Test 1 – Analiză 1

8 decembrie 2021

NUME:___________________________
PRENUME:________________________

Testul are **DOUĂ** pagini.
Exercițiile din acest test depind de două numere naturale, A și B, unde:
A = numărul de litere din prenume (dacă există mai multe prenume, doar din primul).
B = numărul total de litere al numelui și prenumelui (complete.
Spre exemplu, dacă te cheamă Ion-Andrei Pop, atunci $A = 3$, $B = 12$.

Problema 1

(3 puncte)
Acest subiect depinde de restul împărțirii lui B la 7.
Stabiliți, FOLOSIND DEFINIȚIA LIMITEI UNUI ȘIR, dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are sau nu limită. Specificați valoarea acestei limite. Șirul (x_n) depinde de restul împărțirii lui B la 7.

$$x_n = \begin{cases} \frac{n^A+Bn^2+3}{n^4+1} & , B \equiv 0(mod7) \\ \frac{n^{A+1}+Bn^2+1}{n^2+2} & , B \equiv 1(mod7) \\ \frac{n^{A+1}+(B-1)n^2+1}{n^{A-1}+2} & , B \equiv 2(mod7) \\ \frac{3n^{A-1}+2Bn^2+1}{2n^5+2} & , B \equiv 3(mod7) \\ \frac{2n^A+5n^3+1}{4n^5+2} & , B \equiv 4(mod7) \\ \frac{5n^A+4n+3}{2n^3+2} & , B \equiv 5(mod7) \\ \frac{2n^A+(B-2)n^3+1}{2n^6+2} & , B \equiv 6(mod7) \end{cases}$$

Problema 2

(3 puncte)
Acest subiect depinde de restul împărțirii lui B la 4.

Stabiliți dacă șirul de numere reale definit recurent mai jos este convergent sau nu. În cazul în care șirul are limită, determinați această limită.

$$\begin{cases} x_0 = A, & A \cdot x_{n+1} = x_n^2 + B & , B \equiv 0(mod4) \\ x_0 = A, & x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) & , B \equiv 1(mod4) \\ x_0 = 1, & x_{n+1} = x_n + \frac{A+1}{x_n} & , B \equiv 2(mod4) \\ x_0 = 2A, & x_{n+1} = A + \sqrt[3]{(x_n - A)^2} & , B \equiv 3(mod4) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Problema 3

(3 puncte)
Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită în funcție de restul împărțirii lui B la 5.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} & , B \equiv 0(mod5) \\ \left[\left(1 + \frac{1}{n \cdot A^n}\right)^n - 1\right] & , B \equiv 1(mod5) \\ \frac{n^{5n}}{1 \cdot 2^A \cdot 3^A \cdots n^A} & , B \equiv 2(mod5) \\ \frac{ln(n+A)}{ln(A \cdot n)+ln(n^n)} & , B \equiv 3(mod5) \\ \frac{(n^2+A)^{6n}}{\left(n+\frac{A}{n}\right)} & , B \equiv 4(mod5) \end{cases}$$

Stabiliți dacă seria

$$\sum_{n \geq 1} f(n)$$

este convergentă sau nu.

Oficiu: 1 punct. Total: 10 puncte. Timp de lucru: 1 oră.

Test 1 - Analiză 1

[redacted]

1. $x_n = \frac{5n^4 + 4n + 3}{2n^3 + 2}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^4 + 4n + 3}{2n^3 + 2} = \infty$$

$(x_n)_n$ are limita ∞ dacă:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon$ atunci $x_n > \varepsilon$

$$\frac{5n^4 + 4n + 3}{2n^3 + 2} > \varepsilon$$

$$\frac{5n^4 + 4n + 3}{2n^3 + 2} < \frac{5n^4 + 4n + 3}{2n^3} < \frac{20n^4 + 4}{2n^3} \quad \left(\begin{array}{l} 20n^4 + 4 > 5n^4 + 4n + 3 \\ 15n^4 - 4n + 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right)$$

$$\frac{20n^4 + 4}{2n^3} < \frac{20n^4 + 4}{2} = 10n^4 + 2 > \varepsilon$$

$$10n^4 > \varepsilon - 2$$

$$n^4 > \frac{\varepsilon - 2}{10}$$

$$n > \sqrt[4]{\frac{\varepsilon - 2}{10}}$$

Pt. $\varepsilon \geq 2$ aleg $n_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{\varepsilon - 2}{10}} \right] + 1$

Pt. $\varepsilon < 2$ aleg $n_\varepsilon = 1$

2. $x_0 = 8, \ x_{n+1} = 4 + \sqrt[3]{(x_n-4)^2}$

$x_1 = 4 + \sqrt[3]{(8-4)^2} = 4+\sqrt[3]{16}$

$x_2 = 4+\sqrt[3]{\left(4+\sqrt[3]{4^2}-4\right)^2} = 4+\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4}}$

Vreau să dem. $(x_n)_n \searrow$

$x_0 > x_1$

$\cancel{8 > 4+\sqrt[3]{4\sqrt[3]{\ }}}$

$8 > 4+\sqrt[3]{16}$

$4 > \sqrt[3]{4^2}$

$4^3 > 4^2$ Adev.

Pp. adevărat $x_n > x_{n+1}$

Dem. pt. $x_{n+1} > x_{n+2}$

$x_{n+1} > 4+\sqrt[3]{(x_{n+1}-4)^2}$

$x_n > x_{n+1} > 4+\sqrt[3]{\left(4+\sqrt[3]{(x_n-4)^2}-4\right)^2} =$

$= 4+\sqrt[3]{\sqrt[3]{(x_n-4)^4}}$

$x_n > 4+\sqrt[3]{(x_n-4)\sqrt[3]{x_n-4}}$

$x_n-4 > \sqrt[3]{(x_n-4)\sqrt[3]{x_n-4}}$

$(x_n-4)^3 > (x_n-4)\sqrt[3]{x_n-4} = \sqrt[3]{(x_n-4)^4}$

$(x_n-4)^9 > (x_n-4)^5$ Adev. $\Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2} \Rightarrow (x_n)_n$ șir descrescător

$(x_n)_n \searrow \Rightarrow x_0 > x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$8 > x_n$

~~Dar~~ $\cancel{x_n = 4+\sqrt[3]{(x_n-4)^2} > 0}$ | $\cancel{\Rightarrow x_n \in (0,8]}$ ~~mărginit~~

2. $(x_n)_n$ strict descrescător, ~~$x_n \in (0,8]$~~ $x_n \in (4,8]$ $\xrightarrow{\text{Th. Weierstrass}}$ $(x_n)_n$ conv.

Dacă $(x_n)_n$ este conv. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

Înlocuiesc în rel. de recurență:

$$x_{n+1} = 4 + \sqrt[3]{(x_n-4)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 4 + \sqrt[3]{\left(\lim_{n\to\infty} x_n - 4\right)^2}$$

$$l = 4 + \sqrt[3]{(l-4)^2}$$

$$l-4 = \sqrt[3]{(l-4)^2}$$

$$(l-4)^3 = (l-4)^2$$

$$(l-4)^3 - (l-4)^2 = 0$$

$$(l-4)^2(l-4-1) = 0$$

$l_1 = 4$ nu convine $(l_1 \notin (4,8])$

$l_2 = 5 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$

$(x_n-4)^2 > 0$

$\sqrt[3]{(x_n-4)^2} > 0$

$4+\sqrt[3]{(x_n-4)^2} > 0$

$x_{n+1} > 4 \Rightarrow$

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(n^2+4)^{6n}}{\left(n+\frac{4}{n}\right)} = \dfrac{(n^2+4)^{6n}}{\left(\frac{n^2+4}{n}\right)} = (n^2+4)^{6n-1} \cdot n$

$$\sum_{n\geq 1} (n^2+4)^{6n-1} \cdot n$$

$\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+4)^{6n-1} \cdot n = \infty \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ div.