Examen*

8 Februarie 2017

Exercițiul 1

Fie X o v.a. de densitate

$$f_\theta(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

cu $\theta > 0$ un parametru și A o constantă (care depinde de θ). Fie $X_1, \ldots, X_n$ un eșantion de talie $n \in \mathbb{N}^*$ din populația X.

a) Determinați constanta A și calculați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă este eficient.

Exercițiul 2

O firmă de construcții dorește să construiască o parcare pentru un imobil de 200 de apartamente. Investigând piața, firma presupune că fiecărui apartament îi pot reveni 0, 1 sau 2 mașini cu probabilitățile 0.1, 0.6, respectiv 0.3. Care este numărul minim de locuri de parcare pe care constructorul trebuie să le prevadă dacă acesta vrea să asigure, cu o probabilitate de 0.95, locuri suficiente pentru întregul imobil ?

Exercițiul 3

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 4

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație cu densitatea $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$.

a) Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ obținut prin metoda momentelor.

b) Dterminași estimatorul $\hat{\theta}$ obținut prin metoda verosimilității maxime.

c) Determinați legea variabilei $n(\hat{\theta} - \theta)$.

d) Verificați dacă estimatorul $\hat{\theta}$ este nedeplasat.

e) Calculați eroarea medie pătratică a lui $\hat{\theta}$.

f) În cazul în care $\theta = 2$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0,\ 1]$: $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$ și $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

---

*Timp de lucru 2h. Toate documentele și calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Computerele personale, telefoanele mobile/smartwatch-urile sunt **strict interzise**.

Examen 8 feb 2017

Ex 1) (ex 3 → 12. mai 2020)

$$f_\theta(x) = \begin{cases} A e^{-\frac{x}{\theta}} & ; x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \theta > 0 \\ A = ct \end{matrix}$$

$X_1, \dots, X_n$ un eșantion de talie $n \in \mathbb{N}^*$ din populația X.

a) $A = ?$, $\tilde{\theta} = ?$ (M.Mom.)

$f_\theta(x)$ = densitate $\Leftrightarrow$ 1) $\int_0^\infty A \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 1$ (cond de normare)

2) $f_\theta(x) \geq 0$

$$\int_0^\infty A \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = A \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}} dx = A \cdot (-\theta) \int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{-1}{\theta}\right)}_{=\left(\frac{-x}{\theta}\right)'} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -A\theta \, e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^\infty = -A\theta(\underbrace{e^{-\infty}}_{=0} - e^0) =$$

$$= -A\theta(0-1) = A\theta$$

$\Rightarrow A\theta = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\theta}$

$$\Rightarrow f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Pt met. momentelor tb să calculăm media teoretică $E[X]$

$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot f_\theta(x) \, dx = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \underbrace{\int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx}_{\text{gamma}}$$

Sch de var:

$\frac{x}{\theta} = t \Rightarrow x = \theta \cdot t$ $\qquad x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0$

$dx = \theta \, dt$ $\qquad x_2 = \infty \Rightarrow t_2 = \infty$

$$* \ \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

$$E[X] = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty \underbrace{\theta \cdot t}_{x} \, e^{-t} \underbrace{\theta \, dt}_{dx} = \theta \int_0^\infty t \cdot e^{-t} dt = \Gamma(a)$$

$a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow E[X] = \theta \, \Gamma(2)$

$\Rightarrow E[X] = \overline{X}_n$ $\qquad$ Condiția M.M. (media teoretică = media de selecție)

$\theta \, \Gamma(2) = \overline{X}_n \Rightarrow \theta = \frac{\overline{X}_n}{\Gamma(2)} \Rightarrow \tilde{\theta}_n = \frac{\overline{X}_n}{\Gamma(2)}$

$\tilde{\theta}$ nedeplasat : $E[\tilde{\theta}_n] = E\left[\frac{\overline{X}_n}{\Gamma(2)}\right] = \frac{1}{\Gamma(2)} E[\overline{X}_n] = \frac{1}{\Gamma(2)} \cdot E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] =$

$$= \frac{1}{\Gamma(2)} \cdot \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{\Gamma(2)} \cdot \frac{1}{n} \cdot n \, E[X] = \frac{1}{\Gamma(2)} \cdot \theta \, \Gamma(2) = \theta$$

b) $\hat{\theta}_n = ?$ (M.V.M)

Pas 1: Scriu funcția de verosimilitate

$$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}}$$

Pas 2: Logaritmez.

$$\ln L(x|\theta) = \ln \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i} = \ln \frac{1}{\theta^n} + \ln e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i} = \ln \theta^{-n} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i =$$

$$= -n \ln \theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Pas 3: Derivez în rap cu θ

$$\frac{\partial \ln L(x|\theta)}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Pas 4: Rezolv ec de verosimilitate

$$\frac{\partial \ln L(x|\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$-\theta n + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \theta n = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \theta = \overline{X}_n$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \overline{X}_n$

$\hat{\theta}$ este asimptotic eficient și consistent pt că e obținut cu M.V.M.

Ex 2:

$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$. Vrem $P(X_1 + \dots + X_{200} \le \overset{\substack{\text{nr locuri parcare} \\ \uparrow}}{n}) \ge 0,95$

T.L.C.: $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$

$\overline{X}_n = \overline{X}_{200} = \dfrac{n}{200}$

$\mu = E[X] = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 0,6 + 0,6 = 1,2$

$\sigma = \sqrt{var[X]} = E[X^2] - (E[X])^2$

$\left.\begin{array}{l} E[X^2] = 0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,6 + 2^2 \cdot 0,3 = 0,6 + 1,2 = 1,8 \\ (E[X])^2 = 1,44 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma = \sqrt{1,8 - 1,44} = \sqrt{0,36} = 0,6$

Cu $n = 200$

$P\left(\dfrac{\sqrt{200}\left(\frac{n}{200} - 1,2\right)}{0,6}\right) \ge 0,95$

T.L.C: $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$

$\Rightarrow \phi\ \dfrac{\sqrt{200}\left(\frac{n}{200} - 1,2\right)}{0,6} \ge 0,95$

$\dfrac{\sqrt{200}\left(\frac{n}{200} - 1,2\right)}{0,6} \ge \phi^{-1}(0,95) \simeq 1,65$

(din tabel)

$\dfrac{n}{200} - 1,2 \ge \dfrac{1,65 \cdot 0,6}{\sqrt{200}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{n}{200} \ge \dfrac{1,65 \cdot 0,6}{\sqrt{200}} + 1,2$

$n \ge 200\left(1,2 + \dfrac{0,6 \cdot 1,65}{\sqrt{200}}\right) \simeq 254$

Ex 3 $\longrightarrow$ Ex 1 din 12 mai 2020

Fie $X_1, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o pop Poisson de param $\theta > 0$

a) $\hat{\theta} = ?$ (M.V.M) e deplasat, consistent și eficient?

$X \sim Pois(\theta)$

Din teorie știm că $P(X = x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$, $x > 0$

Pas 1: scriu funcția de verosimilitate:

$$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = (e^{-\theta})^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} = e^{-\theta n} \cdot \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Pas 2: Logaritmez:

$$\ln L(x|\theta) = \ln e^{-\theta n} + \ln \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i! = -\theta n + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$$

Pas 3+4: Derivez; egalez cu 0 și rezolvăm ec de verosimilitate

$$\frac{\partial \ln L(x|\theta)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \ln L(x|\theta)}{\partial\theta} = -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\theta}$$

$$\frac{-n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = 0 \Rightarrow -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow n\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}_n$$

Deoarece $\hat{\theta}$ este obținut prin M.V.M. $\Rightarrow \hat{\theta}$ este asim eficient și consistent

$$E[\hat{\theta}] = E[\overline{X}_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n} \cdot n \underbrace{E[X]}_{= \theta \text{ (din teorie)}} = \theta$$

$\Rightarrow \hat{\theta}$ e nedeplasat

b) $\hat{\theta} = ?$ pt $P_\theta(X_1 = 1 | X_1 > 0)$

$X_1 \sim P(\theta)$

$$P_\theta(X_1 = 1 | X_1 > 0) = \frac{P(X_1 = 1) \cap P(X_1 > 0)}{P(X_1 > 0)} \underset{\text{altă scriere}}{\overset{\text{sau}}{=}} \frac{P(X_1 = 1, X_1 > 0)}{P(X_1 > 0)}$$

$= \frac{P(X_1 = 1)}{1 - P(X_1 \le 0)}$ $\longrightarrow$ asta e intersecția pt că $X > 0$ în Poisson

$$= \frac{P(X_1 = 1)}{1 - P(X = 0)} = \frac{\theta^1 e^{-\theta}}{1!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\theta^0 e^{-\theta}}{0!}} = \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - \frac{e^{-\theta}}{1}} = \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}$$

$$g(\theta) \overset{\text{not}}{=} \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}$$

Se cere un estimator de verosim. maximă pt $g(\theta)$

! Avem o teoremă: Dacă $\hat{\theta}$ este EVM pt θ atunci pt ($\forall$) funcție g avem că $g(\hat{\theta})$ este EVM pt $g(\theta)$

$\Rightarrow \hat{\theta}$ EVM pt θ $\Rightarrow g(\hat{\theta})$ EVM pt $g(\theta)$

$$g(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta} \cdot e^{-\hat{\theta}}}{1 - e^{-\hat{\theta}}} = \frac{\overline{X}_n \cdot e^{-\overline{X}_n}}{1 - e^{-\overline{X}_n}} \overset{\text{not}}{=} \widehat{g(\theta)}$$ (este estimatorul lui $g(\theta)$)

Teorema aplicațiilor continue (T.A.C.)

$X_n \xrightarrow{P} X$ atunci $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

$X_n \xrightarrow{D} X$ și $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

$\Rightarrow$ dacă $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \theta$ atunci și $g(\overline{X}_n) \xrightarrow{P} g(\theta)$

adică $g(\hat{\theta}) \xrightarrow{P} g(\theta) \Rightarrow \widehat{g(\theta)}$ e consistent

Ex 4 Fie $X_1, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o pop cu densitatea $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$

a) $\tilde{\theta} = ?$ (Met. Mom)

$E[X] = \overline{X}_n$

$$E[X] = \int_\theta^\infty x \cdot f_\theta(x)\,dx = \underbrace{\int_\theta^\infty x \cdot e^{-(x-\theta)}\,dx}_{} = fg - \int_\theta^\infty f'g = -xe^{-(x-\theta)}\Big|_\theta^\infty + \int_\theta^\infty 1 \cdot e^{-(x-\theta)}\,dx =$$

$f = x \Rightarrow f' = 1$

$g' = e^{-(x-\theta)} \Rightarrow g = \int g' = \int e^{-(x-\theta)}\,dx = -e^{-(x-\theta)}$

$$= -xe^{-(x-\theta)}\Big|_\theta^\infty - e^{-(x-\theta)}\Big|_\theta^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(-xe^{-(x-\theta)}\right) + 0 - \underbrace{e^{-\infty}}_{=0} + e^{\theta} = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{e^{x-\theta}}\right)}_{=0 \text{ (exponențiala > polinomiala)}} + e^{\theta} = e^{\theta}$$

$\Rightarrow e^{\theta} = \overline{X}_n$

$\theta \ln e = \ln \overline{X}_n \Rightarrow \tilde{\theta} = \ln \overline{X}_n$

$$= \underbrace{-xe^{-(x-\theta)}\Big|_\theta^\infty}_{=\theta} - e^{-(x-\theta)}\Big|_\theta^\infty = \theta + 1.$$

$\theta + 1 = \overline{X}_n \Rightarrow \tilde{\theta} = \overline{X}_n - 1$

* exc 4 8 feb 2017.

d) $\hat{\theta}$ e nedeplasat ?

$E[\hat{\theta}] = E[X_{(1)}]$

$E[X_{(1)}] = P(X_1 \leq t$ și $\dots X_n \leq t) \overset{i.i.d.}{=} (P(X_1 \leq t))^n = (F_\theta(x_1))^n$

$F_\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-\theta)}\,dt = \int_\theta^x e^{-(t-\theta)}\,dt = -e^{-(t-\theta)}\Big|_\theta^x = -e^{-(x-\theta)} + e^{-0} = 1 - e^{-(x-\theta)}$

$E[X_{(1)}] = \left[1 - e^{-(x_1-\theta)}\right]^n$

$\Rightarrow$ deplasat

e) $MSE = Var[X_1] - b_\theta^2(\hat{\theta}, \theta)$

f) $\theta = 2$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din $X \sim f_\theta(x)$

$U[0,1]$: $u_1 = 0{,}25$; $u_2 = 0{,}4$; $u_3 = 0{,}5$

$\theta = 2 \Rightarrow f_2(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \ge \theta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Aplic met. inversei → aplic th de universalitate a rep. uniforme

Aflu $F_u(x)$

$F_2(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_2(t)\,dt = \int_{\theta}^{x} e^{-(t-\theta)}\,dt = \int_2^x e^{-(t-2)}\,dt = (-1)\int_2^x -e^{-(t-2)}\,dt$

$= -e^{-(t-2)}\Big|_2^x = -e^{-(x-2)} + 1 = 1 - e^{-(x-2)}$

$\Rightarrow F_2(x) = 1 - e^{-(x-2)}$

$F_2(x) = y \Rightarrow 1 - e^{-(x-2)} = y \Rightarrow 1 - y = e^{-(x-2)}$ Logaritmez

$\Rightarrow \ln(1-y) = 2 - x \Rightarrow x = 2 - \ln(1-y) \Rightarrow F_2^{-1}(y) = 2 - \ln(1-y)$

Deci este suficient să aplicăm $F_2^{-1}(y)$ pe cele 3 valori u_1, u_2 și u_3