Geometrie curs - 4

Operații cu subspații vectoriale

Aplicații liniare

• $(V,+,\cdot)/_{K}$ sp vectorial

$V_1, V_2 \subset V$ subsp vectorial

1) $V_1 \cap V_2 \subset V$ este subsp vect

2) $\langle V_1 \cup V_2 \rangle = V_1 + V_2$

$\oplus \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

$\Leftrightarrow (\forall) v \in V_1 + V_2$ se scrie unic $v = \underset{\in V_1}{v_1} + \underset{\in V_2}{v_2}$

Obs. R reper în V

Partiționăm $R = R_1 \cup R_2$

$V_1 = \langle R_1 \rangle$; $V_2 = \langle R_2 \rangle \Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$

Th. Grassmann

$V_1, V_2 \subset V$ subsp vect

$\dim(V_1+V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$

T. $(V,+,\cdot)/_{K}$, R reper în V, $\dim_K V = n$, $R = \{e_1, \dots, e_n\}$

$A \in \mathcal{M}_{m\,n}(K)$, $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$S(A) = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n / AX = 0\} \subset V$ subsp vect

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\dim S(A) = n - rg(A)$

Propoziție

$(V,+,\cdot)/_{K}$ - sp vect, $U \subset V$ subsp vect

$\Rightarrow$ În raport cu orice reper din V, coord vectorilor din U verifică un sistem liniar și omogen,

i.e. $(\exists)$ B (o matrice) a.î. $U = S(B)$

Demonstrație $U \subset V$, $\dim_K U = p \le n = \dim_K V$

$R_U = \{e_1, \dots, e_p\}$ reper în U

Il extindem la $R = \{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ reper în V

$(\forall) x \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n} x_j e_j$

$x \in U \Rightarrow x_j = 0, (\forall) j = \overline{p+1,n}$

$\begin{cases} x_{p+1} = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$ SLO

fie $R'_U = \{e'_1, \dots, e'_p\}$ reper în U, pe care îl extindem la $R' = \{e'_1, \dots, e'_p, e'_{p+1}, \dots, e'_n\}$ reper în V

$R \xrightarrow{A} R'$, $e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, (\forall) i = \overline{1,n}$

$x \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i = \sum_{i=1}^{p} x'_i e'_i + \sum_{j=p+1}^{n} x'_j e'_j$

$X = AX'$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

$x \in U \Leftrightarrow x_j = 0, (\forall) j = \overline{p+1,n}$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x'_i = 0, (\forall) j = \overline{p+1,n}$ SLO

$rg(a_{ji})_{j=\overline{p+1,n}} = n-p$

$\dim U = n - (n-p) = p$

Definiție

$(V,+,\cdot)/_{K}$ sp vect

$U \subset V$ subsp vect U s.n. HIPERPLAN $\Leftrightarrow \dim U = n-1$

OBS! a) $U \subset V$ hiperplan $\Leftrightarrow$ coordonatele vectorilor din U în raport cu $(\forall)$ reper din V verifică o ecuație de tipul $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0$, $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 > 0$

b) $U \subset V$ subsp vect p-dim $\Leftrightarrow$ intersecție a $(n-p)$ hiperplane

Morfisme de spații vectoriale

Definiție $(V_1,+,\cdot)/_{K_1}$, $(V_2,+,\cdot)/_{K_2}$ sp vect

$f: V_1 \to V_2$ s.n. aplicație semiliniară $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $\theta: K_1 \to K_2$ izomorfism de corpuri a.î.

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $(\forall) x, y \in V_1$

2) $f(\alpha x) = \theta(\alpha) f(x)$ $(\forall) \alpha \in K$ $(\forall) x \in V_1$

Dacă $K_1 = K_2 = K$ și $\theta = id_K$, f se numește aplicație liniară

OBS.

1) $(V_1,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$, $(V_2,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$ $f: V_1 \to V_2$ aplicație semiliniară

$\theta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ automorfism de corpuri $\to \theta = id_{\mathbb{R}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ apl liniară

2) $(\mathbb{C}^n,+,\cdot)/_{\mathbb{C}}$ $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$\theta: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\theta(z) = \bar{z}$ autom de corpuri

$f(z_1, \dots, z_n) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$

• f aplicație semiliniară

1) $f((z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n)) = f(z_1+w_1, \dots, z_n+w_n)$

$= (\overline{z_1+w_1}, \dots, \overline{z_n+w_n}) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) + (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n) =$

$= f(z_1, \dots, z_n) + f(w_1, \dots, w_n)$

2) $f(\alpha(z_1, \dots, z_n)) = f(\alpha z_1, \dots, \alpha z_n) = (\overline{\alpha z_1}, \dots, \overline{\alpha z_n})$

$= \bar{\alpha}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = \theta(\alpha) f(z_1, \dots, z_n)$

Definiție 1) $f: V_1 \to V_2$ aplicație semiliniară (resp liniară) f s.n. izomorfism semiliniar (s liniar) $\Leftrightarrow$ f bijectivă

2) f s.n. automorfism semiliniar (s liniar) $\Leftrightarrow f: V \to V$, f bij

OBS. $\underbrace{V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3}_{g \circ f}$ f, g apl semiliniare (resp liniare)

1) $g \circ f(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x) + g(x)) = g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$, $(\forall) x, y \in V_1$

2) $g \circ f(\alpha x) = g(\theta(\alpha) f(x)) = \varphi(\theta(\alpha)) g(f(x)) =$

$= (\varphi \circ \theta)(\alpha)(g \circ f)(x) \Rightarrow g \circ f$ aplicație semiliniară

$\varphi \circ \theta$ izom. de corpuri $\begin{Bmatrix} \theta \to f \\ \varphi \to g \end{Bmatrix}$

Obs! 1) $(V_1,+,\cdot)/K_1$, $(V_2,+,\cdot)/K_2$ – sp vectoriale $\Rightarrow$
$(V_1,+)$, $(V_2,+)$ grupuri abeliene
$f: V_1 \to V_2$ apl semi liniară / liniară $\Rightarrow$
$f: V_1 \to V$ morfism de grupuri între $(V_1,+)$ și $(V_2,+)$
2) $f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$

Aplicații liniare

Proprietate (caracterizare aplicații liniare)
$(V_1,+,\cdot)/K$
$(V_2,+,\cdot)/K$ sp vect $f: V_1 \to V_2$ apl liniară $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ $(\forall) x, y \in V_1$
$(\forall) \alpha, \beta \in K$

Demonstrație: „$\Rightarrow$" f liniară
1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ $(\forall) u, v \in V_1$
$(\forall) \alpha \in K$

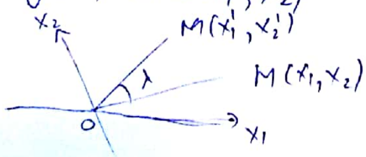
$f(\underbrace{\alpha x}_{u} + \underbrace{\beta y}_{v}) \overset{(1)}{=} f(x\alpha) + f(\beta y) \overset{2)}{=} \alpha f(x) + \beta f(y)$

„$\Leftarrow$" $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $(\forall) x, y \in V_1$
$(\forall) \alpha, \beta \in K$

Considerăm $\alpha = \beta = 1_K \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$
$\beta = 0_K \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x)$ $(\forall) x \in V$
$(\forall) \alpha \in K$

Generalizare
$f: V_1 \to V_2$ liniară $\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i)$

Exemple de aplicații liniare
① $f: V \to V$, $f(v) = 0_V$ sau $f(v) = v$ apl lin.
② $pr_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $pr_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ $(\forall) i = \overline{1,n}$
apl liniară
③ $f: \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $f(P) = P(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, fixat –//–
④ $f: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) = Tr(A)$
$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
$Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$
⑤ $f: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det(A)$ f nu e liniară
$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
⑥ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + \cos t\, x_2)$
(apl lin); (rotație în plan cu $\measuredangle t$)
$M(x_1, x_2) \to M'(x_1', x_2')$
$f(x_1, x_2) = (x_1', x_2')$



Propoziție $f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară
Dacă $\underset{\text{subsp vect}}{V' \subset V} \Rightarrow \underset{\text{sp vect}}{f(V') \subset V_2}$

Demonstrație
Fie $y, y' \in f(V')$
$a, b \in K$ $\Rightarrow ay + by' \in f(V')$

$\exists x, x' \in V'$ a.î. $y = f(x)$ $y' = f(x')$
$ay + by' = a f(x) + b f(x') =$
$= f(ax) + f(bx') = f(ax + bx')$
$\exists x'' = ax + bx' \in V'$ ($V' \subset V_1$ sp vect)
a.î. $ay + by' = f(x'') \in f(V')$

Def $f: V_1 \to V_2$ apl liniară
a) $Ker f = \{x \in V_1 / f(x) = 0_{V_2}\}$ nucleul lui f
$= f^{-1}(\{0_{V_2}\})$ (nullspace)
b) $Im f = \{y \in V_2 / \exists x \in V_1$ a.î. $f(x) = y\}$ imaginea lui f

Prop $f: V_1 \to V_2$ apl liniară
a) $Ker f \subset V_1$
$Im f \subset V_2$ subsp vect.
b) f injectivă $\Leftrightarrow Ker f = \{0_{V_1}\}$
c) f surj $\Leftrightarrow \dim Im f = \dim V_2$

Demonstrație
a) • $Ker f \subset V_1$, subsp vect
Fie $x, x' \in Ker f$, $a, b \in K$ $\Big\} \Rightarrow ax + bx' \in Ker f$
$f(ax + bx') = a \underset{0_{V_2}}{f(x)} + b \underset{0_{V_2}}{f(x')} = 0_{V_2} \Rightarrow f(ax+bx') \in Ker f$

• $Im f \subset V_2$ sp vect
Fie $y, y' \in Im f \Rightarrow \exists x, x' \in V_1$
a.î. $f(x) = y$
$f(x') = y'$
Fie $a, b \in K$, dem că $ay + by' \in Im f$
considerăm $x'' = ax + bx' \in V_1$
$f(x'') = f(ax + bx') = a f(x) + b f(x') = ay + by' \Rightarrow ay + by' \in Im f$

b) „$\Rightarrow$" f inj dem că $Ker f = \{0_{V_1}\}$
Pp prin abs $(\exists)\, x \in Ker f$, $x \neq 0_{V_1}$ $\Rightarrow f(x) = 0_{V_2}$ (1)
dar $f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$ (2)
Din (1) și (2) $\Rightarrow x = 0_{V_1}$, $\cancel{x_0}$ $\Rightarrow Ker f = \{0_{V_1}\}$
„$\Leftarrow$" $Ker f = \{0_{V_1}\}$ dem că f inj
Fie $x, x' \in V_1$, a.î. $f(x) = f(x') \Rightarrow f(x) - f(x') = 0_{V_2}$
$\Rightarrow f(x - x') = 0_{V_2} \Rightarrow x - x' \in Ker f = \{0_{V_1}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow x - x' = 0_{V_1} \Rightarrow x = x' \Rightarrow f$ inj

c) „$\Rightarrow$" f surj. dem că $Im f = \dim V_2$
f surj $\Rightarrow Im f = V_2 \Rightarrow \dim Im f = \dim V_2$
„$\Leftarrow$" $\dim Im f = \dim V_2$. Dem că f – surj.
$Im f \subset V_2$ subsp vect
dar $\dim(Im f) = \dim(V_2)$ $\Big\} \Rightarrow Im f = V_2 \Rightarrow f$ surj

Obs. $f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară
f bij $\Leftrightarrow \begin{cases} Ker f = \{0_{V_1}\}, \\ \dim Im f = \dim V_2 \end{cases}$