Exerciţii cursul 1

1. Fie $c : I \to \mathbb{R}^3$ o curbă parametrizată care nu trece prin origine. Fie $c(t_0)$ punctul de pe curbă cel mai apropiat de origine şi presupunem că $c'(t_0) \neq 0$. Arătaţi că vectorul de poziţie $c(t_0)$ este perpendicular pe vectorul tangent $c'(t_0)$.

2. Fie $c : I \to \mathbb{R}^3$ o curbă parametrizată pentru care $c''(t) = 0$ pentru orice $t \in I$. Ce putem spune despre curba c?

3. Fie $c : I \to \mathbb{R}^3$ o curbă parametrizată şi v_0 un vector fixat. Prespupunem că $c'(t)$ este perpendicular pe v_0 pentru orice $t \in I$ şi că $c(0)$ este perpendicular pe v_0. Arătaţi că $c(t)$ este perpendicular pe v_0 pentru orice $t \in I$.

4. Fie $c : I \to \mathbb{R}^3$ o curbă parametrizată cu $c'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$. Arătaţi că $\|c(t)\|$ este constant nenul dacă şi numai dacă $c(t)$ este perpendicular pe $c'(t)$ pentru orice $t \in I$.

5. (foliul lui Descartes) Găsiţi o parametrizare a curbei plane de ecuaţie $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Determinaţi poziţia curbei faţă de dreapta de ecuaţie $x + y + 1 = 0$.

6. (spirala logaritmică) Fie curba plană având parametrizarea $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

   $$c(t) = (ae^{kt} \cos t, ae^{kt} \sin t)$$

   cu a şi k constante, $a, k > 0$.

   (a) Arătaţi că unghiul dintre $c(t)$ şi $c'(t)$ este constant.

   (b) Arătaţi că raportul distanţelor dintre două ”spire” consecutive, măsurate pe aceeaşi rază vectoare, este constant.

   (c) Dacă $s(t)$ este lungimea arcului de curbă de la $c(t)$ la $c(0)$, $(t < 0)$, arătaţi că

   $$\lim_{t \to -\infty} s(t)$$

   este finită.

   (d) Găsiţi o parametrizare canonică a spiralei pentru $a = k = 1$.

7. (cicloida) Un cerc de rază R se rostogoleşte (fără frecare) pe o dreaptă fixă. Traiectoria descrisă de un punct fix de pe cerc se numeţe cicloidă.

(a) Determinaţi o parametrizare a cicloidei în cazul când dreapta fixă este axa Ox. Determinaţi punctele ei singulare.

(b) Calculaţi lungimea arcului de curbă corespunzător unei rotaţii complete a cercului.

8. (epicicloida) Fie γ un cerc de rază r şi P un punct fixat pe γ. Cercul γ se rostogoleşte (fără frecare) rămânând tagent exterior unui cerc (fix) de rază $R = kr$, $k \geq 1$. Locul geometric descris de punctul P se numeşte epicicloida.

   (a) Determinaţi o parametrizare a epicicloidei în cazul când cercul fix are centrul în originea sistemului de axe.

   (b) * Dacă $k \in \mathbb{N}^*$ atunci epicicloida este o curbă închisă şi are exact k vârfuri.

   (c) * Dacă $k = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, cu $\frac{p}{q}$ fracţie ireductibilă, atunci epicicloida este o curbă închisă şi are exact p vârfuri.

   (d) * Dacă $k \notin \mathbb{Q}^*$, atunci epicicloida descrie o mulţime densă în inelul $R \leq \rho \leq R + 2r$.

9. (hipocicloida) Fie γ un cerc de rază r şi P un punct fixat pe γ. Cercul γ se rostogoleşte (fără frecare) rămânând tagent interior unui cerc (fix) de rază $R = kr$, $k \geq 1$. Locul geometric descris de punctul P se nuemşte hipocicloida.

   (a) Determinaţi o parametrizare a hipocicloidei în cazul când cercul fix are centrul în originea sistemului de axe.

   (b) * Dacă $k \in \mathbb{N}^*$ atunci hipocicloida este o curbă închisă şi are exact k vârfuri.

   (c) * Dacă $k = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, cu $\frac{p}{q}$ fracţie ireductibilă, atunci hipocicloida este o curbă închisă şi are exact p vârfuri.

   (d) * Dacă $k \notin \mathbb{Q}^*$, atunci hipocicloida descrie o mulţime densă în inelul $R - 2r \leq \rho \leq R$.

10. (curba lui Viviani) Găsiţi o parametrizare a curbei obţinute prin intersecţia unui cilindru circular drept de raza $r = \frac{1}{2}$ şi axă axa Oz cu sfera de raza $R = 1$ şi centru $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$.

11. (tractricea) Fie curba parametrizată $c : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$c(t) = \left(k \left(\ln \ \mathrm{tg} \, \frac{t}{2} + \cos t \right), k \sin t \right),$$

unde t este unghiul pe care îl face $c(t)$ cu axa Ox.

   (a) Schiţaţi grafic imaginea curbei şi stabiliţi poziţia curbei faţă de axa Ox.

   (b) Arătaţi că lungimea segmentului, măsurată pe tangentă, care are capetele punctul de tangenţă şi axa Ox are lungimea constantă egală cu k.

   (c) * Reciproc, găsiţi curbele care satisfac condiţia geometrică de la punctul precedent.