Examen Geometrie Diferenţială

1. Fie curba $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definită prin $c(t) = (t, t^2, \frac{a}{3}t^3)$.
   (a) (2p) Găsiţi valorile $a \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, avem $k(t) = \tau(t)$.
   (b) (0,5p) Pentru valorile lui a determinate mai înainte, găsiţi o direcţie fixă cu care tangenta în fiecare punct face un unghi constant.

2. (1p) Fie $c : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ o curbă regulată cu $k(t) \neq 0$ pentru orice $t \in (a, b)$. Arătaţi că dacă planele osculatoare la curbă trec printr-un punct fix atunci curba este plană.

3. Fie suprafaţa parametrizată $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dată prin

$$h(u_1, u_2) = (u_1, u_2, u_1^2 - u_2^2).$$

   (a) (2p) Să se calculeze curbura Gauss şi curbura medie.
   (b) (0,5p) Calculaţi curburile principale în punctul $h(0, 0)$.

4. (1p) Fie c o curbă canonic parametrizată pe o suprafaţă S. Dacă c este geodezică, arătaţi că $\tau_g = \tau$, unde τ este torsiunea iar τ_g este torsiunea geodezică.

5. (a) (1p) O suprafaţă parametrizată din $\mathbb{R}^3$ are coeficienţii primei forme fundamentale $g_{11} = 4$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 9$. Există suprafaţe cu această proprietate care să aibă puncte eliptice sau puncte hiperbolice? Daţi exemplu de suprafaţă care nu are puncte planare şi pentru care curba curba $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definită prin $c(t) = (0, 1, t)$ este geodezică.
   (b) (1p) Daţi exemplu de o suprafaţă regulată S cu proprietatea că orice în triunghi geodezic (laturile sunt geodezice) suma unghiurilor este strict mai mică decât 180°. Dacă o suprafaţa are curbura Gauss constantă $K = -1$ iar suma unghiurilor triunghiului este $\frac{\pi}{2}$, găsiţi aria triunghiului.
   (c) (1p) Daţi exemplu de o suprafaţă care are cel puţin un punct în care operatorul Weingarten (operatorul formă) admite două valori proprii reale nenule de semne diferite dar egale în modul. Există suprafeţe pentru care operatorul Weingarten este operatorul nul în orice punct?