Examen*

8 Februarie 2017

Exercițiul 1

Fie X o v.a. de densitate

$$f_\theta(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

cu $\theta > 0$ un parametru și A o constantă (care depinde de θ). Fie $X_1, \dots, X_n$ un eșantion de talie $n \in \mathbb{N}^*$ din populația X.

a) Determinați constanta A și calculați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă este eficient.

Exercițiul 2

O firmă de construcții dorește să construiască o parcare pentru un imobil de 200 de apartamente. Investigând piața, firma presupune că fiecărui apartament îi pot reveni 0, 1 sau 2 mașini cu probabilitățile 0.1, 0.6, respectiv 0.3. Care este numărul minim de locuri de parcare pe care constructorul trebuie să le prevadă dacă acesta vrea să asigure, cu o probabilitate de 0.95, locuri suficiente pentru întregul imobil ?

Exercițiul 3

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 4

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație cu densitatea $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$.

a) Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ obținut prin metoda momentelor.

b) Dterminași estimatorul $\hat{\theta}$ obținut prin metoda verosimilității maxime.

c) Determinați legea variabilei $n(\hat{\theta} - \theta)$.

d) Verificați dacă estimatorul $\hat{\theta}$ este nedeplasat.

e) Calculați eroarea medie pătratică a lui $\hat{\theta}$.

f) În cazul în care $\theta = 2$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0,\ 1]$: $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$ și $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

---

*Timp de lucru 2h. Toate documentele și calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Computerele personale, telefoanele mobile/smartwatch-urile sunt **strict interzise**.

Scanned by CamScanner

feb 2017.

1. $f_\theta(x) = \begin{cases} A e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$

a) det A și calc. $\tilde{\theta}$ obținut prin met. momentelor

$$\int_0^\infty A e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 1 \Rightarrow \theta A \int_0^\infty e^{-u} du = 1 \Rightarrow -A\theta e^{-u} \Big|_0^\infty = 1 \Rightarrow +A = \frac{1}{\theta} \Rightarrow A = +\frac{1}{\theta}$$

$$\Rightarrow f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , - \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta \int_0^\infty u e^{-u} du = \theta \Gamma(2) = \boxed{\tilde{\theta}_n = \overline{X}_n}$$

Obs: $\hat{\theta}$ nedeplasat & consistent.

b) Det. estimatorul de verosimilitate maximă

$$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\overline{X}_n \cdot n}{\theta}}$$

$$l = -\ln(\theta^n) + \frac{-\overline{X}_n \cdot n}{\theta} = -n \ln\theta - \frac{\overline{X}_n n}{\theta}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\overline{X}_n n}{\theta^2} \qquad \log f_\theta = -\ln\theta - \frac{x}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2\overline{X}_n n \cdot \theta}{\theta^3} \qquad \frac{\partial^2 \log f_\theta}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2x}{\theta^3}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -\frac{n(\theta + \overline{X}_n)}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \theta + \overline{X}_n = 0 \Rightarrow \overline{X}_n = -\theta$$

Deci $\overline{X}_n = \overline{\theta} = \tilde{\theta}$ estimator de verosimilitate max.

$$\cancel{I(\overline{\theta}) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f_\theta(x)\right)^2\right] = E_\theta\left[\left(-\frac{n(\theta+\overline{X}_n)}{\theta^2}\right)^2\right] = E_\theta\left[\frac{n^2}{\theta^4}(\theta+\overline{X}_n)^2\right] =}$$

$$\cancel{\frac{n^2}{\theta^4} E_\theta[\theta^2 + 2\theta\overline{X}_n + \overline{X}_n^2] = \frac{n^2}{\theta^2} + \frac{2n^2}{\theta^3} E[\overline{X}_n] + \frac{n^2}{\theta^4} E[\overline{X}_n^2]}$$

$$E[\overline{X}_n] = E[X] = \theta$$

$$E[\overline{X}_n^2] = E[X^2] = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta^2 \Gamma(3) = 2\theta^2$$

$$\cancel{I_n(\overline{\theta}) = \frac{n^2}{\theta^2} + \frac{2n^2}{\theta^2} + \frac{2n^2}{\theta^2} = \frac{5n^2}{\theta} \Rightarrow MiRC = \frac{1}{\frac{5n^3}{\theta}} = \frac{\theta}{5n^3}}$$

$$Var(\overline{X_n}) = \mathbb{E}[\overline{X_n}^2] - \mathbb{E}[\overline{X_n}]^2$$
$$= 2\theta^2 - \theta^2 = \cancel{\theta^2} \; \theta^2$$

$$\theta^2 \geq \frac{\theta}{5n^3}$$

$$\left(\cancel{\mathbb{E}[\ldots \frac{nX_n}{\theta}]}\right) \mathbb{E}\left[-\frac{1}{\theta^2} + \frac{2x}{\theta^3}\right] = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\mathbb{E}[X]$$
$$= -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

MIRC $= \theta^2 \Rightarrow$ est. e efic.

2. imobil de 200 apt; 0, 1 sau 2 maș cu prob 0.1, 0.6, 0.3;
Care e nr. minim de locuri pe care constr. trebuie să le prevadă ca să asig. cu $p = 0.95$ locuri suf. pt. întreg imobilul?

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Vrem $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{200} \leq n) \geq 0.95$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_{200}} \leq \frac{n}{200}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X_{200}} - 1,2 \leq \frac{n}{200} - 1.2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{200}\,(\overline{X_{200}} - 1,2)}{0.6} \leq \frac{\sqrt{200}\left(\frac{n}{200} - 1.2\right)}{0.6}\right)$$

$$\mathbb{E}[X_1] = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0,3 = 1,2$$

$$\sigma^2 = Var(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1] = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0.3 - 1,44$$
$$= 1.8 - 1.44 = 0.36$$

~~Conform TLC:~~

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{200}\,(\overline{X_{200}} - 1,2)}{0,6} \leq \frac{\sqrt{200} \cdot \left(\frac{n}{200} - 1.2\right)}{0.6}\right) \geq 0.95$$

TLC: $\dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{200}\left(\frac{n}{200} - 1.2\right)}{0.6}\right) \geq 0.95$$

$$\frac{\sqrt{200}\left(\frac{n}{200} - 1.2\right)}{0.6} \geq \Phi^{-1}(0.95) \simeq 1.65$$

$$\frac{n}{200} - 1,2 \geq \frac{1,65 \cdot 0.6}{\sqrt{200}} \Rightarrow n \geq 200\left(1,2 + \frac{0.6 \cdot 1,65}{\sqrt{200}}\right) \simeq 254$$

8 feb 2017

3. $X_1, \dots, X_n$ eşantion de talie n $\sim Poiss(\theta)$, $\theta > 0$

a) estim. vero. max ... depl, consist, efic.

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \theta^k \frac{e^{-\theta}}{k!} \quad k \geq 0$$

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) = \theta^{\sum x_i} \frac{e^{-n\theta}}{\prod x_i!}$$

$$l(\theta; x_1, \dots, x_n) = (\sum x_i) \ln \theta - n\theta - \sum \ln(x_i!)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - n \Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x}_n \quad \Big| \Rightarrow \hat{\theta}_n = \bar{X}_n \text{ est. de ver. max.}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} \leq 0$$

Pt o pop Poisson, în general,

Prop: $\hat{\theta}_n$ nu e depl. deoarece $b_\theta(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta = \frac{1}{n} \mathbb{E}[\bar{X}_i] - \theta = \frac{1}{n} \cdot n\theta - \theta = 0$

$\hat{\theta}_n$ e consistent din LNM.

$$\log \mathbb{P}_\theta(X_i = k) = \log \theta^k \frac{e^{-\theta}}{k!} = k \log \theta - \theta - \log k!$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathbb{P}_\theta}{\partial \theta^2} = -\frac{k}{\theta^2} \rightsquigarrow -\frac{X}{\theta^2} \quad ; \; I_1(\theta) := \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \log \mathbb{P}_\theta}{\partial \theta}\right)^2\right] \text{ sau } \underline{=} \; \mathbb{E}\left[-\left(\frac{\partial^2 \log \mathbb{P}_\theta}{\partial \theta^2}\right)\right]$$

$$I_1(\theta) = +\frac{1}{\theta^2} \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\theta} \; ; \; I_n(\theta) = \frac{n}{\theta}$$

$$Var(\hat{\theta}_n) = Var_\theta\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n \, Var(X_1) = \frac{\theta}{n}$$

$Var(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{I_n(\theta)}$ i.e. $\hat{\theta}_n$ e ef.

b) Est. de verosimil. max $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 / X_1 > 1)$.

$$\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 / X_1 > 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 \geq 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1)}{1 - \mathbb{P}(X_1 = 0)} = \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} = \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}$$

~~Est de verosimilitate maximă $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 | X_1 > 0) = \theta$ este $\hat{\theta}_n$.~~

~~(consist, eficient, nedeplasat)~~

E.V.M. pt. $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 | X_1 > 1)$ este $\dfrac{\hat{\theta}_n e^{-\hat{\theta}_n}}{1 - e^{-\hat{\theta}_n}}$

Conform teoremei apl. cont, g cont şi $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}/a.s./d} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}/a.s./d} g(X)$

Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x e^{-x}}{1-e^{-x}}$ continuă. Cum $\theta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ (consist)

$g(\theta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(\theta) \Rightarrow \frac{\hat\theta_n e^{-\hat\theta_n}}{1-e^{-\hat\theta_n}}$ e consistent pt. $\mathbb{P}_\theta(x_1=1 \mid x_1>0)$.

c) $E_\theta\left[\frac{\hat\theta_n e^{-\theta_n}}{1-e^{-\hat\theta_n}}\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\overline{x_n}\, e^{-\overline{x_n}}}{1-e^{-\overline{x_n}}}\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\overline{x_n}}{e^{\overline{x_n}}-1}\right]$

$g(x)=\frac{x}{e^x-1}$ $\quad g'(x)=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(1-x)-1}{(e^x-1)^2}$

$g''(x)=\cancel{e^x(1-x)-xe^x}\ldots$

$\Rightarrow g$ e convexă, cf. Ineg Jensen $E[g(x)]\geq g(\mathbb{E}[x])$

$\Rightarrow E[g(\theta_n)]\geq\frac{\theta}{e^\theta-1}$ $\quad$ ↳ dacă e concavă, ineg. e pe dos

g nu e liniară, $\frac{\overline{x_n}}{e^{\overline{x_n}}-1}$ nu e ct., deci inegalit. e strictă, i.e.

$b_\theta\left(\frac{\hat\theta_n}{e^{\hat\theta_n}-1}\right)\neq 0 \Rightarrow$ e deplasat.

4. $x_1,\ldots,x_n$ eșantion de talie n. $\sim f_\theta(x)=e^{-(x-\theta)}$, $x\geq\theta$

a) $\tilde\theta$ met. momentelor.

$E_\theta[x]=\int_\theta^\infty x f_\theta(x)\,dx=\int_\theta^\infty x e^{-(x-\theta)}dx=\int_0^\infty(x+\theta)e^{-x}dx=\int_0^\infty xe^{-x}dx+\theta\int_0^\infty e^{-x}dx$

$=\Gamma(2)+\theta\cdot 1=1+\theta$

$1+\theta_n=\overline{X_n}\Rightarrow\tilde\theta_n=\overline{X_n}-1$

b) est. met. vero max

$L(\theta;x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)=e^{n\theta}e^{-\sum x_i}$

$l(\theta;x_1,\ldots,x_n)=n\theta-\sum x_i$

$\frac{\partial l}{\partial\theta}=n$:(

$\hat\theta_n=\underset{\theta\geq 0}{\arg\max}\ \underbrace{n\Big(\theta-\underbrace{\frac{\sum x_i}{n}}_{\geq\frac{\theta}{n}}\Big)}_{\leq 0} \xleftarrow{x_i\geq\theta} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}=\overline{x_n}$ → e 0 dacă $\theta=\frac{\sum x_i}{n}$

greșit, vezi curs 9 exemplul 4

8 feb 2017

4 c) det. legea var. $n(\hat\theta-\theta)$ d) $\hat\theta$ nedeplasat? e) $MSE(\hat\theta)$

c) $n(\overline{X}_n-\theta)$

Var_θ: $\mathbb{E}_\theta[X^2]=\int_\theta^\infty x^2 e^{-(x-\theta)}dx=\int_0^\infty (x+\theta)^2 e^{-x}dx=\underbrace{\int_0^\infty x^2e^{-x}dx}_{\Gamma(3)}+2\theta\underbrace{\int_0^\infty xe^{-x}dx}_{\Gamma(2)}$

$+\theta^2\int_0^\infty e^{-x}dx$

$=2+2\theta+\theta^2$

$Var_\theta(X)=\theta^2+2\theta+2-\theta^2-2\theta-1=1$

Presupunem că e valabil: $\sqrt{n}(\hat\theta_n-\theta)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{1}{I(\theta)}\right)$; $\log f_\theta(x)=-x+\theta$, $\frac{\partial \log f(\theta)}{\partial\theta}=1$

$I(\theta)=\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial\theta}\right)^2\right]=1$

$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat\theta_n-\theta)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$

d) $\mathbb{E}[\hat\theta_n]=\mathbb{E}[\overline{X}_n]=\mathbb{E}[X]=$ ~~$\hat\theta_n$ deplasat~~

$=1+\theta\neq\theta\Rightarrow\hat\theta_n$ deplasat cu $b_\theta=1$

e) $MSE(\hat\theta_n)=Var_\theta(\hat\theta_n)+b_\theta^2=\frac{1}{n}+1$

$Var_\theta(\hat\theta_n)=Var_\theta(\overline{X}_n)=\frac{1}{n^2}n\,Var_\theta(X_1)=\frac{1}{n}$

f) pt. $\theta=2$ vrem 3 val din $X\sim f_\theta(x)$; $u_1=0.25$; $u_2=0.4$; $u_3=0.5$

$F_\theta(x)=\mathbb{P}(X\le x)=\int_\theta^x e^{-(t-\theta)}dt=e^\theta\int_\theta^x e^{-t}dt=e^\theta\cdot -e^{-t}\Big|_\theta^t=e^\theta(e^\theta-e^{-x})=y$

$ye^{-\theta}=e^\theta-e^{-x}\Leftrightarrow e^{-x}=e^\theta-ye^{-\theta}\Rightarrow x=\ln(e^\theta-ye^{-\theta})$

$\Rightarrow F_\theta^{-1}(x)=-\ln(e^\theta-xe^{-\theta})$

$F_2^{-1}(x)=-\ln(e^2-xe^{-2})$

$x_i:=F_2^{-1}(u_i)$ $i=\overline{1,3}$