# Examen 2020

**1.** Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spaţiu afin real. Care din următoarele submulţimi $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ reprezintă plane?

a) $\mathcal{A}' = \{(s, t, s+t) | s, t \in \mathbb{R}\}$; b) $\mathcal{A}' = \{(x, y, z) | x = y, x = 2z + 1\}$; c) $\mathcal{A}' = \{(t+1, 1, 2) | t \in \mathbb{R}\}$; d) $\mathcal{A}' = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 0\}$. **(0,7p)**

a) plan : 2 nec.

b) $\left.\begin{array}{l} y = x \\ z = \frac{x-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ dreaptă o singură nec

c) dreapta : o singură nec

d) dreaptă : o nec ($z$)

R: a.

**2.** Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ cu structura canonică de spaţiu euclidian. Care din următoarele funcţii $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sunt izometrii?

a) $f(x, y) = (x - 1, y - 1)$; b) $f(x, y) = (1, 4x + y)$; c) $f(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$; d) $f(x, y) = (\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 1)$. **(0,7p)**

$f$ - transf. lin $\Leftrightarrow f = AX + B$

$f$ - bij $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$A \cdot A^T = I_2 \Rightarrow f$ izometrie

a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 1$

$A = I_2 \Rightarrow A \cdot A^T = I_2$ ✓

b) $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 0 \Rightarrow$ nu e izo $\quad \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = 0$

c) $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 0 \Rightarrow$ nu e izo

d) $f = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = -5 \Rightarrow$ e izo

$A \cdot A^T = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ e izo

R: a, d

**3.** Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ cu structura canonică de spaţiu afin. Pentru ce valori ale lui $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ conica de ecuaţie $x^2 + \alpha y^2 - 2\alpha x + 2\beta y - 7 = 0$ nu are centru unic?

a)$(\alpha,\beta) = (1,1)$; b)$(\alpha,\beta) = (0,1)$; c)$(\alpha,\beta) = (-1,0)$; d)$(\alpha,\beta) = (0,0)$; e)$(\alpha,\beta) = (-1,-1)$. **(0,7p)**

a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ => cerc => ✓

b) $x^2 + 2y - 7 = 0$ => parabolă => no center here

c) $x^2 - y^2 + 2x - 7 = 0$

$(x+1)^2 - y^2 = 8$ => hiperbolă => ✓

d) $x^2 - 7 = 0$ => 2 drepte paralele => no center here

e) $x^2 - y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$

$(x+1)^2 - (y+1)^2 = 9$ => hiperbolă => ✓

R: b, d

**4.** Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spaţiu euclidian. Fie punctele $A = (1,0,1), B = (1,2,-1)$, $C = (-1,\alpha,\beta)$ unde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Dacă triunghiul $\Delta(ABC)$ este dreptunghic, atunci $(\alpha,\beta)$ poate fi egal cu:

a) $(-1,0)$; b) $(1,1)$; c) $(\frac{4}{9},0)$; d) $(-1,\sqrt{3})$; **(0,7p)**

$AB^2 = 0 + 4 + 4 = 8$

$AC^2 = 4 + \alpha^2 + (\beta-1)^2$

$BC^2 = 4 + (2-\alpha)^2 + (\beta+1)^2$

a) $AB^2 = 8$ $\quad AC^2 = 6$ $\quad BC^2 = 14$ ✓

b) $AB^2 = 8$ $\quad AC^2 = 5$ $\quad BC^2 = 9$

c) $AB^2 = 8$ $\quad AC^2 =$ $\quad$ ✗

d) ✗

R: a.

**5.** Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spaţiu euclidian. Considerăm dreapta $(d) : \frac{x_1}{1} = \frac{x_2-2}{2} = \frac{x_3+4}{-3}$ şi planul $(\pi) : x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$. Atunci:

a) $d || \pi$; b) $d \subset \pi$; c) $d \perp \pi$; d) $d \cap \pi = \{(0,2,-4)\}$. **(0,7p)**

$dir(d) = (1,2,-3)$ ~ vect. dir.

$dir(\pi) = (1,-2,-1)$

a) $d \parallel \pi \iff dir(d) \subset dir(\pi) \iff (1,2,-3) \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - z = 0\}$

$1 - 4 + 3 = 0$ (A) $\Rightarrow d \parallel \pi$

b) $(0,2,-4) \in d \overset{?}{\in} \pi$

$0 - 4 + 4 = 0 \Rightarrow d \subset \pi$

YAY

**1.** Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică. Considerăm punctele $A = (0,3,0), B = (2,0,1), C = (4,0,-1), V = (3,3,3)$.

a) Fie $M = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}V$. Determinaţi punctele $N \in BV, P \in CV$ astfel încât $(MNP)||(ABC)$. **(1p)**

b) Determinaţi distanţa de la planul $(ABC)$ la planul $(MNP)$. **(1p)**

c) Determinaţi un punct $R \in CV$ astfel încât aria triunghiului $\Delta(MNR)$ să fie minimă. **(0,5p)**

a) $M = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}V = (0,2,0) + (1,1,1) = (1,3,1)$

$N = (x_N, y_N, z_N)$ , $P = (x_P, y_P, z_P)$

$(ABC): \begin{vmatrix} x-0 & 2 & 4 \\ y-3 & -3 & -3 \\ z-0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} =$

$= 6x + 6y - 18 + 6z =$

$= x + y + z - 3 \Rightarrow dir(\pi) = x + y + z = 0$

$AB = (2, -3, 1)$

$AC = (4, -3, -1)$

$BV: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2} \Leftrightarrow BV: \begin{cases} x = t+2 \\ y = 3t \\ z = 2t+1 \end{cases}$

$N \in BV \Rightarrow N = (t+2, -3t, 2t+1)$

$CV: \frac{x-4}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4} \Leftrightarrow CV: \begin{cases} x = -s+4 \\ y = 3s \\ z = 4s-1 \end{cases}$

$P \in CV \Rightarrow P = (-s+4, -3s, -4s-1)$

Pentru ca $(MNP) \parallel (ABC) \Rightarrow \vec{MN} \subset (ABC)$ , $\vec{MP} \subset (ABC)$

$MN = (t+1, 3t-3, 2t)$

$t+1+3t-3+2t = 0 \Rightarrow 6t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow N = \left(\frac{7}{3}, -1, \frac{5}{3}\right)$

$MP = (-s+3, 3s-3, 4s-2)$

$-s+\cancel{3}+3s-\cancel{3}+4s-2 = 0 \Rightarrow 6s = 2 \Rightarrow s = -\frac{1}{3} \Rightarrow P = \left(\frac{11}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$ )

b) Se moare!

$d((ABC),(MNP)) = d((ABC), \underset{(MNP)}{\underset{\cap}{M}}) = \frac{|1+3+1-3|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) Aria este minimă când dist. de la R la MN este minimă

$MN = \dots$

$d(R, MN) = \dots$

**2.** Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică şi $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ funcţia

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2 + 2, 2x_1 + 2x_3 - 1).$$

a) Decideţi dacă $f$ este izomorfism afin. **(0,7p)**

b) Fie $F = \{P \in \mathcal{A} | f(P) = P\}$ mulţimea punctelor fixe ale lui $f$. Arătaţi că $F$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$ şi determinaţi dimensiunea sa. **(0,8p)**

c) Există plane $\pi \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(\pi) =$ dreaptă? Justificare. **(0,5p)**

a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ morfism afin

$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow f$ e bij $\Rightarrow f$-izomorfism afin.

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$

$(x_1, x_1 + x_2 + 2, 2x_1 + 2x_3 - 1) = (x_1, x_2, x_3)$

$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ x_1 + x_2 = x_2 - 2 \quad \Rightarrow x_1 = -2 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 = 5 \Rightarrow F = \{(-2, y, 5) \mid y \in \mathbb{R}\}$ dreaptă $\Rightarrow$

$\Rightarrow F$ subsp. afin și $\dim(F) = 1$

c) $\pi \subset \mathcal{A}$ a.î. $f(\pi) =$ dreaptă

Din a) știm că $f$-izomorfism

Dintr-un plan fiecare punct va fi dus într-un alt plan în $\mathbb{R}^3$ ($f$ - bijecție)

$\dim(\pi) = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f(\pi))) = 2$, așadar vom obține mereu un plan, NU o dreaptă.

**3.** Fie $K$ un corp comutativ şi $n \geq 1$. Înzestrăm $K^n$ şi $K$ cu structurile canonice de spaţii afine peste $K$. Fie $f : K^n \to K$ o aplicaţie afină.

a) Demonstraţi că, dacă $f$ nu este constantă, atunci există un hiperplan $\mathcal{H} \subset K^n$ astfel încât $\mathcal{H} = f^{-1}(\{0\})$. **(0,6p)**

b) Demonstraţi că, dacă există $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ hiperplane, $\mathcal{H}_1 \not\parallel \mathcal{H}_2$, astfel încât $f_{|\mathcal{H}_1}$ şi $f_{|\mathcal{H}_2}$ sunt constante, atunci $f$ este constantă. **(0,4p)**