TEORIA MĂSURII

SEMINAR 4

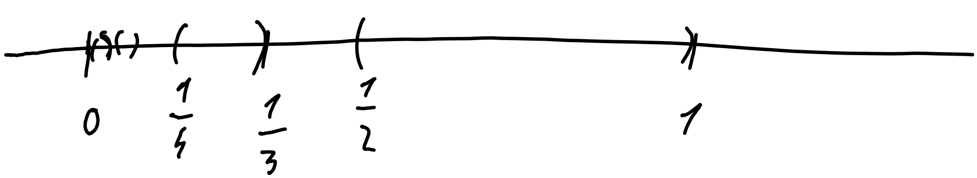
Propoziție

Fie D o mulțime deschisă în $\mathbb{R}$

Atunci $(\exists)$ $I_n = (a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n \in \overline{\mathbb{R}}$ intervale disjuncte a.î.

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

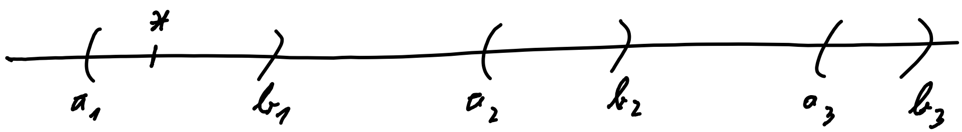
Ex: $I_n = \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$



Dem:

Considerăm relația „$\sim$" pe D

$$x \sim y \iff [x,y] \subseteq D \text{ sau } [y,x] \subseteq D$$

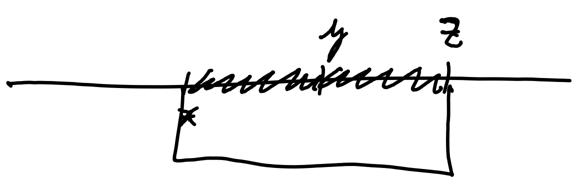


Temă de gândire:

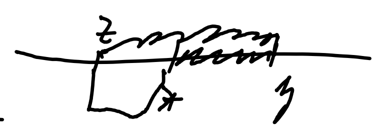
Dem. că mulțimile conexe din $\mathbb{R}$ sunt intervalele

„$\sim$" este relație de echivalență

tranzitivă



$\subseteq D$



$\subseteq D$

Notăm $\hat{x}$ clasa lui x

$$\mathcal{M} = \{ \hat{x} \mid x \in D \}$$

$$D = \bigcup_{\hat{x} \in \mathcal{M}} \hat{x}$$

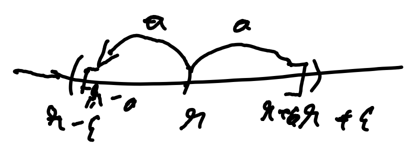
$\hat{x} \cap \hat{y} \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$

$\mathcal{M}$ partiție pentru D

Pentru $x \in D$, cum arată $\hat{x}$?

Vreau să arăt $\hat{x}$ = interval deschis.

Claim: $\begin{cases} \hat{x} = (i, s) \\ i = \inf \hat{x} \\ s = \sup \hat{x} \end{cases}$



Proof: "$\subseteq$" Fie $r \in \hat{x} \Rightarrow i \leq r \leq s$

$r \in \hat{x} \subseteq D \Rightarrow (\exists)\, \varepsilon > 0$ a.î.

$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subseteq D$

Fie $a \in (0, \varepsilon)$ $\quad [r-a, r] \subseteq D \Rightarrow (r-a) \sim r$

$[r, r+a] \subseteq D \Rightarrow (r+a) \sim r$

Dar $r \in \hat{x} \Rightarrow r \sim x$

Din tranzitivitate, de mai sus

$$\left.\begin{array}{l}(r-a) \sim x \\ (r+a) \sim x\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} r-a \in \hat{x} \\ r+a \in \hat{x}\end{array}$$

a era oarecare în $(0, \varepsilon)$,

deci $(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subseteq \hat{x}$

Presupunem că $i \in \hat{x}$.

De mai sus, $(\exists)\ \varepsilon > 0$

$(i-\varepsilon, i+\varepsilon) \in \hat{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow i - \frac{\varepsilon}{2} \in \hat{x}$

Contradicție cu $i = \inf \hat{x}$

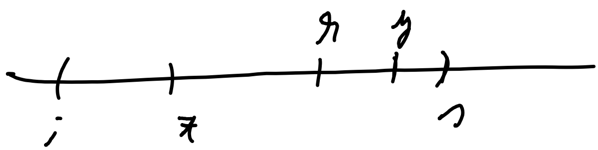
Rezultă $\hat{x} \subseteq (i, s)$

„$\supseteq$" Fie $r \in (i, s)$

Presupunem $r \notin \hat{x}$

$x \in \hat{x} \subseteq (i, s) \Rightarrow x \in (i, s)$

Fără a restrânge generalitatea, presupunem $x < r$



Deoarece $s = \sup \hat{x} \Rightarrow (\exists)\ y \in \hat{x}$ a.î. $r < y < s$

$y \in \hat{x} \Rightarrow x \sim y \Rightarrow [x, y] \subseteq D$

$x < r < y$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow [x, r] \subseteq [x, y] \subseteq D \Rightarrow$

$\Rightarrow r \sim x \Rightarrow r \in \hat{x}$ Contradicție

Prin urmare $\hat{x} = (i, s)$ $\square$ Claim

Ind. Răzvan
$a_{\hat{x}} = \inf \hat{x}$

Am obținut

$$D = \bigcup_{j \in M} (a_j, b_j)$$

M mulțime oarecare

$$\emptyset \neq (a_j, b_j) \cap (a_k, b_k) \iff$$

$$\iff k = j$$

Arăt M numărabilă

Dem: Fie $f : M \to \mathbb{Q}$ a.î.

$$f(j) = q_j \in (a_j, b_j) \cap \mathbb{Q}$$

f este injectivă, căci

$$f(j) = f(k) \Rightarrow q_j \in (a_j, b_j) \cap$$
$$\cap (a_k, b_k) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow j = k$$

Deci $|M| = |f(M)| \leq |\mathbb{Q}|$,

de unde $\mathcal{M}$ este cel mult numărabilă $\square$

Funcții măsurabile

Def <u>caz general</u>

$$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$$

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ spații măsurabile

f s.n. măsurabilă dacă $(\forall)\ B \in \mathcal{B}$

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Def. <u>curs.</u>

$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ măsurabilă

dacă

$$\{x \in X \mid f(x) < t\} \in \mathcal{A},$$

$$(\forall)\ t \in \mathbb{R}$$

Scop: $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

f măsurabilă ca în curs. $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

măsurabilă caz general.

Fie $f : X \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}((-\infty, t)) = \{x \in X \mid f(x) < t\} \in \mathcal{A}$$

Din Seminar 2, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\})$

Temă: Fie $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$,

cu $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(Y)$

Atunci

$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ măsurabilă (caz general)

$\Longleftrightarrow$

$$f^{-1}(G) \in \mathcal{A}, \ (\forall) G \in \mathcal{G}$$

Dem. lemei: „$\Rightarrow$" Evident!

„$\Leftarrow$"

Hint: $\mathcal{F} = \{ B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$

este σ-algebră (Temă)

Terminologie:

$f : X \to Y$

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \qquad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$

Spunem că f întoarce elemente din $\mathcal{B}$ în $\mathcal{A}$, dacă $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $(\forall) B \in \mathcal{B}$

f duce elem. din $\mathcal{A}$ în $\mathcal{B}$, dacă $f(A) \in \mathcal{B}$, $(\forall) A \in \mathcal{A}$

$f^{-1}(G) \in \mathcal{A}, (\forall) G \in \mathcal{G} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \\ \mathcal{F} \text{ este } \sigma\text{-alg.} \end{array}\right| \Rightarrow \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$,

de unde $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, (\forall) B \in \mathcal{B}$

$\square$ Lema

Aplicăm lema pt.

$\mathcal{G} = \{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ și

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{G})$

Remarcă $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{G}_1) = \sigma(\mathcal{D})$

$\mathcal{G}_1 = \{[t, \infty) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{D} = \{(a, b) \mid \underset{a<b}{a, b \in \mathbb{R}}\}$

Astfel, avem definiții echivalente pt. măsurabilitate:

$$\{x \in X \mid f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}, \ (\forall)\ t \in \mathbb{R}$$

$$\{x \in X \mid a < f(x) < b\} \in \mathcal{A}, (\forall)\ a < b$$

Suma a două funcții măsurabile e măsurabilă

$f, g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ măsurabile

Metoda 1

$$M_t = \{x \in X \mid (f+g)(x) < t\}$$

$(f+g)(x) < t \iff (\exists)\ r \in \mathbb{Q}$ a.î.

$f(x) < r$ și $g(x) < t - r$

"$\Leftarrow$" dar

"$\Rightarrow$"

$f(x) + g(x) < t \Rightarrow f(x) < t - g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists)\ r \in \big(f(x), t - g(x)\big) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < r$ și $g(x) < t - r$

$$M_t = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \underbrace{\left(\underbrace{\{x \in X \mid f(x) < r\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{x \in X \mid g(x) < t - r\}}_{\in \mathcal{A}}\right)}_{\in \mathcal{A}}$$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Q} \text{ numărabilă} \\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-algebră} \end{array}\right| \Rightarrow M_t \in \mathcal{A},\ (\forall)\, t \in \mathbb{R}$

Deci $f+g$ e măsurabilă.

Metoda 2

$$f, g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{măsurabile}$$

Fie $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^2 \arrow[dr, "\varphi(x,y) = x+y"] & \\
X \arrow[ur, "(f,g)"] \arrow[rr, "\varphi((f,g)(x)) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)"'] & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$(f,g)(x) = (f(x), g(x))$$

φ e continuă $\Rightarrow$ φ e măsurabilă

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{(-\infty, t) \times (-\infty, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\})$$

$$(f,g)^{-1}((-\infty, t) \times (-\infty, s)) =$$

$$= \{x \in X \mid (f,g)(x) \in (-\infty, t) \times (-\infty, s)\} =$$

$= \{x \in X \mid f(x) < t\} \cap \{x \in X \mid g(x) < s\} \in$

$\in \mathcal{A}$

Deci $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ măsurabilă.

În final, $f + g = \varphi \circ (f, g)$,

deci $f+g$ e măsurabilă,

fiind compunere de măsurabile.

Notă:

$$(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{C})$$

f, g măsurabile $\Rightarrow g \circ f$ măsurabilă

Dem: Fie $C \in \mathcal{C}$ $\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$

$(g \circ f)^{-1}(C) = \{x \in X \mid g(f(x)) \in C\}$

$= \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(C)\}$

$= \{x \in X \mid x \in f^{-1}(g^{-1}(C))\} = f^{-1}(g^{-1}(C))$

$$(g \circ f)^{-1}(C) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(C)}_{\in \mathcal{B}})}_{\in \mathcal{A}}$$

$\square$

Exercițiu: Fie $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ măsurabilă

Arătați că $M_\infty = \{f = \infty\} =$

$$= \{x \in X \mid f(x) = \infty\} \in \mathcal{A}$$

Soluție:

$$M_\infty = \{f = \infty\} = \{x \in X \mid f(x) > n, (\forall) n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X \mid f(x) > n\}}_{\in \mathcal{A}}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

Aplicație: $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ măsurabile

$$\{f < g\} := \{x \in X \mid f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}$$

Temă

Hint:

$$f(x) < g(x) \iff (\exists)\, r \in \mathbb{Q} \quad f(x) < r \text{ și } g(x) > r$$

Notație:

$$\{f < r\} = \{x \in X \mid f(x) < r\}$$

Temă: $f, g : X \to \mathbb{R}$ măsurabile

$f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ măsurabilă