Examen la TEORIA MĂSURII ŞI INTEGRĂRII [1]
an II, sem. I, grupele 201, 202, 221, 222

1.09.2021

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. a) Fie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Lebesgue, unde n este un număr natural, $n \geq 1$. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $f(x) \geq 0$ a.p.t. (aproape peste tot).

(ii) $\int_E f(x)dx \geq 0$ pentru orice mulţime $E \subseteq \mathbb{R}^n$ măsurabilă Lebesgue.

b) Fie A, B două mulţimi măsurabile Lebesgue din $\mathbb{R}^2$. Este adevărat că mulţimile $A + B$ şi $A \cup B$ sunt măsurabile Lebesgue? Justificaţi!

Subiectul 2. a) Considerăm mulţimile

$$A = [5, 12] \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}; \qquad B = \{(x, 1) \in \ \mathbb{R}^2 | \ x \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Decideţi dacă mulţimile A şi B sunt măsurabile Lebesgue şi, dacă este posibil, calculaţi $\lambda(A)$ şi $\lambda(B)$.

b) Pentru orice $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R})$ definim $\mu(A) = \int_A \frac{1}{x^2} 1_{[1,\infty)} d\lambda(x)$. Demonstraţi că $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}), \mu)$ este un spaţiu cu măsură şi calculaţi $\mu((-4, \infty))$.

Subiectul 3. Considerăm funcţia $f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{dacă } \ x \in (1, 3] \cup \{0\} \\ n^2, & \text{dacă } \ x \in (\frac{1}{(n+1)^5}, \frac{1}{n^5}], \ \text{pentru } \ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Decideţi dacă funcţia f este măsurabilă Lebesgue.

b) Decideţi dacă funcţia f este integrabilă Lebesgue.

Subiectul 4. Calculaţi integrala curbilinie următoare în două moduri (direct şi folosind teorema lui Green):

$$I = \int_\gamma (x + 3)dx + (xy + 1)dy,$$

unde γ este conturul triunghiului OAB, $O(0, 0)$, $A(-4, 4)$ şi $B(8, 8)$, parcurs în sens trigonometric.

Subiectul 5. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{dacă } \ x \in (0, 1) \\ 0, & \text{în rest } \ . \end{cases}$$

a) Demonstraţi că funcţia f este integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}$ şi calculaţi $\int_\mathbb{R} f d\lambda$.

[1] **Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect se noteaza se la 1 la 10. Rezolvările trebuie scanate şi trimise împreună cu subiectul primit sub forma unui singur fişier pdf in formularul Google corespunzător. Succes!**

b) Fie $(r_n)_{n\geq 1}$ o enumerare a mulţimii numerelor raţionale $\mathbb{Q}$. Definim funcţia $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ prin

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} f(x - r_n)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că F este integrabilă Lebesgue şi este bine definită.