EXAMEN LUCRARE SCRISĂ
ALGEBRĂ an 1, sem. 1
6-iun-21, orele 17:00-19:15

• Această lucrare scrisă constă din 9 subiecte.
• Fiecare subiect valorează un punct.
• Se acordă un punct din oficiu.
• Pentru a obţine întreg punctajul, explicaţi în detaliu rezolvările dvs.
• Subiectele de examen depind de ***codul de examen*** calculat astfel. Formăm şirul de litere: nume, prenume 1, prenume 2 etc (in ordinea din C.I.). Transformăm primele 9 litere în cifre după regula:
$a, f, k, p, u, z \mapsto 1$
$b, g, l, q, v \mapsto 2$
$c, h, m, r, w \mapsto 3$
$d, i, n, s, x \mapsto 4$
$e, j, o, t, y \mapsto 5$
obţinând astfel numerele c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9 care reprezintă codul dvs. de examen. Dacă sunt mai puţin de 9 litere se repetă secvenţa anterioară (nume, prenumele 1, apoi prenumele 2 etc).

Exemplu: "Sam-Bârnă Maria Ioana" dă şirul ***sambarnam*** care dă codul de examen: $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $c_3 = 3$, $c_4 = 2$, $c_5 = 1$, $c_6 = 3$, $c_7 = 4$, $c_8 = 1$, $c_9 = 3$.

Exemplu: "Ţîru Ion" dă şirul ***tiruionti*** care dă codul de examen: $c_1 = 5$, $c_2 = 4$, $c_3 = 3$, $c_4 = 1$, $c_5 = 4$, $c_6 = 5$, $c_7 = 4$, $c_8 = 5$, $c_9 = 4$.

• Scrieţi rezolvările cu pix/stilou cu pastă/cerneală albastră sau neagră pe foi de hârtie albă (preferabil neliniată) ca la un examen obişnuit. Incercaţi să obţineţi un contrast bun.
• Pe prima foaie scrieţi clar ***numele*** (ca in C.I.), ***grupa*** şi ***codul de examen***.
• Fotografiaţi lucrarea şi strângeţi toate pozele într-un fişier ***pdf*** purtând numele dvs. (e.g. Moraru.pdf).
• De la adresa dvs. "unibuc" (sau altă adresă), trimiteţi acest fişier prin email la ***ambele*** adrese (am schimbat Prof. Popescu cu Prof. Epure):

`tiberiu_dumitrescu2003@yahoo.com`
`mihai.epure@gmail.com`

Ora limită pentru trimitere **19:15** (data 6-iun-21).

Subiectele de examen

1. Fie $n = 4(c_1 + c_2) + 7$. Listaţi clasele de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in (c_3 + 3)\mathbb{Z}$ pe mulţimea

$$A = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n\}.$$

2. Determinaţi cea mai mică parte stabilă S a monoidului multiplicativ $\mathbb{Z}_{20}$ care conţine elementele $\widehat{c_4 + 1}$ şi $\widehat{c_5 + 6}$.

3. Considerăm permutarea

$$\sigma = (12...c_7 + 3)(12...c_8 + 4)(12...c_9 + 5)$$

e.g. $\sigma = (1234)(123456)(12345678)$ dacă $c_7 = 1$, $c_8 = 2$, $c_9 = 3$. Calculaţi:
(i) descompunerea lui σ în produs de cicluri disjuncte,
(ii) ordinul lui σ,
(iii) signatura lui σ,
(iv) o scriere a lui σ ca produs de traspoziţii.

4. Determinaţi elementele de ordin doi ale grupului produs direct $D_4 \times (\mathbb{Z}_{c_1+3}, +)$.

5. Fie $n = c_2 + 10$ şi fie funcţia

$$f : (\mathbb{Z}_n, +) \to (\mathbb{Z}_n, +) \text{ dată prin } f(x) = c_3 x, \ x \in \mathbb{Z}_n.$$

(i) Arătaţi că f este morfism de grupuri.
(ii) Calculaţi $ker(f)$ şi $Im(f)$.

6. Verificaţi dacă mulţimea

$$\{ac_4 + b(c_5 + c_6\sqrt{2}) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

este ideal în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

7. Fie $d = c_7 + 16$. Este $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ corp faţă de operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire ?

8. Rezolvaţi sistemul de congruenţe în $\mathbb{Z}$

$$x \equiv 7 \ (mod\ c_8 + 1), \quad x \equiv 11 \ (mod\ c_8 c_9 + c_9 + 1)$$

9. Există în inelul $\mathbb{Z}[X]$ ideale care nu pot fi generate de mai puţin de $c_1 + 5$ elemente ?