EXAMEN EDP - 10 FEBRUARIE 2016/2017 (GRUPELE 311 SI 321)

VARIANTA A

- NUME si PRENUME:

Cateva instructiuni:

- Cu exceptia unei singure foi nu sunt permise alte materiale ajutatoare.
- Telefoanele si orice alte dispozitive electronice trebuie mentinute inchise pe tot parcursul examenului.
- 1 punct din oficiu
- Durata examen: 3 ore

Problema 1. *(4p). Fie functia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-|x|}$.

1). Definiti spatiile $W^{1,1}(-1,1)$ *si* $W^{1,\infty}(-1,1)$.

2). Determinati derivata slaba f' *a lui* f *si aratati ca* $f' \in L^1(-1,1) \cap L^\infty(-1,1)$.

3). Calculati norma lui f' *in* $L^\infty(-1,1)$.

4). Calculati norma lui f *in* $W^{1,1}(-1,1)$.

Consideram functia $u : B_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *data de*

$$u(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, \ldots, x_5),$$

unde $B_1(0)$ *este bila unitate din* $\mathbb{R}^5$ *centrata in origine.*

5). Sa se scrie formula operatorului Laplacian Δ *pentru functii cu simetrie radiala din* $\mathbb{R}^5$.

6). Calculati Δu.

7). Aratati ca

$$\Delta(\Delta u) = \frac{25}{16} \frac{u}{|x|^4}, \quad \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

8). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ *are loc* $u \in L^p(B_1(0))$.

9). Aratati ca

$$div\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = \frac{3}{|x|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}.$$

Problema 2. *(3p). Consideram urmatoarea problema de tip "unde"*

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) + u_{tx} - 2u_{xx}(x,t) = t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

unde $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ *sunt functii date. Consideram*

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{t^3}{6}.$$

i). Scrieti ecuatia satisfacuta de v

ii). Aratati ca pentru orice functie w *de clasa* C^2 *avem*

$$w_{tt}(x,t) + w_{tx} - 2w_{xx}(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\frac{\partial}{\partial x}\right) w.$$

iii). Pentru v *de mai sus notam*

$$z(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Gasiti ecuatia satisfacuta de z.

iv). Gasiti forma generala a functiei z.

v). Cu z *determinat anterior rezolvati ecuatia*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = z(x,t)$$

si scrieti forma generala a lui v.

vi). Folosind conditiile asupra lui v *la* $t = 0$ *din enunt obtineti pe* v *si apoi deduceti solutia* u *a problemei* (1) *in cazul particular* $f(x) = x^2$ *si* $g(x) = 1$.

Problema 3. *(3p). Se considera problema Dirichlet omogena*

$$\begin{cases} -3u''(x) + (2-x)u(x) = \sin x, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Definim o solutie slaba pentru (2) *ca fiind o functie* $u \in H_0^1(0,1)$ *ce satisface formularea variationala*

$$\int_0^1 3u'v'dx + \int_0^1 (2-x)uvdx = \int_0^1 \sin x v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1). \tag{3}$$

1). Aratati cat mai detaliat ca daca $u \in C^2([0,1])$ *este solutie clasica pentru* (2) *atunci* u *este solutie slaba pentru* (2) *in sensul lui* (3).

2). Aratati cat mai detaliat ca formularea variationala (3) *se gaseste in conditiile aplicarii lemei Lax-Milgram si aratati ca exista o unica solutie slaba* $u \in H_0^1(0,1)$ *in sensul lui* (3).