Subiectul I

a) Determinați numărul de ideale maximale ale inelului $\mathbb{Z}_n$, unde $n = 7^2 \cdot 8^2 \cdot 2022^2$. (1p)

b) Fie $f(X_1, X_2, X_3) = g(s_1, s_2, s_3)$, unde s_1, s_2, s_3 sunt polinoamele simetrice fundamentale în nedeterminatele X_1, X_2, X_3, iar $g(Y_1, Y_2, Y_3) = 2Y_1Y_3 + 3Y_1Y_2^2 \in \mathbb{Z}[Y_1, Y_2, Y_3]$. Stabiliți dacă f este un polinom simetric și calculați $f(1,1,1)$. (2p)

c) Demonstrați că pentru o infinitate de numere naturale n polinomul $P(X) = X^3 - nX^2 + 6X + 7$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. (2p)

d) Calculați un generator al următorului ideal al lui $\mathbb{Z}$: $((8\mathbb{Z} \cap (3,5,6)\mathbb{Z} \cdot 7\mathbb{Z}) + 2022\mathbb{Z}$. (2p)

e) Fie polinomul $P(X) = X^{96} + \hat{5}X^{32} + \hat{7} \in \mathbb{Z}_2[X]$. Determinați numărul de ideale maximale din $\mathbb{Z}_2[X]$ care conțin idealul $(P(X))$. (3p)

Subiectul II

(3p) a) Dați exemplu, dacă există, de polinom de grad 2022 cu coeficienți reali, care are 7 termeni și exact 8 rădăcini reale, socotite cu tot cu multiplicități.

b) Fie R un inel comutativ și I_1, I_2 două ideale maximale distincte ale lui R. Să se arate că $I_1 \cap I_2$ este un ideal al lui R și că nu este ideal maximal. (3p)

c) Fie $k \in \mathbb{Z}$ și polinomul $P(X) = X^{2022} - X^{2000} + X^2 - 3kX + 3k + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Demonstrați că polinomul $P(X)$ nu are rădăcini întregi. (4p)

Subiectul III

Considerăm inelul $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ împreună cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire a numerelor complexe.

a) Determinați $U(A)$. (3p)

b) Să se demonstreze că inelul $A/_{7A}$ este izomorf cu produsul direct de inele $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$. (3p)

c) Există o infinitate de numere naturale nenule d astfel încât idealul dA să nu fie maximal? Dacă da, construiți o astfel de mulțime de numere naturale nenule. (4p)

Subiectul IV

a) Să se dea exemplu, dacă există, de 8 inele neizomorfe două câte două și care să aibă fiecare 7 ideale maximale. (3p)

b) Fie polinomul $P(X) = X^3 - 6X^2 + 8X + a$. Determinați toate numerele reale a astfel încât idealul generat de $P(X)$ în $\mathbb{R}[X]$ să fie conținut în exact trei ideale maximale distincte. Există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât idealul generat de $P(X)$ în $\mathbb{R}[X]$ să fie conținut în exact 4 ideale maximale distincte? (3p)

c) Fie I un ideal propriu al inelului $\mathbb{Q}[X]$. Justificați dacă este posibil ca inelul factor $\mathbb{Q}[X]/I$ să fie izomorf cu $\mathbb{R}$. (4p)