Integrala Riemann pe o multime masurabila Jordan

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punct $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste punct interior al lui A daca A este o vecinatate a lui x. Multimea punctelor interioare ale lui A se numeste interiorul multimii A si se noteaza cu $\overset{\circ}{A}$. Un punct $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste punct aderent al lui A daca pentru orice vecinatate V a lui x avem $V \cap A \neq \emptyset$. Multimea punctelor de aderenta ale lui A se noteaza cu $\overline{A}$ si se numeste aderenta sau inchiderea multimii A. Un punct $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste punct de frontiera pentru A daca pentru orice vecinatate V a lui x avem $V \cap A \neq \emptyset$ si $V \cap CA \neq \emptyset$. Multimea punctelor de frontiera ale lui A se noteaza cu $Fr(A)$ si se numeste frontiera multimii A. Observam ca $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{CA}$.

Urmatoarea teorema (vezi demonstratia in Seminar 11) ofera un criteriu foarte util pentru a vedea daca o multime este masurabila Jordan.

Teorema 1. Fie A o multime marginita din $\mathbb{R}^n$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente.

(i) A este este masurabila Jordan.

(ii) frontiera $Fr(A)$ a multimii A este masurabila Jordan si $\lambda(Fr(A)) = 0$.

(iii) $\overset{\circ}{A}$ si $\overline{A}$ sunt masurabile Jordan si $\lambda(\overset{\circ}{A}) = \lambda(\overline{A})$.

Definitie. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o multime masurabila Jordan si $f : A \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Alegem un interval J din $\mathbb{R}^n$ astfel incat $A \subset J$ (existenta lui rezulta din marginirea lui A) si definim functia $\tilde{f} : J \to \mathbb{R}$ prin

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \in J \setminus A \end{cases} .$$

Prin definitie spunem ca f este integrabila pe A daca $\tilde{f}$ este integrabila pe J si in acest caz integrala lui f pe A este definita prin

$$\int_A f(x)dx = \int_J \tilde{f}(x)dx.$$

Se observa ca aceasta definitie este independenta de alegerea intervalului J (exercitiu!)

Teorema 2. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o multime masurabila Jordan si $f : A \to \mathbb{R}^+$ o functie integrabila Riemann. Atunci multimea

$$\Gamma_f = \{(x,t) : x \in A,\ 0 \le t \le f(x)\}$$

este masurabila Jordan si

$$\lambda(\Gamma_f) = \int_A f(x)dx.$$

Demonstratie. Fie J un interval in $\mathbb{R}^n$ astfel incat $A \subset J$ si fie $\tilde{f} : J \to \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ daca } x \in A; \\ 0 \qquad \text{daca } x \in A \setminus J. \end{cases}$$

Deci $\tilde{f}$ este integrabila Riemann pe J. Sa consideram

$$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$$

o descompunere in subintervale a lui J. Ca de obicei,

$$m_i = \inf\{\tilde{f}(x) \ : x \in A_i\} \qquad M_i = \sup\{\tilde{f}(x) : x \in A_i\}.$$

Fie submultimile de indici

$$I = \{i : A_i \cap A \neq \emptyset\}, \quad K = \{i : A_i \subset A\}.$$

Avem

$$s_{\mathcal{P}}(\tilde{f}) = \sum_{i=1}^{p} m_i \cdot \mathrm{vol}(A_i) = \sum_{i \in K} m_i \cdot \mathrm{vol}(A_i)$$

$$S_{\mathcal{P}}(\tilde{f}) = \sum_{i=1}^{p} M_i \cdot \mathrm{vol}(A_i) = \sum_{i \in I} M_i \cdot \mathrm{vol}(A_i).$$

Consideram intervalele din $\mathbb{R}^{n+1}$

$$L_i = A_i \times [0, m_i], \quad U_i = A \times [0, M_i], \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

si multimile elementare din $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$F_{\mathcal{P}} = \bigcup_{i \in K} L_i, \quad E_{\mathcal{P}} = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Observam ca

$$F_{\mathcal{P}} \subseteq \Gamma_f \subseteq E_{\mathcal{P}}$$

si

$$\lambda(F_{\mathcal{P}}) = \sum_{i \in K} \mathrm{vol}(L_i) = s_{\mathcal{P}}(\tilde{f}), \quad \lambda(E_{\mathcal{P}}) = \sum_{i \in I} \mathrm{vol}(U_i) = S_{\mathcal{P}}(\tilde{f}). \tag{1}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\tilde{f}$ este integrabila, din Criteriul lui Darboux, rezulta ca exista o descompunere $\mathcal{P}$ a lui J astfel incat

$$S_{\mathcal{P}}(\tilde{f}) - s_{\mathcal{P}}(\tilde{f}) < \varepsilon. \tag{2}$$

Din (1) si (2) obtinem

$$\lambda^*(\Gamma_f) - \lambda_*(\Gamma_f) \leq \lambda(E_{\mathcal{P}}) - \lambda(F_{\mathcal{P}}) = S_{\mathcal{P}}(\tilde{f}) - s_{\mathcal{P}}(\tilde{f}) < \varepsilon,$$

si cum ε a fost ales arbitrar rezulta ca Γ_f este masurabila Jordan. Cum

$$\int_A f(x)dx = \sup_{\mathcal{P}} s_{\mathcal{P}}(\tilde{f}) \leq \sup\{\lambda(E) \ : F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),\ F \subset \Gamma_f\} = \lambda_*(\Gamma_f) = \lambda(\Gamma_f)$$

si

$$\lambda(\Gamma_f) = \lambda^*(\Gamma_f) = \inf\{\lambda(E) \ : E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),\ E \supset \Gamma_f\} \leq \inf_{\mathcal{P}} S_{\mathcal{P}}(\tilde{f}) = \int_A f(x)dx$$

concluzionam ca

$$\lambda(\Gamma_f) = \int_A f(x)dx$$

Corolar 3. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o multime masurabila Jordan si $f : A \to \mathbb{R}$ integrabila Riemann. Atunci multimea

$$G_f = \{(x, f(x)) \ : x \in A\}.$$

este masurabila Jordan si $\lambda(G_f) = 0$

Demonstratie. Este suficient sa demonstram afirmatia in cazul in care $f \geq 0$ (de ce?). In acest caz se observa ca $G_f \subset Fr(\Gamma_f)$. Cum $\lambda^*(G_f) \leq \lambda(Fr(\Gamma_f)) = 0$, corolarul rezulta din Teorema 1.

Corolar 4. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o multime masurabila Jordan si $f, g : A \to \mathbb{R}$ doua functii integrabile Riemann astfel incat $f \leq g$. Atunci multimea

$$\Gamma_{f,g} = \{(x, t) \ : x \in A,\ f(x) \leq t \leq g(x)\}.$$

este masurabila Jordan si

$$\lambda(\Gamma_{f,g}) = \int_A (g(x) - f(x))dx.$$

Demonstratie. Exercitiu!

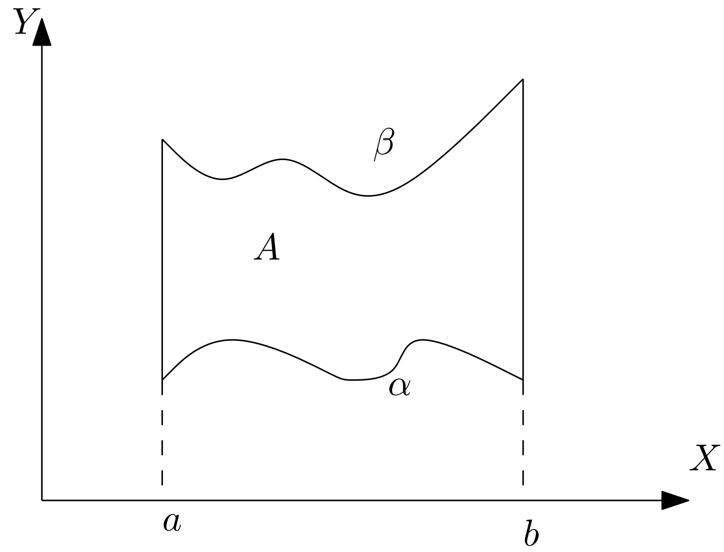
Urmatoarele propozitii frecvent utilizate pentru calcularea integralelor duble si triple sunt consecinte ale Teoremei lui Fubini.

Propozitie 5. Fie $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ doua functii continue astfel incat $\alpha(x) \leq \beta(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci multimea

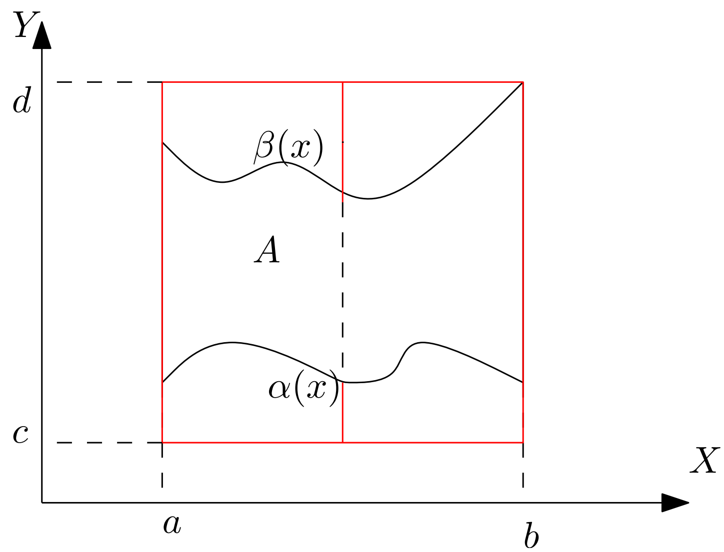
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

este masurabila Jordan. Daca $f : A \to \mathbb{R}$ este continua pe A atunci f este integrabila pe A si

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy \right) dx$$



Demonstratie. Functiile α si β sunt integrabile Riemann, fiind continue si marginite. Faptul ca A este masurabila Jordan, rezulta din Teorema 2. Deoarece A este compacta (fiind inchisa si marginita) si f este continua pe A, rezulta ca f este marginita. Din Criteriul lui Lebesgue rezulta ca f este intergabila Riemann pe A.



Notam $J = [a, b]$ si fie $K = [c, d] \subset \mathbb{R}$ un interval inchis si marginit astfel incat $A \subset J \times K$. Consideram functia $\tilde{f} : J \times K \to \mathbb{R}$ definita prin

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \notin A. \end{cases}$$

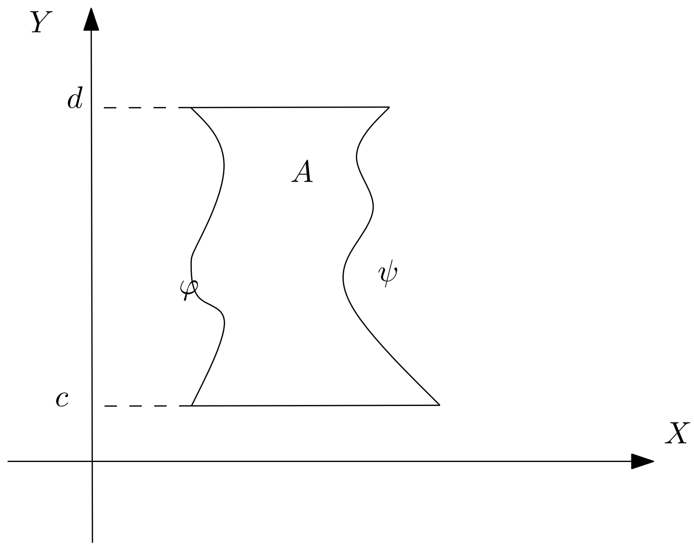
Intrucat f este integrabila Riemann pe A inseamna ca $\tilde{f}$ este integrabila pe $J \times K$ si

$$\int_{K \times J} \tilde{f}(z)dz = \int_A f(z)dz.$$

Pentru $x \in J$ fie
$$A_x = [\alpha(x), \beta(x)]$$
si functiile $f_x : A_x \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}_x : K \to \mathbb{R}$ definite prin
$$f_x(y) = f(x,y),\ y \in A_x \quad \text{si} \quad \tilde{f}_x(y) = \tilde{f}(x,y),\ y \in K$$
Vom arata in continuare ca pentru orice $x \in J$ functia $\tilde{f}_x$ este integrabila pe K. Deoarece f este continua pe A, rezulta ca functia $f_x : A_x \to \mathbb{R}$ este continua si deci integrabila Riemann pe A_x. Avem
$$\tilde{f}_x(y) = \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & y \in A_x \\ 0, & y \in K \setminus A_x \end{cases} = \begin{cases} f_x(y), & y \in A_x \\ 0, & y \in K \setminus A_x \end{cases}$$
Cum functia f_x este integrabila, inseamna ca si $\tilde{f}_x$, care extinde functia f_x la K - fiind egala cu 0 in afara lui A_x - este integrabila Riemann pe K si
$$\int_{A_x} f_x(y)dy = \int_K \tilde{f}_x(y)dy.$$
Asadar $\tilde{f}_x$ este integrabila Riemann pe K pentru orice $x \in J$. Din Teorema lui Fubini rezulta ca functia $\tilde{F} : J \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \tilde{F}(x) = \int_K \tilde{f}_x(y)dy$$
este integrabila Riemann pe J si
$$\int_{J\times K} \tilde{f}dz = \int_J \tilde{F}(x)dx.$$
Cum
$$\tilde{F}(x) = \int_{A_x} f(x,y)dy \text{ pentru orice } x \in J$$
rezulta ca functia
$$J \ni x \mapsto \int_{A_x} f(x,y)dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$$
este integrabila Riemann pe J si
$$\int_A f dz = \int_{J\times K} \tilde{f}dz = \int_J \tilde{F}(x)dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$
Propozitie 6. Fie $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ doua functii continue astfel incat $\varphi(x) \le \psi(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$. Atunci multimea
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

este masurabila Jordan. Daca $f : A \to \mathbb{R}$ este continua pe A atunci f este integrabila pe A si

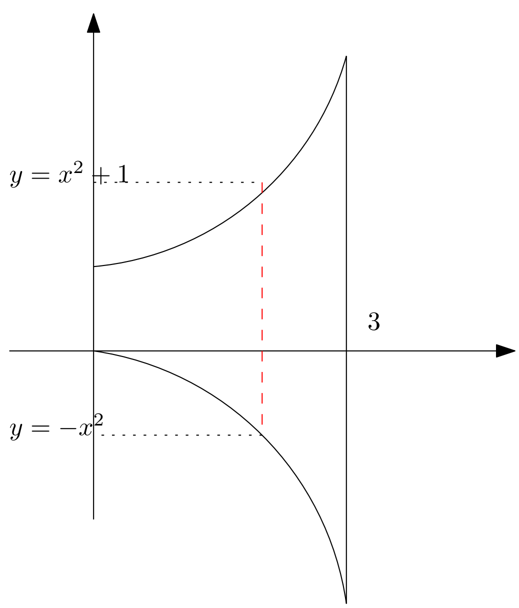
$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$



Exemplu. Sa se calculeze

$$\iint_D (3x+2y)dxdy$$

unde D este multimea marginita de curbele $y = x^2 + 1 \quad y = -x^2, \quad x = 0, \quad x = 3.$
Solutie. Observam ca



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 3, \ -x^2 \le y \le x^2 + 1\}$$

Fie $\alpha, \beta : [0,3] \to \mathbb{R}$

$$\alpha(x) = -x^2, \quad \beta(x) = x^2 + 1$$

Functiile α si β sunt continue pe $[0,3]$ si functia $f : D \to \mathbb{R}$ este continua pe D. Conform Propozitiei 5 rezulta ca D este masurabila Jordan si f este intergabila pe D.

$$\iint_D (3x+2y)dxdy = \int_0^3 \left(\int_{-x^2}^{x^2+1} (3x+2y)dy \right) dx = \int_0^3 \left(3x \int_{-x^2}^{x^2+1} dy + \int_{-x^2}^{x^2+1} 2ydy \right) dx$$

$$\int_0^3 (3xy + y^2)\Big|_{y=-x^2}^{y=x^2+1} dx = \int_0^3 (6x^3 + 3x + 2x^2 + 1)dx$$

Exemplu. Sa se calculeze integrala

$$\iint_D (x+y)dxdy$$

unde D este multimea delimitata de dreptele $x + y = 0,\ x - y = 0,\ y = 1$ si $y = 2$.

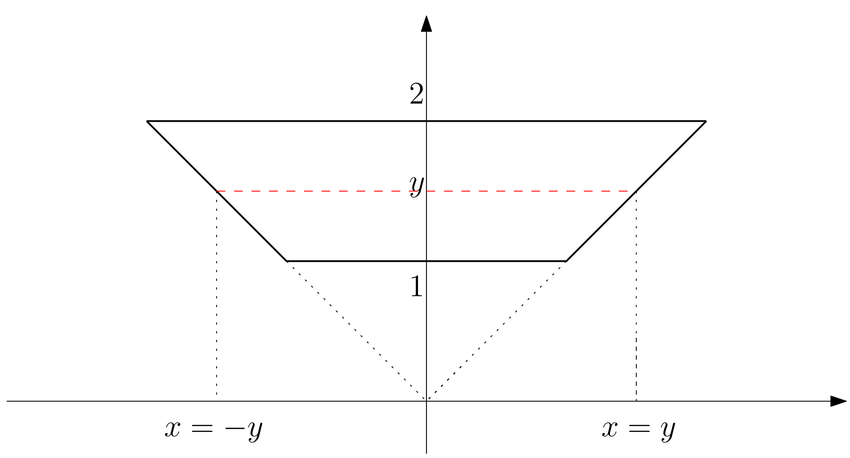
Solutie. Observam ca

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le y \le 2,\ -y \le x \le y\}$$

Fie $\alpha, \beta : [1,2] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(y) = -y, \quad \psi(y) = y.$$

Functiile φ si ψ sunt continue pe $[1,2]$ si functia $f : D \to \mathbb{R}$ este continua pe D. Conform



Propozitiei 6 rezulta ca D este masurabila Jordan si f este intergabila Riemann pe D.

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_{-y}^{y} (x+y)dx \right) dy$$

Cum

$$\int_{-y}^{y}(x+y)dx = \int_{-y}^{y} xdx + y\int_{-y}^{y} dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_{-y}^{y} + yx\bigg|_{x=-y}^{x=y} = 2y^2$$

rezulta ca

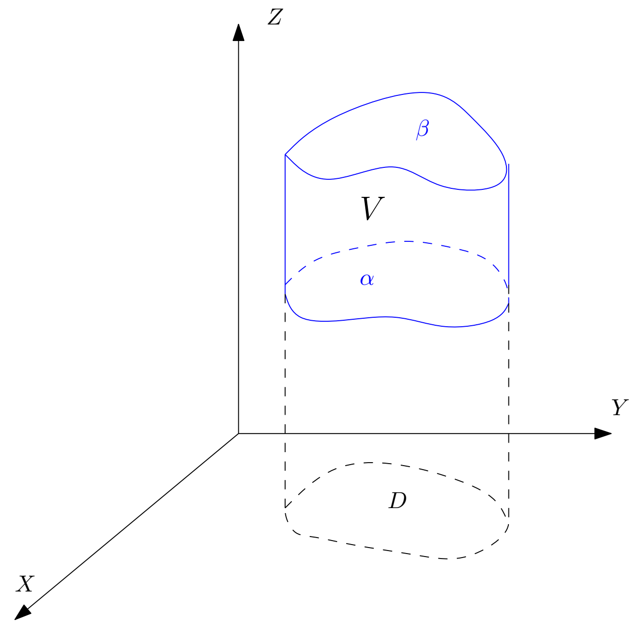
$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_{-y}^{y}(x+y)dx\right)dy = \int_1^2 2y^2 dy = \frac{2y^3}{3}\bigg|_1^2 = 5.$$

Propozitie 7. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o multime masurabila Jordan si $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ doua functii continue si marginite pe D astfel incat $\alpha(x,y) \le \beta(x,y)$ pentru orice $(x,y) \in D$. Atunci multimea

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$

este masurabila Jordan. Daca $f : V \to \mathbb{R}$ este continua si marginita pe V atunci f este integrabila Riemann pe V si

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$



Exemplu. Calculati

$$\iiint_V xdxdydz,\ V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ : x+y+z \le 1,\ x,y,z \ge 0\}$$

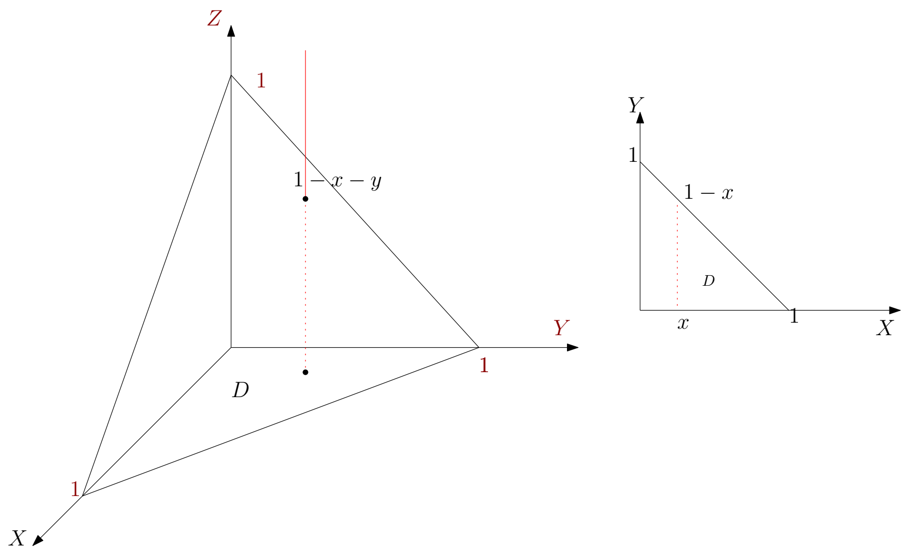
Solutie. Observam ca

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1-x-y,\ \ (x,y) \in D\}$$

unde D, proiectia lui V pe planul xOy este

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y \leq 1,\ x,y \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}.$$

Functiile $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$



$$\alpha(x) = 0 \quad \beta(x) = 1-x$$

sunt continue pe $[0,1]$ si prin urmare ca D este masurabila Jordan. Functiile $g, h : D \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = 0, \quad h(x,y) = 1-x-y$$

sunt continue si marginite pe D, functia $f : D \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x$$

este continua si marginita pe V si atunci, conform Propozitiei 7, rezulta ca V este masurabila Jordan si f este intergabila Riemann pe V.

$$\begin{aligned}
\iiint_V x dx dy dz &= \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} x dz \right) dx dy = \iint_D x(1-x-y) dx dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x - x^2 - xy) dy \right) dx = \int_0^1 \left(xy - x^2 y - x\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[x(1-x) - x^2(1-x) - x\frac{(1-x)^2}{2} \right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} dx = \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{2} \right] dx \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$