Facultatea de Matematica-Informatica
Universitatea din Bucuresti

27 Noiembrie 2019

Test EDP

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale
Tipul examinarii: lucrare partiala
Nume student: ______________________________
Grupa 301
Timp de lucru : 90 minute

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest test contine 3 probleme (toate obligatorii).

Testul este individual. In cazul fraudarii (redactare identica cu a altui coleg) se anuleaza punctajul tuturor partilor implicate.

Pentru redactarea solutiilor incercati sa aplicati urmatoarele reguli:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **trebuie sa indicati** acest lucru si sa explicati de ce rezultatul respectiv se poate aplica.
- Pe cat posibil, **organizati-va munca** astfel incat la sfarsitului timpului de lucru sa returnati rezolvarile in ordinea de pe subiecte.
- Va sugerez sa rezolvati mai intai ce stiti sa faceti la prima vedere pentru a nu intra in criza de timp la finalul timpului de lucru !
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Punctaj: Problema 1 (2.5 p), Problema 2 (3 p), Problema 3 (3.5 p). Un punct este din oficiu, deci se **pleaca din nota 10**.

Problema 1. *(2.5p)*

(a). Calculati $\Delta(x \cdot \nabla(|x|^{\frac{1}{5}})), \quad x \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$.

(b). Integrati problema cu valori initiale

$$(1) \qquad \begin{cases} xu_x(x,y) + 3u_y(x,y) = u + 1, & u = u(x,y) \\ u(x,0) = \frac{1}{2}\cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(c). Determinati p numar real astfel incat

$$|\sin|x||^p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3), \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

(d). Determinati p numar real astfel incat

$$\frac{1}{1+|x|^3}|x|^p \in L^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_1(0)}), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

unde $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ reprezinta bila de raza 1 centrata in origine.

Problema 2. *(3p) Fie $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 4\}$ si $\partial\Omega$ frontiera lui Ω. Fie problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 2\sin x, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

(a). Aratati ca problema (2) *are cel mult o solutie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

(b). Gasiti constanta C astfel incat functia $v(x,y) = C(x^2+y^2)$ sa verifice $-\Delta v = 2$ in Ω.

(c). Folosind (eventual) principiul de maxim pentru functii armonice sa se determine solutia problemei

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 2, & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

(d). Folosind (eventual) principiul de maxim pentru functii sub/super armonice sa se arate ca solutia problemei (2) *verifica*

$$|u(x,y)| \leq 2, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Problema 3. *(3.5 p) Fie $\epsilon \in (0,1)$ si $\Omega_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \epsilon < |x| < 1\}$. Consideram problema Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = |x|, & in\ \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon = 0, & pe\ \partial\Omega_\epsilon. \end{cases} \tag{4}$$

(a). Rescrieti problema (4) *pentru o functie radiala $g_\epsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ astfel incat $u_\epsilon(x) = g_\epsilon(|x|)$.*

(b). Rezolvati problema corespunzatoare lui g_ϵ si apoi determinati solutia u_ϵ a problemei (4).

(c). Fie $\tilde{u}_\epsilon : B_1(0) \to \mathbb{R}$ extinderea lui u_ϵ cu 0 pe bila $B_\epsilon(0)$. Calculati limita punctuala

$$\tilde{u}(x) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{u}_\epsilon(x), \quad \forall x \in B_1(0).$$

Fie problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|, & in\ B_1(0) \\ u = 0, & pe\ \partial B_1(0). \end{cases} \tag{5}$$

(d). Rescrieti problema (5) *pentru o functie radiala $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ astfel incat $u(x) = g(|x|)$.*

(e). Rezolvati problema corespunzatoare lui g si apoi determinati solutia u a problemei (5).

(f). Comparati punctual u si $\tilde{u}$ precum si normele lor L^p, $1 \leq p \leq \infty$.