$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 + x_3y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$

a) Să se arate că g este formă biliniară simetrică

b) Să se determine o bază a lui $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ în care matricea asociată lui g are forma diagonală și să se precizeze această matrice.

b) $g(e_1,e_1) = 1 \neq 0$

$e_1^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,e_1) = 0\} = \{(x_1,x_2,-x_1) \mid x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$

$g(x,e_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 0$ $= \{x_1(1,0,-1) + x_2(0,1,0)\} x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$

$e_1^{\perp} = \langle\{\underset{u}{(1,0,-1)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}\}\rangle$

$g(e_2,e_2) = 0$

$g(u,u) = 1+1-1-1+0+0 = 0$

$g(u,e_2) = 0+0+0+0+0-1 = -1 \neq 0$

$g(u+e_2, u+e_2) = g(u,u) + g(e_2,e_2) + g(u,e_2) + g(e_2,u) = -2 \neq 0$

$v = u + e_2 = (1,1,-1)$

$g(v,v) = -2$

$v^{\perp} = \{x \in e_1^{\perp} \mid g(x,v) = 0\}$

$g(x,v) = 0 \Leftrightarrow \cancel{x_1} - \cancel{x_3} - \cancel{x_1} + \cancel{x_3} - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow -x_2 + x_3 = 0$

$x \in e_1^{\perp} \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = (\alpha, \beta, -\alpha)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = -\alpha$

$v^{\perp} = \{(-\beta,\beta,\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \langle\{\underset{w}{(-1,1,1)}\}\rangle$

$B = \{e_1, v, w\}$

$g(w,w) = 1+1-1-1+1+1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

FORME PĂTRATICE

Definiție

Fie V/K sp. vectorial, K corp comutativ, car $K \neq 2$ (caracteristica),

$Q: V \to K$ se numește formă pătratică dacă există $g: V \times V \to K$ biliniară și simetrică

$Q(x) = g(x,x)$

OBSERVAȚIE g este unică

$x, y \in V$ $Q(x+y) = g(x+y, x+y) = g(x,x) + g(x,y) + g(y,x) + g(y,y) =$

$= Q(x) + Q(y) + 2g(x,y)$

$2g(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$

$g(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$

$Q: V \to K$ formă pătratică $\Rightarrow \exists!\, g: V \times V \to K$ bil. și sim.

a.î. $\forall x \in V$ $Q(x) = g(x,x)$

Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ bază în V/K $\quad g \xrightarrow{B} A \quad a_{ij} = g(e_i,e_j), i,j = \overline{1,n}$

Vom spune că matricea asociată lui Q în baza B este A.

Fie $x \in V$. Notăm cu $x_1, \ldots, x_n$ coordonatele lui x în B

$Q(x) = g(x,x) = \sum_{i,j=\overline{1,n}} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \le j < i \le n} a_{ij} x_i x_j =$

$* \; g(x,y) = \sum_{i,j=\overline{1,n}} a_{ij} x_i y_j$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_j^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ji} x_j x_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$

- Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$

a) Să se arate că Q este formă pătratică

b) Să se determine matricea asociată lui Q în B_c.

c) Să se determine o bază în $\mathbb{R}^3$ în care mat. asociată lui Q să aibă forma diagonală și să se scrie expresia lui Q în această bază.

a) $a_{ii} x_i^2 \longrightarrow a_{ii} x_i y_i$

$i \neq j$ $\quad a_{ij} x_i x_j \longrightarrow \frac{1}{2}(a_{ij} x_i y_j + a_{ij} x_j y_i)$

fie

$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$

g este biliniară și simetrică și $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $g(x,x) = Q(x)$

b) $Q \xrightarrow{B_c} A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $Q(x) = (x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + (2x_3)^2 - 4x_2x_3)$

$- x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_2x_3$

$Q(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + x_2^2 + 10x_2x_3 - 5x_3^2$

$Q(x) = \underbrace{(x_1 + x_2 - 2x_3)}_{y_1}{}^2 + \underbrace{(x_2 + 5x_3)}_{y_2}{}^2 - 30\underbrace{x_3^2}_{y_3}$

$B_c \xrightarrow{A} B = \{x_1, x_2, x_3\}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$x_3 = y_3$

$x_2 + 5y_3 = y_2 \Rightarrow x_2 = y_2 - 5y_3$

$x_1 + y_2 - 5y_3 - 2y_3 = y_1$

$x_1 = y_1 - y_2 + 7y_3$

De calculat $Q(x)$ $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 7y_3 \\ x_2 = y_2 - 5y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$u_1 = (1,0,0)$

$u_2 = (-1,1,0)$

$u_3 = (7,-5,1)$

$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - 30y_3^2$

$x = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$

$Q(x) \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$