EXAMEN
Teoria măsurii
28.01.2022

Exerciţiu 1 Fie $j \in \mathbb{N}^*$. Aplicaţi teorema de convergenţă monotonă şirului de funcţii

$$f_n(x) = x^j \ln(x) \chi_{[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]}(x) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

în spaţiul cu măsură $((0,1), \mathcal{L}\mathrm{eb}(0,1), \lambda)$.
Dezvoltând în serie funcţia $\frac{1}{1-x}$ calculaţi

$$\int_{(0,1)} \frac{\ln(x)}{1-x} d\lambda(x).$$

Exerciţiu 2 Fie $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, suprafaţa dată prin

$$\sigma(u,v) = (v, u^2, uv).$$

Determinaţi $\partial\sigma$ şi, folosind formula Stokes-Ampere, calculaţi

$$\int_\sigma (\mathrm{curl}(F) | ds)_{\mathbb{R}^3},$$

unde

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = (2y, z-x, z-y).$$

Exerciţiu 3 Fie $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea

$$|f(x,y)| \le e^{-(x+y)}, \quad \forall (x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty).$$

Arătaţi că f este Lebesgue integrabilă.