Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

17 ianuarie 2022

Analiză numerică şi Metode numerice
Examen – Matematică, Anul III, Grupa 321

INSTRUCŢIUNI

1. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
2. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
3. **TIMP DE LUCRU: 120 minute, i.e. 11:30–13:30.**
4. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email printr-un **Reply simplu** către adresa de la care aţi primit subiectele, sub forma unui fişier PDF denumit `321_PANTUS_ANDREEA.pdf`.
5. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **17 ianuarie 2021, orele 14:00.**

EX#1 (a) În teorema lui Brouwer, înlocuiţi condiţia

$$\exists\, k \in (0,1): \quad |\phi'(x)| \le k\,,\ \forall\, x \in (a,b) \tag{1}$$

cu proprietatea

$$\exists\, k \in (0,1): \quad \phi'(x) \le k\,,\ \forall\, x \in (a,b)\,. \tag{2}$$

Ce puteţi spune despre existenţa şi unicitatea punctului fix al funcţiei ϕ în acest caz?

(b) Găsiţi un contraexemplu pentru care teorema lui Brouwer nu mai este validă prin înlocuirea condiţiei (1) cu condiţia (2).

EX#2 Fie nodurile de interpolare $x_j = j$, $j = \overline{0,3}$. Dacă

$$P_{0,1}(x) = x + 1\,, \qquad P_{1,2}(x) = 3x - 1\,, \qquad P_{1,2,3}(1,5) = 4\,, \tag{3}$$

să se determine $P_{0,1,2,3}(1,5)$.

EX#3 Să se arate că în cazul formulelor de cuadratură Newton-Cotes închise cu $(n+1)$ puncte/noduri de interpolare, x_k, $k = \overline{0,n}$, pentru o funcţie integrabilă $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, ponderile, w_k, $k = \overline{0,n}$, satisfac relaţiile:

(a) $w_{n-k} = w_k$, $k = \overline{0,n}$;

(b) $w_0 + w_1 + \ldots + w_n = b - a$.

13:09

cdn.fbsbx.com Done

PANȚUȘ ANDREEA-OLIVIA
GRUPĂ 321

Analiză numerică și metode numerice

Examen - Matematică, Anul III, Grupa 321

1. a) Teorema lui Brouwer

$\exists k \in (0,1): |\phi'(x)| \leq k, \forall x \in (a,b)$

cu proprietatea

$\exists k \in (0,1): \phi'(x) \leq k, \forall x \in (a,b).$

Soluție:

Existența o păstrăm pentru unicitate.

Fie $r_1, r_2 \in [a,b]$, $r_1 < r_2$ a.î.

$\phi(r_1) = r_1$ și $\phi(r_2) = r_2$

$r_2 - r_1 = \phi(r_2) - \phi(r_1) \xlongequal[\text{Lagrange}]{\text{Th. lui}} \phi'(\xi)(r_2 - r_1) \leq k(r_2 - r_1) < r_2 - r_1$ abs

$\Rightarrow$ unicitatea

b) Contraexemplu pentru teorema lui Brouwer

Folosim teorema de convergență:

Fie $\phi: [0,1] \to [0,1]$, $\phi(x) = 1 - x^2$,

$\phi \in C^1[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} \phi(x) = x \Leftrightarrow 1 - x^2 = x \\ x \in [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{-2} \notin [0,1]$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} \in [0,1] \Rightarrow x = x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

x e unicul punct fix

Fie $t_0 = 0,9$

(t_n) șirul aproximărilor lui x

1

Scanned with CamScanner

PANȚUȘ ANDREEA-OLIVIA
GRUPA 321

1. b) $t_1 = 0,19$

$t_2 = 0,96$

Inductiv $t_{2k} \geq 0,9$

x e unicul punct fix

$t_0 = 0,9$

(t_n) șirul aproximărilor lui x

PANȚUȘ ANDREEA-OLIVIA
GRUPA 321

1. b) $t_1 = 0,19$

$t_2 = 0,96$

Inductiv $t_{2k} \geq 0,9$

$t_{2k+1} \leq 0,2$

$\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow (t_n)$ nu e convergent.

Cum acest (t_n) nu e convergent, nu pot aplica th. lui Brouwer

PANȚUȘ ANDREEA-OLIVIA
GRUPA 321

2. $x_j = j,\ j = \overline{0,3}$ noduri de interpolare

$P_{0,1}(x) = x+1$

$P_{1,2}(x) = 3x-1$

$P_{1,2,3}(1,5) = 4$

Vrem $P_{0,1,2,3}(1,5)$.

Soluție:

$f(x_0) = P_{0,1}(x_0) = x_0+1$

$f(x_1) = P_{0,1}(x_1) = P_{1,2}(x_1) = 3x_1-1$

$f(x_2) = P_{1,2}(x_2) = 3x_2-1$

Folosim recurența:

$$P_{0,1,2,3}(x) = \frac{1}{x_0-x_3}\begin{vmatrix} P_{0,1,2}(x) & x-x_0 \\ P_{1,2,3}(x) & x-x_3 \end{vmatrix}$$

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_0-x_2}\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x-x_0 \\ P_{1,2}(x) & x-x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x-x_0 \\ 3x-1 & x-x_2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{x_0-x_2}$$

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_0-x_2}\left[(x+1)(x-x_2)-(x-x_0)(3x-1)\right]$$

$$= \frac{1}{x_0-x_2}\left(x^2-xx_2+x-x_2-3x^2+x+3xx_0-x_0\right)$$

$$= \frac{1}{x_0-x_2}\left(-2x^2+2x-x_2(x+1)+x_0(3x-1)\right]$$

$$P_{0,1,2}(1,5) = \frac{1}{1-5}\left[-2x^2+2x-5(x+1)+(3x-1)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-2x^2+2x-5x-5+3x-1\right) = -\frac{1}{4}\left(-2x^2-6\right) = \frac{x^2+3}{2}$$

$$P_{0,1,2,3}(1,5) = \frac{1}{1-5}\begin{vmatrix} \frac{x^2+3}{2} & x-1 \\ 4 & x-5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\left[(x-5)\left(\frac{x^2+3}{2}\right)-4(x-1)\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\left(x^3+3x-5x^2-15\right)+(x-1) = -\frac{1}{8}\left(x^3+3x-5x^2-15-8x+8\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\left(x^3-5x^2-5x-7\right)$$

PANȚUȘ ANDREEA-OLIVIA
GRUPA 321

4

$$(x^3+3x-5x^2-15)+(x-1) = -\frac{1}{8}(x^3+3x-5x^2-15-8x+8)$$
$$= -\frac{1}{8}(x^3-5x^2-5x-7)$$

3

PANȚUȘ ANDREEA-OLIVIA
GRUPA 321

3. Să se arate că în cazul formulelor de cuadratură Newton-Cotes închise cu $(m+1)$ puncte/noduri de interpolare, $x_k, k=\overline{0,m}$, pt o funcție integrabilă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ponderile $w_k, k=\overline{0,m}$, satisfac relațiile:

a) $w_{m-k}=w_k, k=\overline{0,m}$

b) $w_0+w_1+\dots+w_m=b-a$

Soluție:

b) $i_m(f)=\sum_{k=0}^{m} w_k\cdot f(x_k)=i(f), \forall f\in P_m$, w_k - ponderi

Fie $f(x)\equiv 1 \Rightarrow i_m(f)=i(f)$

$\sum w_k\cdot 1=\int_a^b 1\,dx=b-a$

$\sum_{k=0}^{m} w_k = w_0+w_1+\dots+w_k=\int_a^b 1\,dx=b-a \Rightarrow$

$w_0+w_1+\dots+w_m=b-a$ q.e.d.

a) $i_m(f):=\sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k)$

$x_{k+1}-x_k=h, \forall k=\overline{0,m-1}$, $h>0$ (pasul cuadraturii

Pentru formula de cuadratură N-C închisă avem și

$x_k=a+kh, k=\overline{0,m}$

$h=\frac{b-a}{m}$

PANȚUȘ ANDREEA-OLIVIA
GRUPA 321

3. a) $w_{m-k}=w_k, k=\overline{0,m}$

De fapt avem $h\int_0^m \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m} \frac{t-i}{k-i}\,dt=$

$x_{m-k}=a+(m-k)h, k=\overline{0,m}$

$h=\frac{b-a}{m}$; ~~SV: x = a+(m-k)h t (=) dx =~~

$t=m-k$

SV: $x=a+ht \Leftrightarrow dx=h\,dt, t\in[0,m], x\in[a,b]$

$x_{k+1} - x_k = h, \forall k=\overline{0,m-1}$, $h>0$ (pasul cuadraturii

formula de cuadratură N-C închisă avem și

$x_k = a+kh, \ k=\overline{0,m}$

$h = \frac{b-a}{m}$

PANȚUȘ ANDREEA-OLIVIA
GRUPA 321

3. a) $w_{m-k} = w_k, \ k=\overline{0,m}$

De fapt vrem $h\int_0^m \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m} \frac{t-i}{k-i}\, dt =$

$x_{m-k} = a+(m-k)h, \ k=\overline{0,m}$

$h = \frac{b-a}{m}$; ~~SV: $x = a+(m-k)t \Leftrightarrow dx =$~~

$t = m-k$

SV: $x = a+ht \Leftrightarrow dx = h\,dt, \ t\in[0,m], \ x\in[a,b]$

$$w_{m-k} := \int_a^b L_{m-k,k}(x)\,dx = \int_0^m \varphi_k(t)\,h\,dt = h\int_0^m \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m-k} \frac{t-i}{k-i}\, dt$$

$$= h\int_0^m \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m-k} \frac{m-k-i}{k-i}\, dt$$

$$w_k := h\int_0^m \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m} \frac{k-i}{k-i}\, dt \Rightarrow$$

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m-k} \frac{m-k-i}{k-i} = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m} \frac{k-i}{k-i}$$

$$\| \qquad \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m} 1 = 1 \quad (1)$$

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m} \frac{m-m+k-i}{k-i} \quad (2)$$

$\|$

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m} \frac{k-i}{k-i} = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m} 1 = 1$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow w_k = w_{m-k}, \ k=\overline{0,m}$