NUME ....GRUPA.........

EXAMEN LA TEORIA MASURII SI A INTEGRALEI

I. Calculati

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)} \frac{(n+1)\sin\frac{x^3+x}{n+2}}{x(x^2+1)^2}\, d\lambda$$

II. Decideti daca urmatoarea afirmatie este adevarata sau falsa. Justificati raspunsul!

Exista un sir $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ de functii integrabile Lebesgue astfel incat

$$|f_n(x)| \leq 1 \text{ pentru orice } n \geq 1 \text{ si orice } x > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ pentru orice } x > 0$$

si

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)} f_n\, d\lambda = 1.$$

III. Calculati integrala

$$\int_C xy\,dx + x^2\,dy$$

unde C este frontiera multimii $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq x\}$ parcursa in sens trigonometric, in doua moduri: direct si cu formula lui Green.

IV. Calculati fluxul campului vectorial

$$F(x,y,z) = xi + yj + zk$$

prin fata exterioara a tetraedrului delimitat de planele $x = 0$, $y = 2$, $z = 0$ si $x + y + 2z = 6$ in doua moduri: direct si cu formula Gauss-Ostrogradski.

Nota. Timpul de lucru este de 2 ore. Fiecare subiect se noteaza cu note de la 1 la 10. Nota obtinuta la aceasta lucrare este media aritmetica a celor 4 note.

Rezolvarile trebuie scanate si trimise impreuna cu lista de subiecte sub forma unui **singur** fisier pdf la adresele radu-bogdan.munteanu@g.unibuc.ro si radu.munteanu@unibuc.ro.

<u>Propoziție</u> Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. cu măsură și $f: X \to [0, \infty]$ o funcție măsurabilă. Atunci

1) $\forall a > 0$, $\mu(\{x \in X \mid f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f \, d\mu$

2) $\int f \, d\mu = 0 \iff f = 0$ μ-a.p.t

3) $\int f \, d\mu < \infty \Rightarrow f$ este finită μ-a.p.t

4) $f, g : X \to [0, \infty]$ măsurabile

$$f = g \ \mu\text{-a.p.t} \Rightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

<u>Dem.</u> 1) Fie $a > 0$. $A := \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$

$\Rightarrow f \geq a \chi_A \Rightarrow \int f \, d\mu \geq a \mu(A) \Rightarrow 1)$.

2) „$\Leftarrow$" Pp. prin. că $f = 0$ μ-a.p.t.; $f \geq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} h \in \mathcal{S}^+ \quad 0 \leq h \leq f \\ f = 0 \ \mu\text{-a.p.t} \end{array}\right\} \Rightarrow h = 0 \ \mu\text{-a.p.t} \Rightarrow \int h \, d\mu = 0.$$

$\Rightarrow \int f \, d\mu = \sup \{ \int h \, d\mu \mid 0 \leq h \leq f, h \in \mathcal{S}^+ \} = 0.$

2) "$\Rightarrow$" $A_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq \frac{1}{n}\}$

$A = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$

$A_n \subset A_{n+1}, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$1) \xRightarrow{a=\frac{1}{n}} \mu(A_n) \leq n \int f d\mu = 0, \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$

3) $\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) \leq \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int f d\mu, \ \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0 \Rightarrow f$ finită μ-a.p.t.

4) $f, g \geq 0$ măsurabile, $\int f d\mu = \int g d\mu$

$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$; $\mu(A) = 0$.

$t : X \to [0, +\infty], \quad t(x) = \begin{cases} +\infty, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$,

$t \geq 0$ funcție măsurabilă

$\int t d\mu = \sup\{\int h d\mu \mid h \in \mathcal{S}^+, h \leq t\} = 0.$

$\left.\begin{array}{l} f \leq g + h \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu + \int h d\mu = \int g d\mu \\ g \leq f + h \Rightarrow \int g d\mu \leq \int f d\mu + \int h d\mu = \int f d\mu \end{array}\right| \Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$

Integrarea funcțiilor măsurabile cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f : X \longrightarrow [0, +\infty)$ măsurabilă.

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int h \, d\mu \;\middle|\; h \in \mathcal{S}^{+}, \ h \leq f \right\}$$

Definiție. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. cu măsură și $f : X \to [0, +\infty)$ o funcție măsurabilă. Spunem că f este integrabilă dacă $\int f \, d\mu < \infty$.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ măsurabilă.

$f^{+} = \max\{f, 0\}$, $f^{-} = \max\{-f, 0\}$

f^{+}, f^{-} măsurabile;

$f = f^{+} - f^{-}$; $|f| = f^{+} + f^{-}$; $f^{+} \leq |f|$, $f^{-} \leq |f|$

Propoziție. $|f|$ integrabilă $\Longleftrightarrow$ f^{+} și f^{-} integrabile.

„$\Rightarrow$" $\left.\begin{array}{l} |f| \text{ integrabilă} \\ 0 \leq f^{+}, f^{-} \leq |f| \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \int f^{+} d\mu < \int |f| \, d\mu < \infty \\ \int f^{-} d\mu < \int |f| \, d\mu < \infty \end{array}$

„$\Leftarrow$" f^{+}, f^{-} integr. $\Rightarrow |f| = f^{+} + f^{-}$ integrabilă

Definiție - Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. cu măsură. O funcție $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ măsurabilă se numește integrabilă dacă $|f|$ este integrabilă. Pentru o astfel de funcție

$$\int f \, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Prop. Fie $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabilă. Atunci

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Dem. f integrabilă $\iff$ $|f|$ integrabilă

- $f = f^+ - f^-$, f^+, f^- integrabile.

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| \, d\mu$$

Propoziție - Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. cu măsură. Fie $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ măsurabilă și $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabilă a.î. $|f| \leq g$

Atunci f este integrabilă și

$$\int |f| \, d\mu \leq \int g \, d\mu$$

Propoziție - Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. cu măsură, $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ măs. a.î. $f = g$ μ-a.p.t. Dacă f este integrabilă atunci g este integrabilă și $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$. Dem (exercițiu)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ – sp. cu măsură

$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(X) = \{ f : X \to \mathbb{R},\ f \text{ integrabilă} \}$

<u>Propoziție</u>. 1) $\mathcal{L}^1(X)$ sp. vectorial

2) $\mathcal{L}^1(X) \ni f \longrightarrow \|f\|_1 := \int |f| \, d\mu$ este seminormă

(adică $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$, $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$) și

$\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ μ-a.p.t.

3) $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$, $\int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$,

$\forall f, g \in \mathcal{L}^1(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (adică $f \longmapsto \int f \, d\mu$ liniară)

Dem. Fie $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$. Deci $\int |f| \, d\mu < \infty$, $\int |g| \, d\mu < \infty$

Avem, $\int |f+g| \, d\mu \leq \int (|f| + |g|) \, d\mu = \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu < \infty$

$\Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^1(X)$ și $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1(X)$

$\int |\alpha f| \, d\mu = |\alpha| \int |f| \, d\mu < \infty$.

$\Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}^1(X)$ și $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$.

$\|f\|_1 = 0 \iff \int |f| \, d\mu = 0 \iff |f| = 0$ μ-a.p.t. $\iff f = 0$ μ-a.p.t.

2) $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$, $h = f+g \in \mathcal{L}^1(X)$ (din (1))

$f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$, $h = h^+ - h^-$

$f^+, f^-, g^+, g^-, h^+, h^- \in \mathcal{L}^1(X)$

$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Rightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$

$$\Longrightarrow \int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int h^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu$$

$$\Rightarrow \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu$$

$$\Rightarrow \int h\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

$\alpha > 0$, $f \in \mathcal{L}^1(X)$, $\Rightarrow \int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$ (exercițiu).

$(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$, $f \in \mathcal{L}^1(X) \Longrightarrow -f \in \mathcal{L}^1(X)$.

$$\int (-f)\, d\mu = \int (-f)^+ d\mu - \int (-f)^- d\mu = \int f^- d\mu - \int f^+ d\mu = -\int f\, d\mu$$

$f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ-a.pt.

$L^1(X) = \mathcal{L}^1(X) / \sim = \{\hat{f} \mid f \in \mathcal{L}^1(X)\}$ notăm $\hat{f}$ tot cu f.

$\searrow$

spațiu normat.

Teoremă (Lema lui Fatou)

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. cu măs. și $(f_n)_{n\geq 1}$ un șir de funcții măsurabile pozitive (i.e. $f_n : X \to [0, +\infty)$ măs., $\forall n \geq 1$)

Atunci

$$\int \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu.$$

Dem. $f = \underline{\lim}\, f_n$, $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$, $f, g_n \geq 0$.

$$f = \sup_{n\geq 1} g_n = \lim_{n\to\infty} g_n$$

$g_n(x) \leq g_{n+1}(x), \forall x \in X$ și $g_n \leq f_n, \forall n \geq 1$.

$$\overset{TCM}{\Longrightarrow} \int \underline{\lim}\, f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu =$$

$$= \underline{\lim} \int g_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu .$$

<u>Teoremă</u> (de convergență dominată a lui Lebesgue)

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. cu măsură, $(f_n)_{n\geq 1}$ un șir de fd. măsurabile, $f_n : X \to \mathbb{R}$ a.î.

1) există $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \ \forall x \in X$

2) există $g : X \to [0,\infty)$ integrabila a.î. $|f_n(x)| \leq g(x), \forall x \in X$

Atunci f și $f_n, n\geq 1$ sunt integrabile și

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

<u>Dem</u> $\left.\begin{array}{l} |f_n| \leq g \\ f_n \to f \Rightarrow |f| \leq g \end{array}\right\} \Rightarrow$ $|f_n|$ și $|f|$ integrabile și deci $f_n, n\geq 1$, și f sunt integrabile

Aplicam Lema lui Fatou pt $2g - |f_n - f|, n \geq 1$.
(Obs: $2g - |f_n - f| \geq 0$).

$$\underline{\lim} (2g - |f_n - f|) = \lim_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) = 2g.$$

$$\int 2g \, d\mu = \int \underline{\lim} (2g - |f_n - f|) \, d\mu \leq$$

$$\leq \underline{\lim} \int (2g - |f_n - f|) \, d\mu = \int 2g \, d\mu + \underline{\lim} \left(- \int |f_n - f| \, d\mu \right)$$

$$= \int 2g \, d\mu - \overline{\lim} \int |f_n - f| \, d\mu$$

$$\Rightarrow \overline{\lim} \int |f_n - f| \, d\mu = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

<u>Remarcă</u> Ambele teoreme TCM și TCD rămân adevărate dacă condițiile sunt adevărate μ-a.p.t dar în acest caz condiția ca f să fie măsurabilă trebuie adăugată în ipoteză (cu excepția cazului în care μ este completă)

<u>Teoremă</u> Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1) f integrabilă Riemann $\Rightarrow$ f integr. Lebesgue și

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx$$

2) f int. Riemann $\Leftrightarrow$ f mărg și continuă λ-a.p.t.

Măsură și integrală pe spațiu produs.

Fie $(X, \mathcal{A})$ și $(Y, \mathcal{B})$ sp. măsurabile. O mulțime de forma $A \times B$ cu $A \in \mathcal{A}$ și $B \in \mathcal{B}$ s.n dreptunghi măsurabil.

Definiție. $\mathcal{D} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma(\mathcal{D})$ se numește σ-algebra produs a σ-algebrelor $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$.

Ex: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Notații $E \subset X \times Y$, $x \in X$ și $y \in Y$

$E_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \subset Y$

$E^y = \{x \in X \mid (x, y) \in E\} \subset X$

$f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f_x : Y \to \mathbb{R}$, $f_x(y) = f(x, y)$

$f^y : X \to \mathbb{R}$, $f^y(x) = f(x, y)$

<u>Lemă</u> Fie $(X, \mathcal{A})$ și $(Y, \mathcal{B})$ sp. măsurabile, și $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Atunci $\forall x \in X$, $E_x \in \mathcal{B}$ și $\forall y \in Y$, $E^y \in \mathcal{A}$.

Dem. Fie $x \in X$;

$$\mathcal{F} = \{ E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid E_x \in \mathcal{B} \}$$

Vom arăta că $\mathcal{F}$ este o σ-algebră și $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$.

Fie $A \in \mathcal{A}$ și $B \in \mathcal{B}$. $E \coloneqq A \times B$

$$E_x = \begin{cases} \emptyset, & x \notin A \\ B, & x \in A \end{cases} \quad \text{Deci } E_x \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{F}$$

(i) În particular $X \times Y \in \mathcal{F}$.

(ii) Fie $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$. Deci $(E_n)_x \in \mathcal{B}$, $\forall n \geq 1$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{n \geq 1} (E_n)_x \underbrace{\in}_{\mathcal{B}\ \sigma\text{-algebră}} \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$$

(iii) Fie $E \in \mathcal{F} \Rightarrow E_x \in \mathcal{B} \Rightarrow Y \setminus E_x \in \mathcal{B}$

$$\left.\begin{array}{l} Y \setminus E_x \in \mathcal{B} \\ (Y \setminus E_x) = ((X \times Y) \setminus E)_x \end{array}\right| \Rightarrow (X \times Y) \setminus E \in \mathcal{F}$$

Deci,

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}\ \sigma\text{-algebră} \\ \mathcal{D} \subset \mathcal{F} \end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{F}.$$

$\square$

<u>Propoziție</u>: Fie $(X, \mathcal{A})$ și $(Y, \mathcal{B})$ sp. măsurabile și $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ o fct $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ măsurabilă. Atunci $\forall x \in X$, f_x este $\mathcal{B}$-măsurabilă și $\forall y \in Y$, f^y este $\mathcal{A}$-măs.

<u>Dem.</u> Fie $t \in \mathbb{R}$. Deoarece f este $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ măsurabilă,

$E = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x,y) > t\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Lemă $\Rightarrow E_x = \{y \in Y \mid f_x(y) > t\} \in \mathcal{B} \Rightarrow f_x$ este $\mathcal{B}$-măsurab.

$\Rightarrow E^y = \{x \in X \mid f^y(x) > t\} \in \mathcal{A} \Rightarrow f^y$ este $\mathcal{A}$-măs.

<u>Reamintim</u>: <u>Teoremă</u> Dacă $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ este π sistem, atunci, $d(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

<u>Definiție</u> Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. cu măsură. Spunem că μ este σ-finită dacă există $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ a.î.:

(i) $\mu(A_n) < \infty$, $\forall n \geq 1$

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

<u>Teorema</u> Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ şi $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sp cu măsuri σ-finite, şi $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Atunci

$x \longmapsto \nu(E_x)$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă

$y \longrightarrow \nu(E^y)$ este $\mathcal{B}$-măsurabilă.

<u>Dem</u> I) $\nu(Y) < \infty$.

$\mathcal{F} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid x \longrightarrow \nu(E_x) \text{ este } \mathcal{A}\text{-măsurabilă}\}$

Arătăm că $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ şi $\mathcal{F}$ este sistem Dynkin.

Fie $E = A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Dacă $x \in X$, $E_x = \begin{cases} \emptyset, & x \notin A \\ B, & x \in A \end{cases}$

$x \longrightarrow \nu(E_x) = \nu(B) \cdot \chi_A(x)$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă

Deci $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$. În part. $X \times Y \in \mathcal{F}$

Fie $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ cu $E_n \subset E_{n+1}$, $\forall n \geq 1$

$E_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow x \longmapsto \nu((E_n)_x)$ $\mathcal{A}$ măsurabilă, $\forall n \geq 1$

$\nu\left(\left(\bigcup_n E_n\right)_x\right) = \lim_{n \to \infty} \nu((E_n)_x)$

$\Rightarrow \quad x \longmapsto \nu\left(\left(\bigcup_n E_n\right)_x\right) = \lim_{n \to \infty} \nu\left((E_n)_x\right)$ este $\mathcal{A}$ măsurab,

fiind limita unui şir de fct măsurabile

Fie $E, F \in \mathcal{F}$, $E \subset F$

$x \to \nu(E_x)$, $x \mapsto \nu(F_x)$ sunt $\mathcal{A}$-măsurabile

$\Rightarrow x \mapsto \nu(F_x) - \nu(E_x) = \nu((F \setminus E)_x)$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă

Deci $\mathcal{F}$ sist. Dynkin

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \\ \mathcal{D} \ \pi\text{-sistem} \end{array}\right| \Rightarrow \underset{\displaystyle \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}{\underset{\shortparallel}{\sigma(\mathcal{D})}} = d(\mathcal{D}) \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

II) $\nu(Y) = \infty$

Fie $(B_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}$ a.î. $\begin{cases} \text{i) } \nu(B_n) < \infty, \ \forall n \geq 1 \\ \text{ii) } B_n \subset B_{n+1}, \ \forall n \geq 1 \\ \text{iii) } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = Y \end{cases}$

$\nu_n : \mathcal{B} \to [0, +\infty)$; $\nu_n(B) = \nu(B \cap B_n)$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

Fie $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Din I) știm că

$$\left.\begin{array}{l} x \mapsto \nu_n(E_x), \ \mathcal{A} \text{ măsurabilă}, \ \forall n \geq 1 \\ \nu(E_x) = \lim_{n \to \infty} \nu(E_x \cap B_n) = \lim_{n \to \infty} \nu_n(E_x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \mapsto \nu(E_x)$ este $\mathcal{A}$ măsurabilă.

Teoremă (existența și unicitatea măsurii produs)

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ și $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sp. cu măsuri σ-finite

Atunci există o unică măsură pe $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ notată cu $\mu \otimes \nu$ astfel încât.

$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}$ și

pt orice $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu$$

Dem Știm: $x \longmapsto \nu(E_x)$, $y \longmapsto \mu(E^y)$ măsurab. ≥ 0.

$\pi_1 ; \pi_2 : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$

$$\pi_1(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu, \quad \pi_2(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu$$

$\pi_1(\phi) = \pi_2(\phi) = 0$.

Fie $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ disjuncte două câte două

Pt orice $x \in X$, $\{(E_n)_x\}_{n \geq 1}$ este un șir de mulțimi disjuncte două câte două din $\mathcal{B}$.

$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Atunci $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$

$$\Rightarrow \nu(E_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu((E_n)_x), \quad \forall x \in X$$

Funcțiile $x \longmapsto \nu((E_n)_x)$ sunt $\mathcal{A}$-măsurabile pozitive

Atunci, rezultă că

$x \longmapsto \nu(E_x)$ este $\mathcal{A}$ masurabilă și

$$\pi_1(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu((E_n)_x)\, d\mu =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int \nu(E_n)_x\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_1(E_n)$$

Corolar TCM.

In concluzie π_1 este masură.

Similar se arată că π_2 este masură.

Fie $E = A \times B$ cu $A \in \mathcal{A}$ și $B \in \mathcal{B}$.

$$\nu(E_x) = \nu(B)\, \chi_A(x)$$

$$\pi_1(A \times B) = \int_X \nu(B) \cdot \chi_A(x)\, d\mu(x) = \nu(B) \cdot \mu(A).$$

La fel, $\pi_2(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$

$\mathcal{D} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ este π sistem.

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{D})$ și $\pi_1 = \pi_2$ pe $\mathcal{D}$

$\Longrightarrow \pi_1 = \pi_2.$

Cor. 2, pag 18

Tot din. Cor. 2 pag 18 rezultă și unicitatea

Teoremă (Tonelli)

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ și $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ s.p. cu măsuri σ-finite și $f : X \times Y \to [0, \infty]$ o fct. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ măsurabilă. Atunci

1) $x \longmapsto \int_Y f_x \, d\nu$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă

$y \longrightarrow \int_X f^y \, d\mu$ este $\mathcal{B}$-măsurabilă.

2) $$\iint_{X\times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x \, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y \, d\mu \right) d\nu$$

$$\left(\iint_{X\times Y} f(x,y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) \right)$$

Dem. Fie $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $f = \chi_E$.

$f_x = \chi_{E_x}$, $f^y = \chi_{E^y}$ $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

$$\int_Y f_x \, d\nu = \int_Y \chi_{E_x} \, d\nu = \nu(E_x) \, ; \quad \int_X f^y \, d\mu = \int_X \chi_{E^y} \, d\nu = \mu(E^y).$$

$$x \longrightarrow \nu(E_x) = \int_Y f_x \, d\nu$$

sunt măsurabile

$$y \longrightarrow \mu(E^y) = \int_X f^y \, d\mu$$

$$\iint_{X\times Y} f \, d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} \chi_E \, d(\mu\otimes\nu) = (\mu\otimes\nu)(E) =$$

$$= \int_X \nu(E_x) \, d\mu = \int_X \left(\int_Y f_x \, d\nu \right) d\mu$$

$$= \int_Y \mu(E^y) \, d\nu = \int_Y \left(\int_X f^y \, d\mu \right) d\nu.$$

<u>Convenție</u> $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. cu măsură;
f o funcție definită μ-a.p.t și integrabilă
$f: X \setminus N \to \mathbb{R}$ unde $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N)=0$ și
f integrabilă pe $X \setminus N$

Dacă $g: X \to \mathbb{R}$ este măsurabilă și $g|_{X\setminus N} = f$
atunci g integrabilă pe X și

$$\int_X g \, d\mu = \int_{X\setminus N} f \, d\mu$$

Acest lucru ne îndreptățește să spunem că
f este integrabilă pe X și

$$\int_X f \, d\mu = \int_{X\setminus N} f \, d\mu.$$

Teoremă (Fubini)

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ spații cu măsuri σ-finite și $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcție $\mu \otimes \nu$-integrabilă

Atunci

1) pt μ-a.p.t $x \in X$ funcția f_x este ν integrabilă

pt ν-a.p.t $y \in Y$ funcția f^y este μ-integrabilă

2) funcțiile (definite a.p.t) $x \longmapsto \int_Y f_x \, d\nu$ și

$y \longmapsto \int_X f^y \, d\mu$ sunt integrabile (vezi convenția) și

$$\iint_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x \, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y \, d\mu \right) d\nu$$

Teorema Radon-Nicodym

Definiție. Fie $(X, \mathcal{A})$ sp. măsurabil și $\nu, \mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ două măsuri. Spunem că ν este absolut continuă în raport cu μ și scriem $\nu \ll \mu$ dacă pt orice $A \in \mathcal{A}$ cu $\mu(A) = 0$ avem $\nu(A) = 0$.

O măsură pe $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ se numește absolut continuă, dacă este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue.

Propoziție. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sp. cu măsură și $f : X \to [0, +\infty]$ măsurabilă. Atunci funcția $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$; $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$, $\forall A \in \mathcal{A}$ este o măsură și $\nu \ll \mu$.

În plus f integrabilă $\iff \nu(X) < \infty$.

Dem (ex!)

Teoremă (Radon-Nicodym)

Fie $(X, \mathcal{A})$ sp măsurabil; $\nu, \mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ două măsuri σ-finite. Dacă $\nu \ll \mu$ atunci există $f : X \to [0, +\infty]$ măsurabilă a.î.

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

În plus f este unică μ-a.p.t în sensul că dacă $g : X \to [0, +\infty]$ are proprietatea că

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

atunci $f = g$ μ-a.p.t

O funcție f ca mai sus se not cu $\frac{d\nu}{d\mu}$ și se numește derivata Radon-Nicodym a măsurii ν în raport cu μ.