Subiect pentru examenul scris la algebră, grupa 101

Numele şi prenumele ....

Subiectul 1: 15 puncte

5 p a) Definește rezultantul a două polinoame.

5 p b) Enunță teorema lui Kronecker despre rangul unei matrice. Explică toate noțiunile care apar în enunț.

5 p c) Dă exemplu de sistem de generatori în **R**- spațiul vectorial $\mathbf{R}^2$, care nu este bază. Justifică exemplul dat.

Subiectul 2: 25 puncte

15 p a) Fie ***R***-spațiul vectorial ***C*** (spațiul numerelor complexe) și fie $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ funcția descrisa prin $f(z) = (12 - 5i) \cdot z + (4 + 3i) \cdot \bar{z}$. Demonstrează că *f* este endomorfism de spații vectoriale, apoi determină forma canonică Jordan a lui *f* și polinomul său minimal.

10 p b) Arată că următoarea matrice din $M_4(\boldsymbol{R})$ este inversabilă și calculează-i inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Subiectul 3: 20 puncte

5 p a) <u>În maxim 6 rânduri</u>, scrie ideile din demonstrația teoremei fundamentale a polinoamelor simetrice.

15 p b) Demonstrează că, dacă *V* este un spațiu vectorial de dimensiune finită, atunci spațiul dual V^* este izomorf cu *V.*

Subiectul 4: 20 puncte

5 p a) Fie V un spațiu vectorial de dimensiune finită peste corpul comutativ K. Considerăm propoziția: A: ”*Spațiile vectoriale* $\wedge^{p+q}(V)$ *și* $\wedge^p(\wedge^q(V))$ *sunt izomorfe.”* Decide dacă A este propoziție adevărată. Justifică răspunsul.

15 p b) Demonstrează că o matrice $A \in M_n(\boldsymbol{C})$ are același polinom caracteristic și același polinom minimal cu matricea transpusă A^τ. Arată apoi că matricele A și A^τ au aceeași formă canonică Jordan.

Este oare adevărat că, dacă două matrice $B, C \in M_n(\boldsymbol{C})$ au același polinom caracteristic și același polinom minimal, atunci ele au aceeași formă Jordan?