TAFALAN ALEXANDRU

TUTORIAT GEOMETRIE – Nr. 4 (SĂPTĂMÂNA 5)

Operații cu subspații afine. Transformări afine

1) Definiție (UNIUNEA / JOIN-UL)

Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ spațiu afin, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subsp. afine. Atunci

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \left\{ M \in \mathcal{A} \;\middle|\; \begin{array}{l} (\exists)\, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}_1;\ (\exists)\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K;\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \\ (\exists)\, Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{A}_2;\ (\exists)\, \beta_1, \dots, \beta_m \in K;\ \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1 \\ \text{a.î. } M = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n + \beta_1 Q_1 + \dots + \beta_m Q_m \end{array} \right\}$$

se numește UNIUNEA/JOIN-UL lui $\mathcal{A}_1$ cu $\mathcal{A}_2$ și este cel mai mic subspațiu afin (în sensul incluziunii) al lui $\mathcal{A}$ care conține $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$

i.e.: $$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \text{ subsp. afin} \\ \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}'}} \mathcal{A}'$$

2) TEOREMA DIMENSIUNII PENTRU SPAȚII AFINE

Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ spațiu afin și $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ două subspații afine ale lui $\mathcal{A}$, de direcție V_1, respectiv V_2. Atunci

$$\dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) := \begin{cases} \dim(\mathcal{A}_1) + \dim(\mathcal{A}_2) - \dim(V_1 \cap V_2) + 1, & \text{DACĂ } \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset \\ \dim(\mathcal{A}_1) + \dim(\mathcal{A}_2) - \dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2), & \text{DACĂ } \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

Exercițiul 1:

Fie $(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^4_{/\mathbb{R}}; f_{can})$ sp. afin. Fie A_1 și $A_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ definite prin:

$A_1 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 1\}$

$A_2 = \left\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x^1 - x^2 - x^3 = -1 \\ x^2 + x^3 + x^4 = 0 \end{cases}\right\}$

a) Determinați $A_1 \vee A_2$, $A_1 \cap A_2$ și determinați spațiile directoare;

b) Precizați spațiile vectoriale directoare pentru A_1 și A_2.

Soluție:

a) $A_1 \cap A_2 = \left\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 1 \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = -1 \\ x^2 + x^3 + x^4 = 0 \end{cases}\right\}$

$$A = \left(\begin{array}{c:ccc} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

rang $A = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 + x^3 - x^4 = 1 - 2\alpha \\ -x^2 - x^3 = -1 - 2\alpha \\ x^2 + x^3 + x^4 = 0 \\ x^1 = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \alpha \\ x^2 = \dfrac{1 + 6\alpha}{2} \\ x^3 = \dfrac{1 - 2\alpha}{2} \\ x^4 = -1 - 2\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Deci $A_1 \cap A_2 = \left\{\left(\alpha; \dfrac{1+6\alpha}{2}; \dfrac{1-2\alpha}{2}; -1-2\alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

$\dim A_1 = 4 - \text{rang}(2, -1, 1, -1)$

$= 4 - 1 = 3$

$\dim A_2 = 4 - \text{rang}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = 4 - 2 = 2$

Folosim Th. dimensiunii:

Cum $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 \vee A_2 = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim(A_1 \cap A_2)$

$= 3+2-1$

$= 4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$

$\Rightarrow A_1 \vee A_2 = \mathbb{R}^4$

$\operatorname{dir}(A_1 \cup A_2) = \{(\alpha; 3\alpha; -\alpha; -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$= Sp_{\mathbb{R}} \{(1; 3; -1; -2)\}$

$\operatorname{dir}(A_1 \vee A_2) = \operatorname{dir}(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^4_{/\mathbb{R}}$ ca sp. vect.

b) $\operatorname{dir}(A_1) = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 0\}$

$\operatorname{dir}(A_2) = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 2x^1 - x^2 - x^3 = 0 \\ x^2 + x^3 + x^4 = 0 \end{cases}\}.$

<u>Exercițiul 2</u>:

Fie spațiul afin $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^5_{/\mathbb{R}}, f_{can})$ se consideră subspațiile afine $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^5$ definite prin:

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1 \end{cases}\}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \frac{x_1}{1} = \frac{x_2 - 1}{-1} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4 - 1}{-1} = \frac{x_5}{1}\}$$

a) Determinați subspațiile vectoriale directoare pentru A_1 și A_2 și det $\operatorname{dir}(A_1) \cap \operatorname{dir}(A_2)$

b) Determinați subspațiile afine. $A_1 \vee A_2$, $A_1 \cap A_2$

și determinați spațiile vectoriale directoare (dc. este posibil)

Soluție:

a) $\operatorname{dir}(\mathcal{A}_1)=\left\{(x_1,\dots,x_5)\in\mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} x_1+x_2-x_5=0 \\ x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2+x_4=0 \end{cases}\right\}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(A)=3 \Rightarrow \text{S.C.N (dublu nedet)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=-\alpha+\beta \\ x_3=\alpha-2\beta \\ x_4=-\beta \\ x_5=\beta \end{cases}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Deci, $\operatorname{dir}(\mathcal{A}_1)=\{(\alpha;-\alpha+\beta;\alpha-2\beta;-\beta;\beta)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

$$\mathcal{A}_1: \quad \frac{x_1}{1}=\frac{x_2-1}{-1}=\frac{x_3}{0}=\frac{x_4-1}{-1}=\frac{x_5}{1}=\alpha$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_1: \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=-\alpha+1 \\ x_3=0 \\ x_4=-\alpha+1 \\ x_5=\alpha \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{dir}(\mathcal{A}_1): \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=-\alpha \\ x_3=0 \\ x_4=-\alpha \\ x_5=\alpha \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow \operatorname{dir}(\mathcal{A}_1)=\{(\alpha,-\alpha,0,-\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$

$\operatorname{dir}(\mathcal{A}_1)\cap\operatorname{dir}(\mathcal{A}_2)=\{(0,0,0,0,0)\}=\vec{0}_{\mathbb{R}^5}$

b) Din a) $\Rightarrow \mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2=\emptyset$

Calculez $\dim(A_1)$, $\dim(A_2)$

$$\dim(A_1) = 5 - \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_3 \neq 0.$

$$= 5 - 3$$
$$= 2$$

$\dim(A_1) = 1 \rightarrow A_1$ e dreaptă afină în $\mathbb{R}^5$ (deci sp. vect de dim 1)

Din Th dim, cu $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

avem: $\dim(A_1 \vee A_2) = \dim(A_1) + \dim(A_2) - \dim(V_1 \cap V_2) + 1$

$\Rightarrow \dim(A_1 \vee A_2) = 2 + 1 - 0 + 1 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 \vee A_2$ e un HIPERPLAN în $\mathbb{R}^5$ ∎

Exercițiul 3

În spațiul afin $(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3/_\mathbb{R}; f_{can})$ se consideră subspațiul afin $A_1 \subset \mathbb{R}^3$, definit prin:

$$A_1 := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \right\}$$

Fie punctul $P_0(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Să se scrie subspațiul afin $A_2 \in \mathbb{R}^3$ care conține punctul P_0, este paralel cu A_1 și are aceeași dimensiune ca A_1.

Soluție:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(A) = 2$$

$\dim(A_1) = 3 - \text{rang}(A) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{A}_2) = 1 \Rightarrow \mathcal{A}_2$ este o dreaptă afină din $\mathbb{R}^3$

$\begin{cases} \mathcal{A}_2 \parallel \mathcal{A}_1 \\ \dim(\mathcal{A}_2) = \dim(\mathcal{A}_1) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{dir}(\mathcal{A}_2) = \operatorname{dir}(\mathcal{A}_1)$

Determin $\operatorname{dir}(\mathcal{A}_1) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right.$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -5\alpha \\ x_1 + x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3\alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \operatorname{dir}(\mathcal{A}_1) = \{ (-3\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$

$= Sp_{\mathbb{R}} \{ (-3, 2, 1) \}$

$\Rightarrow \operatorname{dir}(\mathcal{A}_2) = Sp_{\mathbb{R}} \{ (-3, 2, 1) \}$

Deci: $P_0 \in \mathcal{A}_2$

$\mathcal{A}_2 : \dfrac{x - 0}{-3} = \dfrac{y - 0}{2} = \dfrac{z - 1}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_2 : \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z - 1}{1}$

3) Definiție (TRANSFORMARE AFINĂ / MORFISM DE SP. AFINE)

Fie $(\mathcal{A}_1, V_{1/\mathbb{K}}, \varphi)$ și $(\mathcal{A}_2, V_{2/\mathbb{K}}, \varphi)$ spații afine.

Se numește TRANSFORMARE AFINĂ o funcție $\tau : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ a.î. $(\exists)\, O \in \mathcal{A}_1$ cu proprietatea că funcția $\tau_0 : V_1 \longrightarrow V_2$, $\tau_0(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(P)}$ este aplicație liniară

Terminologie: $T \overset{not}{=} \tau_0$ se num. URMA VECTORIALĂ (liniară) a lui τ

4) Lemă

O transformare $\mathcal{T}: A_1 \to A_2$ este INJECTIVĂ (respectiv surjectivă) $\iff$ urma sa T este aplicație vectorială INJECTIVĂ (respectiv surjectivă)

5) TEOREMĂ (DE CARACTERIZAREA A MORFISMELOR AFINE UTILIZÂND COORDONATELE CARTEZIENE)

Fie A_1, A_2 două spații afine de $\dim(A_1)=n$, $\dim(A_2)=m$, peste același corp $\mathbb{K}$. Fie $\mathcal{R}_1=(O_1, B_1)$, $\mathcal{R}_2=(O_2, B_2)$ repere carteziene în A_1, respectiv A_2. O funcție $\mathcal{T}: A_1 \to A_2$ este TRANSFORMARE AFINĂ $\iff (\exists) A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ a.î. $(\forall) P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{not}{:=} X$ și

$\mathcal{T}(P) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \overset{not}{:=} Y$ avem:

$$\boxed{\mathcal{T}(X) := Y = AX + B}$$

6) Observații:

i) Urma vectorială $T = \mathcal{T}_0$ este descrisă matricial astfel $T(X) = AX$

ii) Dacă A este matricea asociată unei aplicații afine $\mathcal{T}$ într-un $\mathcal{R}_c$, avem:

Dacă $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{T}$ este BIJECTIVĂ.

7) TEOREMĂ (Caracterizarea transformărilor afine, utilizând combinații afine)

Fie A_1, A_2 două spații afine peste un același corp $\mathbb{K}$:

a) O funcție $\tau: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este transformare afină dacă și numai dacă $(\forall)\ n \geq 1,\ n \in \mathbb{N},\ (\forall)(\alpha_i)_{i=\overline{1,n}} \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ și orice $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_1$ avem

$$\tau(\alpha A_1 + \ldots + \alpha A_n) = \alpha \tau(A_1) + \ldots + \alpha \tau(A_n)$$

b) Dacă $\operatorname{char}(K) \neq 2$, atunci $\tau: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este transformare afină $\Leftrightarrow (\forall)\ \alpha_1, \alpha_2 \in K$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ și $(\forall)\ A_1, A_2 \in \mathcal{A}_1$, avem:

$$\tau(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1 \tau(A_1) + \alpha_2 \tau(A_2)$$

Exercițiul 4:

Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x,y,z)) = (\underbrace{x+y}_{y_1}; \underbrace{x-2y+z+1}_{y_2}; \underbrace{2x-y+z+2}_{y_3})$

a) Să se arate că f e transformare afină.

b) Să se decidă dacă f e transformare afină bijectivă.

c) Să se determine $\operatorname{Im}(f)$

d) Fie $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$

Să se determine $f(d)$

Soluție a) $\boxed{\text{MET } 1}$

$$f((x,y,z)) \overset{\text{not}}{:=} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

Cum $(\exists)\ A \in M_3(\mathbb{R})$ și $B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ a.î.

$$Y = AX + B \underset{\text{Th}}{\Rightarrow} f \text{ e TR. AFINĂ}$$

a) $\boxed{\text{MET 2}}$ $\underbrace{T_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}_{\text{ca sp. vectoriale reale}}$

$T_f((x,y,z)) = (x+y;\ x-2y+z;\ 2x-y+z)$

f e TR. AFINĂ $\Leftrightarrow$ T_f e aplicație liniară vector.

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Verific $u, v \in \mathbb{R}^3$

$T_f(\alpha u + \beta v) = \alpha T_f(u) + \beta T_f(v)$ (evident) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ T_f e apl. lin de sp. vect $\Rightarrow$ f e MORF. AFIN

b) f este bijectivă $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{-2} + 0 + \cancel{2} - 0 \cancel{+1} \cancel{-1} = 0$$

$\Rightarrow$ f nu este bijectivă.

c) $Im(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\exists)\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ a.î.

$f((a,b,c)) = (x,y,z) \}$

$f((a,b,c)) = (x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = x \\ a-2b+c+1 = y \\ 2a-b+c+2 = z \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Sist cu nec a, b, c scot a, b, c în funcție de x, y, z și introduc într-o ec... $\Rightarrow$ TEMA

d) $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3} = \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 2\alpha + 2 \\ z = 3\alpha + 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$f(d) := \{ f(P) \mid P \in d \}$

$f(\underbrace{(x, y, z)}_{P \in d}) = f((\alpha+1; 2\alpha+2; 3\alpha+3))$

$= (3\alpha+3; \ 1 \ ; 3\alpha+5)$

$\Rightarrow f(d) = \{(3\alpha+3; 1; 3\alpha+5) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

↳ subspațiu afin de $\underline{\underline{\dim = 1}}$

$\Rightarrow f(d): \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-5}{5}$

$\Rightarrow f(d): \ y = 1$

■

Exercițiul 5:

Fie $(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3/\mathbb{R}; \varphi_{can})$. Considerăm sistemul de puncte necoliniare $\{A, B, C\} \in \mathbb{R}^3$. Considerăm aplicația $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(M) = M'$ a.î. $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$

a) Să se arate că f e bijecție

b) Să se arate că f are un punct fix. Este el unic?

Soluție

a) f este bijectivă $\Leftrightarrow (\forall) M' \in \mathbb{R}^3, (\exists)! \ M \in \mathbb{R}^3$ a.î. $f(M) = M'$

Fie $M' \in \mathbb{R}^3$

Cum $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MM} \Rightarrow$

$\Rightarrow M' = 3A + 4B - 5C - M \rightarrow M = 3A + 4B - 5C - 1M'$

(scriere unică, căci

f_M e bijecție)

Iau ! $M = 3A + 4B - 5C - M'$

De unde: $f(M) = M'$

Deci f e bijectivă.

b) Caut $P \in \mathbb{R}^3$ a.î. $f(P) = P$

$f(P) = P \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{PC} \Rightarrow$

$\Rightarrow P = 3A + 4B - 5C - P \Rightarrow 2P = 3A + 4B - 5C \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \frac{3}{2}A + 2B - \frac{5}{2}C$

$\hookrightarrow$ punct fix al funcției f } $\Rightarrow$ unicul punct fix. al lui f.

f e bij

Exercițiul 6:

Care din următoarele funcții sunt transformări afine bijective?

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

a) $f((x,y)) = (x + \cos(7); 2y - 1)$ ✓ DA

b) $f((x,y)) = (7 + \cos(x); 2y - 1)$

c) $f((x,y)) = (\cos(7) \cdot x; 2y - 1)$ ✓ DA

d) $f((x,y)) = (\cos(7) \cdot x^3; 2y - 1)$

Justificare: b) $\to \cos(x)$ nu e liniar !!

c) x^3 —— " —— !!

a) și b) sunt MORFISME AFINE

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow f$ e și bij

~~c~~ b) $|B| = \begin{vmatrix} \cos(7) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to f$ e bij.

M|11