Examen la TEORIA MĂSURII ŞI INTEGRĂRII [1]
an II, sem. I, grupele 201, 202, 221, 222
2.02.2021

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,2)}\frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}}d\lambda,$$

unde λ este măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$.

Subiectul 2. Considerăm mulţimile A, B, C definite după cum urmează:

$$A = \{(x,y)\in\ \mathbb{R}^2|\ x^2+y^2\leq 6y,\ y\leq 3\ \},$$
$$B = A\setminus(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}),$$
$$C = \{y\in\ \mathbb{R}|\ \text{există } x\in\mathbb{R} \text{ cu } (x,y)\in A\}.$$

Precizaţi care din mulţimile A, B, C este măsurabilă Lebesgue şi, in caz că există, calculaţi măsura Lebesgue a acestora.

Subiectul 3. Calculaţi integrala curbilinie următoare în două moduri (direct şi cu teorema lui Green):

$$I=\int_\gamma (x+1)dx+(xy+3)dy,$$

unde γ este conturul triunghiului OAB, $O(0,0)$, $A(4,4)$ şi $B(-2,2)$, parcurs în sens trigonometric.

Subiectul 4. Calculaţi volumul corpului obţinut prin intersecţia conurilor de ecuaţie $z=2+\sqrt{x^2+y^2}$ şi $z=6-\sqrt{x^2+y^2}$.

Subiectul 5. Cosiderăm $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Lebesgue (λ măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$ şi $\mathcal{M}_\lambda$ σ-algebra mulţimilor măsurabile Lebesgue din $\mathbb{R}$).

a) Demonstraţi că $\mu:\mathcal{M}_\lambda\longrightarrow[0,\infty]$, definită prin $\mu(A)=\int_A |f|\,d\lambda$ pentru orice $A\in\mathcal{M}_\lambda$, este o măsură finită.

b) Demonstraţi că pentru orice şir de mulţimi $(E_n)_{n\geq 0}\subseteq\mathcal{M}_\lambda$ cu proprietatea că $E_n\subseteq E_{n+1}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şirul $\left(\int_{E_n} f d\lambda\right)_n$ este convergent.

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect se noteaza se la 1 la 10. Rezolvările trebuie scanate şi trimise împreună cu subiectul primit sub forma unui singur fişier pdf in formularul Google corespunzător grupei dumneavoastră. Succes!**