CURS IV

ANALIZĂ

Spațiul $\mathbb{R}^p$

$p \in \mathbb{N}^*$

$\mathbb{R}^p \to x = (x_1, \dots, x_p)$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$y = (y_1, \dots, y_p)$ $\qquad \alpha x = \alpha \cdot (x_1, \dots, x_p) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_p)$

$x+y = (x_1+y_1, \dots, x_p+y_p)$

$\mathbb{R}^p$ este un spațiu vectorial real.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^p = p$. Baza canonică în $\mathbb{R}^p$: $\{e_1, \dots, e_p\}$

$e_i = (0, 0, \dots 0, \underset{i}{1}, 0 \dots 0)$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}^p$, $x = (x_1, \dots, x_p) = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$

Fie E un spațiu vectorial / $\mathbb{R}$. Se numește $\boxed{\text{NORMĂ}}$ pe spațiul vectorial E o aplicație $p: E \to \mathbb{R}$ care verifică relațiile:

1) $p(x) \geq 0$, $\forall x \in E$ și $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$

Not: $p(x) := \|x\|$ $\qquad$ ($\|\cdot\|$ notație pt. normă)

$(E, \|\cdot\|) \to$ s.n. SPAȚIU NORMAT.

Obs: Fie $(E, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Atunci $d_{\|\cdot\|} : E \times E \to \mathbb{R}$

$$d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\|$$

$d_{\|\cdot\|}$ este o distanță pe E

$\hookrightarrow$ s.n. DISTANȚA ASOCIATĂ NORMEI $\|\cdot\|$

$(E, \|\cdot\|)$ spațiu normat $\to (E, d_{\|\cdot\|})$ spațiu metric $\to (E, \mathcal{G}_{d_{\|\cdot\|}})$ sp. topologic

$(E, \tau_{d_{\|\cdot\|}}) \to$ topologia asociată normei

Obs: Fie E spațiu vectorial. Nu orice distanță pe E provin[e] dintr-o normă.

Def: Fie $X \neq \emptyset$ s.n. DISTANȚĂ (METRICĂ) pe X o aplicație $d: X \times X \to$ [...] cu proprietățile:

i) $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X$ și $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x,y,z \in X$

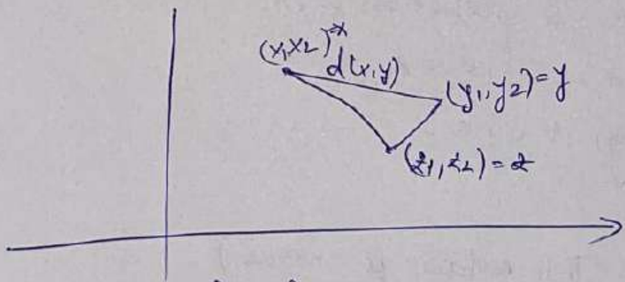
• $(X, d) \Rightarrow$ spațiu metric

Exemple: 1) $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$d(x,y) = |x-y|, \forall x,y \in \mathbb{R}$ distanță pe $\mathbb{R}$

2) $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



Exemplu: $d: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

① d distanță pe $\mathbb{R}^p$

② d nu provine dintr-o normă.

$x \neq y, x,y \in \mathbb{R}^p \Rightarrow d(x,y) = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, d(\alpha x, \alpha y) = 1$

Pp. că $\exists\ p: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ normă pe $\mathbb{R}^p$ a.î. $d(x,y) = p(x-y) \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x-y) = 1 \cdot \forall x \neq y$

$\Rightarrow p(\alpha x - \alpha y) = 1, \forall \alpha \neq 0.$

Dar $p(\alpha x - \alpha y) = p(\alpha(x-y)) =$
$= |\alpha| p(x-y)$. ↯

Fie d o distanță pe E (E spațiu vectorial) a.î.

$$\begin{cases} \bullet\ d(x+z, y+z) = d(x,y), \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^p \\ \bullet\ d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x,y), \ \forall\, x,y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Atunci există o normă $\|\cdot\|$ pe E a.î. $d = d_{\|\cdot\|}$

$(\|x\| := d(x,0), \ \forall\, x \in E)$

Exemple de norme:

① $E = \mathbb{R}$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = |x|$ → normă pe $\mathbb{R}$

② $E = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|_{(2)} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $\quad \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (norma euclidiană)

③ $E = \mathbb{R}^p$, $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $\quad \|(x_1, \dots, x_p)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}$ (norma euclidiană)

- $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\|(x_1, \dots, x_p)\|_\infty := \max |x_i|$, $i = \overline{1,p}$
- $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\|(x_1, \dots, x_p)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_p|$
- $q \in [1, \infty)$, $\|\cdot\|_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\|(x_1, \dots, x_p)\|_q := (|x_1|^q + \dots + |x_p|^q)^{1/q}$

→ norme pe $\mathbb{R}^p$.

④ $\mathcal{C}([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă} \}$

($\mathcal{C}([0,1])$ spațiu vectorial real).

$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$

→ normă pe $\mathcal{C}([0,1])$

$(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ → spațiu normat

Topologia lui $\mathbb{R}^p$

Fie $p \geq 1$, $\|\cdot\|$ normă pe $\mathbb{R}^p$

$(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ spațiu normat $\to d_{\|\cdot\|}$; $\tau_{d_{\|\cdot\|}}$

Fie $a \in \mathbb{R}^p$, $r > 0$

$B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^p \mid \underline{\|x-a\|} < r\} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \underline{d(x,a)} < r\}$

$\to$ bila deschisă de centru a și rază r

$\overline{B}(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^p \mid \underline{\|x-a\|} \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \underline{d(x,a)} \leq r\}$.

$\to$ bila ÎNCHISĂ de centru a și rază r

Fie $G \subseteq \mathbb{R}^p$

Spunem că G este deschisă dacă: $\forall x \in G, \exists r > 0$ a.î. $x \in B(x, r) \subseteq G$

$\tau_{\|\cdot\|} = \tau_{d_{\|\cdot\|}} = \{G \subseteq \mathbb{R}^p \mid G \text{ deschisă}\} \cup \{\emptyset\} = \{G \subseteq \mathbb{R}^p \mid \forall x \in G, \exists r_x > 0 \text{ a.î. } B(x, r_x) \subseteq G\}$

$\downarrow$ topologie pe $\mathbb{R}^p$ (s.n. topologia asociată normei $\|\cdot\|$)

Obs: o bilă deschisă este mulțime deschisă. Fie $a \in \mathbb{R}^p, r > 0$

Arătăm că $B(a,r)$ este mulțime deschisă.

Fie $x \in B(a,r)$. Alegem $r > 0$ a.î. $r' = r - \|x-a\|$. Atunci $\forall y \in B(x, r')$ avem:

$d(y,a) \leq \underbrace{d(y,x)}_{< r' = r - \|x-a\|} + d(x,a) < r - \cancel{\|x-a\|} + \cancel{\|x-a\|} = r \Rightarrow \forall y \in B(x, r')$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow d(y,a) < r \Leftrightarrow y \in B(a,r)$.

Deci $B(x, r') \subseteq B(a,r)$

În $\mathbb{R}^2$: ①. $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|x_1, x_2\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$B((0,0), 1) = ??$

$B_{\|\cdot\|_2}((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (0,0)\| < 1\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$.

$((a,b),r) \to$ discul cu centru în (a,b) și raza r

② . $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$

$B_{\|\cdot\|_1}((\underbrace{0,0}_{a}),\underbrace{1}_{r}) - ??$

$$B_{\|\cdot\|_1}((0,0),1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(0,0)\|_1 < 1\} =$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_1 < 1\} =$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| < 1\}.$$

$(x,y)\in A \to \underbrace{(x,-y)}_{Ox}, \underbrace{(-x,y)}_{Oy}, \underbrace{(-x,-y)}_{(0,0)} \in A$

$x,y\geq 0 \quad x+y<1 \quad x+y=1$

③ . $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$

$B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0),1) = ?$

$$B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0),1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\}<1\} =$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1, |y|<1\} =$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(-1,1), y\in(-1,1)\} =$$
$$= (-1,1)\times(-1,1).$$

Obs: În $\mathbb{R}^p$, $\forall$ 2 norme generează aceeași topologie:
$\forall \|\cdot\|, \|\cdot\|'$ norme pe $\mathbb{R}^p \Rightarrow \tau_{\|\cdot\|'} = \tau_{\|\cdot\|}$

Def: Fie E sp. vectorial și $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ norme pe E. Spunem că $\|\cdot\|'$ și $\|\cdot\|$ sunt echivalente dacă $\exists \alpha,\beta\geq 0$ a.î. ~~$\alpha, \beta > 0$~~
$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|, \ \forall x\in E$

Obs: În $\mathbb{R}^p$, orice două norme sunt echivalente!

Prop: Fie E spațiu vectorial. Atunci sunt echivalente afirmațiile

1) $\dim E < \infty$
2) orice 2 norme sunt echivalente

Produsul scalar

Fie E sp. vectorial. O aplicație $\Psi: E \times E \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \Psi(x,y)$ s.n. PRODUS SCALAR pe E dacă:

i) Ψ este liniară în fiecare comp.

ii) $\Psi(x,y) = \Psi(y,x)$

iii) $\Psi(x,x) \geq 0$, $\forall x \in E$, $\Psi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

i) $(\Psi(\alpha x + \beta y, z)) = \alpha \Psi(x,z) + \beta \Psi(y,z)$

$(\Psi(x, \alpha y + \beta z)) = \alpha \Psi(x,y) + \beta \Psi(x,z)$ $\quad \forall x,y,z \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) $\Psi(x,y) = \Psi(y,x)$, $\forall x,y \in E$

$\left(E \text{ sp. vectorial} /_{\mathbb{R}} \to \Psi(x,y) = \overline{\Psi(y,x)} \right)$

iii) Dacă E sp. vectorial, Ψ produs scalar $\to \|x\| = \sqrt{\Psi(x,x)}$, $\forall x \in E$

$\|x\|$ – normă pe E (norma este asociată produsului scalar)

Notație: $\Psi(x,y) = \langle x,y \rangle = (x,y) = xy$ $\to$ „produsul scalar dintre x și y"

Exemplu: $E = \mathbb{R}^p$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ = produs scalar pe $\mathbb{R}^p$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$\langle x,y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p$ unde:

$$\begin{cases} x = (x_1, \dots, x_p) \\ y = (y_1, \dots, y_p) \end{cases}$$

$$\sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} = \|x\|_{(2)}$$

...norme sunt echivalente!

...Atunci sunt echivalente afirmațiile

Observații:

Fie $(E, \|\cdot\|)$ spațiu normat a.î. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(norma provine dintr-un produs scalar)

Atunci: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, $\forall x, y \in E$

$\rightarrow$ identitatea paralelogramului

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle +$$

$$+ \underbrace{\langle y, x\rangle}_{= \langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \quad (1)$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle -$$

$$- \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle \quad (2).$$

Din (1) și (2). $\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Obs: $(E, \|\cdot\|)$ sp. normat sunt echivalente

i) $\|\cdot\|$ verifică identitatea paralelogramului.

ii) $\|\cdot\|$ provine dintr-un produs scalar.

ii) $\rightarrow$ i) Mai sus.

i) $\rightarrow$ ii) Se definește $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$. . .

Prop: $\boxed{\text{INEGALITATEA CAUCHY – BUNIAKOWSKI – SCHWARTZ}}$

Fie $(E, \|\cdot\|)$ spațiu normat și $\langle\cdot,\cdot\rangle$ produs scalar a.î.
$\sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$, $\forall x \in E$

Atunci $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$

Demonstrație:

Pt. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$

$$\|x - \alpha y\|^2 \geq 0 \Leftrightarrow \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle x, x - \alpha y\rangle - \alpha\langle y, x - \alpha y\rangle \geq 0. \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\langle x, x\rangle - \alpha\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle \geq 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\|y\|^2 - 2\alpha\langle x, y\rangle + \|x\|^2 \geq 0 \ ; \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow 4(\langle x,y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$

$$(\langle x,y\rangle)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

Obs: Egalitatea are loc dacă $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $x = \alpha y$.

Șiruri convergente.

Funcții continue.

Def: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^p$. Spunem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent dc. $\exists\, a \in \mathbb{R}^p$ a.î. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$ avem $\underbrace{\|x_n - a\| < \varepsilon}_{d_{\|\cdot\|}(x_n, a)}$

Scriem $\lim\limits_n x_n = a$

$(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^p \Rightarrow x_n = (x_1^n, \dots, x_p^n) \quad \forall n \geq 1$

$$\begin{array}{lll} x_1 = x_1^1, \dots, x_p^1 & & (x_1^n)_{n\geq 1} \\ x_2 = x_1^2, \dots, x_p^2 & & (x_2^n)_{n\geq 1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n = x_1^n, \dots, x_p^n & & (x_p^n)_{n\geq 1} \\ \vdots & & \end{array}$$

$\lim\limits_n x_n = a = (a_1 \dots a_p) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\|x_n - a\| < \varepsilon$.

$$\|x_n - a\| = \|(x_1^n \dots x_p^n) - (a_1 \dots a_p)\| =$$
$$= \|(x_1^n - a_1, x_2^n - a_2, \dots, x_p^n - a_p)\| =$$
$$= \sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + (x_2^n - a_2)^2 + \dots + (x_p^n - a_p)^2} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$
$$\geq (x_i^n - a_i)^2 = \| x_i^n - a_i \|.$$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, p\} : \forall\, \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|x_i^n - a_i| < \varepsilon$

①. Fie $(x_n)_{n\geq1} \subseteq \mathbb{R}^p$, $a \in \mathbb{R}^p$

$x_n = (x_1^n, \dots, x_p^n)$, $\forall n \geq 1$

$a = (a_1, \dots, a_p)$ Atunci: ①. $(x_n)_{n\geq1}$ este convergent $\iff$ $(x_i)^n$ este convergent, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

②. $\lim\limits_n x_n = a \iff \lim\limits_n x_i^n = a_i$ $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

③. $(x_n)_{n\geq1}$ este Cauchy $\iff$ $(x_i^n)_{n\geq1}$ este şir Cauchy $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

Exemple:

①. $(x_n)_{n\geq1} \subseteq \mathbb{R}^3$, $x_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{2n}{3n+2}, \frac{\sin n}{n}\right)$

$(x_n)_n$ convergent $\Rightarrow$ $\underbrace{(x_1^n)_n, (x_2^n)_n, (x_3^n)_n}_{\text{convergente}}$

$x_1^n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$x_2^n = \frac{2n}{3n+2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}$ $\Rightarrow (x_n)_{n\geq1}$ convergent

$x_3^n = \frac{\sin n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$x_n = \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{2n}{3n+2}, \frac{\sin n}{n}\right)}_{n\to\infty} \to (0, 2/3, 0)$

②. $(x_n)_{n\geq1} \subseteq \mathbb{R}^2$ $x_n = (n^2+1, 1/n)$

$n^2+1 \longrightarrow +\infty \Rightarrow (x_n)_n$ nu este convergentă

Prop. 2. Fie $(x_n)_{n\geq1} \subseteq \mathbb{R}^p$ şir Cauchy. Atunci $(x_n)_{n\geq1}$ este conv.

($\mathbb{R}^p$ este spaţiu (normat) (metric) complet)

Dem: Fie $(x_n)_{n\geq1} \subseteq \mathbb{R}^p$ şir Cauchy, $x_n = (x_1^n, \dots, x_p^n)$ $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow$ Prop. ①. $\underset{\subseteq\mathbb{R}}{(x_1^n)_{n\geq1}}, \underset{\subseteq\mathbb{R}}{(x_2^n)_{n\geq1}}, \dots, \underset{\subseteq\mathbb{R}}{(x_p^n)_{n\geq1}}$ sunt şiruri Cauchy

$\Rightarrow (x_1^n)_{n\geq 1}, \dots, (x_p^n)_{n\geq 1}$ sunt convergente

Def: Fie $(E, \|\cdot\|)$ spațiu normat. Spunem că $(E, \|\cdot\|)$ spațiu Banach, dacă $(E, d_{\|\cdot\|})$ este spațiu metric complet.

Obs: $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ spațiu Banach

Prop. 3. (Lema lui Cesaro) LEMA LUI CESARO

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^p$ șir mărginit.
Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ are un subșir convergent.

TEOREMA LUI HEINE - BOREL

Fie $K \subset \mathbb{R}^p$. Atunci sunt echivalente afirmațiile:

1) K compactă 2) K mărginită și închisă

Obs: $(E, \|\cdot\|)$ spațiu normat

K - compact $\Rightarrow$ K închisă și mărginită