PROBLEME

1) Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii liniare prin intermediul metodei de eliminare Gauss fără pivotare (MEGFP) (punând în evidenţă, la fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului, matricele de transformare $\mathbf{M}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, corespunzătoare) şi al metodei substituţiei descendente:

$$\text{(a)} \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ \dfrac{1}{9}x_1 + \dfrac{1}{9}x_2 - \dfrac{1}{3}x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

2) Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii liniare prin intermediul metodei de eliminare Gauss cu pivotare parţială (MEGPP) (punând în evidenţă, la fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului, matricele de transformare $\mathbf{M}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, şi matricele de permutare elementară $\mathbf{P}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$ corespunzătoare) şi al metodei substituţiei descendente:

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

3) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare de la Problema 2) prin intermediul metodei de eliminare Gauss cu pivotare parţială scalată (MEGPPS) (punând în evidenţă, la fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului, matricele de transformare $\mathbf{M}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, şi matricele de permutare elementară $\mathbf{P}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, corespunzătoare) şi al metodei substituţiei descendente.

4) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare de la Problema 2) prin intermediul metodei de eliminare Gauss cu pivotare totală (MEGPT) (punând în evidenţă, la fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului, matricele de transformare $\mathbf{M}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, şi matricele de permutare elementară $\mathbf{P}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, şi matricele de interschimbare a coloanelor, deci a ordinii necunoscutelor x_i, $\mathbf{Q}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, corespunzătoare) şi al metodei substituţiei descendente.

5) Calculaţi determinantul matricelor

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 5 \\ 6 & -6 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

folosind metodele de eliminare Gauss fără pivotare (MEGFP), cu pivotare parţială (MEGPP), cu pivotare parţială scalată (MEGPPS) şi, respectiv cu pivotare totală (MEGPT).

6) Folosind metoda Gauss-Jordan, determinaţi inversele matricelor

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{şi} \qquad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

7) (a) Determinaţi factorizarea LU fără pivotare a matricei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(b) Calculaţi $\det(\mathbf{A})$ folosind factorizarea LU fără pivotare a matricei $\mathbf{A}$.

(c) Determinaţi factorizarea LDU a matricei $\mathbf{A}$ dată de (1).

(d) Determinaţi soluţia sistemului de ecuaţii liniare $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ folosind (a) şi metodele substituţiei ascendente şi descendente pentru matricea $\mathbf{A}$ dată de (1) şi vectorul $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 14 & -7 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$.

8) (a) Determinaţi factorizarea LU cu pivotare (factorizarea PLU) a matricei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \tag{2}$$

(b) Calculaţi $\det(\mathbf{A})$ folosind factorizarea PLU a matricei $\mathbf{A}$.

(c) Determinaţi soluţia sistemului de ecuaţii liniare $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ folosind (a) şi metodele substituţiei ascendente şi descendente pentru matricea $\mathbf{A}$ dată de (2) şi vectorul $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$.

9) Determinaţi factorizările LU fără pivotare şi $\mathrm{LDL}^{\mathsf{T}}$ ale matricelor

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{şi} \qquad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10) Stabiliţi dacă este posibilă factorizarea Cholesky a matricelor de la Problema 9) şi în caz afirmativ determinaţi această factorizare.

11) Determinaţi factorizarea Doolittle a matricelor

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{şi} \qquad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

12) Determinaţi factorizarea Crout a matricelor de la Problema 11).

13) Determinaţi ecuaţia *dreptei de regresie* asociată punctelor (i.e. dreapta cea mai apropiată de punctele respective):

(i) $P_1(0;2)$, $P_2(2;0)$, $P_3(3;-2)$, $P_4(5;-3)$;

(ii) $P_1(0;1,8)$, $P_2(1;1,6)$, $P_3(2;1,1)$, $P_4(3;1,5)$, $P_5(4;2,3)$;

(iii) $P_1(0,9;2,9)$, $P_2(2,3;4,1)$, $P_3(3,9;4,8)$, $P_4(4,6;7,0)$, $P_5(5,8;7,0)$, $P_6(7,3;8,7)$.

14) Determinaţi ecuaţia *parabolei de regresie* asociată punctelor (i.e. parabola cea mai apropiată de punctele respective):

(i) $P_1(-1;5)$, $P_2(1;3)$, $P_3(2;4)$, $P_4(3;8)$;

(ii) $P_1(2;-3)$, $P_2(3;0)$, $P_3(5;1)$, $P_4(6;0)$, $P_5(7;-2)$;

(iii) $P_1(-2;-30)$, $P_2(-1;-4)$, $P_3(0;4)$, $P_4(1;4)$, $P_5(2;22)$, $P_6(3;68)$.

15) Determinaţi soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminate/supraabundente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0,01\, x_1 = 0 \\ 0,01\, x_2 = 0 \\ 0,01\, x_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

precum şi vectorul eroare reziduală şi norma sa euclidiană, folosind sistemul de ecuaţii normale asociat sistemului (3) şi metoda de eliminare Gauss fără pivotare (MEGFP).

16) Determinaţi soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminate/supraabundente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 0,001\, x_1 = 0 \\ 0,001\, x_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

folosind sistemul augmentat asociat sistemului (4) şi metoda de eliminare Gauss cu pivotare parţială (MEGPP).

Determinaţi norma euclidiană a vectorului eroare reziduală asociat soluţiei obţinute.

17) Fie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminate/supraabundente $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, unde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ este cunoscut şi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Fie $\mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ vectorul eroare reziduală corespunzător. Care dintre următorii vectori

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{6a}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \tag{6b}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \tag{6c}$$

reprezintă o posibilă valoare a lui $\mathbf{r}$? Justificaţi răspunsul.

18) Determinaţi soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminate/supraabundente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

precum şi vectorul eroare reziduală şi norma sa euclidiană, folosind folosind factorizarea QR a matricei sistemului (7) prin metoda Gram-Schmidt clasică/standard.

19) Determinaţi soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminate/supraabundente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

precum şi vectorul eroare reziduală şi norma sa euclidiană, folosind folosind factorizarea QR a matricei sistemului (8) prin metoda Gram-Schmidt modificată.

20) Determinaţi transformarea Householder $\mathbf{H_v} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, unde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$, care anihilează toate componentele vectorului $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^4$ cu excepţia primei componente, i.e. $\mathbf{H_v}\,\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{e}^{(1)}$. Care este valoarea lui $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$, dar cea a lui $\alpha \in \mathbb{R}^\star$?

21) Determinaţi factorizarea QR a matricei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

folosind metoda reflexiilor (transformările Householder).

22) Determinaţi factorizarea QR a matricei $\mathbf{A}$ date de relaţia (9), folosind metoda metoda roaţiilor plane (Givens).

23) Cum determinaţi parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f(x) = a\,\mathrm{e}^{bx}$ este cea mai bună aproximare pentru punctele din planul euclidian $\mathrm{P}_j(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $j = \overline{1,n}$, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 2$?

24) Cum determinaţi centrul (x_c, y_c) şi raza r ale cercului care aproximează cel mai bine punctele din planul euclidian $\mathrm{P}_j(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $j = \overline{1,n}$, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 3$?