SEMINAR 9

GEOMETRIE

Exc 1

$C_1: x^2+y^2+2x+4y+4=0$

$C_2: x^2+y^2-2x-2y-7=0$

$C_3: x^2+y^2+6x+5=0$

(a) Determinați centrele și razele lor. Demonstrați că centrele nu sunt coliniare

(b) Determinați axele radicale a oricare dintre cele 3 cercuri și punctul radical al celor 3 (punctul cu putere egală față de cele 3 cercuri).

Rezolvare:

$C_1: x^2+2x+1+y^2+4y+4-1=0$

$(x+1)^2+(y+2)^2=1^2 \Longrightarrow \begin{cases} \text{centrul}: (-1,-2) \\ \text{raza}: 1 \end{cases}$

$C_2: x^2-2x+1+y^2-2y+1-9=0$

$(x-1)^2+(y-1)^2=3^2 \Longrightarrow \begin{cases} \text{centrul}: (1,1) \\ \text{raza}: 3 \end{cases}$

$C_3: x^2+6x+9+y^2-4=0$

$(x+3)^2+y^2=2^2 \Longrightarrow \begin{cases} \text{centrul}: (-3,0) \\ \text{raza}: 2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1+1+6+3+2 = 11 \neq 0$$

deci centrele nu sunt coliniare

d_{12} = axa radicală a cercurilor C_1 și C_2.

REM: $C_1: x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0$

$C_2: x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0$

axa radicală $d_{12}: 2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0$

În cazul exc. dat:

$d_{12}: 2(1-(-1))x+2(2-(-1))y+4-(-7)=0$

$4x+6y+11=0$

$d_{23}: 2(-1-3)x+2(-1-0)y+(-7)-5=0$

$-8x-2y-12=0$

$4x+y+6=0$

$d_{13}: 2(1-3)x+2(2-0)y+4-5=0$

$-4x+4y-1=0$

$$d_{12}\cap d_{23}: \begin{cases} 4x+6y+11=0 \\ 4x+y+6=0 \end{cases}$$

$$5y+5=0 \Rightarrow \boxed{y=-1 \Rightarrow x=\frac{-5}{4}}. \quad P\left(-\frac{5}{4},-1\right)$$

Exc 2 $C: x^2+y^2+2x+2y=0$; $P(-2,-2)$, $Q(2,2)$. $\vec{u}=(2,1)$

(a) Determinați centrul și raza lui C.

Arătați că $P\in C$, $Q\in Ext(C)$

(b) Găsiți ec. tangentei în P la C

(c) Găsiți ec. tangentelor din Q la C și punctele de tangență

(d) Găsiți ec. tangentelor la C de direcție $\vec{u}$ și punctele de tangență

Rez.: (a) $C: x^2+2x+1+y^2+2y+1=2$

$$\underbrace{(x+1)^2+(y+1)^2=(\sqrt{2})^2}$$

centrul: $O=(-1,-1)$

raza: $r=\sqrt{2}$

$P(-2,-2)$

$(-2)^2+(-2)^2+2\cdot(-2)+2\cdot(-2)=0$ ✓ deci $P\in C$

$Q(2,2)$

$(2+1)^2+(2+1)^2=18>2=(\sqrt{2})^2 \Rightarrow Q\in Ext(C)$

(b) REM.: $C: x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

$P=(x_0,y_0)\in C$

ec. tangentei în P la C este

$t: x_0x+y_0y+a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0$

$P(-2,-2)$

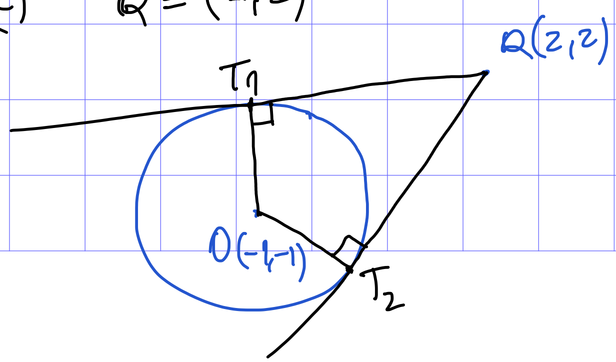
$C: x^2+y^2+2x+2y=0$

ec. tangentei în P la cerc: $t: -2x-2y+(x-2)+(y-2)=0$

$-x-y-4=0$

$x+y+4=0$

(c) $Q=(2,2)$



$$\boxed{T(x,y).\ T\in C \text{ și } OT\perp QT}$$

$$\begin{cases} T\in C \Leftrightarrow x^2+y^2+2x+2y=0 \\ OT\perp QT \Leftrightarrow \langle \vec{OT},\vec{QT}\rangle=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=0 \\ \langle (x+1,y+1),(x-2,y-2)\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=0 \\ x^2-x-2+y^2-y-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=0 \\ x^2+y^2-x-y-4=0 \end{cases}$$

$$3x+3y+4=0 \implies y=-x-\frac{4}{3}$$

înlocuim y în prima ec. a sistemului

$$x^2+\left(-x-\frac{4}{3}\right)^2+2x+2\left(-x-\frac{4}{3}\right)=0$$

$$x^2+x^2+\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+\cancel{2x}-\cancel{2x}-\frac{8}{3}=0$$

$$2x^2+\frac{8}{3}x-\frac{8}{9}=0 \quad /\cdot 9$$

$$18x^2+24x-8=0$$

$$9x^2+12x-4=0$$

$$(3x+2)^2-4-4=0$$

$$(3x+2)^2=8 \implies 3x+2=\pm 2\sqrt{2}$$

$$x=\frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{3}$$

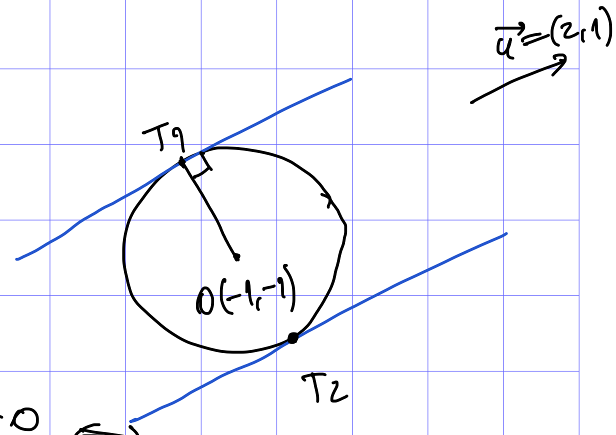
$$x_1=\frac{-2-2\sqrt{2}}{3} \implies y_1=-x_1-\frac{4}{3}=\frac{2+2\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}=\frac{-2+2\sqrt{2}}{3}$$

$$x_2=\frac{-2+2\sqrt{2}}{3} \implies y_2=-x_2-\frac{4}{3}=\frac{2-2\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}=\frac{-2-2\sqrt{2}}{3}$$

$T_1\left(\frac{-2-2\sqrt{2}}{3}, \frac{-2+2\sqrt{2}}{3}\right)$, $T_2\left(\frac{-2+2\sqrt{2}}{3}, \frac{-2-2\sqrt{2}}{3}\right)$ sunt punctele de tangență

$t_1 = QT_1 : \dfrac{x-2}{\frac{-2-2\sqrt{2}}{3}-2} = \dfrac{y-2}{\frac{-2+2\sqrt{2}}{3}-2}$ .... calcule ...

Similar determinăm și t_2.



(d) $\vec{u} = (2,1)$

$C: x^2+y^2+2x+2y=0$

$T(x,y) \in C.$

$\vec{OT} \perp \vec{u} \iff \langle (x+1, y+1), (2,1) \rangle = 0 \iff 2x+y+3=0$

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=0 \\ 2x+y+3=0 \end{cases} \qquad y = -2x-3$$

$$x^2 + (-2x-3)^2 + 2x + 2(-2x-3) = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 12x + 9 + 2x - 4x - 6 = 0$$

$$5x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$5(x^2+2x+1) - 5 + 3 = 0$$

$$5(x+1)^2 = 2$$

$$(x+1)^2 = \frac{2}{5} \implies x+1 = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$x_1 = -1-\sqrt{\frac{2}{5}} \implies y_1 = 2+2\sqrt{\frac{2}{5}} - 3 = -1+2\sqrt{\frac{2}{5}}$

$T_1\left(-1-\sqrt{\frac{2}{5}}, -1+2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

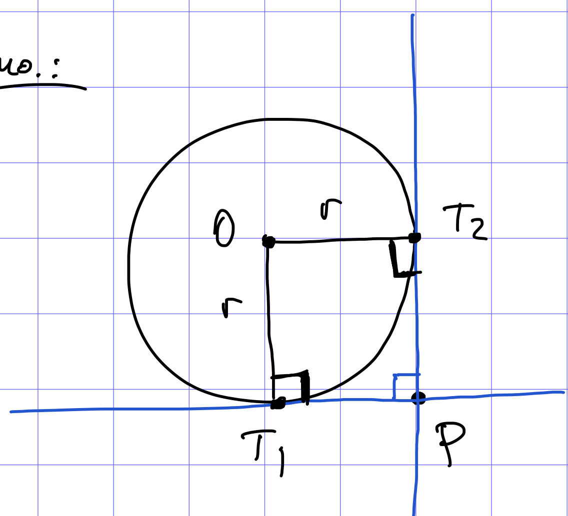
$x_2 = -1+\sqrt{\frac{2}{5}} \implies y_1 = 2-2\sqrt{\frac{2}{5}} - 3 = -1-2\sqrt{\frac{2}{5}}$

$T_2\left(-1+\sqrt{\frac{2}{5}}, -1-2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

$$t_1: \frac{x-\left(-1-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)}{2} = \frac{y-\left(-1+2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)}{1}$$ .... la fel t_2 ...

Exc 3 Demonstrați că locul geometric al punctelor exterioare unui cerc de rază r din care tangentele la cerc sunt $\perp$ este un cerc de rază $r\sqrt{2}$.

Demo.:



P = punctul din care ducem tangentele
O = centrul cercului
T_1, T_2 punctele de tangență.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Avem P a.î. tangentele la cerc sunt $\perp$ și vrem să demonstrăm că $OP = r\sqrt{2}$.

$OT_1 = OT_2 = r$

$T_1P \perp T_2P$

De asemenea, $OT_2 \perp T_2P$ și $OT_1 \perp T_1P$ $\Longrightarrow$ OT_1PT_2 = dreptunghi

$\Downarrow$

OT_1PT_2 pătrat

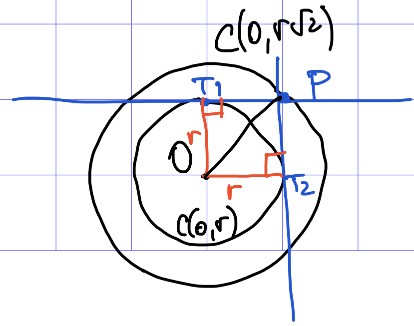
$\Downarrow$

$OP = r\sqrt{2}$

deci $P \in C(O, r\sqrt{2})$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Considerăm $P \in C(O, r\sqrt{2})$

Vrem să arătăm că tangentele din P la $C(O, r)$ sunt perpendiculare



Vrem să arătăm că $PT_1 \perp PT_2$.

$OT_1 = OT_2 = r$
$OP = r\cdot\sqrt{2}$

În plus, $PT_1 = PT_2$

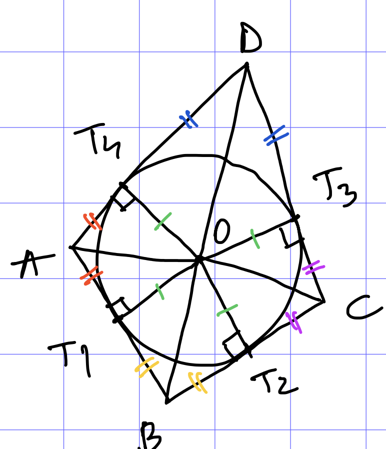
$$\left.\begin{array}{l}\Delta OPT_1 \text{ dreptunghic} \\ OT_1 = r,\quad OP = r\sqrt{2}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Pitagora}]{\text{Th.}} T_1P = \sqrt{(r\sqrt{2})^2 - r^2} = r$$

Similar, $T_2P = r$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Delta OPT_1 \text{ isoscel} \\ \text{dreptunghic}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{OPT_1} = 45^\circ \\ \text{La fel, } \widehat{OPT_2} = 45^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow T_1P \perp T_2P$$

Exc 4 Demonstrați că dacă un patrulater convex cu laturile a, b, c, d este circumscris unui cerc (are un cerc înscris), atunci $a + c = b + d$.

Demo.:



$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$

$OT_1 = OT_2 = OT_3 = OT_4 = r$ = raza cercului

$\Delta DT_4O \equiv \Delta DT_3O$

(dreptunghice, OD = ipotenuza comună, $OT_3 = OT_4$)

Deci $DT_4 = DT_3$

Similar, vom obține $AT_1 = AT_4$, $BT_1 = BT_2$, $CT_2 = CT_3$

$a + c = AB + CD = AT_1 + T_1B + CT_3 + T_3D$

$= AT_4 + BT_2 + CT_2 + T_4D$

$= AT_4 + T_4D + BT_2 + T_2C$

$= AD + BC$

$= d + b = b + d$ ✓

Exc 5 $\mathcal{E}: \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

(a) Aflați lungimile semiaxelor majoră și minoră a, b excentricitatea e și focarele

(b) Aflați ec. dreptelor directoare ale elipsei

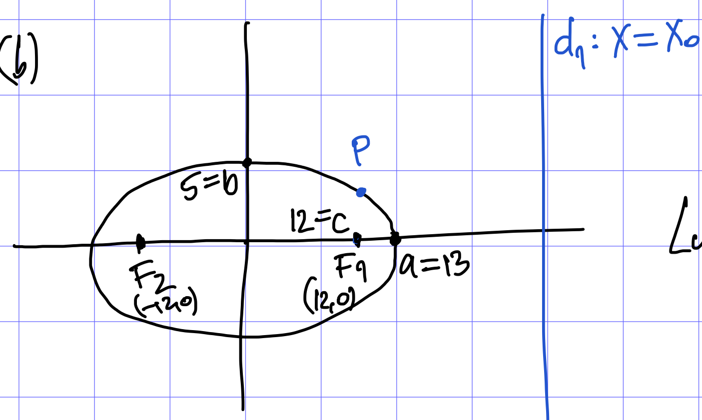
(c) Verificați că $P\left(\frac{13\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) \in \mathcal{E}$ și scrieți ec. tangentei în P la elipsă.

Rez.:

(a) $\mathcal{E}: \frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} a = 13, \ b = 5 \\ e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \\ c = 12 \ \left(= \sqrt{a^2 - b^2}\right) \end{cases}$

Focarele sunt: $(12, 0)$, $(-12, 0)$

(b)



$$\frac{dist(P, F_1)}{dist(P, d_1)} = const = e = \frac{12}{13}$$

Luăm $P \in Ox$, $P \in \mathcal{E}$, $P = (13, 0)$

$dist(P, F_1) = 1$

$dist(P, d_1) = X_0 - 13$

Deci $\frac{1}{X_0 - 13} = \frac{12}{13} \Longrightarrow X_0 = \frac{13}{12} + 13 = \frac{169}{12}$

$d_1: X = \frac{169}{12}$;

Analog (sau datorită simetriei) $d_2 : x = -\frac{169}{12}$.

(c) $$\frac{\left(\frac{13\sqrt{3}}{2}\right)^2}{13^2} + \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{5^2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

adică $P \in \mathcal{E}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E} : \frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \\ \mathcal{E} \ni P = \left(\frac{13\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow t : \frac{x \cdot \frac{13\sqrt{3}}{2}}{13^2} + \frac{y \cdot \frac{5}{2}}{5^2} = 1$$

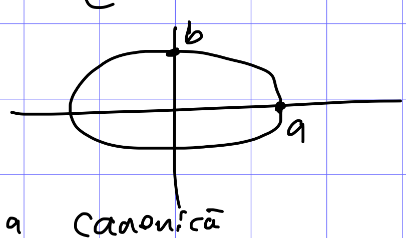
$$t : \frac{\sqrt{3}x}{2 \cdot 13} + \frac{y}{2 \cdot 5} = 1$$

$$t : \frac{\sqrt{3}x}{26} + \frac{y}{10} = 1 .$$

Exc 6 $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Este $\mathcal{E}$ în formă canonică?

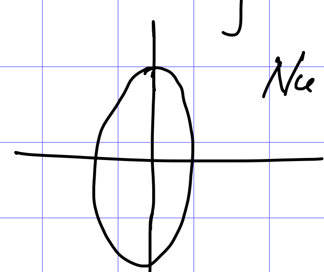
Aflați semiaxele a, b și excentricitatea.

Rez.: [forma canonică: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b$]



forma canonică

$\mathcal{E}$:



Nu este în forma canonică

Semiaxa majoră nu e pe Ox

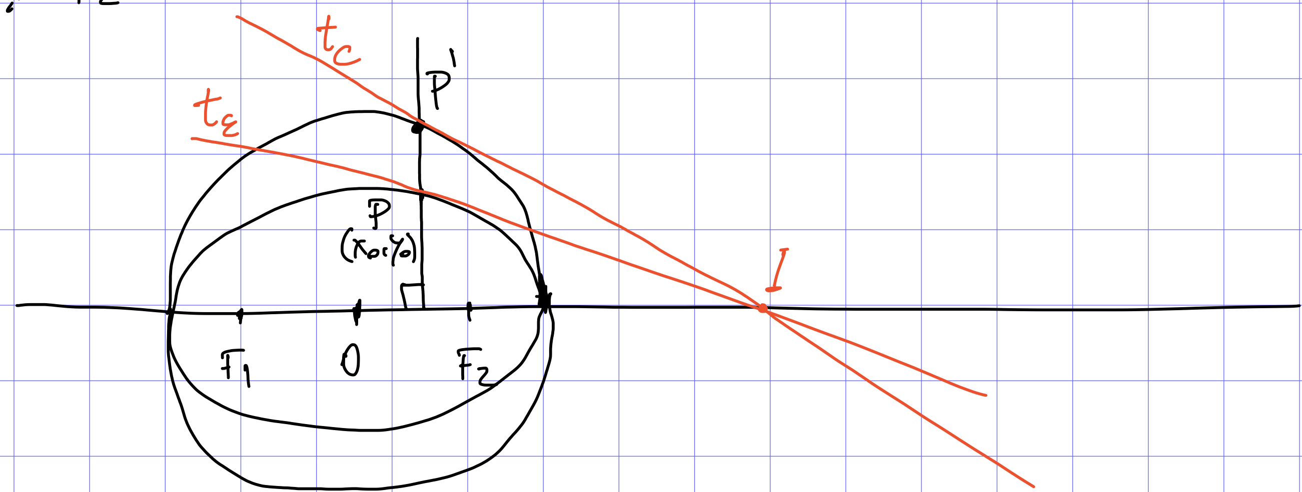
Semiaxele pentru $\mathcal{E}$: majoră: $a = 3$

$b = 2$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} .$$

Exc 7 $\mathcal{E}$ elipsă cu focarele $F_1 \neq F_2$. C = "cercul mare" al elipsei.
Fie $P \in \mathcal{E}$ și P' = inters. $\perp$ pe F_1F_2 cu cercul C, aflat pe aceeași parte a dreptei F_1F_2 ca și P

Demonstrați că tangenta în P la $\mathcal{E}$, tangenta în P' la C, și F_1F_2 sunt concurente



Trebuie să demonstrăm că $I \in F_1F_2$.

<u>Demo.:</u> Fixăm un sistem de coord. a.î. elipsa să fie în forma canonică:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \underline{a > b} \ (\text{deoarece } F_1 \neq F_2)$$

$$P \in \mathcal{E} \Rightarrow P(x_0, y_0) \text{ verifică } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_0 = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$$

$$\boxed{t_\mathcal{E}: \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1}$$

t_C : ? Ne trebuie coord. lui P'.

$$P'P \perp F_1F_2 = Ox \Rightarrow P' = (x_0, y_1)$$

$$P' = \left(x_0, \sqrt{a^2 - x_0^2}\right)$$

$$C:\ x^2+y^2=a^2$$

$$x_0^2+y_1^2=a^2 \Rightarrow y_1=\sqrt{a^2-x_0^2}$$

$$\boxed{t_C:\ x\cdot x_0+y\cdot\sqrt{a^2-x_0^2}=a^2}$$

Intersectăm t_ε și t_C și vrem să demo. că punctul de inters are ordonata egală cu 0.

$$t_\varepsilon \cap t_C:\ \begin{cases} \dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{y\cdot b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}}{b^2}=1 \\ xx_0+y\sqrt{a^2-x_0^2}=a^2 \end{cases}$$