{\|T_1(y)-T(y)\|\le\varepsilon\|y\|}$ $\boxed{\forall\varepsilon>0}$!!!

$\varepsilon\to 0 \Rightarrow T_1(y)=T(y),\ \forall y\in\mathbb{R}^p \Rightarrow T=T_1$

Prop 4: Fie $f: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$, $a\in D$

f diferențiabilă în a

Atunci f are derivată după orice direcție $u\in\mathbb{R}^p$ ($\|u\|=1$)

și $df(a)(u)=\frac{\partial f}{\partial u}(a)$

Dem: Fie $u\in\mathbb{R}^p$, $\|u\|=1$

Cum f diferențiabilă în $a \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-\overset{\sim T}{df(a)}(x-a)}{\|x-a\|}=0$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(a+tu)-f(a)-df(a)(tu)}{|t|\underbrace{\|u\|}_{1}}\right\|=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(a+tu)-f(a)-t\,df(a)(u)}{t}\right\|=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\left|\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}-df(a)(u)\right|=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = df(a)(u)$

$\Rightarrow f$ are derivată după direcția u în punctul a și $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df(a)(u)$

OBS: 1) f diferențiabilă în $a \Rightarrow f$ are derivată după orice direcție în $a \Rightarrow f$ are derivate parțiale (toate!) în a.

2) În general, f are derivată după orice direcție $\not\Rightarrow f$ diferent. în a

3) f diferențiabilă în a, $v \in \mathbb{R}^p$, $\|v\| = 1$

$df(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$

$\|e_1\| = \ldots = \|e_p\| = 1$

$\{e_1, \ldots, e_p\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^p$

$v = (v_1, v_2, \ldots v_p) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_p e_p$

$df(a)(v_1, \ldots, v_p) = df(a)(v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_p e_p) =$

$= \underbrace{v_1 df(a)(e_1)}_{\frac{\partial f}{\partial e_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)} + \ldots v_p df(a)(e_p).$

Def: Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $a \in D$

$f = (f_1, f_2, \ldots f_q)$, $f_1, f_2, f_q : D \to \mathbb{R}$

Pp. că f are derivate parțiale în a

Matricea
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in M_{q,p}(\mathbb{R})$$
s.n. matricea Jacobiană asociată funcției f în punctul a

Prop. 5:

Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $a \in D$, f diferențiabilă în a.

Atunci $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ are matricea $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=\overline{1,q} \\ j=\overline{1,p}}}$

$\Downarrow$

matricea Jacobi.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

$\Rightarrow f$ nu este continuă în $(0,0) \Rightarrow f$ nu este diferențiabilă în $(0,0)$

ii) $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2)$ $(\|v\| = 1)$

$$t \neq 0 \quad \frac{f((0,0)+t(v_1,v_2)) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tv_1, tv_2) - 0}{t} = \frac{t^2 v_1^2 t v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2}\cdot\frac{1}{t}$$

$$= \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^3(t^2 v_1^4 + v_2^2)} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} 0, & v_2 = 0 \\ \dfrac{v_1^2 v_2}{v_2^2}, & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ are derivata după orice direcție în $(0,0)$

și $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \begin{cases} 0, & v_2 = 0 \\ \dfrac{v_1^2}{v_2}, & v_2 \neq 0 \end{cases}$

Teorema 6 (Criteriul de diferențiabilitate)

Fie $f : D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2$, $a \in D$ astfel încât f are derivate parțiale pe o vecinătate $V \subset D$ a punctului a și toate derivatele parțiale sunt continue în a. Atunci f diferențiabilă în a.

$V \in \mathcal{V} \subseteq D$ a.î. există $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} : V \to \mathbb{R}^2$ și

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}\right.$ sunt continue în a)

Exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = 2x + xy^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 + y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2+y^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$

f are derivate parțiale pe $\mathbb{R}^2 \in \mathcal{V}(1,2)$ și d.p. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sunt cont. în $(1,2)$
$\Rightarrow$ f diferențiabilă în $(1,2)$ și $df(1,2)$.

$df(1,2)$ are matricea $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\cancel{df(1,2) = (5\ \ 4)}$ $\quad df(1,2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad df(1,2)(u,v) = (5\ \ 4)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 5u + 4v$

$df(1,2) \simeq (5\ \ 4)$

Notații: $pr_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $pr_i(u_1, \dots, u_p) = u_i \quad \forall u \in \mathbb{R}^p$
$\hookrightarrow$ aplicații liniare

$dpr_i(a) = pr_i$

$pr_i := dx_i$

$$df(a)(u) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) u_1}_{pr_1(u)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) u_2}_{pr_2(u)} + \dots + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_p}(a) u_p}_{pr_p(u)}$$

$$\boxed{df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\, dx_p.}$$

Dem: (Criteriul de diferențiabilitate)

Fie $V = \overset{\circ}{V} \subseteq D$, $V \ni a$ și $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} : V \to \mathbb{R}^2$ cont. în a

Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar, fixat

Atunci $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in V$, $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ $\quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\| < \varepsilon$

Definim: $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2$ (liniară), $T(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) u_p$
$\forall u = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$

$\in V$

$$f(x) - f(a) - T(x-a) = f(x_1, \dots, x_p) - f(a_1, \dots, a_p) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k)$$

$$= f(x_1, \dots x_p) - f(a_1, x_2, \dots x_p) + f(0, x_2, \dots x_p) -$$

$$- f(a_1, a_2, x_3, \dots x_p) + f(a_1, a_2, x_3, \dots x_p) + \dots$$

$$\dots + f(a_1, \dots, a_{p-1}, x_p) - f(a_1 \dots a_p).$$

$$- \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) \quad (*)$$

$g_1 : [a_1, x_1] \to \mathbb{R}^2$, $g_1(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ g continuă pe $[a_1, x_1]$ deriv. pe (a_1, x_1)

$f(x_1, x_2, \dots x_p) - f(a_1, x_2, \dots, x_p)$ $\Downarrow$ T. Lagrange

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underbrace{\xi_1, x_2 \dots x_p}_{=: y_1})(x_1 - a_1)$$ $\exists\, \xi$, între a_1 și x_1 a.î.

$$\Rightarrow f(x) - f(a) - T(x-a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)(x_1 - a_1) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_p}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)(x_p - a_p)$$

$$\Rightarrow \| f(x) - f(a) - T(x-a) \| \le \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\| |x_1 - a_1| + \dots +$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_p}(y_p) - \frac{\partial f}{\partial x_p} \right\| |(x_p - a_p)|$$

$$f(x_1, \dots, x_p) - f(a_1, x_2, \dots, x_p) =$$

$$x \ne a, \quad \frac{\| f(x) - f(a) - T(x-a) \|}{\|x - a\|} \le \varepsilon_p \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x - a\|} = 0$$

$\Rightarrow$ f dif. în a și dif $(a) = T$.