

**Examen la analiză matematică<sup>1</sup>**  
**an I, sem. I - seria 10**  
**22.01.2021**

Numele și prenumele .....

Grupa .....

Punctaj seminar .....

**Subiectul 1. a)** Fie  $A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n + 2 : n \in \mathbb{N} \right\} \cup [(-9, -8) \cap \mathbb{Q}]$  o submulțime a mulțimii numerelor reale  $\mathbb{R}$ . Determinați interiorul, aderența, mulțimea punctelor de acumulare și frontiera mulțimii  $A$ . Decideți dacă mulțimea  $A$  este compactă sau conexă. Justificați!

b) Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+(2n-1)} \right).$$

**Subiectul 2. a)** Studiați convergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{xn}{3n+1} \right)^n$$

în funcție de valorile parametrului  $x \in (0, \infty)$ .

b) Studiați convergența șirului  $\left( \left( \frac{5n}{3n+1} \right)^n \right)_{n>0}$  și calculați limita sa (în caz că aceasta există).

**Subiectul 3.** Considerăm funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{x^2} \right) + \frac{\ln(1+2x)}{x}, & \text{dacă } x \in (0, \infty), \\ 2, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

i) Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției  $f$ .

ii) Studiați uniform continuitatea funcției  $f$ .

**Subiectul 4.** Considerăm șirul de funcții  $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_n(x) = \frac{(e^x + 1) \cdot x^n}{1 + x^n},$$

pentru orice  $x \in (0, 1)$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Studiați convergența simplă și uniformă a șirului  $(f_n)_{n \geq 1}$ .

**Subiectul 5.** Fie  $f_n, g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții definite prin

$$f_n(x) = \int_0^1 |x^n - t^n| dt, \text{ pentru orice } x \in [0, 1], n \in \mathbb{N} \text{ și}$$

,

---

<sup>1</sup>Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valorează 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{dacă } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ x - x^2, & \text{dacă } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

**i)** Determinați

$$\inf_{x \in [0, 1]} f_n(x) \text{ și } \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x).$$

**ii)** Determinați numărul  $n \in \mathbb{N}$  pentru care funcția  $g_n$  are cel puțin un punct în care este derivabilă.