Nume și prenume: DINOIU NADIA-STEFANIA

Grupa: 311

Nota: ____________

Examen

12 Mai 2020

Timpul de rezolvare al problemelor este de 2h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF[1] în folderul vostru de pe Dropbox aveți 30 de minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe **la ora 14 și 58 minute** și se termină la **ora 17 și 28 minute.**

⚠ Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Numărul de clienți pe zi de la ghișeul unei bănci poate fi modelat cu ajutorul unei variabile aleatoare $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Pentru a îmbunătății serviciile oferite, banca vrea să estimeze parametrul λ atât prin metoda momentelor cât și prin metoda verosimilității maxime. Pentru aceasta dispune de următorul eșantion înregistrat pe parcursul a două săptămâni:

`X: 24 22 29 23 32 29 22 29 20 26 27 27 30 24`

a) Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor $\tilde{\lambda}$ și estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\lambda}$ și verificați dacă aceștia sunt deplasați, consistenți și eficienți. Determinați repartiția lor limită.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\lambda(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 2 (asemănător cu ex 3, 12 mai 2018)

10p

Numărul de clienți care intră în magazinul Unirea zilnic poate fi modelat cu ajutorul unei variabile aleatoare repartizate Poisson de parametru λ, cunoscut. Odată intrat, un client cumpără produse în valoare de cel puțin 250 RON cu probabilitatea p. Pentru a estima p avem la dispoziție un eșantion $Y_1, Y_2, \dots, Y_{20}$ pentru 20 zile, reprezentând numărul de clienți, zilnic, care au efectuat cumpărături de cel puțin 250 RON:

`Y: 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0`

Propuneți un estimator pentru p, studiați proprietățile acestuia și dați o estimare plecând de la eșantionul dat (știind că $\lambda = 20$).

Exercițiul 3

10p

Fie X o v.a. de densitate

$$f_\theta(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

[1] Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner

cu $\theta > 0$ un parametru și A o constantă (care depinde de θ). Fie $X_1, \ldots, X_n$ un eșantion de talie $n \in \mathbb{N}^*$ din populația X.

a) Determinați constanta A și calculați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ, verificați dacă este deplasat, consistent și eficient și găsiți repartiția limită a acestuia.

c) În cazul în care $\theta = 4$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0, 1]$: $u_1 = 0.008$, $u_2 = 0.321$ și $u_3 = 0.582$.

Statistique

12 Mai 2020

Ex 1. $X \sim P(\lambda)$

X: 24, 22 29 23 32 29 22 29 20 26 27 27 30 24

Estim λ prin ~~mat.~~ mat. mom
mat. verosim. maxime

a) Det. – estimat. pct. prin mat mom. $\tilde{\lambda}$
– estimat. de verosimilit max $\hat{\lambda}$ + verif. deplasați, consist și eficienți

Det. raport lor limită

$E[X] \stackrel{\theta}{=} (\lambda)$ (din distrib. Poisson) media teoretică

$\boxed{\overline{X} = E[X]} \Rightarrow \overline{X} = \theta(\lambda)$

media empirică

Notăm $\theta(\lambda)$ cu λ ca domn' profesor (pe caz general)

În cazul nostru, $\overline{x} = \frac{364}{14} = 26$

Din metoda momentelor.

Funcția de verosim. maximă

$$\cancel{\boxed{L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(x_i)}}$$

$$L(\lambda \mid x = x_1, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(x_i)$$

! Notația din curs:

$$L(\lambda \mid x = x_1, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

Logaritmând, obținem:

$$\ell(\lambda|x) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\right) + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{x_i!}\right)$$

$$\ell(\lambda|x) = -n\lambda + \ln \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$= -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\lambda - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

Pentru a det. estimatorul de verosimilit. maximă tb să rez. ec:

$$\frac{d}{d\lambda}\ell(\lambda|x) = 0 \iff -n + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\frac{1}{\lambda} - 0 = 0$$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

Deci $\hat{\lambda} = \bar{x}$

Pentru a arăta ~~nedeplasarea~~ consist

Din Legea Nr. Mari:

$$\bar{x} \longrightarrow E[x] \Rightarrow \bar{\lambda} \xrightarrow{P} \lambda \qquad \tilde{\lambda} = \hat{\lambda} = \bar{\lambda}$$

$$\bar{x} = \bar{\lambda}, \quad E[x] = \lambda \Rightarrow \underline{\bar{\lambda} \text{ consist}}$$

$$E[\bar{x}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \quad (\bar{x} = \bar{\lambda})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] \overset{\text{identic}}{\underset{\text{distrib}}{=}} \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$$

$\Rightarrow$ $\underline{\bar{\lambda} \text{ nedeplasat}}$

$$I_n(\bar{\lambda}) = I_n(\lambda) = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(-n + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= 0 - \sum_{i=1}^{n} x_i\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\frac{1}{\lambda^2}$$

$$I_n(\bar{\lambda}) = I_n(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{(\bar{x})^2}$$

$$Var(\bar{x}) = E[\bar{x}^2] - (E[\bar{x}])^2$$

Det. rep. lor la limită (rep. asimptotică)

$\overline{X} \xrightarrow{a.s} \lambda$

Din Teorema Limită Centrală (TLC):

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\lambda) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$$\hat{\lambda} = \overline{X} \xrightarrow{D} N(\lambda, n)$$

$\hookrightarrow (\sqrt{n})^2$

b) Găsiți estimat. de veros. maximă pt $P_\lambda(X_1=1 \mid X_1>0)$.
Este consistent?

$X \sim P(\lambda)$

$$P(X_1=1 \mid X_1>0) = \frac{P((X_1=1)\cap(X_1>0))}{P(X_1>0)}$$

$$X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & K & \dots \\ \dots & \dots & & \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{P(X_1=1)}{1-P(X_1=0)} = \frac{\frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{1!}}{1-\frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!}} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \overset{not}{=} g(\lambda)$$

Continuarea ex în Recapitulare Statistică.pdf
pag 8.

Ex3

X - v.a

$$f_\theta(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

a) Det const A și calc. $\bar{\theta}$ estim lui θ prin met mom.

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{\frac{x}{\theta}}\,dx = A\theta \xrightarrow{f\ dens.} \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{\frac{x}{\theta}}\,dx = 1 \Rightarrow A\theta = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\theta}$$

$$E(x) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \underset{\substack{\text{s.v.} \\ t = \frac{x}{\theta}}}{=} \theta \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t}\,dt$$

Obs! f exponent, $\lambda = \frac{1}{\theta}$

$= \theta$

$$\left.\begin{aligned} E(x) &= \theta \\ E(x) &= \bar{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}$$

b) Det est verosim max $\hat{\theta}$ a lui θ, verif deplas, consist, efic + rap limită

$E[\bar{x}] = \theta$ Adev $\Rightarrow$ nedeplasat

Din L.N.M $\underset{\underset{\hat{\theta}}{\Vert}}{\bar{x}} \to \underset{\substack{\downarrow \\ \text{exponent}}}{E[x]} = \theta \Rightarrow \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta \Rightarrow$ consistent

$$I_n(\bar{x}) = \frac{1}{n} \cdot n\, I_1(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2} = \theta^2 \text{ (Wikipedia} \to \text{exponent)}$$

$$Var(\bar{x}) = E[(\bar{x})^2] - \underbrace{(E[x])^2}_{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2}$$

Nedeplasat : $E(\hat{\theta}) = \theta$

Consist : $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$

AS

aproape sigură $\Rightarrow$ probabilitate $\Rightarrow$ distribuție

(pt convergență)

Deci, ca ea proști, dacă a este aproape sig $\Rightarrow$ ~~este~~ converge și prin probab cub și converge și prin distrib. cub.

Eficienta : $Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{I_m(\theta)}$

$$I_m(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(x)\right)^2\right]$$

$$= -E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_\theta(x)\right]$$

$$I_m(\theta) = m \cdot I_1(\theta)$$

$x = (x_1, \dots x_m)$