Data: 6 iulie 2021
Timp de lucru: 3h
Punctaj total: 100p + 10p oficiu

81p

Nume:

10p

Examen **Analiză complexă**

Subiecte:

1. Pentru fiecare dintre urmatoarele afirmaţii, justificaţi dacă este adevărată sau falsă (eventual, folosind un exemplu sau un contraexemplu).
   (a) (5 p) Dacă $\Omega \subset \mathbb{C}$ este un deschis şi $z_0 \in \Omega$, iar $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ şi $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sunt olomorfe, atunci $\operatorname{res}(fg, z_0) = \operatorname{res}(f, z_0)g(z_0)$.
   5p (b) (5 p) Orice funcţie olomorfă şi mărginită $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, este constantă.
   4p (c) (5 p) Dacă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă şi notăm $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$, atunci uv este funcţie armonică.
   5p (d) (5 p) Dacă funcţiile f şi g sunt olomorfe şi ambele au punct singular izolat în z_0, atunci $\operatorname{res}(fg, z_0) = \operatorname{res}(f, z_0) \operatorname{res}(g, z_0)$.

15p 2. (15 p) Determinaţi o funcţie olomorfă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pentru care $\operatorname{Im}(f(x + iy)) = v(x, y)$ verifică

$$v(x, y) = y^3 - 3x^2y + x.$$

15p 3. (15 p) Calculaţi integrala

$$\int_{C_2(0)} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^3} dz,$$

unde $C_2(0)$ este cercul pozitiv orientat, de centru 0 şi rază 2.

4. Fie f o funcţie polinomială de grad cel puţin 2 şi $r > 0$ astfel încât $f(z) \neq 0$ pentru orice $|z| \geq r$.
   10p (a) (10 p) Demonstraţi, folosind Teorema lui Cauchy, că

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{f(z)} dz = \int_{|z|=R} \frac{1}{f(z)} dz,$$

   pentru orice $R \geq r$.
   (b) (10 p) Demonstraţi, folosind, eventual, punctul (a) şi făcând $R \to \infty$, că

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{f(z)} dz = 0.$$

10p 5. (a) (10 p) Construiţi o aplicaţie conformă şi bijectivă între mulţimile

$$D_1 = \{z = x + iy | x \in (0, 1), y < 0\} \text{ şi } D_2 = \left\{z = re^{it} | r \in (0, 1), t \in (\pi, 2\pi)\right\}.$$

   (b) (5 p) Justificaţi de ce mulţimile $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ şi $\mathbb{D} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ *nu sunt* conform echivalente.

5p

6. (a) (5 p) Determinaţi zerourile funcţiei $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ definite pe $\mathbb{C}$.

2p

(b) (10 p) Calculaţi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{\cosh x} dx$$

folosind teorema reziduurilor pentru conturul Γ_R din desenul de mai jos şi funcţia $f(z) = \frac{e^{iaz}}{\cosh z}$, unde $a \in \mathbb{R}$, şi făcând apoi $R \to \infty$.

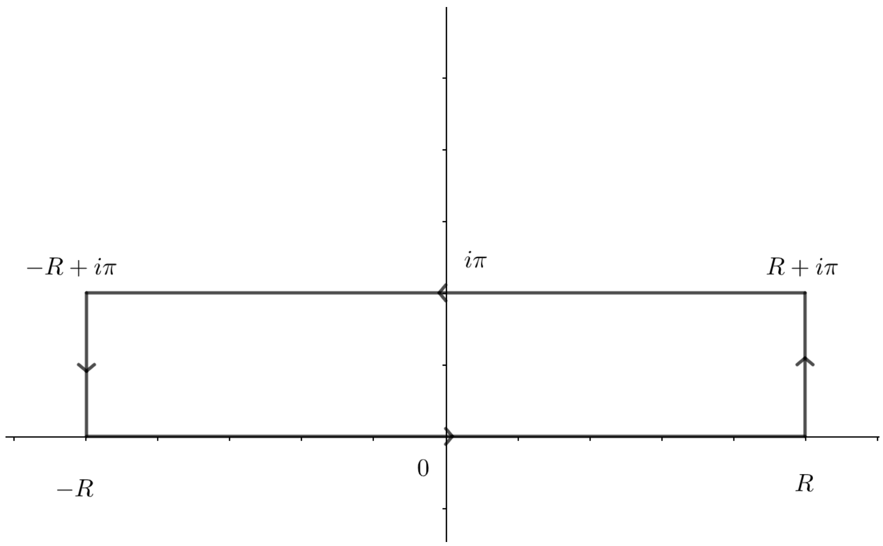


Figura 1: Conturul Γ_R

Grupa : 221

- RESTANȚĂ EXAMEN ANALIZĂ COMPLEXĂ -

1)

b) $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mărginită și olomorfă

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ f e mărginită pe $D_r(n)$ pentru un anume $r > 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ e singularitate eliminabilă pentru f și f se extinde olomorf la $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ care este mărginită și olomorfă, deci constantă.

$\Rightarrow f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e constantă

c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă și $u = Re(f)$, $v = Im(f)$; uv e armonică

$f = u + iv \Rightarrow u, v$ sunt armonice

$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$

$$\Delta uv = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(uv) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(uv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} u\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u +$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} u + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= v \cdot (\Delta u) + u \cdot (\Delta v) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) \to \text{nu e neapărat} = 0$$

Dar $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$:)

1)

d) f, g sunt olomorfe ; $res(fg, z_0) = res(f, z_0)\, res(g, z_0)$

Fals. De exemplu, funcțiile $g(z) = \frac{1}{z}$ și $f(z) = \frac{1}{z}$ au $z_0 = 0$ punct singular izolat și $Rez(fg, 0) =$

$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot z^2 \right)' = (1)' = 0$$

$$Rez(f, 0) \cdot Rez(g, 0) = \left(Rez(f, 0) \right)^2 = \left(\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \cdot z \right)^2 =$$

$1^2 = 1 \neq 0$

2) O funcție olomorfă $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $\operatorname{Im}(f(x+iy)) = v(x,y)$

$v(x,y) = y^3 - 3x^2y + x$

$f = u + iv$

f. olomorfă $\Rightarrow$ f. satisface ecuațiile Cauchy Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x} \quad (=) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -(-6xy+1) = 6xy - 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2 \Rightarrow u(x,y) = 3y^2x - x^3 + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2x - x^3 + C(y)\right) = 6yx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot C(y) = 6xy - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(y) = -1 \Rightarrow C(y) = -y + C \ ; \ C \in \mathbb{R}$$

Pentru $c=0$ obținem funcția olomorfă.

$$f(x+iy) = 3y^2x - x^3 - y + i(y^3 - 3x^2y + x) =$$

$$= 3y^2x - x^3 - y + iy^3 - 3ix^2y + ix =$$

$$= -(x^3 + 3ix^2y - 3y^2x - iy^3) - y + ix = -(x+iy)^3 - y + ix =$$

$$= -z^3 + i(x+iy) = -z^3 + iz$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = -z^3 + iz}$$

3)
$$\int_{C_2(0)} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^3}\,dz \quad ; C_2(0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \}$$

$\frac{e^{2z}}{z(z-1)^3}$ are poli $z=0$ (pol simplu) și $z=1$ (pol triplu);

Amândoi se află în interiorul cercului $C_2(0)$

$$\Rightarrow I = \int_{C_2(0)} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^3}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Rez} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^3}, z=0 \right) +$$

$$+ \operatorname{Rez} \left(\frac{e^{2z}}{z(z-1)^3}, z=1 \right) =$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^3} z + 2\pi i \lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{2!} \cdot \frac{e^{2z}}{z(z-1)^3} \cdot (z-1)^3 \right)'' =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} + \pi i \lim_{z\to 1} \left(\frac{e^{2z}}{z} \right)'' =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e^0}{(-1)^3} + \pi i \cdot \lim_{z\to 1} \left(\frac{2e^{2z}\cdot z - e^{2z}}{z^2} \right)' =$$

$$= -2\pi i + \pi i \lim_{z\to 1} \frac{2e^{2z}\cdot(2z^3 - 2z^2 + z)}{z^4} =$$

$$= -2\pi i + \pi i \cdot \frac{2e^2\cdot(2-2+1)}{1} = -2\pi i + 2\pi i e^2 =$$

$$= 2\pi i (e^2 - 1)$$

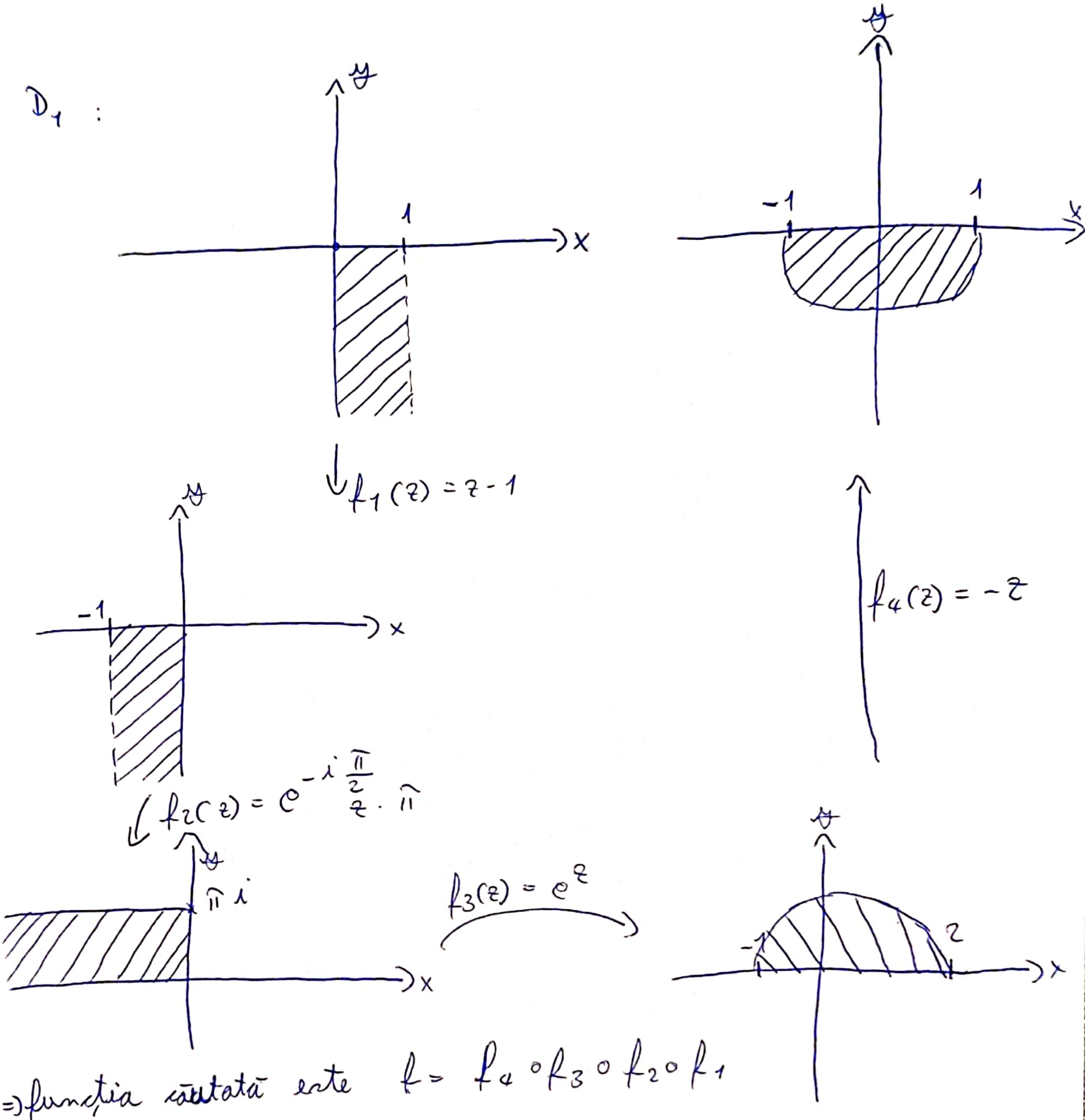
5) aplicație conformă și bijectivă

a)

$$D_1 = \{ z = x + iy \mid x \in (0,1),\ y < 0 \}$$

$$D_2 = \{ z = re^{it} \mid r \in (0,1),\ t \in (\pi, 2\pi) \}.$$

D_1 :



$\Rightarrow$ funcția căutată este $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$

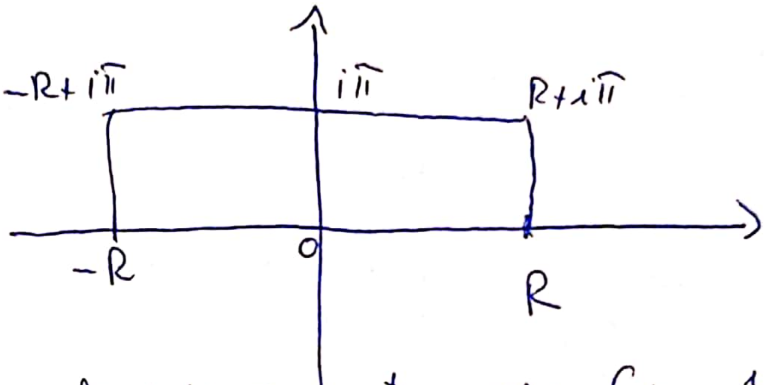
6)

a) $\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \Rightarrow \cosh z = 0 \Leftrightarrow e^{z}+e^{-z}=0 \;/ e^{z}$

$\Rightarrow e^{2z}+1=0 \Rightarrow e^{2z}=-1$

$\Rightarrow 2z = (2k+1)\pi i \Rightarrow z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i \; ; k\in \mathbb{Z}$

b) $f(z) = \frac{e^{iaz}}{\cosh z}$



Singura valoare a lui $k\in\mathbb{Z}$ pentru care $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i \in$ int I este $k=0 \rightarrow$ Singura singularitate a lui f e int I este $\frac{\pi i}{2}$

$\Rightarrow i = \int_{\Gamma} \frac{e^{iaz}}{\cosh z}\, dz = 2\pi i \operatorname{Rez}\left(f, \frac{\pi i}{2}\right)$

4)

a) $r>0;\ f(z)\neq 0\ \forall\ |z|\geq r$

a) Integrăm pe conturul Γ:

Rădăcinile lui f se află în interiorul cercului $|z|=r$

$\Rightarrow \frac{1}{f(z)}$ e olomorfă în regiunea mărginită de Γ, care este simplă conexă $\Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{1}{f(z)}\,dz = 0 \quad \forall\ \delta>0$

Dacă $\delta \to 0$ obținem: $0 = \int_{\Gamma} \frac{1}{f(z)}\,dz =$

$$= \int_{|z|=R} \frac{1}{f(z)}\,dz \overset{\text{de la orientare}}{-} \int_{|z|=r} \frac{1}{f(z)}\,dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=R} \frac{1}{f(z)}\,dz = \int_{|z|=r} \frac{1}{f(z)}\,dz \quad ;\ \forall\ R\geq r$$