Examen

2 Iunie 2018

Timp de lucru 2h30. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Mult succes !

Exercițiul 1 10p

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \,|\, X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 2 10p

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$ unde $\theta \in (0,1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2, \dots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

Exercițiul 3 10p

Calculați marginea Rao-Cramer pentru familia $\mathcal{N}(\mu, 1)$ unde μ este necunoscut. Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor și verificați dacă este eficient.

Exercițiul 4 10p

Considerăm următorul eșantion de talie 20 dintr-o populație Bernoulli de parametru $\theta \in (0,1)$:

`0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0`

a) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și determinați informația lui Fisher $I(\theta)$.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{V}_\theta[X_1]$. Este acesta nedeplasat? Dar consistent? Justificați răspunsul.

c) Construiți un interval de încredere pentru $\hat{\theta}$ de nivel 95%.

Calculul
N
Determ
Sc

Restanța Iunie

Ex 1:

$X_1 \ldots X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

Sol:

$$L(\theta | x_1 \ldots x_n) = f_\theta(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) =$$

densitatea

$$X \sim Poiss(\theta) \rightarrow f_\theta(x) = e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^x}{x!}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} =$$

$$L(\theta |) = (e^{-\theta})^n \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$\ell(\theta | x_1 \ldots x_n) = \log L(\theta | x_1 \ldots x_n) =$$

$$= \log \left(e^{-n\theta} \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \right) =$$

$$= \log e^{-n\theta} + \log \left(\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \right)$$

$$= -n\theta + \log \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \log \prod_{i=1}^{n} x_i!$$

$$\cancel{= -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i - \log \prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \rightarrow -n}$$

$$\ell = -n\theta + \log \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \log \prod_{i=1}^{n} x_i!$$

$$\ell = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \log\theta - \log \prod_{i=1}^{n} x_i!$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = 0.$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = n \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\theta_n} = \hat{x_n}.$$

$\hat{\theta_n}$ este nedeplasat dacă $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta_n}] = \theta$.

$\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta_n}] = \mathbb{E}_\theta[x_1] = \theta \Rightarrow \hat{\theta_n}$ este nedeplasat.

$MSE_\theta[\hat{\theta_n}] = Var_\theta(\theta_n) - b_\theta(\theta_n)^2 =$

$Var_\theta(\hat{\theta_n}) = \frac{1}{n} Var(x_1) = \frac{\theta}{n}.$

$MSE_\theta[\hat{\theta_n}] = \frac{\theta}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \hat{\theta_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$

$\Rightarrow \hat{\theta_n}$ este consistent pt. θ.

$\hat{\theta_n}$ este eficient pt θ dacă $Var(\hat{\theta_n}) = MIRC$. ...

5. Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$. Este acesta consistent?

$L(\theta \mid x_1 \dots x_n) = f_\theta(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_i > 0)$

$$\mathbb{P}(X_i = x_i) = e^{-\theta} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_1 > 0) = e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^1}{1!} = \theta e^{-\theta}$$

$\frac{\partial}{\partial\theta} = -1 + \frac{x_1}{\theta} = 0 \rightarrow \frac{x_1}{\theta} = 1 \rightarrow$

$+\theta)$

5

$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_1 > 0) = \frac{P(X_1=1)}{P(X_1 \geq 1)} = \frac{e^{-\theta} \cdot \theta}{1 - e^{-\theta}}$

$\mathbb{P}(X_1 = 0) = e^{-\theta}$

$\mathbb{P}(X_1 = 1) = e^{-\theta} \cdot \theta.$

$\frac{\theta}{e^{\theta} - 1} = \mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$

$\prod_{i=1}^{n} e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^x}{x!}$

$\log\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^x}{x!} \right) \ldots$

$\int^2 (k+1)$

...ngajurea Rao-Cramer ...

...ilor ?

Ex 2 : X o.v.a. $P_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0,1)$

$A \in \mathbb{R}$ constanta?

1). $A = ?$ $E[X] = ?$ $Var(X) = ?$

$$\int_0^1 A(k+1)\theta^k \, d\theta = 1 \iff A\int_0^1 (k+1)\theta^k \, d\theta = 1 \iff$$

$$A(k+1)\left.\frac{\theta^{k+1}}{k+1}\right|_0^1 = 1 \iff \boxed{A = 1}$$

~~E[X]~~ $P_\theta(X=k) = (k+1)\theta^k.$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(k+1)\theta^k = \theta \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)\theta^{k-1}$$

$$= \theta \cdot \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k+1} = \theta\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{1-\theta}-1\right)$$

$$= \theta\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\theta}{1-\theta}\right) = \theta\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

$$= \theta\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\right)\right] =$$

$$= \theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1+\theta-\theta}{(1+\theta)^2}\right)\right]$$

$$= \theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{(1+\theta)^2}\right)\right]$$

$$= \theta\cdot -\frac{2\cancel{(1+\theta)}}{(1+\theta)^4} = \frac{-2\theta}{(1+\theta)^3}.$$

$$E[X] = \frac{-2\theta}{(1+\theta)^3}.$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\cdot(k+1)\theta^k = \theta \cancel{\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2(k+1)\theta^k}.$$

$f =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot k\,\theta^k = \theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(k+\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot k\,\theta^k .$$

$$\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(k^2 + k + \tfrac{1}{4}\right) k\,\theta^k = \theta \sum_{k=0}^{\infty} k^3\theta^k + k^2\theta^k + \frac{k}{4}\theta^k .$$

$$= \theta\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k^3+k^2)\,\theta^k}_{E[x^2]} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} k\,\theta^k \Big] .$$

$$E[x^2] = \theta\, E[x^2] + \frac{1}{4}\theta \sum_{k=0}^{\infty} k\,\theta^{k-1}$$

$$(1-\theta)\,E[x^2] = \frac{1}{4}\theta \cdot \frac{d}{d\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k$$

$$(1-\theta)\,E[x^2] = \frac{1}{4}\theta \cdot \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{1-\theta}\right)$$

$$(1-\theta)\,E[x^2] = \frac{1}{4}\theta \cdot \cancel{\frac{d}{d\theta}}\left(\frac{+1}{(1-\theta)^2}\right)$$

$$(1-\theta)\,E[x^2] = \frac{\frac{1}{4}\theta}{(1-\theta)^2}$$

$$\boxed{E[x^2] = \frac{\theta}{4(1-\theta)^3}}$$

$$Var(x) = E[x^2] - E[x]^2$$

$$= \frac{\theta}{4(1-\theta)^3} - \left(\frac{-2\theta}{1+\theta^3}\right)^2$$

$$= \frac{\theta}{4(1-\theta)^3} - \frac{4\theta^2}{(1+\theta^3)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-\theta)^3}\left[\frac{\theta}{4} - \frac{4\theta^2}{1+\theta^3}\right] .$$

$$= \frac{1}{(1-\theta)^3}\left[\frac{\theta(1+\theta^3) - 16\theta^2}{4(1+\theta^3)}\right] .$$

Dorim să estimăm θ plecând de la ...
din populația dată de repartiția lui X.

a) Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}(\tilde{\theta}=0)$

$$\mathbb{P}_\theta(X=k) = (k+1)\,\theta^k.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbb{E}[X_1].$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot \mathbb{P}_\theta(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(k+1)\,\theta^k = \frac{-2\theta}{(1+\theta)^3}.$$

$$\hat{x_n} = \frac{-2}{(1+\theta)^3}$$

$$(1+\theta)^3\,\hat{x_n} = -2$$

$$(1+3\theta+3\theta^2+\theta^3)\,\hat{x_n} = -2\theta$$

$$\cancel{\hat{x_n} + 3\theta\hat{x_n} + 3\theta^2\hat{x_n} + \theta^3\hat{x_n} = 0.}$$

$$\cancel{3\theta\hat{x_n} + 3\theta^2\hat{x_n} + \theta^3\hat{x_n} = -\hat{x_n}}$$

$$\cancel{\theta(3+3\theta+\theta^2)\,\hat{x_n} = -\hat{x_n}}$$

$$\hat{x_n} = \frac{-2}{(1+\theta)^3}.$$

$$(1+\theta)^3\,\hat{x_n} = -2$$

$$(1+\theta)^3 = -\frac{2}{\hat{x_n}}$$

$$(1+\theta) = \left(-\frac{2}{\hat{x_n}}\right)^{1/3}.$$

$$\hat{\theta_n} = \left(-\frac{2}{\hat{x_n}}\right)^{1/3} - 1.$$

...ul 3

Calculați ...?on = Imaginea ...

N! $\quad \varphi = \mathbb{P}(\hat{\theta u} = 0). = 1$

determ...

$\cancel{\mathbb{P}(\hat{\theta u} \le 0). = \mathbb{P}(}$

verifi...

Sol. $\quad \mathbb{P}(\hat{\theta u} = 0) = \mathbb{P}\left(\left(\frac{-2}{\hat{X u}}\right)^{1/3} - 1 = 0\right) =$

H

$$= \mathbb{P}\left(\left(-\frac{2}{\hat{Xu}}\right)^{1/3} = 1\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{2}{\hat{Xu}} = 1\right) = \mathbb{P}\left(\hat{Xu} = -\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{n}{2}\right)$$

$$\parallel$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

$$= \mathbb{P}\left(X_1 = -\frac{n}{2}\right) + \dots + \mathbb{P}\left(X_n = -\frac{n}{2}\right) =$$

$$= n\,\mathbb{P}\left(X_1 = -\frac{n}{2}\right) = n\left(-\frac{n}{2} + 1\right)\theta^{-\frac{n}{2}}.$$

3). Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.

$$L(\theta | x_1 \dots x_n) = f_\theta(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} (x_i + 1)\,\theta^{x_i}$$

$$\ell(\theta | x_1 \dots x_n) = \log L(\theta | x_1 \dots x_n) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} (x_i+1)\,\theta^{x_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log\left((x_i+1)\,\theta^{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \log(x_i+1) + \log \theta^{x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log(x_i+1) + \sum_{i=1}^{n} \log \theta^{x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log(x_i+1) + \sum_{i=1}^{n} x_i \log \theta.$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\ell = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta} = 0.$$

$\hat{\theta}$ este bine definit dacă nu se anulează cu probabilitate 1.

$P(\sum_{i=1}^{n} X_i) \neq 1$

X_i sunt absolut continue în raport cu măsura Lebesgue

$\Rightarrow P(X_i = 0) = 0 \Rightarrow \quad \sum X_i > 0.$

4). Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și det. legea lui limită.

$\tilde{\theta}$ consistent față de $\theta \Leftrightarrow \tilde{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$.

$P(|\tilde{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

$\hat{\theta_n} = \left(\frac{-2}{\hat{X_n}}\right)^{1/3} - 1.$

Din legea nr. mari avem că:

$\hat{X_n} \xrightarrow{a.s} E[X_1] = \frac{-2}{(1+\theta)^3}.$

$* \left(\frac{1}{\frac{\hat{X_n}}{-2}}\right)^{1/3} - 1.$

$g\left(\frac{-2}{(1+\theta)^3}\right) =$

$g(x) = \cancel{-2} \cdot \cancel{\frac{1}{2x}} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^3 + 1$

$\frac{-2}{\frac{-2}{1+\theta}}$

$\cancel{\frac{1}{2(-2)}}$ $\cancel{\frac{-2}{\frac{-4}{\hat{X_n}}}}$

$g(x) = \left(-\frac{2}{x}\right)^3 + 1$

$MSE_\theta(\hat{\theta_n}) \longrightarrow 0 \rightarrow \hat{\theta_n} \xrightarrow{P} \theta.$