Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Examen

2 Iunie 2018

Timp de lucru 2h30. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Mult succes !

Exercițiul 1 10p

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \,|\, X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 2 10p

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$ unde $\theta \in (0,1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

Exercițiul 3 10p

Calculați marginea Rao-Cramer pentru familia $\mathcal{N}(\mu, 1)$ unde μ este necunoscut. Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor și verificați dacă este eficient.

Exercițiul 4 10p

Considerăm următorul eșantion de talie 20 dintr-o populație Bernoulli de parametru $\theta \in (0,1)$:

`0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0`

a) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și determinați informația lui Fisher $I(\theta)$.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{V}_\theta[X_1]$. Este acesta nedeplasat? Dar consistent? Justificați răspunsul.

c) Construiți un interval de încredere pentru $\hat{\theta}$ de nivel 95%.

Examen iunie 2018

1) $X_1 \ldots X_n \sim Pois(\theta)$

Eficientă
Informația Fisher
Jensen
Legea Limită a unui estimator
de încredere

a) $\hat{\theta} = ?$

$$f(x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = \theta$$

$$Var(X_i) = \theta$$

$$L(\theta | x_1 \ldots x_n) = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{x_1! \ldots x_n!}$$

$$\ell(\theta | x_1 \ldots x_n) = \left(\sum x_i\right) \ln \theta - n\theta - \sum(\ln(x_i!))$$

$$\frac{d}{d\theta} \ell(\theta | x_1 \ldots x_n) = \frac{\sum x_i}{\theta} - n$$

$$\frac{d}{d\theta} \ell(\theta | x_1 \ldots x_n) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_n = \overline{X}_n$$

- $E_\theta[\hat{\theta}_n] = E_\theta[\overline{X}_n] = \frac{1}{n} \sum E_\theta[X_i] = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}\theta = \theta$

$\Rightarrow$ estimatorul nu e deplasat

- Din Legea Numerelor Mari $\overline{X}_n \xrightarrow{a.s} \mathbb{E}[X_i] = \theta \Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$
- Pentru a verifica dacă este sau nu eficient trebuie să calc. Informația lui Fisher

$$I_n(\theta) = n I_1(\theta) = n \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X)\right)^2\right] =$$

inf Fisher pt n obs

$$= -n \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(X)\right]$$

$$= -n \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(X \ln\theta - \theta - \ln X!)\right]$$

$$= -n \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{X}{\theta} - 1\right)\right]$$

$$= -n \mathbb{E}\left[-\frac{X}{\theta^2}\right] = n \cdot \theta^{-2} \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{n}{\theta}$$

$$Var_\theta(\hat{\theta}_n) = Var_\theta(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n} Var(X_1) = \frac{\theta}{n}$$

$$Var_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{I_n(\theta)} \Rightarrow \text{estimatorul e eficient}$$

b) $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$ — estim de verom max? consistent?

$$\mathbb{P}_\theta(X_1=1 \mid X_1>0) = \frac{\mathbb{P}(X_1=1)}{\mathbb{P}(X_1>0)} = \frac{\mathbb{P}(X_1=1)}{1-\mathbb{P}(X_1=0)} = \frac{\theta e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}$$

Din Teorema aplicațiilor continue, considerând $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$, g continuă și știind că $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ va rezulta că $g(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(\theta)$ i.e.

$\frac{\hat{\theta}_n e^{-\hat{\theta}_n}}{1-e^{-\hat{\theta}_n}}$ este consistent pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1=1 \mid X_1>0)$

c) $$\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\hat{\theta}_n e^{-\hat{\theta}_n}}{1-e^{-\hat{\theta}_n}}\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\overline{X}_n e^{-\overline{X}_n}}{1-e^{-\overline{X}_n}}\right] = \mathbb{E}_\theta\left[e^{-\overline{X}_n}\cdot\frac{\overline{X}_n}{e^{\overline{X}_n}-1}\right] \text{ ~ integrală}$$

$$= \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\overline{X}_n}{e^{\overline{X}_n}-1}\right]$$

Fie $\varphi(x) = \frac{x}{e^x-1}$

$$\varphi'(x) = \frac{e^x-1-e^x x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x(1-x)-1}{(e^x-1)^2}$$

$$\varphi''(x) = \frac{(e^x(1-x)-e^x)(e^x-1)^2 - 2(e^x(1-x)-1)(e^x-1)\cdot e^x}{(e^x-1)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(e^x-1)}\left[(-xe^x)(e^x-1) - 2(e^x - xe^x - 1)e^x\right]}{(e^x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-xe^{2x}+xe^x - 2e^{2x}+2xe^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{(x-2)e^{2x}+(x+2)e^x}{(e^x-1)^3} = e^x($$

D[x/(e^x -1), {x,2}]

$$\varphi''(x) = -\frac{2e^x}{(-1+e^x)^2} + x\cdot\left(\frac{2e^{2x}}{(e^x-1)^3} - \frac{e^x}{(e^x-1)^2}\right) \overset{?}{\geq} 0$$

$\Rightarrow \varphi$ convexă

Jensen $\Rightarrow \varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$

Scanned with CamScanner

$g(x) = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$

$$E_\theta\left[\frac{\hat{\theta}_n e^{-\hat{\theta}_n}}{1-e^{-\hat{\theta}_n}}\right] \geq \frac{\theta}{e^{\theta}-1}$$

Deci $E\left[\frac{\bar{X}_n}{e^{\bar{X}_n}-1}\right] - \frac{\theta}{e^{\theta}-1} \geqslant 0$

nu e ct $\Rightarrow$ inegalitatea e strictă $\Rightarrow b_\theta\left(\frac{\hat{\theta}_n}{e^{\hat{\theta}_n}-1}\right) \neq 0$

i.e deplasat

2) $\mathbb{P}_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0,1)$, $A \in \mathbb{R}$ ct.

1) $A = ?$, $E[X] = ?$, $Var(X) = ?$

$$1 = \sum_k \mathbb{P}(X=k) = \sum_k A(k+1)\theta^k$$

Fie $f:(0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$. Atunci $f'(x) = \sum kx^{k-1}$
$= \frac{1}{(1-x)^2}$ i $f''(x) = \sum k\cdot(k-1)x^{k-2} = +\frac{2}{(1-x)^3}$

Deci $1 = A\cdot f'(\theta) = \frac{A}{(1-\theta)^2} \Rightarrow A = (1-\theta)^2$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-\theta)^2(k+1)\theta^k$$

$$E[X] = \sum_{k\geq 0} k(k+1)\theta^k(1-\theta)^2 = (1-\theta)^2\theta\sum_{k\geq 1} k(k+1)\theta^{k-1}$$
$$= (1-\theta)^2\theta\cdot f''(x) = (1-\theta)^{\cancel{2}}\cdot\theta\cdot\frac{1}{(1-\theta)^{\cancel{3}}} = \frac{2\theta}{1-\theta}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k\geq 0} k^2(k+1)\theta^k(1-\theta)^2 = \sum k(k+1)(k-1)\theta^k(1-\theta)^2 +$$
$$\sum k(k+1)\theta^k(1-\theta)^2 = \ldots \frac{2\theta}{1-\theta} + \frac{6\theta^2}{(1-\theta)^2}$$

$$Var(X) = \frac{2\theta}{1-\theta} + \frac{6\theta^2}{(1-\theta)^2} - \frac{4\theta^2}{(1-\theta)^2} = \frac{2\theta}{1-\theta} + \frac{2\theta^2}{(1-\theta)^2} = \frac{2\theta}{(1-\theta)^2}$$

2) $X_1 \ldots X_n \sim f_\theta(x)$

$E[X] = \bar{X}_n$ i.e $\frac{2\tilde{\theta}_n}{1-\tilde{\theta}_n} = \bar{X}_n \Rightarrow \bar{X}_n = \bar{X}_n\tilde{\theta}_n + 2\tilde{\theta}_n$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{\bar{X}_n}{\bar{X}_n+2}$

Scanned with CamScanner

$$= \mathbb{P}_\theta\left(\sum X_i = 0\right)$$

$$P_\theta(\bar{\theta}_n = 0) = \mathbb{P}_\theta(\bar{X}_n = 0) = \left(\mathbb{P}_\theta(X_i = 0)\right)^n = (1-\theta)^{2n}$$

c) $$L_\theta(x_1, \dots x_n) = (1-\theta)^{2n} \cdot \prod_i (1+x_i) \cdot \theta^{\sum_i x_i}$$

$$\ell_\theta(\theta | x_1, \dots x_n) = 2n \ln(1-\theta) + \sum \ln(1+x_i) + \sum x_i \cdot \ln\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}\ell = -\frac{2n}{1-\theta} + \frac{1}{\theta}\sum x_i = 0$$

$$\Rightarrow (1-\theta)\sum x_i = 2n\theta$$

$$\Rightarrow (1-\hat{\theta})\bar{X}_n = 2\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_n - \hat{\theta}_n \bar{X}_n = 2\hat{\theta}_n$$

$$\Rightarrow \bar{X}_n = \hat{\theta}_n(\bar{X}_n + 2)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{\bar{X}_n}{\bar{X}_n + 2}$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial\theta^2} = -\frac{2n}{(1-\theta)^2} - \frac{\sum x_i}{\theta^2} \le 0$$

$\bar{X}_n = -2 \Rightarrow X_1 + \dots + X_n = -2n$ imposibil?

d) $$\hat{\theta}_n - \theta = \frac{\bar{X}_n}{2+\bar{X}_n} - \theta = 1 - \frac{2}{2+\bar{X}_n} - \theta \xrightarrow[\text{Th apl cont}]{\mathbb{P}} 1 - \theta - \frac{2}{2+\mathbb{E}[X]}$$

$$= 1 - \theta - \frac{2}{2+\frac{2\theta}{1-\theta}} = 1 - \theta - \frac{2(1-\theta)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_n \text{ consistent}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{I_1(\theta)}\right)$$

$$I_1(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(x)\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(2\ln(1-\theta) + \ln(x+1) + x\ln\theta\right)\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{-2}{1-\theta} + \frac{x}{\theta}\right)\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[-\frac{2}{(1-\theta)^2} - \frac{x}{\theta^2}\right]$$

$$= \frac{2}{(1-\theta)^2} + \frac{\frac{2\theta}{1-\theta}}{\theta^2} = \frac{2}{(1-\theta)^2} + \frac{2}{\theta(1-\theta)} = \frac{2}{\theta(1+\theta)^2}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\theta(1-\theta)^2}{2}\right)$$

Scanned with CamScanner

$\pi i RC = \frac{1}{n I_1(\mu)}$

$X_1 \dots X_n \sim N(\mu, 1)$

$\theta = ?$ (met mom) / eficient ?

~~$\pi i RC = \frac{1}{n I_1(\mu)}$~~ $\qquad f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$

$$I_1(\mu) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}\right)\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left(-\ln\sqrt{2\pi} - \frac{(x-\mu)^2}{2}\right)\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \mu}\left(-\frac{1}{2} \cdot 2 (x-\mu) \cdot (-1)\right)\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \mu}(x-\mu)\right]$$

$$= -\mathbb{E}[-1] = 1$$

$$\boxed{\pi i RC = \frac{1}{n}}$$

$Var(X_1) = 1$

$\mathbb{E}[X_1] = \mu \quad \to \tilde{\mu}_n = \overline{X}_n$

$Var(\tilde{\mu}_n) = Var_\mu(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} = \pi i RC \to$ eficient.

4) a) $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n \qquad$ (ex 2 / Tema 4)

$\hat{\theta}_{20} = \frac{11}{20} \qquad f_\theta(x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$

b) $I_1(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_\theta(x)\right]$

~~$= \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \theta^2}\left(\theta^x (1-\theta)^{1-x}\right)\right]$~~

~~$= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(x\theta^{x-1}(1-\theta)^{1-x} - \theta^x (1-\theta)^{-x}(1-x)\right)\right]$~~

~~$= \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta^{x-1}(1-\theta)^{-x}\left(x(1-\theta) - \theta(1-x)\right)\right)\right]$~~

~~$= \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta^{x-1}(1-\theta)^{-x}(x-\theta)\right)\right]$~~ $\quad (x - x\theta - \theta + \theta x)$

Scanned with CamScanner

$\ln \theta \cdot x + \ln(1-\theta)(1-x)$

$$= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\ln\theta \cdot x + \ln(1-\theta)(1-x)\right)\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{x}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}(1-x)\right)\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[-\frac{x}{\theta^2} - \frac{1-x}{(1-\theta)^2}\right]$$

$$= \frac{\mathbb{E}[x]}{\theta^2} + \frac{1-\mathbb{E}[x]}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta} + \frac{1-\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}$$

$$= \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

Deci $I_1(\theta) = \theta(1-\theta)$

b) $V_\theta[X_1] = Var_\theta(X_1) = \theta(1-\theta)$

Deci estimatorul de vm max este $\bar{X}_n - \bar{X}_n^2$

Acum că $\mathbb{E}_\theta[\bar{X}_n - \bar{X}_n^2] = \mathbb{E}_\theta[\bar{X}_n] - \mathbb{E}_\theta[\bar{X}_n^2]$

$$= \theta - Var_\theta(\bar{X}_n) - \mathbb{E}_\theta[X_n]^2$$

$$= \theta + \frac{-\theta+\theta^2}{n} - \theta^2$$

$$\neq \theta(1-\theta) \Rightarrow \text{estim e deplasat}$$

$g(x) = x(1-x)$ cont

$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ $\Big| \rightarrow \hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n) \rightarrow \theta(1-\theta)$

i.e. $\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)$ consistent

c) Conform Th. Lim Centrale $\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{Var(X_1)}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n^2}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$\rightarrow IC^{1-\alpha}_{Wald} = \left[\hat{\theta}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}},\ \hat{\theta}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}}\right]$$

și $n = 20$, $\alpha = 0{,}05$, $\hat{\theta}_n = 0{,}55$

Scanned with CamScanner