Problema 1. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ deschisă și $f : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1

Folosind T. Fubini arătați că:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad , \forall (x,y) \in D.$$

Soluție Presupunem că există $(x_0, y_0) \in D$ a.î.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Să presupunem că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) > \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Fie

$$\alpha := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) > 0.$$

Deoarece f este de clasă C^2, există $\underset{(x_0,y_0)}{\overset{}{[a,b]\times[c,d]}} \subset D$.
a.î.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) > \frac{\alpha}{2}, \forall (x,y) \in [a,b]\times[c,d]$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right] dx\,dy > 0 \qquad (1)$$

Leibniz Newton: Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)\,dx\,dy \right) =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,c) \right) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,d)\,dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,c)\,dx$$

$$= f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c) \quad (2)$$

Similar se arată că

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,dx\,dy = f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c)$$

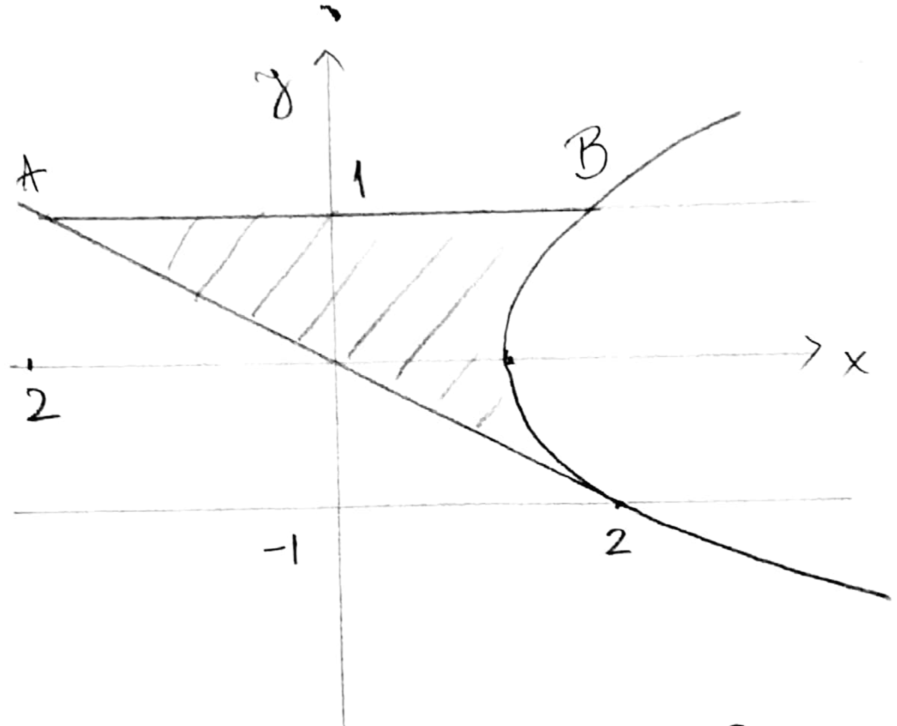
Din (2) și (3) $\Longrightarrow$ $$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] dx\,dy = 0. \quad (4)$$

(4) contrazice (1) Așadar presupunerea inițială este falsă!

Problema 2. Fie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y^2 + 1, |y| \leq 1, x + 2y \geq 0\}$

și $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^2 + 1, |y| < 1, x + 2y \geq 0\}$

Arătați că $A, B \in J(\mathbb{R}^2)$ și calculați $\lambda(A)$ și $\lambda(B)$.



Exercițiu: Fie $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann

și a.î. $\varphi(y) \leq \psi(y), \forall y \in [c,d]$. Atunci mulțimea

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\} \in J(\mathbb{R}^2)$$

și $\lambda(\Gamma) = \int_c^d (\psi(y) - \varphi(y))\, dy$.

(Vezi exercițiul 6, Seminar 11 și Observațiile)

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, -2y \leq x \leq y^2 + 1\}$

$\varphi; \psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) = -2y$ și $\psi(y) = y^2 + 1$

sunt integrabile Riemann pe $[c,d]$. Evident $\varphi(y) \leq \psi(y)$
$\forall y \in [-1,1]$.

Deci $A \in J(\mathbb{R}^2)$ și $\lambda(A) = \int_{-1}^{1} (\psi(y) - \varphi(y))\, dy$

$$\lambda(A) = \int_{-1}^{1} (y^2+1+2y)\,dy = \int_{-1}^{1} (y+1)^2\,dy = \frac{(y+1)^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

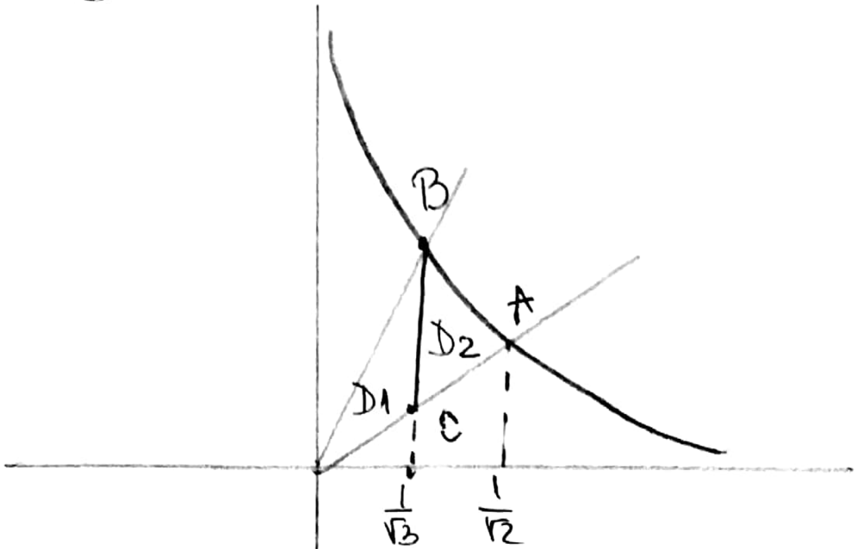
$B = A \setminus (G_f \cup [AB])$

$G_\varphi, G_f \in J(\mathbb{R}^2)$ și $\lambda(G_\varphi) = \lambda(G_f) = 0$ (sunt graficele unor funcții integrabile Riemann; vezi Observ. Ex 6, Sem 11)

$[AB] \in J(\mathbb{R}^2)$ și $\lambda([AB]) = 0$ (de ce?) $\Rightarrow \lambda(B) = \lambda(A) = \frac{8}{3}$

Problema 3. Fie D o mulțimea din $\mathbb{R}^2$ situată în primul cadran mărginită de curbele $y=2x$, $y=3x$, $xy=1$. Arătați că $D \in J(\mathbb{R}^2)$ și calculați $\lambda(D)$.

Soluție



$\begin{cases} 2x = y \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ y = \sqrt{2} \quad A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$

$\begin{cases} 3x = y \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ y = \sqrt{3} \quad B\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right); \ C\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}}, \ 2x \le y \le 3x\} \in J(\mathbb{R}^2)$

continue pe $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ deci int. Riemann

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}},\ 2x \le y \le \frac{1}{x}\} \in J(\mathbb{R}^2)$$

integrabile Riemann

$$D_1 \cap D_2 = [AC] \in J(\mathbb{R}^2).$$

$$\lambda([AC]) = 0.$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 \in J(\mathbb{R}^2)$$

$$\lambda(D) = \lambda(D_1 \cup D_2) = \lambda(D_1) + \lambda(D_2) - \lambda(D_1 \cap D_2)$$

$$= \lambda(D_1) + \lambda(D_2)$$

$$\lambda(D_1) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (3x-2x)\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{6}.$$

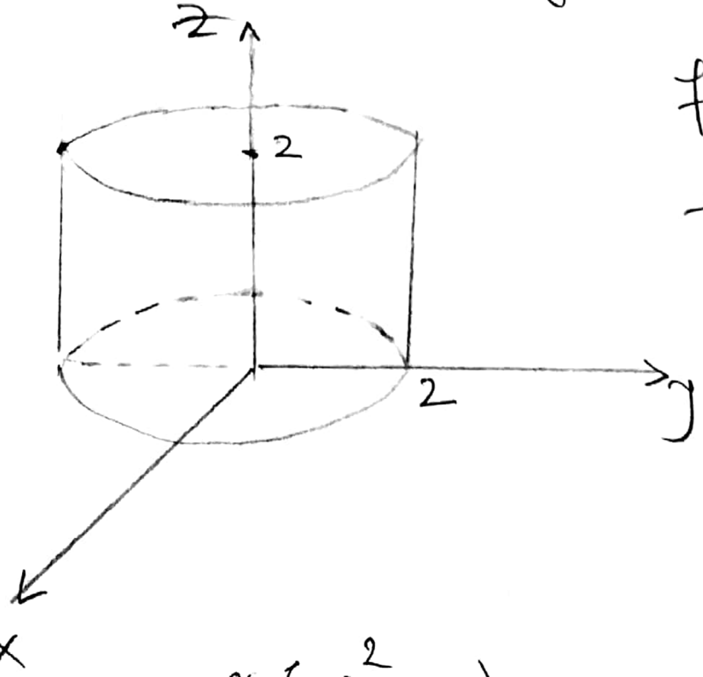
$$\lambda(D_2) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{x} - 2x\right) dx = \cdots$$

Calculați $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$; $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le 2\}$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4\}$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\le x\le 2,\ \underbrace{-\sqrt{4-x^2}\le y\le \sqrt{4-x^2}}_{\text{continue}}\}\in J(\mathbb{R}^2)$$

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \underbrace{0\le z\le 2}_{\text{continue și mărg.}},\ (x,y)\in D\}\in J(\mathbb{R}^3).$$



$f: V\to\mathbb{R}$

$f(x,y,z)=z$ integrabilă

(f cont și mărginită pe V)

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz=\iint_D\left(\int_0^2 z\,dz\right)dx\,dy=\iint_D \frac{z^2}{2}\Big|_0^2\,dx\,dy$$

$$=2\iint_D dx\,dy=2\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy\right)dx=2\int_{-2}^{2}2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$X = 2\sin t \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

$t = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad X = -2$

$t = \frac{\pi}{2} \quad , \quad X = 2$

$dx = 2\cos t \, dt.$

$$4\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t \, dt =$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2 t \, dt = 16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt$$

$$= 16 \cdot \frac{\sin 2t}{4}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 16 \cdot \frac{t}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} = 0 + 16 \cdot \frac{\pi}{2} = 8\pi.$$