Geometrie I

-Note de curs în lucru-

Seria 11, 2021-2022

Titular: lect. dr. Miron Stanciu

FACULTATEA DE MATEMATICĂ
UB

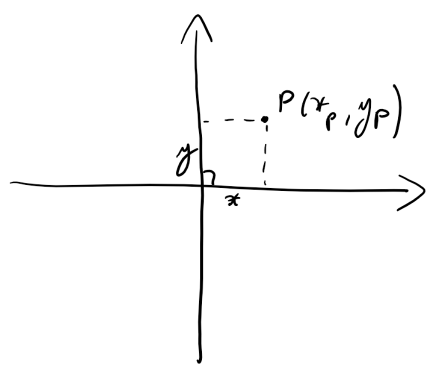
Cuprins

Capitolul 1

Planul cartezian, $\mathbb{R}^2$. Vectori liberi în plan

1.1 Planul $\mathbb{R}^2$. Coordonate carteziene. Distanţa euclidiană în plan

Planul
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$
vine, prin definiţie, cu o alegere evidentă de coordonate pentru punctele sale - coordonatele carteziene:



Coordonatele carteziene ale punctului P

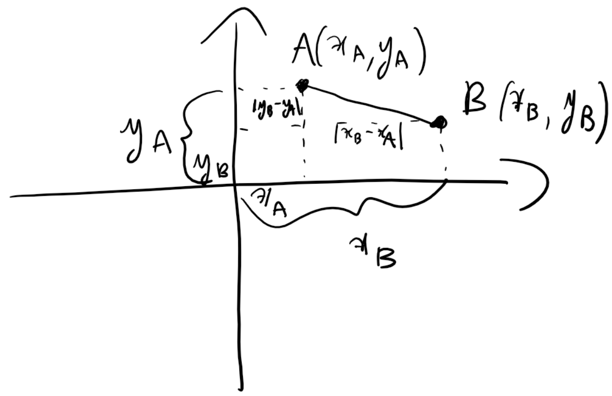
De obicei, pentru a nu crea confuzii, vom nota coordonatele unui punct P cu (x_P, y_P).

Aceste coordonate sunt tocmai cele potrivite pentru a calcula *distanţa euclidiană dintre două puncte*, aplicând Teorema lui Pitagora:

Astfel, putem defini *funcţia distanţă euclidiană*:
$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Propoziția 1.1.1: *Funcţia d are următoarele proprietăţi:*

(i) $d(A, B) = d(B, A),\ \forall A, B \in \mathbb{R}^2$ *(simetrie);*



Distanţa dintre A şi B

(ii) $d(A, B) = 0 \iff A = B$;

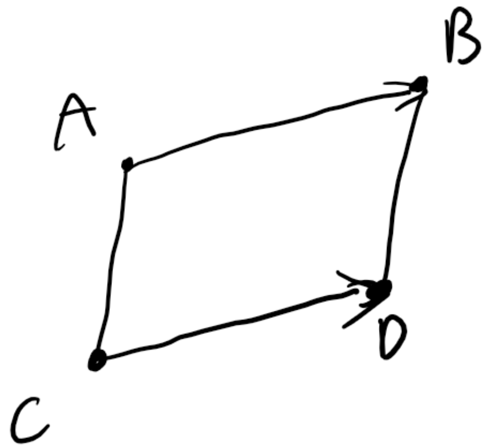
(iii) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B),\ \forall A, B, C \in \mathbb{R}^2$ *(inegalitatea triunghiului).*

Temă: Găsiţi şi alte funcţii "distanţă" *i.e.* funcţii $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ cu proprietăţile de mai sus.

1.2 Vectori liberi în plan

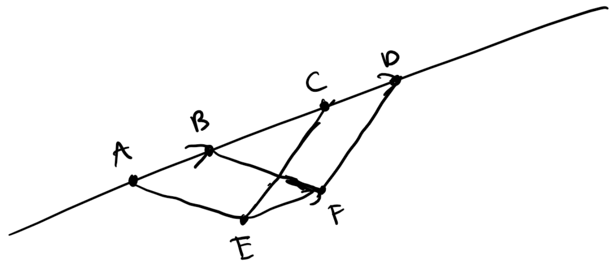
Definiția 1.2.1: Orice pereche de puncte (A, B) determină un vector (liber), pe care îl notăm $\overrightarrow{AB}$.

Spunem că două perechi de puncte din plan, (A, B) şi (C, D), astfel încât A, B, C, D nu sunt coliniare, determină acelaşi vector dacă $ABDC$ este paralelogram *i.e.* dacă $AC \parallel BD$ şi $AB \parallel CD$.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Dacă, pentru perechile (A, B), (C, D), cele patru puncte sunt coliniare, spunem că (A, B) şi (C, D) determină acelaşi vector dacă există (E, F) altă pereche de puncte în afara dreptei pe care o determină astfel încât (A, B) şi (E, F) determină acelaşi vector şi (C, D) şi (E, F) determină acelaşi vector.



În fine, spunem că orice pereche de tipul (A, A) determină vectorul nul, notat $\overrightarrow{0}$.

Observația 1.2.2: Am definit astfel o **relaţie de echivalenţă** pe mulţimea perechilor de puncte din plan, iar un vector liber este o clasă de echivalenţă.

Notăm cu $\mathcal{V}$ mulţimea vectorilor din plan:

$$\mathcal{V} = \{\overrightarrow{AB} \mid A, B \in \mathbb{R}^2\}.$$

Are loc următoarea proprietate imediată, dar esenţială:

Observația 1.2.3: Fie O un punct fixat în plan. Atunci, pentru orice $v \in \mathcal{V}$, există un unic punct P în plan astfel încât $v = \overrightarrow{OP}$.

Ca atare, pentru fiecare punct O fixat, există o bijecţie

$$\mathcal{V} \simeq \{\overrightarrow{OP} \mid P \in \mathbb{R}^2\} \simeq \mathbb{R}^2. \tag{1.2.1}$$

În momentul în care alegem să vedem vectorii ca fiind de tipul $\overrightarrow{OP}$, vom spune că sunt *legaţi* în P.

Remarcaţi că pentru toate cele de mai sus **nu am folosit decât noţiunea de paralelism şi faptul că, în planul euclidian, este satisfăcută axioma paralelor**.

Coordonatele unui vector: Folosind (1.2.1), la fel cum o facem pentru puncte, vom putea pune *coordonate* şi pe mulţimea vectorilor liberi $\mathcal{V}$. Anume, le vom atribui coordonatele date de legarea lor în originea sistemului de coordonate carteziene, adică

$$\textit{dacă } v = \overrightarrow{OP}, \text{ atunci } v = (x_P, y_P),$$

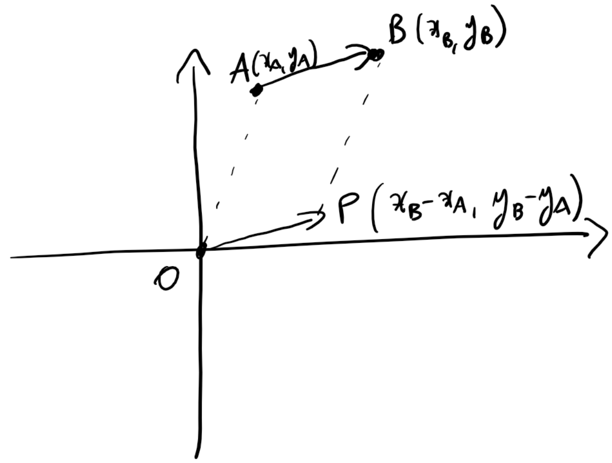
unde, atenţie, **aici O este originea sistemului de axe**.

Dacă $v = \overrightarrow{AB}$, reprezentat de o pereche arbitrară de puncte din plan, $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$, atunci există P punct astfel încât $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ şi $P = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

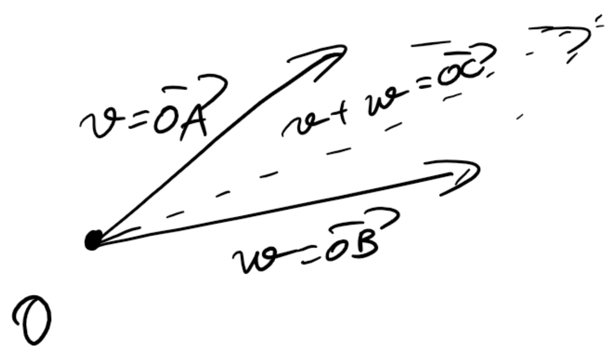
De reţinut: dacă $v = \overrightarrow{AB}$, atunci coordonatele vectorului v sunt

$$v = (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

Adunarea vectorilor: Pentru doi vectori v, w, are sens adunarea lor, pe care o putem defini folosind regula paralelogramului, alegând un punct arbitrar O în care să legăm vectorii:



Coordonatele unui vector liber



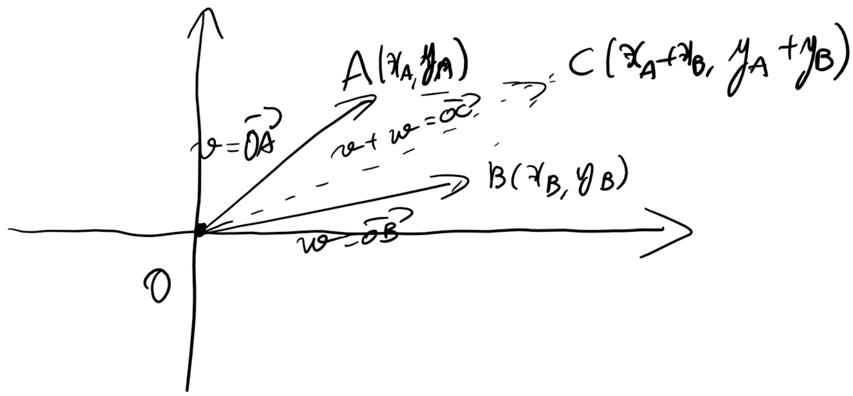
Regula paralelogramului de adunare a vectorilor

Este adevărat, dar nu neapărat evident, ba chiar se leagă de o teoremă fundamentală de geometrie proiectivă de care veţi mai auzi (Teorema lui Desargues), că vectorul rezultat (mai sus $v + w = \overrightarrow{OC}$) nu depinde de alegerea punctului O.

Fapt (exerciţiu): $(\mathcal{V}, +)$ astfel definit este grup comutativ.

În coordonate, dacă $v = (x, y)$ şi $w = (x', y')$, atunci

$$v + w = (x + x', y + y').$$



Norma unui vector: Prevalându-ne acum de existenţa distanţei în plan, putem uşor defini *lungimea* unui vector, numită mai des *norma* vectorului:
Pentru un $v \in \mathcal{V}, v = \overrightarrow{AB}$,

$$\|v\| := d(A, B).$$

Cum, dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, atunci $ABDC$ este paralelogram, deci $d(A, B) = d(C, D)$, definirea $\|v\|$ nu depinde de perechea de puncte aleasă pentru a-l reprezenta pe v.

În coordonate, dacă $v = (x, y)$, atunci

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Am definit astfel o funcţie $\| \cdot \| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Aceasta ne permite, pentru început, să definim

Înmulţirea vectorilor cu scalari: Pornind de la un vector v şi un număr real λ, definim λv astfel: fie $\overrightarrow{AB} = v$. Dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, atunci $\lambda v = \overrightarrow{0}$. Altfel, definim $\lambda v = \overrightarrow{AC}$ astfel încât A, B, C coliniare şi

$$\frac{\|AC\|}{\|AB\|} = \lambda,$$

raport considerat cu semn (*i.e.* este negativ dacă A este între B şi C, pozitiv sau 0 altfel).

Observația 1.2.4: Din chiar definiţia de mai sus, observăm că A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă există λ astfel încât $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

În coordonate, dacă $v = (x, y)$, pentru un $\lambda \in \mathbb{R}$, avem

$$\lambda v = (\lambda x, \lambda y).$$

Observația 1.2.5: Vectorii $v = (a, b), w = (c, d)$ sunt proporţionali *i.e.* există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = \lambda w$ sau $w = \lambda v$ dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

Propoziția 1.2.6: *Funcţia $\| \cdot \|$ are următoarele proprietăţi:*

(i) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \ \forall v \in \mathcal{V}$;

(ii) $\|v\| = 0 \iff v = 0, \ \forall v \in \mathcal{V}$;

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \ \forall v, w \in \mathcal{V}$; *(inegalitatea triunghiului).*

Comparaţi enunţul Propoziția 1.2.6 cu cel al Propozi[Pleaseinsertintopreamble]ia 1.1.1.

Produsul scalar: În fapt, folosindu-ne de coordonate, putem recupera chiar şi un substitut al unghiul dintre doi vectori, sub forma a ceea ce se numeşte *produsul scalar*:

Pentru $v, w \in \mathcal{V}$, $v = (x, y), w = (x', y')$, definim

$$\langle v, w\rangle = xx' + yy' \in \mathbb{R}.$$

produsul scalar al vectorilor v şi w.

Propoziția 1.2.7: *Produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ are următoarele proprietăţi:*

(i) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle, \ \forall v, w \in \mathcal{V}$;

(ii) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \ \forall u, v, w \in \mathcal{V}$;

(iii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle, \ \forall u, v, w \in \mathcal{V}$;

(iv) $\langle v, v\rangle = \|v\|^2, \ \forall v \in \mathcal{V}$;

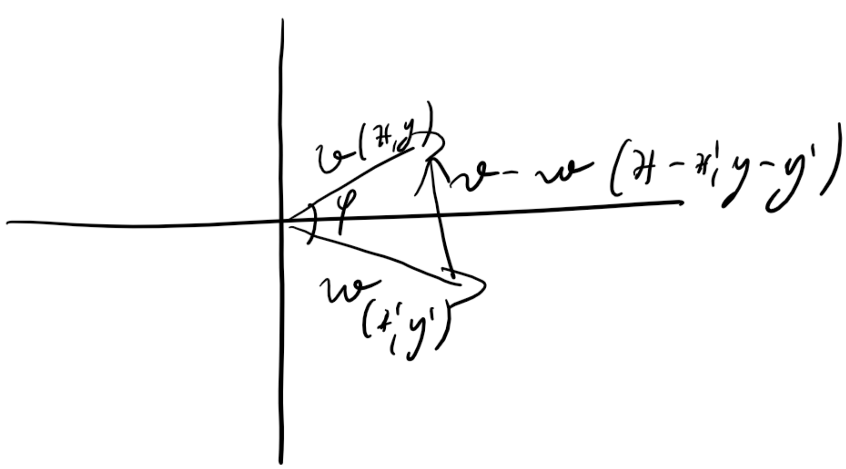
(v) $\langle v, w\rangle = 0, \ \forall w \in \mathcal{V} \implies v = 0$ *(spunem că produsul scalar este nedegenerat);*

(vi) $\langle v, w\rangle = 0 \iff v \perp w, \ \forall v, w \in \mathcal{V}$;

(vii) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|, \ \forall v, w \in \mathcal{V}$, *cu egalitate dacă şi numai dacă v şi w sunt proporţionali (inegalitatea Cauchy-Schwarz).*

Demonstraţie. Punctele $(i) - (v)$ sunt imediate.

(vi) Este situaţia din figura de mai jos:



Din Teorema cosinusului în triunghiul de mai sus (pentru vârful O), avem

$$\begin{aligned}
&\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\cdot\|w\|\cos\varphi \\
\iff\ & (x-x')^2 + (y-y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2\|v\|\cdot\|w\|\cos\varphi \\
\iff\ & 2(xx' + yy') = 2\|v\|\cdot\|w\|\cos\varphi \\
\iff\ & \langle v, w\rangle = \|v\|\cdot\|w\|\cos\varphi.
\end{aligned}$$

În particular, $\langle v, w\rangle = 0$ dacă şi numai dacă $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

(vii) Exerciţiu de seminar! ■

De reţinut: pentru v, w vectori, avem

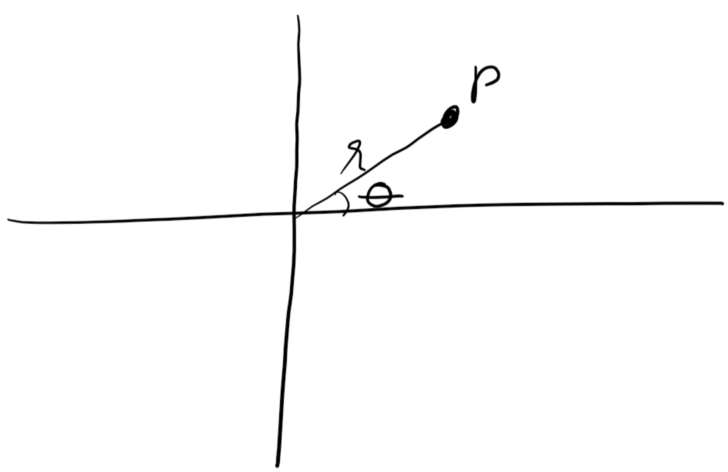
$$\langle v, w\rangle = 0 \iff v \perp w$$

şi, mai mult,

$$\cos\varphi = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

1.3 Coordonate polare în plan

Un alt fel de a caracteriza punctele din plan este cu ajutorul normei vectorului lor de poziţie şi a unghiului determinat de acesta:



Coordonate polare în plan

unde $r \in [0, \infty)$ şi $\theta \in [0, 2\pi)$.

Trecerea de la coordonate polare la carteziene este foarte la îndemână:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \\
y &= r\sin\varphi.
\end{aligned}$$

În schimb, în sensul invers, determinarea unghiului θ nu are o formulă unificată:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), \ \text{dacă } x > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, \ \text{dacă } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Capitolul 2

Spaţiul cartezian, $\mathbb{R}^3$. Vectori liberi în spaţiu

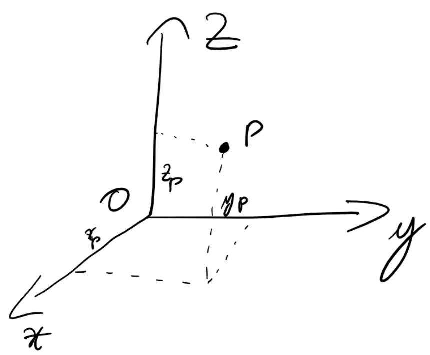
Tot ce am făcut pentru plan se poate transpune, aproape cuvânt cu cuvânt, în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$. Nu facem mai jos decât să reluăm, cu modificări neglijabile, primul capitol.

2.1 Spaţiul $\mathbb{R}^3$. Coordonate carteziene. Distanţa euclidiană în spaţiu

Spaţiul

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

vine, prin definiţie, cu o alegere evidentă de coordonate pentru punctele sale - coordonatele carteziene:



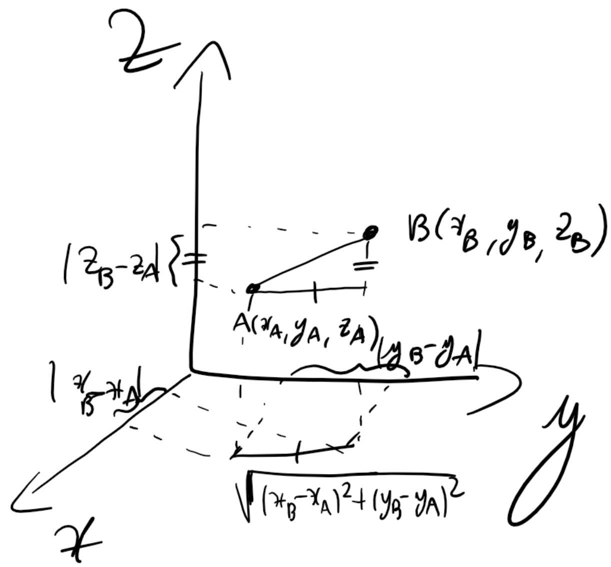
Coordonatele carteziene ale punctului P

De obicei, pentru a nu crea confuzii, vom nota coordonatele unui punct P cu (x_P, y_P, z_P).

Aceste coordonate sunt tocmai cele potrivite pentru a calcula *distanţa euclidiană dintre două puncte*, aplicând Teorema lui Pitagora în mod repetat:

Astfel, putem defini *funcţia distanţă euclidiană*:

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Distanţa dintre A şi B

Propoziția 2.1.1: *Funcţia d are următoarele proprietăţi:*

(i) $d(A,B) = d(B,A), \ \forall A, B \in \mathbb{R}^3$ *(simetrie);*

(ii) $d(A,B) = 0 \iff A = B$*;*

(iii) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B), \ \forall A, B, C \in \mathbb{R}^3$ *(inegalitatea triunghiului).*

Temă: Găsiţi şi alte funcţii "distanţă" *i.e.* funcţii $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ cu proprietăţile de mai sus.

2.2 Vectori liberi în spaţiu

Definiția 2.2.1: Orice pereche de puncte (A,B) determină un vector (liber), pe care îl notăm $\overrightarrow{AB}$.

Spunem că două perechi de puncte din spaţiu, (A,B) şi (C,D), astfel încât A, B, C, D nu sunt coliniare, determină acelaşi vector dacă $ABDC$ este paralelogram *i.e.* dacă $AC \parallel BD$ şi $AB \parallel CD$.

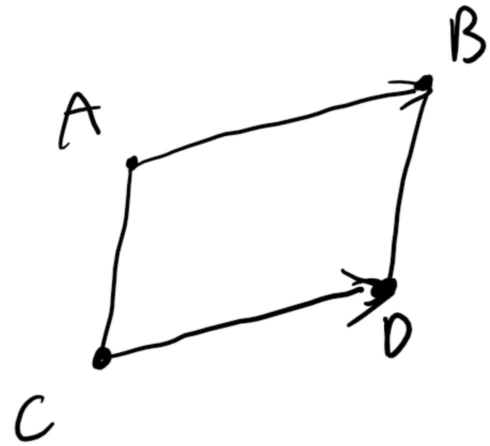
Dacă, pentru perechile (A,B), (C,D), cele patru puncte sunt coliniare, spunem că (A,B) şi (C,D) determină acelaşi vector dacă există (E,F) altă pereche de puncte în afara dreptei pe care o determină astfel încât (A,B) şi (E,F) determină acelaşi vector şi (C,D) şi (E,F) determină acelaşi vector.

În fine, spunem că orice pereche de tipul (A,A) determină vectorul nul, notat $\overrightarrow{0}$.

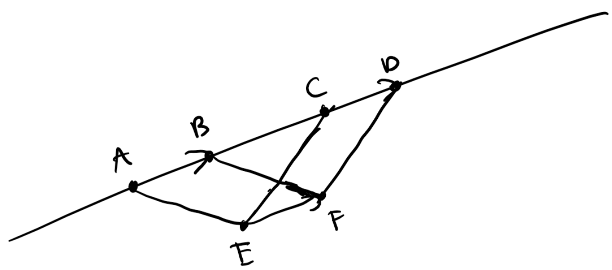
Observația 2.2.2: Am definit astfel o **relaţie de echivalenţă** pe mulţimea perechilor de puncte din spaţiu, iar un vector liber este o clasă de echivalenţă.

Notăm cu $\mathcal{V}$ mulţimea vectorilor din spaţiu:

$$\mathcal{V} = \{\overrightarrow{AB} \mid A, B \in \mathbb{R}^2\}.$$



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$



Are loc următoarea proprietate imediată, dar esenţială:

Observaţia 2.2.3: Fie O un punct fixat în spaţiu. Atunci, pentru orice $v \in \mathcal{V}$, există un unic punct P în spaţiu astfel încât $v = \overrightarrow{OP}$.

Ca atare, pentru fiecare punct O fixat, există o bijecţie

$$\mathcal{V} \simeq \{\overrightarrow{OP} \mid P \in \mathbb{R}^3\} \simeq \mathbb{R}^3. \tag{2.2.1}$$

În momentul în care alegem să vedem vectorii ca fiind de tipul $\overrightarrow{OP}$, vom spune că sunt *legaţi* în P.

Remarcaţi că pentru toate cele de mai sus **nu am folosit decât noţiunea de paralelism şi faptul că, în spaţiul euclidian, este satisfăcută axioma paralelor**.

Coordonatele unui vector: Folosind (2.2.1), la fel cum o facem pentru puncte, vom putea pune *coordonate* şi pe mulţimea vectorilor liberi $\mathcal{V}$. Anume, le vom atribui coordonatele date de legarea lor în originea sistemului de coordonate carteziene, adică

$$\textit{dacă } v = \overrightarrow{OP}, \text{ atunci } v = (x_P, y_P, z_P),$$

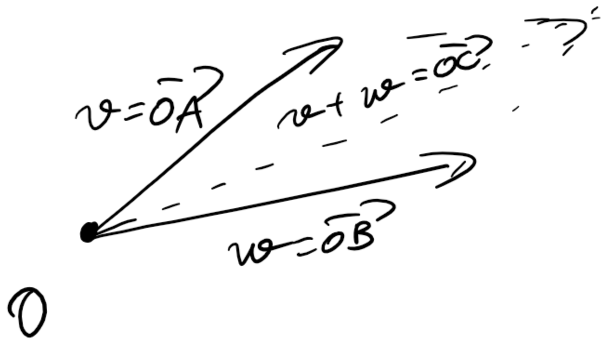
unde, atenţie, **aici O este originea sistemului de axe**.

Dacă $v = \overrightarrow{AB}$, reprezentat de o pereche arbitrară de puncte din spaţiu, $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, Z_B)$, atunci există P punct astfel încât $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ şi $P = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

De reţinut: dacă $v = \overrightarrow{AB}$, atunci coordonatele vectorului v sunt

$$v = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Adunarea vectorilor: Pentru doi vectori v, w, are sens adunarea lor, pe care o putem defini folosind regula paralelogramului, alegând un punct arbitrar O în care să legăm vectorii:



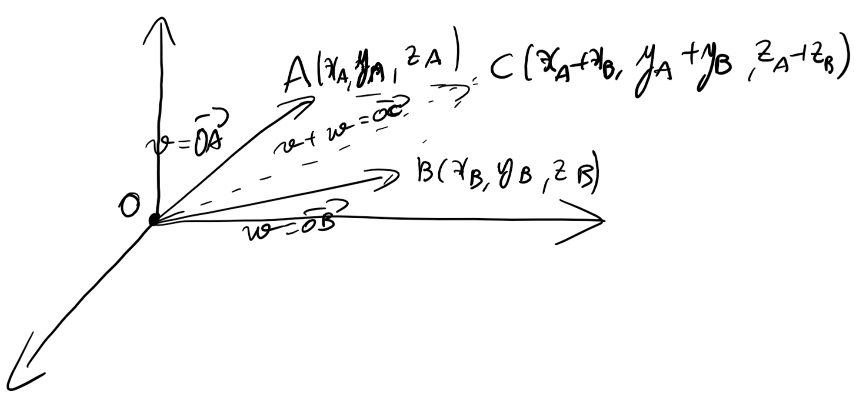
Regula paralelogramului de adunare a vectorilor

Este adevărat, dar nu neapărat evident, ba chiar se leagă de o teoremă fundamentală de geometrie proiectivă de care veţi mai auzi (Teorema lui Desargues), că vectorul rezultat (mai sus $v + w = \overrightarrow{OC}$) nu depinde de alegerea punctului O.

Fapt (exerciţiu): $(\mathcal{V}, +)$ astfel definit este grup comutativ.

În coordonate, dacă $v = (x, y, z)$ şi $w = (x', y', z')$, atunci

$$v + w = (x + x', y + y', z + z').$$



Norma unui vector: Prevalându-ne acum de existenţa distanţei în spaţiu, putem uşor defini *lungimea* unui vector, numită mai des *norma* vectorului:
Pentru un $v \in \mathcal{V}, v = \overrightarrow{AB}$,

$$\|v\| := d(A, B).$$

Cum, dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, atunci $ABDC$ este paralelogram, deci $d(A, B) = d(C, D)$, definirea $\|v\|$ nu depinde de perechea de puncte aleasă pentru a-l reprezenta pe v.

În coordonate, dacă $v = (x, y, z)$, atunci

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Am definit astfel o funcţie $\| \cdot \| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Aceasta ne permite, pentru început, să definim

Înmulţirea vectorilor cu scalari: Pornind de la un vector v şi un număr real λ, definim λv astfel: fie $\overrightarrow{AB} = v$. Dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, atunci $\lambda v = \overrightarrow{0}$. Altfel, definim $\lambda v = \overrightarrow{AC}$ astfel încât A, B, C coliniare şi

$$\frac{\|AC\|}{\|AB\|} = \lambda,$$

raport considerat cu semn (*i.e.* este negativ dacă A este între B şi C, pozitiv sau 0 altfel).

Observația 2.2.4: Din chiar definiţia de mai sus, observăm că A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă există λ astfel încât $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

În coordonate, dacă $v = (x, y, z)$, pentru un $\lambda \in \mathbb{R}$, avem

$$\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Observația 2.2.5: Vectorii $v = (a, b, c), w = (d, e, f)$ sunt proporţionali *i.e.* există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = \lambda w$ sau $w = \lambda v$ dacă şi numai dacă $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ are rangul 1.

Propoziția 2.2.6: *Funcţia $\| \cdot \|$ are următoarele proprietăţi:*

(i) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \ \forall v \in \mathcal{V}$;

(ii) $\|v\| = 0 \iff v = 0, \ \forall v \in \mathcal{V}$;

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \ \forall v, w \in \mathcal{V}$; *(inegalitatea triunghiului).*

Comparaţi enunţul Propoziția 2.2.6 cu cel al Propoziția 2.1.1.

Produsul scalar: În fapt, folosindu-ne de coordonate, putem recupera chiar şi un substitut al unghiul dintre doi vectori, sub forma a ceea ce se numeşte *produsul scalar*:

Pentru $v, w \in \mathcal{V}$, $v = (x, y, z), w = (x', y', z')$, definim

$$\langle v, w \rangle = xx' + yy' + zz' \in \mathbb{R}.$$

produsul scalar al vectorilor v şi w.

Propoziția 2.2.7: *Produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ are următoarele proprietăţi:*

(i) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \ \forall v, w \in \mathcal{V}$;

(ii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \ \forall u, v, w \in \mathcal{V}$;

(iii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle,\ \forall u, v, w \in \mathcal{V}$;

(iv) $\langle v, v\rangle = \|v\|^2,\ \forall v \in \mathcal{V}$;

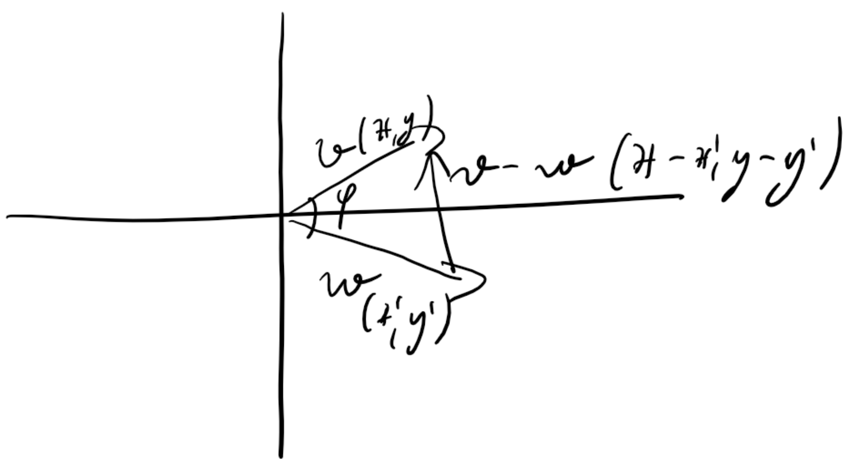
(v) $\langle v, w\rangle = 0,\ \forall w \in \mathcal{V} \implies v = 0$ *(spunem că produsul scalar este nedegenerat)*;

(vi) $\langle v, w\rangle = 0 \iff v \perp w,\ \forall v, w \in \mathcal{V}$;

(vii) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|,\ \forall v, w \in \mathcal{V}$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* v *şi* w *sunt proporţionali (inegalitatea Cauchy-Schwarz)*.

Demonstraţie. Punctele $(i) - (v)$ sunt imediate.

(vi) Este situaţia din figura de mai jos (care este în planul determinat de v şi w, chiar dacă suntem în $\mathbb{R}^3$):



Din Teorema cosinusului în triunghiul de mai sus (pentru vârful O), avem

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \cdot \|w\| \cos\varphi \\ \iff (x - x')^2 + (y - y')^2 &= x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2\|v\| \cdot \|w\| \cos\varphi \\ \iff 2(xx' + yy') &= 2\|v\| \cdot \|w\| \cos\varphi \\ \iff \langle v, w\rangle &= \|v\| \cdot \|w\| \cos\varphi. \end{aligned}$$

În particular, $\langle v, w\rangle = 0$ dacă şi numai dacă $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

(vii) Exerciţiu de seminar! ∎

De reţinut: pentru v, w vectori, avem

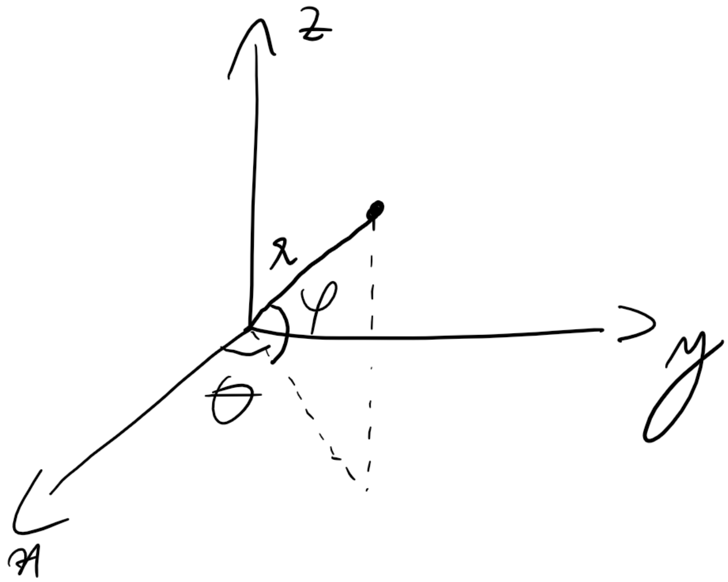
$$\langle v, w\rangle = 0 \iff v \perp w$$

şi, mai mult,

$$\cos\varphi = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

2.3 Coordonate sferice

Un alt fel de a caracteriza punctele din spaţiu este cu ajutorul normei vectorului lor de poziţie şi a unor unghiuri determinate de acesta cu planele de coordonate



Coordonate sferice

unde $r \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi)$ şi $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Trecerea de la coordonate polare la carteziene este foarte la îndemână:

$$x = r \cos \varphi \cos \theta$$
$$y = r \cos \varphi \sin \theta$$
$$z = r \sin \varphi.$$

În schimb, în sensul invers, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, dar determinarea unghiurilor nu are, iarăşi, o formă unificată.

Capitolul 3

Drepte în plan.

3.1 Reprezentări ale dreptelor în plan. Ecuaţii parametrice şi implicite

Ne întoarcem acum în planul $\mathbb{R}^2$ pentru a regăsi diferitele reprezentări analitice ale unei drepte şi pentru a determina condiţiile algebrice corespunzătoare relaţiilor geometrice uzuale care pot fi afirmate despre drepte (paralelism, perpendicularitate etc.) Observaţi însă că nu vom începe prin a da *definiţia dreptei*, ci doar vorbim despre determinări de natură algebrică ale acestui concept geometric primar.

Notăm din nou cu $\mathcal{V}$ mulţimea vectorilor din plan, definiţi ca în Capitolul 1.

Definiția 3.1.1: Fie d dreaptă în plan. Un vector $v \in \mathcal{V}, v \neq \overrightarrow{0}$, se numeşte *vector director* pentru d dacă respectă:

$$v = \overrightarrow{AB}, A \in d \implies B \in d.$$

Observația 3.1.2: Conform Observația 1.2.4, dacă u şi $v \in \mathcal{V}$ sunt vectori directori ai aceleiaşi drepte d, atunci $v = \lambda u$ pentru un $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definiția 3.1.3: Mulţimea tuturor vectorilor directori ai unei drepte d se numeşte *direcţia dreptei* d:

$$Dir(d) = \{\lambda v \mid v \text{ vector director al lui } d\}.$$

Exercițiul 3.1.4: Punem pe $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ următoarea relaţie:

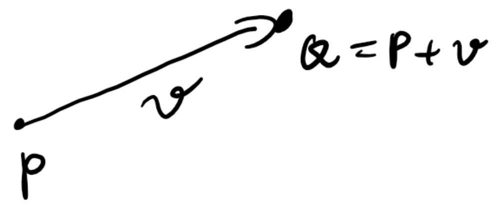
$$v \sim w \iff v \text{ şi } w \text{ sunt vectori directori ai unei aceleiaşi drepte }.$$

a) Rescrieţi algebric condiţia definitorie a relaţiei $\sim$.

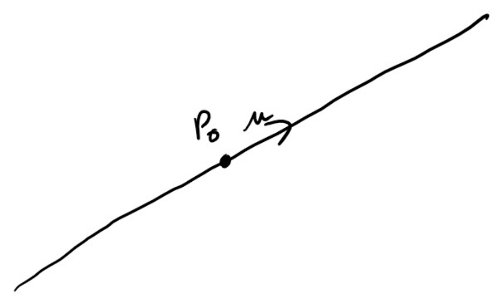
b) Demonstraţi că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă.

c) Puteţi identifica ${\mathcal{V} \setminus \{0\}}/{\sim}$ ca obiect geometric?

Convenţie: Pentru un punct P şi un vector v, dăm sens expresiei $P + v$ ca fiind unicul punct Q astfel încât $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + v$.



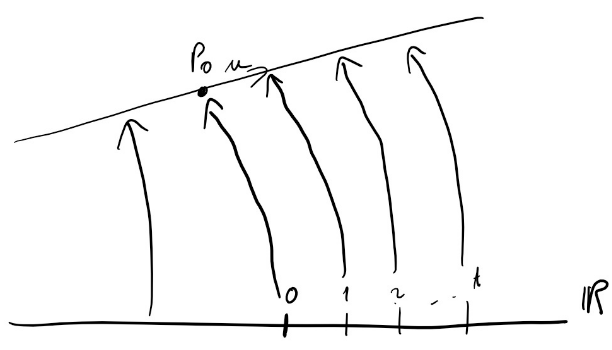
Ecuaţia parametrică a unei drepte. O dreaptă poate fi descrisă dând un punct al ei şi un vector director:



Ca atare, regăsim toate punctele de pe dreaptă ca fiind de forma

$$P = P_0 + tu,$$

fiecărui punct corespunzându-i un unic $t \in \mathbb{R}$. Nu facem de fapt decât să caracterizăm o dreaptă cu ajutorul unei bijecţii între punctele ei şi mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ (de altfel, des numită *dreapta reală*).



Bijecţia unei drepte cu $\mathbb{R}$

Cel puţin intuitiv, informal, putem spune că dreapta este un obiect matematic *de dimensiune 1*, de vreme ce punctele ei sunt descrise de un singur parametru t.

Fiecare dreaptă d, împreună cu o bijecţie a mulţimii punctelor sale cu $\mathbb{R}$, este aşadar determinată de alegerea unui punct $P_0 \in \mathbb{R}^2$ şi a unui vector $v \in \mathcal{V}$.

Fie d o dreaptă în plan, $P_0 \in d$ şi $u \in \mathcal{V}$ vector director al lui d.
Se numeşte *ecuaţie parametrică* a dreptei d scrierea

$$d = \{P_0 + tu \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Echivalent, în coordonate, pentru $P_0 = (x_0, y_0)$ şi $u = (u_1, u_2)$, punctele $(x, y) \in d$ respectă ecuaţiile

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \text{pentru un } t \in \mathbb{R}. \tag{3.1.1}$$

Să presupunem întâi că $u_1, u_2 \neq 0$. Prelucrând ultimul sistem de ecuaţii, avem

$$t = \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2},$$

de unde obţinem o altă scriere a ecuaţiei parametrice:

Fie d o dreaptă în plan, $P_0 = (x_0, y_0) \in d$ şi $v \in \mathcal{V}$ vector director al lui d.
Se numeşte *ecuaţie parametrică* a dreptei d ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}. \tag{3.1.2}$$

Observaţie: Vom considera aceste tipuri de ecuaţii ca având sens şi când $u_1 = 0$ sau $u_2 = 0$ (atenţie: cum $u \neq 0$ prin definiţie, cel puţin unul din ele este nenul). Spre exemplu, prin

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{0}$$

se înţelege că $y = y_0$, iar $x \in \mathbb{R}$.

Observaţie: Perechea punct-vector director (P_0, u) nu identifică în mod unic o dreaptă, ci identifică in mod unic o dreaptă **şi o bijecţie a sa cu** $\mathbb{R}$. Însă o aceeaşi dreaptă poate fi descrisă prin ecuaţie parametrică şi de oricare alt punct al său P_1, împreună cu alt vector director $v = \lambda u$ (conform Observaţia 3.1.2).

Mai sus este recuperată şi ecuaţia parametrică a unei drepte determinate de două puncte diferite, prin simpla observaţie că, dacă $P_0, P_1 \in d$, atunci $\overrightarrow{P_0P_1}$ este vector director al lui d. În coordonate, dacă $P_0 = (x_0, y_0)$ şi $P_1 = (x_1, y_1)$, atunci $\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, deci:

Fie d o dreaptă şi $P_0, P_1 \in d$.
Se numeşte *ecuaţie parametrică* a dreptei d ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{3.1.3}$$

La fel cum am spus mai sus, dăm un sens egalităţii chiar şi atunci când $x_0 = x_1$ sau $y_0 = y_1$.

Ecuaţia implicită a unei drepte în plan.

Rescriind una din ecuaţiile (3.1.2), (3.1.3), ajungem la o ecuaţie de forma

$$ax + by + c = 0, \tag{3.1.4}$$

pentru nişte $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.
Aceasta se numeşte *ecuaţia implicită a dreptei d*.

Observaţia 3.1.5: Fie $d : ax + by + c = 0$ o dreaptă definită printr-o ecuaţie implicită, $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$.

Fie $v \in Dir(d)$ un vector director al lui d, $v = \overrightarrow{PP'}, P, P' \in d$. Dacă $P = (x_P, y_P), P' = (x_{P'}, y_{P'})$, atunci

$$ax_P + by_P + c = 0 \text{ şi } ax_{P'} + by_{P'} + c = 0.$$

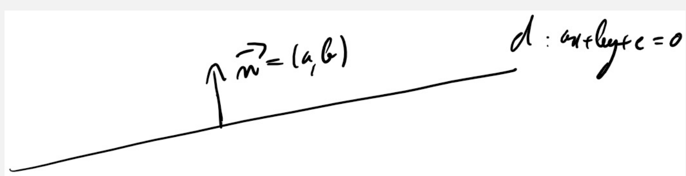
Scăzând relaţiile, avem

$$a(x_{P'} - x_P) + b(y_{P'} - y_P) = 0. \tag{3.1.5}$$

Dar $v = \overrightarrow{PP'} = (x_{P'} - x_P, y_{P'} - y_P)$, deci (3.1.5) se rescrie

$$a(x_{P'} - x_P) + b(y_{P'} - y_P) = 0 \iff \langle v, (a, b)\rangle = 0.$$

Vector normal la o dreaptă. Aşadar, pentru dreapta $d : ax + by + c = 0$, vectorul de coordonate (a, b) este *vector normal* la această dreaptă *i.e.* este perpendicular pe orice vector director al dreptei d:



Vector normal al dreptei d

Observaţie: La fel ca noţiunea de vector director, vectorul normal nu este unic, dar este unic până la proporţionalitate: dacă v şi $n \in \mathcal{V}$ sunt vectori normali ai lui d, atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $n = \lambda v$.

Constanta c arată "cât de departe" este dreapta de a trece prin originea planului $(0, 0)$.
Rezumăm în tabelul de mai jos cele două mari feluri de a reprezenta dreptele în plan:

Reprezentare	Avantaje
Ecuaţie parametrică: • $d : P_0 + tu, t \in \mathbb{R}$ • $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ • $\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$ • $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$	-Un punct de pe dreaptă este imediat vizibil. -Direcţia este imediat vizibilă.
Ecuaţie implicită $ax + by + c = 0$	Vectorul normal este imediat vizibil.

3.2 Poziţii relative a două drepte

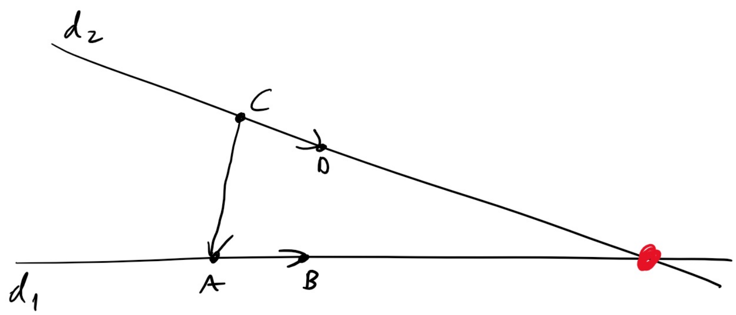
Cu micul aparat construit mai sus, putem deduce imediat echivalentele algebrice pentru multe din afirmaţiile geometrice care pot fi atribuite dreptelor.

Paralelism: Două drepte d_1, d_2 sunt paralele, prin definiţie, dacă nu se intersectează sau dacă coincid (definiţie valabilă **numai în plan!**).

Propoziția 3.2.1: $d_1 \parallel d_2 \iff Dir(d_1) = Dir(d_2)$ (i.e. *au aceiaşi vectori directori).*

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$) Dacă $d_1 = d_2$, evident $dir(d_1) = dir(d_2)$.

Presupunem acum $d_1 \cap d_2 = \emptyset$. Fie $v \in dir(d_1)$, să spunem $v = \overrightarrow{AB}$ cu $A, B \in d_1$. Presupunem că $v \notin dir(d_2)$. Să alegem şi un vector director pentru d_2, fie el $\overrightarrow{CD}, C, D \in d_2$.



Cum $v \notin dir(d_2)$, $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ nu sunt proporţionale, deci orice vector w se poate descompune pe direcţiile lor *i.e.* există α, β astfel încât $w = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta CD$.

Scriem această descompunere pentru $w = \overrightarrow{CA}$:

$$\overrightarrow{CA} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{CD} \text{ pentru nişte } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Echivalent,

$$-\alpha\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{CD}.$$

Însă $-\alpha\overrightarrow{AB} = AE$ şi $\beta\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF}$ pentru nişte puncte $E \in d_1, F \in d_2$. Obţinem $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$, deci $d_1 \ni E = F \in d_2$, contradicţie cu $d_1 \cap d_2 = \emptyset$.

($\Longleftarrow$) Presupunem că d_1 şi d_2 se intersectează, fie $P \in d_1 \cap d_2$. Atunci, prin definiţia direcţiei unei drepte,

$$d_1 = \{A \mid \overrightarrow{PA} \in dir(d_1)\},$$
$$d_2 = \{A \mid \overrightarrow{PA} \in dir(d_2)\}.$$

Cum $dir(d_1) = dir(d_2)$, avem $d_1 = d_2$. ■

Corolarul 3.2.2: *Relaţia de paralelism este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea dreptelor în plan.*

Exercițiul 3.2.3: Descrieţi geometric mulţimea factor a acestei relaţii de echivalenţă. (comparaţi cu Exercițiul 3.1.4)

Propoziția 3.2.1 ne permite să decidem algebric, cu uşurinţă, dacă două drepte d_1, d_2 sunt paralele, în funţie de tipul ecuaţiei prin care sunt reprezentate:

Condiţii pentru paralelism: Fie d_1, d_2 drepte în plan.

- Dacă $d_1 : P_1 + tv_1, d_2 : P_2 + tv_2$ (sau alte scrieri ale ecuaţiilor parametrice), atunci $d_1 \parallel d_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $v_1 = \lambda v_2$ (vectorii directori sunt proporţionali).
- Dacă $d_1 : P_1 + tv_1$ şi $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, atunci $d_1 \parallel d_2 \iff \langle v_1, (a_2, b_2) \rangle = 0$ (vectorul director al lui d_1 este ortogonal pe vectorul normal al lui d_2).
- Dacă $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, atunci $d_1 \parallel d_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a_1, b_1) = \lambda(a_2, b_2)$ (vectorii normali sunt proporţionali).

Perpendicularitate: Două drepte d_1, d_2 sunt perpendiculare, prin definiţie, dacă vectorii directori ai lui d_1 sunt ortogonali (perpendiculari) pe vectorii directori ai lui d_2.

Decurge atunci uşor o serie de condiţii algebrice similare celor de mai sus:

Condiţii pentru perpendicularitate: Fie d_1, d_2 drepte în plan.

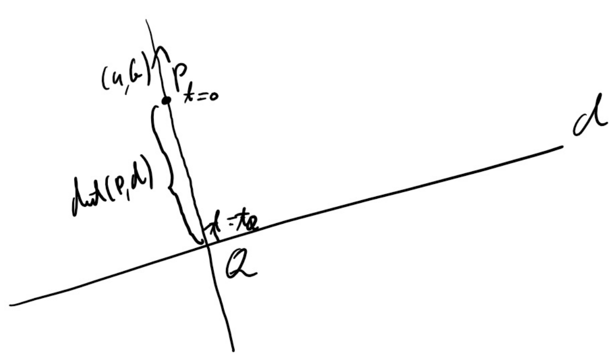
- Dacă $d_1 : P_1 + tv_1, d_2 : P_2 + tv_2$ (sau alte scrieri ale ecuaţiilor parametrice), atunci $d_1 \perp d_2 \iff \langle v_1, v_2 \rangle = 0$ (vectorii directori sunt ortogonali).
- Dacă $d_1 : P_1 + tv_1$ şi $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, atunci $d_1 \perp d_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $v_1 = \lambda(a_2, b_2)$ (vectorul director al lui d_1 este proporţional cu vector normal al lui d_2).
- Dacă $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, atunci $d_1 \perp d_2 \iff \langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = 0$ (vectorii normali sunt ortogonali).

Ca primă aplicaţie la cele de mai sus, demonstrăm formula distanţei de la un punct la o dreaptă:

Propoziția 3.2.4: *Fie $P = (x_P, y_P)$ şi $d : ax + by + c = 0$ în plan. Atunci*

$$dist(P, d) = \frac{|ax_p + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstraţie. Ecuaţia perpendicularei din P pe dreapta d este $d' : P + t(a, b), t \in \mathbb{R}$. Găsim pentru început t-ul corespunzător punctului de intersecţie al dreptelor d şi d', fie el Q:



Dacă $Q = (x_Q, y_Q)$, atunci $(x_Q, y_Q) = (x_P + t_Qa, yP + t_Qb)$ pentru un $t_Q \in \mathbb{R}$. $Q \in d$, deci

$$a(x_P + t_Qa) + b(y_P + t_Qb) + c = 0 \iff (a^2 + b^2)t_Q + ax_P + by_P + c = 0,$$

deci avem

$$t_Q = -\frac{ax_P + by_P + c}{a^2 + b^2}.$$

Dar

$$\begin{aligned} dist(P,d) &= dist(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|(x_P + t_Q a - x_P, yP + t_Q b - y_P)\| = \|t_Q(a,b)\| \\ &= \frac{|ax_P + by_P + c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_p + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

■

Definiția 3.2.5: Se numeşte *fascicul de drepte* mulţimea tuturor dreptelor ce trec printr-un anumit punct fixat.

Atenţie: este o definiţie de importanţă limitată care împarte numele cu una mult mai folosită în geometrie algebrică (şi nu numai), de fascicul (eng *sheaf*).

Propoziția 3.2.6: *(fasciculul determinat de două drepte) Fie d_1, d_2 drepte distincte, concurente în punctul P, $d_1 : a_1x + b_1y + c = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Atunci toate dreptele din fasciculul determinat de d_1, d_2 (al dreptelor ce trec prin P) au ecuaţia*

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

pentru nişte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

Demonstraţie. Este clar că orice dreaptă cu ecuaţia de acea formă trece prin P.

Pe de altă parte, pentru α, β date, dreapta cu ecuaţia de mai sus are direcţia normală $\alpha(a_1, b_1) + \beta(a_2, b_2)$. Cum (a_1, b_1) şi (a_2, b_2) nu sunt proporţionali (dreptele sunt concurente dar distincte), orice vector poate fi scris sub această formă (de ce?), deci putem obţine drepte cu orice vector normal *i.e.* orice dreaptă ce trece prin P. ■

Capitolul 4

Izometrii (ale planului)

Definiția 4.0.1: O funcţie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se numeşte *izometrie* dacă

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

(păstrează distanţele între puncte).

Scopul acestui capitol este să găsim forma generală a izometriilor planului, deci să le putem clasifica şi întelege.

Începem cu câteva proprietăţi imediate:

Observația 4.0.2: Orice izometrie este injectivă.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $f(x) = f(y)$ pentru nişte $x, y \in \mathbb{R}^2$, atunci

$$0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

deci $x = y$. ∎

Observația 4.0.3: Imaginea unei drepte printr-o izometrie este o dreaptă.

Demonstraţie. Exerciţiu! ∎

Nu este însă imediat clar dacă o izometrie este în mod necesar surjectivă! De fapt, este simplu de văzut că asta nici nu este adevărat dacă restrângem domeniul şi codomeniul: putem da cu uşurinţă exemple de izometrii ale semiplanului care nu sunt surjective.

Va reieşi din clasificarea pe care o vom demonstra pentru toate izometriile planului euclidian că, în particular, într-adevăr toate vor fi surjective. Reproducem mai jos însă şi o demonstraţie directă a acestui fapt:

Propoziția 4.0.4: *Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o izometrie. Atunci f este surjectivă.*

Demonstraţie. Putem presupune că $f(0) = 0$ (Daţi un argument!). Atunci dacă $x, y \in \mathbb{R}^2$ cu $f(x) = y$, avem $\|x\| = \|y\|$, deci este suficient să demonstrăm că $f_{|B_R(0)} : B_R(0) \to B_R(0)$ este surjectivă pentru toţi $R > 0$.

Fie deci $R > 0$ şi $B = \overline{B_R(0)}$. Fie $y \in B$. Presupunem că $y \notin f(B)$. Cum B compactă şi f continuă, $f(B)$ este compactă, în particular închisă, deci $dist(y, f(B)) = d > 0$.

Considerăm şirul $x_0 = y, x_1 = f(y)$ şi în general $x_{k+1} = f(x_k)$. Cum $x_k \in f(B)$ pentru orice $k \geq 1, dist(y, x_k) \geq d$ pentru orice $k \geq 1$. Cum f izometrie, rezultă că $dist(x_n, x_m) \geq d$ pentru orice $n, m \geq 0, n \neq m$. Dar $(x_n)_n \subset B$ compact, deci are un subşir convergent, o contradiţie. ∎

4.1 Clase de izometrii

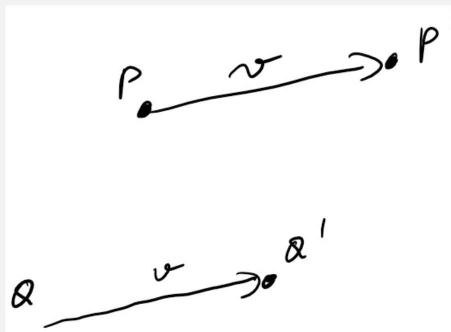
Începem însă cu câteva clase de exemple, care se vor dovedi utile şi pentru acest scop general.

1. Translaţii.

Definiția 4.1.1: Fie $v \in \mathcal{V}$ un vector în plan.
Aplicaţia

$$T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_v(P) = P + v,\ \forall P \in \mathbb{R}^2,$$

se numeşte *translaţia* de vector v.



În coordonate, dacă $v = (a, b)$, atunci

$$T_v(x, y) = (x + a, y + b).$$

Doar din definiţie, deducem câteva proprietăţi imediate ale translaţiilor:

Propoziția 4.1.2:

(i) *Dacă* $T_v(P) = P'$ *şi* $T_v(Q) = Q'$, *atunci* $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$.

(ii) T_v *este izometrie, pentru orice* $v \in \mathcal{V}$;

(iii) T_v *are puncte fixe* $\iff v = \overrightarrow{0}$, *caz în care* $T_v = id$.

(iv) $T_v \circ T_w = T_w \circ T_v = T_{v+w}$, *pentru orice* $v, w \in \mathcal{V}$;

(v) $(T_v)^{-1} = T_{-v}$;

(vi) *Dacă* $\mathcal{T}$ *este mulţimea tuturor translaţiilor, atunci* $(\mathcal{T}, \circ) \simeq (\mathcal{V}, +)$ *(izomorfism de grupuri comutative).*

Demonstraţie. (i) Evident, sunt laturi opuse ale unui paralelogram în care celelalte două laturi sunt egale cu vectorul v.

(ii) Fie P, Q puncte în plan, $P' = T_v(P), Q' = T_v(Q)$ imaginile lor prin translaţia de vector v. Atunci:

$$\begin{aligned} d(P', Q') &= \|\overrightarrow{P'Q'}\| = \|\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'}\| = \|\overrightarrow{OQ} + v - (\overrightarrow{OP} + v)\| = \|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\| \\ &= \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q). \end{aligned}$$

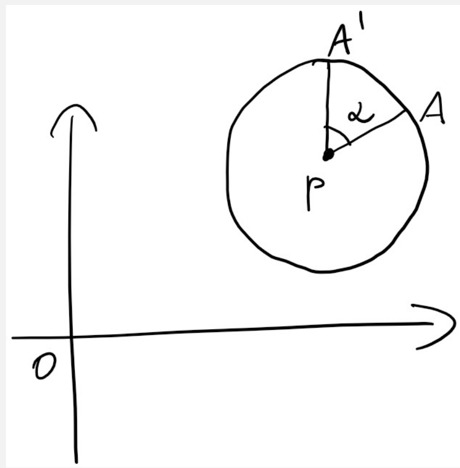
ceea ce trebuia demonstrat.

Altfel, din (i), avem direct $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$, deci $\|\overrightarrow{P'Q'}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$.
$(ii) - (v)$ Imediate din definiţie. ∎

2. Rotaţii.

Definiția 4.1.3: Fie P un punct în plan şi $\alpha \in \mathbb{R}$.
Se numeşte *rotaţia de centru P şi unghi α* aplicaţia

$$R_{P,\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ R_{P,\alpha}(A) = A' \text{ astfel încât } \|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PA'}\| \text{ şi } \angle(PA, PA') = \alpha.$$



Înainte de a scrie proprietăţile rotaţiilor, ne va ajuta să găsim formula în coordonate pentru o rotaţie în jurul originii O a sistemului de axe. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Cel mai simplu scriem formula rotaţie în coordonate polare: dacă $A = (r, \theta)$, atunci

$$R_{O,\alpha}(A) = R_{O,\alpha}(r, \theta) = (r, \theta + \alpha).$$

Echivalent, în coordonate carteziene,

$$\begin{aligned} R_{O,\alpha}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= (r\cos(\theta+\alpha), r\sin(\theta+\alpha)) \\ &= (r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta), r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)). \end{aligned}$$

Ca atare, obţinem scrierea în coordonate carteziene:

Dacă O este originea în $\mathbb{R}^2$, atunci

$$R_{O,\alpha}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matricea de mai sus se numeşte matricea rotaţiei de unghi α (în jurul originii).

Observația 4.1.4: Matricea $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ are proprietatea

$$A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I_2$$

şi $\det A = 1$.

Propoziția 4.1.5:

(i) *Dacă* $R_{P,\alpha}(A) = A'$ *şi* $R_{P,\alpha}(B) = B'$*, atunci, în coordonate,*

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AB};$$

(ii) $R_{P,\alpha} = T_{\overrightarrow{OP}} \circ R_{O,\alpha} \circ T_{-\overrightarrow{OP}} = T_{\overrightarrow{OP}} \circ R_{O,\alpha} \circ T^{-1}_{\overrightarrow{OP}},\ \forall P \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $R_{P,\alpha}$ *este izometrie,* $\forall P \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$*;*

(iv) *Dacă* $\alpha \neq 2k\pi$ *pentru un* $k \in \mathbb{Z}$*, atunci* $R_{P,\alpha}$ *are un singur punct fix (anume* P*). Dacă* $\alpha = 2k\pi$*, atunci* $R_{P,\alpha} = id$*.*

(v) $R^{-1}_{P,\alpha} = R_{P,-\alpha},\ \forall P \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$*;*

(vi) *Fie* $P \in \mathbb{R}^2$*,* $\alpha \neq 2k\pi$ *şi* $v \in \mathcal{V}$*. Atunci* $T_v \circ R_{P,\alpha}$ *şi* $R_{P,\alpha} \circ T_v$ *sunt rotaţii de unghi* α *(în jurul unui anumit punct din plan).*

(vii) *Fie* $P, Q \in \mathbb{R}^2$ *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Atunci* $R_{P,\alpha} \circ R_{Q,\beta}$ *este rotaţie, dacă* $\alpha + \beta \neq 2k\pi$ i.e. *dacă nu sunt unghiuri opuse şi translaţie dacă* $\alpha + \beta = 2k\pi$ *(pentru un anumit* $k \in \mathbb{Z}$*);*

Demonstraţie. (i) Fie $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$. Atunci

$$\begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

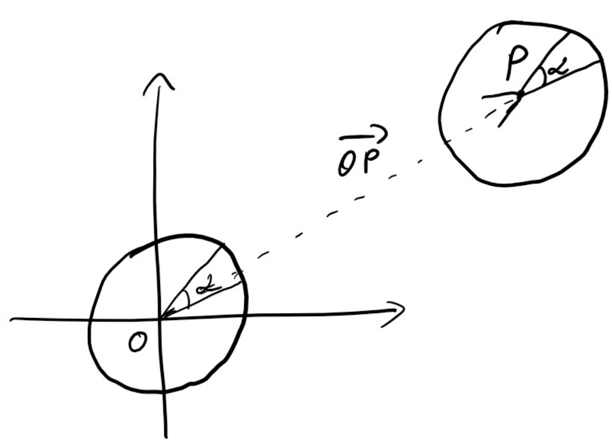
şi

$$\begin{pmatrix} x_{B'} \\ y_{B'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix},$$

deci

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} x_{B'} - x_{A'} \\ y_{B'} - y_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

(ii) Desenul este lămuritor:



(iii) Dacă $R_{P,\alpha}(A) = A'$ şi $R_{P,\beta}(B) = B'$, atunci $|A'B'| = |AB|$ dintr-un simplu caz de congruenţă latură-unghi-latură pentru $\triangle APB \sim \triangle A'PB'$.

Altfel, din $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AB}$, printr-un calcul (vedeţi şi **??**), vedem că $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

(iv) Evident.

(v) Evident.

(vi) În coordonate, dacă $P = (x_P, y_P)$ şi $v = (a, b)$, folosind (ii):

$$\begin{aligned} T_v \circ R_{P,\alpha}(x,y) &= \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_P\\ y - y_P\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P\\ y_P\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

unde $A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ şi pentru un anumit $\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}$ (care nu contează explicit).

Pentru a demonstra că funcţia este o rotaţie de unghi α, trebuie s-o scriem sub forma

$$T_v \circ R_{P,\alpha}(x,y) = A\begin{pmatrix} x - x_Q\\ y - y_Q\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Q\\ y_Q\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} + (I - A)\begin{pmatrix} x_Q\\ y_Q\end{pmatrix} \tag{4.1.2}$$

pentru un anumit Q. Comparând (4.1.1) şi (4.1.2), căutăm Q astfel încât

$$(I - A)\begin{pmatrix} x_Q\\ y_Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}.$$

Dar dacă vedem că $(I - A)$ e inversabilă, atunci avem

$$\begin{pmatrix} x_Q\\ y_Q\end{pmatrix} = (I - A)^{-1}\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$\det(I - A) = \begin{vmatrix} 1 - \cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & 1 - \cos\alpha\end{vmatrix} = 2(1 - \cos\alpha) = 0 \iff \alpha = 2k\pi,$$

ipoteză pe care am exclus-o.

Analog pentru $R_{P,\alpha} \circ T_v$.

(vii) Facem calculul în coordonate:

$$\begin{aligned} &(R_{P,\alpha} \circ R_{Q,\beta})(x,y) = R_{P,\alpha}\left(\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_Q\\ y - y_Q\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Q\\ y_Q\end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_Q\\ y - y_Q\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Q\\ y_Q\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P\\ y_P\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} x_P\\ y_P\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_Q\\ y - y_Q\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_Q - x_P\\ y_Q - y_P\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P\\ y_P\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

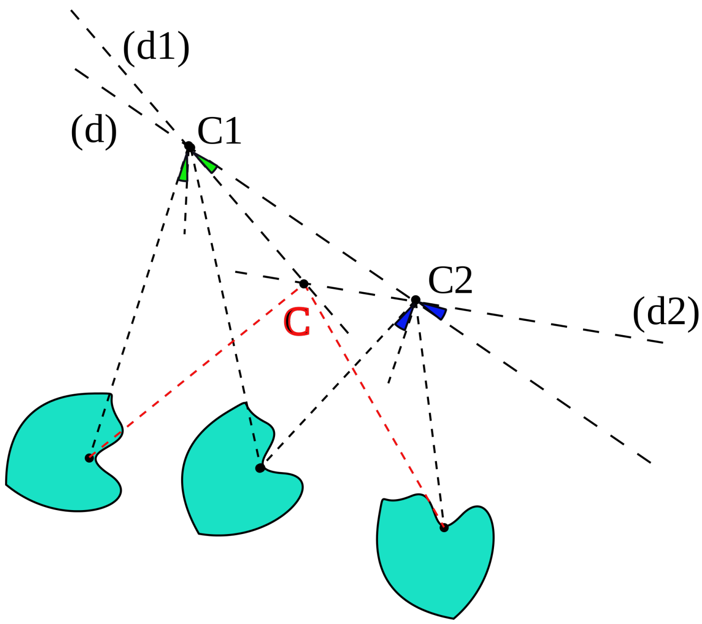
unde $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ nu contează explicit.

Dacă $\alpha + \beta \neq 2k\pi$, atunci suntem în situaţia de la (vi), deci $R_{P,\alpha} \circ R_{Q,\beta}$ este o rotaţie de unghi $\alpha + \beta$ (al cărei centru este neplăcut de calculat explicit).

Dacă $\alpha + \beta = 2k\pi$, atunci, revenind,

$$(R_{P,\alpha} \circ R_{Q,\beta})(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

aşadar este o translaţie de vector $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.



Compunere de rotaţii[1]

∎

Aplicaţie: Calcul de arii. Coliniaritate

Considerăm paralelogramul cu laturile determinate de vectorii v, w.

[1]Sursă: By No machine-readable author provided. HB assumed (based on copyright claims). - No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims)., CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1324351

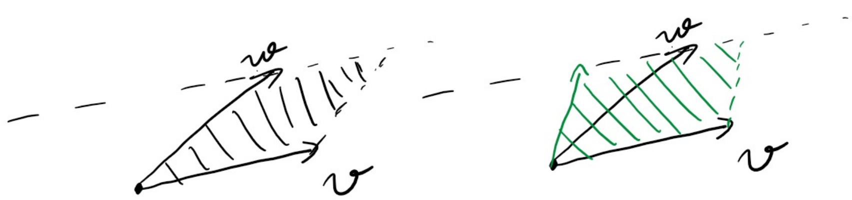
Definiția 4.1.6: Se numeşte *arie cu semn* a paralelogramului determinat de v şi w aria paralelogramului, cu semnul + dacă "v se roteşte spre w şi − dacă "w se roteşte spre v" (şi, fireşte, fiind nulă dacă aria este nulă).

Arii cu semn

Propoziția 4.1.7: *Aria cu semn a paralelogramului determinat de vectorii* $v = (a, b), w = (c, d)$ *este egală cu determinantul cu vectorii* v, w *pe coloane* i.e. $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Demonstraţie. Fie A aria cu semn a paralelogramului determinat de v, w şi A' determinantul având coloane vectorii v, w.

Obsevăm că atât A cât şi A' nu se modifică atunci când îl translatăm pe w pe direcţia lui v *i.e.* când îl înlocuim cu $w + \lambda v$.



Putem atunci presupune că $v \perp w$. În plus, A, fiind o arie, nu se modifică în urma unei rotaţii a vectorilor v şi w, în timp ce

$$\begin{vmatrix} R_{O,\alpha}(v) & R_{O,\alpha}(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = A',$$

deci putem presupune şi că v şi w sunt de-a lungul axelor de coordonate.

Mai mult, A şi A' se modifică la fel la înmulţirea unuia dintre v, w cu scalari, deci putem presupune că $\|v\| = \|w\| = 1$. În consecinţa, putem presupune $v = (1, 0), w = (0, \pm 1)$, caz în care este clar că $A = \pm 1 = A'$. ∎

Corolarul 4.1.8: *Fie* $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C)$ *puncte în plan. Atunci*

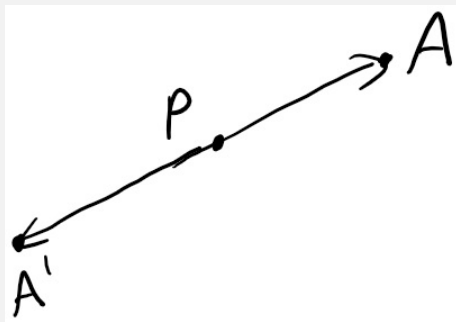
$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} \right|.$$

În particular, A, B, C *sunt coliniare dacă şi numai dacă* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0.$

3. Simetrii centrale.

Definiția 4.1.9: Fie P un punct în plan.
Se numeşte *simetria (centrală) faţă de punctul P* aplicaţia

$$S_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, S_P(A) = A' \text{ astfel încât } \overrightarrow{PA'} = -\overrightarrow{PA}.$$



De fapt, am întâlnit deja astfel de funcţii, de vreme ce simetria faţă de un punct este rotaţia de unghi π, $S_P = R_{P,\pi}$, de unde decurg imediat câteva proprietăţi elementare:

În coordonate, dacă $P = (x_P, y_P)$, atunci

$$S_P(x, y) = (2x_P - x, 2y_P - y).$$

Propoziția 4.1.10:

(i) *Dacă $S_P(A) = A'$ şi $S_P(B) = B'$, atunci $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$;*

(ii) *Pentru orice P, $S_P = T_{\overrightarrow{OP}} \circ S_O \circ T^{-1}_{\overrightarrow{OP}}$;*

(iii) *Pentru orice P, S_P este izometrie;*

(iv) *Pentru orice P, S_P are un singur punct fix (anume P);*

(v) *Pentru orice P, $S_P^{-1} = S_P$;*

(vi) *Pentru orice P, Q, $S_P \circ S_Q$ este o translaţie de vector $2\overrightarrow{PQ}$.*

Demonstrație. $(i) - (v)$ Decurg din Propoziția 4.1.5.

(vi) Faptul că este o translaţie decurge de asemenea din Propoziția 4.1.5. Aici putem însă face calculul explicit:

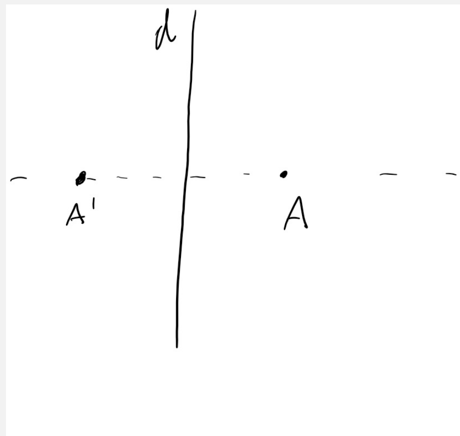
$$\begin{aligned}(S_P \circ S_Q)(x, y) &= S_P(2x_Q - x, 2y_Q - y)) = (2x_P - (2x_Q - x), 2y_P - (2y_Q - y)) \\ &= (x, y) + 2(x_P - x_Q, y_P - y_Q) = (x, y) + 2\overrightarrow{PQ}.\end{aligned}$$

■

4. Simetrii axiale.

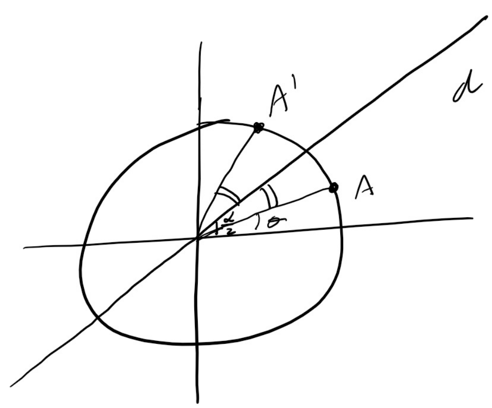
Definiția 4.1.11: Fie d o dreaptă în plan.
Se numeşte *simetria (axială) faţă de dreapta* d aplicaţia

$$S_d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, S_P(A) = A' \text{ astfel încât } A' \text{ este pe perpendiculara din } A \text{ pe } d,$$
$$dist(A,d) = dist(A',d) \text{ şi } A \neq A'.$$



Aşa cum a fost mai la îndemână să găsim ecuaţia în coordonate carteziene pentru o rotaţie centrată în origine, la fel este mai simplu de scris ecuaţia unei simetrii faţă de o dreaptă care trece prin origine:

Fie d o astfel de dreaptă şi $\frac{\alpha}{2}$ unghiul format de ea cu axa OX, $0 \leq \alpha < 2\pi$. Cum se vede în desenul de mai jos,



în coordonate polare, $S_d(r,\theta) = (r, \alpha - \theta)$. Echivalent, în coordonate carteziene,

$$\begin{aligned} S_d(r\cos\theta, r\sin\theta) &= (r\cos(\alpha-\theta), r\sin(\alpha-\theta)) \\ &= (r(cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta), r(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta)). \end{aligned}$$

Ca atare, obţinem scrierea în coordonate carteziene:

Dacă d este o dreaptă ce trece prin originea sistemului de axe în $\mathbb{R}^2$ şi $\angle(d, OX) = \frac{\alpha}{2}$, atunci

$$S_d(x, y) = S_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4.1.3}$$

Matricea de mai sus se numeşte şi matricea simetriei de unghi $\frac{\alpha}{2}$.

Observația 4.1.12: Matricea $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ are proprietatea

$$A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I_2$$

şi $\det A = -1$.

La fel ca la rotaţii, putem demonstra o listă de proprietăţi ale simetriilor axiale:

Propoziția 4.1.13:

(i) *Dacă $\angle(d, OX) = \frac{\alpha}{2}$, $S_d(A) = A'$ şi $S_d(B) = B'$, atunci, în coordonate,*

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AB};$$

(ii) *Dacă P e un punct pe dreapta d şi $\angle(d, OX) = \frac{\alpha}{2}$ atunci $S_d = T_{\overrightarrow{OP}} \circ S_\alpha \circ T_{-\overrightarrow{OP}} = T_{\overrightarrow{OP}} \circ S_\alpha \circ T^{-1}_{\overrightarrow{OP}}$;*

(iii) *S_d este izometrie, pentru orice d dreaptă în plan;*

(iv) *Punctele fixe ale izometriei S_d sunt exact cele de pe dreapta d;*

(v) *$S_d^{-1} = S_d$, pentru orice d dreaptă în plan;*

(vi) *Fie d dreaptă şi $v \in \mathcal{V}$. Atunci $T_v \circ S_d$ şi $S_d \circ T_v$* ***nu sunt în mod necesar*** *simetrii axiale;*

(vii) *Fie d, d' drepte în plan de unghi $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha'}{2}$ (cu axa OX). Atunci $S_d \circ S_{d'}$ este rotaţie, dacă $\alpha \neq \alpha'$* i.e. *dacă nu sunt drepte paralele şi translaţie dacă $\alpha = \alpha'$.*

Demonstraţie. Exerciţiu! ∎

4.2 Descompunerea unei izometrii ca o compunere de simetrii

Suntem gata să dăm o prima demonstraţie, geometrică, pentru forma generală a unei izometrii a planului.

Începem prin a observa că o izometrie a planului este perfect determinată de imaginea a trei puncte necoliniare:

Lema 4.2.1: *Fie A, B, C necoliniare şi $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ izometrii.*
Dacă $f(A) = g(A), f(B) = g(B)$ şi $f(C) = g(C)$, atunci $f = g$.

Demonstraţie. Demonstrăm o formulare echivalentă (de gândit: de ce sunt echivalente?): dacă h este izometrie şi $h(A) = A, h(B) = B$ şi $h(C) = C$, atunci $h = id_{\mathbb{R}^2}$.

Fie h o astfel de izometrie şi fie P un punct în plan, $h(P) = P'$. Vrem să demonstrăm că $P' = P$.

Dar $|P'A| = |h(P)h(A)| = |PA|$ pentru că h este izometrie şi $h(A) = A$; la fel $|P'B| = |PB|, |P'C| = |PC|$.

Aşadar P şi P' aparţin ambele unei intersecţii de trei cercuri:

$$\{P, P'\} \in \mathcal{C}(A, |PA|) \cap \mathcal{C}(B, |PB|) \cap \mathcal{C}(C, |PC|),$$

unde $\mathcal{C}(M, r)$ este cercul de centru M şi rază r.

Dar aceasta este o intersecţie de trei cercuri cu centre necoliniare, ca atare conţine (maxim) un punct! Rezultă că $P = P'$. ∎

Teorema 4.2.2: *Orice izometrie a planului este o compunere de (cel mult) trei simetrii axiale.*

Demonstraţie. Fie f o izometrie. Alegem un triunghi ABC şi fie $f(A) = A', f(B) = B'$ şi $f(C) = C'$.

Pentru două puncte $P, P' \in \mathbb{E}^2$, notăm cu $S_{[PP']}$ simetria față de dreapta mediană a celor două puncte. Prin convenție, dacă $P = P'$, $S_{[PP']} = id$.

Fie $f_1 = S_{[AA']}, f_2 = S_{[f_1(B)B']}$ și $f_3 = S_{[f_2 f_1(C)C']}$. Atunci se poate verifica ușor că $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ are proprietățile cerute. ∎

În final, punând totul laolaltă, avem toate ingredientele pentru

Teorema 4.2.3: ***(fundamentală a geometriei euclidiene, în plan)***
Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ izometrie.
Atunci există $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I_2$ şi $b \in \mathbb{R}^2$ astfel încât

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstraţie. Decurge din Teorema 4.2.2, Propoziția 4.1.13 şi Observația 4.1.12. ∎

Corolarul 4.2.4: *Orice izometrie a planului este surjectivă.*

4.3 Aplicaţii ortogonale

În cercetarea exemplelor particulare de izometrii, dar şi in forma generală a lor pe care am descoperit-o în Teorema 4.2.3, au apărut, poate aparent adăugate artificial, matricile A cu proprietatea $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I_2$. De fapt, acestea sunt fundamental legate de izometrii, iar studiul proprietăţilor lor ne va permite să deducem o altă demonstraţie pentru Teorema 4.2.3.

Începem prin a da câteva definiţii pe care le veţi recunoaşte (în curând) şi de la Algebră Liniară, dar rămânand în $\mathbb{R}^2$ şi strict atât cât ne ajută în ceea ce vrem să facem:

Definiția 4.3.1: O funcţie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se numeşte *aplicaţie liniară* dacă

$$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w), \ \forall v, w \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Observația 4.3.2: O aplicaţie liniară f duce subspaţii vectoriale (ale lui $\mathbb{R}^2$) în subspaţii vectoriale. În particular, $f(0) = 0$.

Exemplul 4.3.3: Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, funcţia

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ f_A(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

este aplicaţie liniară.

De fapt, acestea sunt toate aplicaţiile liniare:

Propoziția 4.3.4: *Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicaţie liniară.*

Atunci există o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $f = f_A$ i.e.

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

A se numeşte matricea lui f (în baza canonică).

Demonstraţie. Facem următorul calcul:

$$f(x, y) = f\left(x(1, 0) + y(0, 1)\right) = xf(1, 0) + yf(0, 1).$$

$f(1, 0)$ şi $f(0, 1) \in \mathbb{R}^2$, să zicem $f(1, 0) = (a, b), f(0, 1) = (c, d)$. Deci

$$f(x, y) = (ax + cy, bx + dy) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

alegem $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, adică matricea care are imaginile prin f ale lui $(1, 0)$ şi $(0, 1)$ pe coloane. ∎

Dăm acum un nume matricelor cu proprietatea specială pe care am enunţat-o mai sus:

Definiția 4.3.5: Mulţimea

$$O(2) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = I_2\}$$

este subgrup al grupului matricelor inversabile $GL_2(\mathbb{R})$ (verificaţi!) şi se numeşte *grupul matricelor ortogonale.*

Propoziția 4.3.6: *Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $f = f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicaţia liniară corespunzătoare. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) $\|Av\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{R}^2$ i.e. *f păstrează norma;*

(ii) $d(Av, Aw) = d(v, w), \forall v, w \in \mathbb{R}^2$ i.e. *f este izometrie;*

(iii) $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^2$ i.e. *f păstrează produsul scalar;*

(iv) ${}^tA \cdot A = I_2$ *i.e.* $A \in O(2)$*;*

(v) $A \cdot {}^tA = I_2$*;*

Demonstraţie. (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) $d(v, w) = \|v - w\| = \|A(v - w)\| = \|Av - Aw\| = d(Av, Aw)$.

(*ii*) $\Longrightarrow$ (*iii*) Folosim relația de polarizare

$$2\langle v, w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2 = d^2(v, 0) + d^2(w, 0) - d^2(v, w).$$

Cum A păstrează termenul drept, păstrează și termenul stâng. Observați că nu am folosit decât că $A(0) = 0$.

(*iii*) $\Longleftrightarrow$ (*iv*) Pentru orice $v, w \in \mathbb{R}^2$, avem

$$\langle v, w\rangle = \langle Av, Aw\rangle = \langle v, A^T \cdot Aw\rangle \iff \langle v, (A^T \cdot A - I_2)w\rangle = 0$$

și, din nedegenerarea produsului scalar (vedeţi Propoziția 1.2.7), obținem $A^T \cdot A - I_2 = 0$ și reciproc.

(*iv*) $\Longleftrightarrow$ (*v*) Evident.

(*iii*) $\Longrightarrow$ (*i*) Evident. ∎

Suntem gata să dăm o a doua demonstraţiei a Teoremei fundamentale a geometriei euclidiene:

Teorema 4.2.3. *Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ izometrie.*
Atunci există $A \in O(2)$ şi $b \in \mathbb{R}^2$ astfel încât

$$f(x,y) = f_A(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstraţie. Notăm $b = f(0)$. Atunci funcţia $g = T_{-b} \circ f$ *i.e.*

$$g(x,y) = f(x,y) - b$$

are proprietatea $g(0) = 0$ şi este tot izometrie.

Atunci, similar cu demonstraţia precedentă, pentru orice $v, w \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} 2\langle v, w\rangle &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2 = d^2(v,0) + d^2(w,0) - d^2(v,w) \\ &= d^2(g(v),0) + d^2(g(w),0) - d^2(g(v),g(w)) \\ &= \|g(v)\|^2 + \|g(w)\|^2 - \|g(v)-g(w)\|^2 \\ &= 2\langle g(v), g(w)\rangle, \end{aligned}$$

deci g păstrează produsul scalar.

Dacă demonstrăm că g este şi liniară, folosind Propoziția 4.3.6, demonstraţia este încheiată. Dar asta se vede din următorul calcul:

$$\begin{aligned} &\|g(\alpha v + \beta w) - \alpha g(v) - \beta g(w)\|^2 = \\ &= \langle g(\alpha v + \beta w) - \alpha g(v) - \beta g(w), g(\alpha v + \beta w) - \alpha g(v) - \beta g(w)\rangle \\ &= \langle g(\alpha v + \beta w), g(\alpha v + \beta w)\rangle - \alpha\langle g(\alpha v + \beta w), g(v)\rangle - \beta\langle g(\alpha v + \beta w), g(w)\rangle \\ &- \alpha\langle g(v), g(\alpha v + \beta w)\rangle + \alpha^2\langle g(v), g(v)\rangle + \alpha\beta\langle g(v), g(w)\rangle \\ &- \beta\langle g(w), g(\alpha v + \beta w)\rangle + \alpha\beta\langle g(w), g(v)\rangle + \beta^2\langle g(w), g(w)\rangle \\ &= \langle \alpha v + \beta w, \alpha v + \beta w\rangle - \alpha\langle \alpha v + \beta w, v\rangle - \beta\langle \alpha v + \beta w, w\rangle \\ &- \alpha\langle v, \alpha v + \beta w\rangle + \alpha^2\langle v, v\rangle + \alpha\beta\langle v, w\rangle \\ &- \beta\langle w, \alpha v + \beta w\rangle + \alpha\beta\langle w, v\rangle + \beta^2\langle w, w\rangle \\ &= \langle \alpha v + \beta w - \alpha v - \beta w, \alpha v + \beta w - \alpha v - \beta w\rangle = 0, \end{aligned}$$

deci $g(\alpha v + \beta w) = \alpha g(v) + \beta g(w)$ *i.e.* g este liniară.

Din Propoziția 4.3.4 şi Propoziția 4.3.6,

$$g(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

pentru o matrice $A \in O(2)$. Ca atare,

$$f(x,y) = g(x,y) + b = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b,$$

ceea ce doream să demonstrăm. ∎

O reformulare a Teorema 4.2.3 este: orice izometrie (a planului) este înmulţirea cu o matrice ortogonală, compusă cu o translaţie. Ca atare, pentru o *clasificare* a izometriilor, ne este suficient să întelegem translaţiile (destul de simplu de făcut, deja le-am listat proprietăţile) şi grupul $O(2)$, la care ne vom uita acum cu şi mai multă atenţie:

Fie $A \in O(2), A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. În primul rând, aplicând determinantul pe relaţie de definiţie ${}^tA \cdot A = I_2$, obţinem $\det A = \pm 1$. Ca atare,

$$O(2) = \{A \in O(2) \mid \det A = 1\} \cup \{A \in O(2) \mid \det A = -1\}.$$

În mod tradiţional, folosim notaţia $\{A \in O(2) \mid \det A = 1\} = SO(2)$; se numesc matricele *special ortogonale*.

Apoi, relaţia ${}^tA \cdot A = I_2$ în sine revine la

$$\begin{cases} a^2 & + & b^2 & = & 1 \\ ac & + & bd & = & 0 \\ c^2 & + & d^2 & = & 1 \end{cases}$$

Cum $a^2 + b^2 = 1$, avem $-1 \leq a, b \leq 1$, deci există $\theta \in \mathbb{R}$ (unic în $[0, 2\pi)$) astfel încât $a = \cos\theta, b = \sin\theta$ şi există $\varphi \in \mathbb{R}$ (unic în $[0, 2\pi)$) astfel încât $c = \sin\varphi, d = \cos\varphi$. Dar

$$0 = ac + bd = \cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi = \sin(\theta + \varphi),$$

deci $\theta + \varphi = 2k\pi$ sau $\theta + \varphi = (2k+1)\pi$.

Dacă $\theta + \varphi = 2k\pi$, atunci (putem considera) $\varphi = -\theta$, deci

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

aşadar A este matricea unei rotaţii de unghi θ şi $\det A = 1$.

Dacă $\theta + \varphi = 2(k+1)\pi$, atunci (putem considera) $\varphi = -\theta + \pi$, deci

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

aşadar A este matricea unei simetrii axiale faţă de o dreaptă de unghi $\frac{\theta}{2}$ şi $\det A = -1$.

Am demonstrat următoarea

Propoziția 4.3.7: *Fie $A \in O(2)$. Atunci:*

- *Dacă* $\det A = 1$, *atunci există un $\theta \in \mathbb{R}$ astfel încât*

  $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  i.e. *este matricea unei rotaţii de unghi θ.*

- *Dacă* $\det A = -1$, *atunci există un $\theta \in \mathbb{R}$ astfel încât*

  $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

  i.e. *este matricea unei simetrii axiale faţă de o dreaptă ce formează un unghi $\frac{\theta}{2}$ cu axa OX.*

Reformulând în termeni de izometrii, putem pune împreună Teorema 4.2.3 şi Propoziția 4.3.7 pentru a obţine clasificarea:

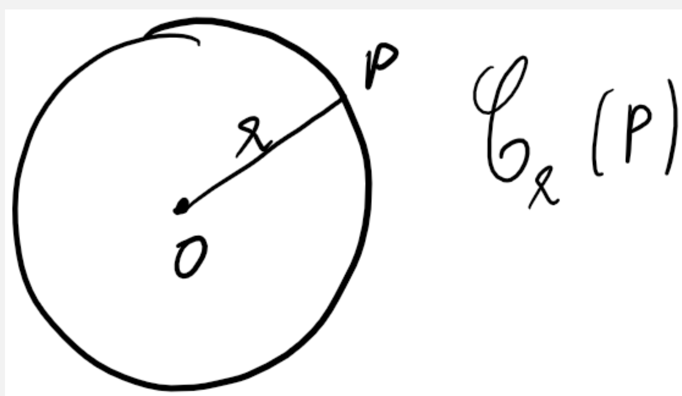
Propoziția 4.3.8: *Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o izometrie a planului. Atunci, până la o translaţie, f este fie o rotaţie, fie o simetrie axială.*

Capitolul 5

Cercul

Pentru a putea întelege alte tipuri de transformări geometrice ale planului care nu sunt izometrii, anume inversiunile circulare, rezervăm acum un scurt capitol dedicat proprietăţilor de bază ale cercurilor.

Definiția 5.0.1: Un *cerc* este locul geometric al tuturor punctelor egal depărtate de un punct fixat (numit *centrul cercului*). Distanţa de la oricare din ele la acest punct se numeşte *raza cercului*.
Pentru un $o \in \mathbb{R}^2$ şi un număr $r > 0$, notăm cu $\mathcal{C}_r(O)$ cercul de centru O şi rază r.



Din chiar definiţie, obţinem imediat

Ecuaţia implicită a unui cerc Dacă $O = (x_0, y_0)$, atunci

$$\mathcal{C}_r(O) = \{A \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, O) = r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}.$$

Observația 5.0.2: Fiind dată o ecuaţie de tipul $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, mulţimea soluţiilor sale este un cerc, un punct sau mulţimea vidă, după cum putem vedea formând pătrate:

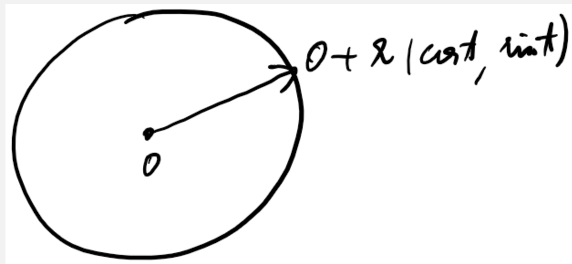
$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \iff (x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Aşadar, $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ este ecuaţia unui cerc dacă şi numai dacă $a^2 + b^2 - c > 0$, caz în care este cercul de centru $(-a, -b)$ şi de rază $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Tot doar din definiţia funcţiilor trigonometrice, acestea ne oferă

Parametrizarea cercului

$$\mathcal{C}_r(O) = \{O + r(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, 2\pi)\} = \{(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) \mid t \in [0, 2\pi)\}.$$



Condiţii de conciclicitate. Ne propunem acum să găsim o condiţie algebrică pentru ca 4 puncte A, B, C, D să aparţină aceluiaşi cerc. Fie cercul $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C} &\iff x_A^2 + y_A^2 + ax_A + by_A + c = 0 \\ B \in \mathcal{C} &\iff x_B^2 + y_B^2 + ax_B + by_B + c = 0 \\ C \in \mathcal{C} &\iff x_C^2 + y_C^2 + ax_C + by_C + c = 0 \\ D \in \mathcal{C} &\iff x_D^2 + y_D^2 + ax_D + by_D + c = 0 \end{aligned}$$

deci sistemul de ecuaţii liniare în variabilele a, b, c

$$\begin{cases} x_A a + y_A b + c = -(x_A^2 + y_A^2) \\ x_B a + y_B b + c = -(x_B^2 + y_B^2) \\ x_C a + y_C b + c = -(x_C^2 + y_C^2) \\ x_D a + y_D b + c = -(x_D^2 + y_D^2) \end{cases}$$

este compatibil. Am demonstrat

Propoziția 5.0.3: *Fie punctele A, B, C, D în plan. Atunci*

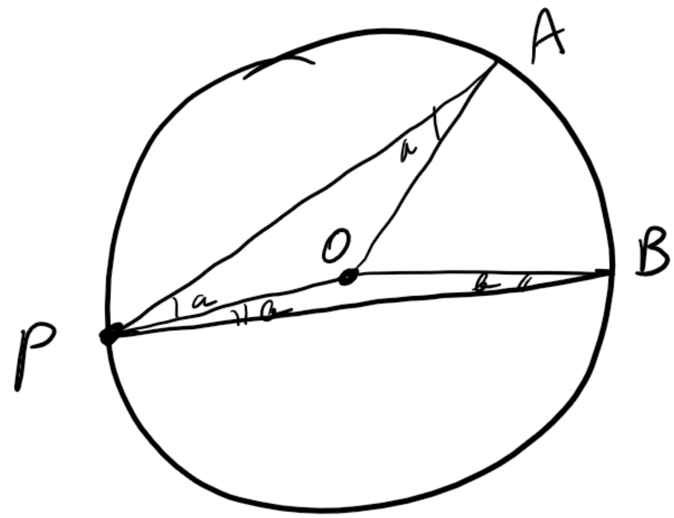
$$A, B, C, D \text{ conciclice} \iff \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 \\ 1 & x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 \end{vmatrix} = 0.$$

5.1 Puterea unui punct faţă de un cerc

Înainte de a putea da definiţia anunţată în titlu, reamintim un fapt cu care aproape sigur v-aţi întâlnit şi în liceu:

Lema 5.1.1: *Fie punctele A şi B pe un cerc de centru O, fie el $\mathcal{C}$. Atunci, pentru orice $P \in \mathcal{C}$ care nu se află pe arcul de cerc $\widehat{AB}$, $2\angle APB = \angle AOB$, iar pentru orice $Q \in \widehat{AB}$, $\angle AQB = \pi - \angle APB$. În particular, măsura unui unghi cu vârful pe cerc care subîntinde arcul $\widehat{AB}$ nu depinde decât de poziţia vârfului pe sau în afara arcului $\widehat{AB}$.*

Demonstraţie. Demonstrăm pentru $P \notin \widehat{AB}$, cazul $Q \in \widehat{AB}$ se rezolvă analog.



Observăm că $|OP| = |OA|, |OP| = |OB|$, deci triunghiurile OPA, OPB sunt isoscele. Dacă notăm $\angle OPA = a, \angle OPB = b$, atunci $\angle POA = \pi - 2a, \angle POB = \pi - 2b$. Presupunând că O este în interiorul unghiului APB, atunci $\angle APB = a + b$ şi $\angle AOB = 2\pi - \angle POA - \angle POB = 2\pi - (\pi - 2a) - (\pi - 2b) = 2a + 2b = 2\angle APB$. Dacă O este în exteriorul unghiului APB, atunci, de exemplu, $\angle APB = a - b$ şi $\angle AOB = \angle POB - \angle POA = \pi - 2b - (\pi - 2a) = 2a - 2b = 2\angle APB$. ∎

Lema 5.1.2: *În particular, dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci unghiurile opuse sunt complementare.*

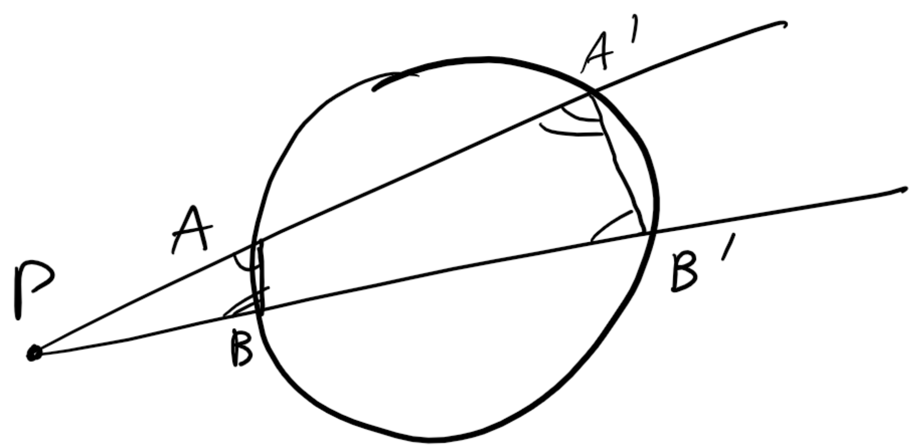
Reciproc, dacă patrulaterul $ABCD$ are două unghiuri opuse complementare: $\angle BAD + \angle BCD = \pi$, atunci $ABCD$ este inscriptibil.

Demonstraţie. Exerciţiu! ∎

Acum este imediată

Observația 5.1.3: Fie un cerc $\mathcal{C}$, un punct P în plan şi dreapta $d \ni P$. Presupunem că $d \cap \mathcal{C} = \{A, A'\}$ (eventual $A = A'$). Atunci valoarea $\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'} \rangle$ nu depinde de alegerea dreptei d.

Demonstraţie. Considerăm două drepte, ca în desenul de mai jos:

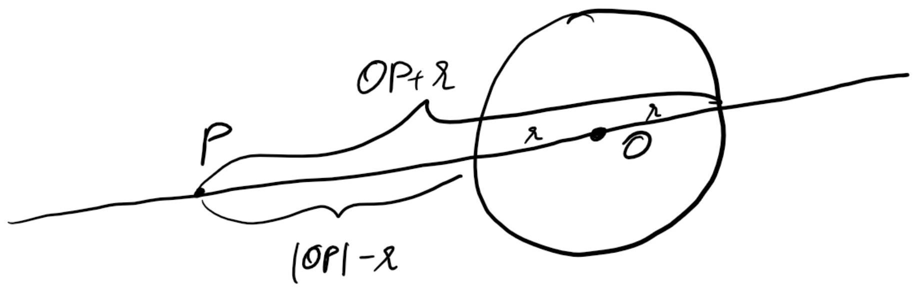


Atunci $\angle PA'B'$ şi $\angle ABB'$ subîntind aceeaşi coardă (din părţi opuse), deci sunt complementare, ca atare $\angle PBA = \angle PA'B'$. La fel, $\angle PAB = \angle PB'A'$. Obţinem $\triangle PAB \sim \triangle PB'A'$, deci $\frac{|PA|}{|PB'|} = \frac{|PB|}{|PA'|} \iff |PA| \cdot |PA'| = |PB| \cdot |PB'|$, ceea ce voiam să demonstrăm. ∎

Exerciţiul 5.1.4: Completaţi demonstraţia pentru cazul în care P este în interiorul cercului.

Definiţia 5.1.5: Pentru un punct P şi un cerc $\mathcal{C}$, valoarea descrisă mai sus se numeşte *puterea punctului P faţă de cercul $\mathcal{C}$* şi se notează $\rho_{\mathcal{C}}(P) \in \mathbb{R}$.

Formula puterii unui punct faţă de un cerc. Fie P un punct în plan şi cercul $\mathcal{C}_r(O)$ de ecuaţie $(x - x_0)^2 + (y - y_0))^2 = r^2 \iff x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (pentru a, b, c care se pot calcula în funcţie de P şi r). Alegem dreapta $d = OP$ (dacă $P = O$, alegem d o dreaptă arbitrară prin O).



Atunci, prin definiţie,

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{C}}(P) &= \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'} \rangle = (|OP| - r)\,(|OP| + r) = |OP|^2 - r^2 \\ &= (x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2 - r^2.\end{aligned}$$

Am demonstrat:

$$\rho_{\mathcal{C}}(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0))^2 - r^2 = x^2 + y^2 + ax + by + c \tag{5.1.1}$$

adică evaluarea punctului în formula definitorie a cercului. Se reconfirmă şi

$$\rho_{\mathcal{C}}(P) \begin{cases} > & 0, \quad \text{dacă} \quad P \in \mathrm{Ext}(\mathcal{C}) \\ = & 0, \quad \text{dacă} \quad P \in \mathcal{C} \\ < & 0, \quad \text{dacă} \quad P \in \mathrm{Int}(\mathcal{C}) \end{cases}.$$

Definiţia 5.1.6: Fie două cercuri $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ care nu sunt concentrice.
Se numeşte *axa radicală* a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ locul geometric al punctelor care au putere egală faţă de $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$,

$$d_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \rho_{\mathcal{C}_1}(P) = \rho_{\mathcal{C}_2}(P)\}.$$

Propoziţia 5.1.7: *Axa radicală a $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_{r_1}(O_1)$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{r_2}(O_2)$ este o dreaptă perpendiculară pe O_1O_2.*

Demonstraţie. Dăm o demonstraţie algebrică: din (5.1.1), dacă

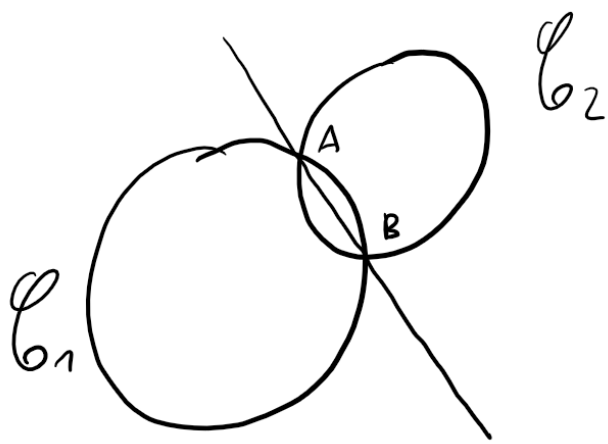
$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0,$$
$$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0,$$

atunci, $O_1 = (-a_1, -b_1)$, $O_2 = (-a_2, -b_2)$ şi prin definiţie,

$$d_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2} : x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2$$
$$\iff d_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2} : 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0,$$

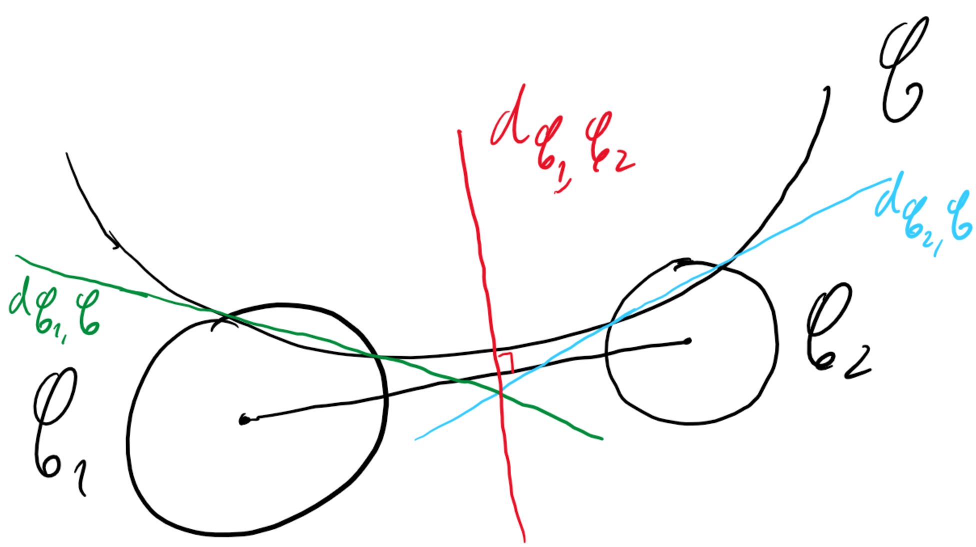
nimic altceva decât ecuaţia unei drepte de vector normal $(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$, aşadar perpendiculară pe O_1O_2. ∎

Construcţia geometrică (cu rigla şi compasul) a axei radicale: În cazul în care $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B\}$, atunci $\rho_{\mathcal{C}_1}(A) = \rho_{\mathcal{C}_2}(A) = \rho_{\mathcal{C}_1}(B) = \rho_{\mathcal{C}_2}(B) = 0$ şi este limpede că AB este chiar axa radicală.



Dacă însă $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ nu este format din două puncte, trasăm un alt cerc $\mathcal{C}$ care le intersectează în câte două puncte şi astfel încât cele trei centre nu sunt coliniare.

Putem atunci trasa d_1, axa radicală a lui $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_1$ şi d_2, axa radicală a lui $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_2$, iar dacă notăm $\{P\} = d_1 \cap d_2$, atunci $P \in d_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2}$. În plus, $d_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2}$ este perpendiculară pe dreapta ce uneşte centrele cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, aşadar o putem construi.

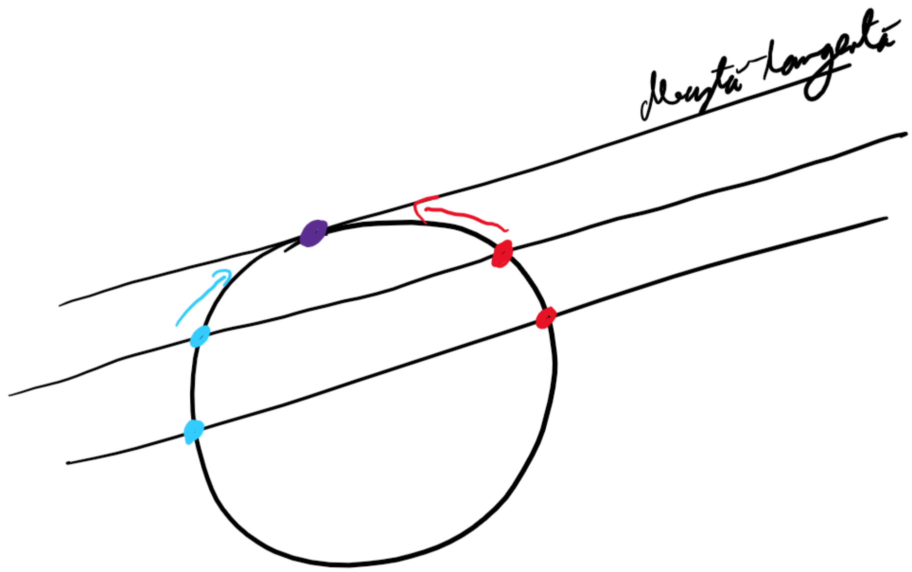


5.2 Drepte tangente la cerc

Definiția 5.2.1: Se numeşte tangentă la cercul $\mathcal{C}$ o dreaptă care intersectează $\mathcal{C}$ într-un singur punct.

Observația 5.2.2: Dacă AB este o dreaptă si $B \in \mathcal{C}_r(O)$, atunci AB este tangentă la cerc dacă şi numai dacă $\angle OBA = \frac{\pi}{2}$.

De fapt, de vreme ce, generic vorbind, o intersecţie nevidă a unei drepte cu un cerc conţine două puncte, este poate mai corect să spunem că o tangentă intersectează cercul într-un *punct dublu*.



Acest fapt se reflectă foarte clar şi într-o idee foarte simplă şi universal utilă în determinarea ecuaţiei unei drepte tangente:

Observația 5.2.3: Fie cercul $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ şi d o dreaptă de ecuaţie parametrică $d : P + t\overrightarrow{u} = (x_P, y_P) + t(u_1, u_2)$. d este tangentă la $\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă ecuaţia de grad 2 în t

$$(x_P + tu_1)^2 + (y_P + tu_2)^2 + 2a(x_P + tu_1) + 2b(y_P + tu_2) + c = 0$$

are exact o rădăcină (dublă) *i.e.* dacă şi numai dacă $\Delta = 0$.

Deşi ideea de mai sus este suficient de ţinut minte pentru a determina dreapta tangentă într-un punct al cercului, dreptele tangente dintr-un punct exterior la un cerc dat şi dreptele tangente de o direcţie dată, putem merge mai departe cu calculul:

$$\begin{aligned} & (x_P + tu_1)^2 + (y_P + tu_2)^2 + 2a(x_P + tu_1) + 2b(y_P + tu_2) + c = 0 \\ \iff\ & x_P^2 + y_P^2 + 2ax_P + 2by_P + c + 2t(x_P u_1 + y_P u_2) + 2t(au_1 + bu_2) + t^2(u_1^2 + u_2^2) = 0 \\ \iff\ & \rho_{\mathcal{C}}(P) + 2t\langle (x_P + a, y_P + b), (u_1, u_2)\rangle + t^2(u_1^2 + u_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Amintindu-ne şi că $O = (-a, -b)$ este centrul cercului, ultima ecuaţie devine

$$\rho_{\mathcal{C}}(P) + 2t\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{u}\rangle + t^2\|\overrightarrow{u}\|^2 = 0.$$

Aşadar, cerând $\Delta = 0$, obţinem

$$d \text{ tangentă la } \mathcal{C} \iff \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{u} \rangle^2 = \rho_{\mathcal{C}}(P) \cdot \|\overrightarrow{u}\|^2.$$

Dacă presupunem $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, condiţia se reduce la

$$\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{u} \rangle^2 = \rho_{\mathcal{C}}(P).$$

Exercițiul 5.2.4: Regăsiţi această formulă printr-o interpretare geometrică. Particularizaţi pentru $P \in \mathcal{C}$.

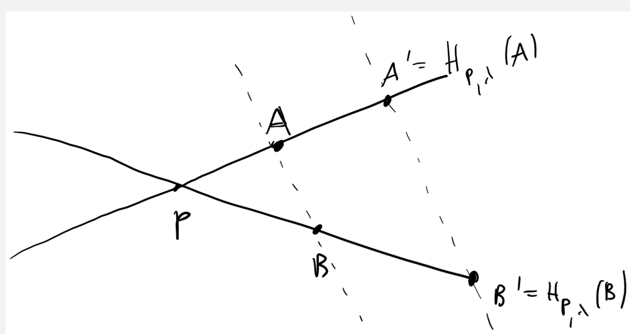
Capitolul 6

Alte transformări ale planului: omotetii şi inversiuni

6.1 Omotetii

Definiția 6.1.1: Fie $P \in \mathbb{R}^2$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$.
Se numeşte omotetia de centru P şi putere (raport) λ aplicaţia

$$H_{P,\lambda} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, H_{P,\lambda}(A) = A' \text{ astfel încât } \overrightarrow{PA'} = \lambda \overrightarrow{PA}.$$



Observaţie: din definiţia de mai sus, vedem că $H_{P,\lambda}(P) = P$ pentru orice λ şi $H_{P,0}(A) = P$ pentru orice A.

Cum suntem obişnuiţi deja, este mai simplu să scriem ecuaţia în coordonate a unei omotetii centrate în $O = (0,0)$, unde formula este evidentă:

Dacă O este originea în $\mathbb{R}^2$, atunci

$$H_{O,\lambda}(x,y) = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Folosind iarăsi formula de conjugare

$$H_{P,\lambda} = T_{\overrightarrow{OP}} \circ H_{O,\lambda} \circ T^{-1}_{\overrightarrow{OP}},$$

obţinem formula în coordonate a unei omotetii oarecare:

$$H_{P,\lambda}(x,y) = \lambda \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + (1-\lambda)x_P \\ \lambda y + (1-\lambda)y_P \end{pmatrix}.$$

Propoziția 6.1.2:

(i) *Pentru orice P şi $\lambda \neq 0$, $H_{P,\lambda}$ este bijectivă şi $H_{P,\lambda}^{-1} = H_{P,\frac{1}{\lambda}}$;*

(ii) *Dacă P, A, B sunt puncte în plan şi $A' = H_{P,\lambda}(A), B' = H_{P,\lambda}(B)$, atunci $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$;*

(iii) *În particular, o omotetie (**la fel ca o translaţie**) duce o dreaptă într-o dreaptă paralelă;*

(iv) *Pentru un punct P, $H_{P,\lambda}$ este izometrie dacă şi numai dacă $\lambda = \pm 1$;*

(v) *Omotetiile au un singur punct fix (anume centrul);*

(vi) *Pentru un punct P, $H_{P,\lambda_1} \circ H_{P,\lambda_2} = H_{P,\lambda_1 \cdot \lambda_2}$;*

(vii) *În consecinţă, mulţimea omotetiilor cu centru fixat şi putere nenulă are o structură de grup izomorf cu mulţimea numerelor reale nenule (cu înmulţirea):*

$$\mathcal{H}_P = (\{H_{P,\lambda} \mid \lambda \neq 0\}, \circ) \simeq (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot);$$

(viii) *O compunere de omotetii cu centre diferite este, în general, tot o omotetie: pentru $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ şi $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $H_{P_1,\lambda_1} \circ H_{P_2,\lambda_2} = H_{P,\lambda_1 \cdot \lambda_2}$ pentru un punct P pe dreapta P_1P_2, dacă $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ şi este o translaţie dacă $\lambda_1\lambda_2 = 1$.*

Demonstraţie. Exerciţiu! ∎

Facem acum o lemă ajutătoare, a cărei semnificaţie o veţi putea întelege mai bine atunci când veţi studia geometria proiectivă:

Lema 6.1.3: *Fie d dreaptă în plan. Atunci există o funcţie bijectivă $f : \mathbb{R}^2 \setminus d \to \mathbb{R}^2 \setminus d$ care păstrează coliniaritatea punctelor (A, B, C sunt coliniare $\iff$ $f(A), f(B), f(C)$ sunt coliniare) şi care are proprietatea:*

$$\begin{aligned} P_n \to d &\implies \|f(P_n)\| \to \infty, \\ \|P_n\| \to \infty &\implies f(P_n) \to d. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Printr-o translaţie şi o rotaţie corespunzătoare (care păstrează relaţia de coliniaritate), putem presupune că d este axa OY.

Apoi luăm

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus d = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right).$$

Dintre condiţiile cerute, singura care nu este evidentă este că f păstrează coliniaritatea. Fie $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C) \notin d$. Atunci

$$A, B, C \text{ coliniare} \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0,$$

$$f(A), f(B), f(C) \text{ coliniare} \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x_A} & \frac{1}{x_B} & \frac{1}{x_C} \\ \frac{y_A}{x_A} & \frac{y_B}{x_B} & \frac{y_C}{x_C} \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{1}{x_A x_B x_C} \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ 1 & 1 & 1 \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0,$$

de unde e clar că avem de-a face cu condiţii echivalente. ∎

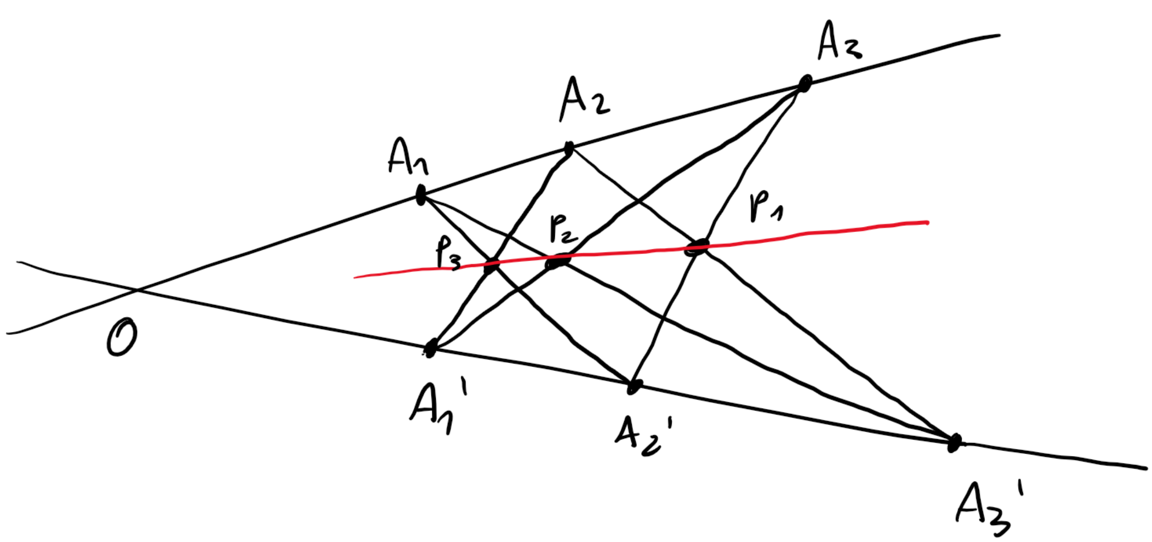
Observația 6.1.4: În contextul de mai sus, putem spune că f este o transformare a planului, împreună cu "dreapta de la infinit", care interschimbă dreapta d cu această "dreaptă de la infinit". De vreme ce f păstrează coliniaritatea, dreptele sunt duse în drepte.

În particular, dacă dreptele d_1 şi d_2 se intersectează într-un punct de pe d, sunt duse în drepte paralele.

Teoria omotetiilor are o legătură puternică cu o teoremă al cărei cadru natural este de fapt în geometria proiectivă:

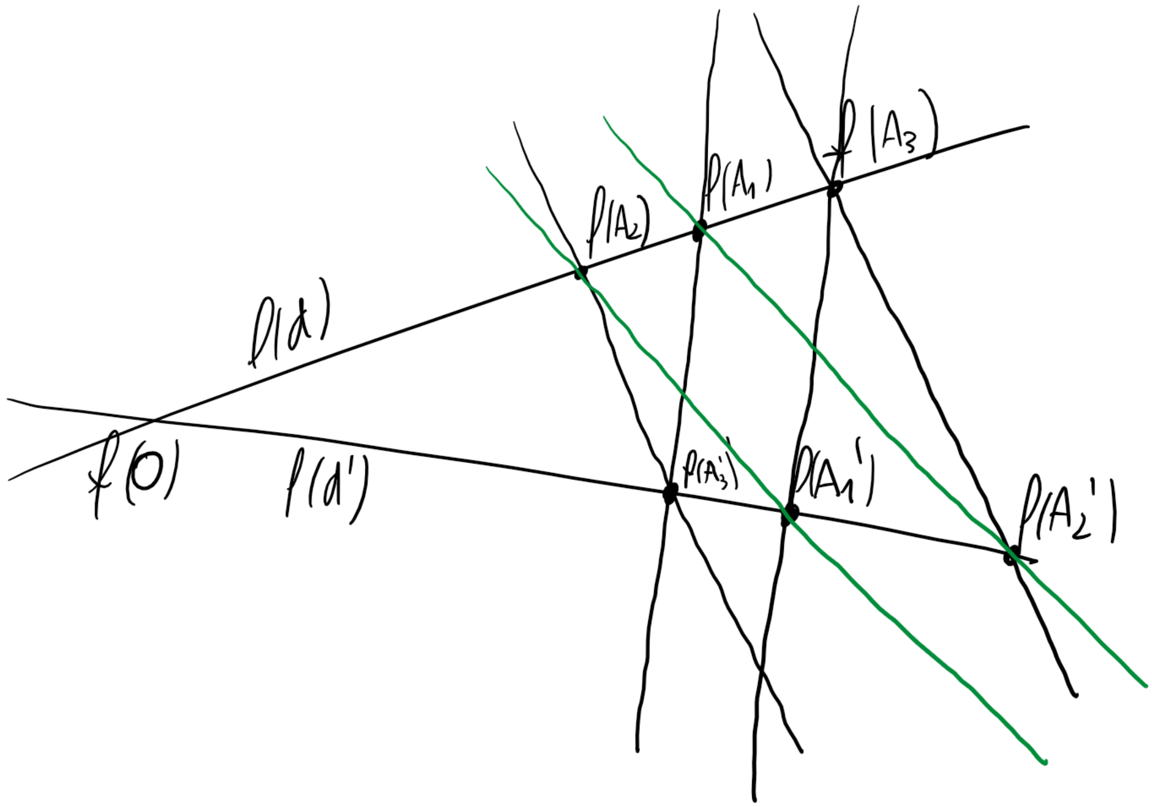
Teorema 6.1.5: *(Pappus) Fie dreptele d, d', $d \cap d' = \{O\}$ şi $A_1, A_2, A_3 \in d$, $A'_1, A'_2, A'_3 \in d'$ puncte distincte între ele şi distincte de O.*

Notăm (implicit, presupunem că există) $P_1 = A_2A'_3 \cap A_3A'_2$, $P_2 = A_1A'_3 \cap A_3A'_1$ şi $P_3 = A_1A'_2 \cap A_2A'_1$. Atunci P_1, P_2, P_3 sunt coliniare.



Demonstraţie. Folosim Lema 6.1.3 pentru a transforma condiţiile de coliniaritate în condiţii de paralelism: fie f funcţia dată de Lema 6.1.3 pentru dreapta P_1P_2. Vrem să aratăm că $P_3 \in P_1P_2$ *i.e.* că P_3 "e trimis la infinit" prin f.

Aplicând funcţia f figurii de mai sus, ajungem în situaţia de mai jos:



Am presupus mai sus că $O \notin P_1P_2$. Cum $P_1 = A_2A_3' \cap A_3A_2' \in P_1P_2$, $P_2 = A_1A_3' \cap A_3A_1' \in P_1P_2$, avem, conform Observaţia 6.1.4, $f(A_2)f(A_3') \parallel f(A_3)f(A_2')$ şi $f(A_1)f(A_3') \parallel f(A_3)f(A_1')$. Vrem $P_3 = A_1A_2' \cap A_2A_1' \in P_1P_2 \iff f(A_1)f(A_2') \parallel f(A_2)f(A_1')$.

Cum $f(O), f(A_2)$ şi $f(A_3)$ sunt coliniare, există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $H_{O,\lambda}(A_2) = A_3$. Din $f(A_2)f(A_3') \parallel f(A_3)f(A_2')$, avem $H_{O,\lambda}(A_3') = A_2'$.

Similar, există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât $H_{O,\mu}(A_3) = A_1$. Din $f(A_1)f(A_3') \parallel f(A_3)f(A_1')$, avem $H_{O,\mu}(A_1') = A_3'$.

Ca atare:

$$H_{O,\mu\lambda}(f(A_2)) = (H_{O,\mu} \circ H_{O,\lambda})(f(A_2)) = f(A_1),$$
$$H_{O,\lambda\mu}(f(A_1')) = (H_{O,\lambda} \circ H_{O,\mu})(f(A_1')) = f(A_2'),$$

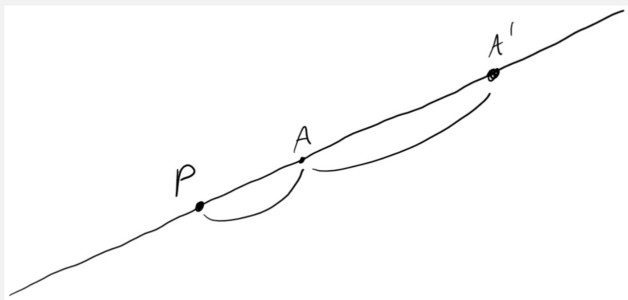
deci, cum $\lambda\mu = \mu\lambda$, $f(A_1)f(A_2') \parallel f(A_2)f(A_1')$, ceea ce voiam să demonstrăm. ∎

Temă: Faceţi demonstraţia pentru cazul în care $O \in P_1P_2$.

6.2 Inversiuni (circulare)

Definiția 6.2.1: Fie $P \in \mathbb{R}^2$ şi $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Se numeşte inversiunea de centru P şi putere (raport) k aplicaţia

$$\mathcal{I}_{P,k} : \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}, \mathcal{I}_{P,k}(A) = A' \text{ astfel încât } P, A, A' \text{ coliniare}$$
$$\text{şi } \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'} \rangle = k.$$



Observaţie: Valoarea $\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'} \rangle$ este de fapt $|PA| \cdot |PA'|$ considerat cu semn (negativ dacă P este între A şi A', pozitiv altfel).

Din definiţia de mai sus, e clar că $\mathcal{I}_{P,k}$ nu poate fi prelungită la o funcţie continuă pe întreg planul.

O astfel de inversiune poate fi definită şi de un cerc (de unde numele): pentru cercul $\mathcal{C}_r(P)$ de centru P şi rază r, funcţia

$$A \mapsto A' \text{ astfel încât } P, A, A' \text{ coliniare şi } |PA| = \frac{r^2}{|PA'|}$$

este exact $\mathcal{I}_{P,r^2}$. Cercul $\mathcal{C}_r(P)$ se numeşte *cercul de inversiune*.

Observația 6.2.2: Avem

$$\mathcal{I}_{P,k} = H_{P,k} \circ \mathcal{I}_{P,1},$$

deci este suficient să studiem inversiunile de putere 1 (sau faţă de cercuri de rază 1). Notăm prescurtat $\mathcal{I}_{P,1} = \mathcal{I}_P$.

Cum suntem obişnuiţi deja, este mai simplu să scriem ecuaţia în coordonate a unei inversiuni centrate în $O = (0, 0)$, unde formula este evidentă:

Dacă O este originea în $\mathbb{R}^2$, atunci

$$\mathcal{I}_O(x, y) = \frac{1}{\|(x, y)\|^2}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right). \tag{6.2.1}$$

Folosind iarăşi formula de conjugare

$$\mathcal{I}_P = T_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{I}_O \circ T^{-1}_{\overrightarrow{OP}},$$

putem obţine formula în coordonate a unei inversiuni oarecare, care nu este însă foarte comod de scris.

Propoziția 6.2.3: *Fie P un punct în plan.*

(i) $\mathcal{I}_P$ *este bijectivă şi* $\mathcal{I}_P^{-1} = \mathcal{I}_P$;

(ii) Punctele fixe ale unei inversiuni sunt exact cele de pe cercul de inversiune: $\mathcal{I}_{P,r^2}(A) = A \iff A \in \mathcal{C}_r(P)$;

(iii) O inversiune invariază o dreaptă ce trece prin centru: Dacă $P \in d$, *atunci* $\mathcal{I}_P(d \setminus \{P\}) = d \setminus \{P\}$;

(iv) Dacă $\mathcal{I}_P(A) = A'$ *şi* $\mathcal{I}_P(B) = B'$, *atunci* $\triangle PAB \sim \triangle PB'A'$.

(v) Imaginea unui cerc ce trece prin centrul P al unei inversiuni este o dreaptă paralelă cu tangenta în P la acel cerc;

(vi) Imaginea unui cerc care nu trece prin centrul P este un alt cerc (care nu trece prin P);

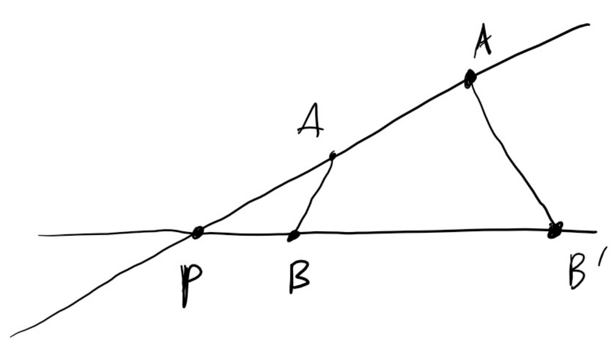
(vii) Pentru orice două cercuri care nu se intersectează, există o inversiune care le transformă în cercuri concentrice.

Demonstraţie. (i) Evident.

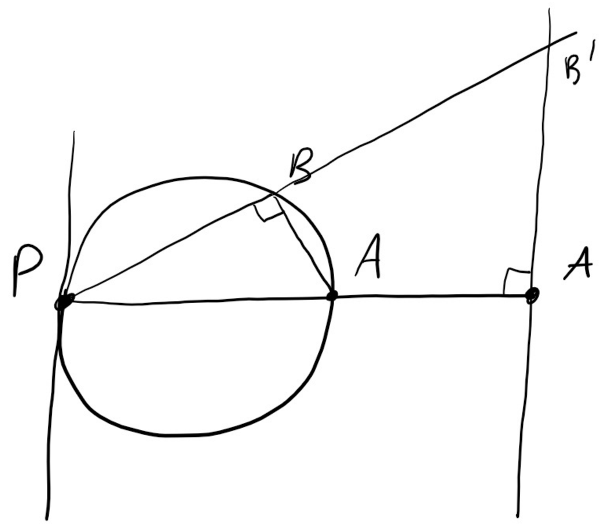
(ii) $\mathcal{I}_{P,r^2}(A) = A \iff |PA|^2 = r^2 \iff A \in \mathcal{C}_r(P)$.

(iii) Evident.

(iv) Avem $|PA| \cdot |PA'| = k$ şi $|PB| \cdot |PB'| = k$, deci $\frac{|PA|}{|PB'|} = \frac{|PB|}{|PA'|}$, de unde $\triangle PAB \sim \triangle PB'A'$.



(v) Fie A diametral opus faţă de P pe cercul $\mathcal{C}$ dat şi $B \in \mathcal{C}$.



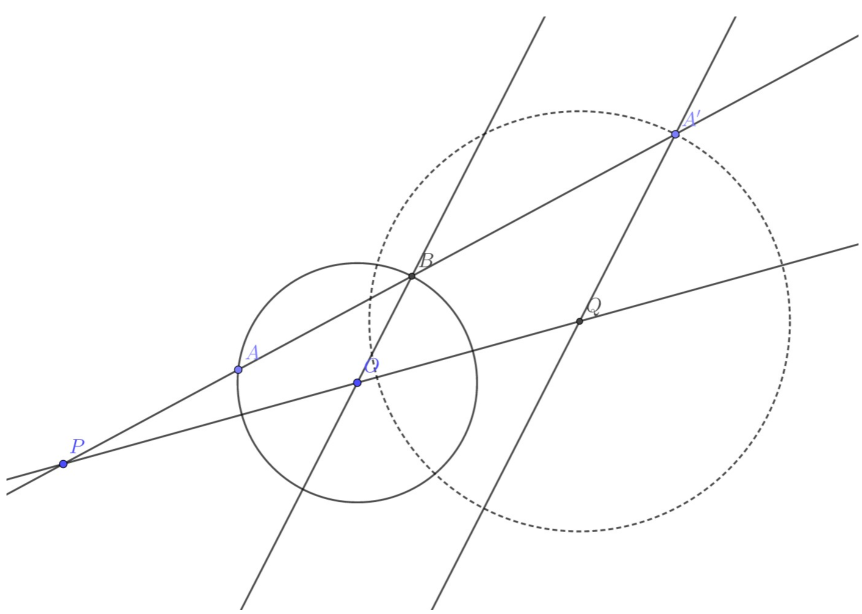
Atunci $\angle PBA = 90° \implies \angle PA'B' = 90°$ din punctul precedent, ceea ce trebuia să demonstrăm.

(vi) Pentru o demonstraţie algebrică: este o consecinţă imediată a Propoziția 5.0.3.

Pentru o demonstraţie geometrică: fie P şi $\mathcal{C} \not\ni P$. Alegem un A arbitrar pe $\mathcal{C}$, B celălalt punct de intersecţie a dreptei PA cu $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{I}_P(A) = A'$. Fie r raza cercului $\mathcal{C}$ şi $\alpha = \rho_{\mathcal{C}}(P)$ ($\alpha \neq 0$ pentru că $P \notin \mathcal{C}$). Atunci $\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} \rangle = \alpha$ şi $\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'} \rangle = k$.

Dacă $\alpha = k$, atunci $A' = B$, deci $\mathcal{I}_P(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Altfel, notăm O centrul cercului $\mathcal{C}$. Trasăm dreapta paralelă cu OB care trece prin A' şi fie Q intersecţia sa cu PO.



Atunci $\triangle POB \sim \triangle PQA'$, deci $\frac{|OB|}{|QA'|} = \frac{|PB|}{|PA'|} = \frac{|PB|\cdot|PA|}{|PA'|\cdot|PA|} \iff \frac{r}{|QA'|} = \frac{\alpha}{k}$, deci $|QA'| = \frac{rk}{\alpha}$, o valoare ce nu depinde de A. Aşadar $\mathcal{I}_P(\mathcal{C}_r(O)) = \mathcal{C}_{\frac{rk}{\alpha}}(Q)$.

(vii) **Exerciţiu de seminar!**

■

6.2.1 Cadrul natural al inversiunilor: Modelul sferic

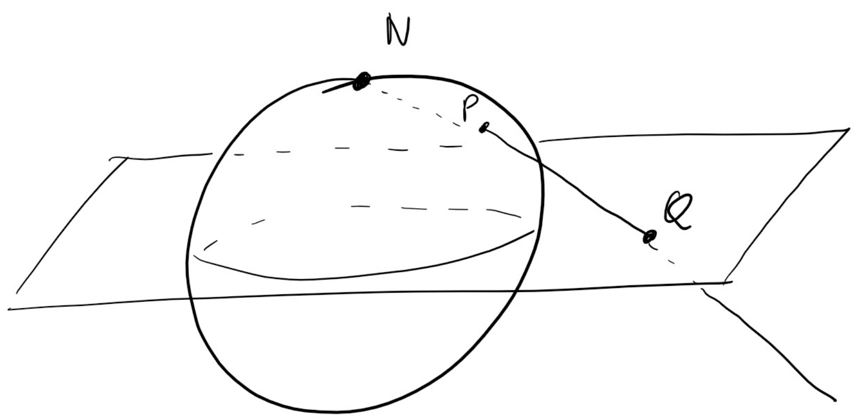
Deşi o inversiune este definită în afara centrului său P, trecând la limită, putem spune că îl trimite pe P în "punctul de la infinit" şi invers. Putem face asta perfect riguros dacă ne permitem să ieşim din plan, adăugându-i acest "punct de la infinit".

Toate proprietăţile de mai sus pot de fapt să fie regăsite (împreună cu demonstraţii mult simplificate) în cadrul natural al inversiunilor la care am făcut aluzie mai sus, anume *sfera lui Riemann*. Începem cu o propoziţie, fundamentală în sine şi pentru interpretare de completare a planului cu un punct pe care o urmărim:

Propoziția 6.2.4: *Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ sfera de rază 1 în jurul originii şi π planul său ecuatorial, pe care îl identificăm cu $\mathbb{R}^2 \simeq \{(x, y, 0) \mid x, y, \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Notăm cu $N = (0, 0, 1)$ "polul Nord" al sferei.*

Atunci aplicaţia

$$\varphi_N : S \setminus \{N\} \to \pi \simeq \mathbb{R}^2, \varphi_N(P) = Q \text{ astfel încât } Q = NP \cap \pi$$



este bijectivă, continuă, cu inversa continuă şi avem formulele

$$\begin{aligned} \varphi_N(x, y, z) &= \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), \\ \varphi_N^{-1}(u, v) &= \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right). \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Aplicaţia φ_N se numeşte ***proiecţia stereografică*** *a sferei pe plan (din polul Nord).*

Demonstraţie. Fie $P = (x_P, y_P, z_P) \in S$. Atunci ecuaţia dreptei NP este

$$NP : \frac{X}{x_P} = \frac{Y}{y_P} = \frac{Z-1}{z_P-1},$$

de unde, dacă $Q = NP \cap \pi$, deci $z_Q = 0$, avem

$$x_Q = \frac{-x_P}{z_P-1} = \frac{x_P}{1-z_P}, \; y_Q = \frac{-y_P}{z_P-1} = \frac{y_P}{1-z_P}.$$

Invers, fie $Q = (u, v, 0) \in \pi$. Atunci ecuaţia dreptei QP este

$$QP : \frac{X}{x_Q} = \frac{Y}{y_Q} = \frac{Z-1}{-1},$$

deci $x_P = x_Q(1 - z_P), y_P = y_Q(1 - z_P)$. Ridicând la pătrat, sumând şi ţinând cont că $P \in S$, deci $x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = 1$,

$$1 - z_P^2 = x_P^2 + y_P^2 = (x_Q^2 + y_Q^2)(1 - z_P)^2.$$

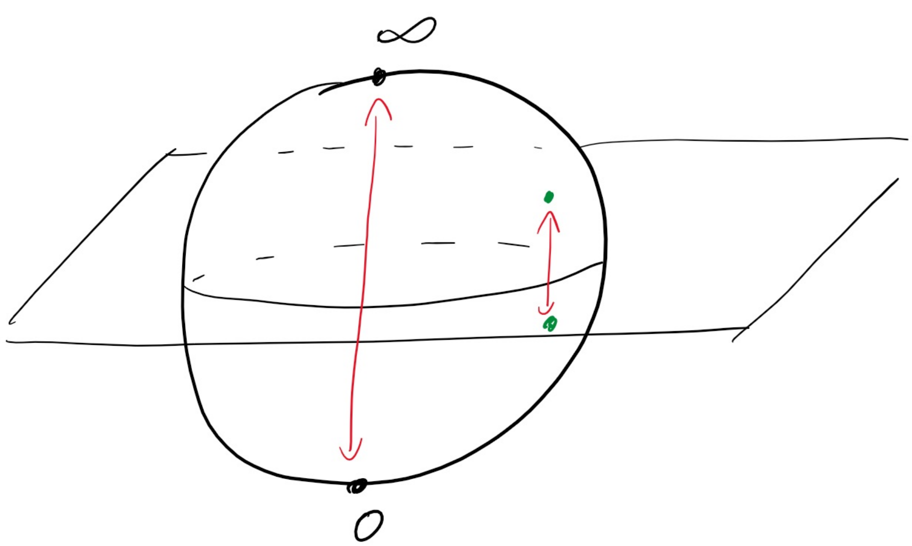
Cum $P \neq N$, putem simplifica prin $1 - z_P$ şi avem $1 + z_P = (x_Q^2 + y_Q^2)(1 + z_P) \iff z_P = \frac{x_Q^2+y_Q^2-1}{x_Q^2+y_Q^2+1}$. Revenind, obţinem $x_P = \frac{2x_Q}{x_Q^2+y_Q^2+1}$, $y_P = \frac{2y_Q}{x_Q^2+y_Q^2+1}$. ■

De vreme ce există o funcţie bijectivă între $S \setminus \{N\}$ şi $\mathbb{R}^2$, iar, prin aceasta, trecând la limită, $P \to N \implies \varphi_N(P) \to \infty$, putem vedea sfera ca fiind planul completat cu punctul de la infinit. Ne interesează acum să întelegem inversiunea (de centru O), văzută *ca funcţie pe sferă*:

Lema 6.2.5: *În diagrama de mai jos:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \arrow[r, "\mathcal{I}_O"] & \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \arrow[d, "\varphi_N^{-1}"] \\
S \setminus \{N, S\} \arrow[u, "\varphi_N"] \arrow[r, "f"] & S \setminus \{N, S\}
\end{tikzcd}$$

funcţia f are formula: $f(x, y, z) = (x, y, -z)$ i.e. ***inversiunea, în modelul sferic, nu este altceva decât simetria faţă de planul ecuatorial***.



Demonstraţie. Trebuie doar să calculăm $\varphi_N^{-1} \circ \mathcal{I}_O \circ \varphi_N$, folosind formulele (6.2.1) şi (6.2.2).

Fie $(x, y, z) \in S$, deci $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Atunci:

$$\begin{aligned}
(\varphi_N^{-1} \circ \mathcal{I}_O \circ \varphi_N)(x, y, z) &= \varphi_N^{-1}\left(\mathcal{I}_O\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)\right) \\
&= \varphi_N^{-1}\left(\frac{\frac{x}{(1-z)}}{\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2}}, \frac{\frac{y}{(1-z)}}{\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2}}\right) \\
&= \varphi_N^{-1}\left(\frac{x(1-z)}{x^2+y^2}, \frac{y(1-z)}{x^2+y^2}\right).
\end{aligned}$$

Pentru uşurinţă, notând $u = \frac{x(1-z)}{x^2+y^2}, v = \frac{y(1-z)}{x^2+y^2}$, calculăm separat:

$$\begin{aligned}
u^2 + v^2 &= \left(\frac{x(1-z)}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y(1-z)}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{(1-z)^2}{x^2+y^2}, \\
\Longrightarrow u^2 + v^2 + 1 &= \frac{1 - 2z + z^2 + x^2 + y^2}{x^2+y^2} = \frac{2(1-z)}{x^2+y^2}, \\
\Longrightarrow u^2 + v^2 - 1 &= \frac{1 - 2z + z^2 - x^2 - y^2}{x^2+y^2} = \frac{-2z(1-z)}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Revenind,

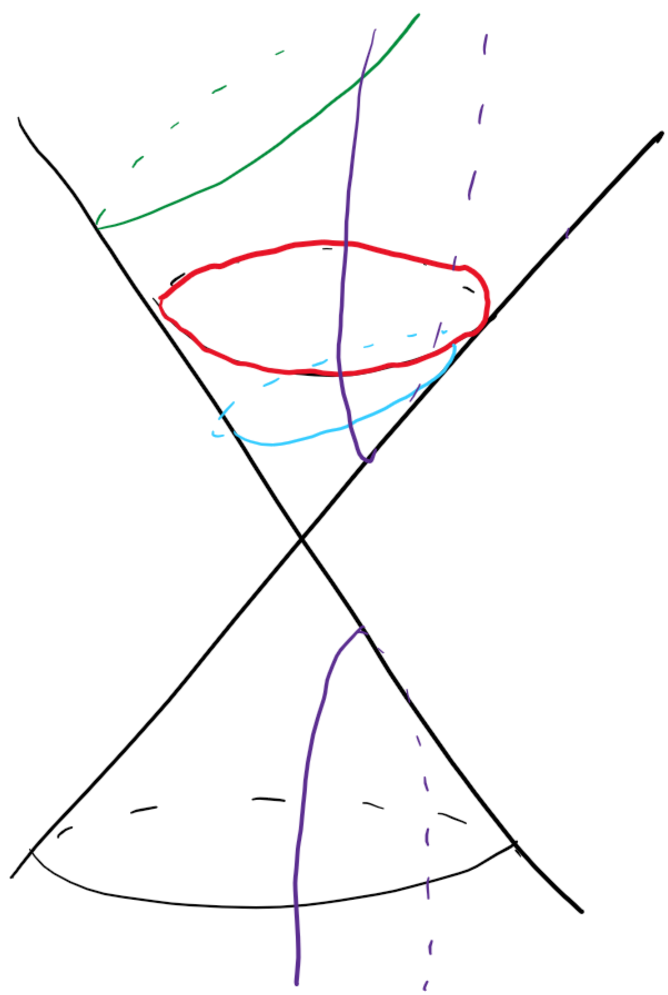
$$\begin{aligned}
(\varphi_N^{-1} \circ \mathcal{I}_O \circ \varphi_N)(x, y, z) &= \varphi_N^{-1}\left(\frac{x(1-z)}{x^2+y^2}, \frac{y(1-z)}{x^2+y^2}\right) \\
&= \left(\frac{2\frac{x(1-z)}{x^2+y^2}}{\frac{2(1-z)}{x^2+y^2}}, \frac{2\frac{y(1-z)}{x^2+y^2}}{\frac{2(1-z)}{x^2+y^2}}, \frac{\frac{-2z(1-z)}{x^2+y^2}}{\frac{2(1-z)}{x^2+y^2}}\right) = (x, y, -z).
\end{aligned}$$

■

Capitolul 7

Conice

Definiția 7.0.1: Se numeşte *conică* o secţiune plană a unui con din spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ (*i.e.* intersecţia unui con din $\mathbb{R}^3$ cu un plan).

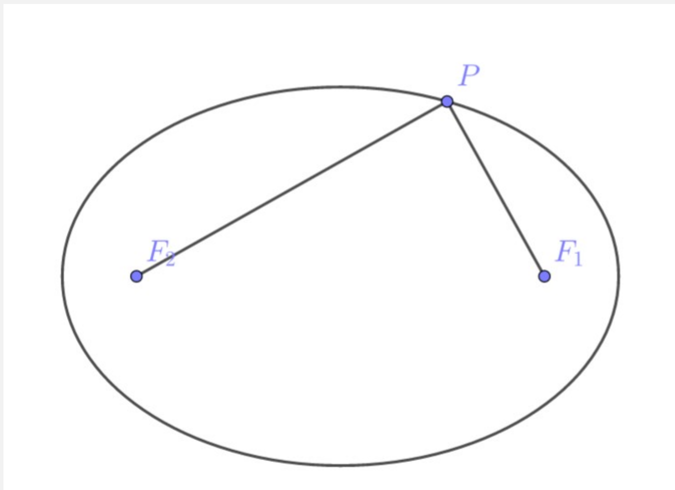


Rezervăm secţiuni diferite pentru studierea proprietăţilor fiecărui tip de conică **nedegenerată** (care nu este punct sau reuniune de drepte).

7.1 Elipsa

Definiția 7.1.1: Se numeşte *elipsă* locul geometric al punctelor pentru care suma distanţelor faţă de două puncte fixate este constantă.
Explicit, pentru F_1, F_2 în plan şi $a > 0$, elipsa determinată este

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{F_1,F_2,a} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |F_1P| + |F_2P| = 2a\}.$$



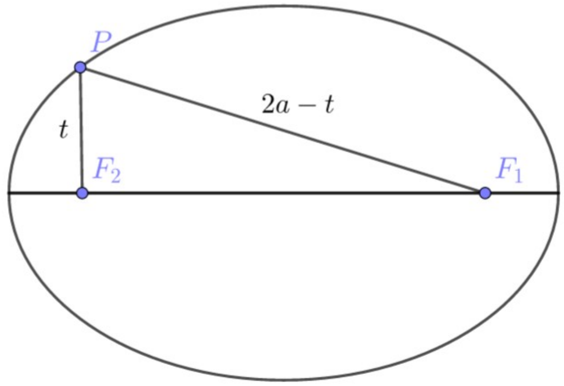
Punctele F_1 şi F_2 se numesc *focarele* elipsei $\mathcal{E}$.

Observația 7.1.2: În notaţiile de mai sus, $|F_1F_2| \leq |F_1P| + |F_2P|$ pentru orice punct P (inegalitatea triunghiului), deci este necesar să punem condiţia $|F_1F_2| < 2a$ pentru ca elipsa să nu fie vidă sau să se reducă doar la segmentul F_1F_2. Numim atunci elipsa *nedegenerată*.

Dacă $|F_1F_2| < 2a$, atunci pentru un punct $P \in \mathcal{E}$, triunghiul (eventual degenerat) F_1PF_2 are laturile de lungimi $t, |F_1F_2|, 2a - t$ pentru un anumit t. Reciproc, dacă alegem un număr t astfel încât

$$\begin{cases} t + |F_1F_2| & \geq & 2a - t \\ 2a - t + |F_1F_2| & \geq & t \end{cases},$$

adică $a - \frac{|F_1F_2|}{2} \leq t \leq a + \frac{|F_1F_2|}{2}$, atunci numerele $t, |F_1F_2|, 2a - t$ determină două triunghiuri, simetrice faţă de F_1F_2 şi eventual degenerate în cazul unei egalităţi în inegalităţile de mai sus, fie ele $\triangle F_1PF_2, \triangle F_1P'F_2$, cu $P, P' \in \mathcal{E}$.

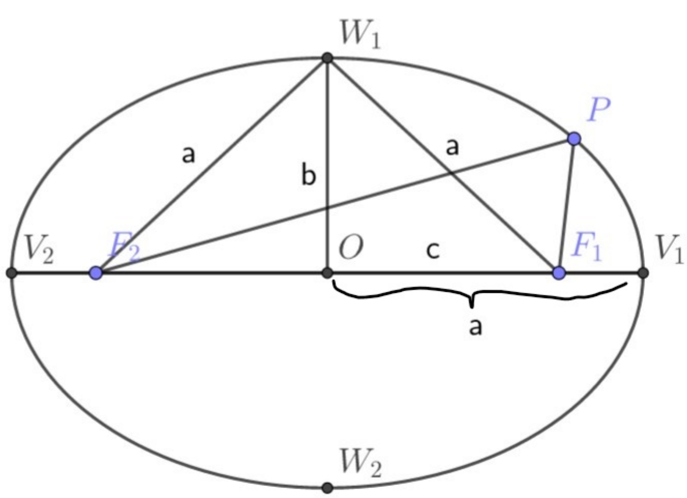


Scriem teorema cosinusului în $\angle PF_2F_1$:

$$\cos\angle PF_2F_1 = \frac{t^2 + |F_1F_2|^2 - (2a-t)^2}{2t|F_1F_2|} = \frac{2a}{|F_1F_2|} - 2\frac{\left(a - \frac{|F_1F_2|}{2}\right)\left(a + \frac{|F_1F_2|}{2}\right)}{t|F_1F_2|}.$$

Aceasta este o funcţie strict crescătoare în t. Pentru $t = a - \frac{|F_1F_2|}{2}$, $\cos\angle PF_2F_1 = -1$, iar pentru $t = a + \frac{|F_1F_2|}{2}$, $\cos\angle PF_2F_1 = 1$. De aici, vedem că, pentru orice unghi $\alpha \in [0, 2\pi)$ în F_1 (sau F_2), există un unic punct $P \in \mathcal{E}$ astfel încât $\angle PF_1F_2 = \alpha$.

Să notăm atunci cu $\{V_1, V_2\} = \mathcal{E} \cap F_1F_2$ şi W_1, W_2 cele două puncte din $\mathcal{E}$ de pe dreapta mediatoare a segmentului (F_1F_2). Fie O mijlocul lui (F_1F_2) (se numeşte *centrul elipsei*).



Atunci rezultă imediat că $|OV_1| = |OV_2| = a$. Notăm $|OW_1| = |OW_2| = b$ şi $|OF_1| = |OF_2| = c$. Rezultă (din triunghiul dreptunghic OW_1F_2 de exemplu) că $b \le a$ şi $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Observăm şi că $b = a$ dacă şi numai dacă $F_1 = F_2$ *i.e.* $\mathcal{E}$ este un cerc (de rază a).

Excentricitatea unei elipse. Pentru o elipsă determinată de datele de mai sus, notăm cu

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0, 1)$$

e se numeşte *excentricitatea* elipsei.
a se numeşte (şi este) *lungimea semi-axei majore.*
b se numeşte (şi este) *lungimea semi-axei minore.*
Ca atare, o elipsă poate fi determinată şi de focarele sale şi excentricitatea e.

Observaţie: $e = 0$ dacă şi numai dacă $\mathcal{E}$ este cerc, iar $e \to 1$ "subţiază" elipsa, apropiind-o de dreapta F_1F_2.

Observaţia 7.1.3: Punctul O, numit centrul elipsei, *i.e.* mijlocul segmentului (F_1F_2), are proprietatea de a fi centru de simetrie al elipsei: $P \in \mathcal{E}$ dacă şi numai dacă $S_O(P) \in \mathcal{E}$.

Ca întotdeauna, căutăm să dăm şi o expresie în coordonate pentru punctele elipsei, adică o ecuaţie implicită ce defineşte $\mathcal{E}$. Alegem originea axelor în centrul elipsei O şi focarele F_1, F_2 pe axa OX. Avem $F_1 = (c, 0), F_2 = (-c, 0), V_1 = (a, 0), V_2 = (-a, 0), W_1 = (0, b), W_2 = (0, -b)$. Fie $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Atunci

$$P \in \mathcal{E} \iff |F_1P| + |F_2P| = 2a \iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Trecem unul din radicali în termenul drept înainte să ridicăm la pătrat:

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{E} &\iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&\iff (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\
&\iff -2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx \iff a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \\
&\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x \iff (x+c)^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \\
&\iff \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \iff \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2 \\
&\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

Aşadar am găsit

Ecuaţia implicită canonică a unei elipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.1.1}$$

este ecuaţia elipsei cu focare în $(c,0),(-c,0)$ şi a,b lungimile semi-axei majore, respectiv minore.
Vom spune că elipsa este în formă canonică dacă are centrul în $(0,0)$, semi-axa majoră pe OX şi semi-axa minoră pe OY.
Mai general,

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

este ecuaţia elipsei cu centru în (x_0,y_0) şi a,b lungimile semi-axei majore, respectiv minore, paralele cu axele OX, respectiv OY.

7.1.1 Caracterizarea cu ajutorul dreptei directoare

Propoziţia 7.1.4: *Fie o elipsă $\mathcal{E}$ de focare F_1,F_2 şi excentricitate $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \neq 0$. Atunci există o dreaptă d_1 perpendiculară pe F_1F_2 astfel încât*

$$P \in \mathcal{E} \iff \frac{|PF_1|}{\text{dist}(P,d_1)} \text{ este constantă.}$$

Mai mult, această constantă este e, excentricitatea elipsei.

Reciproc, date un punct F_1, o dreaptă d_1 care nu-l conţine pe F_1 şi un $\alpha \in (0,1)$, mulţimea

$$\left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|PF_1|}{\text{dist}(P,d_1)} = \alpha\right\}$$

reprezintă o elipsă de excentricitate α şi cu unul din focare în F_1.

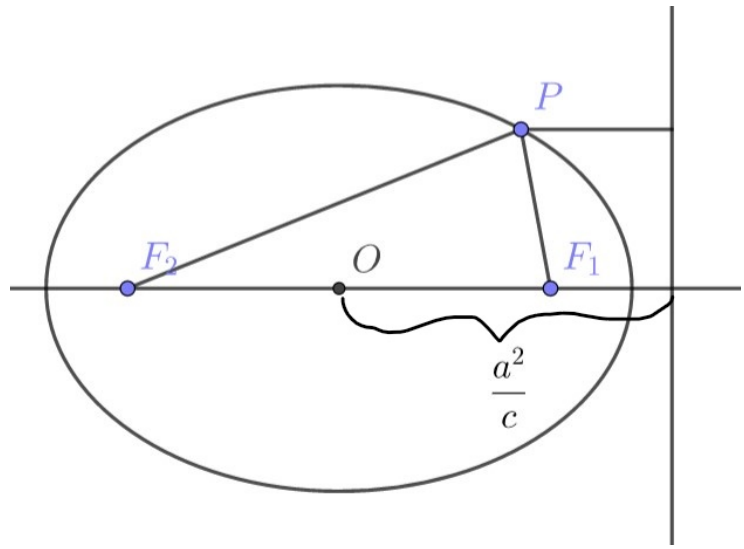
Demonstraţie. Putem presupune că elipsa este dată de ecuaţia canonică $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Alegem d_1 o dreaptă verticală de ecuaţie $d_1 : x = l$ cu $l > a$ (este clar că o dreaptă ca cea pe care o căutăm nu poate intersecta elipsa). Mai întâi determinăm valoarea pe care trebuie să o alegem pentru l dacă raportul $\frac{|PF_1|}{\text{dist}(P,d_1)}$ ar fi constant pentru $P \in \mathcal{E}$.

Pentru $P = V_1 = (a,0)$, $\frac{|PF_1|}{\text{dist}(P,d_1)} = \frac{a-c}{l-a}$. Pentru $P = V_2 = (-a,0)$, $\frac{|PF_1|}{\text{dist}(P,d_1)} = \frac{a+c}{l+a}$, aşadar

$$\begin{aligned}\frac{a-c}{l-a} = \frac{a+c}{l+a} &\iff (l+a)(a-c) = (l-a)(a+c) \iff -lc + a^2 = lc - a^2\\ &\iff l = \frac{a^2}{c}.\end{aligned}$$

Mai mult, pentru $l = \frac{a^2}{c}$, $\frac{a-c}{l-a} = \frac{a-c}{\frac{a^2}{c}-a} = c\frac{a-c}{a^2-ac} = \frac{c}{a} = e$.



Demonstrăm acum că, alegând $d_1 : x = \frac{a^2}{c}$, obţinem $\frac{|PF_1|}{\text{dist}(P,d_1)} = e$ pentru orice $P = (x, y) \in \mathcal{E}$. Avem $\text{dist}(P, d_1) = \frac{a^2}{c} - x$ şi $|PF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, de unde

$$\frac{|PF_1|^2}{(\text{dist}(P,d_1))^2} = \frac{(x-c)^2+y^2}{\left(\frac{a^2}{c}-x\right)^2} = \frac{(x-c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}{\left(\frac{a^2}{c}-x\right)^2} = \frac{\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+c^2+b^2}{\left(\frac{a^2}{c}-x\right)^2} = \frac{\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2}{\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{c^2}{a^2}\left(x^2-2\frac{a^2}{c}x+\frac{a^4}{c^2}\right)}{\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2} = \frac{\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2}{\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2,$$

ceea ce voiam să demonstrăm.

Vom demonstra reciproca mai târziu, în varianta sa care pune laolaltă caracterizările tuturor conicelor nedegenerate (vedeţi Propoziția 7.4.21). ■

Aşadar, orice elipsă determină două drepte directoare perpendiculare pe dreapta focarelor (dacă elipsa este în ecuaţie normală (7.1.1), acestea sunt dreptele de ecuaţie $x = \pm\frac{a^2}{c}$). Reciproc, una din aceste drepte, focarul corespunzător şi o excentricitate $e \in (0, 1)$ determină elipsa.

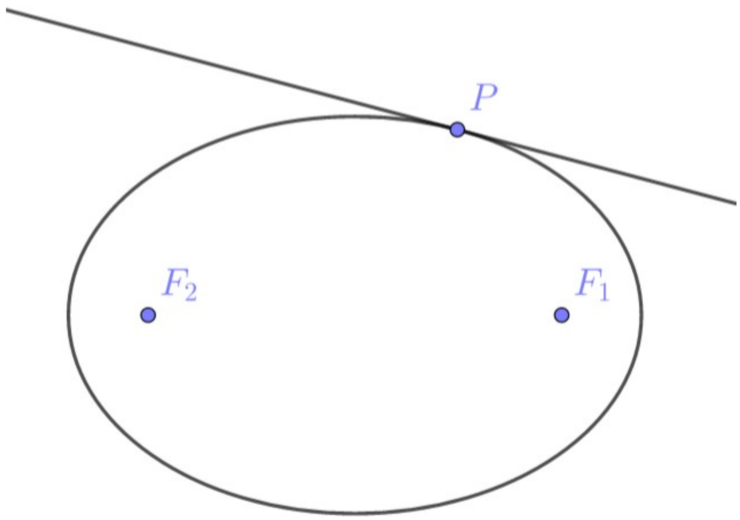
7.1.2 Tangente la elipsă

Definiția 7.1.5: Se numeşte tangentă la elipsa $\mathcal{E}$ o dreaptă care intersectează $\mathcal{E}$ într-un singur punct.

Observația 7.1.6: Dacă AB este o dreaptă si B aparţine elipsei de centru O, atunci **nu** este neapărat adevărat că $\angle OBA = \frac{\pi}{2}$.

Idee de bază: Tehnica descrisă în Subsecţiunea 5.2 rămâne valabilă şi funcţionează întotdeauna pentru a determina dreptele tangente în puncte ale elipsei, dreptele tangente duse dintr-un punct exterior elipsei şi dreptele tangente de o direcţie dată.

Să îi demonstrăm utilitatea determinând ecuaţia dreptei în punctul $P = (x_P, y_P)$ de pe elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Parametrizăm dreapta tangentă, fie ea $t_P : (x_P, y_P)+t(u, v)$. Vom afla direcţia (u, v) punând condiţia ca $d \cap \mathcal{E}$ să determine un punct dublu:

$$\frac{(x_P+tu)^2}{a^2}+\frac{(y_P+tv)^2}{b^2}=1 \iff \left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_Pu}{a^2}+\frac{y_Pv}{b^2}\right)t+\frac{x_P^2}{a^2}+\frac{y_P^2}{b^2}=1.$$

Cum $P \in \mathcal{E}$, $\frac{x_P^2}{a^2}+\frac{y_P^2}{b^2}=1$, obţinem ecuaţia de gradul 2 fără termen liber

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_Pu}{a^2}+\frac{y_Pv}{b^2}\right)t=0,$$

care are rădăcină dublă dacă şi numai dacă $\frac{x_Pu}{a^2}+\frac{y_Pv}{b^2}=0$. Cel puţin unul dintre u şi v este nenul; să presupunem că $v \neq 0$, ca atare putem alege $v = 1$, de unde $u = -\frac{a^2y_P}{b^2x_P}$

Ne întoarcem la ecuaţia tangentei:

$$t_P : \frac{x-x_P}{u}=\frac{y-y_P}{v} \iff x-x_P=-\frac{a^2y_P}{b^2x_P}(y-y_P).$$

Înmulţind cu $\frac{x_P}{a^2}$, relaţia devine

$$\frac{xx_P}{a^2}-\frac{x_P^2}{a^2}=-\frac{yy_P}{b^2}+\frac{y_P^2}{b^2} \iff \frac{xx_P}{a^2}+\frac{yy_P}{b^2}=1,$$

unde am folosit din nou că $P \in \mathcal{E}$.

Am obţinut următoarea

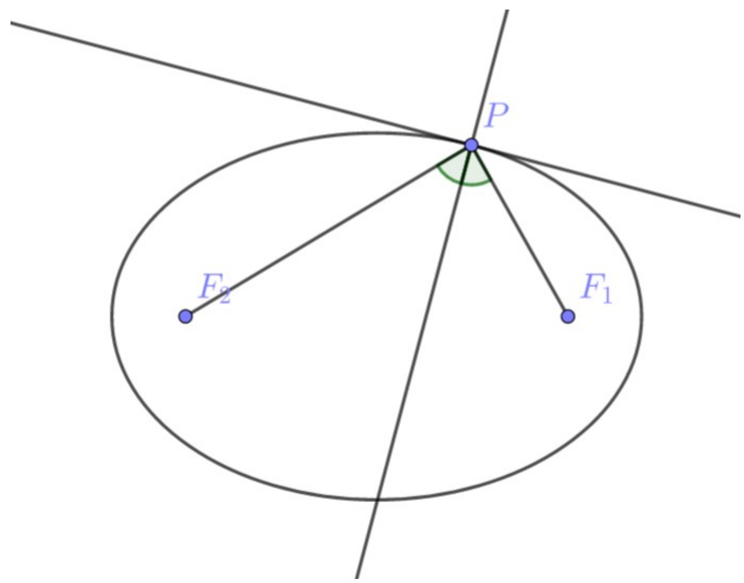
Propoziția 7.1.7: *Ecuaţia dreptei tangente la elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ în punctul $P=(x_P, y_P) \in \mathcal{E}$ este*

$$\frac{xx_P}{a^2}+\frac{yy_P}{b^2}=1.$$

Aceasta ecuaţie se spune că este obţinută (din motive lesne de înteles) prin metoda dedublării punctului.

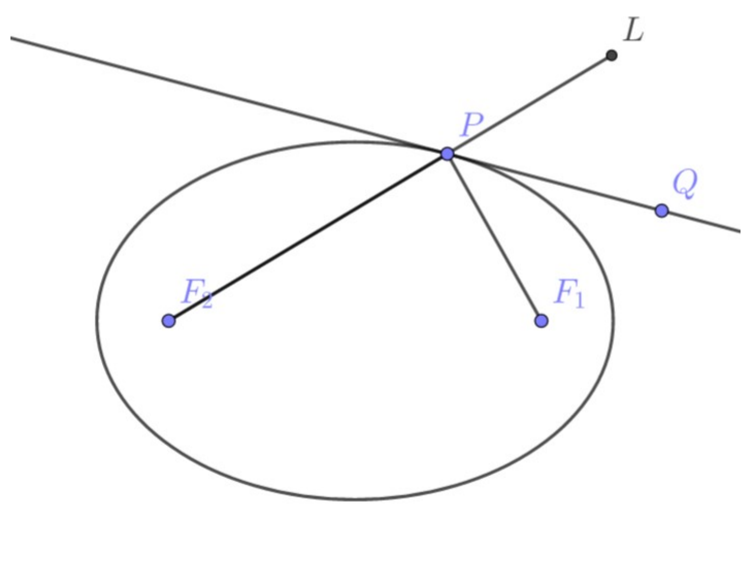
7.1.3 Proprietatea optică a elipsei

Propoziția 7.1.8: *O rază care porneşte dintr-un focar al unei elipse este reflectată în celălalt focar.*



Cu alte cuvinte, pentru orice punct P de pe elipsa $\mathcal{E}$ de focare F_1 şi F_2, dreapta normală la elipsă în P este bisectoarea unghiului F_1PF_2.

Demonstraţie. Fie un punct P pe elipsă de semi-axă majoră a. Prelungim segmentul (F_2P) până la un punct L astfel încât $|F_2L| = 2a$. Fie d dreapta bisectoare a unghiului $\angle F_1PL$. Vrem să arătăm că este dreapta tangentă la elipsă în punctul P.



Fie Q un alt punct pe această dreaptă. Atunci, prin definiţia bisectoarei, $|QF_1| = |QL|$ şi, din inegalitatea triunghiului, $2a = |F_2L| > |F_2Q| + |QL| = |F_2Q| + |QF_1|$, deci Q nu aparţine elipsei. Am demonstrat că $d \cap \mathcal{E} = \{P\}$, adică este tangenta în P la elipsă. ∎

7.1.4 Parametrizarea elipsei

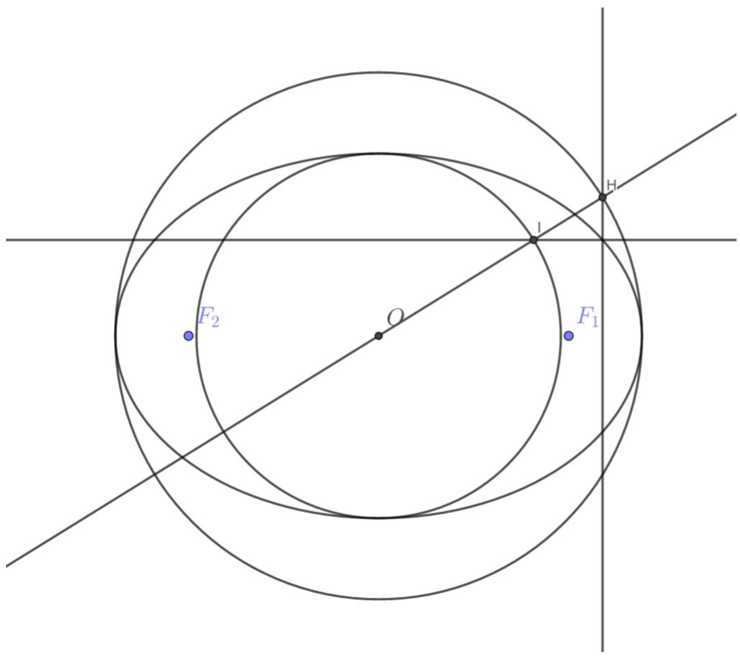
Fie o elipsă de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Atunci este imediat că, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, punctul $(a\cos t, b\sin t)$ este pe elipsă. Mai mult, această expresie ne oferă chiar o parcurgere a punctelor elipsei atunci când t parcurge un interval de lungime 2π:

Parametrizarea elipsei.

$$\mathcal{E} = \{(a\cos t, b\sin t) \mid t \in [0, 2\pi)\}. \tag{7.1.2}$$

Observaţia 7.1.9: Nu trebuie înţeles că t este argumentul (unghiul la centru al) punctului $(a\cos t, b\sin t)$. Într-adevăr, pentru o elipsă care nu este cerc, acestea coincid doar pentru vârfuri, adică în $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Există însă o interpretare geometrică pentru t: să trasăm cercurile de raze a şi b:



Atunci raza de unghi t intersectează cercurile în punctele $A = (a\cos t, a\sin t)$, respectiv $B = (b\cos t, b\sin t)$, iar dreapta paralelă cu axa mica ce trece prin A şi dreapta paralelă cu axa mare ce trece prin B se intersectează în punctul $(a\cos t, b\sin t)$ al elipsei.

Exerciţiul 7.1.10: La seminar, folosiţi parametrizarea de mai sus a elipsei pentru a calcula aria ei ca fiind πab.

7.1.5 Diametre conjugate. Teorema lui Apollonius

Pentru elipsă, se păstrează aceleaşi definiţii ca la cerc în privinţa coardelor şi a diametrului:

Definiţia 7.1.11:

1. Se numeşte *coardă* a unei elipse un segment determinat de orice două puncte ale elipsei.

2. O coardă ce trece prin centrul elipsei se numeşte *diametru*.

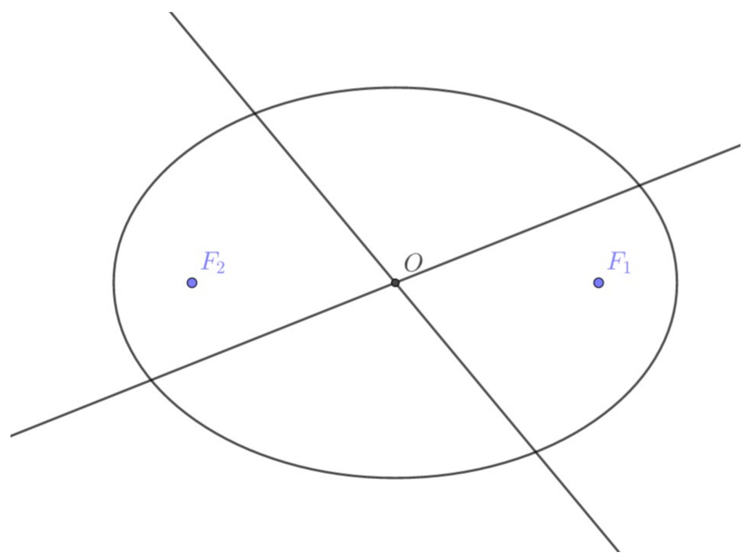
Lema 7.1.12: *Pentru o coardă dată, mulţimea mijloacelor coardelor paralele cu ea este un diametru (dar, în general, nu unul perpendicular pe acea coardă).*

Demonstraţie. Considerăm că elipsa este în ecuaţie canonică $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Atunci transformarea liniară

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right)$$

duce elipsa în cercul $\mathcal{C}_1(0)$, pentru care proprietatea din enunţ este imediată. Dar o transformare liniară păstrează atât mijloacele segmentelor cât şi paralelismul dreptelor, deci aceeaşi proprietate trebuie să fie adevărată şi pentru elipsă. ∎

Definiția 7.1.13: Două diametre se numesc *conjugate* dacă mijloacele coardelor paralele cu unul din ele îl trasează pe celălalt.



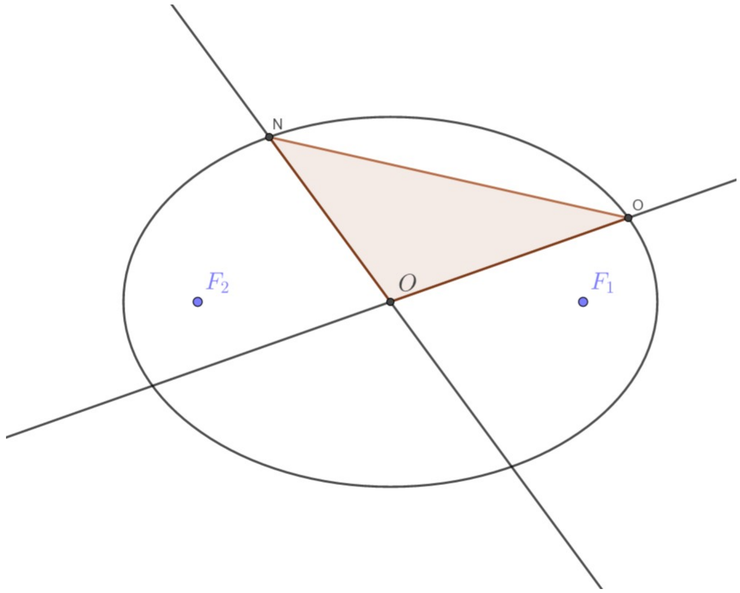
Observația 7.1.14: Din nou, unghiul dintre două diametre conjugate nu este, în general, de $90°$. Însă chiar din demonstraţia de la Lema 7.1.12, vedem că, în parametrizarea (7.1.2), dacă un diametru are argumentul t, diametrul său conjugat are argumentul $t + \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

Teorema 7.1.15: *(a lui Apollonius)*

Într-o elipsă, alegând două jumătăţi de diametre conjugate:

a) Suma pătratelor lor este constantă (anume $a^2 + b^2$).

b) Aria triunghiului pe care îl determină este constantă (anume $\frac{ab}{2}$).



Demonstrație. Fie l_1, l_2 lungimile celor două două jumătăţi de diametru, t argumentul uneia dintre ele; atunci, din Observația 7.1.14, argumentul celuilalt este $t + \frac{\pi}{2}$.

Ca atare, $l_1^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t$ şi $l_2^2 = a^2 \cos^2 \left(t + \frac{\pi}{2}\right) + b^2 \sin^2 \left(t + \frac{\pi}{2}\right) = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$, de unde $l_1^2 + l_2^2 = a^2 + b^2$.

În ce priveşte aria, folosim formula determinantului:

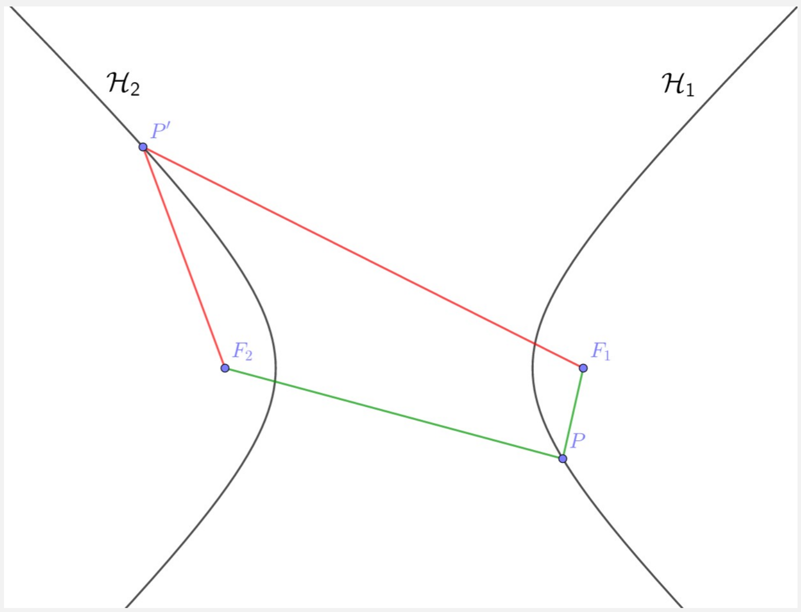
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a\cos t & a\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ b\sin t & b\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\end{vmatrix}\right| = \frac{ab}{2}\left|\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{vmatrix}\right| = \frac{ab}{2}.$$

■

7.2 Hiperbola

Definiţia 7.2.1: Se numeşte *hiperbolă* locul geometric al punctelor pentru care modulul diferenţei distanţelor faţă de două puncte fixate este constant.
Explicit, pentru F_1, F_2 în plan şi $a > 0$, hiperbola determinată este

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{F_1,F_2,a} = \{P \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ | \, |F_1P| - |F_2P| \, | = 2a\}.$$



Punctele F_1 şi F_2 se numesc *focarele* hiperbolei $\mathcal{H}$.

Observaţia 7.2.2: Condiţia din definiţie face hiperbola să apară natural ca reuniune a două componente:

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2 \ \mid |F_1P| - |F_2P| = 2a\} \cup \{P \in \mathbb{R}^2 \ \mid |F_2P| - |F_1P| = 2a\} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$$

Observaţia 7.2.3: În notaţiile de mai sus, $|F_1F_2| \geq | \ |F_1P| - |F_2P| \ |$ pentru orice punct P (inegalitatea triunghiului), deci este necesar să punem condiţia $|F_1F_2| > 2a$ pentru ca hiperbola să nu fie vidă sau să se reducă doar la dreapta F_1F_2, mai puţin segmentul (F_1F_2). Numim atunci hiperbola *nedegenerată*.

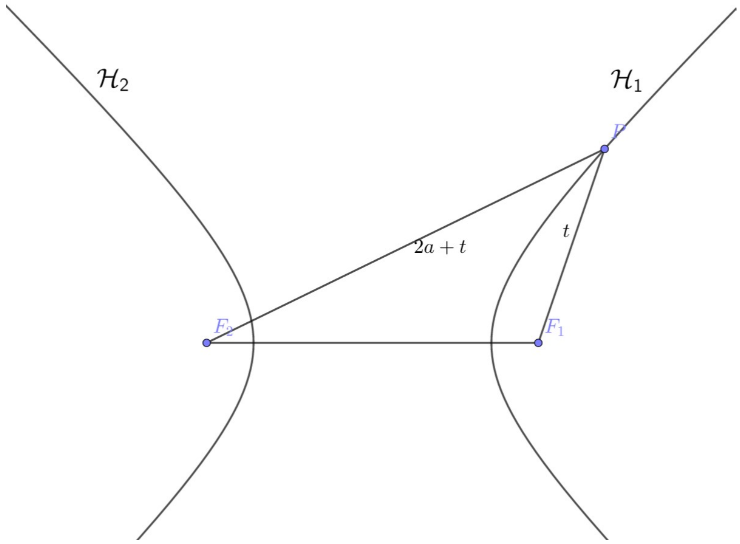
Să presupunem că $|F_1F_2| > 2a$ şi să ne uităm doar la componenta

$$\mathcal{H}_1 = \{P \in \mathbb{R}^2 \ \mid |F_2P| - |F_1P| = 2a\}$$

(pe aceasta, în particular, $|F_1P| < |F_2P|$). Atunci pentru un punct $P \in \mathcal{H}_1$, triunghiul (eventual degenerat) F_1PF_2 are laturile de lungimi $t, |F_1F_2|, 2a + t$ pentru un anumit t. Reciproc, dacă alegem un număr t astfel încât

$$\begin{cases} t + |F_1F_2| & \geq & 2a + t \\ 2a + t + |F_1F_2| & \geq & t \\ t + (2a + t) & \geq & |F_1F_2| \end{cases}$$

(primele două sunt automat îndeplinite), adică $t \geq \frac{|F_1F_2|}{2} - a$, atunci numerele $t, |F_1F_2|, 2a+t$ determină două triunghiuri, simetrice faţă de F_1F_2 şi eventual degenerate şi confundate în cazul unei egalităţi în inegalitatea de mai sus, fie ele $\triangle F_1PF_2, \triangle F_1P'F_2$, cu $P, P' \in \mathcal{H}_1$.

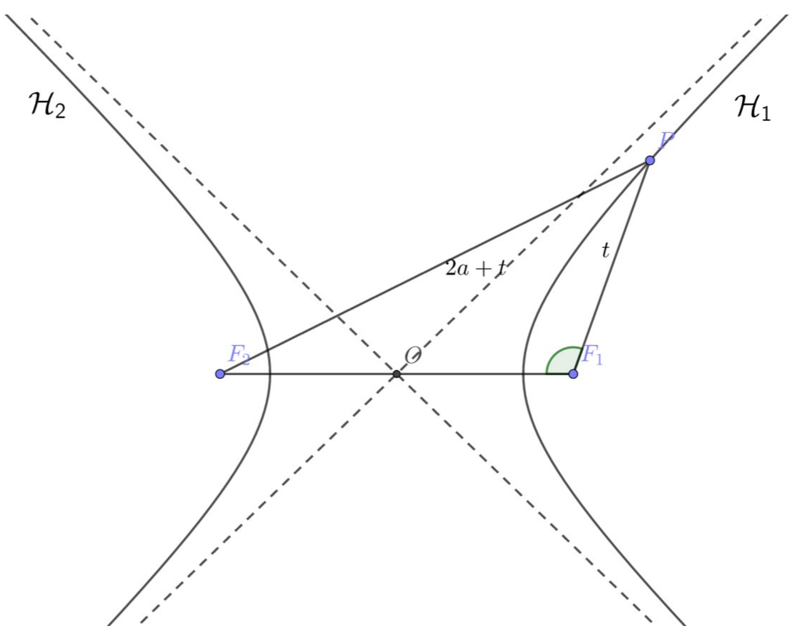


Observaţi că, spre deosebire de elipsă, în cazul de degenerare a triunghiului, punctul P este între F_1 şi F_2.

Dacă notăm cu $\alpha = \angle F_2F_1P$, atunci

$$\cos\alpha = \frac{|F_1F_2|^2 + t^2 - (2a+t)^2}{2t|F_1F_2|},$$

de unde $\cos\alpha \xrightarrow{t \to \frac{|F_1F_2|}{2} - a} 1$ şi $\cos\alpha \xrightarrow{t\to\infty} -\frac{2a}{|F_1F_2|} \in (-1, 0)$. Aşadar **nu putem obţine orice unghi în** F_1 pentru puncte de pe $\mathcal{H}_1$, ci suntem îndreptaţi spre ipoteza că textbfavem două asimptote (simetrice faţă de F_1F_2), determinate de această margine superioară a unghiului. Similar pentru $\mathcal{H}_2$ (verificaţi!) se obţine exact aceeaşi limită superioară pentru unghi.



Să notăm atunci cu $\{V_1, V_2\} = \mathcal{H} \cap F_1F_2$. Ele mai sunt numite şi vârfurile hiperbolei. Fie O mijlocul lui (F_1F_2) (se numeşte *centrul hiperbolei*). Este imediat că $|OV_1| = |OV_2| = a$. Pentru a clarifica desenul hiperbolei şi a identifica valorile numerice importante care o caracterizează, aşa cum am făcut pentru elipsă, trebuie să clarificăm existenţa asimptotelor, cea mai simplă metodă fiind prin găsirea unei ecuaţii algebrice pentru hiperbolă.

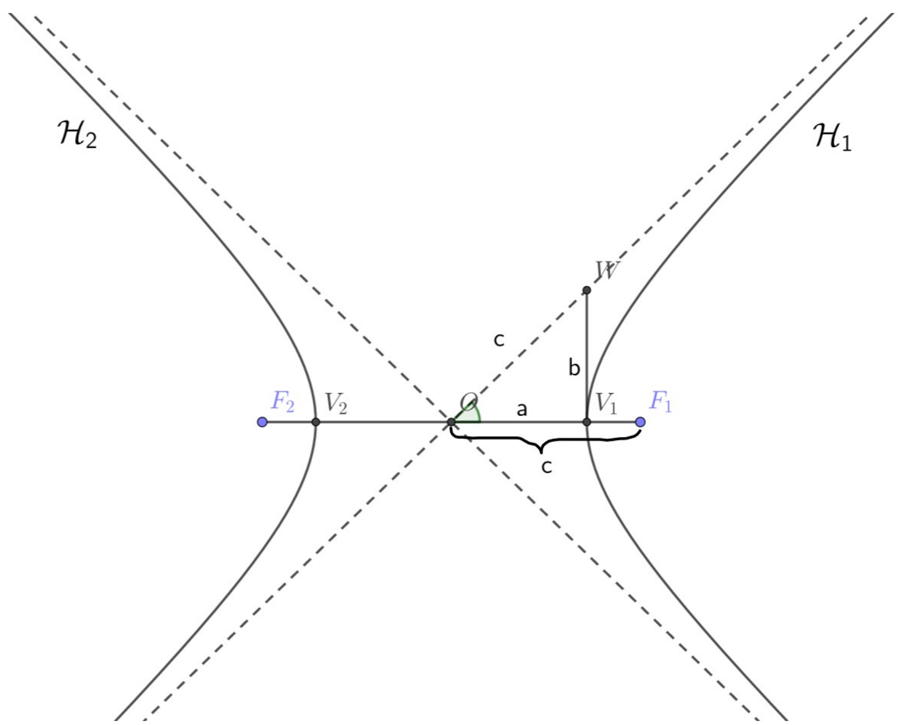
Căutăm să dăm şi o expresie în coordonate pentru punctele hiperbolei, adică o ecuaţie implicită ce defineşte $\mathcal{H}$. Alegem originea axelor în centrul hiperbolei O şi focarele F_1, F_2 pe axa OX. Avem $F_1 = (c, 0), F_2 = (-c, 0)$ pentru un $c > 0$ şi $V_1 = (a, 0), V_2 = (-a, 0)$ (deci $c > a$). Fie $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Fie şi numărul $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, până una alta fără interpretare geometrică. Atunci

$$P \in \mathcal{H} \iff |\,|F_1P| - |F_2P|\,| = 2a \iff \left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Trecem unul din radicali în termenul drept înainte să ridicăm la pătrat:

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{H} &\iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a \\
&\iff (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\
&\iff -2cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx \iff \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \\
&\iff \pm\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x \iff (x+c)^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \\
&\iff \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \iff -\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = -b^2 \\
&\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

Acum este un simplu exerciţiu că această figură are **asimptote care trec prin centrul hiperbolei**, de ecuaţie $l_1, l_2 : y = \pm\frac{b}{a}x$. Putem acum face echivalentul desenului de la elipsă şi pentru hiperbolă:



Avem $|OV_1| = |OV_2| = a$ şi $|OF_1| = |OF_2| = c$. Fie W intersecţia cu o asimptotă a perpendicularei din V_1 la F_1F_2, ca în desenul de mai sus. Ştim din discuţia de mai sus că $\cos\angle WOV_1 = \frac{2a}{|F_1F_2|} = \frac{a}{c}$, deci $|OW| = c$. Identificăm acum şi interpretarea geometrică pentru b definit anterior, $b = |WV_1|$ şi reţinem $c^2 = a^2 + b^2$.

Excentricitatea unei hiperbole. Pentru o hiperbolă determinată de datele de mai sus, notăm cu

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1.$$

e se numeşte *excentricitatea* hiperbolei.
a se numeşte (şi este) *lungimea semi-axei majore*.
b se numeşte (şi este) *lungimea semi-axei minore*.
Ca atare, o hiperbolă poate fi determinată şi de focarele sale şi excentricitatea e.

Am găsit pe drum şi

Ecuaţia implicită canonică a unei hiperbole.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.2.1}$$

este ecuaţia hiperbolei cu focare în $(c, 0), (-c, 0)$ şi a, b lungimile semi-axei majore, respectiv minore.
Vom spune că hiperbola este în formă canonică dacă are centrul în $(0, 0)$, semi-axa majoră pe OX şi semi-axa minoră pe OY.
Mai general,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

este ecuaţia hiperbolei cu centru în (x_0, y_0) şi a, b lungimile semi-axei majore, respectiv minore.

Repetăm c si ecuaţiile asimptotelor pentru o hiperbolă în formă canonică:

Asimptotele hiperbolei de ecuaţie canonică $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sunt dreptele de ecuaţii:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \iff \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

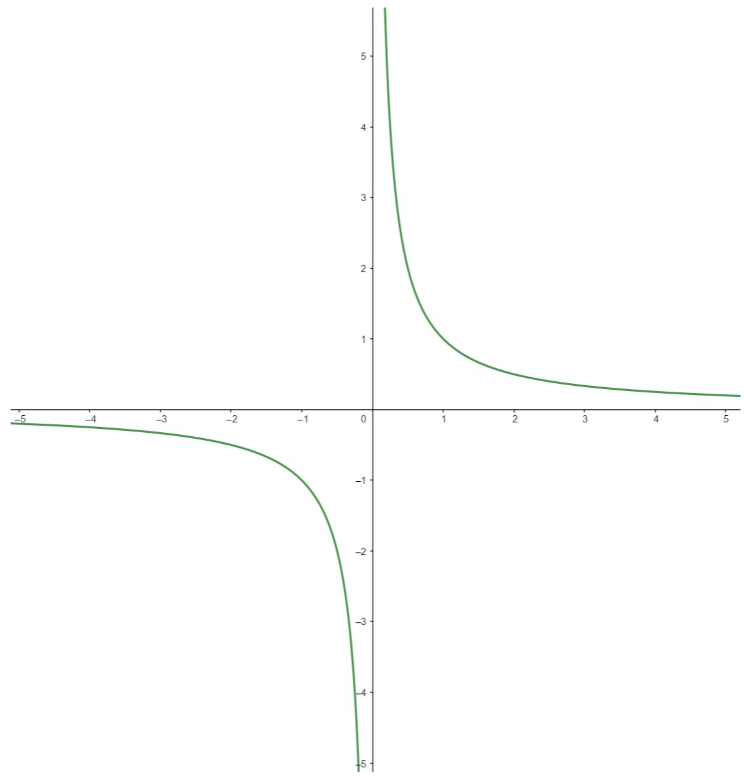
Observația 7.2.4: Punctul O, numit centrul hiperbolei, *i.e.* mijlocul segmentului (F_1F_2), are proprietatea de a fi centru de simetrie al hiperbolei: $P \in \mathcal{H}$ dacă şi numai dacă $S_O(P) \in \mathcal{H}$. De fapt, $S_O(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_2$ *i.e.* o componentă a hiperbolei este simetrizată în cealaltă.

Definiția 7.2.5: O hiperbolă se numeşte *echilateră* dacă asimptotele ei sunt perpendiculare *i.e.* dacă $a = b$.

Ca atare, ecuaţia canonică a unei hiperbole echilatere este $x^2 - y^2 = a^2$. Prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= x - y \end{cases}$$

(care este o rotaţie la 45° compusă cu o omotetie), ecuaţia devine $xy = a^2 \iff y = \frac{a^2}{x}$.



Hiperbola de ecuaţie $y = \frac{1}{x}$

7.2.1 Caracterizarea cu ajutorul dreptei directoare

Întocmai ca la elipsă, avem o caracterizare echivalentă cu ajutorul unei drepte directoare:

Propoziția 7.2.6: *Fie o hiperbolă $\mathcal{H}$ de focare F_1, F_2 şi excentricitate $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$. Atunci există o dreaptă d_1 perpendiculară pe F_1F_2 astfel încât*

$$P \in \mathcal{E} \iff \frac{|PF_1|}{\text{dist}(P, d_1)} \text{ este constantă.}$$

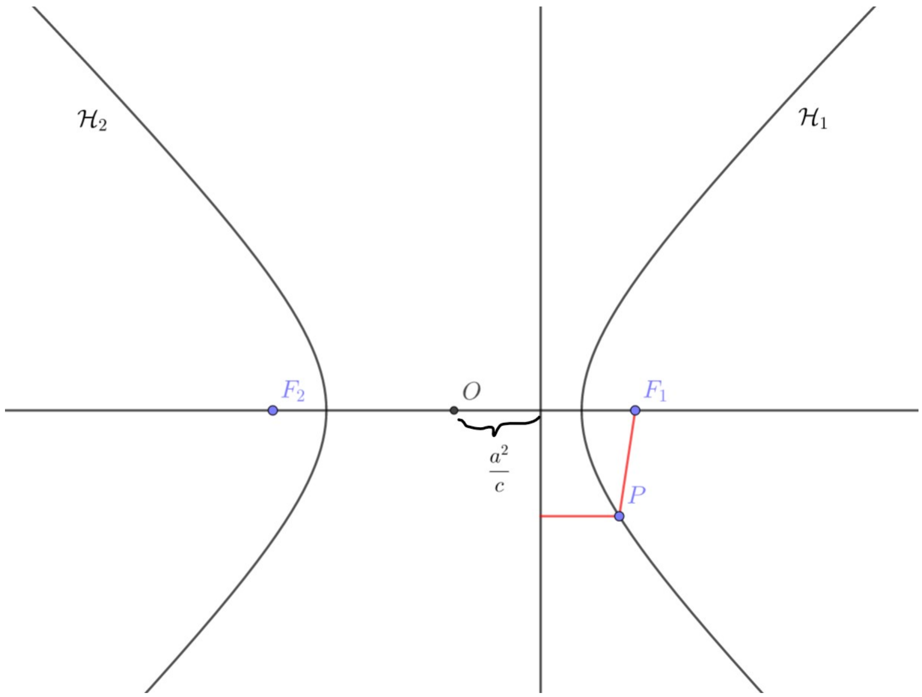
Mai mult, această constantă este e, excentricitatea hiperbolei.

Reciproc, date un punct F_1, o dreaptă d_1 care nu-l conţine pe F_1 şi un $\alpha > 1$, mulţimea

$$\left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|PF_1|}{\text{dist}(P, d_1)} = \alpha\right\}$$

reprezintă o hiperbolă de excentricitate α şi cu unul din focare în F_1.

Demonstraţie. Lăsăm implicaţia directă ca exerciţiu, de vreme ce demonstraţia este foarte similară celei din Propoziția 7.1.4. Mai mult, veţi descoperi din nou că, dacă hiperbola este în ecuaţie canonică, dreapta directoare are ecuaţia $d_1 : x = \frac{a^2}{c}$



Vom demonstra reciproca mai târziu, în varianta sa care pune laolaltă caracterizările tuturor conicelor nedegenerate (vedeţi Propoziția 7.4.21). ■

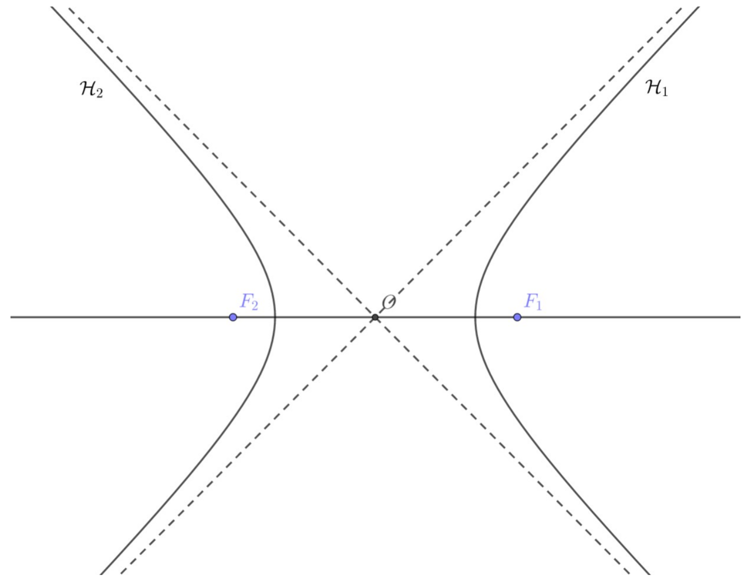
Aşadar, orice hiperbolă determină două drepte directoare perpendiculare pe dreapta focarelor (dacă hiperbola este în ecuaţie canonică (7.2.1), acestea sunt dreptele de ecuaţie $x = \pm\frac{a^2}{c}$). Reciproc, una din aceste drepte, focarul corespunzător şi o excentricitate $e > 1$ determină hiperbola.

7.2.2 Tangente la hiperbolă

Definiția 7.2.7: Se numeşte tangentă la hiperbola $\mathcal{H}$ o dreaptă care intersectează $\mathcal{H}$ într-un punct dublu.

În mod echivalent, în cazul hiperbolei, este o dreaptă ce intersectează $\mathcal{H}$ într-un singur punct şi nu este paralelă cu o asimptotă.

Observația 7.2.8: Din orice punct din "exteriorul" hiperbolei, adică ce numim, poate puţin suprinzător iniţial, partea "dintre" componente ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$ în ecuaţie canonică), putem duce două tangente la hiperbolă, conform schiţei de mai jos:



Observaţi că, din puncte aflate la graniţa dintre regiuni, cel puţin una dintre tangente nu este propriu-zisă, ci "tangentă la infinit", adică este una din asimptote.

Idee de bază Tehnica descrisă în Subsecţiunea 5.2 rămâne valabilă şi funcţionează întotdeauna pentru a determina dreptele tangente în puncte ale hiperbolei, dreptele tangente duse dintr-un punct exterior hiperbolei şi dreptele tangente de o direcţie dată.

Exercițiul 7.2.9: Pe modelul din Subsecţiunea 7.1.2, demonstraţi:

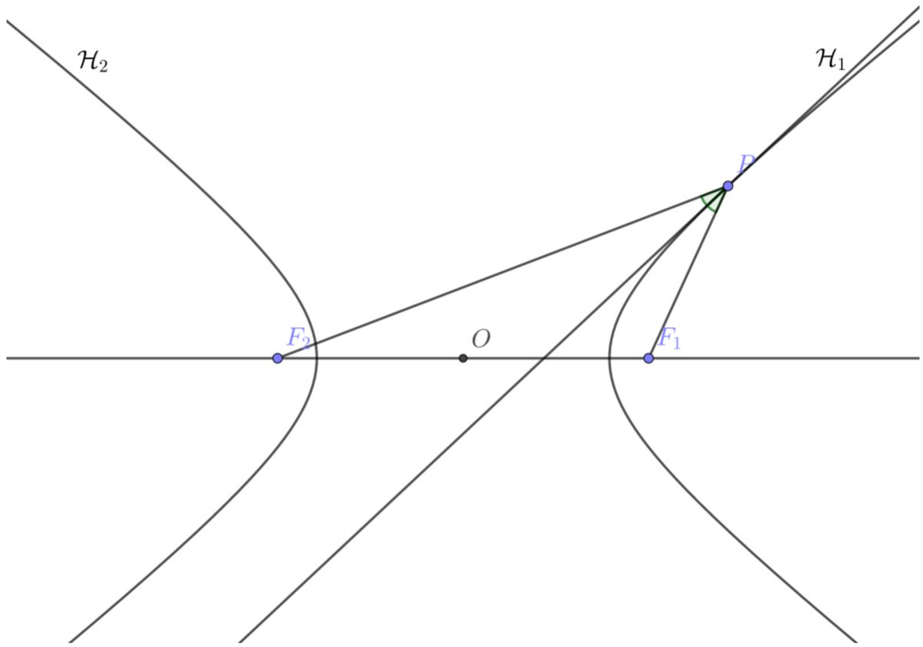
Propoziția 7.2.10: *Ecuaţia dreptei tangente la hiperbola* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *în punctul* $P = (x_P, y_P) \in \mathcal{H}$ *este*

$$\frac{xx_P}{a^2} - \frac{yy_P}{b^2} = 1.$$

Aceasta ecuaţie se spune că este obţinută (din motive lesne de înteles) prin metoda dedublării punctului.

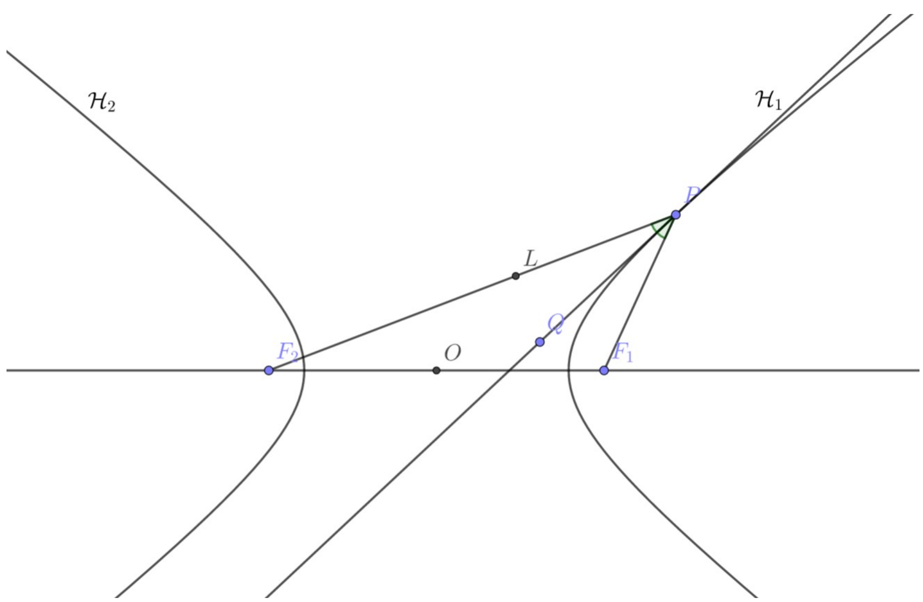
7.2.3 Proprietatea optică a hiperbolei

Propoziția 7.2.11: *O rază care porneşte dintr-un focar al hiperbolei se "reflectă prin" hiperbolă în celălalt focar.*



Cu alte cuvinte, pentru orice punct P de pe elipsa $\mathcal{H}$ de focare F_1 şi F_2, dreapta tangentă la $\mathcal{H}$ în P este bisectoarea unghiului F_1PF_2.

Demonstraţie. Fie un punct P pe hiperbola de semi-axă majoră a. Putem presupune că $P \in \mathcal{H}_1$ *i.e.* $|PF_1| < |PF_2|$. Alegem L pe segmentul (F_2P) astfel încât $|F_2P| - |PL| = 2a$, deci $|PL| = |PF_1|$. Fie d dreapta bisectoare a unghiului $\angle F_1PF_2$. Vrem să arătăm că este dreapta tangentă la hiperbolă în punctul P.

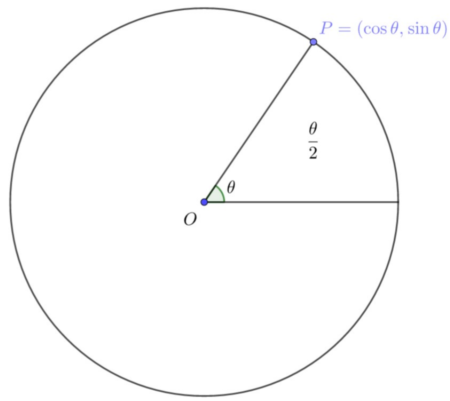


Fie Q un alt punct pe această dreaptă. Atunci, prin definiţia bisectoarei, $|QF_1| = |QL|$ şi, din inegalitatea triunghiului, $2a = |F_2P| - |PL| = |F_2L| > |F_2Q| - |QL| = |F_2Q| - |QF_1|$, deci Q nu aparţine hiperbolei. Am demonstrat că $d \cap \mathcal{H} = \{P\}$, adică este tangenta în P la hiperbolă (aici am folosit şi că d nu este paralelă cu niciuna din asimptote). ∎

7.2.4 Funcţii hiperbolice. Parametrizarea hiperbolei

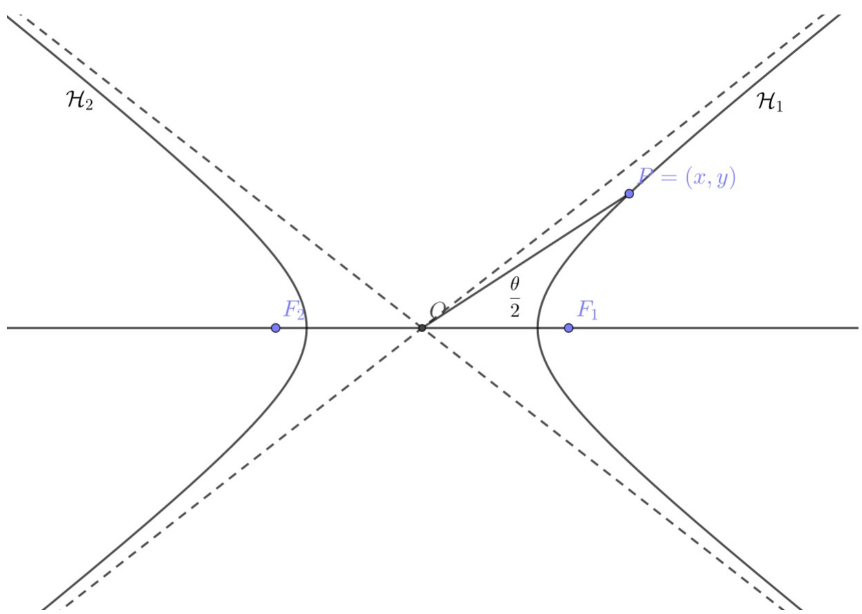
Fie hiperbola echilateră a unitară în formă normală, *i.e.* $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$.

Într-un cerc unitar, pentru un unghi $\theta \in [0, 2\pi)$, aria sectorului de cerc determinat determinat de punctul de coordonate $(\cos\theta, \sin\theta)$ (ca în figura de mai jos) este $\frac{\theta}{2}$.



Aşa cum pe cerc apar în mod natural funţiile trigonometrice, hiperbola unitară determină ceea ce vom numi *funcţii hiperbolice*.

Procedăm la fel: fie $\theta \in \mathbb{R}$ şi punctul $P \in \mathcal{H}_1, P = (x, y)$ (deci $x \geq 1$) astfel încât aria (cu semn) dintre OP, hiperbolă şi axa OX este $\frac{\theta}{2}$.



Dar această arie se poate scrie ca diferenţă dintre aria triunghiului dreptunghic cu ipotenuză OP şi aria de sub graficul hiperbolei:

$$\frac{\theta}{2} = \frac{xy}{2} - \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}dt \tag{7.2.2}$$

(am presupus $y > 0$; această ipoteză suplimentară nu va afecta ce urmează). Calculăm separat integrala, prin părţi:

$$\begin{aligned}
\int_1^x \sqrt{t^2-1}dt &= x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}dt = x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2-1}}dt - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt \\
&= x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \sqrt{t^2-1}dt - \int_1^x \frac{\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t^2-1}}}{t+\sqrt{t^2-1}}dt \\
&= x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \sqrt{t^2-1}dt - \int_1^x \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}{t+\sqrt{t^2-1}}dt \\
&= x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \sqrt{t^2-1}dt - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),
\end{aligned}$$

aşadar

$$\int_1^x \sqrt{t^2-1}dt = \frac{x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2}.$$

Revenim la (7.2.2):

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta}{2} = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2} = \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2} \\
\iff &\theta = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).
\end{aligned}$$

Il scoatem acum pe x în funcţie de θ: $e^\theta = x+\sqrt{x^2-1}$. Cum $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = 1$, avem $e^{-\theta} = x-\sqrt{x^2-1}$, deci

$$x = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}.$$

Aceeaşi formulă este valabilă şi pentru cazul $\theta < 0$. Atunci $y^2 = x^2 - 1 = \frac{e^{2\theta}+2+e^{-2\theta}}{4} - 1 = \frac{e^{2\theta}-2+e^{-2\theta}}{4} = \left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)^2$. Să observăm că y şi θ au acelaşi semn, deci

$$y = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

Definiția 7.2.12: Funcţiile

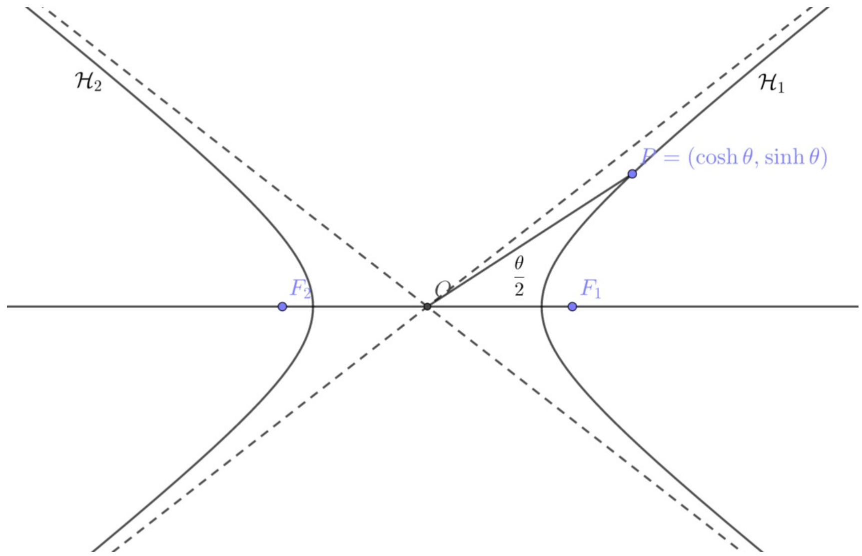
$$\begin{aligned}
\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cosh t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\
\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sinh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2}
\end{aligned}$$

se numesc *funcţiile hiperbolice.*

Observația 7.2.13: Funcţiile hiperbolice satisfac:

1. $(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$.
2. $\frac{d}{dt}\cosh t = \sinh t$.
3. $\frac{d}{dt}\sinh t = \cosh t$.

Am demonstrat că punctul $P \in \mathcal{H}$ ce determină aria $\frac{\theta}{2}$ are coordonate $(\cosh\theta, \sinh\theta)$.



Nu cu mult efort, se deduce de aici

Parametrizarea hiperbolei. Dacă $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ este hiperbola în formă canonică, atunci

$$\mathcal{H} = \{(\pm a\cosh t, b\sinh t) \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{7.2.3}$$

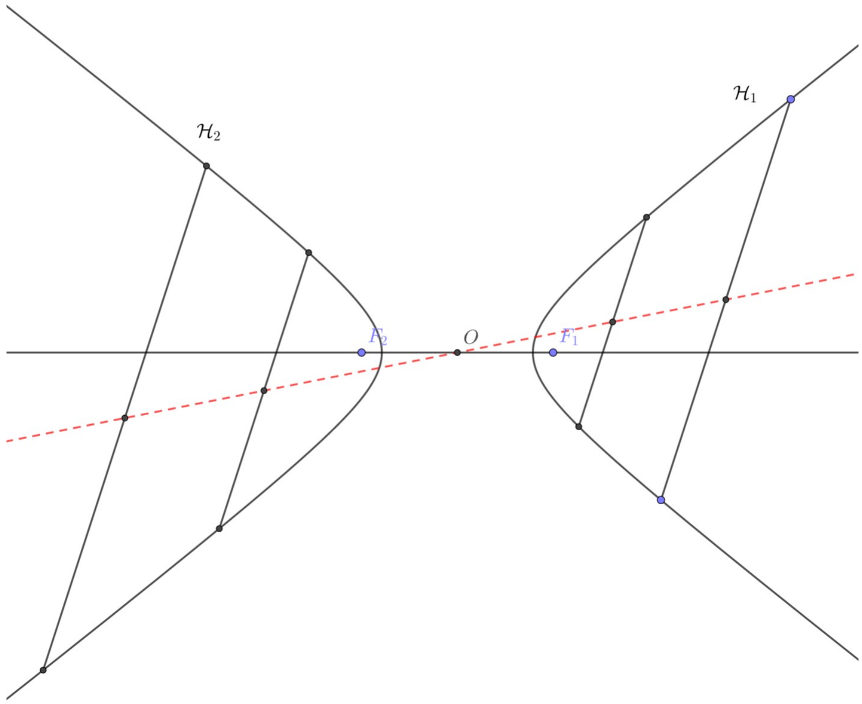
7.2.5 Coarde paralele

Pentru hiperbolă, se păstrează aceleaşi definiţii ca la elipsă în măsura în care au sens, adică putem defini o coardă:

Definiția 7.2.14: Se numeşte *coardă* a unei hiperbole un segment determinat de orice două puncte ale hiperbolei.

Se recuperează şi următorul fapt:

Lema 7.2.15: *Pentru o coardă dată, mijloacele coardelor paralele cu ea sunt coliniare pe o dreaptă ce trece prin centrul hiperbolei.*

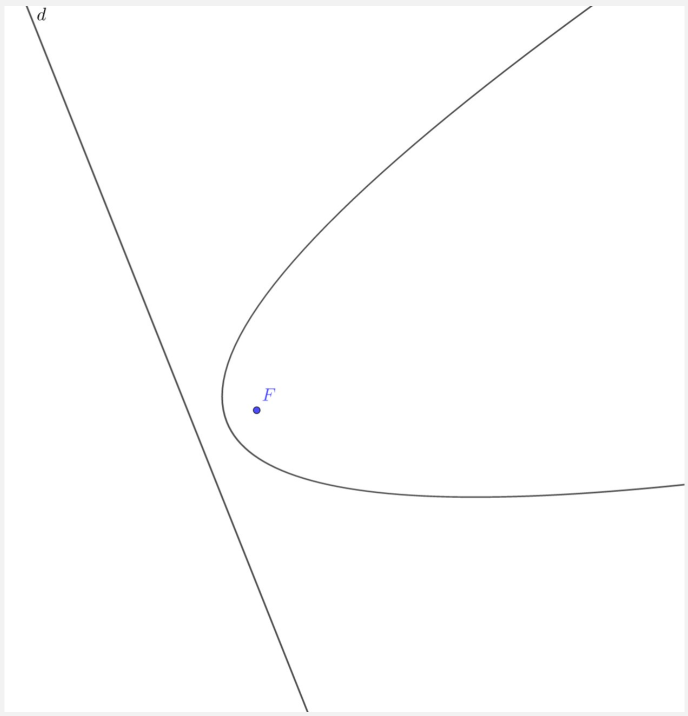


Demonstraţie. Ca în demonstraţia de la Lema 7.1.12, vom putea găsi o transformare bună care duce hiperbola în elipsă, unde proprietatea aceasta are loc - vedeţi **??**. ∎

7.3 Parabola

Definiția 7.3.1: Se numeşte *parabolă* locul geometric al punctelor pentru care distanţa faţă de un punct fixat este egală cu distanţa faţă de o dreaptă fixată.
Explicit, pentru F punct în plan şi d dreaptă, $F \notin d$, parabola determinată este

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{F,d} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |FP| = \text{dist}(P, d)\}.$$



Punctul F se numeşte *focarul* parabolei, iar d se numeşte dreapta directoare a parabolei.

Observația 7.3.2: Definiţia de mai sus poate fi rescrisă:

$$\mathcal{P} = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|PF|}{\text{dist}(P, d)} = 1\right\}.$$

Comparând cu Propoziția 7.1.4 şi Propoziția 7.2.6, vedem că definiţia parabolei este foarte similară cu caracterizările echivalente ale elipselor şi parabolelor, singura diferenţă fiind valoarea raportului. De aceea, putem spune că *excentricitatea unei parabole este* 1.

De această dată, se dovedeşte mai simplu să începem prin a da o expresie în coordonate pentru punctele parabolei, adică o ecuaţie implicită ce defineşte $\mathcal{P}$. Conform definiţiei, există un punct $V \in \mathcal{P}$, mijlocul segmentului (FF'), unde F' este proiecţia lui F pe d. Acesta se numeşte *vârful parabolei*. Alegem coordonatele astfel încât $V = (0, 0)$ şi d este verticală, $d : x = -\frac{p}{2}$ şi $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ pentru un $p > 0$. Fie $P = (x, y) \in \mathcal{P}$. Atunci

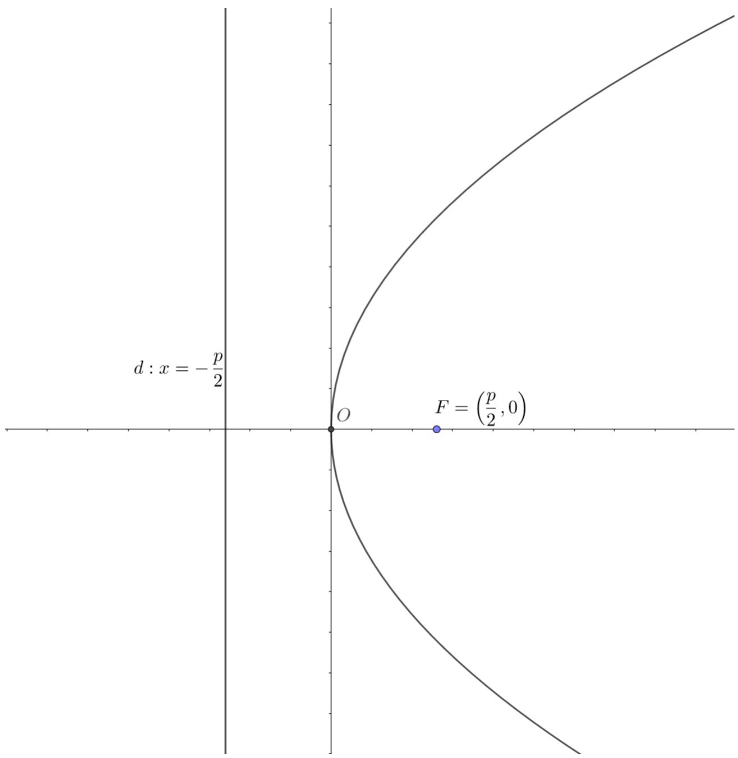
$$|PF| = \text{dist}(P, d) \iff |PF|^2 = (\text{dist}(P, d))^2 \iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \iff y^2 = 2px.$$

Aşadar am găsit

Ecuaţia implicită canonică a unei parabole.

$$y^2 = 2px \tag{7.3.1}$$

este ecuaţia parabolei cu focar în $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ şi dreapta directoare $d : x = -\frac{p}{2}$.
Să observăm că o parabolă în formă canonică este determinată doar de numărul p, care este chiar distanţa dintre focar şi dreapta directoare.



Observaţia 7.3.3: În mod la fel de valid este considerată în unele cărţi forma canonică ca fiind $x^2 = 2py$, diferenţa fiind doar aplicarea unei simetrii $x \leftrightarrow y$.

Lema 7.3.4: *Parabola nu are drepte asimptote.*

Demonstraţie. Putem presupune că parabola este în formă canonică $x^2 = 2py$ (preferăm aici această formă pentru a studia problema asimptotelor funcţiei $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{x^2}{2p}$).

În primul rând, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2p}$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, deci nu se pune problema de asimptote orizontale.

Apoi, dacă $y = mx + n$ este asimptotă oblică, atunci $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{2p} = \infty$, iar $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2p} = -\infty$, deci nu avem nici asimptote oblice. ∎

Ştim deja că elipsele şi hiperbolele au câte două focare şi două drepte directoare corespunzătoare, putând fi definite deci cu ajutorul a două perechi (F, d) punct-dreaptă. În contrast, pentru parabolă are loc următorul fapt:

Lema 7.3.5: *O parabolă este unic determinată de focarul şi dreapta sa directoare* ***şi invers****,* i.e. *dacă presupunem că o parabolă este definită de două perechi* (F_1, d_1) *şi* (F_2, d_2)*:*

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |PF_1| = \text{dist}(P, d_1)\} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |PF_2| = \text{dist}(P, d_2)\},$$

atunci $F_1 = F_2$ *şi* $d_1 = d_2$*.*

Demonstraţie. **Temă!** ■

Lema 7.3.6: *O parabolă* ***nu are centru de simetrie****.*

Demonstraţie. Putem presupune că $\mathcal{P} : y^2 = 2px$. Să presupunem că $A_0 = (x_0, y_0)$ este centru de simetrie *i.e.* $(x, y) \in \mathcal{P} \implies (2x_0 - x, 2y_0 - y) \in \mathcal{P}$. Fie $(x, y) \in \mathcal{P}$. Atunci

$$(2y_0-y)^2 = 2p(2x_0-x) \iff 4y_0^2-4y_0y+y^2 = 4px_0-2px = 4px_0-y^2 \iff 2y^2-4y_0y+(4y_0^2-2px_0) = 0$$

pentru orice y cu $(x, y) \in \mathcal{P}$. Cum pentru orice $y \in \mathbb{R}$, există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $(x, y) \in \mathcal{P}$, polinomul $2y^2 - 4y_0y + (4y_0^2 - 2px_0)$ trebuie să fie nul, o contradicţie evidentă. ■

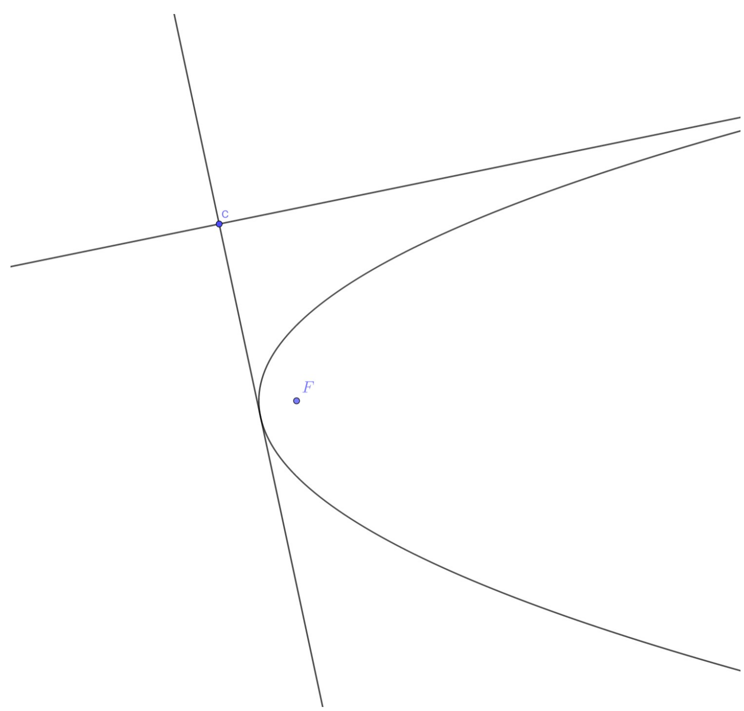
Observația 7.3.7: Parabola are însă o axă de simetrie, perpendiculara din focar pe dreapta directoare (dacă parabola este în formă canonică, aceasta era ecuaţia $y = 0$).

7.3.1 Tangente la parabolă

Definiția 7.3.8: Se numeşte tangentă la parabola $\mathcal{P}$ o dreaptă care intersectează $\mathcal{P}$ într-un punct dublu.

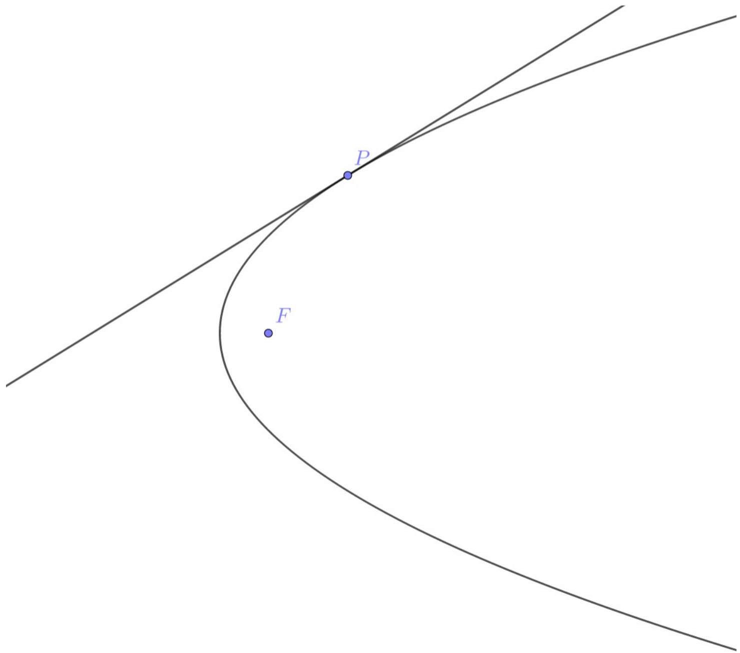
Echivalent, în cazul parabolei, este o dreaptă care intersectează $\mathcal{P}$ doar într-un punct şi pentru care parabola se află în întregime într-unul din semiplanele determinate de ea.

Observația 7.3.9: Din orice punct din "exteriorul" parabolei, adică mulţimea punctelor mai apropiate de dreapta directoare decât de focar ($y^2 > 2px$ în ecuaţie canonică), putem duce două tangente la parabolă.



Idee de bază: Tehnica descrisă în Subsecţiunea 5.2 rămâne valabilă şi funcţionează întotdeauna pentru a determina dreptele tangente în puncte ale parabolei, dreptele tangente a duse dintr-un punct exterior parabolei şi dreapta tangentuă de o direcţie dată.

Aşa cum am făcut pentru elipsă şi parabolă, să îi demonstrăm utilitatea determinând ecuaţia dreptei tangente în punctul $P = (x_P, y_P)$ de pe parabola $\mathcal{P} : y^2 = 2px$.



Parametrizăm dreapta tangentă, fie ea $t_P : (x_P, y_P) + t(u, v)$. Vom afla direcţia (u, v) punând condiţia ca $d \cap \mathcal{P}$ să determine un punct dublu:

$$(y_P + tv)^2 = 2p(x_P + tu) \iff v^2t^2 + 2(y_Pv - pu) + (y_P^2 - 2px_P) = 0.$$

Cum $P \in \mathcal{P}$, $y_P^2 - 2px_P = 0$, obţinem ecuaţia de gradul 2 fără termen liber

$$v^2t^2 + 2(y_Pv - pu) = 0,$$

care are rădăcină dublă dacă şi numai dacă $y_Pv - pu = 0$, de unde $u = \frac{y_Pv}{p}$.

Ne întoarcem la ecuaţia tangentei:

$$t_P : \frac{x - x_P}{u} = \frac{y - y_P}{v} \iff v(x - x_P) = \frac{y_Pv}{p}(y - y_P).$$

Dar direcţia (u, v) a lui t_P nu poate avea $v = 0$ (o tangentă la parabola în formă canonică nu poate fi orizontală), deci putem simplifica prin v:

$$p(x - x_P) = yy_P - y_P^2 = y_Py - 2px_P \iff y_Py = p(x + x_P),$$

unde am folosit din nou că $P \in \mathcal{P}$.

Am obţinut următoarea

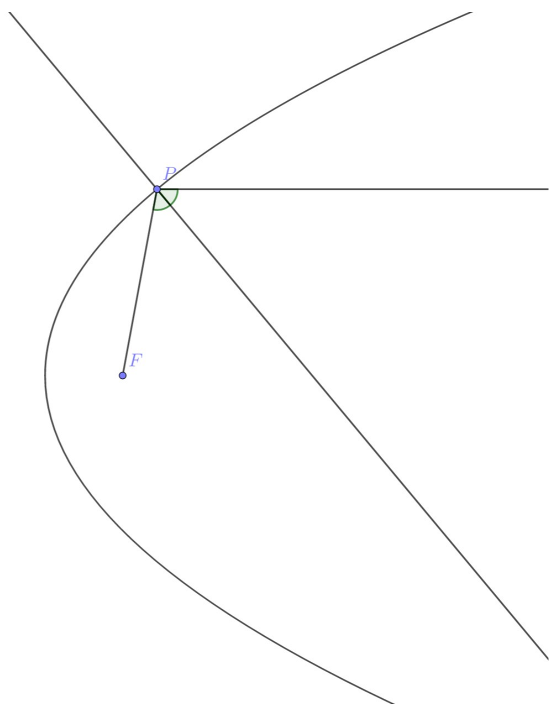
Propoziția 7.3.10: *Ecuaţia dreptei tangente la parabola $y^2 = 2px$ în punctul $P = (x_P, y_P) \in \mathcal{P}$ este*

$$y_P y = p(x + x_P).$$

Aceasta ecuaţie se spune că este obţinută (din motive lesne de înteles) prin metoda dedublării punctului.

7.3.2 Proprietatea optică a parabolei

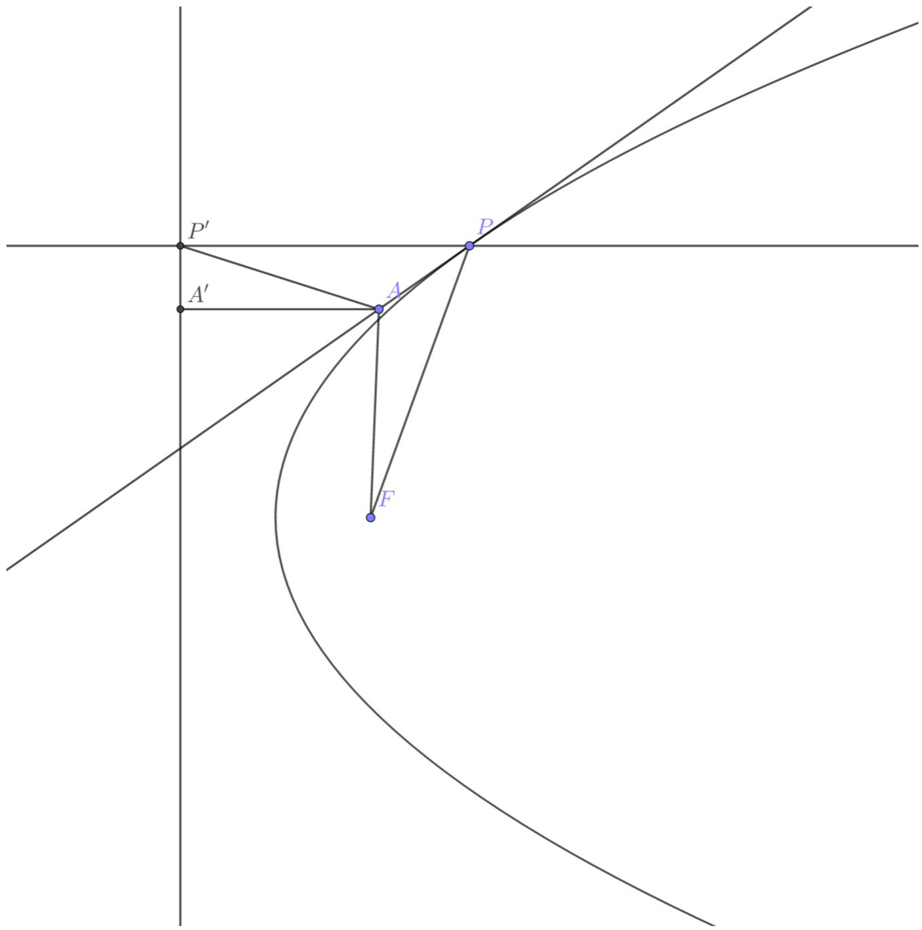
Propoziția 7.3.11: *O rază care porneşte din focarul unei parabole este reflectată de parabolă paralel cu axa de simetrie.*



Cu alte cuvinte, pentru orice punct P de pe parabola $\mathcal{P}$ de focar F, dreapta normală la parabolă în P este bisectoarea unghiului format de FP cu dreapta orizontală prin P.

Demonstraţie. Fie un punct P pe parabolă şi P' proiecţia sa pe dreapta directoare d. Considerăm t dreapta bisectoare a unghiului $\angle FPP'$; vom arăta că t este tangenta în P la $\mathcal{P}$.

Fie A un alt punct de pe t şi A' proiecţia sa pe d. Cum $A \in t$, avem $|FA| = |AP'| > |AA'|$, deci $A \notin \mathcal{P}$. Cu alte cuvinte, t intersectează $\mathcal{P}$ doar în P şi celelalte puncte ale sale sunt în exteriorul parabolei, deci t este tangenta căutată.

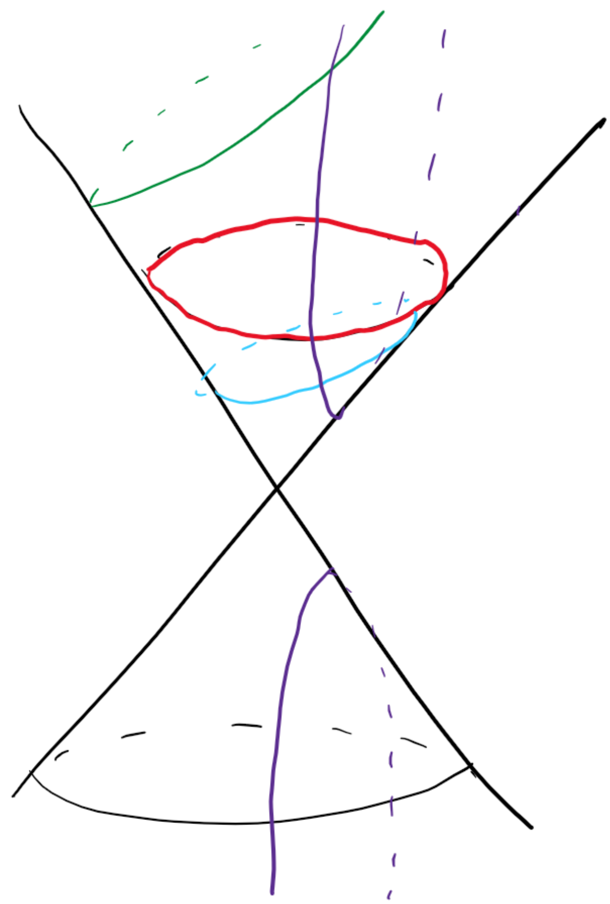

P'
P
A'
A
F

■

7.4 Conice din punct de vedere unificat

Reluăm acum definiţia cu care am început capitolul:

Definiția 7.4.1: Se numeşte *conică* o secţiune plană a unui con din spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ (*i.e.* intersecţia unui con din $\mathbb{R}^3$ cu un plan).



Vom justifica în capitolul 9 echivalenţa acestei definiţii geometrice cu cea algebrică care urmează şi care se dovedeşte mult mai manevrabilă.

Pentru început, formalizăm noţiunea de reper ortonormat, pe care de fapt am folosit-o de fiecare dată când scriam "se poate alege un reper astfel încât" sau "putem alege axele de coordonate astfel încât":

Definiția 7.4.2:

1. Un cuplu $\mathcal{R} = (O, \{e_1, e_2\})$ se numeşte *reper ortonormat pozitiv orientat* dacă $O \in \mathbb{R}^2$ şi $\{e_1, e_2\}$ este o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{OP} \mid P \in \mathbb{R}^2\} \simeq \mathbb{R}^2$ cu $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ (ortonormat) şi astfel încât e_2 se obţine rotind în sens trigonometric pe e_1 (pozitiv orientat).

   Observaţie: Condiţiile de mai sus sunt echivalente cu $(e_1 \mid e_2) \in SO(2)$ (unde prin $(e_1 \mid e_2)$ înţelegem matricea din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ având coloane coordonatele vectorilor e_1 şi e_2).

   În acest curs, toate reperele se consideră ortonormate şi pozitiv orientate (de fapt, nici nu am definit altceva); **le vom numi, pe scurt, repere.**

2. Coordonatele unui punct în raport cu reperul $\mathcal{R} = (O, \{e_1, e_2\})$ sunt prin definiţie coordonatele lui $\overrightarrow{OP} \in \mathcal{V}$ în raport cu baza $\{e_1, e_2\}$: $[P]_{\mathcal{R}} = (x, y)$ în raport cu reperul $(O, \{e_1, e_2\})$ dacă $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$.

Propoziția 7.4.3: *(ecuaţiile unei schimbări de reper ortonormat) Fie două repere $\mathcal{R} = (O, \{e_1, e_2\})$, $\mathcal{R}' = (O', \{e'_1, e'_2\})$ şi un punct P în plan.*

Atunci, notând bazele lui $\mathbb{R}^2$ corespunzătoare cu $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}, \mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\}$, matricea de schimbare de bază $M_{B,B'} \in SO(2)$ şi

$$[P]_{\mathcal{R}'} = M_{B,B'} \cdot [P]_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{O'O}.$$

Cu alte cuvinte, dacă (x, y) sunt coordonatele lui P în raport cu un reper, coordonatele în raport cu alt reper sunt $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$ pentru o matrice $M \in SO(2)$ şi $v \in \mathbb{R}^2$, adică se schimbă ***printr-o izometrie ce păstrează orientarea*** *(vedeţi Teorema 4.2.3).*

Demonstraţie. Este imediată din definiţia matricei de schimbare de bază $M_{B,B'}$. ∎

Dăm acum definiţia centrală:

Definiția 7.4.4: Se numeşte *conică* locul geometric al punctelor din planul $\mathbb{R}^2$ ale căror coordonate în raport cu un reper ortonormat respectă o ecuaţie polinomială de grad 2:

$$\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0. \tag{7.4.1}$$

Observația 7.4.5: Definiţia este într-adevăr coerentă, adică nu depinde de alegerea reperului: la o schimbare de coordonate (o schimbare de reper), forma ecuaţiei se păstrează *i.e.* este tot o ecuaţie polinomială de grad 2.

Scriere matricială. Notând cu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, pentru $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, (7.4.1) se rescrie

$$\Gamma: \ {}^tXAX + \ 2{}^tbX + c = 0. \tag{7.4.2}$$

Reţinem că $A \neq 0$ **este matrice simetrică**.
Pentru o scriere şi mai compactă, notând cu

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ şi } \tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

(7.4.2) se rescrie

$$\Gamma: \ {}^t\tilde{X}\tilde{A}\tilde{X} = 0 \tag{7.4.3}$$

Reţinem că şi $\tilde{A}$ **este matrice simetrică.**
Notaţii clasice: $\delta = \det A,\ \Delta = \det \tilde{A},\ \mathcal{I} = \mathrm{Tr} A.$

Observația 7.4.6: În (7.4.2), componenta omogenă de grad 2, adică ${}^tXAX$, este prin definiţie o formă pătratică aplicată pe vectorul X.

Observația 7.4.7: A, b şi c **nu sunt determinate unic de conică şi alegerea reperului**. De exemplu, ecuaţiile

$$x^2 + y^2 = 0$$
$$2x^2 + 3y^2 = 0$$

definesc aceeaşi conică $\Gamma = \{(0,0)\}$.

Tocmai pentru a sublinia acest fapt, veţi găsi în literatura şi distanţia *conică algebrică*, fiind polinomul de grad 2 în sine, vs. *conică geometrică* ca locul geometric determinat de ecuaţie.

Fireşte că ecuaţiile echivalente (7.4.1), (7.4.2) şi (7.4.3) depind de alegerea reperului. Dar cele trei notaţii de mai sus nu ar valora foarte mult dacă ar varia şi ele împreună cu reperul. De aceea demonstrăm ca prim fapt esenţial

Propoziția 7.4.8: *Numerele $\delta, \Delta, \mathcal{I}$ sunt invarianţi metrici, adică nu se schimbă odată cu o schimbare de reper ortonormat/prin aplicarea unei izometrii.*

Demonstraţie. Fie Γ o conică. Să presupunem că fixăm două repere $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}'$ şi avem o ecuaţie (7.4.2) definitorie pentru Γ în raport cu $\mathcal{R}$ *i.e.* avem

$$\Gamma: \ {}^tXAX + \ 2{}^tbX + c = 0.$$

unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simetrică, $b \in \mathbb{R}^2$ şi $c \in \mathbb{R}$ şi $[P]_{\mathcal{R}} = X$. Notăm şi $[P]_{\mathcal{R}'} = X'$.

Conform Propoziția 7.4.3, pentru orice punct P, avem

$$[P]_{\mathcal{R}} = M \cdot [P]_{\mathcal{R}'} + v \iff X = MX' + v$$

pentru un $M \in SO(2)$ şi un $v \in \mathbb{R}^2$. Aşadar

$$\begin{aligned} & {}^tXAX + \ 2{}^tbX + c = 0 \iff \ {}^t\left(MX' + v\right) A \left(MX' + v\right) + 2{}^tb(MX' + v) + c = 0 \\ \iff & \ {}^tX'({}^tMAM)X' + (\ {}^tX'{}^tMA{}^tv + vAMX' + 2{}^tbMX') + \ (c +{}^t vAv) = 0 \\ \iff & \ {}^tX'({}^tMAM)X' + 2({}^tbM + vAM)X' + \ (2{}^tbv + c + \ {}^tvAv) = 0, \end{aligned}$$

unde în final am folosit că ${}^tX'{}^tMA{}^tv$ este număr, deci egal cu transpusa sa, iar A este simetrică prin ipoteză. Deci, în coordonatele X', obţinem ecuaţia

$$\Gamma:\ {}^tX'A'X' + 2{}^tb'X' + c' = 0$$

unde $A' = {}^tMAM$, ${}^tb' = {}^tbM + vAM$ şi $c' = c + {}^tvAV + 2\,{}^tbM$ pentru $M \in SO(2)$. De aici, $\tilde{A}' = {}^t\tilde{M}\tilde{A}\tilde{M}$ pentru $\tilde{M} = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (verificaţi!). Cum $M \in SO(2)$, avem imediat $\det A = \det A'$ şi $Tr(A) = Tr(A')$. În plus, $\det \tilde{M} = \det M = 1$, deci $\det \tilde{A} = \det \tilde{A}'$. Aşadar δ, Δ şi $\mathcal{I}$ nu se schimbă odată cu o schimbare de reper.

■

Observaţia 7.4.9: Chiar dacă n-am fi considerat doar izometrii ce păstrează orientarea, adică n-am fi lucrat doar cu repere ortonormate pozitiv definite, aceleaşi calcule ne arată că $rang(A)$ şi $rang(\tilde{A})$ este invariant la schimbări de reper, deci proprietatea lui δ şi Δ de a fi sau nu nule rămâne invariant şi în acel caz. Mai mult, raportul $\frac{\Delta}{\delta}$ este un invariant propriu-zis.

7.4.1 Nedegenerare şi existenţa centrului unic

Putem da acum următoarea definiţie, care aparent, deşi nu depinde de o schimbare de reper, depinde de ecuaţia aleasă pentru o conică (deci de conica *algebrică*), dar vom realiza ulterior că reflectă un fapt geometric:

Definiţia 7.4.10: O conică Γ determinată de ecuaţiile echivalente (7.4.2), (7.4.3) se numeşte *nedegenerată* dacă $\Delta \neq 0$ şi *degenerată* în caz contrar.

În schimb, este mai limpede că seminificaţia invariantului δ este pur geometrică:

Definiţia 7.4.11: Un punct P_0 se numeşte *centru* pentru conica Γ dacă $S_{P_0}(\Gamma) = \Gamma$.

Să rescriem în coordonate condiţia de mai sus. Fixăm un reper în care conica Γ este dată de ecuaţia (7.4.2) şi fie $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = X_0$ în acel reper. Atunci

$$\begin{aligned} P_0 \text{ centru} &\iff {}^t(2X_0 - X)A(2X_0 - X) + 2{}^tb(2X_0 - X) + c = 0,\ \forall X \in \Gamma \\ &\iff {}^tXAX - 2{}^tbX + c + 4({}^tX_0AX_0 + {}^tbX_0 - {}^tX_0AX) = 0,\ \forall X \in \Gamma \\ &\iff {}^tX_0AX_0 + {}^tbX_0 - {}^tX_0AX = {}^tbX,\ \forall X \in \Gamma \\ &\iff {}^t(AX_0 + b)X - {}^t(AX_0 + b)X_0 = 0,\ \forall X \in \Gamma \\ &\iff {}^t(AX_0 + b)(X - X_0) = 0,\ \forall X \in \Gamma \end{aligned}$$

Dar dacă $AX_0 + b \neq 0$, aceasta este ecuaţia unei drepte! Aşadar, dacă conica Γ nu este inclusă într-o dreaptă, atunci P_0 este centru dacă şi numai dacă $AX_0 + b = 0$.

De fapt, are loc faptul general (pe care pentru moment îl acceptăm, îl vom demonstra în context general în capitolul despre hipercuadrice, vedeţi **??**):

Propoziţia 7.4.12: *Punctul P_0 de coordonate X_0 este un centru al conicei $\Gamma:\ {}^tXAX + 2{}^tbX + c = 0$ dacă şi numai dacă $AX_0 = -b$.*

Corolarul 7.4.13: *Mulţimea centrelor unei conice este vidă, un punct sau o dreaptă.*

Corolarul 7.4.14: *Conica are centru unic $\iff$ $\delta \neq 0$.*

Propoziția 7.4.15: *Dacă conica* $\Gamma : f(X) = {}^tXAX + 2^tbX + c = 0$ *are centru unic* X_0*, atunci* $f(X_0) = \frac{\Delta}{\delta}$.

Demonstraţie. Din Propoziția 7.4.12, ştim că centrul respectă ecuaţia $AX_0 = -b$. Atunci

$$f(X_0) = {}^tX_0AX_0 + 2^tbX_0 + c = -{}^tX_0b + 2^tbX_0 + c = {}^tbX_0 + c = b_1x_0 + b_2y_0 + c.$$

Dar, din regula lui Cramer, X_0, fiind soluţia sistemului $AX = -b$, avem

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -b_1 & a_{12} \\ -b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\delta}, \; y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 \\ a_{12} & -b_2 \end{vmatrix}}{\delta},$$

aşa că

$$f(X_0) = b_1x_0 + b_2y_0 + c = \frac{1}{\delta}\left(b_1\begin{vmatrix} -b_1 & a_{12} \\ -b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 \\ a_{12} & -b_2 \end{vmatrix} + c\delta\right) = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

■

Propoziția 7.4.16: *Dacă conica* $\Gamma : {}^tXAX + 2^tbX + c = 0$ *are centru unic* $O = (0,0)$ *în raport cu reperul* $\mathcal{R}$*, atunci* $b = 0$ *şi* $c = \frac{\Delta}{\delta}$ i.e. *ecuaţia devine*

$$\Gamma : {}^tXAX + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Demonstraţie. Din Propoziția 7.4.12, ştim că centrul respectă ecuaţia $AX_0 = -b$. Dacă O este singura soluţie, atunci $b = 0$.

Restul enunţului rezultă din Propoziția 7.4.15. ■

7.4.2 Aducerea unei conice la formă canonică

Definiția 7.4.17: Spunem că o conică Γ este *în formă canonică* dacă este dată de unul din următoarele trei tipuri de ecuaţii:

(i) $\Gamma : \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 = 0, \; \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$

(ii) $\Gamma : \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 - 1 = 0, \; \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$

(iii) $\Gamma : x^2 - 2py = 0, \; p \neq 0$

Teorema 7.4.18: *Orice conică se poate aduce la formă canonică prin izometrii care păstrează orientarea (printr-o schimbare de reper ortonormat pozitiv orientat)* i.e. *printr-o compunere dintre o translaţie şi o rotaţie.*

Demonstraţie. Fie conica

$$\Gamma : {}^tXAX + 2^tbX + c = 0$$

în raport cu reperul $\mathcal{R}$.

Cazul I: Dacă Γ are centru unic $\iff \delta \neq 0$.

Pasul 1 (Translatare pentru a avea centru în origine): Atunci, conform Propoziția 7.4.12, acel centru este X_0, unica soluţie a ecuaţiei $AX = -b$. Făcând o translaţie T_{-X_0}, centrul unic al lui Γ în noul reper $\mathcal{R}'$ devine $O = (0,0)$. Conform Propoziția 7.4.16,

$$\Gamma : {}^tXA'X + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

în reperul $\mathcal{R}'$.

Pasul 2 (Rotaţie pentru alinierea reperului cu direcţiile principale): Reperul este acum $\mathcal{R}' = (O', \{e_1, e_2\})$.

Matricea A' este simetrică, deci diagonalizabilă (vedeţi cursul de Algebră Liniară). Fie λ_1, λ_2 valorile sale proprii (nenule, pentru că $\lambda_1\lambda_2 = \delta \neq 0$), numărate cu multiplicităţi.

- Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$ atunci este cunoscut (şi uşor de văzut) că $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ pentru orice v_1 vector propriu corespunzător lui λ_1 şi v_2 vector propriu corespunzător lui λ_2. Atunci $\left\{w_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1, w_2 = \pm\frac{1}{\|v_2\|}v_2\right\}$ este o bază ortonormală pozitiv orientată şi considerăm $\mathcal{R}'' = (O, \{w_1, w_2\})$ noul reper. În acesta, prin definiţia diagonalizării, avem
$$\Gamma : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$
- Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, atunci $A' = \lambda I_2$ şi
$$\Gamma : \lambda x^2 + \lambda y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$
deja în reperul $\mathcal{R}'$.

În ambele situaţii, ne regăsim în tipurile (i) sau (ii) de forme canonice, după cum Δ este sau nu nul.

Cazul II: Dacă Γ nu are centru unic $\iff$ $\delta = 0$.

Pasul 1 (Rotaţie pentru alinierea reperului cu direcţiile principale): Cum nu putem începe cu o translaţie, trecem direct la al doilea pas precent: matricea A este simetrică, deci diagonalizabilă şi are valorile proprii $\lambda_1 = \lambda \neq 0$ şi $\lambda_2 = 0$ (pentru că $\lambda_1\lambda_2 = \delta = 0$). Fie $\{w_1, w_2\}$ o bază ortonormală pozitiv orientată de valori proprii corespunzătoare lui $\lambda_1 = \lambda$ şi $\lambda_2 = 0$, construită la fel ca în primul caz. Considerăm un nou reper $\mathcal{R}' = (O, \{w_1, w_2\}$ unde O este oarecare (în practică, este păstrat centrul reperului iniţial).

Prin definiţia diagonalizării,
$$\Gamma : \lambda x^2 + 2b_1' x + 2b_2' y + c' = 0$$
în reperul $\mathcal{R}'$.

Pasul 2 (Translatare pentru simplificarea expresiei): Acum putem să formăm pătrate pentru a simplifica expresia:
$$\Gamma : \lambda\left(x + \frac{b_1'}{\lambda}\right)^2 + 2b_2' y + \left(c' - \frac{b_1'^2}{\lambda^2}\right) = 0.$$

Dacă $b_2' = 0$, împărţind eventual printr-un număr şi via o translaţie, avem o ecuaţie canonică de tipul (i) sau (ii) (cu $\lambda_2 = 0$).

Dacă $b_2' \neq 0$, atunci, notând $d' = \left(c' - \frac{b_1'^2}{\lambda^2}\right)$,
$$\Gamma : \lambda\left(x + \frac{b_1'}{\lambda}\right)^2 + 2b_2'\left(y + \frac{d'}{2b_2'}\right) = 0$$
şi, iarăşi via o translaţie şi împărţind la λ, ajungem la o ecuaţie canonică de tipul (iii). ∎

7.4.3 Clasificarea conicelor

Ţinând cont de Teorema 7.4.18, pentru o clasificare completă a conicelor este suficient să le clasificăm pe cele de ecuaţii:

(i) $\Gamma : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$

(ii) $\Gamma : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - 1 = 0$

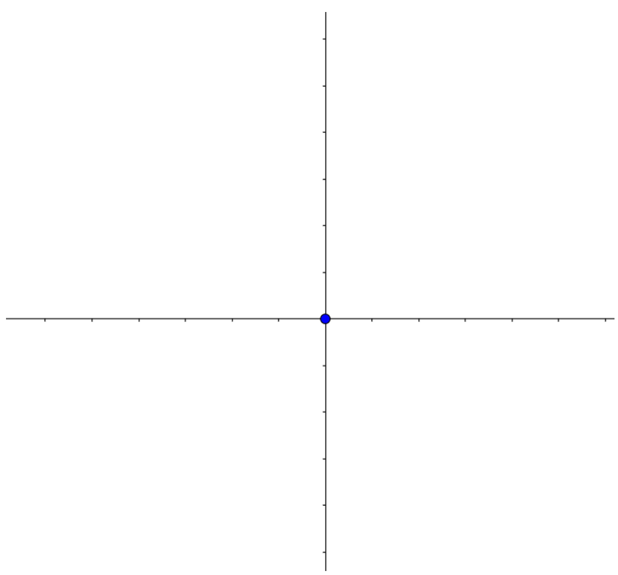
(iii) $\Gamma : x^2 - 2py = 0,\ p \neq 0$

Ne servim iarăşi de invarianţii Δ, δ. Aşadar:

(i) $\Gamma : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$

Aici $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci $\Delta = 0$ *i.e.* conica este întotdeauna degenerată.

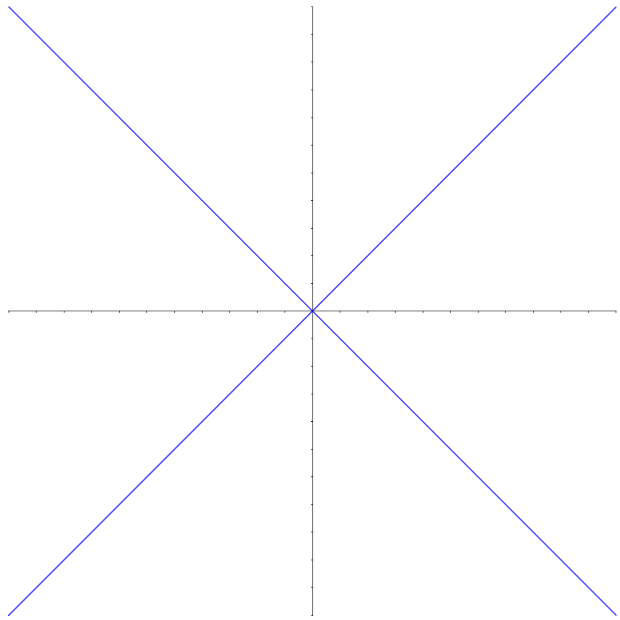
- Dacă $\lambda_1 \lambda_2 = \delta \neq 0$, deci centrul este unic:
  - Dacă $\delta > 0$, adică λ_1, λ_2 au acelaşi semn, Γ este **un punct**.



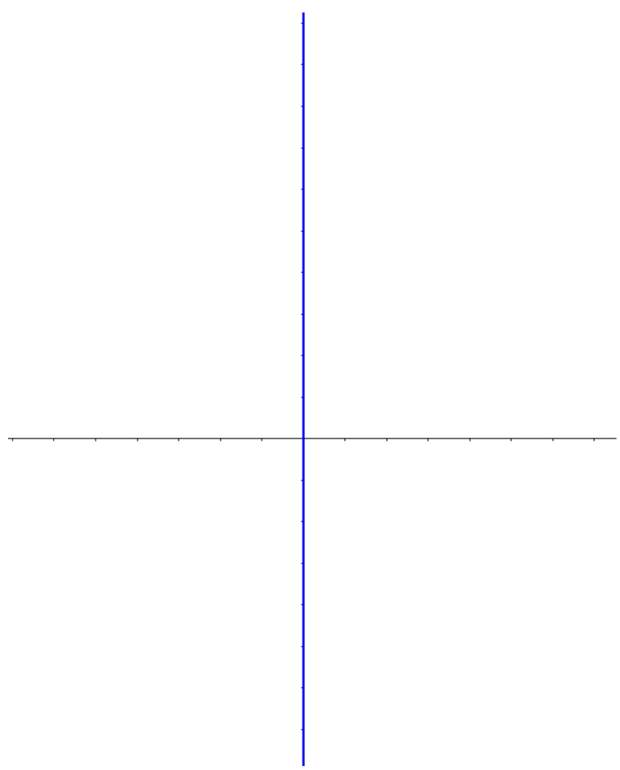
  - Dacă $\delta < 0$, adică λ_1, λ_2 au semne opuse, să zicem $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$,

$$\Gamma : (\sqrt{\lambda_1}x + \sqrt{-\lambda_2})(\sqrt{\lambda_1}x - \sqrt{-\lambda_2}) = 0$$

este **o reuniune de drepte secante**.



- Dacă, de exemplu, $\lambda_2 = 0$, deci centrul nu este unic, avem $\Gamma : \lambda_1 x^2 = 0 \iff x^2 = 0$, **o dreaptă dublă**.



(ii) $\Gamma : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - 1 = 0$

Aici $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, deci $\Delta = -\delta$.

- Dacă conica nu are centru unic şi este degenerată, $\Delta = \delta = 0$, de exemplu pentru că

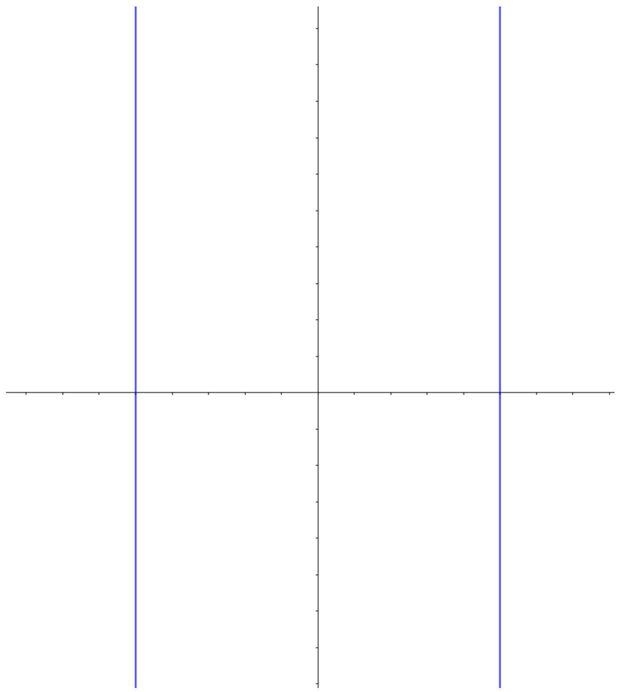
$\lambda_2 = 0$, avem

$$\Gamma : \lambda_1 x^2 - 1 = 0.$$

- Dacă $\lambda_1 > 0$,

$$\Gamma : (\sqrt{\lambda_1}x + 1)(\sqrt{\lambda_1}x - 1) = 0,$$

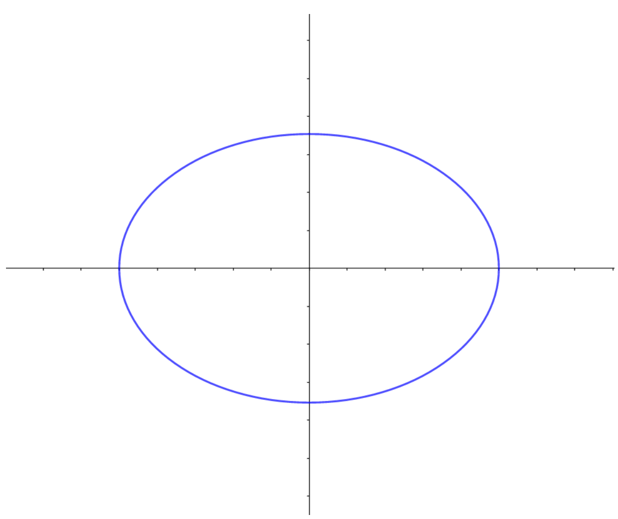
  o reuniune de drepte paralele.



- Dacă $\lambda_1 < 0$, conica este **vidă**.

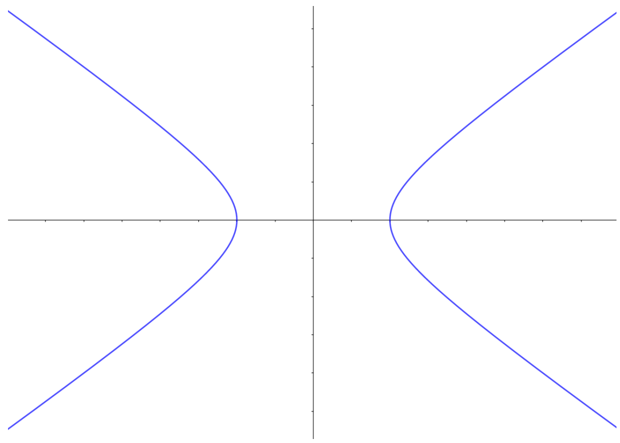
• Dacă are centru unic şi este nedegenerată, $\Delta = -\delta \neq 0$, atunci:

- Dacă $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, Γ este **o elipsă**.

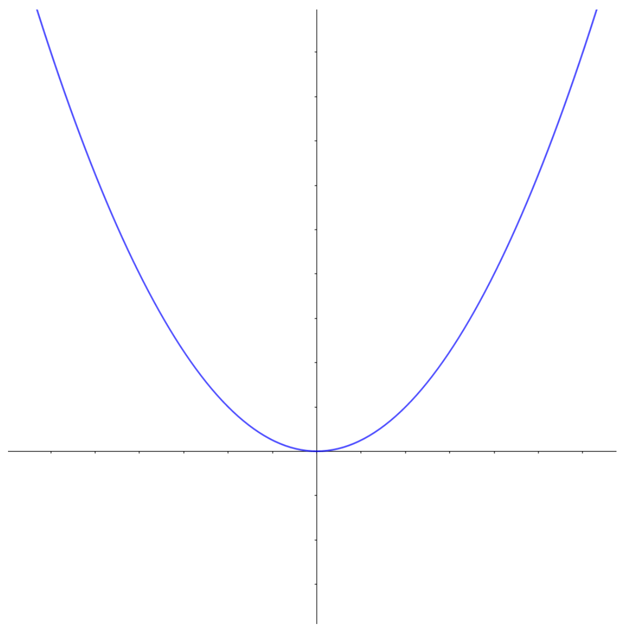


- Dacă $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, Γ este **vidă**.

- Dacă λ_1, λ_2 au semne opuse, Γ este **o hiperbolă**.



(iii) $\Gamma : x^2 - 2py = 0$ Aici $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix}$, deci $\delta = 0$ (nu are centru unic) şi $\Delta = -p^2 = 0 \iff p = 0$, exclus prin ipoteză (este nedegenerată). Deci Γ este mereu **o parabolă**.



Observaţia 7.4.19: Aşadar **conicele nedegenerate sunt exact elipsa, hiperbola şi parabola**, deci condiţia $\Delta \neq 0$ reflectă şi ea un fapt geometric (*i.e.* nu depinde de ecuaţia conicei).

Exemplul 7.4.20: Vom aduce conicele

a) $\Gamma_1 : 7x^2 - 8xy + y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$,

b) $\Gamma_2 : x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$,

la forma canonică, le vom afla tipul şi vom preciza reperul în care apar în acea formă canonică.

a) Pentru $\Gamma_1 : 7x^2 - 8xy + y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$, avem

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -4 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix},$$

deci $\delta = -9 \neq 0$ şi $\Delta = -324 \neq 0$, aşadar Γ_1 **are centru unic** şi **este nedegenerată**. În plus, cum $\delta < 0$, ştim deja că Γ_1 este **o hiperbolă**.

Pasul 1. Acest centru $X_0 = (x_0, y_0)$ este soluţia unică a ecuaţiei $AX = -b$, deci

$$\begin{cases} 7x_0 & - & 4y_0 & = & 3 \\ -4x_0 & + & y_0 & = & 6 \end{cases},$$

de unde $X_0 = (x_0, y_0) = (-3, -6)$ (este o coincidenţă că $X_0 = b$).

Aşadar, via schimbarea de reper $X' = X - \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \iff X = X' + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, conform Propoziția 7.4.15, avem

$$\Gamma_1 : \ {}^tX'AX' + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \iff 7x'^2 - 8x'y' + y'^2 + 36 = 0.$$

Pasul 2. Diagonalizăm matricea $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$: polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda+1)(\lambda-9).$$

Avem valorile proprii $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1$, distincte. Ştim din demonstraţia Teorema 7.4.18 că, în urma unei schimbări de reper, ajungem la forma

$$\Gamma_1 : 9x''^2 - y''^2 + 36 = 0,$$

care (împărţind la -36) este o formă canonică, deci Γ_1 este într-adevăr o hiperbolă. Dacă nu ne-am fi propus să aflăm şi reperul în care are această ecuaţie, ne puteam opri aici.

Pentru aflarea reperului, determinăm o bază ortonormală în care matricea A devine diagonală, deci o bază ortonormală în spaţiile proprii ale lui A:

Pentru λ_1, spaţiul propriu corespunzător

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\}$$

este mulţimea soluţiilor sistemelor

$$\begin{cases} -2x & - & 4y & = & 0 \\ -4x & - & 8y & = & 0 \end{cases},$$

deci $V_{\lambda_1} = \langle(2, -1)\rangle_{\mathbb{R}}$.

La fel,

$$V_{\lambda_2} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\}$$

este mulţimea soluţiilor sistemelor

$$\begin{cases} 8x & - & 4y & = & 0 \\ -4x & + & 2y & = & 0 \end{cases},$$

deci $V_{\lambda_2} = \langle (1,2) \rangle_{\mathbb{R}}$.

Aşa cum ştim din teoria generală despre matrice simetrice, baza **este deja ortogonală** şi trebuie doar normalizată. Să notăm cu

$$v_1 = \frac{1}{\|(2,-1)\|}(2,-1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ şi cu } v_2 = \frac{1}{\|(1,2)\|}(1,2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right);$$

$\mathcal{B}'' = \{v_1, v_2\}$ este o bază ortonormală pozitiv definită (altfel, schimbăm semnul unui vector) în care (aplicaţia corespunzătoare în baza canonică matricei) A este diagonală.

În plus,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

şi schimbarea de coordonate dorită este

$$X'' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} X' \iff X' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} X''.$$

Punând cele două schimbări de coordonate împreună, avem

$$X = X' + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} X'' + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Conform Propoziția 7.4.3, ecuaţia de mai sus este de forma

$$[P]_{\mathcal{R}_0} = M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}_0} \cdot [P]_{\mathcal{R}''} + \overrightarrow{OO''},$$

unde $\mathcal{R}_0$ este reperul canonic şi $\mathcal{R}$ este reperul pe care îl căutăm. Deci acesta este

$$\mathcal{R} = \left(O'' = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\} \right).$$

b) Pentru $\Gamma_2 : x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$, avem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

deci $\delta = 0$ şi $\Delta = -25 \neq 0$, aşadar Γ_2 **nu are centru unic** şi **este nedegenerată**, deci, din clasificare, **ştim deja că e o parabolă**.

Pasul 1. Neputând începe cu translaţia pentru a aduce centrul în origine, diagonalizăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$: polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5).$$

Avem valorile proprii $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$, distincte (aşa cum ne asigură teoria, exact una este nulă). Ştim din demonstraţia Teorema 7.4.18 că, în urma unei schimbări de reper, ajungem la forma

$$\Gamma_1 : x'^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + c' = 0,$$

dar, de această dată, chiar dacă nu ar fi fost cerut, trebuie să aflăm schimbarea de reper pentru a putea continua *i.e.* pentru a afla b_1', b_2', c'.

Pentru aflarea reperului, determinăm o bază ortonormală în care matricea A devine diagonală, deci o bază ortonormală în spaţiile proprii ale lui A:

Pentru λ_1, spaţiul propriu corespunzător

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\}$$

este mulţimea soluţiilor sistemelor

$$\begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases},$$

deci $V_{\lambda_1} = \langle(1, -2)\rangle_{\mathbb{R}}$.

La fel,

$$V_{\lambda_2} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\}$$

este mulţimea soluţiilor sistemelor

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases},$$

deci $V_{\lambda_2} = \langle(2, 1)\rangle_{\mathbb{R}}$.

Aşa cum ştim din teoria generală despre matrice simetrice, baza **este deja ortogonală** şi trebuie doar normalizată. Să notăm cu

$$v_1 = \frac{1}{\|(1, -2)\|}(1, -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ şi cu } v_2 = \frac{1}{\|(2, 1)\|}(2, 1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right);$$

$\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ este o bază ortonormală pozitiv definită (altfel, schimbăm semnul unui vector) în care (aplicaţia corespunzătoare în baza canonică matricei) A este diagonală.

Ca mai sus, schimbarea de coordonate dorită este

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} X' \iff \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

În noile coordonate, ecuaţia conicei devine:

$$\begin{aligned}\Gamma_2 : 0 = x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 &= 5x'^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}(x' + 2y') + \frac{2}{\sqrt{5}}(-2x' + y') + 1 \\ &= 5x'^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x' - \frac{10}{\sqrt{5}}y' + 1\end{aligned}$$

(observaţi că nu a fost nevoie să calculăm transformarea părţii de grad 2, de vreme ce ştim că devine diagonală, anume $5x'^2 + 0y'^2$).

Pasul 2. Formăm acum pătrate:

$$\begin{aligned}\Gamma_2 : 0 &= 5\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}x'\right) + \frac{10}{\sqrt{5}}y' + 1 = 5\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 - \frac{10}{\sqrt{5}}y' + 1\\ &= 5\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}y';\end{aligned}$$

prin schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' \end{cases}$$

şi împarţind la 5, ajungem la

$$\Gamma_2 : x''^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}y'' = 0,$$

forma canonică a unei parabole (cum ştiam că trebuie să fie), unde $p = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

7.4.4 Caracterizarea cu drepte directoare a conicelor nedegenerate

A venit momentul în care putem demonstra, unificat, reciprocele pentru Propoziția 7.1.4 şi Propoziția 7.2.6, punându-le laolaltă cu Definiția 7.3.1.

Propoziția 7.4.21: *Fie o dreaptă d, un punct $F \notin d$ şi $e > 0$. Atunci mulţimea*

$$\Gamma = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|PF|}{dist(P,d)} = e\right\}$$

este o conică nedegenerată, mai exact o elipsă de excentricitate e dacă $0 < e < 1$, o parabolă dacă $e = 1$ şi o hiperbolă de excentricitate e dacă $e > 1$.

Demonstraţie. Este clar că Γ conţine exact un punct de pe segmentul perpendicular din F pe dreapta d. Putem presupune că acela este originea sistemului de axe şi că dreapta perpendiculară din F pe d este axa OX. Atunci $F = (f, 0)$ pentru un $f \in \mathbb{R}$ şi $d : x = -\frac{f}{e}$.

Atunci

$$\begin{aligned}P = (x,y) \in \Gamma &\iff |PF|^2 = e^2 dist(P,d)^2 \iff (x-f)^2 + y^2 = e^2\left(x + \frac{f}{e}\right)^2\\ &\iff x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2x^2 + 2efx + f^2\\ &\iff (1-e^2)x^2 - 2f(e+1)x + y^2 = 0.\end{aligned}$$

Notând $p = f(e+1)$, avem

$$\Gamma = \{P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1-e^2)x^2 - 2px + y^2 = 0\}.$$

Concluzia rezultă acum imediat. ∎

Capitolul 8

Drepte şi plane în spaţiu

Trecem acum în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, pentru care am pregătit terenul în Capitolul 2. Vom regăsi, pe rând, modalităţile de definire a dreptelor şi planelor, aproape întocmai cum am procedat pentru drepte aflate în plan în Capitolul 3 şi vom compara din nou avantajele fiecăreia din cele două tipuri de ecuaţii prin informaţiile pe care ni le oferă.

8.1 Reprezentări ale dreptelor în spaţiu. Ecuaţii parametrice şi implicite

Notăm din nou cu $\mathcal{V}$ mulţimea vectorilor din plan, definiţi ca în Capitolul 2, şi urmăm întocmai paşii din Secţiunea 3.1:

Definiția 8.1.1: Fie d dreaptă în spaţiu. Un vector $v \in \mathcal{V}, v \neq \overrightarrow{0}$, se numeşte *vector director* pentru d dacă respectă:

$$v = \overrightarrow{AB}, A \in d \implies B \in d.$$

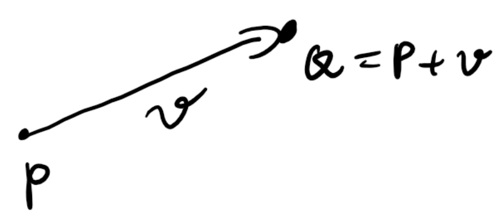
Observația 8.1.2: Conform Observația 2.2.4, dacă u şi $v \in \mathcal{V}$ sunt vectori directori ai aceleiaşi drepte d, atunci $v = \lambda u$ pentru un $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definiția 8.1.3: Mulţimea tuturor vectorilor directori ai unei drepte d se numeşte *direcţia dreptei d*:

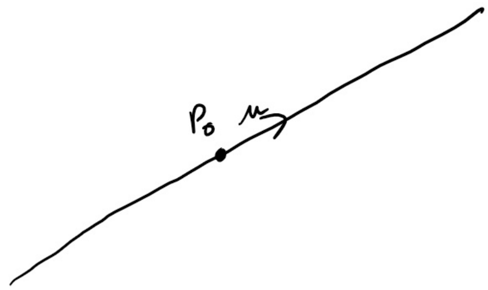
$$Dir(d) = \{\lambda v \mid v \text{ vector director al lui } d\}.$$

Exercițiul 8.1.4: Demonstraţi că $Dir(d)$ este un subspaţiu de dimensiune 1 al lui $\mathcal{V}$.

Convenţie: Pentru un punct P şi un vector v, dăm sens expresiei $P + v$ ca fiind unicul punct Q astfel încât $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + v$.



Ecuaţia parametrică a unei drepte. Exact ca în plan, o dreaptă poate fi descrisă dând un punct al ei şi un vector director:



Ca atare, regăsim toate punctele de pe dreaptă ca fiind de forma

$$P = P_0 + tu,$$

fiecărui punct corespunzându-i un unic $t \in \mathbb{R}$.

Avem deci din nou:

Fie d o dreaptă în spaţiu, $P_0 \in d$ şi $u \in \mathcal{V}$ vector director al lui d.
Se numeşte *ecuaţie parametrică* a dreptei d scrierea

$$d = \{P_0 + tu \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Echivalent, în coordonate, pentru $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ şi $u = (u_1, u_2, u_3)$, punctele $(x, y, z) \in d$ respectă ecuaţiile

$$\begin{cases} x &= x_0 + tu_1 \\ y &= y_0 + tu_2 \\ z &= z_0 + tu_3 \end{cases} \text{ pentru un } t \in \mathbb{R}. \tag{8.1.1}$$

Prelucrând ultimul sistem de ecuaţii, avem

$$t = \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3},$$

de unde obţinem o altă scriere a ecuaţiei parametrice:

Fie d o dreaptă în spaţiu, $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in d$ şi $v \in \mathcal{V}$ vector director al lui d.
Se numeşte *ecuaţie parametrică* a dreptei d ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}. \tag{8.1.2}$$

Observaţie: Vom considera aceste tipuri de ecuaţii ca având sens şi când (cel mult două dintre) u_1, u_2, u_3 sunt nule (atenţie: cum $u \neq 0$ prin definiţie, cel puţin unul din ele este nenul). Spre exemplu, prin

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

cu $u_1, u_2 \neq 0$, se înţelege că $y = y_0$ şi $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{z-z_0}{u_3}$, iar prin

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

se întelege $x = x_0$ şi $y = y_0$.

Mai sus este recuperată şi ecuaţia parametrică a unei drepte determinate de două puncte diferite, prin simpla observaţie că, dacă $P_0, P_1 \in d$, atunci $\overrightarrow{P_0P_1}$ este vector director al lui d. În coordonate, dacă $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ şi $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, atunci $\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, deci:

Fie d o dreaptă şi $P_0, P_1 \in d$.
Se numeşte *ecuaţie parametrică* a dreptei d ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{8.1.3}$$

La fel cum am spus mai sus, dăm un sens egalităţii chiar şi atunci când $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$ sau $z_0 = z_1$.

Ecuaţiile implicite ale unei drepte în spaţiu.

De-abia aici **apare prima diferenţă faţă de geometria în plan**, de vreme ce (8.1.2) şi (8.1.3) nu mai conţin câte o ecuaţie, ci sunt de fapt sisteme de două ecuaţii. Aşadar:

Rescriind una din sistemele de ecuaţii (8.1.2), (8.1.3), ajungem la un sistem de ecuaţii de forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \tag{8.1.4}$$

pentru nişte $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0$ şi $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \neq 0$.
Aceastea se numesc *ecuaţiile implicite ale dreptei* d.

Este mult mai potrivit ca înainte să vorbim de avantajele scrierii parametrice şi ale celei implicite, să trecem prin aceeaşi procedură pentru *plane* în spaţiu, pentru ca apoi să putem privi imaginea de ansamblu.

8.2 Reprezentări ale planelor în spaţiu. Ecuaţii parametrice şi implicite

Trebuie punctat faptul că, aşa cum nu am dat *definiţia* dreptei, vom considera şi planul ca fiind o noţiune primară (sau cel puţin una ce decurge din noţiunea primară de dreaptă).

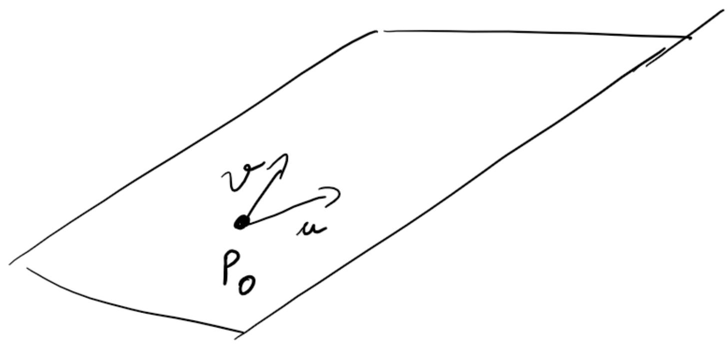
Ne sprijinim fundamental pe ideea că, aşa cum dreapta este, încă doar la nivel intuitiv, un obiect *de dimensiune* 1, căci determinat de un singur vector director (sau de variaţia unui singur parametru), planul se cuvine a fi un obiect de dimensiune 2, deci determinat de doi astfel de vectori (sau doi parametri independenţi).

Definiția 8.2.1: Fie π un plan în spaţiu. Un vector $v \in \mathcal{V}, v \neq \overrightarrow{0}$, se numeşte *vector director* pentru π dacă respectă:

$$v = \overrightarrow{AB}, A \in \pi \implies B \in \pi.$$

Definiția 8.2.2: Mulţimea tuturor vectorilor directori ai unui plan π se numeşte *spaţiul director al planului* π, notat $Dir(\pi)$.

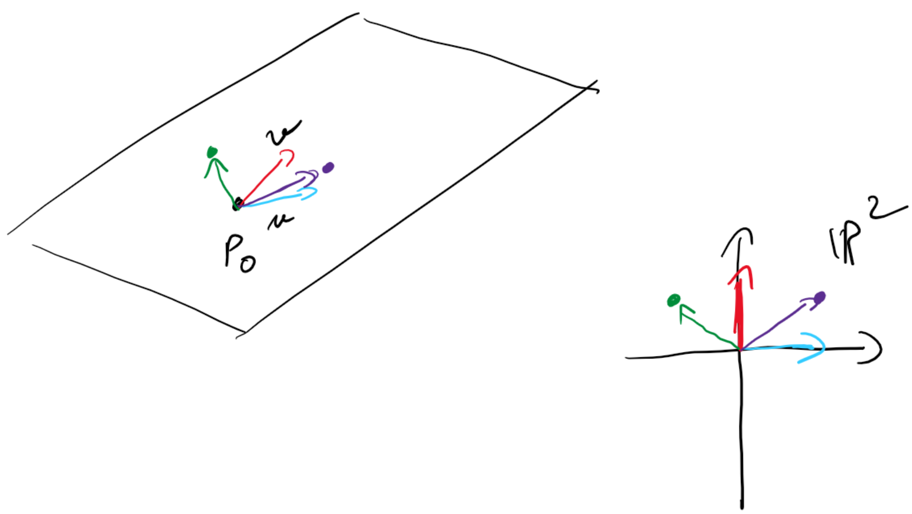
Ecuaţia parametrică a unui plan. Un plan poate fi descris dând un punct al său şi doi vectori directori liniar independenţi:



Ca atare, regăsim toate punctele din plan ca fiind de forma

$$P = P_0 + tu + sv,$$

fiecărui punct corespunzându-i unei unice perechi $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. Nu facem de fapt decât să caracterizăm un plan cu ajutorul unei bijecţii între punctele sale şi planul euclidian $\mathbb{R}^2$.



Bijecţia unui plan cu $\mathbb{R}^2$

Fiecare plan π, împreună cu o bijecţie a mulţimii punctelor sale cu $\mathbb{R}^2$, este aşadar determinată de alegerea unui punct $P_0 \in \mathbb{R}^3$ şi a doi vectori liniar independenţi (neproporţionali) $u, v \in \mathcal{V}$.

Exerciţiul 8.2.3: Demonstraţi că $Dir(\pi)$ este un subspaţiu de dimensiune 2 al lui $\mathcal{V}$.

Fie π un plan în spaţiu, $P_0 \in \pi$ şi $u, v \in \mathcal{V}$ liniar independenţi, vectori directori ai lui π. Se numeşte *ecuaţie parametrică* a planului π scrierea

$$d = \{P_0 + tu + sv \mid t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Echivalent, în coordonate, pentru $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ şi $v = (v_1, v_2, v_3)$, punctele $(x, y, z) \in \pi$ respectă ecuaţiile

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \text{pentru nişte } t, s \in \mathbb{R}. \tag{8.2.1}$$

Reţineţi din Observația 2.2.5 că u, v liniar independenţi este echivalent cu

$$\text{rang}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2.$$

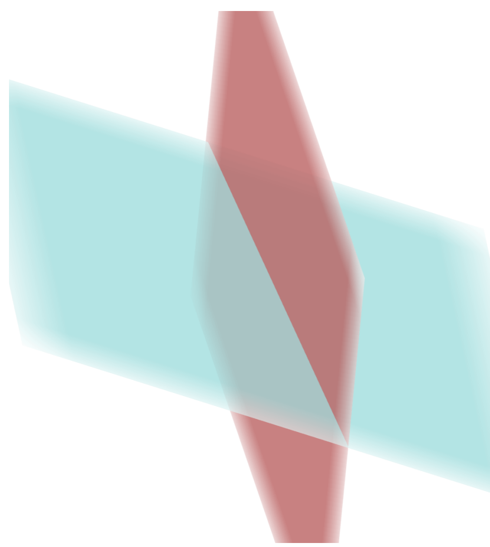
De aceea, în (8.2.1), din două dintre cele trei ecuaţii putem scoate t, s şi le putem introduce în a treia, obţinând o ecuaţie de grad 1 în x, y, z:

Ecuaţia implicită a unui plan în spaţiu. Pentru orice plan $\pi \subset \mathbb{R}^3$, există a, b, c, d cu $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ astfel încât

$$\pi : ax + by + cz + d = 0. \tag{8.2.2}$$

Comparaţi (8.2.2) cu (3.1.4): în plan, o dreaptă este definită de o singură ecuaţie, pe când în spaţiu, o singură ecuaţie defineşte un plan. Asta este într-adevăr foarte natural, de vreme ce o ecuaţie reprezintă impunerea unei restricţii locului geometric pe care îl defineşte, deci scăderea dimensiunii cu un grad.

Observația 8.2.4: Comparând în schimb (8.2.2) cu (8.1.4), întelegem că interpretarea geometrică pentru prezentarea dreptei printr-un sistem de ecuaţii înseamnă a vedea acea dreaptă ca **intersecţia a două plane**.



Dreapta ca intersecţie a două plane π

Observația 8.2.5: Fie $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un plan definit printr-o ecuaţie implicită, $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Fie $v \in Dir(\pi)$ un vector director al lui π, $v = \overrightarrow{PP'}, P, P' \in \pi$. Dacă $P = (x_P, y_P, z_P)$, $P' = (x_{P'}, y_{P'}, z_{P'})$, atunci

$$ax_P + by_P + cz_P + d = 0 \;\text{ şi }\; ax_{P'} + by_{P'} + cz_{P'} + d' = 0.$$

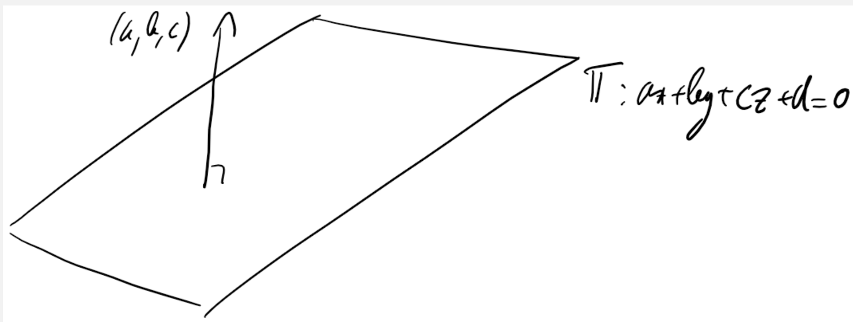
Scăzând relaţiile, avem

$$a(x_{P'} - x_P) + b(y_{P'} - y_P) + c(z_{P'} - z_P) = 0. \tag{8.2.3}$$

Dar $v = \overrightarrow{PP'} = (x_{P'} - x_P, y_{P'} - y_P, z_{P'} - z_P)$, deci (8.2.3) se rescrie

$$a(x_{P'} - x_P) + b(y_{P'} - y_P) + c(z_{P'} - z_P) = 0 \iff \langle v, (a, b, c)\rangle = 0.$$

Vector normal la un plan. Aşadar, pentru planul $\pi : ax + by + cz + d = 0$, vectorul de coordonate (a, b, c) este *vector normal* la acest plan *i.e.* este perpendicular pe orice vector director al planului π:



Vector normal la planul π

Observaţie: Vectorul normal la un plan nu este unic, dar este unic până la proporţionalitate: dacă v şi $n \in \mathcal{V}$ sunt vectori normali la π, atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $n = \lambda v$.

Fie acum d o dreaptă dată prin ecuaţii implicite:

$$d : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

şi $v \in Dir(d)$. La fel ce mai sus, obţinem

$$\langle v, (a_1, b_1, c_1)\rangle = 0 \ \text{ şi } \langle v, (a_2, b_2, c_2)\rangle = 0,$$

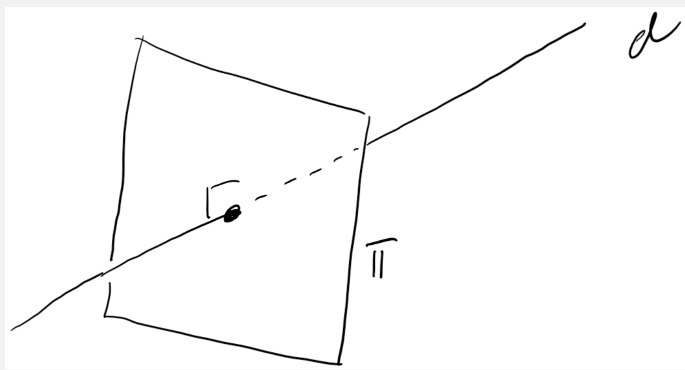
deci v este perpendicular pe orice vector din subspaţiul $\langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)\rangle_{\mathbb{R}}$ generat de cei doi vectori normali la planele $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ şi $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ a căror intersecţie este d.

Vectori normali la o dreaptă în spaţiu. Aşadar, pentru dreapta

$$d : \begin{cases} \pi_1 : a_1x & + & b_1y & + & c_1z & + & d_1 & = & 0 \\ \pi_2 : a_2x & + & b_2y & + & c_2z & + & d_2 & = & 0 \end{cases},$$

un vector v este *vector normal* la această dreaptă *i.e.* este perpendicular pe orice vector director al dreptei d dacă şi numai dacă se află în subspaţiul de dimensiune 2 generat de vectorii normali la π_1 şi π_2.
Explicit, $v = (v_1, v_2, v_3)$ este vector normal dacă şi numai dacă există $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (nu ambele nule) astfel încât

$$(v_1, v_2, v_3) = \lambda_1(a_1, b_1, c_1) + \lambda_2(a_2, b_2, c_2).$$



Vector normal al dreptei d

Rezumăm schematic în cele două tabele de mai jos cele două mari feluri de a reprezenta dreptele şi planele în spaţiu:

Drepte în spaţiul $\mathbb{R}^3$:

Reprezentare	**Avantaje**
Ecuaţie parametrică: • $d : P_0 + tu, t \in \mathbb{R}$ • $\begin{cases} x & = & x_0 & + & tu_1 \\ y & = & y_0 & + & tu_2 \\ z & = & z_0 & + & tu_3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ • $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$ • $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$	-Un punct de pe dreaptă este imediat vizibil. -Direcţia este imediat vizibilă.
Ecuaţie implicită $\begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & + & d_1 & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & + & d_2 & = & 0 \end{cases}$	-Dreapta apare ca interseţia a două plane. -Spaţiul vectorilor normali la dreaptă este vizibil.

Plane în spaţiul $\mathbb{R}^3$:

Reprezentare	**Avantaje**
Ecuaţie parametrică: • $\pi : P_0 + tu + sv, t, s \in \mathbb{R}$, u, v liniar independente	-Un punct din plan este imediat vizibil.
• $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$	-Direcţia este imediat vizibilă.
Ecuaţie implicită $ax + by + cz + d = 0$	Vectorul normal este imediat vizibil.

8.3 Poziţii relative ale dreptelor şi planelor în spaţiu

Cu micul aparat construit mai sus, putem deduce imediat echivalentele algebrice pentru multe din afirmaţiile geometrice care pot fi atribuite dreptelor şi planelor.

Paralelism:

- Două drepte d_1, d_2 sunt paralele, prin definiţie, dacă **sunt conţinute în acelaşi plan** şi nu se intersectează sau coincid.
- Două plane π_1, π_2 sunt paralele dacă nu se intersectează sau coincid (definiţie valabilă doar în spaţiu, nu şi în dimensiune mai mare).
- Un plan π şi o dreaptă d sunt paralele dacă nu se intersectează sau dacă $d \subset \pi$ (definiţie valabilă doar în spaţiu, nu şi în dimensiune mai mare).

Propoziția 8.3.1:

- *$d_1 \parallel d_2 \iff Dir(d_1) = Dir(d_2)$.*
- *$\pi_1 \parallel \pi_2 \iff Dir(\pi_1) = Dir(\pi_2)$.*
- *$d \parallel \pi \iff Dir(d) \subset Dir(\pi)$.*

Demonstraţie. Exerciţiu! (este similară cu demonstraţia de la Propoziția 3.2.1). ∎

Observaţie: Relaţia de paralelism pe mulçtimea dreptelor şi planelor **nu** mai este o relaţie de echivalenţă, dar paralelismul pe mulţimea dreptelor şi paralelismul pe mulţimea planelor rămân relaţii de echivalenţă.

Propoziția 8.3.1 ne permite să decidem algebric, cu uşurinţă, dacă două subspaţii (drepte sau plane), în funţie de tipul ecuaţiei prin care sunt reprezentate:

Condiţii pentru paralelismul dreptelor:

- Dacă $d_1 : P_1 + tv_1, d_2 : P_2 + tv_2$ (sau alte scrieri ale ecuaţiilor parametrice), atunci $d_1 \parallel d_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $v_1 = \lambda v_2$ (vectorii directori sunt proporţionali).
- Dacă $d_1 : P + tv$ şi
$$d_2 : \begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & + & d_1 & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & + & d_2 & = & 0 \end{cases},$$
atunci $d_1 \parallel d_2 \iff \langle v, (a_1, b_1, c_1)\rangle = \langle v, (a_2, b_2, c_2)\rangle = 0$ (vectorul director al lui d_1 este ortogonal pe subspaţiul vectorilor normali la d_2).
- Dacă
$$d : \begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & + & d_1 & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & + & d_2 & = & 0 \end{cases}$$
şi
$$d' : \begin{cases} a'_1x & + & b'_1y & + & c'_1z & + & d'_1 & = & 0 \\ a'_2x & + & b'_2y & + & c'_2z & + & d'_2 & = & 0 \end{cases},$$
atunci $d \parallel d' \iff \langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle (a'_1, b'_1, c'_1), (a'_2, b'_2, c'_2)\rangle_{\mathbb{R}}$ (vectorii normali determină acelaşi subspaţiu)
$$\iff \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Condiţii pentru paralelismul unui plan cu o dreaptă: Fie d dreaptă şi π plan în spaţiu.

- Dacă $d : P_1 + tu_1, \pi : P_2 + tu_2 + sv_2$ (sau alte scrieri ale ecuaţiilor parametrice), atunci $d \parallel \pi \iff u_1 \in \langle u_2, v_2\rangle_{\mathbb{R}} \iff \operatorname{rang}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2.$
- Dacă $d : P + tv$ şi $\pi : ax + by + cz + d = 0$, atunci $d \parallel \pi \iff \langle v, (a, b, c)\rangle = 0$ (vectorul director al lui d este ortogonal pe vectorul normal al lui π).
- Dacă
$$d : \begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & + & d_1 & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & + & d_2 & = & 0 \end{cases}$$
şi $\pi : P + tu + sv$, atunci $d \parallel \pi \iff \langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)\rangle_{\mathbb{R}} \perp \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$.

Condiţii pentru paralelismul planelor: Fie π_1, π_2 plane în spaţiu.

- Dacă $\pi_1 : P_1+tu_1+sv_1, \pi_2 : P_2+tu_2+sv_2$ (sau alte scrieri ale ecuaţiilor parametrice), atunci $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \langle u_1, v_1\rangle_{\mathbb{R}} = \langle u_2, v_2\rangle_{\mathbb{R}}$ (au aceeaşi direc tie).
- Dacă $\pi_1 : P+tu+sv$ şi $\pi_2 : ax+by+cz+d = 0$, atunci $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \langle u, (a, b, c)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v, (a, b, c)\rangle_{\mathbb{R}} = 0$ (vectorul normal al lui π_2 este ortogonal pe vectorii directori ai lui π_1).
- Dacă $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ şi $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, atunci $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2)$ (vectorii normali sunt proporţionali).

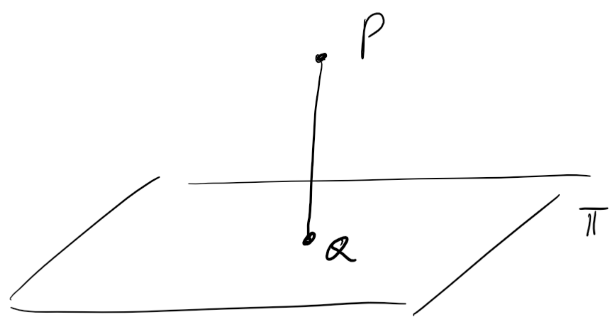
Exercițiul 8.3.2: Scrieţi condiţiile echivalente pentru perpendicularitate.

Ca aplicaţie, demonstrăm formula distanţei de la un punct la un plan:

Propoziția 8.3.3: *Fie* $P = (x_P, y_P, z_P)$ *şi* $\pi : ax + by + cz + d = 0$ *un plan. Atunci*

$$dist(P, \pi) = \frac{|ax_p + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Demonstraţie. Ecuaţia perpendicularei din P pe planul π este $d' : P + t(a, b, c), t \in \mathbb{R}$. Găsim pentru început t-ul corespunzător punctului de intersecţie al plaenului π cu d', fie el Q:



Dacă $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$, atunci $(x_Q, y_Q, z_Q) = (x_P+t_Qa, yP+t_Qb, z_P+t_Qc)$ pentru un $t_Q \in \mathbb{R}$. $Q \in \pi$, deci

$$a(x_P+t_Qa)+b(y_P+t_Qb)+c(z_P+t_Qc)+d = 0 \iff (a^2+b^2+c^2)t_Q+ax_P+by_P+cz_P+d = 0,$$

deci avem

$$t_Q = -\frac{ax_P + by_P + cz_P + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Dar

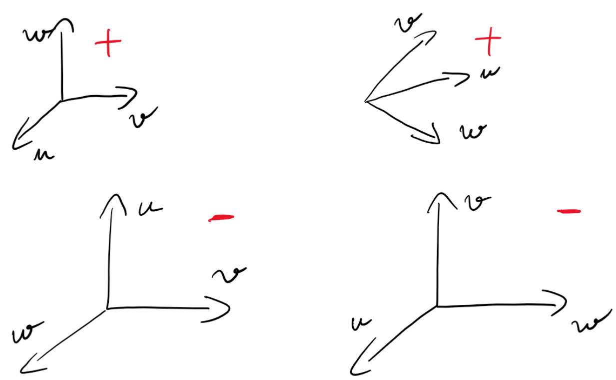
$$dist(P, d) = dist(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|(x_P + t_Qa - x_P, yP + t_Qb - y_P, z_P + t_Qc - z_P)\| = \|t_Q(a, b, c)\|$$
$$= \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_p + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

∎

8.4 Baze pozitiv orientate. Volume. Coplanaritate. Produs vectorial.

Definiția 8.4.1: O bază $\{u, v, w\}$ a lui $\mathcal{V}$, spaţiul vectorial al vectorilor liberi din $\mathbb{R}^3$, se numeşte *pozitiv orientată* dacă $\det(u, v, w) > 0$.

Interpretare geometrică: O bază este pozitiv orientată dacă, privind planul $\langle u, v\rangle$ astfel încât u se roteşte spre v în sens trigonometric, atunci w este îndreptat spre privitor (aceasta se numeşte şi regula mâinii drepte, a burghiului etc.)



Cu exact aceeaşi demonstraţie ca pentru Propoziția 4.1.7, avem o metodă numerică de a calcula volumele paralelipipedelor din spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$:

Propoziția 8.4.2: *Pentru* $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{V}$*, volumul cu semn al paralelipipedului cu vârfuri în* $0, u, v, w$ *este*

$$vol(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

unde prim volumul cu semn întelegem că semnul este pozitiv dacă $\{u, v, w\}$ *este pozitiv orientat, negativ dacă* $\{u, v, w\}$ *este negativ orientat şi nul dacă* $\{u, v, w\}$ *nu este bază.*

Corolarul 8.4.3: *Fie* $A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B), C = (x_C, y_C, z_C), D = (x_D, y_D, z_D)$ *puncte în spaţiu. Atunci*

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A & x_D - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A & y_D - y_A \\ z_B - z_A & z_C - z_A & z_D - z_A \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{vmatrix} \right|.$$

În particular, A, B, C, D *sunt coplanare dacă şi numai dacă* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{vmatrix} = 0.$

De fapt avem mai sus şi un fel rapid de a scrie

Ecuaţia planului determinat de trei puncte. Fie $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B), C = (x_C, y_C, z_C)$ puncte în spaţiu. Atunci planul determinat de A, B, C are ecuaţia

$$(ABC) : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_A & x_B & x_C \\ y & y_A & y_B & y_C \\ z & z_A & z_B & z_C \end{vmatrix} = 0.$$

Pe $\mathcal{V}$ putem defini o multiplicare internă cu rădăcini geometrice:

Produsul vectorial. Pentru doi vectori $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$, definim cu ajutorul unui determinant formal

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

$i.e.\ u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$

Propoziția 8.4.4:

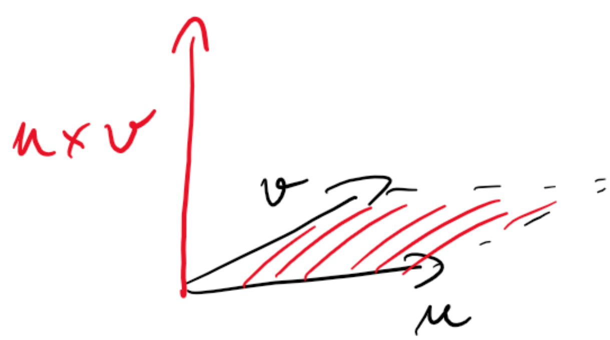
a) $u \times v = 0 \iff u, v$ *sunt liniar dependente.*

b) Dacă u, v *sunt liniar independente, atunci* $u \times v$ *este ortogonal pe* u *şi* v*. În plus,* $\{u, v, u \times v\}$ *este o bază pozitiv orientată.*

c) $\|u \times v\| = |aria(u, v)|$*, aria pozitivă a paralelogramului determinat de* u *şi* v*.*

Demonstraţie. **Exerciţiu!** (toate decurg din proprietăţile determinantului, în mod esenţial din dezvoltarea de-a lungul unei linii). ∎

Cu alte cuvinte, $u \times v$ este vectorul ce completează $\{u, v\}$ (fiind ortogonal pe ambele) la o bază pozitiv orientată.



Capitolul 9

Cuadrice

9.1 Hipercuadrice

Probabil este clar că Definiția 7.4.4 şi chiar secţiunea 7.4 în întregime pot fi generalizate la dimensiuni mai mari. Într-adevăr, este naturală următoarea definiţie:

Definiția 9.1.1: Se numeşte *hipercuadrică* locul geometric al punctelor din planul $\mathbb{R}^n$ ale căror coordonate în raport cu un reper ortonormat respectă o ecuaţie polinomială de grad 2:

$$\Gamma : \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq n} 2b_i x_i + c, \tag{9.1.1}$$

unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică, $b \in \mathbb{R}^n$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Echivalent, în scriere matricială, pentru $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$\Gamma : \ {}^tXAX + \ 2{}^tbX + c = 0. \tag{9.1.2}$$

Pentru $n = 3$, regăsim definiţia **cuadricelor** care vor face obiectul acestui capitol:

Definiția 9.1.2: Se numeşte *cuadrică* locul geometric al punctelor din planul $\mathbb{R}^3$ ale căror coordonate în raport cu un reper ortonormat respectă o ecuaţie polinomială de grad 2:

$$\Gamma : \sum_{1 \leq i,j \leq 3} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq 3} 2b_i x_i + c, \tag{9.1.3}$$

unde $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică, $b \in \mathbb{R}^3$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Echivalent, în scriere matricială, pentru $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$\Gamma : \ {}^tXAX + \ 2{}^tbX + c = 0. \tag{9.1.4}$$

Observația 9.1.3: Aproape toate principiile de bază din secţiunea 7.4 rămân în picioare, de exemplu o ecuaţie de tip 9.1.2 rămâne de aceeaşi formă printr-o izometrie.

Scopul nostru este să obţinem o clasificare completă şi pentru cuadrice, întocmai cum am făcut pentru conice în subsecţiunea 7.4.3 şi prin exact aceleaşi metode. Cum însă nu există nicio diferenţă esenţială între conice şi cuadrice în mare parte din ce urmează, vom demonstra cât putem pe cazul general.

9.1.1 Aducerea hipercuadricelor la forma canonică

Următoarea teoremă este analogul în dimensiune n al Teorema 4.2.3 şi se demonstrează, cu modificările de rigoare, exact la fel:

Teorema 9.1.4: ***(fundamentală a geometriei euclidiene)***
Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrie.
Atunci există $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I_2$ şi $b \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$f(X) = AX + b,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n.$$

Matricele ce respectă $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I_2$ se numesc ortogonale, iar grupul lor se notează cu $O(n)$.

Exerciţiul 9.1.5: Verificaţi că o matrice $A \in O(n)$ dacă şi numai dacă liniile/coloanele ei formează o bază ortonormală.

Definiţia 9.1.6: Spunem că o hipercuadrică Γ este *în formă canonică* dacă este dată de unul din următoarele trei tipuri de ecuaţii:

(i) $\Gamma : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 = 0$, pentru un $1 \le k \le n$ şi $\lambda_i \neq 0,\ \forall 1 \le i \le k$,

(ii) $\Gamma : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 - 1 = 0$, pentru un $1 \le k \le n$ şi $\lambda_i \neq 0,\ \forall 1 \le i \le k$,

(iii) $\Gamma : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 - 2\lambda_{k+1} = 0$, pentru un $1 \le k \le n-1$ şi $\lambda_i \neq 0,\ \forall 1 \le i \le k$.

Teorema 9.1.7: *Orice hipercuadrică se poate aduce la formă canonică prin izometrii.*

Demonstraţie. (schiţă) Fie conica

$$\Gamma :\ {}^tXAX +\ 2{}^tbX + c = 0$$

în raport cu reperul iniţial.

Pasul 1: Matricea A este simetrică, deci diagonalizabilă. Mai mult, putem găsi o bază ortonormală formată din vectori proprii (prin algoritmul Gram-Schmidt). Deci, în urma unei schimbări de variabile ortogonală (*i.e.* izometrie), ajungem la o nouă ecuaţie de forma

$$\Gamma : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + \sum_{1 \le i \le n} 2b_i x_i + c = 0,$$

pentru un $1 \le k \le n$ şi $\lambda_i \neq 0,\ \forall 1 \le i \le k$ (constantele nu sunt acelaşi ca cele iniţiale, dar pentru a nu îngreuna scrierea le notăm la fel).

Pasul 2: Putem cu uşurinţă să scăpăm de termenii de grad 1 în care apar $x_1, ..., x_k$ formând pătrate:

$$\Gamma : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(x_i + \frac{b_i}{\lambda_i} \right)^2 + \sum_{k+1 \le i \le n} 2b_i x_i + \left(c - \sum_{1 \le i \le k} \frac{b_i^2}{\lambda_i} \right) = 0,$$

deci printr-o nouă schimbare de reper (de fapt, o translaţie), ajungem la o ecuaţie de forma

$$\Gamma : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + \sum_{k+1 \le i \le n} 2b_i x_i + c = 0, \tag{9.1.5}$$

Pasul 3: Dacă în (9.1.5) $b_i = 0$ pentru toate $k+1 \le i \le n$ şi $c = 0$, atunci avem deja o ecuaţie canonică de tip (i).

Dacă $b_i = 0$ pentru toate $k+1 \le i \le n$ şi $c \neq 0$, împărţind la $-c$, avem o ecuaţie canonică de tip (ii).

Dacă nu toate b_i sunt nule, putem presupune că $c = 0$ printr-o translaţie (incorporându-l într-un x_i), deci avem o ecuaţie de tipul

$$\Gamma : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + 2 \sum_{k+1 \le i \le n} b_i x_i = 0.$$

Putem presupune că $\|b\|^2 = \sum_{k+1 \le i \le n} b_i^2 = 1$, împarţind ecuaţia la $\sqrt{\sum_{k+1 \le i \le n} b_i^2}$ şi renotând.

Vrem să facem o schimbare de variabile ortogonală de forma

$$\begin{cases} y_1 &= & x_1 \\ y_2 &= & x_2 \\ \dots \\ y_{k+1} &= & -\sum_{k+1 \le i \le n} b_i x_i, \end{cases}$$

aşa încât ecuaţia să devină de tipul (iii). O astfel de transformare (liniară) are matricea de forma

$$A = \begin{pmatrix} I_k & O_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & -b \mid A' \end{pmatrix}$$

unde $A' \in \mathcal{M}_{n-k,n-k-1}(\mathbb{R})$ este încă la latitudinea noastră de ales astfel încât matricea $A \in O(n)$ $\iff$ matricea $(-b \mid A') \in O(n-k)$. Dar un astfel de A' evident poate fi construit prin algoritmul Gram-Schmidt.

Observaţie În cazul cuadricelor, adică $n = 3$, A' poate fi construită imediat: dacă $k = 1$ (singurul caz în care avem ceva de făcut), alegem

$$(-b \mid A') = \begin{pmatrix} -b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

■

În cazul în care permitem şi rescalări ulterioare ale direcţiilor principale, tipurile de ecuaţii din Definiția 9.1.6 pot fi simplificate şi mai mult, ajungându-se la ce se numeşte *forma normală a unei hipercuadrice*:

Propoziția 9.1.8: *Orice hipercuadrică poate fi adusă printr-o transformare afină,* i.e. *o izometrie urmată de schimbări de variabile de tipul* $y_i = a_i x_i, a_i \in R$, *la una din tipurile de ecuaţii:*

(i) $\Gamma : x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+r}^2 = 0$, *pentru nişte* p, r *cu* $1 \leq p + r \leq n$ *şi* $p \geq r$,

(ii) $\Gamma : x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+r}^2 - 1 = 0$, *pentru nişte* p, r *cu* $1 \leq p + r \leq n$,

(iii) $\Gamma : x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+r}^2 - 2x_{p+r+1} = 0$, *pentru nişte* p, r *cu* $1 \leq p + r \leq n - 1$ *şi* $p \geq r$.

O astfel de formă se numeşte forma normală a unei hipercuadrice şi ***este unică****.*

Demonstraţie. Se obţin din tipurile corespunzătoare ale Definiția 9.1.6 în urma schimbării de variabile $x_i \leftarrow \sqrt{|\lambda_i|}x_i,\ 1 \leq i \leq k$. ■

9.2 Clasificarea cuadricelor

Listarea tuturor cuadricelor se rezumă atunci la listarea celor în formă normală, adica parcurgerea tuturor cazurilor posibile în cele trei tipuri:

(i) $\Gamma : x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+r}^2 = 0$, pentru nişte p, r cu $1 \leq p + r \leq 3$ şi $p \geq r$,

(ii) $\Gamma : x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+r}^2 - 1 = 0$, pentru nişte p, r cu $1 \leq p + r \leq 3$,

(iii) $\Gamma : x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+r}^2 - 2x_{p+r+1} = 0$, pentru nişte p, r cu $1 \leq p + r \leq 2$ şi $p \geq r$.

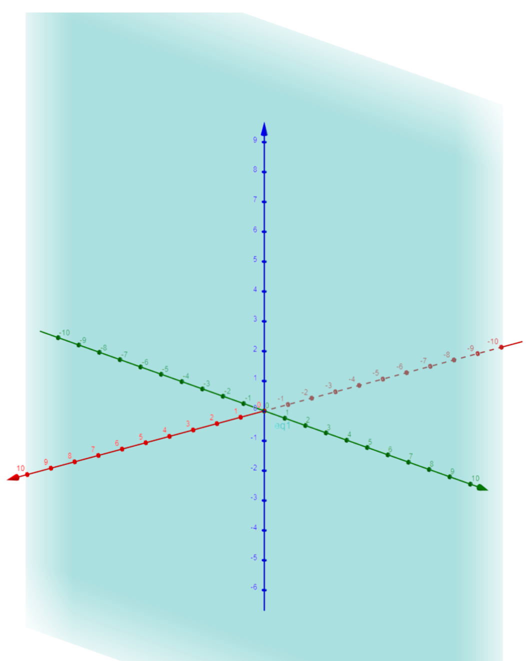
Exact asta vom face, desenându-le pe fiecare. Observaţi şi că denumirile lor sunt naturale, reflectând secţiunile lor cu planele de coordonate.

Pentru uşurinţa scrierii, vom renota coordonatele (x_1, x_2, x_3) cu (x, y, z). Atunci avem:

Tipul (i):

- $p = 1, r = 0$:

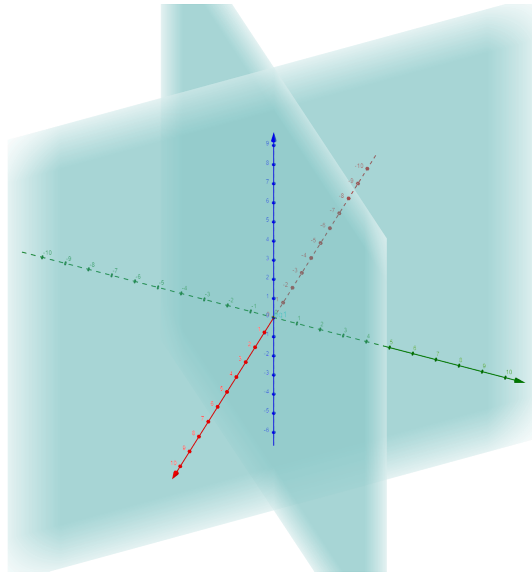
$$\Gamma : x^2 = 0$$



Plan dublu

- $p = 1, r = 1$:

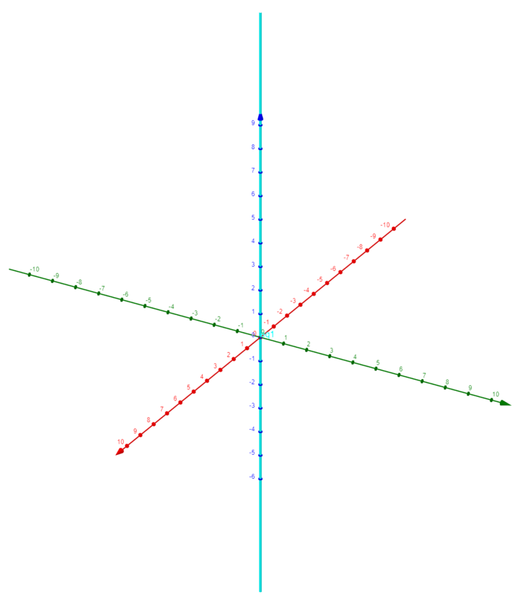
$$\Gamma : x^2 - y^2 = 0$$



Plane secante

- $p = 2, r = 0$:

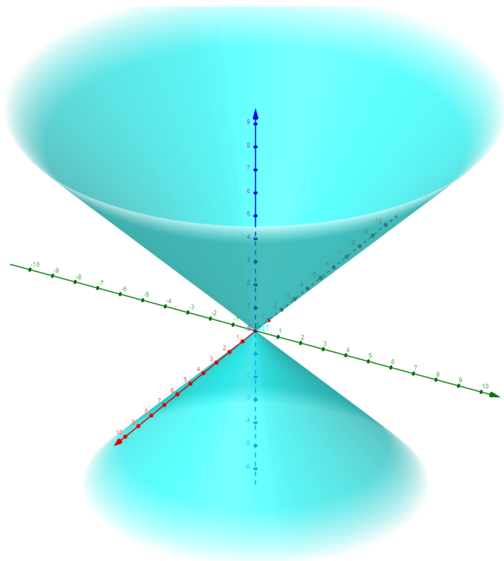
$$\Gamma : x^2 + y^2 = 0$$



Dreaptă

- $p = 2, r = 1$:

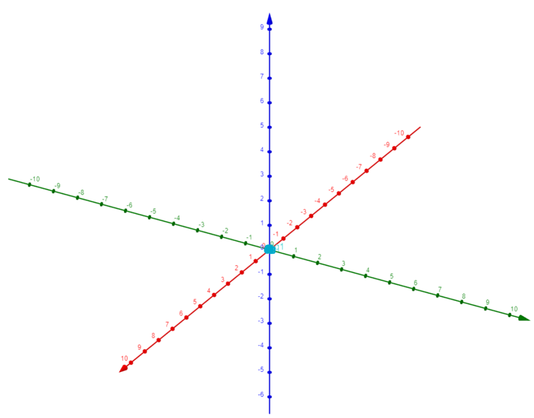
$$\Gamma : x^2 + y^2 - z^2 = 0 \tag{9.2.1}$$



Con

- $p = 3, r = 0$:

$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

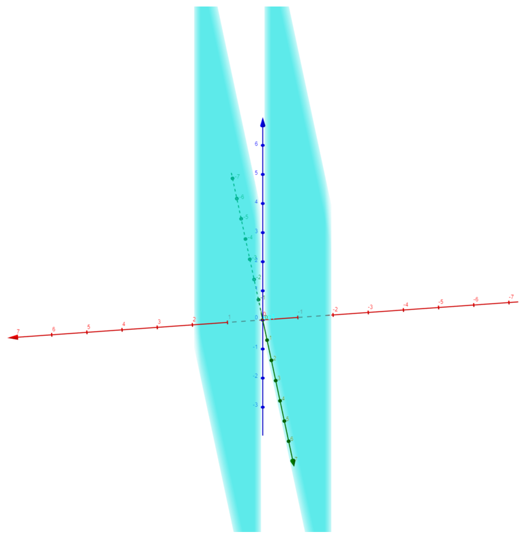


Punct

Tipul (ii):

- $p = 1, r = 0$:

$$\Gamma : x^2 - 1 = 0$$

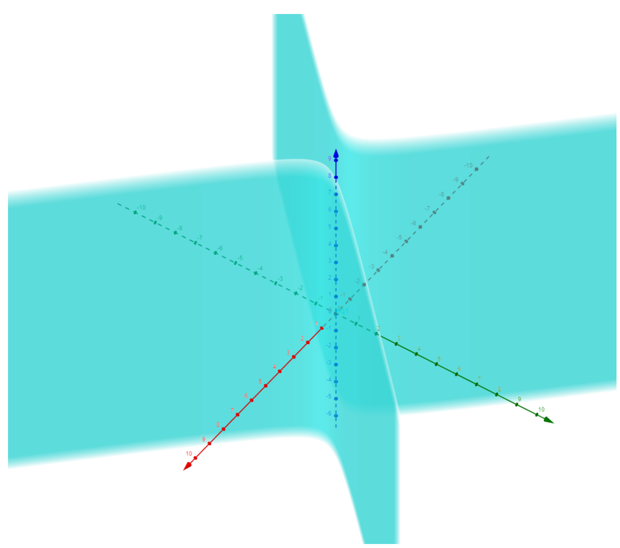


Plane paralele

- $p = 0, r = 1$: $\Gamma : -x^2 - 1 = 0 \iff \Gamma = \emptyset$

- $p = 1, r = 1$:

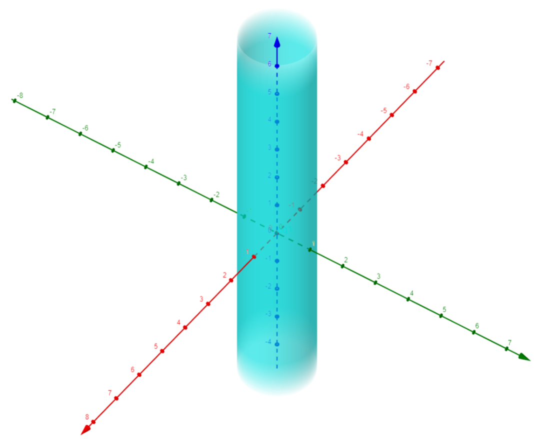
$$\Gamma : x^2 - y^2 - 1 = 0$$



Cilindru hiperbolic

- $p = 2, r = 0$:

$$\Gamma : x^2 + y^2 - 1 = 0$$

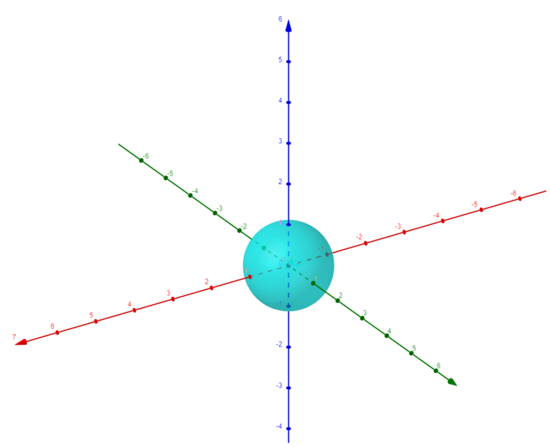


Cilinidru eliptic

- $p = 0, r = 2$: $\Gamma : -x^2 - y^2 - 1 = 0 \iff \Gamma = \emptyset$

- $p = 3, r = 0$:

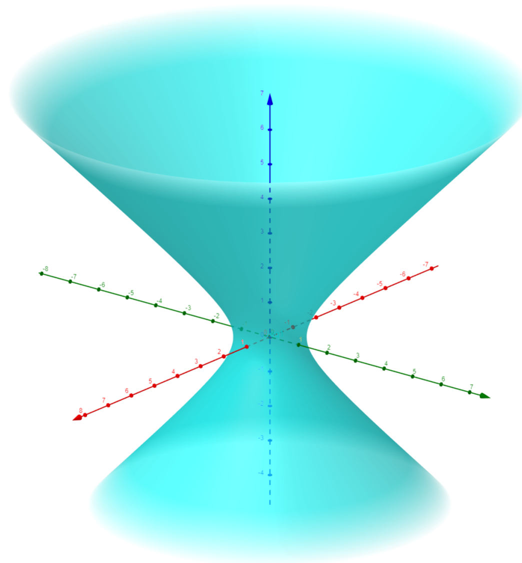
$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$



Elipsoid

- $p = 2, r = 1$:

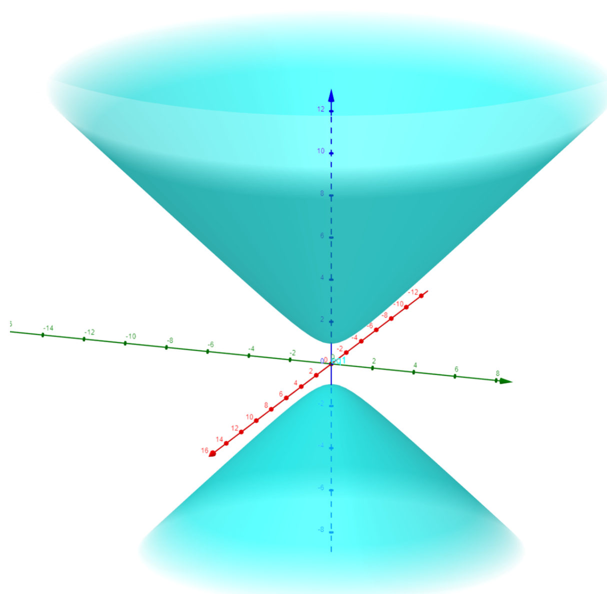
$$\Gamma : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$



Hiperboloid eliptic cu o pânză

- $p = 1, r = 2$:

$$\Gamma : x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$$



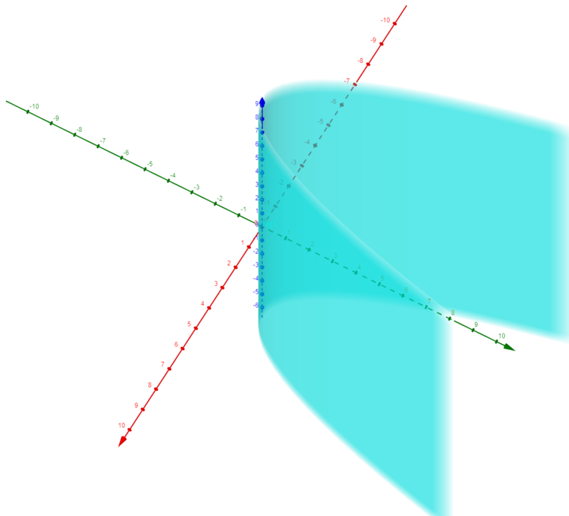
Hiperboloid eliptic cu două pânze

- $p = 0, r = 3$: $\Gamma : -x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0 \iff \Gamma = \emptyset$

Tipul (iii):

- $p = 1, r = 0$:

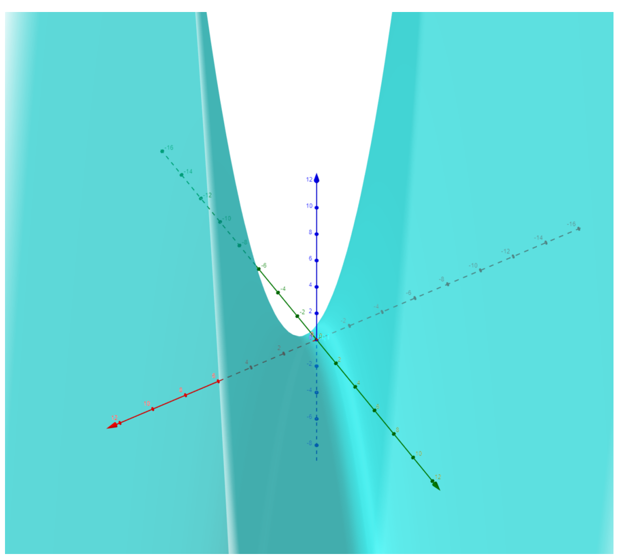
$$\Gamma : x^2 - 2y = 0$$



Cilindru parabolic

- $p = 1, r = 1$:

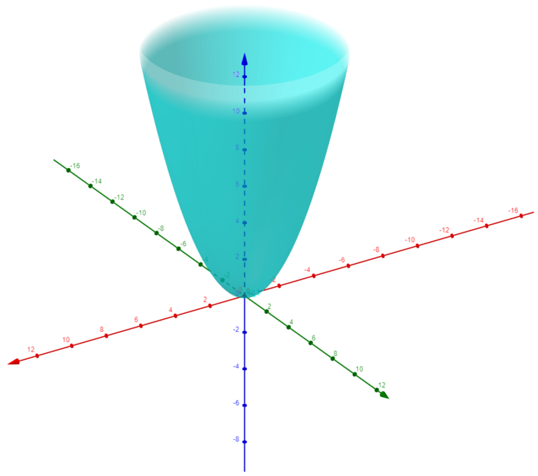
$$\Gamma : x^2 - y^2 - 2z = 0$$



Paraboloid hiperbolic

- $p = 2, r = 0$:

$$\Gamma : x^2 + y^2 - 2z = 0$$



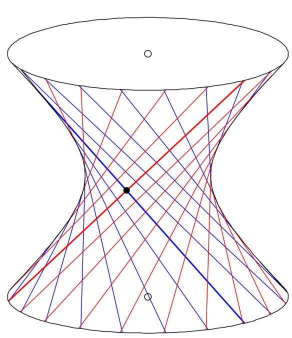
Paraboloid eliptic

Observația 9.2.1: Acum, după ce am dat şi peste ecuaţia conului 9.2.1, este clar şi că Definiția 7.4.1 şi Definiția 7.4.4 sunt echivalente.

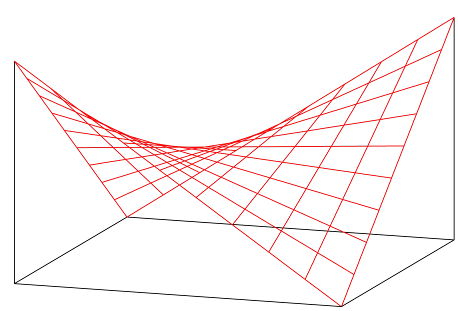
9.3 Cuadrice dublu riglate

Dintre cuadricele listate mai sus, **hiperboloidul cu o pânză** şi **paraboloidul hiperbolic** au o proprietate aparte, anume sunt *dublu riglate*:

Propoziția 9.3.1: *Cuadrica* Γ *este dublu riglată,* i.e. *prin orice punct al lui* Γ *trec două drepte disjuncte incluse în* Γ*, dacă şi numai dacă* Γ *este fie un hiperboloid cu o pânză, fie un paraboloid hiperbolic.*



(a) Generatoarele hiperboloidului cu o pânză[1]



(b) Generatoarele paraboloidului hiperbolic[2]

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$) Parcurgând lista celorlaltor cuadrice, evident nu pot respecta condiţia cerută.

[1]Sursă: By Ag2gaeh - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39188728

[2]Sursă: By AndrewHarvey4 - Own work, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9425109

($\Longleftarrow$) • Dacă $\Gamma : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ este hiperboloidul cu o pânză, rescriem ecuaţia

$$\Gamma : (x - z)(x + z) = (1 - y)(1 + y).$$

Ecuaţia este îndeplinită dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$d_\lambda : \begin{cases} (x - z) = \lambda(1 - y) \\ \lambda(x + z) = (1 + y) \end{cases}$$

sau dacă există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$d_\mu : \begin{cases} (x - z) = \mu(1 + y) \\ \mu(x + z) = (1 - y) \end{cases}$$

Acestea sunt chiar ecuaţiile unei perechi de drepte (d_λ, d_μ), indexată după $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

• Dacă $\Gamma : x^2 - y^2 - 2z = 0$ este paraboloidul hiperbolic, rescriem ecuaţia

$$\Gamma : (x - y)(x + y) = 2z.$$

Ecuaţia este îndeplinită dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$d_\lambda : \begin{cases} (x - y) = 2\lambda \\ \lambda(x + y) = z \end{cases}$$

sau dacă există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$d_\mu : \begin{cases} (x + y) = 2\mu \\ \mu(x - y) = z \end{cases}$$

Acestea sunt chiar ecuaţiile unei perechi de drepte (d_λ, d_μ), indexată după $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ■