Examen[1] la Geometrie I, seria 11, 21.01.2021

Nume și prenume: ONUȚU T.D. RADU-CONSTANTIN

Grupa: 113

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Dacă elipsa $\mathcal{E}$ are ecuaţia $\mathcal{E} : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, atunci punctul $P = (-8, 0)$ este focar al lui $\mathcal{E}$. **(0,7p)**

2. Există un unic $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele din plan $d_1 = \{(2+t, \alpha t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ şi $d_2 = \{(1+3t, 2-\alpha t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ sunt ortogonale. **(0,7p)**

3. Dacă $A = (2, 0), B = (4, -1)$ şi $C = (5, 1)$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic şi isoscel. **(0,7p)**

4. Dacă în spaţiul real $\mathbb{R}^3$ avem $d : \begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0 \\ x + y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$ şi $\pi : x + y + z - 2 = 0$, atunci $d \perp \pi$. **(0,7p)**

5. Pentru conicele $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \subset \mathbb{R}^2$, dacă Γ_1 şi Γ_2 au o tangentă comună şi Γ_2 şi Γ_3 au o tangentă comună, atunci Γ_1 şi Γ_3 au o tangentă comună. **(0,7p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie punctele $A = (2, -6), A' = (-4, 4), B = (-5, 0), B' = (-2, -5)$ şi dreapta $d : x + 4y + 5 = 0$.

a) Arătaţi că există o simetrie axială $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(A) = A'$ şi $f(B) = B'$. Determinaţi axa de simetrie a lui f. **(0,5p)**

b) Calculaţi $f(d)$. **(0,5p)**

c) Fie d_f axa de simetrie a lui f, aflată anterior. Arătaţi că $\angle(d, d_f) = 45°$. **(0,5p)**

2. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$:

a) Daţi exemplu, dacă există, de hiperbole $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ diferite şi care au o tangentă comună. Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

b) Fie $\mathcal{E}$ elipsa de focare $F_1 = (-2, 1)$, $F_2 = (1, -5)$ şi excentricitate $e = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Determinaţi ecuaţiile dreptelor directoare ale lui $\mathcal{E}$. **(0,5p)**

c) Fie conica $\Gamma : x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$. Aflaţi natura conicei Γ şi precizaţi dacă este nedegenerată. **(0,5p)**

3. Fie cercul $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ şi dreapta $d : x + y = 0$.

a) Daţi exemplu de cerc $\mathcal{C}'$ astfel încât axa radicală a lui $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ este d. **(0,25p)**

b) Determinaţi locul geometric al tuturor centrelor cercurilor $\mathcal{C}'$ cu proprietatea de mai sus. **(0,75p)**

4. Fie $\mathcal{P}$ o parabolă în planul euclidian $\mathbb{R}^2$ şi $A, B, C \in \mathcal{P}$ necoliniare. Demonstraţi că normalele la $\mathcal{P}$ în A, B şi C sunt concurente dacă şi numai dacă centrul de greutate al triunghiului ABC se află pe axa de simetrie a lui $\mathcal{P}$. **(1,5p)**

[1]Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!

ONUȚU RADU-CONSTANTIN
Grupa 113
21.01.2022

Examen geometrie I

I 1. $\mathcal{E}: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\mathcal{E}: \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$

$\Rightarrow a = 10$
$b = 6$

$e = \sqrt{1 - \frac{6^2}{10^2}} = \sqrt{\frac{100-36}{100}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 8$

$F_1 = (c, 0) = (8, 0)$
$F_2 = (-c, 0) = (-8, 0) = P \Rightarrow P$ este focar al lui $\mathcal{E}$

$\Rightarrow$ Afirmația de la 1. este adevărată

2. $d_1 = \{(2+t, \alpha t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$d_2 = \{(1+3t, 2-\alpha t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$\Leftrightarrow d_1: (2,0) + t(1, \alpha),\ t \in \mathbb{R}$
$d_2: (1,2) + t(3, -\alpha),\ t \in \mathbb{R}$
$v_1 = (1, \alpha)$ - vector director al lui d_1
$v_2 = (3, -\alpha)$ - vector director al lui d_2
d_1 este ortogonală pe $d_2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$
$\langle (1, \alpha), (3, -\alpha) \rangle = 0$
$1 \cdot 3 + \alpha \cdot (-\alpha) = 0$
$3 - \alpha^2 = 0$
$\alpha^2 = 3$
$\alpha = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ Afirmația de la 2. este falsă, deoarece există 2 valori ale lui α pt. care d_1 este ortogonală pe d_2.

1

3. $A=(2,0)$
$B=(4,-1)$
$C=(5,1)$
$AB=\sqrt{(4-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$
$AC=\sqrt{(5-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$
$BC=\sqrt{(5-4)^2+(1+1)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$
$AB=BC \Rightarrow \Delta ABC$ - isoscel
din Th. lui Pitagora $\Rightarrow (\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2=(\sqrt{10})^2$ Adevărat $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta ABC$ - dreptunghic
$\Rightarrow \Delta ABC$ - dreptunghic și isoscel
$\Rightarrow$ Afirmația de la 3 este adevărată.

4. $d: \begin{cases} 2x-3y+z-3=0 \\ x+y-2z+6=0 \end{cases}$

$\pi: x+y+z-2=0$

Aduc d la ecuația parametrică.
Notez $z=t$, $t\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} 2x-3y+t-3=0 \\ x+y-2t+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3-t \\ x+y=2t-6 \mid \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3-t \\ 3x+3y=6t-18 \end{cases}$ (+)
$5x=5t-15$
$x=t-3 \Rightarrow y=t-3$

$\Rightarrow d: \begin{cases} x=-3+t \\ y=-3+t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow v=(1,1,1)$ - vector director al lui d

$u = (1,1,1)$ - vector normal al lui π

$d \perp \pi \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $v = \lambda u \iff$

$\iff (1,1,1) = \lambda(1,1,1)$.

Pt $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $\Rightarrow d \perp \pi$

$\Rightarrow$ Afirmația de la 4. este adevărată

II. $A = (2,-6)$, $A' = (-4,4)$

$B = (-5,0)$; $B' = (-2,-5)$

$d: x + 4y + 5 = 0$

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$

Caut să scriu f sub forma $f(x,y) = \cancel{A(x,}\ A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e$, $e \in \mathbb{R}^2$

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$f(2,-6) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} + e = (-4,4)$

$f(2,-6) = (2a - 6b + e_1,\ 2c - 6d + e_2) = (-4,4)$

$f(-5,0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + e = (-2,-5)$

$f(-5,0) = (-5a + e_1,\ -5c + e_2) = (-2,-5)$

$$\iff \begin{cases} 2a - 6b + e_1 = -4 \\ 2c - 6d + e_2 = 4 \\ -5a + e_1 = -2 \Rightarrow a = \dfrac{2 + e_1}{5} \\ -5c + e_2 = -5 \Rightarrow c = \dfrac{5 + e_2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4 + 2e_1}{5} - 6b + e_1 = -4 \\ \dfrac{10 + 2e_2}{5} - 6d + e_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4+2e_1-30b+5e_1=-20 \\ 10+2e_2-30d+5e_2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7e_1-30b=-24 \\ 7e_2-30d=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -30b=-24-7e_1 \\ -30d=10-7e_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\dfrac{24+7e_1}{30} \\ d=\dfrac{7e_2-10}{30} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} \dfrac{2+e_1}{5} & \dfrac{24+7e_1}{30} \\ \dfrac{5+e_2}{5} & \dfrac{7e_2-10}{30} \end{pmatrix}$$

Mai mult, am nevoie ca A să fie matrice ortogonală $\Leftrightarrow$

$A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I_2$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2+e_1}{5} & \dfrac{24+7e_1}{30} \\ \dfrac{5+e_2}{5} & \dfrac{7e_2-10}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{2+e_1}{5} & \dfrac{5+e_2}{5} \\ \dfrac{24+7e_1}{30} & \dfrac{7e_2-10}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Și iau separat rezultatele de pe fiecare poziție

$$\left(\frac{2+e_1}{5}\right)^2+\left(\frac{24+7e_1}{30}\right)^2=1$$

$$\frac{4+4e_1+e_1^2}{25}+\frac{576+336e_1+49e_1^2}{900}=1$$

$24 \cdot 24 = 96,\ 48 \to 576$; $48 \cdot 7 = 336$; $36 \cdot 4 = 144$

$$144+144e_1+36e_1^2+576+336e_1+49e_1^2=900$$

$$85e_1^2+480e_1-180=0 \mid :5$$

$$17e_1^2+96e_1-36=0$$

$$\left(\frac{5+e_2}{5}\right)^2+\left(\frac{7e_2-10}{30}\right)^2=1$$

$$\frac{25+10e_2+e_2^2}{25}+\frac{49e_2^2-140e_2+100}{900}=1$$

$$900+360e_2+36e_2^2+49e_2^2-140e_2+100=900$$

$$85e_2^2+220e_2+100=0 \quad |:5$$

$$17e_2^2+44e_2+20=0$$

$$\Delta=1936-80\cdot 17=1936-1360=576$$

$$e_{2_{1,2}}=\frac{-44\pm 24}{34}=\begin{cases} e_{2_1}=-\frac{20}{34}=-\frac{10}{17} \\ e_{2_2}=-\frac{68}{34}=-2 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{iau}} e_2=-2$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \cdot 44 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 1936 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80 \\ \cdot 17 \\ \hline 560 \\ 80 \\ \hline 1360 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \cdot 7 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\left(\frac{2+e_1}{5}\right)\left(\frac{5+e_2}{5}\right)+\left(\frac{24+7e_1}{30}\right)\left(\frac{7e_2-10}{30}\right)=0$$

$$\frac{10+2e_2+5e_1+e_1e_2}{25}+\frac{-240-70e_1+168e_2+49e_1e_2}{900}=0$$

$$360+180e_1+72e_2+36e_1e_2-240-70e_1+168e_2+49e_1e_2=0$$

$$120+110e_1+240e_2+85e_1e_2=0 \quad |:5$$

$$24+22e_1+48e_2+17e_1e_2=0$$

Dar $e_2=-2 \Rightarrow 24+22e_1-96-34e_1=0$

$$-12e_1-72=0$$

$$e_1+6=0$$

$$e_1=-6$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \cdot 17 \\ \hline 252 \\ 36 \\ \hline 612 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 96 \\ \cdot 6 \\ \hline 576 \end{array}$$

Verific dacă $e_1=-6$ este sol. pt. $17e_1^2+96e_1-36=0$

$$17\cdot 36-576-36=0$$

$$612-612=0 \Rightarrow e_1=-6$$

$\Rightarrow e = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2+e_1}{5} & \frac{24+7e_1}{30} \\ \frac{5+e_2}{5} & \frac{7e_2-10}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{18}{30} = -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{24}{30} = -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Verific din ~~nou~~ nou că A este matrice ortogonală:

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Am arătat că $f(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

și A - matrice ortogonală

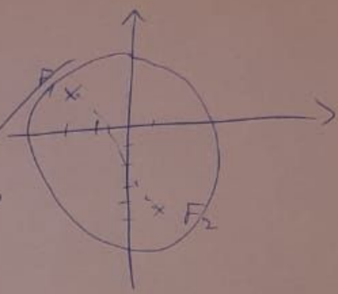
$\Rightarrow$ f - izometrie

$$\det A = \begin{vmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{vmatrix} = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$$

II. 2. b) $F_1 = (-2,1)$

$F_2 = (1,-5)$

$e = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\quad d_1 : x = x_0$



$\frac{dist(P, F_1)}{dist(P, d_1)} = e = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

iar $P \in Ox$ și $P \in$

$e = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = 1 - \frac{b^2}{8}$

$1 = 8 - b^2$

$b^2 = 7$

$b = \sqrt{7}$

$a = 2\sqrt{2}$

c) $\Gamma : x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = \delta = 0$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $\det \tilde{A} = \Delta = -3+1+1-1-1+3 = 0$

$\Rightarrow \Gamma$ - nu este nedegenerată $(\Delta = 0)$

Γ - este degenerată

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1$
$= \lambda(\lambda - 2)$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 0$

$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{cases} x + y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ $\quad V_{\lambda_1} = \langle (1,1) \rangle$

$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$ $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\quad V_{\lambda_2} = \langle (-1,1) \rangle$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$ (nu schimbă orientarea)

$v_1 = \dfrac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$v_2 = \dfrac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} X'$

$\begin{cases} x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\Gamma: (x+y)^2 + 2(x+y) - 3 = 0$

$\Gamma: \left(\dfrac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{x'}{\sqrt{2}} - 3 = 0$

$\Gamma: \dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{2x'}{\sqrt{2}} - 3 = 0$

$\Gamma: x'^2 + \sqrt{2}x' - 6 = 0$

$\Gamma: x'^2 + \sqrt{2}x' + 2 - 8 = 0$

$\Gamma: (x' + \sqrt{2})^2 - 8 = 0$

$x'' = x' + \sqrt{2}$

$\Gamma: x''^2 - 8 = 0$

Γ este o reuniune de drepte paralele

II.3. $\mathcal{C}: x^2+y^2+2x+2y+1=0$

$d: x+y=0$

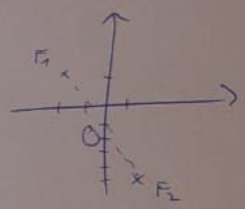
a) $\mathcal{C}': x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

$d: 2(1-a)x+2(1-b)y+1-c=0$

$d: x+y=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1-a)=1 \\ 2(1-b)=1 \\ 1-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}': x^2+y^2+2x+2y+1=0$



2.b) $F_1=(-2,1)$; $F_2=(1,-5)$

$e=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

centrul elipsei este $O\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{1-5}{2}\right)=O\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

$c=|OF_1|=\sqrt{\frac{9}{4}+9}=\sqrt{\frac{45}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

$e=\frac{c}{a} \Leftrightarrow a=\frac{c}{e}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow a=3\sqrt{10}$

$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{90}} \Leftrightarrow \frac{1}{8}=\frac{90-b^2}{90}$

$90=720-8b^2$

$8b^2=630$

$b^2=\frac{315}{4}$

$b=\frac{\sqrt{315}}{2}$

ecuatia elipsei este $\frac{x^2}{90}+\frac{y^2}{\frac{315}{4}}=1$

2.a) fie $\mathcal{H}_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\mathcal{H}_2: \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$

tangenta comună are ecuația obținută prin metoda dedublării tg. în punctul $P(x_P, y_P) \in \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$

$tg: \frac{x x_P}{a^2} - \frac{y y_P}{b^2} = 1 = \frac{x x_P}{c^2} - \frac{y y_P}{d^2}$

$P \in \mathcal{H}_1 \Leftrightarrow \frac{x_P^2}{a^2} - \frac{y_P^2}{b^2} = 1$. ~~iau a = b~~

$\cancel{x_P^2 - y_P^2 = a^2}$

$\cancel{P \in \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \frac{x_P^2}{c^2} - \frac{y_P^2}{d^2} = 1}$ iau $c = d$

$\cancel{x_P^2 - y_P^2 = c^2}$

$\cancel{c \Rightarrow a^2 = c^2}$

$b x_P^2 - a y_P^2 = a^2 b^2$

$x_P^2 = \frac{a^2 b^2 + a y_P^2}{b}$

$P \in \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \frac{x_P^2}{c^2} - \frac{y_P^2}{d^2} = 1$

$\frac{a^2 b^2 + a y_P^2}{b c^2} - \frac{y_P^2}{d^2} = 1$

Pot să iau $a = 1 = b$ și $c = d = 2$ care convine pe condiția impusă

$\Rightarrow \mathcal{H}_1: \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$

$\mathcal{H}_2: \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$, iar $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$