Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

13 mai 2020, 16:00–18:30

NUME:	....
PRENUME:	....
GRUPA:	....

INSTRUCŢIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
3. Pe prima pagină a rezolvării fiecarei probleme, vor fi scrise **cu litere de tipar** `numele şi prenumele studentului, precum şi grupa acestuia.`
4. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
5. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 16:00–18:30.**
6. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email:
   - ca fişier PDF, împreună cu fişierul cu subiectele examenului;
   - atât titularului de curs (Prof. dr. Liviu MARIN: `liviu.marin@fmi.unibuc.ro`), cât şi titularului de laborator (Drd. Andreea GRECU: `andreea.grecu@my.fmi.unibuc.ro`);
   - vor avea următoarea **linie de subiect**:
     `Restanţă AnNumMetNum - Nume si prenume student, Grupa 3XX`
7. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **miercuri, 13 mai 2020, orele 19:00.**

Analiză Numerică & Metode Numerice
Restanţă – Anul III – Subiectul#13

I. (a) Arătaţi că şirul $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ definit prin

$$\begin{cases} x_0 > \sqrt{2} \\ x_n = \dfrac{1}{2}x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}\,, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

converge către $\sqrt{2}$.

(b) Arătaţi că dacă $0 < x_0 < \sqrt{2}$, atunci $x_1 > \sqrt{2}$.

(c) Folosiţi (a) şi (b) pentru a arăta că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}\,, \quad \forall\ x_0 > 0.$$

II. Fie nodurile de interpolare $x_j = j$, $j = \overline{0,3}$. Dacă

$$P_{0,1}(x) = x + 1\,, \qquad P_{1,2}(x) = 3x - 1\,, \qquad P_{1,2,3}(1,5) = 4\,, \tag{1}$$

să se determine $P_{0,1,2,3}(1,5)$.

III. O formulă de cuadratură pentru funcţiile integrabile $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, notată cu $\widetilde{I}(f)$, foloseşte nodurile $x_0 = -\alpha$ şi $x_1 = \alpha$, unde $\alpha \in (0,1]$, şi ponderile $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$.

(a) Determinaţi $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ şi $\alpha \in (0,1]$ pentru care formula de cuadratură $\widetilde{I}(f)$ este exactă pentru orice $f \in \mathbb{P}_1$.

(b) Determinaţi $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ şi $\alpha \in (0,1]$ pentru care formula de cuadratură $\widetilde{I}(f)$ este exactă pentru orice $f \in \mathbb{P}_2$.

(c) Arătaţi că pentru valoarea lui $\alpha \in (0,1]$ determinată la punctul (b), formula de cuadratură $\widetilde{I}(f)$ este exactă pentru orice $f \in \mathbb{P}_3$.

IV. Fie funcţia pondere $w : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

Folosind procedeul Gram-Schmidt, determinaţi polinoamele ortogonale în raport cu produsul scalar din $\mathrm{L}^2_w(0,\infty)$, $\{\widetilde{L}_0, \widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2\} \subset \mathbb{P}_2$ (*polinoamele Laguerre*).