Extreme locale pentru functii de mai multe variabile

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punct $a \in A$ se numeste punct de maxim local (relativ) al functiei f daca exista vecinatate U a lui a astfel incat $f(x) \leq f(a)$ pentru orice $x \in U \cap A$ (adica daca exista $r > 0$ astfel incat $f(x) \leq f(a)$ pentru orice $x \in B(a, r) \cap A$).

Un punct $a \in A$ se numeste punct de minim local (relativ) al functiei f daca exista o vecinatate U al lui a astfel incat $f(x) \geq f(a)$ pentru orice $x \in U \cap A$, (adica daca exista $r > 0$ astfel incat $f(x) \geq f(a)$ pentru orice $x \in B(a, r) \cap A$). Punctele de maxim local si cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Fie D o multime deschisa si $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem ca $a \in D$ este punct critic (stationar) pentru f daca f este diferentiabila in a si $df(a) = 0$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa, $f : D \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^2 si $a \in D$. Matricea cu n linii si n coloane

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

se numeste matricea hessiana asociata functiei f in punctul a. Observam ca

$$d^2 f(a)(u) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot H_f(a) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

Teorema 1 (Fermat)**.** Fie D o multime deschisa si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o functie diferentiabila in $a \in D$. Daca a este punct de extrem local atunci a este punct critic, adica $df(a) = 0$

Demonstratie. Pentru simplitate vom demonstra teorema pentru o functie de doua variabile $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sa presupunem ca f este diferentiabila in punctul $a = (x_0, y_0) \in D$ si (x_0, y_0) este punct de maxim local. Trebuie sa aratam atunci $df(x_0, y_0) = 0$. Exista $r > 0$ astfel incat $B(a, r) \subset D$ si $f(x) \leq f(a)$ pentru orice $x \in B(a, r)$. Fie functia

$$\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(x_0 + t, y_0).$$

Pentru $t \in (-r, r)$ avem $\varphi(t) \leq \varphi(0)$ si deci 0 este punct de maxim local pentru φ. Deoarece

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

si f are derivabila partiala in raport cu x in punctul (x_0, y_0), fiind diferentiabila in acest punct, rezulta ca φ este derivabila in 0 si

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

Conform Teoremei lui Fermat pentru functii de o variabila reala rezulta ca $\varphi'(0) = 0$ si deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Similar se arata ca derivata partiala a lui f in raport cu y in punctul (x_0, y_0) este egala cu zero.

Observatie 2. Nu orice punct critic este punct de extrem local. Sa consideram functia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Observam ca funtia f este diferentiabila in orice punct. Punctul $(0, 0)$ este punct critic, deoarece

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Intrucat pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$f(a, 0) = a^2 > f(0, 0) \quad f(0, a) = -a^2 < f(0, 0).$$

rezulta ca in orice vecinatate a lui $(0, 0)$ functia ia atat valori strict mai mari cat si valori strict mai mici decat $f(0, 0)$ si in consecinta originea nu este punct de extrem local.

Propozitie 3. Fie D o multime deschisa si $f : D \subset \mathbb{R}^n$ o functie de clasa C^2. Daca $a \in D$ si

$$T_2(x) = f(a) + df(a)(x - a) + \frac{1}{2}d^2 f(a)(x - a)$$

este polinomul Taylor de grad 2 asociat functiei f in punctul a atunci

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_2(x)}{\|x - a\|^2} = 0.$$

Demonstratie. Vom face demonstratia pentru o functie de 2 variabile. Asadar, fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^2 si $(a, b) \in D$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Exista $r > 0$ astfel incat $B((a, b), r) \subset D$ si pentru orice $(x, y) \in B((a, b)$ avem

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\right| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right| < \varepsilon$$

Din Teorema 5, Curs 6 rezulta ca pentru orice $(x, y) \in B((a, b), r)$ exista $(\xi, \eta) \in B((a, b), r)$ astfel incat

$$f(x, y) = f(a, b) + df(a, b)(x - a) + d^2 f(\xi, \eta)(x - a, y - b).$$

Atunci pentru orice $(x,y) \in B((a,b),r)$

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| = |d^2 f(x,y)(x-a,y-b) - d^2 f(\xi,\eta)(x-a,y-b)|$$
$$\leq \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)\right| |x-a|^2 + 2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)\right| |(x-a)(y-b)| +$$
$$+ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta)\right| |y-b|^2$$
$$\leq (|x-a|^2 + |(x-a)(y-b)| + |y-b|^2) \cdot \varepsilon \leq 2[(x-a)^2 + (y-b)^2] \cdot \varepsilon \leq 2\|(x,y) - (a,b)\|^2 \cdot \varepsilon$$

si cu aceasta propozitia este demonstrata.
In mod similar se poate demonstra urmatorul rezultat.

Propozitie 4. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa, $f : D \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^k si $a \in D$. Atunci

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_k(x)}{\|x-a\|^k} = 0$$

unde $T_k(x)$ este polinomul Taylor de grad k asociat functiei f in punctul a.

Propozitie 5. (Conditii necesare de extrem local) Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa, $f : D \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^2 si $a \in D$. Daca a este punct de minim (maxim) local pentru f atunci $df(a) = 0$ si $d^2 f(a)$ este pozitiv (negativ) semidefinita.

Demonstratie. Presupunem ca a este punct de minim local al lui f. Aplicand teorema lui Fermat, rezulta ca $df(a) = 0$. Ramane de aratat $d^2 f(a)$ este pozitiv semidefinita. Fie $u \in \mathbb{R}^n$ si $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum a este punct de minim local si deoarece

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_2(x)}{\|x-a\|^2} = 0$$

exista $r > 0$ astfel incat $B(a,r) \subset D$ si pentru orice $x \in B(a,r) \setminus \{a\}$ $f(x) \geq f(a)$ si

$$\frac{|f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a)|}{\|x-a\|^2} < \varepsilon.$$

Rezulta de aici ca

$$0 \leq f(x) - f(a) < \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a) + \varepsilon \|x-a\|^2 \text{ pentru orice } x \in B(a,r). \qquad (1)$$

Fie $t > 0$ astfel incat $a + tu \in B(a,r)$. Din (1) rezulta ca

$$0 \leq \frac{1}{2} d^2 f(a)(tu) + \varepsilon t^2 \|u\|^2,$$

de unde

$$0 \leq \frac{1}{2} d^2 f(a)(u) + \varepsilon \|u\|^2.$$

Cum ε a fost ales arbitrar rezulta ca $d^2 f(a)(u) \geq 0$.

Lemma 6. Fie $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ o matrice simetrica de numere reale si $\varphi(u) = \sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j$ forma patratica asociata. Daca φ este pozitiv definita (adica $\varphi(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), atunci exista $\alpha > 0$ astfel incat

$$\varphi(x) \geq \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstratie. Fie $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ sfera unitate. Cum S este compacta (fiind inchisa si marginita) si φ este continua pe S exista un punct $x_0 \in \mathbb{R}^n$ astfel incat $\varphi(x_0) = \inf\{\varphi(x) : x \in S\}$. Fie $\alpha = \inf\{\varphi(x) : x \in S\}$. Cum $x_0 \neq 0$ rezulta ca $\varphi(x_0) > 0$ si deci $\varphi(x) \geq \alpha$ pentru orice $x \in S$. Fie $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Fie $\frac{x}{\|x\|} \in S$. Evident $\varphi(\frac{x}{\|x\|}) \geq \alpha$ de unde rezulta ca $\varphi(x) \geq \alpha\|x\|^2$. Asadar $\varphi(x) \geq \alpha\|x\|^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 7. (Conditii suficiente de extrem local) Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa, $f : D \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^2 si $a \in D$ un punct critic.

(1) Daca $d^2f(a)$ este pozitiv definita atunci a este un punct de minim local.

(2) Daca $d^2f(a)$ este negativ definita atunci a este un punct de maxim local.

(3) Daca $d^2f(a)$ este nedefinita (adica exista $u, v \in \mathbb{R}^n$ astfel incat $d^2f(a)(u) > 0$ si $d^2f(a)(v) < 0$) atunci a nu este punct de extrem local.

Demonstratie. (1) Deoarece $d^2f(a)$ este pozitiv definita, din Lema 6 rezulta ca exista $\alpha > 0$ astfel incat

$$d^2f(a)(u) \geq \alpha \cdot \|u\|^2 \text{ pentru orice } u \in \mathbb{R}^n.$$

Din Propozitia 3, exista $r > 0$ astfel incat $B(a, r) \subset D$ si pentru orice $x \in B(a, r)$, $x \neq a$ avem

$$\frac{|f(x) - f(a) - df(a)(x-a) - \frac{1}{2}d^2f(a)(x-a)|}{\|x-a\|^2} < \frac{\alpha}{4}$$

Tinand cont ca $df(a) = 0$ rezulta ca pentru orice $x \in B(a, r) \setminus \{a\}$ avem

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\geq \frac{1}{2}d^2f(a)(x-a) - \left| f(x) - f(a) - \frac{1}{2}d^2f(a)(x-a) \right| \\ &\geq \frac{\alpha}{2}\|x-a\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|x-a\|^2 = \frac{\alpha}{4}\|x-a\|^2 \end{aligned}$$

si deci a este punct de minim local. Pentru a demonstra (2) se procedeaza similar iar (3) rezulta din Propozitia 5.

Propozitie 8. (Conditii suficiente de extrem local pentru functii de doua variabile) Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ deschisa, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie de clasa C^2 si $(a, b) \in D$ un punct critic al lui f. Fie

$$H_f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

Notam $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ si $\Delta_2 = \det\, H_f(a,b)$.

(1) Daca $\Delta_1 > 0$ si $\Delta_2 > 0$ atunci (a,b) este punct de minim local;

(2) Daca $\Delta_1 < 0$ si $\Delta_2 > 0$ atunci (a,b) este punct de maxim local;

(3) Daca $\Delta_2 < 0$ atunci (a,b) nu este punct de extrem local

(4) Daca $\Delta_2 = 0$ nu putem trage nicio concluzie.

Demonstratie. Fie

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b),\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

Atunci observam ca

$$d^2 f(a,b)(u,v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 = A\left[\left(u + \frac{B}{A}v\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}v^2\right]$$

Sa presupunem ca $\Delta_2 = AC - B^2 > 0$. Atunci $d^2 f(a,b)$ este pozitiv definita daca $\Delta_1 = A > 0$ si negativ definita daca $\Delta_1 < 0$. Conform teoremei anterioare rezulta pentru $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ punctul (a,b) este punct de minim local si pentru $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ punctul (a,b) este punct de maxim local.

Daca $\Delta_2 < 0$ atunci $d^2 f(a,b)$ nu pastreaza semn constant si prin urmare (a,b) nu este punct de extrem.

Observatie 9. Sa consideram functiile $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^4$ si $g(x,y) = x^2 - y^4$. Observam ca $(0,0)$ este punct critic pentru ambele functii.

$$H_f(0,0) = H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci $\Delta_2 = 0$. Punctul $(0,0)$ este punct de minim global pentru f deoarece $f(x,y) \geq f(0,0) =$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pe de alta parte pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ avem

$$g(a,0) = a^2 > 0 = g(0,0) > g(0,a) = -a^4.$$

Asadar in orice vecinatate a lui $(0,0)$ functia g ia atat valori strict mai mari decat $g(0,0)$ cat si valori strict mai mici decat $g(0,0)$ si deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

Asadar, daca $\Delta_2 = 0$ nu putem trage nicio concluzie si pentru a determina natura punctului trebuie folosite alte metode.

Exemplu 10. Determinati punctele de extrem local ale functiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Solutie. Domeniul de definitie $\mathbb{R}^2$ al lui f este o multime deschisa si f este de clasa C^2. Prin urmare, punctele de extrem local se gasesc printre punctele stationare ale lui f. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12$$

Pentru a determina punctele critice rezolvam sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \text{adica} \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

Obtinem punctele critice $(1,2), (-1,-2), (2,1), (-2. -1)$. Deoarece

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6y$$

matricea hessiana este

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}.$$

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \ \ \Delta_2 < 0 \Rightarrow (1,2) \text{ nu este punct de extrem local}$$

$$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \ \ \Delta_2 < 0 \Rightarrow (-1,-2) \text{ nu este punct de extrem local}$$

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}, \ \ \Delta_1 = 12 > 0,\ \Delta_2 = 108 > 0 \Rightarrow (2,1) \text{ este punct de minim local}$$

$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}, \ \ \Delta_1 = -12 < 0,\ \Delta_2 = 108 > 0 \Rightarrow (-2,-1) \text{ este pct de maxim local}$$

Propozitie 11. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa, $f : D \to \mathbb{R}$ functie de clasa C^2 (adica admite derivate partiale de ordinul doi continue pe o multime deschisa D) si $a \in D$ un punct critic. Fie

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

unde $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

(1) Daca $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ atunci a este punct de minim local

(3) Daca $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$ atunci a este punct de maxim local

(3) Daca $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_n \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0$ dar exista j astfel incat $\Delta_j = 0$ atunci nu se poate trage nicio concluzie

(4) In celelalte cazuri nu este punct de extrem local al lui f.

Propozitie 12. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa, $f : D \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^2, $a \in D$ un punct critic si $H_f(a)$ matricea hessiana asociata lui f in a.

(1) Daca toate valorile proprii ale lui $H_f(a)$ sunt strict pozitive atunci a este punct de minim local

(2) Daca toate valorile proprii ale lui $H_f(a)$ sunt strict negative atunci a este punct de maxim local

(3) Daca $H_f(a)$ are o valoare proprie strict pozitiva si o valoare proprie strict negativa atunci a nu este punct de extrem local

(4) In orice alta situatie nu ne putem pronunta.

Exemplu 13. Determinati punctele de extrem local ale functiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 y + yz + 32x - z^2$

Solutie. Domeniul de definitie $\mathbb{R}^3$ al lui f este o multime deschisa si f este de clasa C^2. Prin urmare, punctele de extrem local se gasesc printre punctele critice ale lui f. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + 32, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y - 2x$$

Pentru a determina punctele critice rezolvam sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{adica} \quad \begin{cases} 2xy + 32 = 0 \\ x^2 + z = 0 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$$

Obtinem un singur punct critic $(2, -8, 4)$. Matricea hessiana este

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Deci

$$H_f(2,-8,4) = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ale matricei $A = H_f(2,-8,4)$ sunt radacinile polinomului

$$\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 15\lambda - 48,$$

Cum

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -18, \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 48$$

rezulta ca A are atat valori proprii strict pozitive cat si strict negative si deci $(2,-8,4)$ nu este punct de extrem local.