Examen[1] la Geometrie II, seria 11, 06.07.2022

Nume și prenume: ________________________________

Grupa: ______

Spaţiul $\mathbb{R}^n$ este mereu considerat cu structura afină canonică.

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (4x - y + 1, 2z + x + 4)$ este o aplicaţie afină. **(0,5p)**

2. Dacă $M \subset \mathbb{R}^2$ este infinită, atunci $\mathrm{Af}(M) = \mathbb{R}^2$. **(0,5p)**

3. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, dacă planele π şi π' sunt distincte şi pr_π este proiecţia ortogonală pe planul π, atunci $(pr_\pi)_{|\pi'} : \pi' \to \pi$ este bijectivă. **(0,5p)**

4. Dacă o cuadrică din $\mathbb{R}^3$ este o reuniune de drepte, atunci este degenerată. **(0,5p)**

5. Există o hipercuadrică $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât orice hiperplan este paralel cu un hiperplan tangent la Γ. **(0,5p)**

6. Dacă $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ este o curbă algebrică, atunci închiderea sa proiectivă $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ are un număr finit de puncte la infinit. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. În $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică, fie planele $\pi_1 : 2x - 6y + 3z + 2 = 0$, $\pi_2 : 4x - 12y + 6z - 3 = 0$ şi mulţimea

$$\mathcal{M} = \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \text{ izomorfism afin}, f(\pi_1) = \pi_2\}.$$

a) Determinaţi poziţia relativă a planelor π_1 şi π_2. **(0,25p)**

b) Daţi exemplu de $f \in \mathcal{M}$. Scrieţi expresia lui f în coordonate. **(0,25p)**

c) Este $\mathcal{M}$ grup împreună cu compunerea funcţiilor? Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

d) Demonstraţi că $\mathcal{M}$ conţine o infinitate de izometrii şi o infinitate de izomorfisme afine care nu sunt izometrii. **(0,5p)**

2. Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$, $P = (1, 1, 0) \in \mathcal{A}$ şi cuadrica $\Gamma : x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy - 4yz + 6x - 4y + 2z - 7 = 0$.

a) Demonstraţi că Γ este un hiperboloid eliptic cu o pânză. **(0,5p)**

b) Demonstraţi că $P \in \Gamma$ şi calculaţi $T_P\Gamma$ *i.e.* planul tangent în P la Γ. **(0,5p)**

c) Scrieţi ecuaţia unei drepte d astfel încât $d \subset \Gamma$. **(0,5p)**

d) Decideţi dacă există $P' \in \Gamma$, $P' \neq P$, astfel încât $T_{P'}\Gamma \parallel T_P\Gamma$. Dacă da, determinaţi un astfel de punct P'. **(0,5p)**

3. Fie planul afin real $\mathbb{R}^2$ şi completatul său proiectiv $\overline{\mathbb{R}^2} \simeq \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, unde identificăm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu $[x : y : 1] \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$.
Fie $f : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}, f([X : Y : Z]) = [-Y : X : Z]$.

a) Demonstraţi că f este un izomorfism proiectiv. **(0,25p)**

b) Demonstraţi că f are un singur punct fix. **(0,25p)**

c) Determinaţi dreptele proiective $d \subset \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ astfel încât $f(d) = d$. **(0,5p)**

d) Daţi exemplu de conică proiectivă nedegenerată $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ tangentă la dreapta de la infinit. **(0,5p)**

4. În planul proiectiv $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, fie punctele $P_1 = [1 : 1 : 1], P_2 = [1 : -1 : 1], P_3 = [2 : 3 : -1]$. Scrieţi ecuaţia unei conice proiective $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ astfel încât $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{C}$ sau explicaţi de ce o astfel de conică nu există. **(1p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!