PROBLEME

1) Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii liniare prin intermediul metodei de eliminare Gauss fără pivotare (MEGFP) (punând în evidenţă, la fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului, matricele de transformare $\mathbf{M}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, corespunzătoare) şi al metodei substituţiei descendente:

$$\text{(a)} \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ \frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

2) Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii liniare prin intermediul metodei de eliminare Gauss cu pivotare parţială (MEGPP) (punând în evidenţă, la fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului, matricele de transformare $\mathbf{M}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, şi matricele de permutare elementară $\mathbf{P}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$ corespunzătoare) şi al metodei substituţiei descendente:

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

3) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare de la Problema 2) prin intermediul metodei de eliminare Gauss cu pivotare parţială scalată (MEGPPS) (punând în evidenţă, la fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului, matricele de transformare $\mathbf{M}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, şi matricele de permutare elementară $\mathbf{P}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, corespunzătoare) şi al metodei substituţiei descendente.

4) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare de la Problema 2) prin intermediul metodei de eliminare Gauss cu pivotare totală (MEGPT) (punând în evidenţă, la fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului, matricele de transformare $\mathbf{M}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, şi matricele de permutare elementară $\mathbf{P}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, şi matricele de interschimbare a coloanelor, deci a ordinii necunoscutelor x_i, $\mathbf{Q}^{(k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1, n-1}$, corespunzătoare) şi al metodei substituţiei descendente.

5) Calculaţi determinantul matricelor

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 5 \\ 6 & -6 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

folosind metodele de eliminare Gauss fără pivotare (MEGFP), cu pivotare parţială (MEGPP), cu pivotare parţială scalată (MEGPPS) şi, respectiv cu pivotare totală (MEGPT).

6) Folosind metoda Gauss-Jordan, determinaţi inversele matricelor

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

7) (a) Determinaţi factorizarea LU fără pivotare a matricei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(b) Calculaţi $\det(\mathbf{A})$ folosind factorizarea LU fără pivotare a matricei $\mathbf{A}$.

(c) Determinaţi factorizarea LDU a matricei $\mathbf{A}$ dată de (1).

(d) Determinaţi soluţia sistemului de ecuaţii liniare $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ folosind (a) şi metodele substituţiei ascendente şi descendente pentru matricea $\mathbf{A}$ dată de (1) şi vectorul $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \; 7 \; 14 \; -7 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$.

8) (a) Determinaţi factorizarea LU cu pivotare (factorizarea PLU) a matricei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \tag{2}$$

(b) Calculaţi $\det(\mathbf{A})$ folosind factorizarea PLU a matricei $\mathbf{A}$.

(c) Determinaţi soluţia sistemului de ecuaţii liniare $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ folosind (a) şi metodele substituţiei ascendente şi descendente pentru matricea $\mathbf{A}$ dată de (2) şi vectorul $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \; -1 \; -4 \; -3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$.

9) Determinaţi factorizările LU fără pivotare şi $\mathrm{LDL}^{\mathsf{T}}$ ale matricelor

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10) Stabiliţi dacă este posibilă factorizarea Cholesky a matricelor de la Problema 9) şi în caz afirmativ determinaţi această factorizare.

11) Determinaţi factorizarea Doolittle a matricelor

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

12) Determinaţi factorizarea Crout a matricelor de la Problema 11).