Milostianu Andreea
Mihoci Valentina

Tutoriatul 6
Geometrie I

22.11.2021

Cercul

Def. Cercul reprezintă locul geometric al punctelor $M(x,y)$ egal depărtate de un punct fix $A(a,b)$.

Obs. Ecuația unui cerc: $\boxed{M(x,y) \in \mathcal{C}(A(a,b),R) \iff (x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$

a) Ecuația carteziană: $f(x,y)=x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, unde $c=a^2+b^2-R^2$

b) Ecuațiile parametrice: $\begin{cases} x=a+R\cos\theta \\ y=b+R\sin\theta, \ \theta\in[0,2\pi) \end{cases}$

c) Ecuația vectorială: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM} \iff \vec{r}_M=\vec{r}_A+R(\vec{i}\cos\theta+\vec{j}\sin\theta)$

d) Ecuația polară: Utilizăm coordonatele polare $A(r_0,t_0)$, $M(r,t)$, unde $\begin{cases} a=r_0\cos t_0 \\ b=r_0\sin t_0 \end{cases}$ și

$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}$, ecuația polară este $r^2-2rr_0\cos(t-t_0)+r_0^2-R^2=0$.

Def. Aplicația $\rho_{\mathcal{C}}: \mathcal{E}_2 \to \mathbb{R}$, definită prin $\rho_{\mathcal{C}}(P_0)=\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2}$ se numește **puterea punctului față de cerc**, unde $P_0\in d$, $d\cap\mathcal{C}=\{P_1,P_2\}$.

Obs. $\rho_{\mathcal{C}}(P_0)=\begin{cases} \|\overrightarrow{P_0P_1}\|\cdot\|\overrightarrow{P_0P_2}\|, & P_0\in \mathrm{Ext}\,\mathcal{C} \\ -\|\overrightarrow{P_0P_1}\|\cdot\|\overrightarrow{P_0P_2}\|, & P_0\in \mathrm{Int}\,\mathcal{C} \\ 0, & P_0\in\mathcal{C} \end{cases}$

Propoziție Puterea punctului $P_0(x_0,y_0)$ față de cercul $\mathcal{C}(A(a,b),R): f(x,y)=0$ este $\rho_{\mathcal{C}}(P_0)=f(x_0,y_0)$.

Obs. Poziția unui punct față de cerc: $\begin{cases} f(x_0,y_0)>0 \iff P_0\in \mathrm{Ext}\,\mathcal{C} \\ f(x_0,y_0)<0 \iff P_0\in \mathrm{Int}\,\mathcal{C} \\ f(x_0,y_0)=0 \iff P_0\in\mathcal{C} \end{cases}$

Def. **Locul geometric** al punctelor din plan care au aceeași putere față de două cercuri $\mathcal{C}_1(A_1(a_1,b_1),R_1)$ și $\mathcal{C}_2(A_2(a_2,b_2),R_2)$ (care nu sunt concentrice) se numește **axa radicală a celor două cercuri**.

Obs. Ecuația axei radicale

$$\rho_{\mathcal{C}_1}=\rho_{\mathcal{C}_2} \iff f_1(x,y)=f_2(x,y) \Rightarrow x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2$$

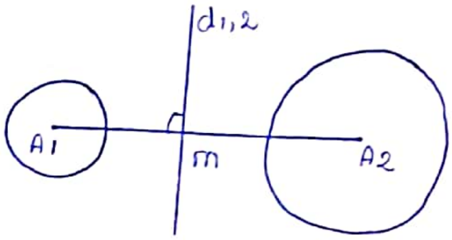
unde $c_1=a_1^2+b_1^2-R_1^2$ și $c_2=a_2^2+b_2^2-R_2^2$

Avem $d_{1,2}: 2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+c_1-c_2=0$; $\vec{m}_{d_{1,2}}=(2(a_2-a_1), 2(b_2-b_1))$

Cele două cercuri nu sunt concentrice, deci $A_1 \neq A_2$.

$\overrightarrow{A_1A_2} = (a_2-a_1, b_2-b_1) \Rightarrow d_{1,2} \perp A_1A_2$, unde $d_{1,2}$ = axa radicală

Notăm $d_{1,2} \cap A_1A_2 = \{m\}$.

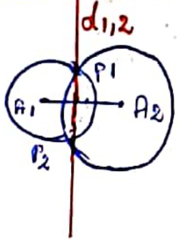


Deducem că: $\text{dist}(A_1, m) = \text{dist}(A_1, d_{1,2}) =$

$$= \frac{|2a_1(a_2-a_1)+2b_1(b_2-b_1)+c_1-c_2|}{2\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}}.$$

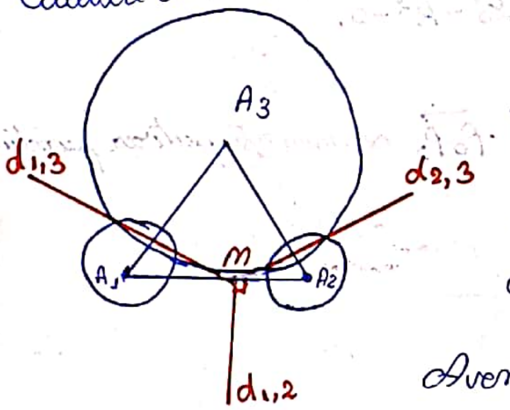
Obs. Construcția axei radicale

1° Dacă cercurile sunt secante, i.e. $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{P_1, P_2\}$, atunci P_1P_2 este axa radicală.



$|R_1-R_2| < A_1A_2 < R_1+R_2 \rightsquigarrow$ cercuri secante

2° a) Dacă cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt exterioare, considerăm cercul $\mathcal{C}_3$ care intersectează celelalte două cercuri.



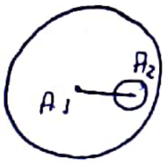
Avem $d_{1,3}$, respectiv $d_{2,3}$ axa radicală asociată cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_3$, respectiv cercurilor $\mathcal{C}_2$ și $\mathcal{C}_3$.

Notăm $d_{1,3} \cap d_{2,3} = \{m\}$.

Axa radicală asociată cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ este perpendiculara din m pe linia centrelor A_1A_2, i.e. $d_{1,2} \perp A_1A_2$, $m \in d_{1,2}$.

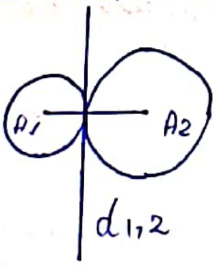
Avem $A_1A_2 > R_1+R_2 \rightsquigarrow$ cercuri exterioare

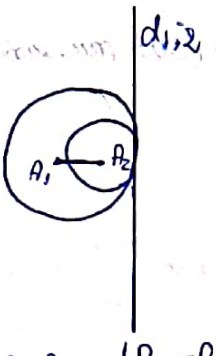
b) Dacă cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt interioare, atunci se procedează ca la a).



$A_1A_2 < |R_1-R_2| \rightsquigarrow$ cercuri interioare

3° Dacă cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior sau interior, atunci tangenta comună este axa radicală.





$A_1A_2 = R_1+R_2$

$A_1A_2 = |R_1-R_2|$

Def. **Centrul radical** este punctul care are aceeași putere față de trei cercuri $\mathcal{C}_1(A_1(a_1,b_1),R_1)$, $\mathcal{C}_2(A_2(a_2,b_2),R_2)$, $\mathcal{C}_3(A_3(a_3,b_3),R_3)$, care nu au centrele A_1, A_2, A_3 coliniare.

Obs. Centrul radical se obține intersectând axele radicale $d_{1,2}$ și $d_{1,3}$. Obținem:

$$\begin{cases} 2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+c_1-c_2=0 \\ 2(a_3-a_1)x+2(b_3-b_1)y+c_1-c_3=0. \end{cases}$$

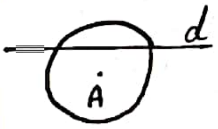
Propoziție Ecuația cercului circumscris unui triunghi $\triangle M_1M_2M_3$ ($M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$) este:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

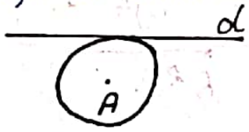
Obs. Punctele $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$ sunt conciclice $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

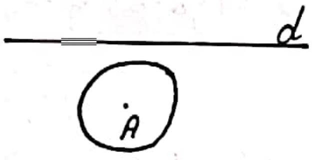
Obs. Poziția unei drepte față de un cerc.



$dist(A,d) < R$
secantă



$dist(A,d) = R$
tangentă



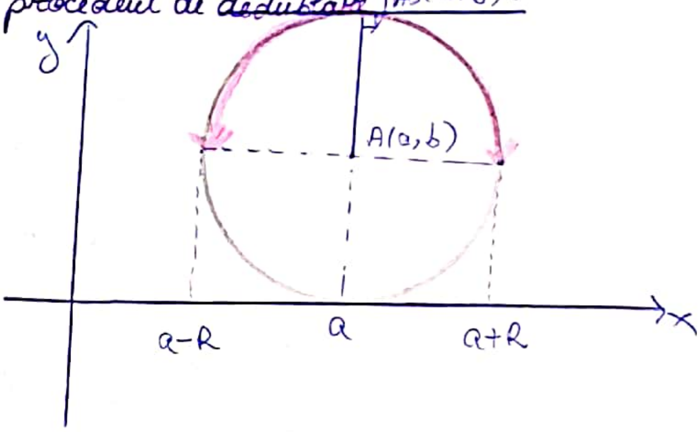
$dist(A,d) > R$
exterioară

Probleme de tangență la cerc

1° Ecuația tangentei într-un punct $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}(A(a,b), R)$ este:

$$d: (x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)-R^2=0$$ (procedeul de dedublare)

Dem.



Avem $\mathcal{C}(A(a,b),R): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

$(y-b)^2=R^2-(x-a)^2$, $x \in [a-R, a+R]$

$$\underbrace{y-b}_{\text{not. } f(x)}=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2}$$

Caracterizăm semicercul superior

Avem $f(x)=\sqrt{R^2-(x-a)^2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{R^2-(x-a)^2}}\left(-2(x-a)\right)=\frac{-(x-a)}{\sqrt{R^2-(x-a)^2}}=\frac{-(x-a)}{y-b}$$

Ecuația tangentei în $P_0(x_0,y_0)$ la G_f: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$$\Rightarrow y-y_0=-\frac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0) \Rightarrow (x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$

$$(x_0-a)(x-a+a-x_0)+(y_0-b)(y-b+b-y_0)=0$$

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-\underbrace{\left[(x_0-a)^2+(y_0-b)^2\right]}_{R^2}=0$$

$$d: (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-R^2=0.$$

□

2.° Ecuația tangentei de direcție m la cercul $\mathcal{C}(A(a,b),R)$:

$$d:\ y-b=m(x-a)\pm R\sqrt{1+m^2}\ (\text{ecuația magică})$$

Dem. Fie dreapta $d: y=mx+n$, m pantă fixată și n necunoscută. Dreapta d este tangentă cercului $\mathcal{C}(A(a,b),R)$.

$$d\cap\mathcal{C}: (x-a)^2+(\underbrace{mx+n-b})^2-R^2=0$$

$$x^2(1+m^2)+2x(-a+m(n-b))+a^2+(n-b)^2-R^2=0$$

Ecuația are soluții dublă $\Leftrightarrow \Delta_x=0$.

$$\Delta x=4\left[-a+m(n-b)\right]^2-4(1+m^2)\left[a^2+(n-b)^2-R^2\right]=$$

$$=\cancel{4}\left(m^2(n-b)^2-2am(n-b)+a^2-(1+m^2)(n-b)^2-(1+m^2)\cdot a^2+(1+m^2)\cdot R^2\right)=0$$

$$\Rightarrow -(n-b)^2-2am(n-b)+(1+m^2)\cdot R^2-m^2a^2=0$$

Avem ecuație de grad. 2 în $(n-b)$.

$$\Delta=4a^2m^2+4\left[(1+m^2)R^2-m^2a^2\right]=4(1+m^2)R^2$$

$$(n-b)_{1,2}=\frac{2am\pm2R\sqrt{1+m^2}}{-2}=-am\mp R\sqrt{1+m^2}$$

$$y=mx+n.$$

$$y-b=m(x-a)\pm R\sqrt{1+m^2}\quad\square$$

3.° Ecuațiile tangentelor la cerc dintr-un punct exterior cercului.

Fie $P_0(x_0,y_0)\in \text{Ext}\,\mathcal{C}(A(a,b),R)$ și ecuația magică $d: y-b=m(x-a)\pm R\sqrt{1+m^2}$.

Se înlocuiesc coordonatele x și y din ecuația magică a.î. $P_0(x_0,y_0)\in d$ și aflăm $m_{1,2}$.

Dem. Fie $d: y-b=m(x-a)\pm R\sqrt{1+m^2}$

Punem condiția $P_0(x_0,y_0)\in d$

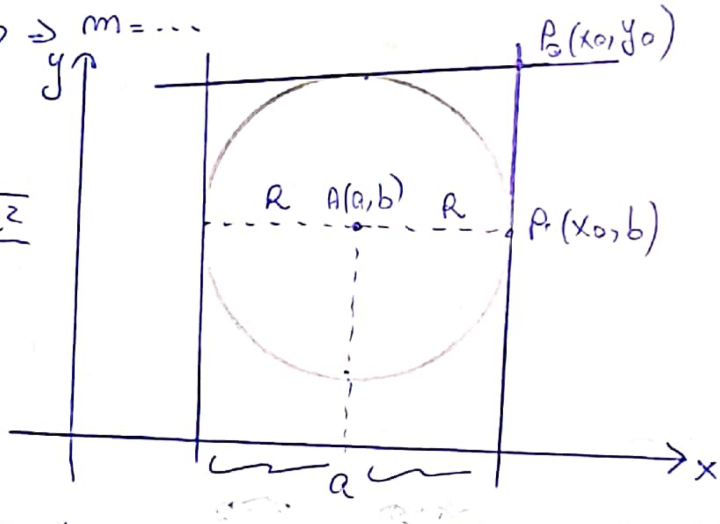
$$y_0-b=m(x_0-a)\pm R\sqrt{1+m^2}\ /^2 \Rightarrow (y_0-b)^2+m^2(x_0-a)^2-2m(x_0-a)(y_0-b)=$$
$$=R^2(1+m^2)$$

$$\cdot\ m^2\left[(x_0-a)^2-R^2\right]-2m(x_0-a)(y_0-b)+(y_0-b)^2-R^2=0.$$

1. $|x_0-a|=R$

Fie $P(x_0,b)\in\mathcal{C}$. Dreapta $d: x=x_0$ este tangentă la cerc în $P_0(x_0,y_0)$.
d este una dintre tangente și cealaltă tangentă are panta dată de:

$$-2m(x_0-a)(y_0-b)+(y_0-b)^2-R^2=0 \Rightarrow m=\dots$$



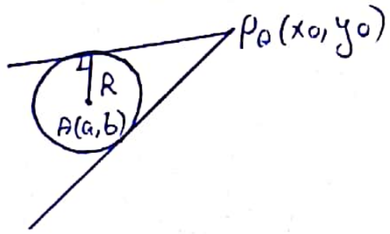
2. $|x_0-a|\neq R \Rightarrow$ ec. de grad 2

$$m_{1,2}=\frac{(x_0-a)(y_0-b)\pm R\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2}}{(x_0-a)^2-R^2}$$

O altă metodă de a determina tangentele din $P_0(x_0,y_0)$ este ~~st~~ utilizarea fasciculului de vârf $P_0(x_0,y_0)$.

$$d_{r,s}: r(x-x_0)+s(y-y_0)=0,\ r^2+s^2>0.$$

Determinăm dreptele din fascicul care verifică $dist(A(a,b), d_{r,s})=R$.



Def. Se numește fasciul de cercuri mulțimea tuturor cercurilor care trec prin două puncte fixe A și B.

Fie cercurile $\mathcal{C}_1: f_1(x,y)=0$ și $\mathcal{C}_2: f_2(x,y)=0$, cu $A,B\in\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$.
Fasciculul de cercuri are ecuația: $r f_1(x,y)+s f_2(x,y)=0$, $r^2+s^2>0$.