Examen la analiză matematică[1]
an I, sem. I - seria 10
22.01.2021

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. a) Fie $A = \left\{\frac{n+\sqrt{2}}{4n+2} : \quad n \in \mathbb{N}\right\} \cup ((-5,0] \cap \mathbb{Q})$ o submulţime a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Determinaţi interiorul, aderenţa, mulţimea punctelor de acumulare şi frontiera mulţimii A. Decideţi dacă mulţimea A este compactă sau conexă. Justificaţi!

b) Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{n+\sqrt{n^2-n+1}}\right).$$

Subiectul 2. a) Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{xn}{3n+1}\right)^n$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0,\infty)$.

b) Studiaţi convergenţa şirului $\left(\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n\right)_{n>0}$ şi calculaţi limita sa (în caz că aceasta există).

Subiectul 3. Considerăm funcţia $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2\sin 3x}{x}, & \text{dacă } x \in (0,\infty), \\ -6, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

i) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

ii) Studiaţi uniform continuitatea funcţiei f.

Subiectul 4. Considerăm şirul de funcţii $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^n(1-x)^n \sin x,$$

pentru orice $x \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

Subiectul 5. Fie $f_n, g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii definite prin

$$f_n(x) = \int_0^1 |x^n - t^n|\, dt, \text{pentru orice } x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N} \text{ şi}$$

,

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valoreaza 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!**

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{dacă } \ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x - x^2, & \text{dacă } \ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i) Determinaţi

$$\inf_{x\in[0,1]} f_n(x) \ \text{ şi } \ \sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$

ii) Determinaţi numărul $n \in \mathbb{N}$ pentru care funcţia g_n are cel puţin un punct în care este derivabilă.