CURS V

ANALIZĂ

Fie E sp. vectorial (real). Două norme $\|\cdot\|$ și $\|\cdot\|'$ pe E s.n. ECHIVALENTE dc. $\exists\, \alpha, \beta \geq 0$ a.î. $\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|$ $\forall x \in E$

sau : ~~Două norme echivalente definesc aceeași topologie~~

$\exists\, A, B > 0$ a.î. $\begin{cases} \|x\| \leq A\|x\|' \\ \|x\|' \leq B\|x\|, \ \forall\, x \in E \end{cases}$

Obs: Două norme echivalente definesc aceeași topologie:

Ex: $E = \mathbb{R}^p \ (p \geq 2)$, $x \in \mathbb{R}^p$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2}$

$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_p|$

$\|x\|_\infty = |x_i| \quad i = \overline{1,p}$

$\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$

$\frac{1}{p}|x_i| \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \Rightarrow \frac{1}{p}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ -

$\left(|x| \leq \max_{i=\overline{1,p}} |x| = \|x\|_\infty, \ \forall i = \overline{1,p} \Rightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x| \leq p|x|_\infty \right)$

Obs 1) Dc. nu se precizează altceva, în $\mathbb{R}^p$ lucrăm cu $\|\cdot\|_2 = \|\ \|$

2) În $\mathbb{R}^p$, orice 2 norme sunt echivalente

3) Fie E spațiu vectorial (real)

Dc. orice două norme pe E sunt echiv. atunci

$\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$, atunci orice două norme sunt echivalente

Funcții continue

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $D \subseteq \mathbb{R}^p$. $f : D \to \mathbb{R}^q$, $a \in D$

$x \to f(x)$

$\uparrow \qquad \uparrow$

$D \subseteq \mathbb{R}^p \qquad \mathbb{R}^q$

$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x))$

$D \subseteq \mathbb{R}^p$ $\quad \mathbb{R}^q$

$f_1, \ldots, f_q : D \to \mathbb{R}$

Def: Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}^q$ ($f = (f_1, \ldots, f_q)$), $a \in D$

Spunem că funcția f este cont. în a dc.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in D$, $|x - a| < \delta_\varepsilon$

avem $\| f(x) - f(a) \| < \varepsilon$

Obs: Sunt echiv. afirmațiile

1) f cont. în a

2) $\forall (x_n)_{n \geq 1} \subseteq D$ cu $\lim\limits_n x_n = a$,

avem $\lim\limits_n f(x_n) = f(a)$

3) $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)}$, $\exists U_V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(D \cap U_V) \subseteq V$

f continuă în a ($f = (f_1, \ldots, f_q)$)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in D$, $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ avem:

$\| f(x) - f(a) \| < \varepsilon$

$\|$

$\| (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x)) - (f_1(a), f_2(a), \ldots, f_q(a)) \|$

$\|$

$\| (f_1(x) - f_1(a), f_2(x) - f_2(a), \ldots, f_q(x) - f_q(a)) \|$

$\sqrt{(f_1(x) - f_1(a))^2 + (f_2(x) - f_2(a))^2 + \ldots + (f_q(x) - f_q(a))^2}$

$\geq \sqrt{(f_i(x) - f_i(a))^2} = |f_i(x) - f_i(a)|$

Deci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in D$, $\|x - a\| < \delta$ avem

$|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f_1, \ldots, f_q$ sunt continue în a.

Dc. $f_1, \dots, f_q$ cont. în $a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ a.î. $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$.
$\forall x \in D$, $\|x-a\| < \delta_\varepsilon$ avem $\forall i = \overline{1,p}$

(f_i cont în $a \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon^i > 0$ în $\forall x \in D$, $\|x-a\| \le \delta_\varepsilon^i$

$|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

Aleg $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon^1, \dots, \delta_\varepsilon^q\}$)

$$\Rightarrow \|f(x) - f(a)\| = \sqrt{(f_1(x) - f_1(a))^2 + \dots + (f_q(x) - f_q(a))^2}$$

$$\le \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt q}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt q}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt q}\right)^2} = \sqrt{q \frac{\varepsilon^2}{q}} =$$

$$= \frac{\varepsilon \cancel{\sqrt q}}{\cancel{\sqrt q}} = \varepsilon \Rightarrow f \text{ cont. în } a$$

Obs. $f = (f_1, \dots, f_q)$ $f : D \to \mathbb{R}^q$, $a \in D$

Atunci f cont în $a \iff f_1, \dots, f_q$ cont în a

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (\underbrace{x^2 y}_{f_1}, \underbrace{x+y}_{f_2}, \underbrace{x \sin y}_{f_3})$

$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f_1(x,y) = x^2 y$ $f_2(x,y) = x+y$

$f_3(x,y) = x \sin y$

Fie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

pt. $\forall$ șir $(x_n, y_n)_{n \ge 1} \subset \mathbb{R}^2$ cu $\lim_n (x_n, y_n) = (a,b)$

$x_n \to a$

$y_n \to a$

avem: $f_1(x_n, y_n) = x_n^2 y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a^2 b$

$f_2(x_n, y_n) = x_n + y_n \to a+b$

$f_3(x_n, y_n) = x_n \sin y_n \to a \sin b$

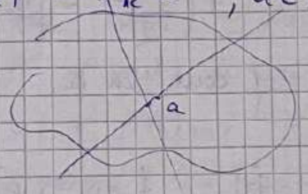
$\Rightarrow f_1, f_2, f_3$ cont în (a,b). Cum (a,b) a fost ales arbitrar $\Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}^2$. Obs: Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

Atunci 1) Dc. D compact $\Rightarrow f(D)$ compact
2) Dacă D conv $\Rightarrow f(D)$ conv.

Diferențiabilitate în $\mathbb{R}^p$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ f derivab. în a dc. $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2$, $a \in D \cap D'$ $x \in D$ $x-a \in \mathbb{R}^p$



$u \in \mathbb{R}^p$ $u \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^p$

$d_{a,u} = \{a+tu \mid t \in \mathbb{R}\} \to$ dreapta de dir. care trece prin a

$f|_{D \cap d_{a,u}}$

$$\underbrace{t \longrightarrow a+tu \longrightarrow f(a+tu)}_{g(t)}$$

$$\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \frac{f(a+tu)-f(a)}{t}$$

Def: Fie $u \in \mathbb{R}^p$ $\|u\|=1$ s.n. versor
Mulțimea $\{a+tu \mid t \in \mathbb{R}\}$ s.n. dreapta de direcție ce trece prin a.

Def: Fie $D=\mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p$, $f: D \to \mathbb{R}^2$ $a \in D$, $u \in \mathbb{R}^p$
$\|u\|=1$

Spunem că funcția f are derivată după direcția u în punctul a dc. există (în $\mathbb{R}^2$)

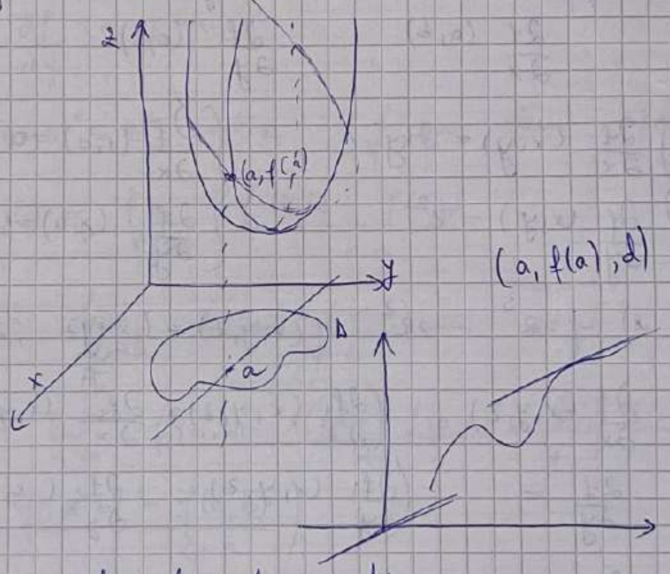
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial u}(a) \in \mathbb{R}^2$$

∂ - op. de derivare

Dc. există $\lim_{t} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial u}(u), \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ s.n.

deriv. lui f după direcția u în pct. a

Ex $f : D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Obs: Dc. f are derivată după dir. u în orice punct x ~~domeniu~~ ai punct $x \in D$ definesc:

$$x \longmapsto \frac{\partial f(x)}{\partial u} \in \mathbb{R}^2$$

$\cap$

D

$$\frac{\partial f}{\partial u} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Remarcă: Dc. $u = e_i = (0, 0, \dots 0, 1, 0 \dots 0)$

i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots a_p) - f(a_1, \dots, a_p)}{x - a_i}$$

$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

Def: Dc. $v = e_i = (0, \dots 0, 1, 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^p$ și f are derivata după direcția în pct. a, spunem că f are derivată parțială în raport în punctul a și avem:

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Ex: 1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^2 y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 \end{cases}$$

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y,z) = (\underbrace{x+yz}_{f_1}, \underbrace{xy^2 + \sin z}_{f_2})$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)\right) = (1, y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)\right) = (z, 2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)\right) = (y, \cos x)$$

$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = y^2$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = z \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2xy$

$\frac{\partial f_1}{\partial z} = y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \cos z$

③. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(\overset{a}{\overbrace{(0,0)}} + t\overset{v}{\overbrace{(1,0)}}) - f(0,0)}{t}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial e},(0,0)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{t} = 0.$$

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Obs: $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ f are deriv. partial în (a,b)

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}.$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{t\to 0}\frac{f((a,b)+t(1,0)) - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}\right)$$

Ex: $u = u_1, u_2$ $\quad \|u\| = 1$ $\quad u \notin (e_1, e_2)$

$(u_1, u_2 \neq 0)$

(f din exer. pct 3.)

$$t\neq 0 \quad \frac{f((0,0)+t(u_1,u_2)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{tu_1\cdot tu_2}{(tu_1)^2+(tu_2)^2} - 0}{t}$$

$t, u_1, u_2 \neq 0$

$$= \frac{t^2 u_1 u_2}{t^3(u_1^2+u_2^2)} = \frac{1}{t}\cdot\frac{u_1u_2}{u_1^2+u_2^2}$$

$$\nexists \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{u_1u_2}{u_1^2+u_2^2}$$

Deci $\nexists \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ (pt. $u \neq e_1, e_2$) $u = (u_1, u_2)$, $u_1, u_2 \neq 0$

Def: Apl. $T: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ s.n. liniară dc:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

sau $T(x+y) = T(x) + T(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$

$T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Pe $\mathbb{R}^p$ → bază canonică $\{e_1, \ldots, e_p\}$

$\mathbb{R}^q$ → bază canonică $\{e_1', \ldots, e_p'\}$

$x \in \mathbb{R}^p$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$ $\quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_p e_p$

$$T(x) = T(x_1 e_1, \ldots, x_p e_p) = x_1 T(e_1) + \ldots + x_p T(e_p)$$

T liniară

$T: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q \longleftrightarrow A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$

Ex: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad T(x,y) = 2x + y = \underbrace{(2,1)}_{A \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Prop. Fie $T: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ liniară

Atunci T este continuă și există $M > 0$ a.î.

$\|Tx\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$.

(~~adică~~ ⟹ T este uniform continuă).