Facultatea de Matematica-Informatica
Universitatea din Bucuresti

16 Mai 2018

Examen EDP II

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale
Tipul examinarii: Examen scris
Nume student: ______________________________
Grupa 321
Timp de lucru: 3 ore

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest examen contine 4 probleme (toate obligatorii).

Verificati foile cu subiecte fata-verso !

Examenul este individual. La sfarsitul examenului nu uitati sa aduceti foaia cu subiectele o data cu lucrarea scrisa pentru a le capsa impreuna. Astfel, corectura se va face mai usor.
Pentru elaborarea lucrarii scrise puteti folosi ca unic material ajutator o foaie format A4 care sa contina doar notiuni teoretice. Exercitiile rezolvate sunt excluse ca material ajutator.

Pentru redactare tineti cont de urmatoarele sugestii:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **indicati** acest lucru si explicati cum se poate aplica rezultatul respectiv.
- **Organizati-va munca** intr-un mod coerent pentru a avea toti de castigat ! Incercati ca la predarea lucrarii fiecare problema sa fie redactata in ordinea aparitiei pe foaia cu subiecte. Nu amestecati rezolvarile problemelor ! Ideal ar fi ca si subpunctele sa fie redactate in ordine. Daca nu stiti a rezolva un anumit subpunct scrieti numarul subpunctului si lasati liber.
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Barem: P1 (2p) + P2 (3.5p)+ P3 (2p) +P4 (2.5p) + 1p oficiu= **11p**.

Rezultatele le veti primi inainte de data de 26 mai (ultima zi de sesiune). Pentru orice nelamuriri scrieti-mi la adresa cristian.cazacu@fmi.unibuc.ro.

Problema 1. *(2 p) Pe domeniul* $\Omega := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ *se considera problema Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = x_1^2, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Consideram functionala energetica $E : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definita prin*

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega x_1^2 v dx. \tag{2}$$

1). Definiti o norma (convenabila) in $H_0^1(\Omega)$.

2). Aratati ca integralele din expresia lui E *sunt bine definite.*

3). Aratati ca E *este continua, coerciva si convexa pe* $H_0^1(\Omega)$.

4). Argumentati (folosind eventual MDCV) ca exista un punct de minim al lui E.
Definim solutia slaba pentru problema (1) *ca fiind o functie* $u \in H_0^1(\Omega)$ *ce satisface formularea variationala*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega x_1^2 v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3}$$

5). Aratati ca minimul lui E *este solutie slaba pentru* (1).

Problema 2. *(3.5 p) Fie functiile* $f(x) = e^{-(x+3)^2}$ *si* $g(x) = \chi_{(-2,2)}(x)$ *(functia caracteristica a intervalului* $(-2, 2)$*) definite pe* $\mathbb{R}$.

1). Calculati $\int_\mathbb{R} e^{-x^2} dx$.

2). Calculati $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx$, $n \geq 1$.

3). Calculati $\widehat{e^{-a\pi|x|^2}}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, *unde* $a > 0$ *este numar real fixat si* $n \in \mathbb{N}^\star$.

4). Calculati norma lui f *in* $H^1(\mathbb{R})$.

5). Calculati $\hat{f}, \hat{g}$.

6). Calculati $g * g$, $\widehat{g * g}$.

7). Calculati $\int_\mathbb{R} \frac{\sin x}{x} dx$.

8). Calculati $\int_\mathbb{R} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

9). Determinati $p \in \mathbb{R}$ *astfel incat* $\frac{\ln|x|}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^7)$.

Problema 3. *(2 p)*

1). Aratati ca $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^3(\mathbb{R})$, *unde* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *este spatiul Schwartz.*

2). Aratati ca $|x|^2 \ln|x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, *unde* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *este spatiul distributiilor temperate.*

3). Fie o functie $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ *a carei transformata Fourier este* $\hat{f}(\xi) = \frac{\sqrt[5]{|\xi|}}{|\xi|^4+1}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$. *Determinati* s *astfel incat* $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$.

4). Fie $u \in H^{1/4}(\mathbb{R}) \cap H^6(\mathbb{R})$ *astfel incat* $\|u\|_{H^{1/4}(\mathbb{R})} = 4$ *si* $\|u\|_{H^6(\mathbb{R})} = 5$*. Argumentati ca* $u \in H^4(\mathbb{R})$ *si gasiti o cota superioara pentru* $\|u\|_{H^4(\mathbb{R})}$.

Problema 4. *(2.5 p) Consideram ecuatia caldurii*

$$\begin{cases} v_t(t,x) - 4\Delta v(t,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{4}$$

cu data initiala $v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

1). Aplicati transformata Fourier in variabila x *si scrieti problema satisfacuta de* $\hat{v}(t,\xi)$.

2). Aratati ca $\hat{v}(t,\xi) = e^{-16\pi^2|\xi|^2 t}\hat{v_0}(\xi)$.

3). Fie "nucleul"

$$N_t(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{16t}}}{16\pi t}, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0.$$

Aratati ca pentru orice $t > 0$ *avem*

$$\widehat{N_t}(\xi) = e^{-16\pi^2|\xi|^2 t}.$$

(Folositi eventual rezultatele probate deja la Problema 1).

4). Aratati ca $v(t,x) = N_t * v_0(x)$ *pentru orice* $t > 0$ *si orice* $x \in \mathbb{R}^2$.

5). Determinati norma $\|N_t\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$*, pentru orice* $t > 0$ *si* $p \geq 1$.

6). Folosind inegalitatea lui Young si cei 2 itemi anteriori aratati ca pentru orice $p \in [1,\infty]$ *exista o constanta pozitiva* $C(p)$ *astfel incat*

$$\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C(p) t^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall t > 0.$$