Tutoriat 4

Def: O mulțime A s.n. inductivă dacă $\emptyset \in A$ și $(\forall)\, x\in A, x^+\in A$.

6) Axioma infinitului:

Există o mulțime infinită

Obs! $\mathcal{F}$ mulțime $\neq \emptyset$ ale cărei elemente sunt mulțimi inductive $\Rightarrow \bigcap \mathcal{F}$ inductivă.

În particular, x, y inductive $\Rightarrow x \cap y$ inductivă

Def: O mulțime inductivă s.n. minimal inductivă dacă $(\forall)\, B \subseteq A$, B inductivă $\Rightarrow B = A$.

Prop: Fie A minimal inductivă. Atunci $(\forall)$ B inductivă, avem $A \subseteq B$.

În particular, există cel mult o mulțime minimal inductivă.

Principiul inducției ($\mathbb{N}$ minimal inductivă)

Fie $A \subseteq \mathbb{N}$ a.î. $0 \in A$ și $(\forall)\, n \in A$ avem $n^+ \in A$.

Atunci $A = \mathbb{N}$.

Principiul inducției complete

Fie $A \subseteq \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ cu prop. că $(\forall)\, k \in \mathbb{N}$, $k < n$, avem $k \in A$, avem $n \in A$. Atunci $A = \mathbb{N}$.

Obs! $(\mathbb{N}, <)$ mulțime ordonată cu $<$
- tranzitivă
- ireflexivă

Deci $<$ relație de ordine strictă pe $\mathbb{N}$ și $\leq$ relație de ordine parțială pe $\mathbb{N}$.

Lemă! Fie $n, m \in \mathbb{N}$ cu $n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$.

Lemă: $(\forall)\, n, m \in \mathbb{N}$ cu $n < m \Rightarrow n^+ \leq m$.

Obs! Avem $\leq$ relație de ordine totală pe $\mathbb{N}$.

ȘIRURI:

Def: Fie A mulțime.
O familie care are imaginea inclusă în A și domeniul n (șir finit) sau $\mathbb{N}$ (șir infinit) s.n. șir A-valuat.
Not.: $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sau $(a_i)_{i<n}$.
Obs! $(\forall)$ șir A-valuat $\in \mathcal{P}(\mathbb{N}\times A)$.
$Seq(A) = \{(a_i)_i \mid (a_i)_i$ șir A-valuat finit$\}$.
$Seq_n(A) = \{(a_i)_{i<n} \mid (a_i)_{i<n}$ șir A-valuat finit de lung. $n\}$

Teorema recursiei:

Fie A o mulțime, $a\in A$, $g: A\times\mathbb{N}\longrightarrow A$.
Atunci $(\exists!)\ f:\mathbb{N}\longrightarrow A$ a.î. $f(0)=a$ și $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$, $f(n^+)=g(f(n),n)$.

Teorema recursiei complete:

Fie A o mulțime, $g: Seq(A)\longrightarrow A$. Atunci $(\exists!)\ f:\mathbb{N}\longrightarrow A$ a.î. $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$, $f(n)=g((f(i))_{i<n})$.

Teorema recursiei parametrizate:

Fie A, P mulțimi, $a: P\longrightarrow A$, $g: P\times A\times\mathbb{N}\longrightarrow A$.
Atunci $(\exists!)\ f: P\times\mathbb{N}\longrightarrow A$ a.î. $(\forall)\ p\in P$, $f(p,0)=a(p)$ și $(\forall)\ p\in P$ și $n\in\mathbb{N}$, $f(p,n^+)=g(p,f(p,n),n)$.

Def: Fie A mulțime. Dacă $n\in\mathbb{N}$, spunem că A are n elemente dacă $(\exists)$ o bijecție de la n la A.
Dacă $(\exists)\ n\in\mathbb{N}$ a.î. A are n elemente, spunem că A e finită.
Dacă A nu e finită, spunem că A e infinită.

Lemă: Un nr. nat. nu este în bijecție cu o parte strictă a sa.

Corolar:
- Dacă $m, n\in\mathbb{N}$, $n\neq m$, nu $\exists$ bij. între m și n.
- Funcția $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $f(n)=n^+$, bijectivă.

Deci $\mathbb{N}$ e infinită.

Prop: • O submulțime a unei mulțimi finite este finită.
• Dacă $f: A \to B$, A finită $\Rightarrow$ $f(A)$ finită
• Dacă A, B finite $\Rightarrow$ $A \cup B$ finită.
• Reuniunea unei familii finite de mulțimi finite este finită.
• Dacă A finită $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(A)$ finită.

Def: Două mulțimi s.n. echipotente : $A \sim B$ dacă $(\exists)$ $f: A \to B$ bij.

Prop: Fie A, B, C mulțimi. Atunci:
• $A \sim A$
• $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
• $A \sim B$ și $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Def: Fie A, B mulțimi. Avem $(|A| \leq |B|)$ sau $A \preceq B$ dacă $\exists$ $f: A \to B$ inj.

Prop: Fie A, B, C mulțimi. Atunci:
• $A \preceq B$ și $A \sim C$, atunci $C \preceq B$.
• $A \preceq B$ și $B \sim C$, atunci $A \preceq C$.

Prop: Fie A, B, C mulțimi. Atunci:
• $|A| \leq |A|$
• $|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

Teorema Cantor - Bernstein - Schröder

Dacă $X \preceq Y$ și $Y \preceq X$, atunci $X \sim Y$.

Lemă: Fie A, B, A_1 cu $A_1 \subseteq B \subseteq A$ și $A \sim A_1$. Atunci $A \sim B$.

Exerciții:

1) $f: A \longrightarrow B$, A finită $\Rightarrow f(A)$ finită

Sol: f funcție $\Rightarrow |A| = |f(A)| \Rightarrow f(A)$ finită.

2) A, B finite $\Rightarrow A \cup B$ finite

Sol: $\left.\begin{array}{l} |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \\ A, B \text{ finite} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B$ finite.

3) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ finită, știind că A_i finită $(\forall)\, i = \overline{1,n}$.

Sol: $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n\right| \overset{2)}{\leq} \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| \leq \ldots \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ finită.

4) A finită $\Rightarrow \mathcal{P}(A)$ finită

Sol: Fie $|A| = n$, atunci $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ evident finit.

5) $A \preceq B$ și $A \sim C \Rightarrow C \preceq B$.

Sol: $\left.\begin{array}{l} A \preceq B \Rightarrow (\exists)\, f: A \longrightarrow B \text{ inj.} \\ A \sim C \Rightarrow (\exists)\, g: A \longrightarrow C \text{ bij.} \Rightarrow (\exists)\, g^{-1}: C \longrightarrow A \text{ bij.} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f \circ g^{-1}: C \longrightarrow B$ inj.

6) $A \preceq B$ și $B \sim C \Rightarrow A \preceq C$

Sol: $\left.\begin{array}{l} A \preceq B \Rightarrow (\exists)\, f: A \longrightarrow B \text{ inj} \\ B \sim C \Rightarrow (\exists)\, g: B \longrightarrow C \text{ bij} \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists)\, g \circ f: A \longrightarrow C$ inj.

7) Dacă α, β cardinale cu $\alpha \leq \beta$ și $\beta \leq \alpha$, atunci $\alpha = \beta$.

Sol: Fie $|A| = \alpha$ și $|B| = \beta$. Atunci

$\left.\begin{array}{l} \alpha \leq \beta \Leftrightarrow (\exists)\, f: A \longrightarrow B \text{ inj} \\ \beta \leq \alpha \Leftrightarrow (\exists)\, g: B \longrightarrow A \text{ inj} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{-Bernstein}]{\text{Cantor-}} \alpha = \beta$.