Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

28 ianuarie 2021, 11:00–13:30

NUME:	....
PRENUME:	....
GRUPA:	....

INSTRUCŢIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
3. Pe prima pagină a rezolvării fiecarei probleme, vor fi scrise **cu litere de tipar** `numele şi prenumele studentului, precum şi grupa acestuia.`
4. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
5. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 11:00–13:30.**
6. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email:
   - ca fişier PDF, împreună cu fişierul cu subiectele examenului la adresa `andreea.grecu@fmi.unibuc.ro` (Drd. Andreea GRECU);
   - vor avea următoarea **linie de subiect**: `Examen AnNum - Nume si prenume student, Grupa 3XX`
7. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **joi, 28 ianuarie 2021, orele 14:00.**

Analiză Numerică
Examen – Anul III – Subiectul#12

I. Fie $A > 0$.

(a) Arătaţi că şirul $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ definit prin

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_n = \dfrac{1}{2}x_{n-1} + \dfrac{A}{2x_{n-1}}\,, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

converge către $\sqrt{A}$.

(b) Ce se întâmplă dacă $x_0 < 0$?

II. Determinaţi polinomul de interpolare Lagrange $P_1 \in \mathbb{P}_1$ asociat funcţiei $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, unde $a > 0$, şi nodurilor de interpolare $x_0 = 0$ şi $x_1 = a$.

Arătaţi că, în acest caz, $\xi = \xi(x)$ dat de teorema de interpolare Lagrange este unic pentru fiecare $x \in [-a, a] \setminus \{0, a\}$ şi determinaţi valoarea sa.

III. Determinaţi formula de aproximare cu diferenţe finite ascendente de ordin $\mathsf{O}(h^2)$ pentru $f'(x)$ şi eroarea aproximării folosind polinomul de interpolare Lagrange corespunzător asociat lui f.

IV. Fie funcţia pondere $w : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, şi $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset \mathbb{P}_n$ un sistem de polinoamele ortogonale în raport cu produsul scalar din $\mathrm{L}^2_w(0, 1)$.

Determinaţi un sistem de polinoamele ortogonale în raport cu produsul scalar din $\mathrm{L}^2_w(0, 1)$, unde $w : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$.