EXAMEN
Teoria măsurii
28.01.2022

Exerciţiu 1 Aplicaţi teorema de convergenţă monotonă şirului de funcţii

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{2023}}\chi_{[2,n^2]}(x) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

în spaţiul cu măsură $([2,\infty), \mathcal{L}\text{eb}([2,\infty)), \lambda)$. Analizaţi limita

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[2,\infty)} \frac{1+e^{-nx^2}}{x^{2023}} d\lambda(x).$$

Exerciţiu 2 Fie $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, suprafaţa dată prin

$$\sigma(u,v) = (v, u, u^2v^2).$$

Determinaţi $\partial\sigma$ şi, folosind formula Stokes-Ampere, calculaţi

$$\int_\sigma (\text{curl}(F)|ds)_{\mathbb{R}^3},$$

unde

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = (z,x,y).$$

Exerciţiu 3 Fie $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in (0,1).$$

Arătaţi că f este Lebesgue măsurabilă. Este f Lebesgue integrabilă pe (0,1)? Argumentaţi răspunsul.