Elemente de analiză clasică

Temă (50p) [*,†]

Exercițiul 1. Descrieți modul de construcție a unei funcții armonice $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, ce verifică $h(i) = 1$, $h(0) = 0$, și $h(1) = 2$.

Exercițiul 2. Dați exemplu de functie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, astfel încât $\Delta h > 0$ pe $\mathbb{C}$, dar h^2 nu este subarmonică pe $\mathbb{C}$.

Exercițiul 3. Demonstrați că $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) = |x| + |y|$ este subarmonică.

Exercițiul 4. Fie $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polinom din $\mathbb{R}[X]$ pentru care $a_j \geq 0$ pentru orice $1 \leq j \leq n$. Demonstrați că $u(x, y) = P(x^2 + y^2)$ este subarmonică pe $\mathbb{R}^2$.

Exercițiul 5. Considerăm $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, șir de funcții continue.

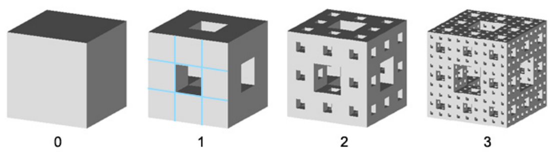
- Demonstrați că $f(x) := \inf_{n\geq 1} f_n(x)$ este superior semi-continuă
- Demonstrați printr-un exemplu că putem alege f_n astfel încât $F(x) := \sup_{n\geq 1} f_n(x)$ să nu fie superior semi-continuă.

Exercițiul 6. Considerăm $\Omega \subset \mathbb{C}$ mulțime deschisă și definim $\delta_\Omega(z) = \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) = \inf_{w\in\partial\Omega} |z - w|$. Demonstrați că $-\log \delta_\Omega(z)$ este subarmonică pe Ω.

Exercițiul 7. Calculați transformata Fourier a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-\pi x^2}$.

Exercițiul 8. Demonstrați că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\cosh x}$ este funcție Schwartz.

Exercițiul 9. Calculați dimensiunea Hausdorff pentru mulțimea fractală obținută prin procedeul descris în imaginea de mai jos:



Exercițiul 10. Construiți în $\mathbb{R}^2$ o mulțime cu dimensiunea Hausdorff egală cu ${}^{\ln 5}/_{\ln 3}$.

[*] Pentru fiecare exercițiu rezolvat corect se acordă 5p. Punctajul total este de 50p.
[†] Termen limită: 17 Ianuarie 2024.

ONUȚU RADU-CONSTANTIN
GRUPA 312

Temă

Exercițiul 1.:

$h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$; $h(i) = 1$; $h(0) = 0$; $h(1) = 2$

$$h - \text{armonică} \Leftrightarrow \begin{cases} h \in C^2(\mathbb{C}) \\ \Delta h = 0 \Leftrightarrow h_{xx} + h_{yy} = 0 \end{cases}$$

(1) $h(x + i y) = 1$; $x = 0$, $y = 1$

(2) $h(x + i \cdot y) = 0$; $x = 0$, $y = 0$

(3) $h(x + i \cdot y) = 2$; $x = 1$, $y = 0$

Observ că rezultatul depinde și de x, și de y.
Pt. $x = 0$, rezultatul depinde de y
Pt. $y = 0$, rezultatul depinde de x

Vreau să îl scriu pe $h(x + iy) = ax + by$
Din (3) $\Rightarrow a = 2$
Din (1) $\Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow h(x + iy) = 2x + y$

$$\text{Verificare: } \begin{cases} h(i) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ h(0) = 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ h(1) = 2 \cdot 1 + 0 = 2 \\ h \in C^2(\mathbb{C}) \\ h_{xx} + h_{yy} = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Exercițiul 2 : $h: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$; $\Delta h > 0$

Δh^2 - nu este subarmonică $\Leftrightarrow \Delta h^2 < 0$

$$\Delta h = h_{xx} + h_{yy} > 0$$

$$\Delta h^2 = (h^2)_{xx} + (h^2)_{yy} = 2 \cdot h_x^2 + 2 \cdot h \cdot h_{xx} + 2 \cdot h_y^2 + 2 \cdot h \cdot h_{yy}$$

$$\Delta h^2 = 2\Big(\underset{>0}{h_x^2} + \underset{>0}{h_y^2} + h\,(\underbrace{h_{xx} + h_{yy}}_{>0})\Big) < 0$$

$\Rightarrow h < 0$ $\left(\nexists\, h \text{ a.î.: } \begin{array}{l} \Delta h > 0 \\ h < 0 \\ \Delta h^2 < 0 \end{array}\right)$

Exercițiul 3 : $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = |x| + |y|$

$$u(x,y) = \begin{cases} x + y & ; x, y \geq 0 \\ x - y & ; x > 0, y < 0 \\ -x + y & ; x < 0, y > 0 \\ -x - y & ; x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$; $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} u \in C^2(\mathbb{R}^2) \\ \Delta u \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow u$ - subarmonică

Exercițiul 4: $u(x,y) = P(x^2+y^2)$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$u_{xx} = \frac{du}{dx}\left(2x P'(x^2+y^2)\right) = 2P'(x^2+y^2) + 4x^2 \cdot P''(x^2+y^2)$$

$$u_{yy} = 2P'(x^2+y^2) + 4y^2 \cdot P''(x^2+y^2)$$

$$\Delta u = 2P'(x^2+y^2) + 4x^2 \cdot P''(x^2+y^2) + 2P'(x^2+y^2) + 4y^2 \cdot P''(x^2+y^2)$$

$$= 4P'(x^2+y^2) + 4P''(x^2+y^2) \cdot \underbrace{(x^2+y^2)}_{\geq 0}$$

Din cerință: $a_j \geq 0$

$x^2+y^2 \geq 0$ $\Rightarrow P', P'' \geq 0$

$\Rightarrow \Delta u \geq 0$

Exercițiul 7: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^2 \cdot e^{-\pi x^2}$

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |x^2 \cdot e^{-\pi \cdot x^2}|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\pi \cdot x^2}\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-\pi \cdot x^2}\,dx =$$

$\pi x^2 = t \Rightarrow x^2 = \frac{t}{\pi} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{t}{\pi}}$; $x \in [0, \infty) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{t}{\pi}}$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$2\pi x\,dx = dt$ $\quad x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

$$dx = \frac{dt}{2\pi x}$$

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \cancel{2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\cancel{2}\pi} \cdot \sqrt{\frac{t}{\pi}} \cdot e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} < \infty$$

$$\Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$$

Fie $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\hat{f}$ - transformata Fourier,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\pi x^2} \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{\pi(2ix\cdot\xi - x^2)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{2\pi i x\cdot\xi - \pi x^2}\,dx$$

<u>Exercițiul 8</u>: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\cosh x}$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{\alpha} (D^{\beta} f)(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \right\}$$

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \lim_{|x| \to \infty} x^{\alpha} \cdot D^{\beta} f(x) = 0 \,;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$$

$$\beta = 0 \Rightarrow \lim_{|x| \to \infty} x^{\alpha} \cdot \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} = 0$$

$$\beta = 1 \Rightarrow \lim_{|x| \to \infty} x^{\alpha} \cdot \frac{(e^{-x} - e^{x}) \cdot 2}{(e^{x} + e^{-x})^2} = 0 \qquad \frac{e^{x}}{e^{2x}}$$

$$\beta = 2 \Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^{\alpha}\cdot\left(6 - e^{2x} - e^{-2x}\right)\cdot 2}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}} \overset{\frac{e^{2x}}{e^{3x}}}{=} 0$$

$\vdots$

$$\beta = n \Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^{\alpha}\cdot\left(e^{nx}+\dots\right)\cdot 2}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{n+1}} \overset{\frac{e^{nx}}{e^{(n+1)x}}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} x^{\alpha}\cdot D^{\beta} f(x) = 0;\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{N} \Rightarrow f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Exercițiul 9:

0: 27^0 - cuburi în total
20^0 - cub plin
0 - cuburi goale

1: 27^1 - cuburi în total
20^1 - cuburi pline
7 - cuburi goale

2: 27^2 - cuburi în total
20^2 - cuburi pline
$27\cdot 7+20\cdot 7 = 47\cdot 7$ cuburi goale

3: 27^3 - cuburi în total
20^3 - cuburi pline
... - cuburi goale

$\vdots$

n: ... - ...
20^n - cuburi pline
... - ...

0: Un singur cub, nu se împarte deloc $= 1$

1: Cubul se împarte pe înălțime în 3 alte cuburi $= \frac{1}{3}$

2: ... $= \frac{1}{9}$

3: ... $= \frac{1}{27}$

$\vdots$

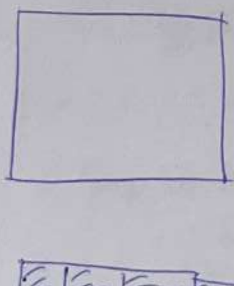
n: ... $= \frac{1}{3^n}$

$$\Rightarrow HD(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln 20^n}{\ln \frac{1}{3^n}} = -\lim_{n \to \infty} \frac{n \ln 20}{-n \ln 3} = \frac{\ln 20}{\ln 3}$$

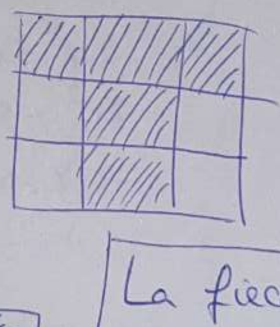
Exercițiul 10: $HD(A) = \frac{\ln 5}{\ln 3}$

~~Mulțimea o să fie asemănătoare cu cea de la Ex. 9, doar că o să am 5 cuburi pline, nu 20.~~

0:



1:



2:

X: trebuiau să fie goale pătratele cu X

La fiecare pas am 5^n pătrate pline.
La fiecare pas pătratul se împarte în 3

$$\Rightarrow HD(A) = -\lim_{n \to \infty} \frac{\ln 5^n}{\ln \frac{1}{3^n}} = \frac{\ln 5}{\ln 3}$$