Universitatea din Bucureşti 17 ianuarie 2022
Facultatea de Matematică şi Informatică

Analiză numerică şi Metode numerice
Examen – Matematică, Anul III, Grupa 301

INSTRUCŢIUNI

1. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
2. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
3. **TIMP DE LUCRU: 120 minute, i.e. 11:30–13:30.**
4. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email printr-un **Reply simplu** către adresa de la care aţi primit subiectele, sub forma unui fişier PDF denumit `301_MORARIU_MEDEEA.pdf`.
5. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **17 ianuarie 2021, orele 14:00.**

EX#1 Fie ecuaţia neliniară $f(x) \coloneqq x^2 - x - 2 = 0$, $x \in [1,3]$, şi funcţia $\phi : [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = \sqrt{x+2}$.

(a) Arătaţi că $x^* = 2$ este un punct fix pentru ϕ şi este o rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$.

(b) Arătaţi cum se obţine expresia funcţiei de punct fix ϕ pornind de la expresia funcţiei f.

(c) Generează funcţia de punct fix ϕ o metodă iterativă de punct fix convergentă către rădăcină $x^* = 2$ a ecuaţiei $f(x) = 0$? Justificaţi răspunsul.

EX#2 Fie $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

(a) Determinaţi polinomul de interpolare Hermite $H_3(x)$, $x \in [-1,1]$, asociat funcţiei f şi nodurilor de interpolare $x_0 = -1$ şi $x_1 = 1$.

(b) Calculaţi $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\underset{\cdot}{\mathrm{x}}$.

(c) Calculaţi $\displaystyle\int_{-1}^{1} H_3(x)\,\underset{\cdot}{\mathrm{x}}$.

(d) Calculaţi cuadratura Simpson asociată funcţiei f şi nodurilor $y_0 = -1$, $y_1 = 0$ şi $y_2 = 1$, i.e. $I_2(f)$.

EX#3 Fie funcţia pondere $w : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = 1$. Determinaţi cea mai bună aproximare polinomială $p_n \in \mathbb{P}_n$, $n = 0,1,2$, în norma $\|\cdot\|_{2,w}$ a funcţiei

$$f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} -1\,, & x \in (-1,0) \\ 0\,, & x = 0 \\ 1\,, & x \in (0,1)\,. \end{cases}$$

Morariu Medeea
301

Ex #1. $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$, $x \in [1, 3]$, $\Phi : [1,3] \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \sqrt{x+2}$

a) $x^* = 2$ - punct fix pt. Φ și răd a ec. $f(x) = 0$

$\Phi(2) = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow$ 2 este punct fix pt. Φ

$f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 4 - 4 = 0 \to$ 2 este răd a ec. $f(x) = 0$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{x+2}$

$x \in [1, 3] \Rightarrow x^2 > 0$, $x + 2 > 0$

$x \in [1, 3] \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = \sqrt{x+2}}_{\Phi(x)}$ $\to$ a căuta sol. ec. $f(x) = 0$ este echivalent cu a căuta punctele fixe ale funcției $\Phi(x) = \sqrt{x+2}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x) = x$.

c) Generează Φ met iterativă de punct fix converg către $x^* = 2$?

Verificăm ipotezele teoremei Brower

$\Phi(x) = \sqrt{x+2} \in C[1, 3]$

Φ este funcție crescătoare

$x \in [1, 3] \Rightarrow 1 \le x \le 3 \Rightarrow \sqrt{3} \le \sqrt{x+2} \le \sqrt{5} \Rightarrow \Phi(x) \in [\sqrt{3}, \sqrt{5}] \subset [1, 3]$, $\forall x \in [1, 3] \Rightarrow$

$\to \Phi([1, 3]) \subset [1, 3]$

Scanned with CamScanner

Am dem. la a) că $\Phi(2)=2$, deci $2 \in [1,3]$ este punct fix pentru Φ

$\Phi(x)=\sqrt{x+2} \Rightarrow$ este derivabilă pe $[1,3]$

$\Phi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}, \forall x \in (1,3)$

Φ' este f. descrescătoare

~~$x \in [1,3] \Rightarrow$~~ 12

$x \in (1,3) \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{x+2} < \sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} < \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} < \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi'(x) < \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \forall x \in (1,3)$

Aleg $K = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \in (0,1)$ și atunci $|\Phi'(x)| = \Phi'(x) \leq K$
$\forall x \in (a,b)$

Prin urmare, sunt verificate toate ipotezele teoremei Brouwer, deci putem aplica teorema de conv. care ne garantează că șirul generat prin metoda iterativă de punct fix e convergent către punctul fix al lui Φ, $x^* = 2$, care e și sol ec. $f(x)=0$.

Morariu Medeea
301

Ex #2 $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$

a) Determinăm $H_3(x)$, $x\in[-1,1]$, $x_0=-1$, $x_1=1$

$$f'(x)=\frac{-2}{(1+x^2)^2}\cdot 2x=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f(-1)=\frac{2}{1+(-1)^2}=1$$

$$f'(-1)=\frac{-4\cdot(-1)}{(1+(-1)^2)^2}=1$$

$$f(1)=\frac{2}{1+1^2}=1$$

$$f'(1)=\frac{-4\cdot 1}{(1+1^2)^2}=-1$$

$$L_{1,0}(x)=\frac{x-1}{-2}=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2} \qquad L_{1,0}'(x)=\frac{-1}{2}$$

$$L_{1,1}(x)=\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \qquad L_{1,1}'(x)=\frac{1}{2}$$

$$H_{1,0}(x)=\left(\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2(1+x+1)=\frac{1}{4}(1-x)^2(x+2)$$

$$H_{1,1}(x)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2\left[1-(x-1)\right]=\frac{1}{4}(x+1)^2(2-x)$$

$$K_{1,0}(x)=\left(\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2(x+1)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x+1)$$

$$K_{1,1}(x)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2(x-1)=\frac{1}{4}(x+1)^2(x-1)$$

$$H_3(x)=\frac{1}{4}(1-x)^2(x+2)+\frac{1}{4}(1-x)^2(x+1)+\frac{1}{4}(x+1)^2(2-x)-\frac{1}{4}(x+1)^2(x-1)=$$

$$1 = \frac{1}{4}(1-x)^2(2x+3) + \frac{1}{4}(x+1)^2(3-2x) = \frac{1}{4}\{(1-2x+x^2)(2x+3) +$$

$$+ (1+2x+x^2)(3-2x)\} = \frac{1}{4}\left((1+x^2)\cdot 6 + 2x(-4x)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(6x^2+6-8x^2) = \frac{1}{4}(-2x^2+6) = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow H_3(x) = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

Am folosit

$$H_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(H_{m,k}(x)\, f(x_k) + K_{m,k}\, f'(x_k)\right)$$

cu $H_{m,k} = [L_{m,k}(x)]^2 \left[1 - 2L'_{m,k}(x_k)(x-x_k)\right]$

$K_{m,k} = [L_{m,k}(x)]^2 (x-x_k)$, $k = \overline{0,m}$

pt. $m=1 \to H_3(x)$

Ex #2

b) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = 2\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \pi.$$

c) $$\int_{-1}^{1} H_3(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{-1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right)dx = \frac{-1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \frac{3}{2}x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3} + 3 = \frac{8}{3}$$

d) Cuadratura Simpson: $S_2(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

pt $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

Mosoriu Medeea
301

Aplicăm pt funcția noastră

$$\Rightarrow I_2(f) = \frac{1-(-1)}{6}\left(f(-1) + \underbrace{4f\left(\frac{-1+1}{2}\right)}_{4f(0)} + f(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + 4 \cdot \frac{2}{402} + 1\right) = \frac{1}{3} \cdot 10 = \frac{10}{3}$$

Ex #3. Fie funcția pondere $w: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $w(x) = 1$.
Cea mai bună aprox polin. $p_n^* \in \mathbb{P}_n$, $n = \overline{1,2}$ în norma $\|\cdot\|_{2,w}$

pt $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1,0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0,1) \end{cases}$

Folosim ~~polino~~ procedeul Gram-Schmidt pt. a det. polinoamele ortogonale în rap cu produsul scalar din $L^2_w(-1,1)$

$\{L_0, L_1, L_2\}$ ~~cu~~ - ne interesează doar acestea întrucât trebuie să det. $p_n^* \in \mathbb{P}_n$ pt $n \in \{0,1,2\}$.

$L_0(x) = 1 \quad \forall x \in (-1,1)$

$L_1(x) = x - a_1$

$$a_1 = \frac{\langle x, 1\rangle_w}{\langle 1, 1\rangle_w} = \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \frac{0}{2} = 0$$

$\Rightarrow L_1(x) = x$

$L_2(x) = (x - a_2) L_1(x) - b_2 L_0(x) = (x - a_2) \cdot x - b_2$

$$a_2 = \frac{\langle x^2, x\rangle_w}{\langle x, x\rangle_w} = \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = 0$$

$$b_2 = \frac{\langle x^2, 1\rangle_w}{\langle 1, 1\rangle_w} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow L_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Normalizăm acum:

$$\|L_0\|_{2,w}^2 = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2 \rightarrow \varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|L_1\|_{2,w}^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$$

$$\|L_2\|_{2,w}^2 = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx - \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{9} dx =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

$$\Rightarrow \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\, x^2 - \sqrt{\frac{5}{8}}$$

$$\langle f, \varphi_0\rangle_w = \int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{2}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{-1}{\sqrt{2}} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\langle f, \varphi_1\rangle_w = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x\, dx = \int_{-1}^{0} -\sqrt{\frac{3}{2}}\, x dx + \int_{0}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\, x dx =$$

6/8

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\langle f, \varphi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \left(\sqrt{\frac{45}{8}}\, x^2 - \sqrt{\frac{5}{8}}\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{\frac{5}{8}} - \sqrt{\frac{45}{8}}\, x^2\right) dx + \int_{0}^{1} \left(\sqrt{\frac{45}{8}}\, x^2 - \sqrt{\frac{5}{8}}\right) dx =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{8}} \left(\int_{-1}^{0} (1 - 3x^2)\, dx + \int_{0}^{1} (3x^2 - 1)\, dx \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{8}} \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 \right) = 0$$

$$p_0(x) = \langle f, \varphi_0 \rangle_w \cdot \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$p_1(x) = \langle f, \varphi_0 \rangle_w \varphi_0 + \langle f, \varphi_1 \rangle_w \varphi_1 = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$$

$$= 1 + \frac{3}{2} x$$

$$p_2(x) = \langle f, \varphi_0 \rangle_w \varphi_0 + \langle f, \varphi_1 \rangle_w \varphi_1 + \langle f, \varphi_2 \rangle_w \varphi_2 =$$

$$= 1 + \frac{3}{2} x.$$

$\Rightarrow$ din teorema de existență și unicitate a soluției problemei celei mai bune aproximări în $\|\cdot\|_{2,w}$

7/8

Obs: $\int_{-1}^{1} w f^2(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx = \int_{-1}^{0} (-1)^2 dx + \int_{0}^{1} 1^2 dx =$

$= \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 < \infty \Rightarrow f \in L_w^2(-1,1)$.

8/8