CURS VII

ANALIZĂ

Operații cu funcții diferențiabile

Prop 1. Fie $\Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^p$, $a \in \Delta$, $f, g : \Delta \to \mathbb{R}^2$
$h : \Delta \to \mathbb{R}$. Presupunem că f, g, h sunt diferențiabile în a, $\alpha \in \mathbb{R}$
Atunci $f+g$, αf, hf sunt diferențiabile în a și:

①. $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$

②. $d(\alpha f)(a) = \alpha df(a)$

③. $d(hf)(a)(u) = dh(a)(u) f(a) + h(a) df(a)(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}^p$

Dem: Obs: $df(a), dg(a) - \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^2)$

$dh(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$

$h, f : \Delta \to \mathbb{R}^2$, $(hf)(x) = \underset{\in \mathbb{R}}{h(x)} \underset{\in \mathbb{R}^2}{f(x)}$

① și ② → concludente

① Fie $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2$ (liniară) $T = df(a) + dg(a)$

Avem $\forall x \in \Delta$, $x \neq a$

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a) - \overbrace{T(x-a)}^{\to\, df(a)(x-a) + dga(x-a)}}{\|x-a\|} =$$

$$= \frac{f(x) - f(a) - df(a)(x-a)}{\|x-a\|} + \frac{g(x) + g(a) - dg(a)(x-a)}{\|x-a\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - df(a)(x-a)}{\|x-a\|}$$

$$+ \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a) - dg(a)(x-a)}{\|x-a\|}}_{g \text{ difb. în } a = 0.} = 0. \quad ①.$$

$\Rightarrow f+g$ difb. în a și $d(f+g)(a) = T = df(a) + dg(a)$

③. Fie $T: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ liniară

$$T(u) = dh(a)(u)\, f(a) + dh(a)\, f(a)(u), \ \forall\, u \in \mathbb{R}^p$$

Atunci $\forall\, x \in D,\ x \neq a$, avem:

$$\frac{(hf)(x) - (hf)(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = \frac{h(x)f(x) - h(a)f(a) - dh(a)(x-a)f(a) - h(a)\,df(a)(x-a)}{\|x-a\|} =$$

$$= \frac{h(x)f(x) - h(a)f(x) - dh(a)(x-a)f(x) + h(a)f(x) - h(a)f(a) - h(a)\,df(a)(x-a) + dh(a)(x-a)f(x) - dh(a)(x-a)f(a)}{\|x-a\|} =$$

$$= \underbrace{\frac{h(x) - h(a) - dh(a)(x-a)}{\|x-a\|}}_{\to 0} \cdot f(x) + h(a)\underbrace{\frac{f(x) - f(a) - df(a)(x-a)}{\|x-a\|}}_{\to 0}$$

$$\left\| \frac{dh(a)(x-a)}{\|x-a\|} f(x) - f(a) \right\| = \left\| dh(a) \left| \frac{x-a}{\|x-a\|} \right| \underbrace{(f(x) - f(a))}_{x \to a \to 0} \right\|$$

$$\left| dh(a)\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right) \right| \le \|dh(a)\| \cdot \left\| \frac{x-a}{\|x-a\|} \right\| = \|dh(a)\|.$$

($T: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ liniară $\quad \|T\| = \inf\{M > 0 \mid \|Tx\| \le M\|x\|,\ x \in \mathbb{R}\}$

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Tx\|$$)

$$\lim_{x\to a} \frac{(hf)(x) - hf(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \Rightarrow hf \text{ diferențiabilă în } a \text{ și } d(hf)(a) = T$$

Prop. 2: Fie $\begin{cases} f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, & \text{cu Img lui } f \subseteq G, \ a \in D, \ f \text{ difb în } a \\ g : G = \mathring{G} \subseteq \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^l & b = f(a) \in G, \ g \text{ difb. în } b = f(a) \end{cases}$

Atunci $g \circ f$ difb. în a și $d(g\circ f) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^p \supseteq D \arrow[r, "f"] & G \subseteq \mathbb{R}^q & \\
a \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f(a) = b \in G \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^l
\end{tikzcd}$$

$(g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

$f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ $\quad \mathbb{R}^p \ni x = (x_1, \dots, x_p)$

$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ și are matricea $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ $\in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ $\quad i = \overline{1,q}$, $j = \overline{1,p}$

$b = f(a)$, $b \in G$

$g : G = \mathring{G} \subseteq \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^l$

$g = (g_1, \dots, g^l)$

$dg(f(a)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^l)$ și are matricea $\left(\frac{\partial g}{\partial y_i}(g(a))\right) \in \mathcal{M}_{l,q}(\mathbb{R})$ $\quad k = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,q}$

$g\circ f : \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^l$, $g\circ f = (g_1\circ f, g_2 \circ f, \dots, g_l \circ f)$

$d(g\circ f)(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^l)$ și are matricea $\left(\frac{\partial (g_k \circ f)}{\partial x_j}(a)\right)$, $\mathcal{M}_{l,p}(\mathbb{R})$ $\quad k = \overline{1,l}$, $j = \overline{1,p}$

$d(g\circ f)(a) = dg(f(a)) \cdot \cancel{d(f(a))}\ df(a)$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial (g_k \circ f)}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{k=\overline{1,l} \\ j=\overline{1,p}}}}_{\mathcal{M}_{l,p}} = \underbrace{\left(\frac{\partial g_k}{\partial y_i} f(a)\right)_{\substack{k=\overline{1,l} \\ i=\overline{1,q}}}}_{\in \mathcal{M}_{l,q}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=\overline{1,q} \\ j=\overline{1,p}}}}_{\mathcal{M}_{q,p}}$$

$$\frac{\partial(g_k\circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial g(x)}{\partial j_i}(f(a))\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

$\forall k\in\{1,\dots,l\},\ \forall j\in\{1,\dots$

<u>ex:</u> $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferențiabilă

$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\quad F(x,y,z)=f(x^3y^2z,\ x+y^2z)$

$$\underset{\in\mathbb{R}^3}{(x,y,z)} \xrightarrow{h} \underbrace{(x^3y^2z,\ x+y^2z)}_{\in\mathbb{R}^2} \longrightarrow f(x^3y^2z,\ x+y^2z)$$

$F = f\circ h$

$\frac{\partial F}{\partial x}=?\quad \frac{\partial F}{\partial y}=?\quad \frac{\partial F}{\partial z}=?$

$$\begin{cases}(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\\ (u,v)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial u}(x^3y^2z,\ x+y^2z)\cdot\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial v}(x^3y^3z,\ x+y^2z)\cdot\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(x^3y^2z,\ x+y^2z)\cdot 3x^3y^2z + \frac{\partial f}{\partial v}(x^3y^2z,\ x+y^2z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x^3y^2z,\ x+y^2z)\cdot\frac{\partial h_1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v}(x^3y^2z,\ x+y^2z)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}(x^3y^3z,\ x+y^2z)\ 2x^3yz + \frac{\partial f}{\partial x}(x^3y^3z,\ x+y^2z)\dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}(x^3y^2z,\ x+y^2z)\ x^3y^2 + \frac{\partial f}{\partial v}(x^3y^2z,\ x+y^2z)y^2.$$

Prop. 2)

f diferențiabilă în $a \Rightarrow \forall x \in \Delta,\ f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + \varepsilon f \|x-a\|$ (1)

$\varepsilon f : \Delta \to \mathbb{R}^2$ continuă în a și $\varepsilon f(a) = 0$).

f diferențiabilă în $b \Rightarrow \forall y \in G,\ g(y) = g(b) + dg(b)(y-b) + \varepsilon g(y)\|y-b\|$. (2)

($\varepsilon g : G \to \mathbb{R}^2$, εg continuă în b și $\varepsilon g(b) = 0$).

$$\overset{y=f(x)+6}{\Longrightarrow} g(f(x)) = g(f(a)) + dg(f(a))(f(x) - f(a)) + \varepsilon g\, f(x)\|f(x) - f(a)\|$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} g(f(x)) = g(f(a)) + dg(f(a))(f(x) - f(a)) + \varepsilon g^{f(x)} \|df(a)(x-a) + \varepsilon f(x)\|x-a\|\|$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g\circ f)(a) + dg(f(a)) \cdot df(a)(x-a) + d(f(a))(\varepsilon f(x)\|x-a\|) + \varepsilon g\, f(x)\|df(a)(x-a) + \varepsilon f(x) \cdot \|x-a\|\|.$$

($\varepsilon g\circ f(x)\|x-a\|$ cu $\varepsilon g \circ f$ continuă în a și $\varepsilon g\circ f(a) = 0$)

Notație

$$\varepsilon g\circ f(x) = \frac{dg(f(a))(\varepsilon f(x)\|x-a\|) + \varepsilon g(f(x))\|df(a)(x-a) + \varepsilon f(x)\|x-a\|\|}{\|x-a\|}$$

$$= dg(f(a))\left(\frac{\varepsilon f(x)\|x-a\|}{\|x-a\|}\right) + \varepsilon g(f(x))\left\|\frac{df(a)(x-a)}{\|x-a\|} + \frac{\varepsilon f(x)\|x-a\|}{\|x-a\|}\right\|.$$

$$= \underbrace{dg(f(a))(\varepsilon f(x))}_{(x\to a)\to 0.} + \underbrace{\varepsilon g(f(x))}_{(x\to a)\to 0.} \left\| df(a)\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right) + \varepsilon f(x)\right\|$$

$$\le \underbrace{\left\|df(a)\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right)\right\|}_{\le \|df(a)\|} + \underbrace{\|\varepsilon f(x)\|}_{(x\to a)\to 0}$$

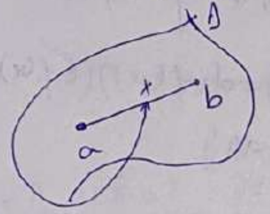
mărginită

Deci $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_{g\circ f}(x) = 0 \Rightarrow g\circ f$ difb. în a. și $d(g\circ f)(a)$
$= dg(f(a))$

$\boxed{\text{TEOREMA LUI LAGRANGE}}$ CAZUL MULTIDIMENSIONAL

Fie $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p$, $f: D \to \mathbb{R}$, $a, b \in D$, $a \neq b$ astfel încât segmentul de capete a și b este conținut în D (i.e. $[a,b] \subseteq D$) și f diferențiabilă în orice punct $x \in [a,b]$.

Atunci $\exists$ c pe segmentul de capete a și b a.î. $f(b) - f(a) = df(c)(b-a)$



$x = (1-t)a + t\cdot b,\ t \in [a,b]$.

Dem: Definim $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f((1-t)a + tb)$

$$\underbrace{[0,1] \xrightarrow{h} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}}_{\varphi}$$

$$t \longrightarrow (1-t)a + tb \xrightarrow{f} f((1-t)a + b)$$

Atunci $\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(b)$

φ derivabilă (difb.) în $\forall\ t \in [0,1]$ (φ continuă pe $[0,1]$, derivab. pe $[0,1]$)

(φ este obținută prin operații algebrice de compunere de funcții difb.)

Deci T. lui L: $\exists\ t_0 \in (0,1)$ a.î. $\varphi(t_0) = \dfrac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1-0} = f(b) - f(0)$

~~Dar $\varphi(t) = df(h(t))\, dh(t)$ / $df(a+t(b-a))$ $b-a$~~

Dar $\varphi(t) = f(a + t(b-a)) = (f\circ h)(t)$

$$\underbrace{d\varphi(t)}_{\varphi'(t)} = \underbrace{df(h(t))}_{df(a+t(b-a))} \cdot \underbrace{dh(t)}_{b-a}$$

$\Rightarrow \varphi'(t_0) = df((1-t_0)a + t_0 b)(b-a)$

Notăm $c = (1-t_0)a + t_0 b$ și avem $f(b) - f(a) = df(c)(b-a)$

$c = (1-t_0)a + t_0 b \in \underbrace{[a,b]}_{\text{segmentul de capete a și b.}}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \quad f(x) = (x-x^2,\ x-x^3)$

$f(0) = (0,0) \qquad f(1)-f(0) = (0,0)$

$f(1) = (0,0) \qquad \forall c\in\mathbb{R},\ f$ difb. în c.

$$df(c) = \begin{pmatrix} 1-2c \\ 1-3c^2 \end{pmatrix} \qquad df(c)(u) = ((1-2c)u,(1-3c^2)u)\ \forall u\in\mathbb{R}$$

$$f(c)(1-0) = df(c)(1) = (1-2c,\ 1-3c^2)$$

<u>Corolar</u>: Fie $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p$, $f: D\to\mathbb{R}^q$, $a\neq b$, $a,b\in D$, $[a,b]\subseteq D$ și f diferențiabilă în orice punct $x\in[a,b]$.

Atunci există $L:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ liniară a.î. $f(b)-f(a) = L(b-a)$

$f = (f_1,\dots,f_q) \quad f_1,\dots f_q: D\to\mathbb{R} \xrightarrow[\text{Lagrange}]{\text{th}}$

$\exists c_1 \in [a,b]$ a.î. $f_1(b)-f_1(a) = df_1(c_1)(b-a)$

$c_q\in[a,b]$ a.î. $f_q(b)-f_q(a) = df_q(c_q)(b-a)$

$f(b)-f(a) = (f_1(b)\dots\dots f_q(b)-f_q(a)) = L(b-a)$

$$L = \begin{pmatrix} df_1(c_1) \\ \vdots \\ df_q(c_q) \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{TEOREMĂ INEGALITATEA LUI LAGRANGE}}$

Fie $D = \mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^p$, $f: D\to\mathbb{R}^q$, $a,b\in D$, $a\neq b$, $[a,b]\subseteq D$ astfel încât f diferențiabilă în orice $x\in[a,b]$.

Atunci $\exists\, c\in[a,b]$ a.î. $\|f(b)-f(a)\|\leq\|df(c)\|\cdot\|b-a\|$.

<u>Dem</u>: Definim $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\varphi(t) = \langle f((1-t)a+bt),\ f(b)-f(a)\rangle$

Dacă $f = (f_1,\dots f_q)$

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{q} f_i((1-t)a+tb)(f_i(b)-f_i(a)) \to \varphi \text{ difb.}$$

$$\varphi'(t) = d\varphi(t) = \sum_{i=1}^{2} df_i((1-t)a + tb)(b-a) \cdot (f_i(b) - f_i(a))$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(1) = \langle f(b), f(b) \cdot f(a)\rangle \\ \varphi(0) = \langle f(a), f(b) \cdot f(a)\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(1) - \varphi(0) = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a)\rangle = \| f(b) \cdot f(a)\|^2 \quad (1)$$

Cum φ continuă pe $[0,1]$, derivab. pe $(0,1)$ $\overset{\text{Th. Lagrange}}{\Rightarrow}$ $\exists\, t_0 \in (0,1)$ a.î. $\varphi'(t_0) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1-0} = \varphi(1) - \varphi(0)$

$$\Rightarrow \varphi'(t_0) = \| f(b) - f(a)\|^2 \quad (2)$$

Dar. $\varphi'(t_0) = \sum_{i=1}^{2} df_i((1-t_0)a + t_0 b)(b-a)(f_i(b) - f_i(a)) =$

$$= \langle df((1-t_0)a + bt_0)(b-a),\ f(b) - f(a)\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(t_0) = |\langle (df\underbrace{((1-t_0)a + bt_0)}_{c})(b-a)|,\ f(b) - f(a)\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \le \underbrace{\|(df((1-t_0)a + t_0 b)(b-a)\|}_{\substack{\wedge \\ \|df(c)\|\|b-a\|}} \cdot \| f(b) - f(a)\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi'(t_0)| \le \|df(c)\| \cdot \|b-a\| \, \| f(b) - f(a)\|$$

$$c = ((1-t_0)a + bt_0)$$

Dar $\overset{(2)}{\|}$.
$$\| f(b) - f(a)\|^2 \Rightarrow \| f(b) - f(a)\| \le \|df(c)\| \, \|b-a\|$$

Derivate parțiale de ordin superior

Fie $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p$; $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$

Dc. f are derivată parțială în raport cu x, în orice punct din D, ($\exists\ \frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$) și $\frac{\partial f}{\partial x}$ are derivată parțială în raport cu y în a, spunem că f are derivată parțială de ordin 2 în a în raport cu x_j și x_i.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x}(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$i \neq j$ $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$$

$i = j$ $$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_i}(a) = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i^2}(a)} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

Dacă f are derivată parțială de ordin 2 în raport cu x_j și x_i pe D. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ au derivată parțială în raport cu x_i în a, spunem că f are derivată parțială de ord 3 în a în raport cu x_k, x_j, x_i

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a)$$

Inductiv introducem derivatele parțiale de ordin n. Spunem că f are derivată parțială de ordin n în a în raport cu $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ dacă $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_n}} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ (o recalului) și $\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}, \dots, \partial x_{i_n}}$ are deriv. parțială în raport cu x_{i_1} în a.

$\underline{ex}$: ①. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = x^2+y^3+2x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2 \leftrightarrow (x^2+2x)'_{\hookrightarrow z \text{ const}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 \leftrightarrow (y^3)'$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cancel{x} \quad (2x)'_{\hookrightarrow x \text{ const}}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0.}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

②. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = ??$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

Pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^3-3y^2)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^2)2y}{(x^2+y^2)^2} =$

$$= \frac{x^5 + x^3y^2 - 3x^3y^2 - 3xy^4 - 2x^3y + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y - xy^4}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{x^5}{x^4} = x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = 0.$$

Analog

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1}$$