# Geometrie curs 5

## Aplicații liniare

• $(V_1,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $(V_2,+,\cdot)/\mathbb{K}$

$f: V_1 \to V_2$ sn aplicație liniară $\Leftrightarrow$

1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$
2) $f(\alpha x)=\alpha f(x)$, $(\forall) x, y\in V_1$, $(\forall)\alpha\in\mathbb{K}$

• $f$ liniară $\Leftrightarrow f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$, $(\forall) x,y\in V_1$, $(\forall)\alpha,\beta\in\mathbb{K}$

• $\ker f=\{x\in V_1 / f(x)=0_{V_2}\}$

$\mathrm{Im} f=\{y\in V_2 / (\exists) x\in V_1 \text{ a.î. } f(x)=y\}$

$f$ inj $\Leftrightarrow \ker f=\{0_{V_1}\}$

$f$ surj $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f=\dim V_2$

T. dim

$\dim V_1=\dim \ker f+\dim \mathrm{Im} f$

• $V_1\simeq V_2 \Leftrightarrow \dim V_1=\dim V_2$ (izomorfe)

### Teoremă

Fie $f: V_1\to V_2$ aplicație liniară

1) $f$ injectivă $\Leftrightarrow f$ transformă $(\forall)$ sist LI din $V_1$ într-un sistem LI din $V_2$

i.e. $\underset{SLI}{S=\{v_1,\dots,v_k\}}\subset V_1 \Rightarrow \underset{SLI}{f(S)=\{f(v_1),\dots,f(v_k)\}}\subset V_2$

2) $f$ surjectivă $\Leftrightarrow f$ transformă $(\forall)$ sist de generatori din $V_1$ într-un sist. de gen. din $V_2$

i.e. $\langle S\rangle=V_1 \Rightarrow \langle f(S)\rangle=V$

3) $f$ bijectivă $\Leftrightarrow f$ transformă $(\forall)$ bază a lui $V_1$ într-o bază a lui $V_2$

### Dem

1) „$\Rightarrow$"

Ip: $f$ inj

Dem $\forall S$ SLI în $V_1\Rightarrow f(S)$ SLI în $V_2$

Fie $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{K}$ a.î. $\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)=0_{V_2}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i)=0_{V_2}\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i v_i\in\ker f$ $\Big\}\Rightarrow$

dar $f$ inj $\Rightarrow \ker f=\{0_{V_1}\}$

$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i=0_{V_1}\xRightarrow{S \text{ sist LI}} a_i=0, (\forall) i=\overline{1,k}\Rightarrow f(S)$ SLI

„$\Leftarrow$" Ip: $(\forall) S$ SLI în $V_1\Rightarrow f(S)$ SLI în $V_2$

Dem: $f$ inj $\Leftrightarrow \ker f=\{0_{V_1}\}$

(RA) Pp. abs. $(\exists)\, x\in\ker f$, $x\neq 0_V \Rightarrow S=\{x\}$ SLI în $V_1\Rightarrow$

$\Rightarrow f(S)=\{f(x)\}$ SLI în $V_2\Rightarrow f(x)\neq 0_{V_2}$

dar $x\in\ker f\Rightarrow f(x)=0_{V_2}$ do

$\Rightarrow x=0_{V_1}$ și $\ker f=\{0_{V_1}\}$

2) „$\Rightarrow$" Ip: $f$ surj

Dem $(\forall)\langle S\rangle=V_1\Rightarrow\langle f(S)\rangle=V_2$

Fie $y\in V_2\xRightarrow{f \text{ surj}}(\exists)\, x\in V_1$ a.î. $f(x)=y$ $\Big\}\Rightarrow$

$\exists a_1,\dots,a_k\in\mathbb{K}$ a.î. $x\overset{\langle S\rangle}{=}\sum a_i v_i$

$\Rightarrow f(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i)=y\Rightarrow\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)=y\Rightarrow y\in\langle f(S)\rangle$

$\Rightarrow V_2\subseteq\langle f(S)\rangle$ $\Rightarrow$ „$=$"

dar $f(S)\subseteq V_2$

„$\Leftarrow$" Ip. $(\forall) S\subset V_1$, $\langle S\rangle=V_1\Rightarrow\langle f(S)\rangle=V_2$

Dem $f$ surjectivă, i.e. $(\forall) y\in V_2, (\exists) x\in V_1$ a.î. $f(x)=y$

$(\forall) y\in V_2=\langle f(S)\rangle\Rightarrow\exists a_1,\dots,a_k\in\mathbb{K}$ a.î. $y=\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)$

$\Rightarrow y=f(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i}_{x})$

Fie $x=\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\in\langle S\rangle=V_1$ a.î. $f(x)=y$

3) $f$ bij $\xLeftrightarrow{1,2} f$ transf $(\forall)$ bază (SLI + sist. gen) din $V_1$ într-o bază (SLI + sist. gen.) din $V_2$

## Matricea asociată unei aplicații liniare

Fie $f: V_1\to V_2$ aplicație liniară

$R=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în $V_1$ $\xrightarrow{A}$ $R'=\{e'_1,\dots,e'_m\}$ reper în $V_2$, $\dim_{\mathbb{K}} V_1=n$, $\dim_{\mathbb{K}} V_2=m$

$f(e_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j$, $\forall i=\overline{1,n}$

$A=(a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,m}\\ i=\overline{1,n}}}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$L(V_1,V_2)\longrightarrow\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$f\longrightarrow A$ (asocierea depinde de reperele alese)

$L(V_1,V_2)=\{f: V_1\to V_2 / f \text{ apl liniare}\}$

## Teorema de caracterizare a aplicațiilor liniare

Fie $f: V_1\to V_2$ funcție, $n=\dim_{\mathbb{K}} V_1$, $m=\dim_{\mathbb{K}} V_2$

$f$ aplicație liniară $\Leftrightarrow(\exists) A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ a.î. coordonatele oricărui vector $x\in V_1$ în raport cu un reper $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ din $V_1$ și coord vect $f(x)\in V_2$, în raport cu reperul $R'=\{e'_1,\dots,e'_m\}$ din $V_2$ verifică ec: $Y=AX$, unde $f(x)=y$

$x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ $\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$ ; $A=(a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,m}\\ i=\overline{1,n}}}$

$y=\sum_{j=1}^{m} y_j e'_j$ $\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

### Demonstrație

„$\Rightarrow$" $f$ liniară

Considerăm $A=(a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,m}\\ i=\overline{1,n}}}$ a.î. $f(e_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j$, $(\forall) i=\overline{1,n}$

$f(x)=f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j)=\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i) e'_j$ $\Big\}\Rightarrow$

$f(x)=y=\sum_{j=1}^{m} y_j e'_j$

$\Rightarrow y_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$, $(\forall) j=\overline{1,m}$

$\underset{(m,n)(n,1)}{Y=AX}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $A=(a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,m}\\ i=\overline{1,n}}}$

$(m,1)$

"⇐" $f: V_1 \to V_2$ funcție, $f(x)=y$

$Y = AX$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{m} y_j e'_j$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

**Dem** ① $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

② $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $(\forall) x_1, x_2, x \in V_1$, $(\forall) \alpha \in K$

① $f(x_1) = y_1$ $Y_1 = AX_1$

$f(x_2) = y_2$ $Y_2 = AX_2$ $\Rightarrow Y_1 + Y_2 = A(X_1 + X_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1+x_2) = y_1 + y_2$

② $f(x) = y$ $Y = AX \,|\alpha \Rightarrow \alpha Y = A(\alpha X) \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha y = \alpha f(x)$

$\Rightarrow f$ liniară

**Aplicație**

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 - x_3)$

Să se determine matricea asociată lui $f$ în raport cu reperul canonic $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$

SOL $f(x) = y$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow f \text{ liniară}$$

sau

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1,1) = \underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_{\text{col } 1}$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,0,0) = -e_1$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,1,-1) = e_1 + e_2 - e_3$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $f(e_i) = \Sigma$

**Modificarea matricei unei aplicații la schimbarea reperelor**

$f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară

$$\begin{array}{ccc} R = \{e_1, \dots, e_n\} & \xrightarrow{A_f} & R' = \{e'_1, \dots, e'_m\} \\ \downarrow C & & \downarrow C' \\ R_1 = \{h_1, \dots, h_n\} & \xrightarrow{A'_f} & R'_1 = \{h'_1, \dots, h'_m\} \end{array}$$

repere în $V_1$; repere în $V_2$

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j$, $(\forall) i = \overline{1,n}$

$f(h_i) = \sum_{k=1}^{m} a'_{ki} h'_k$, $(\forall) i = \overline{1,n}$

$$f\left(\sum_{s=1}^{n} c_{si} e_s\right) = \sum_{k=1}^{m} a'_{ki} \left(\sum_{s=1}^{m} c'_{sk} e'_s\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} c_{si} f(e_s) \qquad = \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} c'_{sk} a'_{ki}\right) e'_s$$

$$= \sum_{s=1}^{n} c_{si} \left(\sum_{s=1}^{m} a_{ss} e'_s\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{ss} c_{si}\right) e'_s \Rightarrow \sum_{s=1}^{n} a_{ss} c_{si} = \sum_{k=1}^{m} c'_{sk} a'_{ki}$$

$(\forall) s = \overline{1,m}$

$AC = C'A'$

$C \in GL(n, K)$, $C' \in GL(m, K)$ $\Rightarrow A' = C'^{-1} A C$

**Prop.** Rangul matricei asociate unei aplicații liniare este un invariant la schimbarea reperelor

**Dem**

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{A} & R' \\ C \downarrow & & \downarrow C' \\ R_1 & \xrightarrow{A'} & R'_1 \end{array}$$

$A' = C'^{-1} A C$

$rg(A') = rg(C'^{-1} A C) = rg A$,

$C \in GL(n, K)$, $C' \in GL(m, K)$

**Obs.** $f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară

$Ker f = \{x \in V_1 / AX = 0\}$ $(m,n)(n,1) \to (m,1)$

$\dim Ker f = \dim V_1 - rg A$

$f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară

1) $f$ este injectivă $\Leftrightarrow \dim V_1 = rg A$

2) $f$ este surjectivă $\Leftrightarrow \dim V_2 = rg A$

3) $f$ este bijectivă $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2 = rg A$

($f$ izomorfism de spații vectoriale $\Leftrightarrow A \in GL(n, K)$), $n = \dim V_1 = \dim V_2$

$A$ = matricea asociată lui $f$ în raport cu $R_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în $V_1$, $R' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ reper în $V_2$

**Demonstrație**

① $f$ inj $\Leftrightarrow Ker f = \{0_{V_1}\} \Leftrightarrow \dim Ker f = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim Ker f = 0 \Leftrightarrow \dim V_1 = rg A$

② $f$ surj $\Leftrightarrow \dim Im f = \dim V_2 \Leftrightarrow \dim V_2 = rg A$

* T. dim $\dim V_1 = \dim Ker f + \dim Im f$

$\dim V_1 = \dim V_1 - rg A + \dim V_2$

③ din 1)+2)

**Aplicație**

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_1 - x_3)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$f(x) = y \Leftrightarrow Y = AX$ $f$ lin

$A \in GL(3, K)$ $f$ bij

$f$ un izomorfism de ~~grupuri~~ sp. vect. (automorfism de sp vect)

**Exemple de endomorfisme**

① Proiecții $V_1, V_2 \subset V$ subsp vect $V = V_1 \oplus V_2$

Aplicația liniară $p: V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$

$p(v_1 + v_2) = v_1$

proiecția pe $V_1$ de-a lungul lui $V_2$

**Prop.** $p \in End(V)$, $(V, +, \cdot)/K$ sp vect

$p$ este proiecție $\Leftrightarrow p \circ p = p$

**Demonstrație**

"⇒" $p: V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$, $p(v_1 + v_2) = v_1$

$p \circ p(v_1 + v_2) = p(v_1) = p(v_1 + 0_{V_2}) = v_1 = p(v_1 + v_2)$

$p \circ p(v) = p(v)$, $\forall v \in V \Rightarrow p \circ p = p$

## Teorema dimensiunii pentru aplicații liniare

Fie $(V_1,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$, $(V_2,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect, $f: V_1 \to V_2$ apl liniară $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim (\operatorname{Im} f)$

**Demonstrație**

Fie $\operatorname{Ker} f \subset V_1$, $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = k$, $k \le n_1$

$n_1 = \dim_{\mathbb{K}} V_1$

Fie $R_0 = \{e_1, \dots, e_k\}$ reper în $V_1$

Arăt că $\{f(e_{k+1}), \dots, f(e_{n_1})\}$ este reper în $\operatorname{Im} f$

· **Sistem liniar independent**

Fie $a_{k+1}, \dots, a_{n_1} \in \mathbb{K}$ a.î. $\sum_{j=k+1}^{n_1} a_j f(e_j) = 0_{V_2}$

$\xrightarrow{f \text{ liniară}}$ $f(\sum_{j=k+1}^{n_1} a_j e_j) = 0_{V_2} \Rightarrow \sum_{j=k+1}^{n_1} a_j e_j \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $\sum_{j=k+1}^{n_1} a_j e_j = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i e_i - \sum_{j=k+1}^{n_1} a_j e_j = 0_{V_1} \Rightarrow \underbrace{\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}}_{SLI}$

$\left.\begin{array}{l} a_i = 0, (\forall) i = \overline{1,k} \\ a_j = 0, (\forall) j = \overline{k+1, n_1} \end{array}\right| \Rightarrow \{f(e_{k+1}), \dots, f(e_{n_1})\}\ SLI$

· **SIST de generatori**

$(\forall) y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow (\exists) x \in V_1$ a.î. $f(x) = y$

$(\exists) a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n_1} \in \mathbb{K}$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i + \sum_{j=k+1}^{n_1} a_j e_j \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i) + f(\sum_{j=k+1}^{n_1} a_j e_j) \Rightarrow y = f(\sum_{j=k+1}^{n_1} a_j e_j) \underset{f \text{ lin}}{=}$

$\sum_{j=k+1}^{n_1} a_j f(e_j)$

$y \in \langle \{f(e_{k+1}), \dots, f(n_1)\} \rangle \Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle \{f(e_{k+1}) \dots f(n_1)\} \rangle$

Deci $\{f(e_{k+1}), \dots, f(e_{n_1})\}$ reper în $\operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n_1 - k$

$f: V_1 \to V_2$ apl liniară

a) $f$ inj $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_{V_1}\}$
$\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ $\Big\} \Rightarrow f$ inj $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim \operatorname{Im} f$

b) $f$ surj $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V_2$
$\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim V_2$

c) $f$ bij ($f$ izomorfism de sp vectorial) $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

**Th:** $(V_1,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$, $(V_2,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect

$V_1 \simeq V_2$ (sp vect izomorfe) $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

**Dem** „$\Rightarrow$" $V_1 \simeq V_2$

$(\exists)$ $f: V_1 \to V_2$ izomorfism de sp vect $\xRightarrow{\text{obs}} \dim V_1 = \dim V_2$

„$\Leftarrow$" $\dim V_1 = \dim V_2$

Fie $R_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în $V_1$
$R_2 = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ reper în $V_2$

definim $f: V_1 \to V_2$, $f(e_i) = e'_i$, $i = \overline{1,n}$

Extindem $f$ prin liniaritate

$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i e'_i \Rightarrow$

$f$ bij $\Rightarrow f$ izomor. de sp vect $\Rightarrow V_1 \simeq V_2$

**Propoziție** $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect $n$-dim

$\Rightarrow V \simeq \mathbb{K}^n$

Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în $V$

fie $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$f: V \to \mathbb{K}^n$, $f(x) = (x_1, \dots x_n)$

izom de sp vect

$(\exists)$ o infinitate de astfel de izom deoarece $(\exists)$ o infinitate de repere în $V$).

**Def** $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect

$V^* = \{f: V \to \mathbb{K} \mid f$ aplicație liniară$\}$

$(V^*,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect dual

$+: V^* \times V^* \to V^*$

$(f+g) \to f+g \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\cdot: \mathbb{K} \times V^* \to V^*$

$(\alpha f) \to \alpha f \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (\forall) x \in V, (\forall) \alpha \in \mathbb{K}$

**Teoremă** $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}} \simeq (V^*,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$

**Dem**

Considerăm $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în $V \Rightarrow$

$R^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ reper în $V^*$, unde

$e_i^*: V \to \mathbb{K}$ lin, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$

Extindem prin liniaritate

$e_i^*(x) = e_i^*(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{e_i^*(e_j)}_{\delta_{ij}} = x_i$

$(\forall) i = \overline{1,n}$

· $R^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ S.L.I.

fie $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ a.î. $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* = 0 / e_1$

$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{e_i^*(e_1)}_{\delta_{i1}} = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(e_n) = 0 \Rightarrow a_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow SLI$ ged

· $R^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ sist. de generatori

fie $f \in V^*$, $f: V \to \mathbb{K}$ lin

$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = e_i^*(x)$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(e_i)}_{a_i} e_i^* = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* \Rightarrow f \in \langle R^* \rangle$

Deci $R^*$ reper în $V^* \Rightarrow \dim V^* = n$

$\dim V = \dim V^* \Leftrightarrow V \simeq V^*$

"⇐" $p \in End(V)$, $p \circ p = p$

Construim $V_1, V_2 \subset V$ subsp vect a.î. $V = V_1 \oplus V_2$

$p: V \to V$, $p(\underset{V_1}{v_1} + \underset{V_2}{v_2}) = v_1$

$V_1 = Im\, p$, $V_2 = Ker\, p$

$(\forall) v \in V$, $v = \underbrace{p(v)}_{v_1 \in Im\, p} + \underbrace{v - p(v)}_{v_2 \in Ker\, p}$

Dem că $v_2 \in Ker\, p$

$p(v_2) = p(v - p(v)) = p(v) - \underbrace{p(p(v))}_{p(v)} = 0_V \Rightarrow$

$\Rightarrow v_2 \in Ker\, p$

$V \subseteq V_1 + V_2$

dar $V_1 + V_2 \subseteq V$ $\Rightarrow V = V_1 + V_2$

Fie $v \in Ker\, p \cap Im\, p$

$p(v) = 0$

$(\exists) w \in V$ a.î. $v = p(w) \Rightarrow \underbrace{p(v)}_{0} = \underbrace{p \circ p(w)}_{p(w) = v} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \underset{V_1}{Im\, p} \oplus \underset{V_2}{Ker\, p}$

$p: V \to V$, $p(v_1 + v_2) = \underbrace{p(v_1)}_{p(w_1)} = p \circ p(w_1) = p(w_1) = v_1$

p = proiecția pe $V_1 = Im\, p$ de-a lungul lui $V_2 = Ker\, p$

OBS. Matricea asociată proiecției p

(considerăm $R_1 = \{e_1, \dots, e_k\}$ reper în $V_1 = Im\, p$

$R_2 = \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ reper în $V_2 = Ker\, p$

$R = R_1 \cup R_2$ reper în $V = V_1 \oplus V_2$

$p(e_i) = e_i$, $(\forall) i = \overline{1,k}$

$p(e_j) = 0$, $(\forall) j = \overline{k+1,n}$

$$\begin{cases} p(e_1) = e_1 \\ \vdots \\ p(e_k) = e_k \\ p(e_{k+1}) = 0 \\ \vdots \\ p(e_n) = 0 \end{cases} \quad A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

② Simetrie

Def $s \in End(V)$

s. s.n. simetrie sau involuție $\Leftrightarrow s \circ s = id_V$

Prop. $p \in End(V)$, ch $K \neq 2$ ($1 + 1 \neq 0$)

p proiecție $\Leftrightarrow s = 2p - id_V$ simetrie

Dem "⇒" p proiecție $\Rightarrow p^2 = p$

$s^2 = s \circ s = (2p - id_V) \circ (2p - id_V) = 4p^2 - 2p - 2p + id_V =$

$= 4p - 4p + id_V = id_V \Rightarrow s =$ simetrie

"⇐" s simetrie $\Rightarrow s \circ s = id_V$

$s \circ s = 4p^2 - 4p + id_V = id_V \Rightarrow p^2 = p \Rightarrow p$ proiecție

OBS. Matricea asociată simetriei s

$R_1 = \{e_1, \dots, e_k\}$ reper în $V_1 = Im\, p$

$R_2 = \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ reper în $V_2 = Ker\, p$

$R = R_1 \cup R_2$ reper în $V = V_1 \oplus V_2$

$s = 2p - id_V$

$s(e_i) = 2p(e_i) - e_i = 2e_i - e_i = e_i$, $(\forall) i = \overline{1,k}$

$s(e_j) = 2p(e_j) - e_j = -e_j$, $(\forall) j = \overline{k+1,n}$

$A_s = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}$

$s = 2p - id_V \Rightarrow A_s = 2A_p - I_n$

Problemă: determinăm un reper $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ în V a.î. matricea asociată lui $f \in End(V)$ este diagonală

$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ $\quad f(e_1) = \alpha_1 e_1$, …, $f(e_n) = \alpha_n e_n$

Def $f \in End(V)$, $(V, +, \cdot)/K$

$x \in V$ s.n. vector propriu $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K$ a.î. $f(x) = \lambda x$, $x \neq 0$

($\lambda$ s.n. valoare proprie asociată vectorului propriu x)

Not $V_\lambda = \{0_V\} \cup$ mulț. vectorilor proprii coresp valorii proprii $\lambda$

$V_\lambda =$ subsp propriu corespunzător valorii proprii $\lambda$

Propoziție $f \in End(V)$, $\lambda$ valoare proprie

a) $V_\lambda \subset V$ subsp vectorial

b) $V_\lambda$ = subsp invariant

$f(V_\lambda) \subset V_\lambda$

Dem a) $\forall x_1, x_2 \in V_\lambda$ : $f(x_1) = \lambda x_1$, $f(x_2) = \lambda x_2$

Dem. $ax_1 + bx_2 \in V_\lambda$, $(\forall) a, b \in K$

$f(ax_1 + bx_2) = a f(x_1) + b f(x_2) = a\lambda x_1 + b\lambda x_2 = \lambda(ax_1 + bx_2) \Rightarrow ax_1 + bx_2 =$ vector propriu coresp valorii proprii $\lambda$.

b) Fie $x \in V_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} f(x) \in V_\lambda$

$f(x) = \lambda x \in V_\lambda$ ($V_\lambda \underset{\text{subsp vect}}{\subset} V$) $\Rightarrow f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$

Polinomul caracteristic asociat lui f

$f \in End(V)$, $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V

$\lambda$ = valoare proprie $f(x) = \lambda x$, $x \neq 0_V$

A = matricea asociată lui f în raport cu reperul R

$f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$, $f(x) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$

$= \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i) e_j$

$f(x) = \lambda x = \lambda \sum_{j=1}^n x_j e_j$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = \lambda x_j$, $\forall j = \overline{1,n}$

(*) $\sum (a_{ji} - \lambda \delta_{ji}) x_i = 0$, $\forall j = \overline{1,n}$

sist liniar omogen care are și sol nenule $\Rightarrow \det((a_{ji} - \lambda \delta_{ji})_{j,i}) = 0$

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$ polinomul caracteristic

Prop. Polinomul caracteristic este un invariant la schimbarea reperului

Dem. $f \in End(V)$, $\lambda \in K$ valoare proprie

$\mathcal{R}=\{e_1,\dots,e_n\}$ $\qquad$ $R=\{e_1,\dots,e_n\}$

$C\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow C$

$\mathcal{R}_1=\{e_1',\dots,e_n'\} \xrightarrow{f'} R_1=\{e_1',\dots,e_n'\}$

$A'=C^{-1}AC$

$p(\lambda)=\det(A'-\lambda I_n)=\det(C^{-1}AC-\lambda C^{-1}I_nC)=$

$=\det[C^{-1}(A-\lambda I_n)C]=\det C^{-1}\det(A-\lambda I_n)\det C=$

$\det C$ $\qquad = \det(A-\lambda I_n)$

**OBS.** a) $\dim V=2$, $f\in End(V)$, $\mathcal{R}=\{e_1,e_2\}$ reper în $V$

$A$ = matricea asociată lui $f$ în raport cu $\mathcal{R}$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ $\quad P(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0 \Rightarrow \lambda^2-Tr(A)\lambda+\det A=0$

b) $\dim V=n$, $\mathcal{R}=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în $V$

$A$ = matricea asociată lui $f$ în raport cu $R$

$P(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=0 \Rightarrow$

$\lambda^n-\sigma_1\lambda^{n-1}+\dots+(-1)^n\sigma_n=0$

$\sigma_1=Tr(A)$

$\sigma_n=\det A$

$T_k$ = suma minorilor diagonali de ord $k$ pt $A$

Aplicație

$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $J:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $J(x,y)=(-y,x)$

$J\circ J(x,y)=J(-y,x)=(-x,-y)=-id_{\mathbb{R}^2}$

$J\circ J=-id_{\mathbb{R}^2}$ ($J$ = structură complexă)

$R=\{e_1,e_2\}$ reperul canonic din $\mathbb{R}^2$

$A_J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ x\end{pmatrix}$

$J(e_1)=J(1,0)=(0,1)=e_2$

$J(e_2)=J(0,1)=(-1,0)=-e_1$

$P(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$

(valorile proprii sunt răd reale ale pol $\lambda^2+1$)

Aplicație $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(x_1+2x_2,2x_1+x_2)$

a) $A$ are în rap cu reperul canonic

b) valorile proprii

c) subsp proprii

Sol

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $\quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+x_2\end{pmatrix}$

b) $P(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$(1-\lambda)^2-2^2=0 \Rightarrow (1-\lambda-2)(1-\lambda+2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1-\lambda)(3-\lambda)=0$

$\lambda_1=-1$

$\lambda_2=3$

c) $V_{\lambda_1}=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid f(x)=-x\}$ $\quad x=(x_1,x_2)$

$\begin{cases} x_1+2x_2=-x_1 \\ 2x_1+x_2=-x_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+2x_2=0\end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2\end{pmatrix}$

$\dim V_{\lambda_1}=2-1=1$ $\quad x_2=-x_1$

$V_{\lambda_2}=\{(x_1,-x_1)/x_1\in\mathbb{R}\}$ $\quad R_1=\{\underbrace{(1,-1)}_{v_1}\}$ reper în $V_{\lambda_1}$

$x_1(1,-1)$

$V_{\lambda_2}=\{x\in\mathbb{R}^2 / f(x)=3x\}$

$\begin{cases} x_1+2x_2=3x_1 \\ 2x_1+x_2=3x_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1+2x_2=0 \\ 2x_1-2x_2=0\end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2\end{pmatrix}$

$\dim V_{\lambda_2}=2-1=1$ $\quad x_1=x_2$

$V_{\lambda_2}=\{(x_1,x_1)/x_1\in\mathbb{R}\}$ $\quad R_2=\{\underbrace{(1,1)}_{v_2}\}$ reper în $V_{\lambda_2}$

$x_1(1,1)$

$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}=2$

$R=R_1\cup R_2$ reper în $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2=\underbrace{V_{\lambda_1}}_{V_1}\oplus \underbrace{V_{\lambda_2}}_{V_2}$

**OBS.** $p: V_1\oplus V_2\to V_1$ proiecția pe $V_1$ de-a lungul lui $V_2$

$p(v_1+v_2)=v_1$

$s: V_1\oplus V_2\to V_1\oplus V_2$ simetrie, $s=2p-id_V$

$\begin{cases} p(v_1)=v_1 \\ p(v_2)=0\end{cases}$ $\quad A_p=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ mat în raport cu $R=R_1\cup R_2$

$\begin{cases} s(v_1)=v_1 \\ s(v_2)=-v_2\end{cases}$ $\quad A_s=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$