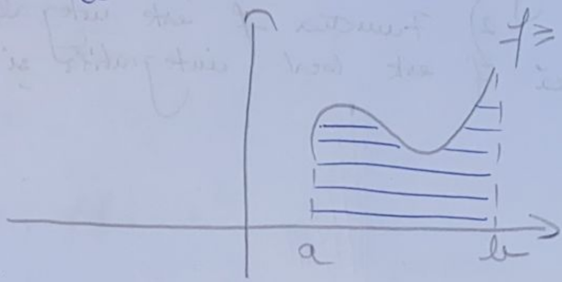
CURS 1.

(svlădoiu@fmi.unibuc.ro)

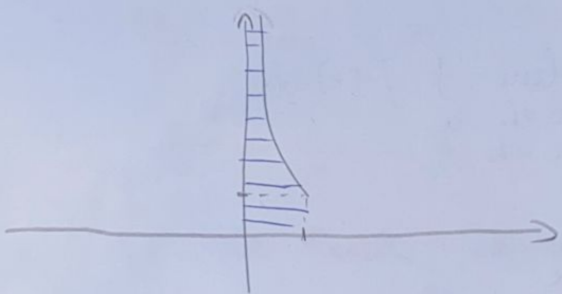
Integrale improprii

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$. $\int_a^b f(x)\,dx$

$f : [a, b) \to \mathbb{R}$.



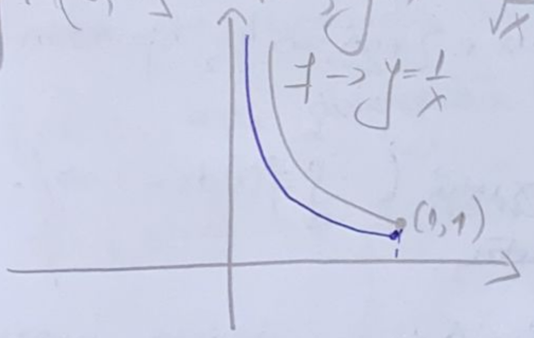
$f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$



$\tilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ \alpha, & x = 0. \end{cases}$

$\tilde{f}$ nu e mărginită!
$\Downarrow$
$\tilde{f}$ nu e integrabilă Riemann.

$g : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

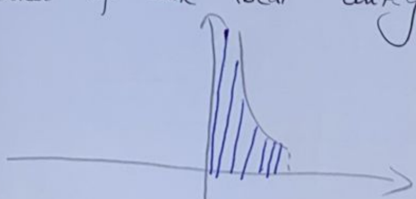


Definiție: Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

1) Spunem că f este local integrabilă, dacă f este integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c \in (a, b)$.

2) Funcția f este integrabilă în sens generalizat dacă f este local integrabilă și există $\lim\limits_{\substack{c \to b \\ c < b}} \int_a^c f(x)dx \in \mathbb{R}$.

(este finită).



Notăm $\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\downarrow} = \lim\limits_{\substack{c \to b \\ c < b}} \int_a^c f(x)\, dx.$

S.n. integrala improprie a funcției f.

! Dacă f este integrabilă în sens generalizat spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x)\, dx$ este convergentă. !

Dacă $\lim\limits_{\substack{c \to b \\ c < b}} \int_a^c f(x)\, dx \in \{+\infty, -\infty\}$, spunem că integrala improprie există ($\int_a^b f(x)dx = +\infty / -\infty$), dar nu e convergentă.

Dacă $\nexists \lim\limits_{\substack{c \to b \\ c < b}} \int_a^c f(x)dx \to$ integrala improprie nu există.

$\lim\limits_{\substack{c \to 0 \\ c>0}} \int_c^1 f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{c \to 0 \\ c>0}} (2 - 2\sqrt{c}) = 2 \Rightarrow f$ integrabilă în sens generalizat

și $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$.

(2) $f : [0,3) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

$\tilde{f} : [0,3] \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) = x^2$.

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to 3 \\ c>3}} \int_0^c f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to 3 \\ c>0}} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^c \right) =$$

$$= \lim_{\substack{c \to 3 \\ c>3}} \frac{c^3}{3} = \frac{3^3}{3} = 9.$$

Obs! f este local integrabilă!

(3) $f : (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$.

• f local integrabilă

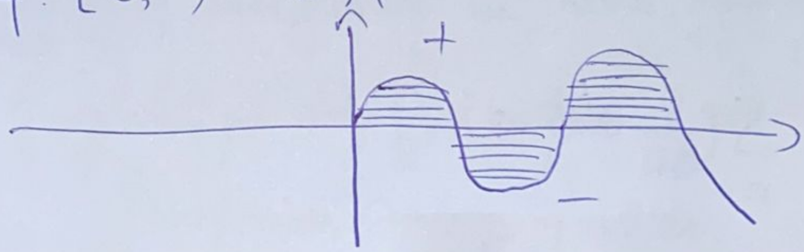
• $\int_c^1 f(x)\,dx = \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x \big|_c^1 = \ln 1 - \ln c = -\ln c$.

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{c \to 0 \\ c>0}} \int_c^1 f(x)\,dx = +\infty$.

$\Rightarrow$ f. are integrală improprie

$\int_0^1 f(x)\,dx$ este divergentă (există și nu e finită)

(4). $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$



Observații!

1. Se poate defini analog pentru intervale de tip $[a,b]$. ($f:(a,b] \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a<b$)

2. Dacă f este integrabilă în sens generalizat spunem că integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

(Dacă $\lim\limits_{\substack{c \to b \\ c<b}} \int_a^b f(x)\,dx$ nu e finită sau nu există spunem că integrala nu este divergentă).

3. Dacă $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, spunem că f e integrabilă în sens generalizat dacă $\exists\, c \in (a,b)$ a.î. f este integrabilă în sens generalizat pe $(a,c]$ și $[c,b)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{\in \mathbb{R}}.$$

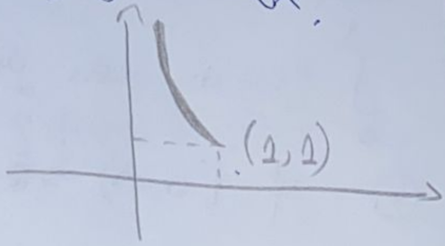
Obs! f local integrabilă dacă f este integrabilă Riemann pe orice $[c,d] \subseteq [a,b)$

$$\begin{bmatrix} (a,b] \\ (a,b) \end{bmatrix}$$

Exemple: ① $f:(0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

f e local integrabilă

(f e integrabilă Riemann pe $[c,1]$, $\forall\, c \in (0,1)$)



• $c \in (0,1)$

$$\int_c^1 f(x)\,dx = \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = 2 - 2\sqrt{c}.$$

f local integrabilă ($\forall c \in (0,\infty)$, f. integrabilă Riemann pe $[0,c]$).

$c \in (0,\infty)$, $\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^c \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^c = 1-\cos c$

$\Rightarrow \nexists \lim_{c\to\infty} \int_0^c f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^\infty \sin x\,dx$ nu există

$\downarrow$

DIVERGENTĂ !!!

Propoziția 1: Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ și $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ local integrabilă și mărginită. Atunci ① f este integrabilă în sens generalizat.

② $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x\in[a,b) \\ \alpha, & x=b. \end{cases}$

funcția $\tilde{f}$ este integrabilă Riemann și

$\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Observație! Propoziția 1. nu rămâne adevărată dacă a și b nu sunt finite!! (vezi. ex. 4)

Dem: Temă!

Propoziția 2: Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a\in\mathbb{R}$), $a<b$ și $g, f: [a,b)\to\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Atunci dacă f, g sunt integrabile în sens generalizat, rezultă:

$f+g$, αf

sunt integrabile în sens generalizat

și $\begin{cases} \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \\ \int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx. \end{cases}$

Dem: f, g sunt integrabile în sens gen[eralizat]
$\Rightarrow f, g$ local integrabile

$\exists \lim_{\substack{c\to b \\ c<b}} \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$

$\exists \lim_{\substack{c\to b \\ c<b}} \int_a^c g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$

Atunci $f+g$ local integrabilă.

• $\underbrace{\lim_{\substack{c\to b \\ c<b}} \int_a^c (f+g)(x)\,dx}_{} = \lim_{\substack{c\to b \\ c<b}} \left[\int_a^c f(x)dx + \int_a^c g(x)dx\right].$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f+g$ integrabilă în sens generalizat și

$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g.$

<u>Exemplu</u>: $f:(0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

f - integrabilă în sens generalizat

$f \cdot f = f^2 : (0,1] \to \mathbb{R}, f^2(x) = \frac{1}{x}.$

$\Rightarrow f^2$ nu este integrabilă în sens generalizat.

<u>Obs</u>! În general, ~~[illegible]~~ produsul fg a două funcții integrabile în sens generalizat nu este o funcție integrabilă în sens generalizat!!

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$. local integrabilă

Dacă f este integrabilă în sens generalizat

$\Updownarrow$

$\exists\, c \in (a, b)$, f - integrabilă în sens generalizat pe $(a, c]$, $[c, b)$.

$\Updownarrow$

$\forall\, c \in (a, b)$, $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ sunt convergente

$a < c_1 < c_2 < b$.

$\int_a^{c_1} f(x)\,dx \to$ convergentă.

$$\int_a^{c_2} f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_1 > 0}} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_2 \to 0 \\ \varepsilon_2 > 0}} \int_c^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0 \\ \varepsilon_1 > 0 \\ \varepsilon_2 > 0}} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \quad \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} x\,dx = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-a}^{a} \right) = 0.$$

$\underset{0}{\parallel}$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\infty}^{c} x\,dx \\ \displaystyle\int_{c}^{+\infty} x\,dx\end{array}\right\} \text{divergente}$$

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b x\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \left(\frac{x^2}{2}\Big|_a^b\right) =$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \underbrace{\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)}_{\infty-\infty} \;???$$

<u>Propoziția 3</u>! (Criteriul lui Cauchy).

Fie $a\in\mathbb{R}$, $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ local integrabilă.

Atunci f este integrabilă în sens generalizat dacă și numai dacă

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, c_\varepsilon\in(a,b) \text{ a.î. } \forall\, c', c''\in(c_\varepsilon, b)$$

$$\left|\int_a^{c'} f(x)\,dx - \int_a^{c''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$