Tema 1

Exerciţiul 1

Se doreşte verificarea fiabilităţii unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobiliştilor. In urma studiilor statistice pe un număr mare de automobilişti, s-a observat că in general 0.5% dintre aceştia depăşesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci cand doza de alcool autorizată este depăşită precum şi probabilitatea ca testul să fie negativ atunci cand doza autorizată nu este depăşită sunt egale cu $p = 0.99$.

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depăşit in realitate nivelul de alcool autorizat ?
2. Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
3. Un poliţist afirmă că testul este mai fiabil sambăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Ştiind că proporţia de automobilişti care au băut prea mult in acest context este de 30%, determinaţi dacă poliţistul are dreptate.

Exerciţiul 2

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate şi suntem interesaţi in găsirea probabilităţii evenimentului ca suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

1. Calculaţi pentru inceput probabilitatea evenimentului E_n: *in primele* $n-1$ *aruncări nu a apărut nici suma* 5 *şi nici suma* 7 *iar in a* n*-a aruncare a apărut suma* 5. Concluzionaţi.
2. Aceeaşi intrebare, dar inlocuind 5 cu 2.

Exerciţiul 3

Un administrator de reprezentanţă de maşini comandă uzinei Dacia N maşini, numărul aleator X de maşini pe care il poate vinde reprezentanţa sa intr-un an fiind un număr intreg intre 0 şi $n \geq N$, toate avand aceeaşi probabilitate. Maşinile vandute de administrator ii aduc acestuia un beneficiu de a unităţi monetare pe maşină iar maşinile nevandute ii aduc o pierdere de b unităţi. Calculaţi valoarea medie a caştigului G reprezentanţei de maşini şi deduceţi care este comanda optimă.

Exerciţiul 4

Fie X variabila aleatoare (v.a.) care reprezintă cifra obţinută in urma aruncării unui zar (echilibrat) cu şase feţe. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. $Y = X(7-X)$ apoi calculaţi $\mathbb{E}[Y]$ şi $\mathbb{V}[Y]$. Notăm cu $Y_1, \dots, Y_n$ valorile observate după n lansări independente. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. M_n egală cu valoarea cea mai mare a acestora.

Exerciţiul 5

Arătaţi că:

a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$ atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\, dx.$$

Exercițiul 6

a) Fie X o variabilă repartizată exponenţial (de parametru α). Arătaţi că are loc următoarea relatţie (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \tag{1}$$

b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relaţia (1). Arătaţi că X este repartizată exponenţial.

Exercițiul 7

O urnă conţine r bile roşii şi b bile albastre. O bilă este extrasă la intamplare din urnă, i se notează culoarea şi este intoarsă in urnă impreună cu alte d bile de aceeaşi culoare. Repetăm acest proces la nesfarşit. Calculaţi:

a) Probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albastră.

b) Probabilitatea ca prima bilă să fie albastră ştiind că a doua bilă este albastră.

c) Fie B_n evenimentul ca a n-a bilă extrasă să fie albastră. Arătaţi că $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$, $\forall\, n \geq 1$.

d) Probabilitatea ca prima bilă este albastră ştiind că următoarele n bile extrase sunt albastre. Găsiţi valoarea limită a acestei probabilităţi.

Exercițiul 8

Ştim că intr-un lot de 5 tranzistori avem 2 care sunt defecţi. Tranzistorii sunt testaţi, unul cate unul, pană cand cei doi tranzistori au fost identificaţi. Fie N_1 numărul de teste pentru identificarea primului tranzistor defect şi N_2 numărul de teste suplimentare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Scrieţi un tablou in care să descrieţi legea cuplului (N_1, N_2). Calculaţi $\mathbb{E}[N_1]$ şi $\mathbb{E}[N_2]$.

Exercițiul 9

Fie (X_1, X_2) vectorul aleator distribuit uniform pe discul $D(R)$ centrat in origine şi de rază R. Densitatea vectorului (X_1, X_2) este dată de

$$f(x_1, x_2) = c\mathbf{1}_{D(R)}(x_1, x_2)$$

unde c este o constantă pozitivă.

1. Determinaţi constanta c.
2. Determinaţi legile marginale ale lui X_1 şi X_2.
3. Fie L distanţa de la punctul (X_1, X_2) la origine. Găsiţi funcţia de repartiţie a lui L, legea lui L şi media sa.

Exercițiul 10

Un proces Bernoulli de parametru p este un şir de variabile aleatoare independente $(X_n)_{n\geq 1}$ cu $X_n \in \{0, 1\}$ şi $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$.

a) Arătaţi că v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ este repartizată $\mathcal{B}(n, p)$ şi calculaţi media şi varianţa acesteia.

b) Fie L cel mai mare număr natural pentru care $X_1 = X_2 = \cdots = X_L$ şi M cel mai mare număr natural aşa incat $X_{L+1} = X_{L+2} = \cdots = X_{L+M}$. Găsiţi distribuţiile v.a. L şi M.

c) Arătaţi că $\mathbb{E}[L] \geq \mathbb{E}[M]$, $\mathbb{V}[L] \geq \mathbb{V}[M] \geq 2$ şi calculaţi $Cov[L, M]$.

d) Calculaţi $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k)$.

Tema 1

Soluții

Exercițiul 1

Considerăm evenimentele următoare:

- $A = \{$testul considerat este pozitiv$\}$
- $B = \{$automobilistul a depăşit nivelul de alcool autorizat$\}$

1. Din ipoteză ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.005$, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = 0.99$. Vrem să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B|A)$. Avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + [1-\mathbb{P}(A^c|B^c)]\,(1-\mathbb{P}(B))} = \frac{0.99\times 0.005}{0.99\times 0.005 + 0.01\times 0.995} \approx 0.332.\end{aligned}$$

2. Căutăm p aşa incat $\mathbb{P}(B|A) = 0.95$. Am văzut că $\mathbb{P}(B|A) = \frac{p\mathbb{P}(B)}{p\mathbb{P}(B)+(1-p)(1-\mathbb{P}(B))}$ de unde

$$p = \frac{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A)}{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A) + (1-\mathbb{P}(B|A))\mathbb{P}(B)} = \frac{0.995\times 0.95}{0.995\times 0.95 + 0.05\times 0.005} \approx 0.99973.$$

3. Ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.3$, prin urmare $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.99\times 0.3 + 0.01\times 0.7 \approx 0.304$ şi

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \approx 0.9769,$$

de unde tragem concluzia că testul este mult mai fiabil in această situaţie.

Exercițiul 2

1. Considerăm evenimentele următoare:
   - $A_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este 5$\}$
   - $B_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este 7$\}$

   Evenimentul E_n se scrie

$$E_n = (A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n.$$

   Aplicand independenţa avem că

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}((A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n)\\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(A_2^c \cap B_2^c) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(A_n)\\ &= \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

Observăm că spaţiul stărilor la cea de-a n-a lansare este $\Omega = \{(i,j) | 1 \leq i,j \leq 6\}$ şi probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie 5 este $\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{36}$, deoarece cazurile favorabile sunt $\{(1,4),(2,3),(4,1),(3,2)\}$. Obţinem de asemenea că probabilitatea ca suma să nu fie nici 5 şi nici 7 la prima lansare este $\mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{26}{36}$, deoarece situaţiile in care suma este 7 sunt $\{(1,6),(2,3),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

In concluzie, probabilitatea evenimentului

$$A = \{\text{suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7}\}$$

este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^n = \frac{1}{9} \frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

2. Fie F_n evenimentul ce corespunde la: *in primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma 2 şi nici suma 7 iar in a n-a aruncare a apărut suma 2* şi C_i evenimentul ce corespunde la suma celor două zaruri la cea de-a i-a aruncare este 2. Avem

$$F_n = (C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n$$

şi probabilitatea lui $\mathbb{P}(F_n)$ este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}((C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n) \\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(C_2^c \cap B_2^c) \times \cdots \times \mathbb{P}(C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(C_n) \\ &= \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c)^{n-1} \mathbb{P}(C_n).\end{aligned}$$

Avem $\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{36}$ (deoarece doar $(1,1)$ ne dă suma 2) şi $\mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) = \frac{36-7}{36} = \frac{29}{36}$. Prin urmare probabilitatea evenimentului căutat, pe care il notă cu B, este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{29}{36}\right)^{n-1} \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{36} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{29}{36}\right)^n = \frac{1}{36} \frac{1}{1-\frac{29}{36}} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

Exercițiul 3

Dacă numărul de maşini vandute intr-un an de reprezentanţă este mai mare decat N, $X \geq N$, atunci caştigul administratorului este $G = aN$. Dacă $X < N$, atunci administratorul vinde X maşini şi ii rămân $N - X$, deci caştigul devine $G = aX - b(N - X)$. Prin urmare avem

$$G = \begin{cases} aN & \text{dacă } X \geq N \\ aX - b(N-X) & \text{dacă } X < N \end{cases}$$

deci

$$\mathbb{E}[G] = aN\mathbb{P}(X \geq N) + \sum_{x=0}^{N-1}[ax - b(N-x)]\mathbb{P}(X = x).$$

Din ipoteză ştim că toţi intregii $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sunt de aceeaşi probabilitate, mai exact ştim că X este o variabilă aleatoare uniformă, deci $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n+1}$ (administratorul vinde acelasi număr de maşini cu aceeaşi probabilitate - in realitate nu este cazul !). Obţinem că:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G] &= aN\sum_{x=N}^{n}\frac{1}{n+1} + \sum_{x=0}^{N}\frac{(a+b)x - bN}{n+1}\\
&= \frac{aN(n-N+1)}{n+1} + (a+b)\frac{N(N-1)}{2(n+1)} - \frac{bN^2}{n+1}\\
&= \frac{N[(2n+1)a - b - (a+b)N]}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

Pentru a găsi valoarea optimă a numărului de maşini pe care administratorul ar trebui să le comande este suficient să găsim maximul numărătorului lui $\mathbb{E}[G]$. Fie $g(N) = N[(2n+1)a - b - (a+b)N]$ atunci $g'(N) = (2n+1)a - b - 2(a+b)N$ de unde rezolvand ecuaţia $g'(N) = 0$ deducem că $N = \frac{(2n+1)a-b}{2(a+b)}$. Mai mult derivata a doua ne dă $g''(N) = -2(a+b) < 0$ ceea ce ne arată că valoarea găsită corespunde maximului.

Exercițiul 4

Avem că legea lui X este uniformă pe mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ iar din definiţia lui $Y = X(7 - X)$ observăm că $Y \in \{6, 10, 12\}$ cu $\mathbb{P}(Y = 6) = \mathbb{P}(Y = 10) = \mathbb{P}(Y = 12) = \frac{1}{3}$. Obţinem că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{3}(6 + 10 + 12) = \frac{28}{3}\\
\mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{3}(36 + 100 + 144) = \frac{280}{3}\\
\mathbb{V}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{56}{9}.
\end{aligned}$$

Variabila aleatoare M_n ia valori in aceeaşi mulţime ca şi Y, $M_n \in \{6, 10, 12\}$. Pentru a găsi legea lui M_n trebuie să calculăm $\mathbb{P}(M_n = x)$ cu $x \in \{6, 10, 12\}$.

Pentru evenimentul $\{M_n = 6\}$ este necesar ca toate variabilele $Y_i = 6$ deci

$$\mathbb{P}(M_n = 6) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Dacă $\{M_n = 12\}$ atunci cel puţin unul din evenimentele $\{Y_i = 12\}$ se realizează, prin urmare

$$\mathbb{P}(M_n = 12) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{Y_i = 12\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pentru a calcula $\mathbb{P}(M_n = 10)$ (fără a face diferenţa $1 - \mathbb{P}(M_n = 6) - \mathbb{P}(M_n = 12)$) observăm că realizarea evenimentului $\{M_n = 10\}$ implică realizarea tuturor evenimentelor $\{Y_i \leq 10\}$ dar excludem evenimentul in care toţi $\{Y_i = 6\}$. Astfel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n = 10) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\} \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

Exercițiul 5

a) Observăm că:

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X = n+1) + \mathbb{P}(X = n+2) + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X = k)$$

şi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X = k) &= (\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \dots) + (\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \dots)\\
&+ (\mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \dots) + \dots\\
&= 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) + \dots\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

O altă idee ar fi să luăm $X = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{X>i\}}$ şi să inversăm $\sum$ cu $\mathbb{E}$ (de ce putem ?).

b) Avem

$$\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X \geq x)\,dx = \int_0^{+\infty}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}]\,dx \overset{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}\,dx\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X}\,dx\right] = \mathbb{E}[X].$$

Exercițiul 6

a) Dacă $X \sim Exp(\alpha)$ atunci densitatea sa este $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ şi are funcţia de repartiţie $F(x) = (1 - e^{-\alpha x})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Observăm că $\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t}$, deci

$$\mathbb{P}(X > t + s|X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha st}} = e^{-\alpha t} = \mathbb{P}(X > t).$$

Interpretare: Să presupunem că X reprezintă durata de viaţă a unei componente electrice. Ştiind că X a funcţionat deja un timp s ($X > s$), probabilitatea ca X să funcţioneze un timp t suplimentar ($X > t + s$) este egală cu probabilitatea ca X să funcţioneze un timp t. Faptul că a funcţionat deja un timp s nu influenţează probabilitatea să funcţioneze un timp t in plus.

b) Din relaţia

$$\mathbb{P}(X > s+t|X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s+t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \mathbb{P}(X > t)$$

obţinem $\mathbb{P}(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$ de unde notand cu $h(t) = \mathbb{P}(X > t)$ avem $h(s+t) = h(s)h(t)$ pentru $s > 0,\ t > 0$.

Pentru a verifica că v.a. X este distribuită exponenţial trebuie să rezolvăm ecuaţia funcţională Cauchy. Observăm pentru inceput că dacă $s = t$ atunci $h(2s) = h^2(s)$ şi prin inducţie avem $h(ks) = h^k(s)$ pentru $k \in \mathbb{N}$. Luand $s = \frac{1}{2}$ avem $h(1) = h^2(\frac{1}{2})$ de unde $h(\frac{1}{2}) = h^{\frac{1}{2}}(1)$ şi pentru $s = \frac{1}{k}$ rezultă că $h(\frac{1}{k}) = h^{\frac{1}{k}}(1)$ (prin aceeaşi argumentare). Combinand rezultatele avem $h(\frac{m}{n}) = h(m\frac{1}{n}) = h^m(\frac{1}{n}) = h^{\frac{m}{n}}(1)$. Prin urmare $h(q) = h^q(1)$ pentru orice $q \in \mathbb{Q}_+$. Dacă $r \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+$ există un şir $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}_+$ aşa incat $q_n \downarrow r$ şi folosind continuitatea la dreapta avem $h(q_n) \downarrow h(r)$ deci $h(r) = a^r$, unde $a = h(1)$. In final am găsit că $h(t) = e^{-t\log\frac{1}{h(1)}}$.

Exercițiul 7

a) In acest caz probabilitatea pe care o căutăm este $\mathbb{P}(2b)$, unde $2b$ inseamnă că a doua bilă a fost albastră. Din formula probabilităţii totale avem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2b) &= \mathbb{P}(2b|1r)\mathbb{P}(r) + \mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(b)\\ &= \frac{b}{r+b+d}\cdot\frac{r}{r+b} + \frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b}\\ &= \frac{b}{b+r}.\end{aligned}$$

b) Trebuie să calculăm probabilitatea:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1b|2b) &= \frac{\mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(1b)}{\mathbb{P}(2b)}\\ &= \frac{\frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b}}{\frac{b}{b+r}} = \frac{b+d}{r+b+d}.\end{aligned}$$

c) Folosim inducţie. Pentru $n = 2$ am văzut că propoziţia este adevărată din punctele precedente. Să presupunem acum că $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_1)$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ şi vrem să arătăm că relaţia rămane adevărată şi pentru $k = n$. Observăm că dacă $N_k(b)$ reprezintă numărul de bile albastre la pasul k atunci:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n|B_{n-1})\mathbb{P}(B_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n|B_{n-1}^c)\mathbb{P}(B_{n-1}^c)\\ &= \frac{N_{n-2}(b)+d}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{b}{r+b} + \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{r}{r+b},\end{aligned}$$

unde am folosit pasul de inducţie ($\mathbb{P}(B_{n-1}) = \frac{b}{r+b}$). Folosind din nou ipoteza de inducţie avem

$$\mathbb{P}(B_{n-2}) = \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-2)d} = \frac{b}{r+b}$$

de unde găsim $N_{n-2}(b) = \frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d]$. Inlucuind această relaţie in expresia lui $\mathbb{P}(B_n)$ obţinem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \frac{N_{n-2}(b)(b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]}\\ &= \frac{\frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d](b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]}\\ &= \frac{b[r+b+(n-1)d]}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{b}{b+r} = \mathbb{P}(B_1).\end{aligned}$$

d) Trebuie să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})}$. Avem din formula probabilităţii totale că:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}\\ &= \frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_1,B_2,\dots,B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1^c,B_2,\dots,B_{n+1})\\ &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)+\\ &+ \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1^c,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1^c,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1^c)\mathbb{P}(B_1^c)\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}+\\ &+ \frac{b+(n-1)d}{b+r+nd}\cdots\frac{b}{b+r+d}\cdot\frac{r}{b+r}\\ &= \frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}.\end{aligned}$$

Observăm că

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots,B_{n+1}) &= \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})}\\ &= \frac{\frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}{\frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\to 1.\end{aligned}$$

Exercițiul 8

Fie N_1 numărul de teste necesare pentru indentificarea primului tranzistor defect, şi N_2 numărul de teste suplimentare necesare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Cum sunt 5 tranzistori avem $0 \leq N_1 + N_2 \leq 5$. Dacă notăm cu T_s al s-lea tranzistorul, $1 \leq s \leq 5$, avem $\mathbb{P}((T_i,T_j)) = \frac{1}{\binom{2}{5}} = \frac{1}{10}$ deoarece tranzistorii au aceeaşi şansă să fie defecţi. Prin urmare

$$\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_1, T_2)) = \frac{1}{10},$$
$$\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_1, T_3)) = \frac{1}{10},$$
$$\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 3) = \mathbb{P}((T_1, T_4) \cup (T_1, T_5)) = \frac{2}{10}, \text{ } (N_1 = 1 \text{ şi } 2,\ 3,\ 4^e \text{ OK deci 5 e defect})$$
$$\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_2, T_3)) = \frac{1}{10},$$
$$\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_2, T_4) \cup (T_2, T_5)) = \frac{2}{10}, \text{ } (N_1 = 2 \text{ şi } N_2 = 2 \text{ sau 4 sau 5 defecte})$$
$$\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_3, T_4) \cup (T_3, T_5)) = \frac{2}{10}, \text{ } (N_1 = 3 \text{ şi } N_2 = 1 \text{ sau 4 sau 5 defecte})$$
$$\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 0) = \mathbb{P}((T_4, T_5)) = \frac{1}{10}, \text{ } (N_1 = 3 \text{ şi primele 3 OK atunci 4 şi } 5^e \text{ defecte})$$

N_1 \ N_2	0	1	2	3	$\sum$
1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
$\sum$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	

Legea lui N_1 este dată de suma pe linii şi legea lui N_2 de suma pe coloane. Astfel

$$N_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad N_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci $\mathbb{E}[N_1] = 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$ şi $\mathbb{E}[N_2] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times 0 = \frac{16}{10}$.

Exercițiul 9

1. Cum f este densitate ea verifică relaţia $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$ deci $\iint_{\mathbb{R}^2} c\mathbf{1}_{D(R)}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$ de unde $c \times (\pi R^2) = 1$ şi $c = \frac{1}{\pi R^2}$.
2. Legile marginale ale lui X_1 şi X_2 sunt determinate de următoarele formule: $f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2$ şi $f_{X_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_1$. Avem

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi R^2} \mathbf{1}_{D(R)}(x_1, x_2)\, dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{R^2 - x_1^2}, \sqrt{R^2 - x_1^2}]}(x_2) \mathbf{1}_{[-R,R]}(x_1)\, dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \mathbf{1}_{[-R,R]}(x_1) \int_{-\sqrt{R^2 - x_1^2}}^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} dx_2 = \frac{2\sqrt{R^2 - x_1^2}}{\pi R^2} \mathbf{1}_{[-R,R]}(x_1) \end{aligned}$$

şi in mod similar găsim

$$
\begin{aligned}
f_{X_2}(x_2) &= \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi R^2}\mathbf{1}_{D(R)}(x_1, x_2)\, dx_1 \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{R^2-x_2^2}, \sqrt{R^2-x_2^2}]}(x_1)\mathbf{1}_{[-R,R]}(x_2)\, dx_1 \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\mathbf{1}_{[-R,R]}(x_2)\int_{-\sqrt{R^2-x_2^2}}^{\sqrt{R^2-x_2^2}} dx_1 = \frac{2\sqrt{R^2-x_2^2}}{\pi R^2}\mathbf{1}_{[-R,R]}(x_2).
\end{aligned}
$$

3. Observăm că distanţa de la punctul (X_1, X_2) la $(0,0)$ este $L = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$. Pentru a găsi probabilitatea $\mathbb{P}(L \leq a)$putem folosi atat o metodă geometrică cat şi una probabilistă.

   Consideraţii geometrice: cum (X_1, X_2) este uniform distribuită pe discul $D(R)$ atunci

$$
\mathbb{P}(L \leq a) = \mathbb{P}((X_1, X_2) \in D(a)) = \frac{\mathcal{A}(D(a))}{\mathcal{A}(D(R))} = \frac{\pi a^2}{\pi R^2} = \frac{a^2}{R^2}.
$$

   Consideraţii probabiliste:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(L \leq a) &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{L\leq a\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_1^2+X_2^2\leq a^2\}}\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1, x_2) f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1, x_2)\mathbf{1}_{D(R)}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1, x_2)\mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq R^2\}}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}\cap\{x_1^2+x_2^2\leq R^2\}}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \frac{\pi a^2}{\pi R^2} \\
&= \frac{a^2}{R^2}.
\end{aligned}
$$

   Am văzut că $F_L(a) = \mathbb{P}(L \leq a) = \frac{a^2}{R^2}$, $\forall a \in [0, R]$ de unde găsim că densitatea este $f_L(a) = \frac{d}{da}F_L(a) = \frac{2a}{R^2}\mathbf{1}_{[0,R]}(a)$. Media se calculează acum uşor

$$
\mathbb{E}[L] = \int_{\mathbb{R}} a f_L(a)\, da = 2\int_{\mathbb{R}} \frac{a^2}{R^2}\mathbf{1}_{[0,R]}(a)\, da = \frac{2}{R^2}\left[\frac{a^3}{3}\right]_0^R = \frac{2R}{3}.
$$

Exercițiul 10

a) Este definiţia binomialei. Avem $\mathbb{E}[S_n] = np$ şi $\mathbb{V}[S_n] = np(1-p)$.

b) Avem că $\{L = n\} = \{X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = 0\} \cup \{X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = 1\}$ de unde $\mathbb{P}(L = n) = p^n q + pq^n$, $n \geq 1$, $q = 1-p$. Rezultă că

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[L] &= \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(L = n) = \sum_{n\geq 1} n(p^n q + pq^n) = 2 + \frac{(p-q)^2}{pq} \\
\mathbb{V}[L] &= \sum_{n\geq 1} n^2\mathbb{P}(L = n) - \mathbb{E}[L]^2 = 2 + \frac{(1+pq)(p-q)^2}{p^2q^2}
\end{aligned}
$$

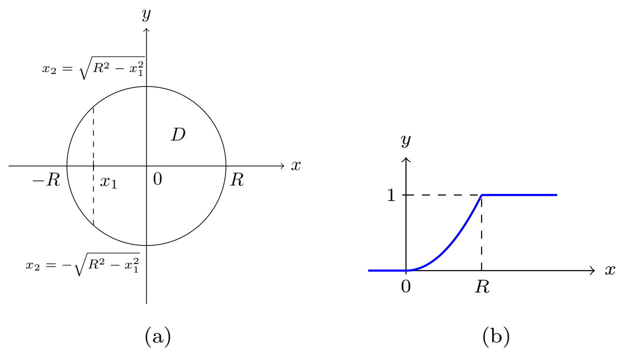

Figure 1: Reprezentarea grafică a lui D şi funcţia de repartiţie F_L

Pentru a găsi legea lui M să ne uităm la cuplul (L, M) şi să observăm că evenimentul $\{L = n, M = m\}$ este dat de $\{X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1\} \cup \{X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0\}$ de unde

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L = n, M = m) = \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1) + \\ \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0) = p^n q^m p + p^m q^n q\end{aligned}$$

şi prin urmare legea lui M este

$$\mathbb{P}(M = m) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(L = n, M = m) = q^{m-1}p^2 + p^{m-1}q^2.$$

Obţinem asfel că $\mathbb{E}[M] = 2$ (independent de p) şi că

$$\mathbb{V}[M] = 2 + \frac{2(p-q)^2}{pq}.$$

c) Este evident că $\mathbb{E}[L] = 2 + \frac{(p-q)^2}{pq} \geq 2 = \mathbb{E}[M]$ şi că $\mathbb{V}[L] = 2 + \frac{(1+pq)(p-q)^2}{p^2q^2} \geq 2 + \frac{2(p-q)^2}{pq} = \mathbb{V}[M] \geq 2$. Se poate calcula uşor că

$$\mathbb{E}[LM] = \sum_{n,m\geq 1} nm\mathbb{P}(L = n, M = m) = \frac{1}{pq}$$

de unde rezultă că $Cov[L, M] = -\frac{(p-q)^2}{pq}$.

d) Observăm că

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbb{P}(L = k, M = n)}{\mathbb{P}(L = k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{p^{k+1}q^n + q^{k+1}p^n}{p^k q + q^k p}$$

şi studiind comportamentul raportului $\frac{p}{q}$ (dacă este > 1 sau nu după cum e p) deducem că

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k) = \begin{cases} p^{n-1}q, & \text{dacă } p < \frac{1}{2} \\ q^{n-1}p, & \text{dacă } p > \frac{1}{2} \\ 2^{-n}, & \text{dacă } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$