Data: 06 iulie 2022
Timp de lucru: 2h 30m
Punctaj total: 90p + 10p oficiu **Nume:** ______________________________________

Examen **Analiză complexă**[1]

Subiecte:

1. (a) (5 p) Determinaţi soluţiile $z \in \mathbb{C}$ ale ecuaţiei $z^2 + 2z + \mathrm{i} = 0$.

   (b) (5 p) Considerăm $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin
$$f(x + \mathrm{i}\, y) = (x^2 + x - y^2 - y) + \mathrm{i}(x + y + 2xy),$$
   pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Este f olomorfă pe $\mathbb{C}$? Justificaţi răspunsul!

   (c) (5 p) Daţi exemplu de o funcţie olomorfă f cu pol de ordin 3 în punctul i şi $\mathrm{res}(f, \mathrm{i}) \neq 0$.

   (d) (5 p) Reprezentaţi geometric imaginea prin funcţia $f(z) = e^z$ a mulţimii
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

   (e) (5 p) Demonstraţi că funcţia $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ este mărginită pe orice dreaptă verticală.

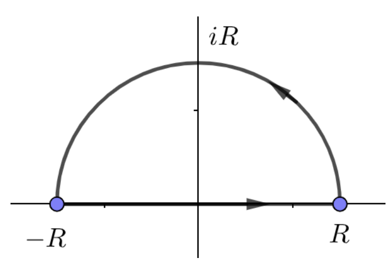
   (f) (5 p) Considerăm o funcţie olomorfă neconstantă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Un număr $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se numeşte perioadă a lui f dacă $f(z + \omega) = f(z)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Demonstraţi că orice mulţime mărginită de perioade ale lui f este finită.

2. (a) (10 p) Determinaţi seria Laurent (centrată în 0) asociată funcţiei $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}$ în coroana circulară $\mathcal{A} = \{2 < |z| < \infty\}$.

   (b) (10 p) Determinaţi câte dintre rădăcinile ecuaţiei $z^4 + 6z + 3 = 0$ se află în coroana circulară $\mathcal{A} = \{1 < |z| < 2\}$.

3. (a) (10 p) Considerăm funcţia olomorfă
$$f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}\, az}}{z^4 + 5z^2 + 4}.$$
   Determinaţi polii lui f şi calculaţi reziduurile lui f în polii care se află în semiplanul superior.

   (b) (10 p) Calculaţi
$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^4 + 5x^2 + 4} dx,$$
   folosind funcţia olomorfă f definită la punctul (a) şi conturul de integrare din desenul de mai jos:



[1] Subiectele continuă pe verso!

4. (10 p) Descrieţi cum putem construi o aplicaţie conformă şi bijectivă între semi-banda verticală $\mathscr{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1 \text{ şi } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ şi semiplanul superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

5. (10 p) Demonstraţi că dacă funcţia olomorfă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ are proprietatea că pentru orice $z_n \to \infty$, avem $f(z_n) \to \infty$, atunci f este polinomială.