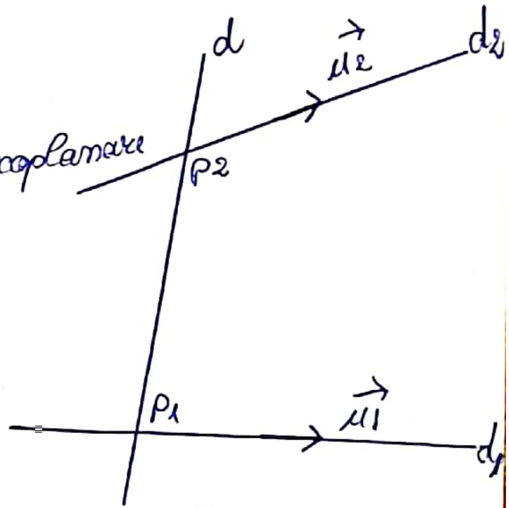
Milosteanu Andreea
Mihoci Valentina

5.01.2022

Tutoriatul 11
Geometrie I
(exerciții)

1. Fie dreptele $d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-9}{-1}$ și $d_2: \frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{3}$.

a) Arătați că cele două drepte sunt necoplanare.
b) Determinați ecuația perpendicularei comune. (două metode)
c) Aflați distanța dintre cele două drepte.



SOL. a) Avem $\vec{u_1} = (1,0,-1)$ și $\vec{u_2} = (-4,0,3)$.

$M_1(7,3,9) \in d_1$ și $M_2(3,1,1) \in d_2$.

Deci $\overrightarrow{M_1M_2} = (-4,-2,-8) = -2(2,1,4)$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (2,1,4)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0$$, deci d_1 și d_2 sunt necoplanare

b) Fie d = perpendiculara comună, i.e. $d \perp d_1$, $d \perp d_2$

Metoda I Căutăm două puncte P_1, P_2 care aparțin dreptelor d_1, respectiv d_2, și se află și pe d, i.e. $d \cap d_2 = \{P_2\}$ și $d \cap d_1 = \{P_1\}$

$$d_1: \begin{cases} x = t_1 + 7 \\ y = 3 \\ z = -t_1 + 9, \ t_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad d_2: \begin{cases} x = -4t_2 + 3 \\ y = 1 \\ z = 3t_2 + 1, \ t_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$ (ecuațiile parametrice)

Așadar, avem $P_1(t_1+7, 3, -t_1+9) \in d_1$ și $P_2(-4t_2+3, 1, 3t_2+1) \in d_2$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-4t_2 - t_1 - 4, -2, 3t_2 + t_1 - 8)$; $\vec{u_1} = (1,0,-1)$, $\vec{u_2} = (-4,0,3)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4t_2 - t_1 - 4 - 3t_2 - t_1 + 8 = 0 \\ 16t_2 + 4t_1 + 16 + 9t_2 + 3t_1 - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7t_2 - 2t_1 + 4 = 0 \ /\cdot 7 \\ 25t_2 + 7t_1 - 8 = 0 \ /\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -49t_2 - 14t_1 + 28 = 0 \\ 50t_2 + 14t_1 - 16 = 0 \end{cases} \oplus$$

$$t_2 + 12 = 0 \Rightarrow \underline{t_2 = -12} \Rightarrow \underline{t_1} = \frac{-7t_2 + 4}{2} = \frac{84+4}{2} = \underline{44}$$

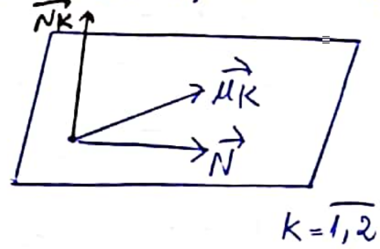
Avem $P_1(51,3,-35) \in d$, $P_2(51,1,-35) \in d$, $\overrightarrow{P_1P_2}=(0,-2,0)=-2(0,1,0)$

$$d: \frac{x-51}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+35}{0} \Leftrightarrow d:\begin{cases}x=51\\ z=-35\end{cases}$$ ecuația perpendicularei comune.

Metoda II Fie $\vec{N}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}$, unde $\vec{u_1}=(1,0,-1)$ și $\vec{u_2}=(-4,0,3)$.

$$N=\vec{u_1}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ -4 & 0 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -4 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & 0\end{vmatrix}=$$
$$=(0,1,0) \Rightarrow \vec{u_d}=(0,1,0)$$, unde d = perpendiculara comună

Căutăm planele π_1 (det. de $M_1\in d_1$ și normala $\vec{N_1}$) și π_2 (det. de $M_2\in d_2$ și normala $\vec{N_2}$).



$$\vec{N_1}=\vec{N}\times\vec{u_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,0,-1)$$

$$\vec{N_2}=\vec{N}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ -4 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{vmatrix}=(3,0,4)$$

$M_1(7,3,9)\in d_1$ și $M_2(3,1,1)\in d_2$ (Conform punctului a)).

$\pi_1: \vec{N_1}\cdot(\vec{r}-\vec{r_1})=0 \Leftrightarrow \pi_1: -1(x-7)+0(y-3)-1(z-9)=0$

$\pi_1: -x+7-z+9=0 \Rightarrow \pi_1: x+z-16=0$

$\pi_2: \vec{N_2}\cdot(\vec{r}-\vec{r_2})=0 \Leftrightarrow \pi_2: 3(x-3)+0(y-1)+4(z-1)=0$

$\pi_2: 3x+4z-13=0$

$$\pi_1\cap\pi_2=\{d\}: \begin{cases}x+z-16=0 \ /\cdot 3\\ 3x+4z-13=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x+3z-48=0\\ 3x+4z-13=0 \ (-)\end{cases}$$
$$/\ -z-35=0 \Rightarrow z=-35$$

$x=16-z \Rightarrow x=16+35=51$

Deci $d:\begin{cases}x=51\\ z=-35\end{cases}$

Atenție! A fost o coincidență că la ambele metode ne-a dat dreapta d sub aceeași formă! Este important, în caz general, dreptele obținute să aibă obligatoriu aceeași direcție. O dreaptă conține o infinitate de puncte, deci nu contează ce punct stă pe dreaptă la rezultatul final.

c) $d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-9}{-1}$ și $d_2: \frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{3}$.

Metoda I $dist(d_1, d_2) = dist(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = 2$

Metoda II $dist(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{m_1m_2} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = 2$

2. Fie punctele $A(0,3,0), B(2,0,1), C(4,0,-1), D(3,3,3)$.

a) Aflați aria triunghiului ΔABC.

b) Scrieți ecuația planului π, determinat de punctele A, B, C. Aflați $dist(D, \pi)$.

c) Scrieți ecuația dreptei d determinate de A, B. Aflați $dist(D, d)$.

d) Aflați volumul tetraedrului $ABCD$.

SOL. a) $\boxed{\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}$ $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,-3,1) \\ \overrightarrow{AC} = (4,-3,-1) \end{cases}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (6, 6, 6) = 6(1,1,1) \quad \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = 6\sqrt{1^2+1^2+1^2} = 6\sqrt{3}$$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b) Aflăm $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ doi vectori directori ai planului și impunem planul să treacă prin A.

$\overrightarrow{AB} = (2,-3,1)$ $A(0,3,0)$

$\overrightarrow{AC} = (4,-3,-1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & 2 & 4 \\ y-3 & -3 & -3 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x+4y-12-6z+12z+3x+2y-6=0$$

$\pi: 6x+6y+6z-18=0 \,/ :6$

$\pi: x+y+z-3=0$ (se vede că $D \notin \pi$)

$\boxed{dist(D, \pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ $\Rightarrow dist(D, \pi) = \frac{|1\cdot3+1\cdot3+1\cdot3-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

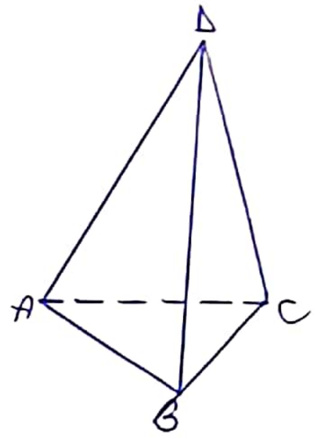
c) $d: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{1}$ (AB)

$\boxed{dist(D, d) = \frac{\|\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}} = \frac{\sqrt{9^2+3^2+9^2}}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \sqrt{\frac{171}{14}}$

$\overrightarrow{AB} = (2,-3,1)$; $\overrightarrow{DA} = (-3,0,-3)$; $\overrightarrow{DB} = (-1,-3,-2)$; $\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-9,-3,9)$

d) $\boxed{V_{ABCD}=\frac{1}{6}|\Delta|}=\frac{1}{6}\cdot 36=6.$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=36$$



3. Fie dreptele $d_1: \frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{1}$ și $d_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$.
Să se arate că cele două drepte sunt necoplanare și să se determine ecuația perpendicularei comune.

SOL: Avem $\vec{u_1}=(1,2,1)$ și $\vec{u_2}=(2,1,1)$. $M_1(2,0,3)\in d_1$, $M_2(1,3,0)\in d_2$.

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,3,-3)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-3-2+6+1-3+12=11\neq 0 \Rightarrow \text{deci } d_1 \text{ și } d_2 \text{ sunt necoplanare}$$

Fie d = perpendiculara comună, i.e. $d\perp d_1, d\perp d_2$

Metoda I Căutam două puncte P_1, P_2 care aparțin dreptelor d_1, respectiv d_2, și se află și pe d, i.e. $d\cap d_2=\{P_2\}$ și $d\cap d_1=\{P_1\}$.

$$d_1: \begin{cases} x=t_1+2 \\ y=2t_1 \\ z=t_1+3, t_1\in\mathbb{R} \end{cases} \qquad d_2: \begin{cases} x=2t_2+1 \\ y=t_2+3 \\ z=t_2,\ t_2\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Așadar, avem $P_1(t_1+2, 2t_1, t_1+3)\in d_1$ și $P_2(2t_2+1, t_2+3, t_2)\in d_2$.

$\overrightarrow{P_1P_2}=(2t_2-t_1-1, t_2-2t_1+3, t_2-t_1-3)$; $\vec{u_1}=(1,2,1)$; $\vec{u_2}=(2,1,1)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{u_1}=0 \\ \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{u_2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_2-t_1-1+2t_2-4t_1+6+t_2-t_1-3=0 \\ 4t_2-2t_1-2+t_2-2t_1+\cancel{3}+t_2-t_1-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5t_2-6t_1+2=0 \ |\cdot 6 \\ 6t_2-5t_1-2=0 \ |\cdot(-5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 30t_2-36t_1+12=0 \\ -30t_2+25t_1+10=0 \end{cases} \oplus \qquad t_2=\frac{-2+6t_1}{5}=\frac{10}{5}=2 \Rightarrow \underline{t_2=2}$$

$$-11t_1+22=0 \Rightarrow \underline{t_1=2}$$

Avem $\underset{\in d}{P_1(4,4,5)}$, $\underset{\in d}{P_2(5,5,2)}$, $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,1,-3)$.

$$d: \frac{x-4}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{-3}.$$

Metoda II Fie $\vec{N}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}$, unde $\vec{u_1}=(1,2,1)$ și $\vec{u_2}=(2,1,1)$.

$$\vec{N}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(1,1,-3) \Rightarrow \vec{u_d}=(1,1,-3),$$ unde d = perpendiculara comună

Căutăm planele π_1 (det. de $M_1\in d_1$ și normala $\vec{N_1}$) și π_2 (det. de $M_2\in d_2$ și normala $\vec{N_2}$).

$$\vec{N_1}=\vec{N}\times\vec{u_1}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(7,-4,1)$$

$$\vec{N_2}=\vec{N}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(4,-7,-1)$$

$M_1(2,0,3)\in d_1$ și $M_2(1,3,0)\in d_2$.

$$\pi_1: \vec{N_1}\cdot(\vec{r}-\vec{r_1})=0 \Leftrightarrow \pi_1: 7(x-2)-4y+(z-3)=0$$

$$\pi_1: 7x-4y+z-17=0$$

$$\pi_2: \vec{N_2}\cdot(\vec{r}-\vec{r_2})=0 \Leftrightarrow \pi_2: 4(x-1)-7(y-3)-z=0$$

$$\pi_2: 4x-7y-z+17=0$$

$$\pi_1\cap\pi_2=\{d\}: \begin{cases} 7x-4y+z-17=0 \\ 4x-7y-z+17=0 \end{cases}$$ Notăm $z=t\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 7x-4y=17-t & \Big| \cdot 4 \\ 4x-7y=t-17 & \Big| \cdot 7 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 28x-16y=68-4t \\ 28x-49y=7t-119 \end{cases} \ominus$$

$$33y=187-11t \Rightarrow y=-\frac{1}{3}t+\frac{187}{33}$$

$$x=\frac{17-t+4y}{7} \Rightarrow x=\frac{17}{7}-\frac{1}{7}t+\frac{4}{7}\cdot\left(-\frac{1}{3}t+\frac{187}{33}\right)=\frac{51}{21}-\frac{3}{21}t-\frac{4}{21}t+\frac{748}{231}$$

$$=\frac{1309}{231}-\frac{1}{3}t \qquad \frac{119}{21}$$

(Obs. că $\vec{u_d}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)=-\frac{1}{3}(1,1,-3)$).

$$d: \frac{x-\frac{119}{21}}{-\frac{1}{3}}=\frac{y-\frac{187}{33}}{-\frac{1}{3}}=\frac{z}{1}$$