Examen

2 Iunie 2018

Timp de lucru 2h30. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Mult succes !

Exercițiul 1 10p

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \,|\, X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 2 10p

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$ unde $\theta \in (0,1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

Exercițiul 3 10p

Calculați marginea Rao-Cramer pentru familia $\mathcal{N}(\mu, 1)$ unde μ este necunoscut. Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor și verificați dacă este eficient.

Exercițiul 4 10p

Considerăm următorul eșantion de talie 20 dintr-o populație Bernoulli de parametru $\theta \in (0,1)$:

`0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0`

a) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și determinați informația lui Fisher $I(\theta)$.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{V}_\theta[X_1]$. Este acesta nedeplasat? Dar consistent? Justificați răspunsul.

c) Construiți un interval de încredere pentru $\hat{\theta}$ de nivel 95%.

Examen 2 iunie 2018

Ex 1:

Fie $X_1, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o pop Poisson de param $\theta > 0$

a) $\hat{\theta} = ?$ (M.V.M) e deplasat, consistent și eficient?

$X \sim Pois(\theta)$

Din teorie știm că $P(X = x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$, $x > 0$

Pas 1: Scriu funcția de verosimilitate:

$$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = (e^{-\theta})^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} = e^{-\theta n} \cdot \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Pas 2: Logaritmez:

$$\ln L(x|\theta) = \ln e^{-\theta n} + \ln \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i! = -\theta n + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$$

Pas 3+4: Derivez; egalez cu 0 și rezolvăm ec de verosimilitate

$$\frac{\partial \ln L(x|\theta)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \ln L(x|\theta)}{\partial\theta} = -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\theta}$$

$$\frac{-n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = 0 \Rightarrow -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow n\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}_n$$

Deoarece $\hat{\theta}$ este obținut prin M.V.M. $\Rightarrow \hat{\theta}$ este asim eficient și consistent

$$E[\hat{\theta}] = E[\overline{X}_n] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n} \cdot n \underbrace{E[X]}_{= \theta \text{ (din teorie)}} = \theta$$

$\Rightarrow \hat{\theta}$ e nedeplasat

b) $\hat{\theta} = ?$ pt $P_\theta(X_1 = 1 | X_1 > 0)$

$X_1 \sim P(\theta)$

$$P_\theta(X_1 = 1 | X_1 > 0) = \frac{P(X_1 = 1) \cap P(X_1 > 0)}{P(X_1 > 0)} \underset{\text{altă scriere}}{\overset{\text{sau}}{=}} \frac{P(X_1 = 1, X_1 > 0)}{P(X_1 > 0)}$$

$= \frac{P(X_1 = 1)}{1 - P(X_1 \le 0)} \longrightarrow$ asta e intersecția pt că $X > 0$ în Poisson

$$= \frac{P(X_1 = 1)}{1 - P(X = 0)} = \frac{\theta^1 e^{-\theta}}{1!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\theta^0 e^{-\theta}}{0!}} = \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - \frac{e^{-\theta}}{1}} = \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}$$

$$g(\theta) \overset{not}{=} \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}$$

Se cere un estimator de verosim. maximă pt $g(\theta)$

! Avem o teoremă: Dacă $\hat{\theta}$ este EVM pt θ atunci pt $(\forall)$ funcție g avem că $g(\hat{\theta})$ este EVM pt $g(\theta)$

$\Rightarrow \hat{\theta}$ EVM pt $\theta \Rightarrow g(\hat{\theta})$ EVM pt $g(\theta)$

$$g(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta} \cdot e^{-\hat{\theta}}}{1 - e^{-\hat{\theta}}} = \frac{\overline{X}_n \cdot e^{-\overline{X}_n}}{1 - e^{-\overline{X}_n}} \overset{not}{=} \widehat{g(\theta)}$$ (este estimatorul lui $g(\theta)$)

Se cere un estimator de verosim. maximă pt $g(\lambda)$

! Avem o teoremă: Dacă $\hat{\lambda}$ este EVM pt λ atunci pt $(\forall)$ funcție g avem că $g(\hat{\lambda})$ este EVM pt $g(\lambda)$

$\Rightarrow \hat{\lambda}$ EVM pt $\lambda \Rightarrow g(\hat{\lambda})$ EVM pt $g(\lambda)$

$$g(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda} \cdot e^{-\hat{\lambda}}}{1-e^{-\hat{\lambda}}} = \frac{\bar{X}_n \cdot e^{-\bar{X}_n}}{1-e^{-\bar{X}_n}} \overset{\text{not}}{=} \widehat{g(\lambda)}$$ (este estimatorul lui $g(\lambda)$)

Teorema aplicațiilor continue (T.A.C.)

$X_n \xrightarrow{P} X$ atunci $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

$X_n \xrightarrow{D} X$ și $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

$\Rightarrow$ dacă $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \lambda$ atunci și $g(\bar{X}_n) \xrightarrow{P} g(\lambda)$

adică $g(\hat{\lambda}) \xrightarrow{P} g(\lambda) \Rightarrow \widehat{g(\lambda)}$ e consistent

Ex 2:

$$P_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k$$

1) $A = ?$ $E[X] = ?$ $Var[X] = ?$

$$P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} A\, P_\theta(X=k) = 1$$

P_θ = distr de prob

$$\sum_{k=0}^{\infty} A\cdot(k+1)\theta^k = A\cdot\underbrace{\sum (k+1)\theta^k}_{\frac{1}{(1-\theta)^2}} = A\cdot\frac{1}{(1-\theta)^2} = 1$$

$$\frac{A}{(1-\theta)^2} = 1 \Rightarrow A = (1-\theta)^2 \Rightarrow P_\theta(X=k) = (1-\theta)^2(k+1)\theta^k$$

$E[X] = ?$ $Var[X] = ?$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P_\theta(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(1-\theta)^2(k+1)\theta^k = (1-\theta)^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)\theta^k}_{2\theta\cdot\frac{1}{(1-\theta)^3}} =$$

$$= (1-\theta)^2\cdot 2\theta\cdot\frac{1}{(1-\theta)^3} = \frac{2\theta}{1-\theta}$$

$$E[X] = \frac{2\theta}{1-\theta}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot (1-\theta)^2 (k+1)\theta^k = (1-\theta)^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k^2 (k+1)\theta^k}_{\frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^4}} = (1-\theta)^2 \cdot \frac{4\theta+2\theta}{(1-\theta)^4} = \frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^2}$$

$$Var[X] = \frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^2} - \frac{(2\theta^2)^2}{(1-\theta)^2} = \frac{2\theta}{1-\theta^2}$$

2) $\tilde{\theta} = ?$ $\rightarrow$ met. momentelor

$P_\theta(\tilde{\theta} = 0) = ?$

$$E[X] = \overline{X} \iff \frac{2\theta}{1-\theta} = \overline{X} \iff 2\theta = (1-\theta)\overline{X} \iff 2\theta = \overline{X} - \theta\overline{X}$$

$$2\theta + \theta\overline{X} = \overline{X}$$

$$\theta(2+\overline{X}) = \overline{X}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\overline{X}}{2+\overline{X}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\overline{X}}{2+\overline{X}}$$

$$P_\theta(\tilde{\theta}=0) = P_\theta\left(\frac{\overline{X}}{\overline{X}+2}=0\right) = P_\theta(\overline{X}=0) = P_\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = 0\right) = P_\theta(x_j=0) = A\cdot(0+1)\theta^0$$

$$= A = (1-\theta)^2$$

3) $\hat{\theta} = ?$ (E.V.M)

$$L(x_1,\dots,x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} (\theta-1)^2 \theta^{x_i}(x_i+1) = (\theta+1)^{2n} \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(x_i+1) =$$

$$= (\theta-1)^{2n} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n}(x_i+1) = \ln L(\theta|x) = 2n\ln(\theta-1) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\theta + \ln\prod_{i=1}^{n}(x_i+1) =$$

$$= 2n\ln(\theta-1) + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln\theta + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i+1)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta|x)}{\partial\theta} = 0$$

$$^{\theta)}\frac{2n}{\theta-1} + {}^{\theta-1)}\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$2n\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$2n\theta + \theta\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\theta\left(2n + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n + \sum_{i=1}^{n} x_i} \Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n + \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}_n$$

$$\hat{\theta} = \frac{n\bar{x}_n}{2n + n\bar{x}_n} = \frac{\bar{x}_n}{2+\bar{x}_n}$$

Verif că e pct de maxim adică

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\theta|x)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

$$\left.\left(\frac{-2n}{(\theta-1)^2} - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right|_{\theta=\hat{\theta}} = -\left.\left(\frac{2n}{(\theta-1)^2} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0 \quad \text{Evident}$$

Ex3:

a) MIRC pt $N(\mu, 1)$; μ necunoscut

$1 \to \sigma$

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}} \rightarrow \text{se știe din teorie}$$

$$MIRC = \frac{1}{n E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x,\mu)}{\partial \mu}\right)^2\right]}$$

$$\ln f(x,\mu) = \ln\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \qquad \text{Din enunț } \sigma = 1$$

$$= \ln\left[\frac{1}{1\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}\right] = \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \ln e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}} = -\ln\sqrt{2\pi} - \frac{(x-\mu)^2}{2}$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\mu)}{\partial \mu} = -2(x-\mu)\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{(-1)}_{(x-\mu)'} = x-\mu$$

Calculez media:

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x,\mu)}{\partial \mu}\right)^2\right] = E[(x-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\mu)\cdot(x-\mu)^2 dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} \cdot (x-\mu)^2 \, dx$$ înlocuire inutilă

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\mu) \cdot (x-\mu)^2 dx}_{} = 1$$

asta este $Var[X]$ pt că $Var[X] \stackrel{def}{=} E[(X - \underbrace{E[X]}_{=\mu})^2]$

Știm din teorie că distrib. normală are $Var[X] = \sigma^2$

$\sigma = 1 \Rightarrow Var[X] = 1$

$\Rightarrow MIRC = \frac{1}{n \cdot 1} = \frac{1}{n}$

b) Det estimatorul obținut prin M.M. și verif dacă e eficient.

$X \sim N(\mu, 1)$

$\left.\begin{array}{l} E[X] = \mu \\ E[X] = \overline{X}_n \end{array}\right\} \Rightarrow \mu = \overline{X}_n$ → media de selecție

media teoretică

sau orice alt estimator

Verific eficiența, adică: $Var(\mu) = MIRC$

$Var[\mu] = Var[\overline{X}_n] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \underbrace{Var[X]}_{\sigma^2}$

$= \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n}$

Cum $\sigma = 1 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \text{deoarece } Var[\mu] = \frac{1}{n} \\ \text{și } MIRC = \frac{1}{n} \text{ (de la pct a)} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu$ este eficient.

Ex 4 :

eșantion de talie 20

$X \sim Bern(\theta)$

$P_\theta(X_i = x_i) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$

a) $\hat{\theta} = ?$ EVM

Pas 1: scriu fct de verosimilitate

$$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} = (1-\theta)^n \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} =$$

$$= (1-\theta)^n \cdot \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Pas 2: logaritmez:

$$\ln L(x|\theta) = \ln(1-\theta)^n + \ln \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} + \ln(1-\theta)^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} =$$

$$= n\ln(1-\theta) + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln(1-\theta)$$

Pas 3: derivez

$$\frac{\partial \ln L(x|\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{1-\theta}\cdot(-1) + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{1-\theta}\cdot(-1)$$

$$= \frac{-n}{1-\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\theta} = \frac{-n\theta + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i + \theta\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta(1-\theta)}$$

Pas 4: rezolv ec. de verosimilitate

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow -n\theta + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i + \theta\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$-n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i + \theta\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow n\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}_n$$

$\hat{\theta}_{20} = \frac{11}{20} = 0,55$ suma valorilor din eșantion

eșantion de talie 20

Informația Fisher

$$I_n = n\, E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x|\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

sau

$$I_n = -n\, E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_\theta(x|\theta)\right]$$

$$f(x,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$$

$$\ln f(x,\theta) = \ln \theta^x + \ln(1-\theta)^{1-x} = x\ln\theta + (1-x)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta} = \frac{x}{\theta} + \frac{1-x}{1-\theta}\cdot(-1) = \frac{x}{\theta} - \frac{1-x}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-x}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{x}{(1-\theta)^2}$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{-x}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{x}{(1-\theta)^2}\right] \overset{iid}{=} \frac{-E[x]}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{E[x]}{(1-\theta)^2} =$$

$$= \frac{-\theta}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

* Se știe din teorie că media la Bernoulli este $E[X] = \theta$

$$\Rightarrow I_1 = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\theta} + \frac{1}{(1-\theta)^2} - \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

$$I_n = n I_1.$$