Miloșteanu Andreea
Mihoci Valentina

Tutoriat 4
Geometrie I

10.11.2021

1. Asemănări

Fie $K>0$ fixat. Aplicația $a_K : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ se numește **asemănare (similaritate)** de raport K dacă verifică $d(a_K(A), a_K(B)) = K\cdot d(A,B)$, $(\forall)\ A,B \in \mathcal{E}_2$.

Obs. Pentru $K=1$ asemănarea este o izometrie. Dacă $K\neq 1$, atunci asemănarea se numește proprie.

Propoziție (i) O asemănare cu două puncte fixe este o izometrie.

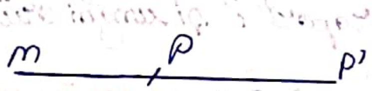
(ii) O asemănare cu trei puncte fixe necoliniare este identitatea planului euclidian.

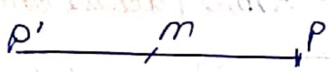
(iii) O asemănare proprie are un singur punct fix.

2. Omotetii

Fie M un punct fix în $\mathcal{E}_2$ și $K\in\mathbb{R}^*$. Se numește **omotetie de centru sau pol M și putere K** o aplicație $\mathcal{H}_{M,K} : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ care verifică $\mathcal{H}_{M,K}(P)=P'$, $\overrightarrow{MP'} = K\,\overrightarrow{MP}$.

Obs. (i) M, P, P' sunt puncte coliniare.

(ii) $\underline{K>0} \rightsquigarrow$ omotetie directă 

$\underline{K<0} \rightsquigarrow$ omotetie inversă 

(iii) $\underline{K\neq 1}$, atunci M este singurul punct fix.

(iv) $\underline{K=1}$, atunci $\mathcal{H}_{M,1} = Id_{\mathcal{E}_2}$; $\underline{K=-1}$, atunci $\mathcal{H}_{M,-1} = \mathcal{S}_M$.

(v) Dacă $M\in d$, atunci d este o dreaptă invariantă, i.e. $\mathcal{H}_{M,K}(d)=d$.

Ecuația unei omotetii

(a) de centru origine $O(0,0)$.

$$\boxed{\mathcal{H}_{O,K} : \begin{cases} x' = Kx \\ y' = Ky \end{cases} \iff X' = AX,\ A = K I_2}$$

(b) de centru $M(a,b)$

$$\boxed{\mathcal{H}_{M,K} : \begin{cases} x' = K(x-a)+a = Kx + a(1-K) \\ y' = K(y-b)+b = Ky + b(1-K) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-K)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Propoziție: Fie $P_1, P_2, P_3 \in E_2$ și $P_1' = \mathcal{H}_{M,K}(P_1)$, $P_2' = \mathcal{H}_{M,K}(P_2)$, $P_3' = \mathcal{H}_{M,K}(P_3)$

(a) $d(P_1', P_2') = |K| \cdot d(P_1, P_2)$

(b) $S_{\Delta P_1'P_2'P_3'} = K^2 \cdot S_{\Delta P_1 P_2 P_3}$

Propoziție: Fie dreapta d a.î. $M \notin d$. Atunci $\mathcal{H}_{M,K}(d) = d'$, unde $d \parallel d'$.

Propoziție: $\mathcal{H}_{M,K}(\mathcal{C}(A,r)) = \mathcal{C}(A',r')$, unde $M \notin \mathcal{C}(A,r)$ $\begin{cases} A' = \mathcal{H}_{M,K}(A) \\ r' = |K| \cdot r \end{cases}$.

Teoremă: $\mathcal{H}_{M_2,K_2} \circ \mathcal{H}_{M_1,K_1} = \begin{cases} \mathcal{H}_{M_3, K_1 \cdot K_2}, & K_1 \cdot K_2 \neq 1 \\ T_{\vec{u}}, & K_1 \cdot K_2 = 1 \end{cases}$, unde M_1, M_2, M_3 sunt puncte coliniare.

Obs. $\mathcal{H}_{M_2,K_2} \circ \mathcal{H}_{M_1,K_1} = \mathcal{H}_{M_1,K_1} \circ \mathcal{H}_{M_2,K_2} \Leftrightarrow M_1 = M_2$ sau $K_1 = 1$ sau $K_2 = 1$.

Teoremă: Fie $M \in E_2$ și dreapta d, $M \notin d$. Avem: $S_d \circ \mathcal{H}_{M,K} \circ S_d = \mathcal{H}_{M',K}$, unde $S_d(M) = M'$.

Teoremă: $T_{\vec{u}} \circ \mathcal{H}_{M,K} = \mathcal{H}_{P,K}$.

3. Asemănări directe

Fie $M \in E_2$ un punct fixat, $K \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ și $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$. Se numește **asemănare directă de centru M, raport K și unghi orientat α** aplicația $a_{M,K,\alpha} : E_2 \to E_2$, care verifică $a_{M,K,\alpha} = \mathcal{H}_{M,K} \circ R_{M,\alpha}$ (acestea comută!)

Obs. Cum $\mathcal{H}_{M,K} \circ R_{M,\alpha} = R_{M,\alpha} \circ \mathcal{H}_{M,K}$, deducem că $a_{M,K_1,\alpha_1} \circ a_{M,K_2,\alpha_2} = a_{M, K_1 \cdot K_2, \alpha_1 + \alpha_2}$.

Obs. 1° Orice asemănare directă este o transformare conformă (păstrează unghiurile).

2° Fie $d_1 \parallel d_2$ și $M \notin d_1$, $M \notin d_2$. Dacă $d_k' = a_{M,K,\alpha}(d_k)$, $(\forall) k = \overline{1,2}$, atunci $d_1' \parallel d_2'$.

3. Antiasemănări

Fie $M \in E_2$ un punct fixat, $K \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ și o dreaptă fixată d care trece prin M. Se numește **antiasemănare de centru M, raport K și axă d** aplicația $a_{M,K,d} : E_2 \to E_2$, care verifică $a_{M,K,d} = \mathcal{H}_{M,K} \circ S_d$ (acestea comută!).

Propoziție: Dacă $a_{M,K,d}$ este o antiasemănare de centru M, raport K și axă d, atunci pentru orice punct $P \neq M$ și $P' = a_{M,K,d}(P)$, avem: $|K| = \frac{MP'}{MP} = \frac{AP'}{AP}$, unde $PP' \cap d = \{A\}$.

Teoremă Orice asemănare se poate scrie ca o compunere dintre o omotetie și o izometrie.

Obs. Fie $a_K : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ asemănare de raport $K>0$.

Dacă • $K=1 \Rightarrow a_1$ izometrie

• $K \neq 1 \Rightarrow a_K$ asemănare proprie

Avem ecuația transformării geometrice: $X' = AX + X_0$.

a) $A = K\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ asemănare directă

b) $A = k\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ antiasemănare