Curs geometrie I - 4 octombrie

Spații vectoriale

Fie K un corp comutativ $(K,+,\cdot)$

Exemple: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ (p număr prim)

Def. Fie V o mulțime nevidă;
fie $(+): V\cdot V \to V$ (adiție)
$(\cdot): K\cdot V \to V$ (multiplicație)

Tripletul $(V,+,\cdot)$ s.n. spațiu vectorial peste corpul K (K- sp. vectorial) și se verifică V/K dacă:

(i) $(V,+)$ - grup comutativ (abelian)
(ii) $a\cdot(x+y)=ax+ay, \forall a\in K, \forall x,y\in V$
(iii) $(a+b)x=ax+bx, \forall a,b\in K, \forall x\in V$
(iv) $a(bx)=(a\cdot b)x, \forall a,b\in K, \forall x\in V$
(v) $1\cdot x=x, \forall x\in V$ (1= el. neutru față de înmulțirea din K)

Elementele din K se notează de obicei cu $a,b,c\ldots$ și se numesc scalari.

Elementele din V se notează cu $x,y,z,p,v\ldots$ și se numesc vectori.

Ex: Fie K un corp comutativ. Atunci $(K,+,\cdot)$ este spațiu vectorial peste K.

În particular, $\mathbb{R}$ este $\mathbb{R}$-sp. vectorial
$\mathbb{C}$ este $\mathbb{C}$-sp. vectorial
$\mathbb{Q}$ este $\mathbb{Q}$-sp. vectorial

Exemplu: Fie K un corp comutativ, $n\in\mathbb{N}^*$

Notăm $K^n=\underbrace{K\times K\times\ldots\times K}_{\text{„n" ori}}$

Un element $x\in K^n$ se scrie $x=(x_1,\ldots,x_n)$, cu $x_1,\ldots,x_n\in K$

Definim $(+): K^n\times K^n\to K^n$, astfel:
$x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$
$x+y:=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$

Definim $(\cdot): K\times K^n\to K^n$ astfel:
$x:(x_1,\ldots x_n); a\in K$
$a\cdot x:=(a\cdot x_1,\ldots,a\cdot x_n)$

Ex (temă) Tripletul $(K^n,+,\cdot)$ este K-spațiu vectorial

Obs. (i) $(+)$ este operație internă
$(\cdot)$ este operație externă

(ii) Există posibile generalizări pentru corpuri K necomutative

Cazuri particulare: $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3,\ldots$) sp. vectorial real
$\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^2,\ldots$) sp. vectorial real complex

Exemplu: Fie K un corp comutativ
fie $m,n\in\mathbb{N}^*$ și
$M_{m\times n}(K)$ - mult. matricelor cu m l. și n col. cu elemente în K

$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$

$A=(a_{ij})_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$ Considerăm $(+): M_{m\times n}\times M_{m\times n}(K)\to M_{m\times n}(K)$ și $(\cdot): K\to M_{m\times n}(K)\to M_{m\times n}(K)$,

Atunci $(M_{m\times n}(K),+,\cdot)$ este un K-sp. vectorial

Obs. (i) $M_{1\times n}(K)\equiv K^n$
(ii) Fie $A\in M_{m\times n}(K)$, $A=(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}}$

Atunci, lui A i se poate asocia un vector în $K^{m\cdot n}$, a.î. $A\sim(a_{11},\ldots,a_{1n},a_{21},\ldots,a_{2n},\ldots,a_{mn})$

Exemplu: Fie K un corp comutativ, fie $n\in\mathbb{N}^*$

Notăm cu $K[X]$ - mulțimea polinoamelor cu coeficienți în K și cu $K_n[X]$ - mulțimea pol. de grad cel mult n

Fie $f\in K[X]$, $f=a_mX^m+a_{m-1}X^{m-1}+\ldots+a_1X+a_0$ unde $a_0,\ldots,a_n\in K$

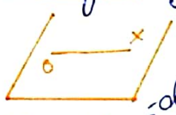
Dacă $a_m\neq 0$, grad $f=m$

$K_m[X]=\{f\in K[X] / \deg f\le m\}$

Exercițiu: Verificați că $(K[X],+,\cdot)$ este spațiu vectorial peste K
—————//————— $(K_n[X],+,\cdot)$ —//—

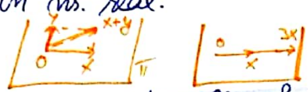
Exercițiu: Mulțimea polinoamelor de grad exact n (cu n fixat) este spațiu vectorial (peste un corp K ca mai sus)?

Exemplu Fie un plan π și $O\in\pi$



Notăm cu V mulțimea vectorilor din π având originea în pct. O

Considerăm adunarea vectorilor (după regula paralelogramului și înmulțirea cu un nr. real.



Exercițiu: Verificați că $V(+,\cdot)$ este sp. vectorial real.

Exemplu: Notăm cu V mulțimea vectorilor din „spațiu", cu originea într-un punct O fixat arbitrar.

Considerăm adunarea vectorilor (după aceeași regulă a paralelogramului) și înmulțirea cu scalarul real

Exercițiu: Verif. că $(V,+,\cdot)$ este $\mathbb{K}$-sp. vectorial

Exemplu:

Fie $i \subseteq \mathbb{R}$ interval. Notăm $\mathcal{C}(i) = \{f : i \to \mathbb{K} / f \text{ e cont.}\}$

Pe $\mathcal{C}(i)$ considerăm adunarea funcțiilor și înmulțirea cu un număr real.

Pt f și $h \in \mathcal{C}(i)$, $f+h : i \to \mathbb{K}$

$(f+h)(x) = f(x) + h(x)$

Pt $f \in \mathcal{C}(i)$ și $a \in \mathbb{R}$

$(a \cdot f) : f \to \mathbb{R}$, $(af)(x) = a \cdot f(x)$

Se știe că ~~$(\mathcal{C}(i),+,\cdot)$~~ $(+), (\cdot)$ sunt corect definite

Verificați că $(\mathcal{C}(i),+,\cdot)$ este sp. vectorial real.

Analog, se construiesc structuri de sp. vectorial $\mathbb{R}$ pe

$D(i) = \{f : i \to \mathbb{K} / f \text{ derivabilă}\}$

$\mathcal{I}(i) = \{f : i \to \mathbb{R} / f \text{ integrabilă}\}$

Observații Metoda funcționează și pt:
- mulțimea funcțiilor monotone pe i;
- ——//—— strict crescătoare pe i;
- ——//—— injective pe i

Observații Fie V un spațiu vectorial peste K

(i) $0_K \cdot x = 0_V$, $\forall x \in V$ unde am notat 0_K - elementul neutru față de adunarea din corpul K
- 0_V elementul neutru față de adunarea din gr. comutativ $(V,+)$

Într-adev., avem

$(0_K + 0_V)x = 0_K \cdot x \Rightarrow 0_K \cdot x + 0_K \cdot x = 0_K \cdot x \Rightarrow 0_K x = 0_V$

(ii) $a \cdot 0_V = 0_V$, $\forall a \in \mathbb{K}$ ← de dem

(iii) $(a-b)x = ax - bx$, $\forall a,b \in K$, $\forall x \in V$

(iv) $a(x-y) = ax - ay$, $\forall a \in K$, $\forall x,y \in V$

Ex.

Obs. (i) Fie K un corp comutativ știind că $(K,+,\cdot)$ este K sp. vectorial. În acest caz, $0_K = 0_V$

(ii) În K^n, vectorul nul $0_{K^n} \overset{not}{=} 0 = (0_K, \dots, 0_K)$

(iii) În $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$ vectorul nul este matricea

$$\begin{pmatrix} 0_K & \dots & 0_K \\ \vdots & & \\ 0_K & \dots & 0_K \end{pmatrix}$$

(iv) În $K[x]$ și din $K_n[x]$ vectorul nul este polinomul nul

(v) În $\mathcal{C}(i) = \{f : i \to \mathbb{K} / f \text{ continuă}\}$, vectorul real este funcția mult. const. pe i

Metode remarcabile de construcție pentru spații vectoriale

I. PRIN RESTR.

Fie K un corp comutativ și fie V un spațiu vectorial $/K$

Fie $K' \subseteq K$ subcorp al lui R. Atunci pe V există o structură de K' spațiu vectorial, canonică.

$(+) : V \times V \to V$

$(\cdot) : K' \times V \to V$ este restricția $(\cdot) : K \times V \to V$

Atunci $(V,+,\cdot)$ este K' - sp. vectorial

Cazuri particulare

$\mathbb{Q}$ este subcorp în $\mathbb{C}$. Rezultă că orice spațiu vectorial $/\mathbb{C}$ este și spațiu vectorial $/\mathbb{Q}$. Analog: $\mathbb{Q}$ este subcorp în $\mathbb{R}$. Rezultă că orice $V/\mathbb{R}$ este și $V/\mathbb{Q}$

Analog, ori $V/\mathbb{C}$ este și $V/\mathbb{R}$

II. PRIN PRODUS CARTEZIAN

Fie K un corp comutativ

Fie $V, W / K$ - spații vectoriale

Pe produsul cartezian $V \times W$, definim $(+) : (V \times W) \times (V \times W) \to (V \times W)$

Pt. $(x,y) \in V \times W$
$(u,t) \in V \times W$

$(x,y) + (u,t) = (x+u, y+t)$, $\forall x,u \in V$, $\forall y,t \in W$

pt $(x,y) \in V \times W$ și $a \in K$

$a(x \cdot y) := (ax, ay)$

Verificați că $(V \times W,+,\cdot)$ este K-sp. vectorial (numit sp. vectorial produs)

Caz particular $V = K$, $W = K$

$K^2 = K \times K$ devine K-sp vectorial (met II)

În general

$\underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ ori}} = K^n$ un K sp vectorial

Acesta este sp. vectorial deja întâlnit mai sus.

Observații Elementul nul din $V \times W$ este $(0_V, 0_W)$

III. Metoda "prin restricție la submulțimi"

Fie V un sp. vectorial peste un corp K.
Fie $W \subseteq V$
Considerăm restricțiile operațiilor de sp. vectorial asociate lui V:
$(+): W \times W \to V$
$(\cdot): K \times W \to V$

Pp. în plus că $(+): W \times W \to W$ (e parte stabilă cu adunarea) și că $(\cdot): K \times W \to W$

Def. Spunem că $(W, +, \cdot)$ este subspațiu vectorial al lui V (ambele sunt K-sp. vect)

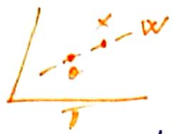
Exemplu: Fie V un sp. vectorial$/K$. Atunci $\{0_V\}$ și V sunt subspații vectoriale ale lui V. Acestea se numesc subspații improprii.

Exemplu: Fie K un corp comutativ, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Atunci $K_n[X]$ subspațiu vectorial în $K[X]$.
Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$. Atunci $K_n[X]$ este subspațiu vectorial al lui $K_m[X]$.

Exemplu: Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ sunt $\mathbb{R}$-sp. vectoriale, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ este $\mathbb{R}$-sp. vect.
$\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^n$
$\{0_{\mathbb{R}^m}\}$ — // — $\mathbb{R}^m$
$\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ — // — $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$
$\{0_{\mathbb{R}^m}\} \times \mathbb{R}^n$ — // — $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$

Exemple de subspații vectoriale

i) Fie π un plan, $O \in \pi$ fixat și V-sp. vect. al vectorilor din π, cu originea în O



Fie W o dreaptă prin O; $W \subset V$

Atunci W este subspațiu vectorial al lui V

ii) Construiți (temă) un analog pt vectori în spațiu

iii) Fie K un corp comutativ și $n \in \mathbb{N}^*$
Notăm $V = \mathcal{M}_{n \times n}(K)$; știm că V este K-sp. v.
Notăm $W_1 := \{A \in V / A \text{ simetrică}\}$ $(A = A^T)$
Atunci W_1 este subspațiu vectorial al lui V
Notăm $W_2 := \{A \in V / A \text{ antisimetrică}\}$ $(A = -A^T)$
Atunci W_2 este subsp. vect. al lui V

Fie $A \in V$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Definim urma lui A, $\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
Notăm $W_3 = \{A \in V / \operatorname{trace} A = 0\}$
Atunci W_3 este subspațiu vectorial în V
O matrice $A \in V$ s.n. diagonală dacă toate elementele sale $a_{ij} = 0$, pt $i \neq j$.
Notăm $W_4 = \{A \in V / A \text{ este matr. diagonală}\}$
Atunci W_4 este subsp. vect în V

iv) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ și $\mathcal{C}(I)$ și $\mathcal{D}(I)$. Atunci $\mathcal{D}(I)$ este subsp. vectorial în $\mathcal{C}(I)$.

Propoziție Fie V un K-sp. vect. și fie $W \subset V$. Atunci W este subsp. vectorial al lui V dacă și numai dacă pt $\forall a, b \in K$ și $\forall x, y \in W$, avem $ax + by \in W$

Demonstrație "$\Rightarrow$" Pp că W este subsp. vect. în V. Atunci $\forall x, y \in W$, avem $x + y \in W$ $(\forall)\, a \in K, \forall x \in W$, avem $ax \in W$.
Fie $a, b \in K$ și $x, y \in W$. Observăm că $\begin{cases} ax \in W \\ by \in W \end{cases} \Rightarrow ax + by \in W$.

"$\Leftarrow$" Pp că $\forall a, b \in K$ și $\forall x, y \in W$ avem $ax + by \in W$
Fie $x, y \in W$. Atunci
$1 \cdot x + 1 \cdot y \in W \Rightarrow x + y \in W$
Fie $x \in W$, $a \in K$. Atunci $ax = ax + 0 \cdot y \in W$ (y arbitrar)

Exercițiu (temă)
Fie $\mathbb{R}^2$ ca sp vectorial real.
Fie $W = \{(\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^2\}$
Demonstrați că W este subspațiu vectorial real în $\mathbb{R}^2$ (cu 2 metode)
1) def
2) prop

IV. "prin bijecție"

Fie V un spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$
Fie $\tilde{V}$ o mulțime și $f: V \to \tilde{V}$ o bijecție (fct. care e inj și surj.)
Atunci f induce pe $\tilde{V}$ o structură canonică de spațiu vectorial $/K$.
(temă!)

Proprietăți — 0_K = scalar nul, 0_V = vector nul

Fie V/K sp. vect. Atunci

1) $\forall x \in V$ $0_K \cdot x = 0_V$ (un vector înmulțit cu scalarul nul → vectorul nul)

2) $\forall \alpha \in K$ $\alpha \cdot 0_V = 0_V$

3) Dacă $\alpha \in K$, $x \in V$ și $\alpha x = 0_V$, atunci $(\alpha = 0_K)$ sau $(x = 0_V)$

4) $\forall x \in V$ $(-1_K)\, x = -x$

Fie $x \in V$

1) $(0_K + 0_K) \cdot x = 0_K x + 0_K x \Rightarrow 0_K \cdot x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x \,/\, + (-0_K \cdot x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0_V = 0_K \cdot x$

2) Fie $\alpha \in K$ $\alpha(0_V + 0_V) = \alpha 0_V - \alpha 0_V \Rightarrow \alpha \cdot 0_V = \alpha 0_V + 0_V \,/\, + (-\alpha 0_V) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0_V = \alpha \cdot 0_V$

3) Fie $\alpha \in K, x \in V$ a.î. $\alpha \cdot x = 0_V$

Pp. $\alpha \neq 0_K \Rightarrow \exists \alpha' \in K$ a.î. $\alpha \cdot \alpha' = \alpha' \cdot \alpha = 1_K$

$\alpha \cdot x = 0_V \overset{2)}{\Rightarrow} \alpha x = \alpha \cdot 0_V \Rightarrow \alpha' \cdot (\alpha x) = \alpha' \cdot (\alpha \cdot 0_V) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\alpha' \cdot \alpha) x = (\alpha' \cdot \alpha) 0_V \Rightarrow 1_K \cdot x = 1_K \cdot 0_V \Rightarrow x = 0_V$

4) Fie $x \in V$ $(-1_K)x + x = (-1_K)x + 1_K x = (-1_K + 1_K)x =$
$= 0_K x = 0_V \Rightarrow -1_K \cdot x = -x$

1) Fie V/K, W/K sp. vectorial

~~"+": $(V \times W) \times (V \times W) \to (V \times W)$~~

"+": $(V \times W) \times (V, W) \to V \times W$

$(u, v) + (x, y) = (u + x, v + y)$

"·": $K \times (V, \times W) \to V \times W$

$\alpha (u, v) = (\alpha u, \alpha v)$

Atunci $(V \times W, +, \cdot)$ este K-sp. vectorial

Fie V/K-sp. vectorial $W \neq \emptyset$ și $f: V \to W$ bijectivă

"+": $W \times W \to W$

$y_1 + y_2 = f(f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2))$

"·": $K \times W \to W$

$\alpha \cdot y = f(\alpha f^{-1}(y))$

Atunci $(W, +, \cdot)$ este K-sp. vectorial