Milosteanu Andreea
Mihoci Valentina

Tutoriat 3
Geometrie I

3.11.2021

1. Rotații

Fie M un punct fixat în $\mathcal{E}_2$ și $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$ un număr dat. Se numește **rotație de centru M și unghi orientat α** o aplicație $\mathcal{R}_{M,\alpha} : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, $\mathcal{R}_{M,\alpha}(P) = P'$, unde:

1° $d(M,P) = d(M,P')$;

2° $m(\sphericalangle PMP') = \alpha$.

Obs. Orice rotație $\mathcal{R}_{M,\alpha}$ este o izometrie.

Propoziție: Dacă o izometrie are un unic punct fix M, atunci este o rotație de centru M.

Ecuația unei rotații

(i) de centru origine și unghi orientat α: $\mathcal{R}_{O,\alpha}$, $O(0,0)$

$$\boxed{X' = A(\alpha)X \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

(ii) de centru $M(a,b)$ și unghi orientat α: $\mathcal{R}_{M,\alpha}$, $M(a,b)$

$$\boxed{X' = A(\alpha)X + X_0 \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Teoremă: Fie $d_1 \cap d_2 = \{M\}$. $\mathcal{S}_{d_2} \circ \mathcal{S}_{d_1} = \mathcal{R}_{M,2\alpha}$, unde $m(\widehat{d_1, d_2}) = \alpha$ (unghi orientat)

Reciproc, orice rotație $\mathcal{R}_{M,\beta}$ se poate scrie $\mathcal{S}_{d_2} \circ \mathcal{S}_{d_1}$, unde $d_1 \cap d_2 = \{M\}$, $m(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{1}{2}\beta$ (unghi orientat).

Obs. Dacă dreptele $\underbrace{d_1 \text{ și } d_2 \text{ sunt perpendiculare}}_{m(\widehat{d_1,d_2}) = \frac{\pi}{2}}$, atunci $\mathcal{S}_{d_2} \circ \mathcal{S}_{d_1} = \underset{\mathcal{R}_{M,\pi}}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{S}_M}}$, unde $d_1 \cap d_2 = \{M\}$.

Teoremă: $\mathcal{R}_{M,\alpha} \circ \mathcal{T}_{\vec{u}} = \mathcal{R}_{N,\alpha}$.

Teoremă: $\mathcal{R}_{N,\beta} \circ \mathcal{R}_{M,\alpha} = \begin{cases} \mathcal{R}_{P,\alpha+\beta}, & \alpha+\beta \neq 2k\pi \\ \mathcal{T}_{\vec{u}}, & \alpha+\beta = 2k\pi. \end{cases}$

2. Caracterizarea izometriilor în funcție de numărul de puncte fixe

Fie $f \in O(\mathcal{E}_2)$ o izometrie cu originea $O(0,0)$ ca punct fix. Atunci ecuația lui f este $X' = AX$, unde $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ și $A \in O(2)$ i.e. $AA^T = I_2$ (matrice ortogonală)

Reciproc, ecuația $X' = AX$, unde $A \in O(2)$, reprezintă ecuația unei izometrii cu punct fix originea $O(0,0)$.

Clasificare

1° $f \in O(2)$ de speță 1 $\Leftrightarrow \det A = 1$

(i) $f = T_{\vec{u}}$, $A = I_2$

Dacă $\vec{u} = 0$, atunci $f = id_{\mathcal{E}_2}$ și există o infinitate de puncte fixe.

Dacă $\vec{u} \neq 0$, atunci nu există puncte fixe.

(ii) $f = R_{m,\alpha}$, $A = A(\alpha)$, m = unicul punct fix

2° $f \in O(2)$ de speță 2 $\Leftrightarrow \det A = -1$

(i) $f = S_d$, d = dreaptă de puncte fixe

(ii) $f = T_{\vec{u}} \circ S_d$ (glide reflection), unde dreapta d are direcția lui $\vec{u}$.

$\hookrightarrow$ nu există puncte fixe