Inversare locala

Definitie 1. Fie D si G multimi deschise si nevide din $\mathbb{R}^n$. O functie $f : D \to G$ se numeste difeomorfism (sau schimbare de coordomate) daca este bijectiva, de clasa C^1 si inversa ei este de clasa C^1.

Teorema 2. (de inversare locala) Fie D o multime deschisa din $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$ si $f = (f_1, f_2, \ldots . f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ o functie de clasa C^1 cu proprietatea ca $df(x_0)$ este o aplicatie liniara inversabila (adica f are Jacobianul nenul in x_0). Atunci exista o vecinatate deschisa U a lui x_0, o vecinatate deschisa V a lui $y_0 = f(x_0)$ astfel incat $f|_U$ este un difeomorfism de la U la V.

Demonstratie. Sa consideram functia

$$F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad F(x, y) = f(x) - y$$

Observam ca pentru [1] orice $(x, y) \in D \times \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, y) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \qquad \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, y) = -\delta_{ij}.$$

Asadar

(1) F_i sunt de clasa C^1,

(2) $F_i(x_0, y_0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

(3) $\frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(x_0, y_0) = \frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(x_0) \neq 0$

Putem deci aplica Teorema functiilor implicite si obtinem o vecinatate deschisa V a lui y_0, o vecinatate deschisa U a lui x_0 astfel incat pentru orice punct $y \in V$ exista un unic punct $x = \varphi(y) \in U$ astfel incat $F(x, y) = 0$, adica $f(x) = y$. De aici rezulta ca f este bijectiva pe multimea U. In plus functia $\varphi : V \to U$ este de clasa C^1 si are proprietatea ca

$$\varphi(y_0) = x_0 \text{ si } F(\varphi(y), y) = 0 \text{ pentru orice } y \in V, \text{ adica}$$

$$f(\varphi(y)) = y \text{ pentru orice } y \in V$$

Rezulta ca φ este inversa functiei $f : U \to V$. Asadar inversa lui $f : U \to V$ este de clasa C^1 si deci f este un difeomorfism intre U si V.

[1] $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$ daca $i \neq j$

Corolar 3. Fie D o multime deschisa din $\mathbb{R}^n$ si $f : D \to \mathbb{R}^n$ o functie de clasa C^1 astfel incat matricea Jacobiana este inversabila pentru orice $a \in D$. Atunci f este o aplicatie deschisa adica duce deschisi in deschisi.

Demonstratie. Fie G o multime deschisa din D si fie $y_0 \in f(G)$. Atunci exista $x_0 \in G$ astfel incat $f(x_0) = y_0$. Conform Teoremei de inversare locala aplicata pe multimea G, exista $U \subset G$ o vecinatate deschisa a lui x_0 astfel incat $f(U)$ sa fie deschisa. Dar $y_0 \in f(U) \subset f(G)$, ceea ce spune ca $f(G)$ este o vecinatate a lui y_0. Cum y_0 a fost ales arbitrar rezulta ca $f(G)$ este deschisa.

Teorema 4. Fie $f : D \to G$ o aplicatie bijectiva de clasa C^1 intre doi deschisi din $\mathbb{R}^n$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

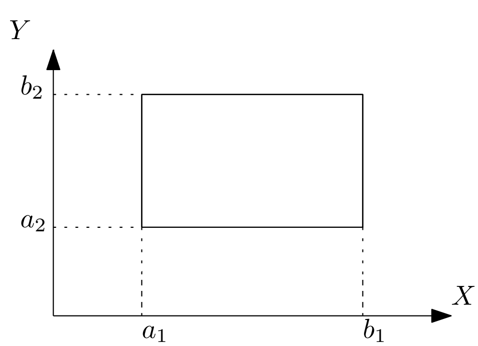
(i) f este difeomorfism

(ii) pentru orice $a \in D$ diferentiala $df(a)$ este inversabila.

(iii) Pentru orice punct $a \in D$ Jacobianul $J_f(a)$ este nenul.

Intervale din $\mathbb{R}^n$

Sa consideram dreptunghiul din $\mathbb{R}^2$ din figura. Interiorul sau este format din toate punctele $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ astfel incat $a_1 < x < b_1$ si $a_2 < x < b_2$ adica $x \in (a_1, b_1)$ si $y \in (a_2, b_2)$. Dreptunghiul este produsul cartezian al intervalelor deschise (a_1, b_1) si (a_2, b_2). Pentru a include, de asemenea, toate sau unele dintre laturi ar trebui sa inlocuim intervalele deschise cu cele inchise, inchis-deschise sau deschis-inchise. In mod similar, facand produsele carteziene a trei intervale obtinem paralelipipede dreptunghice din $\mathbb{R}^3$. Multimile de acest fel vor fi numite intervale din $\mathbb{R}^n$.



Definitie. Se numeste interval din $\mathbb{R}^n$ orice produs cartezian de intervale din $\mathbb{R}$ (intervalele pot fi deschise, inchise, inchis-deschise sau deschis-inchise). Multimea intervalelor din $\mathbb{R}^n$ va fi notata cu $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Daca

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \overline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

cu $a_k \leq b_k, k = 1, 2, \dots, n$ atunci, intervalul inchis $[\overline{a}, \overline{b}]$,intervalul deschis $(\overline{a}, \overline{b})$, intervalul deschis-inchis $(\overline{a}, \overline{b}]$, intervalul inchis-deschis $[\overline{a}, \overline{b})$ sunt prin definitie, multimile

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \{\overline{x} : a_k \leq x_k \leq b_k\} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n];$$
$$(\overline{a}, \overline{b}) = \{\overline{x} : a_k < x_k < b_k\} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n);$$
$$(\overline{a}, \overline{b}] = \{\overline{x} : a_k < x_k \leq b_k\} = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n];$$
$$[\overline{a}, \overline{b}) = \{\overline{x} : a_k \leq x_k < b_k\} = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n).$$

In toate cazurile $\overline{a}, \overline{b}$ se numesc capetele intervalului. Numarul

$$\|\overline{b} - \overline{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2}$$

reprezinta lungimea diagonalei intervalului, iar

$$\prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

se numeste volumul intervalului. Multimea

$$[\overline{a}, \overline{b}] \setminus (\overline{a}, \overline{b})$$

este frontiera topologica a oricarui interval care are capetele $\overline{a}$ si $\overline{b}$; aceasta consta din $2n$ fete. Intervalele vor fi notate cu litare mari, de exemplu $J = [\overline{a}, \overline{b}]$; lungimea diagonalei lui J o vom nota cu dJ si volumul lui J cu $v(J)$ sau $\text{vol}(J)$. Intervalul J se numeste degenerat daca si numai daca exista k astfel incat $a_k = b_k$; in acest caz $\text{vol}(J) = 0$. De asemenea, multimea vida este considerata un interval cu $\text{vol}(\emptyset) = 0$

Observatie. orice interval J din $\mathbb{R}^n$ poate fi scris ca reuniune disjuncta de 2^n intervale avand lungimea diagonalei $\frac{1}{2} dJ$.

Exercitiu 5. Aratati ca daca un interval J se scrie ca reuniunea disjuncta a doua intervale A si B atunci $\text{vol}(J) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B)$.

Propozitie 6. Daca un interval J din $\mathbb{R}^n$ se scrie ca reuniune disjuncta de m intervale A_1, $A_2, \dots A_m$ atunci

$$\text{vol}(J) = \sum_{i=1}^{m} \text{vol}(A_i).$$

Demonstratie Exercitiu!

Integrabilitate Riemann pentru functii de mai multe variabile

Sa consideram un interval J din $\mathbb{R}^n$. Se numeste descompunere a intervalului J o familie

$$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots A_p\}$$

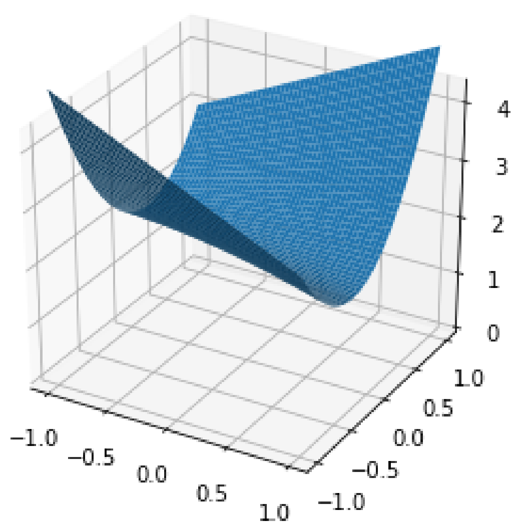
de intervale din $\mathbb{R}^n$ incluse in J astfel incat

$$J = \bigcup_{i=1}^{p} A_i \quad \text{si} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

Numarul $\|\mathcal{P}\| = \max\{dA_1, \dots, dA_n\}$ se numeste norma descompunerii $\mathcal{P}$. Daca

$$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots A_p\}, \quad \mathcal{Q} = \{B_1, B_2, \dots B_q\}$$

sunt doua descompuneri ale intervalului J, spunem ca Q este mai fina decat P daca pentru orice $B_j \in \mathcal{Q}$ exista $A_i \in \mathcal{P}$ astfel incat $B_j \subset A_i$. In acest caz $A_i = \bigcup_{B_j \subset A_i} B_j$. Fie



$$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots A_p\}$$

o descompunere a lui A si $\mathbb{R}^n$ si o functie $f : J \to \mathbb{R}$ marginita.

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in A_i\} \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in A_i\}$$

Definim

$$s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^{p} m_i \text{vol}(A_i) \text{ suma Darboux inferioara}$$

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^{p} M_i \mathrm{vol}(A_i) \text{ suma Darboux superioara}$$

Integrala inferioara si superioara a functiei f sunt prin definitie

$$\underline{\int}_J f = \sup_{\mathcal{P}} s_{\mathcal{P}}(f), \quad \overline{\int}_J f = \inf_{\mathcal{P}} S_{\mathcal{P}}(f).$$

Pentru integrala inferioara se mai foloseste si notatia

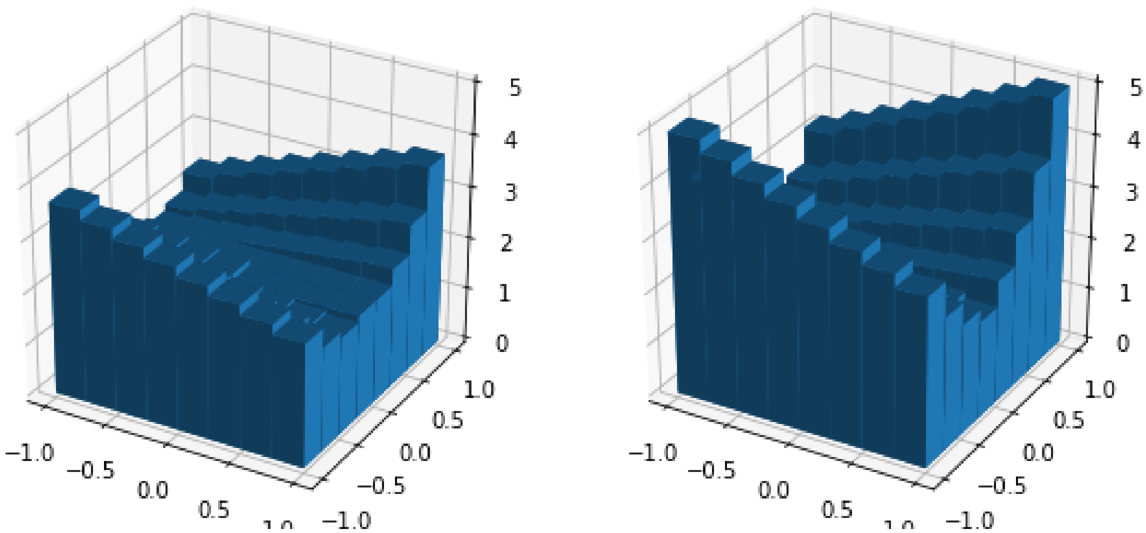


Figure 1: Sume Darboux

$$\underline{\int}_J f(x)dx \text{ sau } \underline{\int}_J f dx$$

iar pentru integrala superioara se mai foloseste si notatia

$$\overline{\int}_J f(x)dx \text{ sau } \underline{\int}_J f dx.$$

Spunem ca f este integrabila daca

$$\underline{\int}_J f = \overline{\int}_J f$$

In acest caz numarul

$$\int_J f(x)dx = \underline{\int}_J f = \overline{\int}_J f$$

se numeste integrala Riemann a functiei f pe J. Se folosesc si notatiile urmatoare

$$\int_J f \; dx \text{ sau } \int_J f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Daca f este o functie de doua variabile, integrala (numita dubla) se noteaza

$$\iint_J f(x,y)\ dxdy$$

Daca f este o functie de trei variabile, integrala (numita tripla) se noteaza

$$\iiint_J f(x,y,z)\ dxdydz$$

Propozitie 7. Daca $\mathcal{P}$ si $\mathcal{Q}$ sunt doua descompuneri ale lui J astfel incat $\mathcal{P}$ este mai fina decat $\mathcal{Q}$, atunci

$$s_{\mathcal{Q}}(f) \le s_{\mathcal{P}}(f) \le S_{\mathcal{P}}(f) \le S_{\mathcal{Q}}(f)$$

Demonstratie. Sa presupunem ca $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots A_p\}$, si $\mathcal{Q} = \{B_1, B_2, \ldots B_q\}$. Fie $I_k = \{j\ : A_j \subset B_k\}$. Atunci

$$B_k = \bigcup_{j \in I_k} A_j \qquad \mathrm{vol}(B_k) = \sum_{j \in I_k} \mathrm{vol}(A_j)$$

Fie

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in B_k\} \quad m'_j = \inf\{f(x) : x \in A_j\}$$

Observam ca daca $j \in I_k$ atunci, $m_k \le m'_j$ si prin urmare

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{Q}}(f) = \sum_{k=1}^{q} m_k \mathrm{vol}(B_k) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j \in I_k} m_k \mathrm{vol}(A_j) \le \sum_{k=1}^{q} \sum_{j \in I_k} m'_j \mathrm{vol}(A_j) \\ \le \sum_{j=1}^{p} m'_j \mathrm{vol}(A_j) = s_{\mathcal{P}}(f) \end{aligned}$$

Similar se demonstreaza ca

$$S_{\mathcal{P}}(f) \le S_{\mathcal{Q}}(f)$$

iar inegalitatea

$$s_{\mathcal{P}}(f) \le S_{\mathcal{P}}(f)$$

este evidenta.

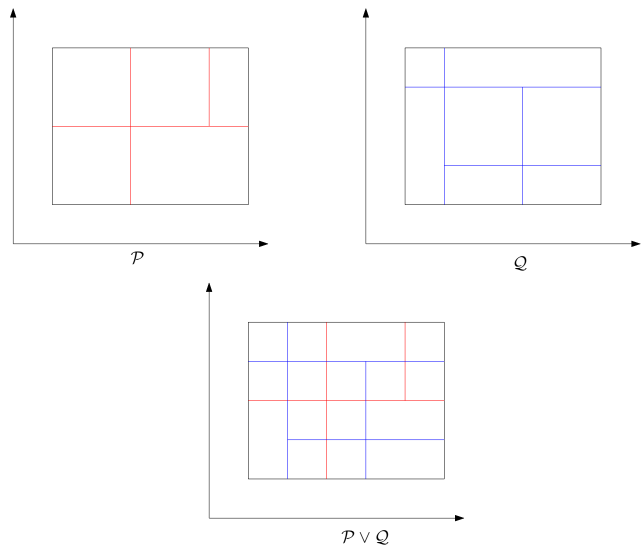
Propozitie 8. Pentu orice descompuneri $\mathcal{P}$ si $\mathcal{Q}$ ale lui J, $s_{\mathcal{P}}(f) \le S_{\mathcal{Q}}(f)$.

Demonstratie. Sa presupunem ca $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots A_p\}$, si $\mathcal{Q} = \{B_1, B_2, \ldots B_q\}$. Fie $K = \{(i,j)\ :\ A_i \cap B_j \ne \varnothing\}$ Sa consideram descompunerea

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{A_i \cap B_j : (i,j) \in K\}$$

Atunci $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ este o rafinare atat pentru $\mathcal{P}$ cat si pentru $\mathcal{Q}$. Aplicand propozitia anterioara, obtinem

$$s_{\mathcal{P}}(f) \le s_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}}(f) \le S_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}}(f) \le S_{\mathcal{Q}}(f).$$



Teorema 9. (Criteriul lui Darboux) O functie marginita $f : J \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann daca si numai daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista o descompunere $\mathcal{P}$ astfel incat

$$S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f) < \varepsilon$$

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$ si $\mathcal{P}$ o descompunere a lui J astfel incat

$$S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f) < \varepsilon.$$

Deoarece

$$s_{\mathcal{P}}(f) \leq \underline{\int}_J f \leq \overline{\int}_J f \leq S_{\mathcal{P}}(f)$$

Atunci

$$\overline{\int}_J f - \underline{\int}_J f \leq S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f) < \varepsilon$$

Cum ε a fost ales arbitrar, rezulta ca

$$\overline{\int}_J f = \underline{\int}_J f$$

si deci f este integrabila Riemann.

Reciproc, daca f este integrabila Riemann, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ exista doua descompuneri $\mathcal{P}'$ si $\mathcal{P}''$ astfel incat

$$S_{\mathcal{P}'}(f) < \int_J f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$s_{\mathcal{P}''}(f) > \int_J f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

Fie $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \vee \mathcal{P}''$. Aplicand Propozitia 8, obtinem

$$s_{\mathcal{P}''}(f) \leq s_{\mathcal{P}}(f) \leq S_{\mathcal{P}}(f) \leq S_{\mathcal{P}'}(f)$$

ai atunci

$$S_{\mathcal{P}}(f) - s_{\mathcal{P}}(f) \leq S_{\mathcal{P}'}(f) - s_{\mathcal{P}''}(f) < \left(\int_J f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_J f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Daca $A \subset \mathbb{R}^n$, notam cu χ_A functia definita astfel

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{daca } x \in A \\ 0 & \text{daca } x \notin A \end{cases}$$

Propozitie 10. Fie $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ o descompunere a intervalului J si $f = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{A_i}$. Atunci f este integrabila si

$$\int_J f = \sum_{i=1}^{p} c_i \mathrm{vol}(A_i)$$

Demonstratie. Sa consideram o descompunere arbitrara $\mathcal{P}' = \{B_1, B_2, \ldots, B_q\}$ si $K = \{(i,j) \ : \ A_i \cap B_j \neq \varnothing\}$ Consideram descompunerea

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{P}' = \{A_i \cap B_j \ : \ (i,j) \in K\}.$$

Pentru $(i,j) \in K$ avem $f = c_i$ pe $A_i \cap B_k$ si atunci

$$c_i = \inf\{f(x) : x \in A_i \cap B_k\} = \sup\{f(x) : x \in A_i \cap B_k\}$$

Cum

$$A_i = \bigcup_k (A_i \cap B_k)$$

avem

$$\mathrm{vol}(A_i) = \sum_k \mathrm{vol}(A_i \cap B_k)$$

Prin urmare,

$$s_{\mathcal{P}'}(f) \leq s_{\mathcal{P} \vee \mathcal{P}'}(f) = \sum_i \sum_k c_i \mathrm{vol}(A_i \cap B_k) = \sum_i c_i \mathrm{vol}(A_i) = s_{\mathcal{P}}(f)$$

si deci

$$\sum_i c_i \mathrm{vol}(A_i) = \sup_{\mathcal{P}} s_{\mathcal{P}}(f) = \underline{\int_J} f$$

Similar se arata

$$\sum_i c_i \mathrm{vol}(A_i) = \overline{\int_J} f.$$

Definitie 11. O functie de tipul celei din propozitia anterioara se numeste functie elementara sau etajata.

Propozitie 12. Daca $f, g : J \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann si α este un numar real, atunci functiile $f + g$, fg, αf sunt integrabile si

$$\int_J (f+g) = \int_J f + \int_J g, \qquad \int_J \alpha f = \alpha \int_J f$$

Demonstratie. Exercitiu!

Exemplu 13. Fie $f : J = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{daca } x, y \in \mathbb{Q}, 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

Daca $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ este o descompunere arbitrara,

$$s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^{p} 0 \cdot \mathrm{vol}(A_i) = 0$$

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^{p} 1 \cdot \mathrm{vol}(A_i) = 1$$

Asadar,

$$\underline{\int_J} f = 0 \ \text{ si } \ \overline{\int_J} f = 1$$

si deci f nu este intagrabila Riemann.

Remarca 14. La fel ca in cazul functiilor de o variabila reala, integrala Riemann multipla poate fi definita cu ajutorul sumelor Riemann. Fie $J \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $f : J \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ o descompunere a lui J si $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ un sistem de puncte astfel incat $\xi_i \in A_i$. Suma

$$\sigma_{\mathcal{P}}(\xi, f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathrm{vol}(A_i)$$

se numeste suma Riemann asociata functiei f, descompunerei $\mathcal{P}$ si sistemului de puncte ξ (numit sistem de puncte intermediare asociat lui $\mathcal{P}$). Se poate arata ca daca f este marginita atunci f este integrabila daca si numai daca exista un numar real I cu proprietatea ca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel incat

$$|\sigma_{\mathcal{P}}(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

oricare ar fi descompunerea $\mathcal{P}$ cu $\|\mathcal{P}\| < \eta_\varepsilon$ si oricare ar fi sistemul de puncte ξ asociat lui $\mathcal{P}$.

Exercitiu. Demonstrati ca functiile $f, g : J = [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$, $g(x,y) = x + y$ sunt integrabile Riemann si calculati

$$\iint_J f(x,y)dxdy, \quad \iint_J g(x,y)dxdy$$

folosind sume Darboux. Verificati rezultatul folosind Teorema lui Fubini (din Cursul 11).