Milosteanu Andreea
Mihoci Valentina

Tutoriat 6
Geometrie I
(exerciții)

24.11.2021

1. Fie cercul $\mathcal{C}: x^2+y^2+6x-4y+3=0$, unde $A(a,b)$ este centrul, iar R este raza.

a) Să se afle centrul și raza cercului.
b) Să se afle ecuația tangentei la cerc în punctul $P(0,3)$.
c) Să se afle ecuația tangentei la cerc din punctul $Q(3,10)$.
d) Să se afle ecuația tangentei de pantă $m=4$.

SOL. a) $f(x,y)=x^2+y^2+6x-4y+3 = x^2+6x+y^2-4y+3 = x^2+2\cdot3\cdot x+y^2-$
$-2\cdot2\cdot y+3=(x^2+2\cdot3\cdot x+9)+(y^2-2\cdot2\cdot y+4)+3-9-4=$
$=(x+3)^2+(y-2)^2-10=0$

Deci avem $\mathcal{C}(A(-3,2),\sqrt{10}): (x+3)^2+(y-2)^2=10$

b) Verificăm poziția punctului $P(0,3)$ față de $\mathcal{C}(A(-3,2),\sqrt{10})$:
$f(0,3)=3^2+1^2-10=9+1-10=0$ ✓ $\Rightarrow P(0,3)\in\mathcal{C}$.

Aplicăm procedeul de dedublare: $d:(x+3)(0+3)+(y-2)(3-2)-10=0$
$d: 3x+9+y-2-10=0$
$d: 3x+y-3=0 \quad (P(0,3)\in d)$

c) Verificăm poziția punctului $Q(3,10)$ față de $\mathcal{C}(A(-3,2),\sqrt{10})$:
$f(3,10)=6^2+8^2-10=81+64-10=135>0 \Rightarrow Q(3,10)\in Ext\,\mathcal{C}$

Avem ecuația magică $d: y-b=m(x-a)\pm R\sqrt{1+m^2}$

La noi: $10-2=m(3+3)\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{1+m^2}$

$8=6m\pm\sqrt{10(1+m^2)} \Rightarrow 8-6m=\pm\sqrt{10(1+m^2)} \;/^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 64-96m+36m^2=10+10m^2 \Rightarrow 26m^2-96m+54=0 /:2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13m^2-48m+27=0,\ \Delta=2304-1404=900 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=30$

$m_1=\dfrac{48-30}{2\cdot13}=\dfrac{18}{2\cdot13}=\dfrac{9}{13} \Rightarrow tg: y-2=\dfrac{9}{13}(x+3)\pm\sqrt{10\left(1+\dfrac{81}{169}\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg: y-2=\dfrac{9}{13}(x+3)\pm\sqrt{\dfrac{2500}{169}} \Rightarrow tg: y-2=(9x+27)\cdot\dfrac{1}{13}\pm\dfrac{50}{13} \;/\cdot13$

$tg: 13y-26 = 9x+27 \pm 50$

$tg_1: 13y-26 = 9x+27+50$

$9x-13y+103=0$

$Q(3,10) \overset{?}{\in} tg_1: 9\cdot 3 - 13\cdot 10 + 103 = 0$ DA

$tg_2: -13y+9x+27+26-50=0$

$9x-13y+3=0$

$Q(3,10) \overset{?}{\in} tg_2: 9\cdot 3 - 13\cdot 10 + 3 = 0$ NU

Rămâne $tg_1: 9x-13y+103=0.$

$m_2 = \frac{48+30}{2\cdot 13} = \frac{78}{2\cdot 13} = \frac{39}{13} = 3 \Rightarrow tg: y-2 = 3(x+3) \pm \sqrt{10(1+3^2)}$

$y-2 = 3x+9 \pm 10$

$tg_1: 3x-y+2+9+10=0$

$3x-y+21=0$

$Q(3,10) \overset{?}{\in} tg_1: 9-10+21=0$ NU

$tg_2: 3x-y+2+9-10=0$

$3x-y+1=0$

$Q(3,10) \overset{?}{\in} tg_2: 9-10+1=0$ DA

Rămâne $tg_2: 3x-y+1=0$

Tangentele căutate sunt dreptele $9x-13y+103=0$ și $3x-y+1=0$.

sau Scriem fasciculul de vârf $Q(3,10)$

$d_{r,s}: r(x-3)+s(y-10)=0, \; r^2+s^2>0$

$dist(A(-3,2), d_{r,s}) = R = \sqrt{10}$ (tangenta)

$\frac{|-6r-8s|}{\sqrt{r^2+s^2}} = \sqrt{10} \Rightarrow 2|-3r-4s| = \sqrt{10(r^2+s^2)} \,/^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{4}^{2}(9r^2+24rs+16s^2) = \cancel{10}^{5}(r^2+s^2) \,/ :2 \Rightarrow 18r^2+48rs+32s^2 = 5r^2+5s^2$

$13r^2+48rs+27s^2=0$

$13r^2+39rs+9rs+27s^2=0$

$$13k(k+3s)+9s(k+3s)=0$$

$$(13k+9s)(k+3s)=0$$

1) $13k=-9s \Rightarrow k=-\frac{9}{13}s$

$$-\frac{9}{13}s(x-3)+s(y-10)=0 \Big/ \cdot \frac{13}{s}$$

$$-9x+27+13y-130=0$$

$\underline{tg_1}: 9x-13y+103=0$

2) $k=-3s$

$$-3s(x-3)+s(y-10)=0 \Big/ : s$$

$$-3x+9+y-10=0$$

$\underline{tg_2}: 3x-y+1=0$

d) știm $m=4$, $\mathcal{C}(A(-3,2), \sqrt{10})$.

ecuația magică: $y-2=4(x+3)\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}$

$$y-2=4x+12\pm\sqrt{170}$$

1) $y=4x+14+\sqrt{170}$

2) $y=4x+14-\sqrt{170}$

2. Fie cercurile $\mathscr{C}_1: x^2+y^2+6x-4y+3=0$ și $\mathscr{C}_2: x^2+4x+y^2-1=0$

a) Să se precizeze poziția celor două cercuri.

b) Determinați ecuația axei radicale a celor două cercuri.

SOL. a) $\mathscr{C}_1(A(-3,2),\sqrt{10}): (x+3)^2+(y-2)^2=10$ (ex. anterior)

$x^2+4x+y^2-1=0 \Rightarrow x^2+4x+4+y^2-4-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2)^2+y^2=5 \Rightarrow \mathscr{C}_2(B(-2,0),\sqrt{5})$

$AB=\sqrt{(-2+3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\simeq 2$

$R_1+R_2=\sqrt{10}+\sqrt{5}\simeq 5$

$R_1-R_2=\sqrt{10}-\sqrt{5}\simeq 1$

Deci $R_1-R_2<AB<R_1+R_2 \Rightarrow$ cercurile sunt secante

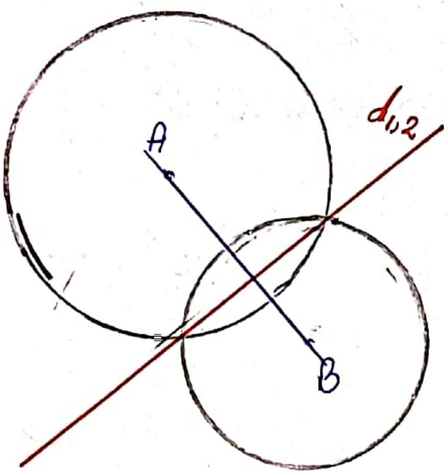
b) $\rho_{\mathscr{C}_1}=\rho_{\mathscr{C}_2} \Rightarrow f_1(x,y)=f_2(x,y)$

$x^2+y^2+6x-4y+3=x^2+y^2+4x-1$

$2x-4y+4=0$

Deci $d_{1,2}: x-2y+2=0$

Obs. $\left.\begin{array}{l}\vec{m}_{d_{1,2}}=(1,-2)\\ \vec{AB}=(-2+3,0-2)=(1,-2)\end{array}\right| \Rightarrow d_{1,2}\perp AB$ (ceea ce trebuie)



3. Fie cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, R_1): (x+2)^2+(y+3)^2=4^2$ și $\mathcal{C}_2(O_2, R_2): (x-3)^2+(y+3)^2=3^2$.

a) Să se scrie ecuația axei radicale.

b) Să ~~aa~~ se arate că $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt secante în A și B.

Demonstrați că O_1AO_2B este patrulater inscriptibil.

SOL. a) $\begin{cases} O_1=(-2,-3) \\ R_1=4 \end{cases}$ și $\begin{cases} O_2=(3,-3) \\ R_2=3 \end{cases}$

$\rho\mathcal{C}_1=\rho\mathcal{C}_2 \Rightarrow f_1(x,y)=f_2(x,y)$

$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2+6y+9-16=x^2-6x+9+y^2+6y+9-9$

$\cancel{x^2}+4x+\cancel{6y}+\cancel{y^2}-3=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6x+\cancel{6y}+9$

$10x=12 \Rightarrow d_{1,2}: 5x=6$. $\qquad |R_1-R_2|<O_1O_2<|R_1+R_2|$ ✓ $\Rightarrow (\exists)\, A, B$

b) Trebuie să aflăm A și B și le obținem prin intersecția axei radicale cu unul dintre cercuri.

$d_{1,2}\cap\mathcal{C}_1: \left(\frac{6}{5}+\overset{5}{2}\right)^2+(y+3)^2=16$

$\left(\frac{16}{5}\right)^2+(y+3)^2=16 \Rightarrow \frac{256}{25}+(y+3)^2=16 \Rightarrow (y+3)^2=\frac{400-256}{25}=\frac{144}{25}$

Avem 1° $y+3=\frac{12}{5} \Rightarrow y=-\frac{3}{5} \Rightarrow A\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

2° $y+3=-\frac{12}{5} \Rightarrow y=-\frac{27}{5} \Rightarrow B\left(\frac{6}{5}, -\frac{27}{5}\right)$

Dacă punctele O_1, A, O_2, B sunt conciclice, atunci O_1AO_2B este patrulater inscriptibil.

$$\begin{vmatrix} (-2)^2+(-3)^2 & -2 & -3 & 1 \\ \left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2 & 6/5 & -3/5 & 1 \\ 3^2+(-3)^2 & 3 & -3 & 1 \\ \left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(-\frac{27}{5}\right)^2 & 6/5 & -\frac{27}{5} & 1 \end{vmatrix}=0 \quad ✓.$$

4. Să se scrie ecuația tangentei în punctul $A(2,0)$ la cercul $\mathcal{C}(O_1(a,b),R): x^2+y^2-6x-4y+8=0$

SOL. $x^2+y^2-6x-4y+8=0$

$x^2-6x+y^2-4y+8=0 \Rightarrow x^2-2\cdot 3x+y^2-2\cdot 2y+8=0$

$x^2-2\cdot 3x+9+y^2-2\cdot 2\cdot y+4-9-4+8=0$

$\mathcal{C}(O_1(3,2),\sqrt{5}): (x-3)^2+(y-2)^2=5$

Verificăm poziția punctului $A(2,0)$ față de $\mathcal{C}(O_1(3,2),\sqrt{5})$:

$f(2,0)=(2-3)^2+(0-2)^2-5=1+4-5=0 \Rightarrow A\in\mathcal{C}$.

Aplicăm procedeul de dedublare pentru a afla tangenta

$d: (x-3)(\underbrace{2-3}_{-1})+(y-2)(\underbrace{0-2}_{-2})-5=0$

$3-x-2y+4-5=0$

$d: x+2y-2=0$

5. Fie $y=mx+n$ tangenta în punctul $A(1,2\sqrt{2})$ la cercul $\mathcal{C}(O(a,b),R): x^2+y^2=9$.
Fie $c=\frac{n}{m}$. Aflați c.

SOL. $x^2+y^2=9 \rightsquigarrow$ ecuația $\mathcal{C}(O(0,0),3)$.

Studiem poziția punctului $A(1,2\sqrt{2})$ față de $\mathcal{C}(O(0,0),3)$.

$f(1,2\sqrt{2})=1+4\cdot 2-9=9-9=0 \Rightarrow A(1,2\sqrt{2})\in\mathcal{C}$.

Aplicăm procedeul de dedublare pentru a afla tangenta.

$d: x\cdot 1+y\cdot 2\sqrt{2}-9=0$

$d: 2\sqrt{2}\cdot y=9-x \Rightarrow d: y=\underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}_{m}x+\underbrace{\frac{9}{2\sqrt{2}}}_{n}$

$c=\frac{n}{m}=\frac{\frac{9}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}=-9$

7. Să se scrie ecuația cercului cu centrul în punctul $A(1,-3)$ și tangent dreptei $d: y-2=0$.

SOL. Cercul este tangent dreptei $d: y=2$, deci $dist(A(1,-3), d) = R$.

$$R = \frac{|1\cdot 0 + 3\cdot 1 - 2|}{1} = 5$$

$$\mathcal{C}(A(1,-3), 5): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

8. Aflați centrul cercului $\mathcal{C}(A(a,b), R)$ determinat de punctele $(-2,0), (2,2), (0,0)$.

SOL. Ecuația cercului este: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

$$\begin{matrix} (-2,0)\in\mathcal{C} \\ (2,2)\in\mathcal{C} \\ (0,0)\in\mathcal{C} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (-2-a)^2 + (0-b)^2 = R^2 \\ (2-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 \\ (0-a)^2 + (0-b)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 4a + a^2 + b^2 = R^2 \\ 4 - 4a + a^2 + 4 - 4b + b^2 = R^2 \\ a^2 + b^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = -1 \\ 8 - 4(a+b) = 0 \Rightarrow 8 = 4(-1+b) \Rightarrow b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3. \end{cases}$$

Deci centrul cercului este $A(-1,3)$.