Examen[1] la Geometrie I, seria 11, 31.01.2021

Nume și prenume: ROBU VLAD NICOLAE

Grupa: 111

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Punctul $P = (2, \sqrt{2})$ se află în interiorul elipsei de ecuaţie $\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. **(0,7p)**

2. Nu există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele din plan d_1 de direcţie $(3, 4)$ şi d_2 de direcţie $(1, \alpha)$ sunt ortogonale. **(0,7p)**

3. Dacă $A = (1, -1), B = (3, 4)$ şi $C = (-4, 1)$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic. **(0,7p)**

4. Dacă în spaţiul real $\mathbb{R}^3$ avem $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{7} = \frac{z}{1}$ şi $\pi = \{(1 + t - s, 2t + s, -1 + s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$, atunci $d \parallel \pi$. **(0,7p)**

5. Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f \neq id_{\mathbb{R}^2}$, este o izometrie şi $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$, atunci f este o simetrie (centrală sau axială). **(0,7p)**

II. Redactaţi rezolvările complete[2]:

1. În planul $\mathbb{R}^2$, fie dreapta $d : x + 3y - 2 = 0$ şi funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2)$.

a) Arătaţi că f este o simetrie axială şi determinaţi axa de simetrie. **(0,75p)**

b) Aflaţi ecuaţia dreptei $d' = f(d)$ şi calculaţi $\cos \angle(d, d')$. **(0,75p)**

c) Găsiţi ecuaţia unei conice nedegenerate care este tangentă la d şi d'. **(0,5p)**

2. În $\mathbb{R}^2$, fie conica

$$\Gamma : 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 2x - 2y - 3 = 0$$

a) Aflaţi natura conicei Γ. Precizaţi dacă este nedegenerată şi dacă are centru unic. **(0,5p)**

b) Aduceţi Γ la o formă canonică şi precizaţi reperul ortonormat pozitiv orientat în care are această formă. **(1p)**

3. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie cercurile neconcentrice

$$\mathcal{C}_1 : f_1(x, y) = x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$\mathcal{C}_2 : f_2(x, y) = x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

şi d axa lor radicală.

Considerăm mulţimea de conice

$$\mathcal{F} = \{\Gamma_{\alpha_1,\alpha_2} : \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0\}.$$

a) Demonstraţi că $d \in \mathcal{F}$ şi este singura dreaptă din $\mathcal{F}$. **(0,25p)**

b) Demonstraţi că cercurile din $\mathcal{F}$, diferite de $\mathcal{C}_1$, au axa radicală cu $\mathcal{C}_1$ dreapta d. **(0,75p)**

c) Demonstraţi că dacă $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B\}$, atunci cercurile din $\mathcal{F}$ sunt exact cercurile ce trec prin punctele A şi B. **(0,25p)**

d) Demonstraţi că dacă $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, atunci cercurile din $\mathcal{F}$ sunt disjuncte două câte două. **(0,25p)**

4. Considerăm $\mathbb{R}^2$ planul euclidian.

a) Fie $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ o conică. Demonstraţi că dacă $A, B, C, D \in \Gamma$ sunt vârfurile unui paralelogram cu centru O, atunci O este şi centru al conicei Γ. **(1p)**

b) Demonstraţi că singura conică în care nu poate fi înscris un paralelogram (eventual degenerat) este parabola. **(0,5p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. Nota pe lucrare este minimul dintre suma punctajelor şi 10. Timp de lucru: 3 ore. Succes!
[2] Puteţi presupune un subpunct adevărat în subpunctele următoare, chiar dacă nu aţi reuşit să îl demonstraţi.