Examen[1] la Geometrie I, seria 11, 31.01.2021

Nume și prenume: BECEANU EVA

Grupa: 112

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Dacă conica Γ are ecuaţia $\Gamma : 2x^2 - 3y^2 + 6xy - 4x + 5 = 0$ şi $P = (1, -1)$, atunci $P \in \Gamma$. **(0,7p)**

2. Dreptele din plan $d_1 : 2x + \alpha y - 1 = 0$ şi $d_2 : \beta x - 3y + 5 = 0$ sunt paralele dacă şi numai dacă $3\alpha = 2\beta$. **(0,7p)**

3. Dacă $A = (4, -1), B = (2, \alpha)$ şi $C = (5, 1)$, atunci există $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ este unghi obtuz. **(0,7p)**

4. Dacă în spaţiul real $\mathbb{R}^3$ avem $d : \begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$ şi $\pi : 3y + 5z - 2 = 0$, atunci $d \subset \pi$. **(0,7p)**

5. Imaginea unei hiperbole printr-o omotetie este o hiperbolă de aceeaşi excentricitate. **(0,7p)**

II. Redactaţi rezolvările complete[2]:

1. În planul $\mathbb{R}^2$, fie dreapta $d : x + 3y - 2 = 0$ şi funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x - 2, 3y + 2)$.

a) Arătaţi că f este o omotetie şi calculaţi centrul şi raportul ei. **(0,75p)**

b) Aflaţi ecuaţia dreptei $d' = f(d)$ şi calculaţi distanţa de la d la d'. **(0,75p)**

c) Găsiţi ecuaţia unei conice nedegenerate care este tangentă la d şi d'. **(0,5p)**

2. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie conica

$$\Gamma : -2x^2 - 12xy + 7y^2 + 2x + 8y - 1 = 0$$

a) Aflaţi natura conicei Γ. Precizaţi dacă este nedegenerată şi dacă are centru unic. **(0,5p)**

b) Aduceţi Γ la o formă canonică şi precizaţi reperul ortonormat pozitiv orientat în care are această formă. **(1p)**

3. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie cercurile neconcentrice

$$\mathcal{C}_1 : f_1(x, y) = x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$\mathcal{C}_2 : f_2(x, y) = x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

şi d axa lor radicală.

Considerăm mulţimea de conice

$$\mathcal{F} = \{\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2} : \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0\}.$$

a) Demonstraţi că $d \in \mathcal{F}$ şi este singura dreaptă din $\mathcal{F}$. **(0,25p)**

b) Demonstraţi că cercurile din $\mathcal{F}$, diferite de $\mathcal{C}_1$, au axa radicală cu $\mathcal{C}_1$ dreapta d. **(0,75p)**

c) Demonstraţi că dacă $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B\}$, atunci cercurile din $\mathcal{F}$ sunt exact cercurile ce trec prin punctele A şi B. **(0,25p)**

d) Demonstraţi că dacă $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, atunci cercurile din $\mathcal{F}$ sunt disjuncte două câte două. **(0,25p)**

4. Considerăm $\mathbb{R}^2$ planul euclidian.

a) Fie $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ o conică. Demonstraţi că dacă $A, B, C, D \in \Gamma$ sunt vârfurile unui paralelogram cu centru O, atunci O este şi centru al conicei Γ. **(1p)**

b) Demonstraţi că singura conică în care nu poate fi înscris un paralelogram (eventual degenerat) este parabola. **(0,5p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. Nota pe lucrare este minimul dintre suma punctajelor şi 10. Timp de lucru: 3 ore. Succes!
[2] Puteţi presupune un subpunct adevărat în subpunctele următoare, chiar dacă nu aţi reuşit să îl demonstraţi.