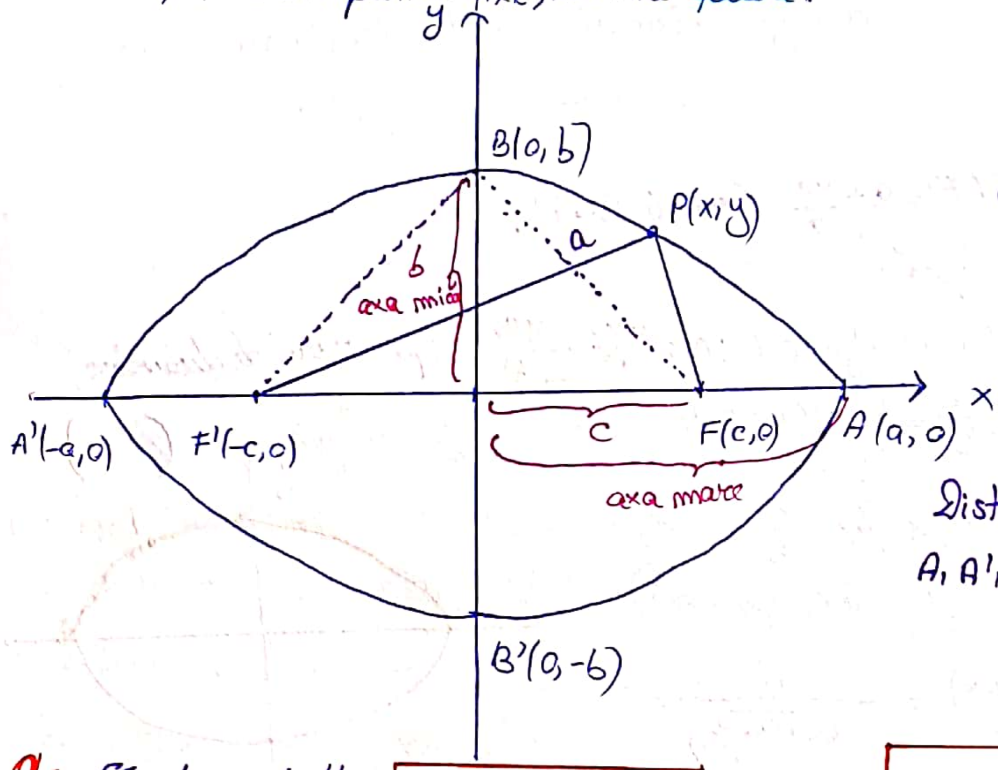
Milosteanu Andreea
Mihoci Valentina

Tutoriatul 7
Geometrie I

1.12.2021

Elipsa

Def. Elipsa reprezintă locul geometric al punctelor P din plan care verifică $PF+PF'=2a, a>0$, unde F și F' sunt puncte fixe, numite focare.



Avem relația $a^2=b^2+c^2$, deci $a>c, a>0, b>0$

Focarul mereu se află pe axa mare!

Distanța focală: $FF'=2c$

A, A', B, B' – vârfurile elipsei

Obs. a) Ecuația redusă: $\boxed{\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

ecuația unei elipse de centru $O(0,0)$

$$\boxed{\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

ecuația unei elipse de centru $P_0(x_0,y_0)$.

1.° Int $\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$.

2°. Ext $\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$.

b) Ecuațiile parametrice: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t, t\in[0,2\pi) \end{cases}$

Obs. Aria elipsei = Aria cerc $\cdot\cos\alpha=\pi a^2\cdot\frac{b}{a}=\pi ab$.

c) Ecuația polară: Avem $P(r,\theta)$ coordonate polare, deci $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$ sunt coordonate carteziene.

$$r=\frac{ab}{\sqrt{a^2-c^2\cos^2\theta}}=\frac{b}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos^2\theta}}$$

Def. Notăm $e = \frac{c}{a}$ excentricitatea. Aceasta măsoară devierea de la a fi cerc.

Obs. Dacă $c \to 0$, atunci elipsa $\to$ cerc.

Dacă $c \to a$, atunci elipsa $\to$ dreaptă.

Cele două directoare ale elipsei sunt $d \cup d'$: $x = \pm \frac{a^2}{c}$.

Propoziție Elipsa poate fi definită ca locul geometric al punctelor $P(x,y)$ care verifică

$$\frac{PF}{dist(P,d)} = \frac{PF'}{dist(P,d')} = e.$$

De asemenea, $PF = a - \frac{xc}{a}$ și $PF' = a + \frac{xc}{a}$ (razele focale).

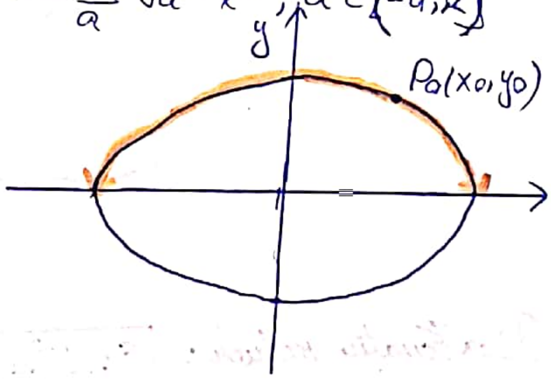
Probleme de tangență la elipsă

1° Tangenta într-un punct $P_0(x_0,y_0) \in \mathcal{E}$: $d: \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ (procedeul de dedublare)

Dem. Considerăm elipsa $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $a \in [-a, R]$

Considerăm funcția $f: (-a,a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a}{b}\sqrt{a^2-x^2}$

(partea superioară)



$$f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= -\frac{bx}{a} \cdot \frac{b}{ay} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{x}{y} \longrightarrow \underline{\text{panta}}$$

Ecuația tangentei în $P_0(x_0,y_0)$ la graficul lui f este: $y - y_0 = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$

$$\Rightarrow a^2 y_0 (y - y_0) + x_0 b^2 (x - x_0) = 0 \,/ : a^2 b^2$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \underbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)}_{=1} = 0 \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$

deoarece $P_0 \in \mathcal{E}$

$\square$

2° Tangenta de direcție dată m: $d: y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ (ecuația magică).

Dem. Fie dreapta $d: y = mx + n$, m dată și n necunoscută. Intersectăm dreapta d cu elipsa $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (un punct unic).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1 \; / \cdot a^2b^2 \Rightarrow$$ ajungem la ecuația de gradul al II-lea

$$x^2(b^2+a^2m^2) + 2mna^2x + a^2(n^2-b^2) = 0, \text{ cu } \Delta_x = 4n^2m^2a^4 - 4(b^2+a^2m^2) \cdot (n^2-b^2)a^2 = 0 \,/ : 4a^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ În urma calculelor, obținem $n = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

Deci, $y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$ $\square$.

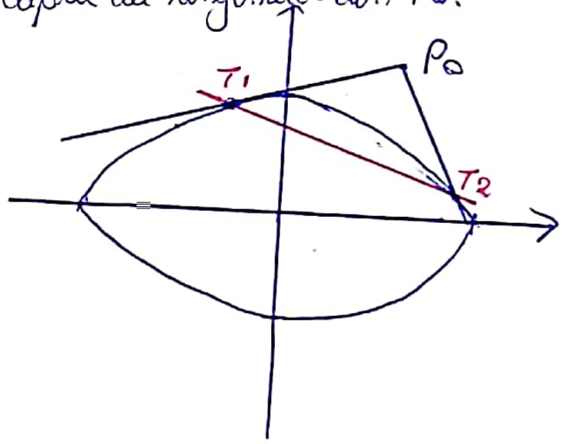
3° Tangenta dintr-un punct $P_0(x_0, y_0) \in Ext\,\mathcal{E}$.

Luăm ecuația magică $d: y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$, $P_0 \in d \Rightarrow y_0 = mx_0 \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$.

Obținem ecuația de gradul al II-lea $m^2(x_0^2-a^2) - 2mx_0y_0 + y_0^2 - b^2 = 0$, aflăm cele două pante m_1, m_2. Găsim tangentele în P_0: $y - y_0 = m_K(x - x_0)$, $K = \overline{1,2}$.

Obs: Polara unui punct $P_0 \in Ext\,\mathcal{E}$.

Fie $T_K(x_K, y_K) \in \mathcal{E}$, $K = \overline{1,2}$ punctele de contact cu elipsa ale tangentelor din P_0.



Fie: $d_1 = P_0T_1: \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$,

$d_2 = P_0T_2: \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1$,

ecuațiile tangentelor în T_K, $K = \overline{1,2}$ obținute prin dedublare.

Polara lui P_0 este $d_0: \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

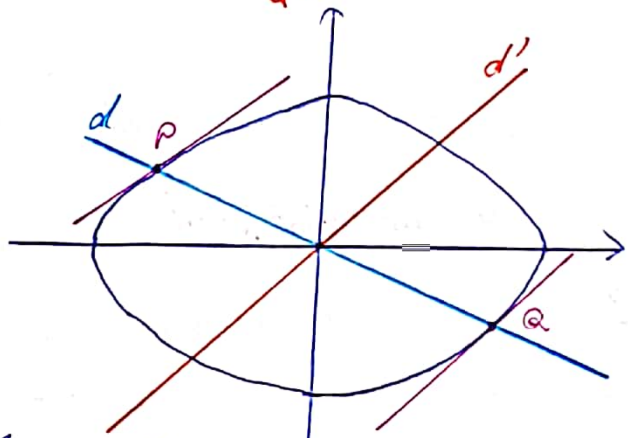
Cum $T_1, T_2 \in d_0 \Rightarrow d_0 = T_1T_2$. Deci polara lui P_0 este coarda care unește punctele de tangență T_1 și T_2.

Def. *Latus rectum* este coarda care trece prin focarul F, respectiv F' și este paralelă cu directoarele sau este perpendiculară pe axa transversă.

Obs. Lungimea semilatus rectum este $l = a(1-e^2)$.
Așadar, lungimea latus rectum este $2a(1-e^2)$.

Def. Fie $d: y = mx$ și $d': y = m'x$ diametrii ai elipsei $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
d și d' se numesc **diametrii conjugați** $\Leftrightarrow m \cdot m' = -\frac{b^2}{a^2}$.

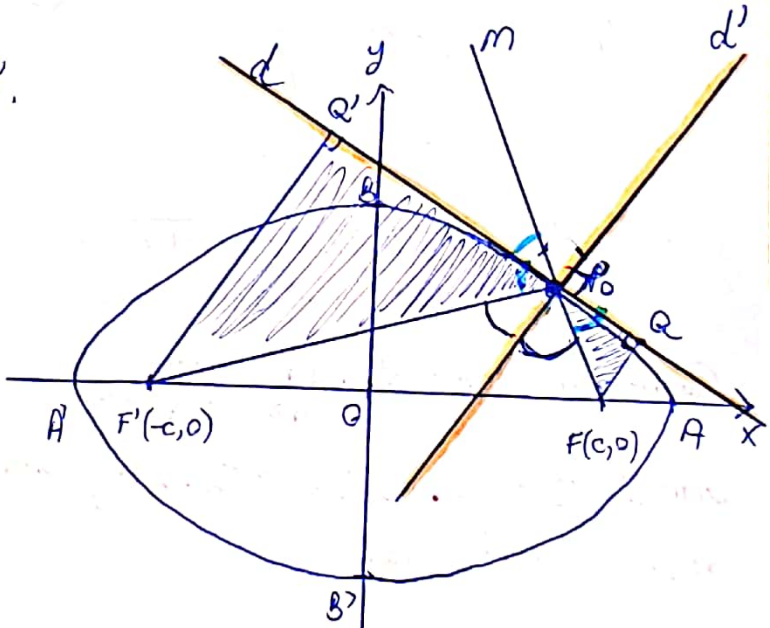
Obs. Diametrul d' este paralel cu tangentele în P și Q, unde $d \cap \mathcal{E} = \{P, Q\}$.



Proprietate: Locul geometric al mijloacelor coardelor paralele cu diametrul $d: y = mx$ este diametrul său conjugat d'.

Proprietatea optică a elipsei

Tangenta și normala într-un punct $P_0(x_0, y_0)$ la elipsă reprezintă bisectoarele unghiurilor formate de razele focale P_0F și P_0F'.



Fie $d: \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$ tangenta în P_0 la elipsă.

Fie $FQ \perp d$ și $F'Q' \perp d'$.

$P_0F = a - \frac{x_0 c}{a}$ și $P_0F' = a + \frac{x_0 c}{a}$

$$FQ = dist(F, d) = \frac{\left|\frac{c x_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$$

$$F'Q' = dist(F', d) = \frac{\left|\frac{-c x_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$$

$$\frac{FQ}{F'Q'} = \frac{|c x_0 - a^2|}{|c x_0 + a^2|} = \frac{a - \frac{c x_0}{a}}{a + \frac{c x_0}{a}} = \frac{P_0F}{P_0F'}$$; Deducem că $\Delta FQP_0 \sim \Delta F'Q'P_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\widehat{FP_0Q}) = m(\widehat{F'P_0Q'})$

Fie d' normala în P_0. Cum $d \perp d' \Rightarrow m(\widehat{FP_0m}) = m(\widehat{F'P_0m})$, $d' \cap FF' = \{m\}$.
Așadar, $d = bis. \sphericalangle F'P_0m$ și $d' = bis. \sphericalangle FP_0F'$.

Elipsa Avem relația $a^2=b^2+c^2$, unde $a>c$; $a>0$

Def. LG al punctelor P din plan care verifică

$PF+PF'=2a$; F, F' puncte fixe

P arbitrar din plan ; $P(x,y)$

Alegem axele convenabil : $FF'=Ox$; $BB'=Oy$

unde BB' – mediatoarea lui $[FF']$

Însă, alegem $P\equiv B$.

După cum am ales axele convenabil

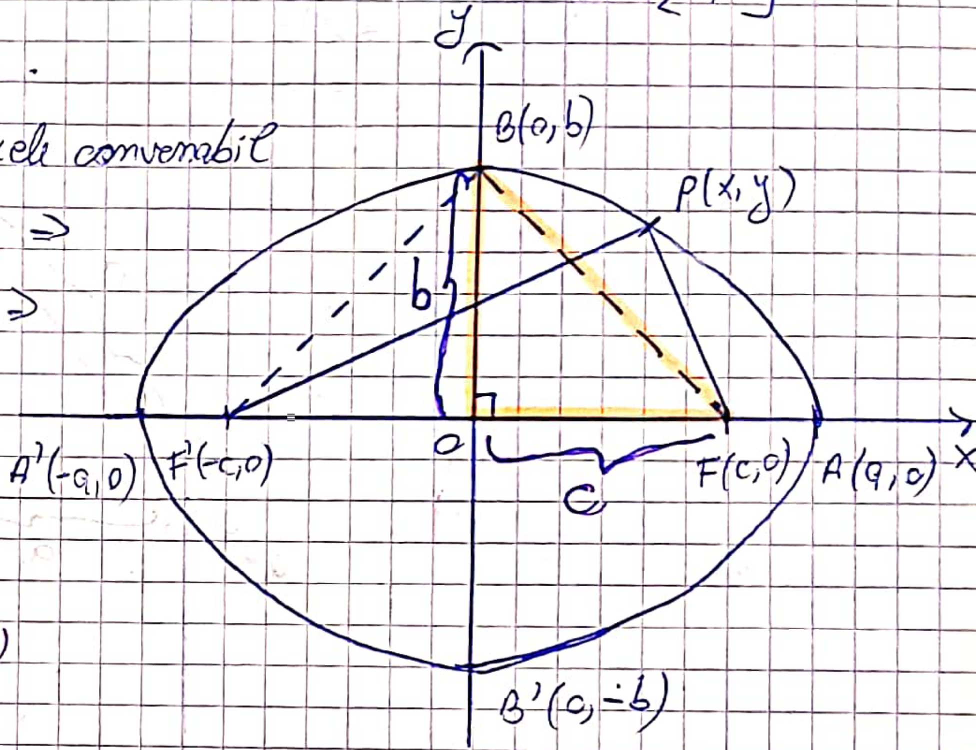
$\Rightarrow \Delta BOC$ – drept. în O $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ teorema lui Pitagora $\Rightarrow$

$\Rightarrow BF^2=BO^2+\cancel{OC}\,OF^2$

Evident, $\begin{cases} BO=b \\ OF=c \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{BF^2=b^2+c^2}$ (1)



Știm că $BF+BF'=2a \Leftrightarrow \sqrt{c^2+b^2}+\sqrt{c^2+b^2}=2a$

$2\cdot\sqrt{c^2+b^2}=2a \;/:2$

$\sqrt{c^2+b^2}=a \;/^2 \Rightarrow \boxed{c^2+b^2=a^2}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow BF^2=a^2$, deci $a^2=b^2+c^2$.

Scanned with CamScanner