Examen

11 Februarie 2018

Timp de lucru 2h. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Aveți 3 subiecte, fiecare valorând 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

Fie X o variabilă aleatoare repartizată

$$\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

unde $\theta \in (0, 1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

Exercițiul 2

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbf{1}_{[\theta,+\infty)}(x)$$

cu $\theta > 0$, parametru necunoscut.

1. a) Determinați repartiția lui $\frac{X_1}{\theta} - 1$.
   b) Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestuia.
   c) Găsiți legea limită a lui $\tilde{\theta}$.
2. a) Determinați estimatorul $\hat{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda verosimilității maxime.
   b) Calculați eroarea pătratică medie a lui $\hat{\theta}$ și verificați dacă estimatorul este consistent.
   c) Construiți un interval de încredere pentru θ de nivel de încredere $1 - \alpha$.
   d) Pe care dintre cei doi estimatori îl preferați ?

Exercițiul 3

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = \frac{3}{(x-\theta)^4}\mathbf{1}_{[1+\theta,+\infty)}(x)$$

1. a) Calculați $\mathbb{E}_\theta[X_1]$, $Var_\theta(X_1)$ și funcția de repartiție $F_\theta(x)$ a lui X_1.

   b) În cazul în care $\theta = 2$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0,\ 1]$: $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$ și $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

2. a) Determinați estimatorul $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestui estimator. Care este legea lui limită ?

   b) Găsiți un interval de încredere asimptotic de nivel de încredere de 95% pentru θ.

3. a) Exprimați în funcție de θ mediana repartiției lui X_1 și plecând de la aceasta găsiți un alt estimator $\hat{\theta}_n^Q$ al lui θ.

   b) Determinați legea lui limită a lui $\hat{\theta}_n^Q$ și arătați că, asimptotic, acesta este mai bun decât $\hat{\theta}_n^M$.

   c) Găsiți un interval de încredere asimptotic de nivel de încredere de 95% pentru θ.

4. a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n^{VM}$ a lui θ și verificați dacă este deplasat.

   b) Calculați funcția de repartiție a lui $\hat{\theta}_n^{VM} - \theta$.

   c) Pe care dintre cei trei estimatori îl preferați ?

Ex 1

⑥ Fie X o v.a repartizată $P_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k$; $k \in \mathbb{N}$ unde $\theta \in (0,1)$, $A \in \mathbb{R}$ constantă.

i) Det constanta A, $E[X]$; $Var(X)$.

• Știm că $\sum_{k=0}^{n} P_\theta(X=k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} A(k+1)\theta^k = A\sum_{k=0}^{n}(k+1)\theta^k = A\sum_{k=0}^{n} k\theta^k + A\sum_{k=0}^{n}\theta^k =$$

$$= A\sum_{k=0}^{n}(\theta^{k+1})' = A\cdot\left(\theta\cdot\frac{1}{\theta-1}\right)' = A\cdot\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)' = A\cdot\frac{\theta'(\theta-1)-\theta(\theta-1)'}{(\theta-1)^2}$$

$$= A\cdot\frac{(\theta-1)-\theta}{(\theta-1)^2} = A\cdot\frac{1}{(\theta-1)^2} \Rightarrow \frac{A}{(\theta-1)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (\theta-1)^2$$

• $P_\theta(X=k) = (\theta-1)^2(k+1)\theta^k$.

Deci $f_\theta(k) = (\theta-1)^2(k+1)\theta^k$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot f_\theta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)(\theta-1)^2\theta^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(\theta-1)^2\cdot(\theta^{k+1})' = \sum_{k=0}^{\infty} k(\theta-1)^2\cdot\frac{1}{(\theta-1)^2} = \frac{1}{(\theta-1)^2}\sum_{k=0}^{\infty} k(\theta-1)^2$$

$$= \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_{k=0}^{\infty} k(\theta-1)^2$$

$$E[X] = -\frac{2\theta}{1-\theta}$$

$$E[X^2] = \frac{-8\theta^2+6\theta}{(1-\theta)^2}$$

$$Var[X] = \frac{-12\theta^2+6\theta}{(1-\theta)^2}$$

ii) Vrem să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, \dots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

Determinați estimatorul $\hat{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda rata legea momentelor și calculați $P_\theta(\hat{\theta}=0)$.

$$f_\theta(k) = (\theta-1)^2 \theta^k (k+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} E_\theta[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X_n} \\ E_\theta[X] = -\frac{2\theta}{1-\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{2\theta}{1-\theta} = \overline{X_n} \Rightarrow (1-\theta)\overline{X_n} = -2\theta \Rightarrow \overline{X_n} - \theta\overline{X_n} = -2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{X_n} = -2\theta + \theta\overline{X_n} \Rightarrow \overline{X_n} = \theta(\overline{X_n}-2)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\overline{X_n}}{\overline{X_n}-2}$$

$$\cancel{P(\hat{\theta}=k) = (\theta-1)^2(k+1)\theta^k}$$
$$\cancel{= (\theta-1)^2 (x+1)\theta^x}$$
$$\cancel{\hat{\theta}=0 \Rightarrow \overline{X_n}=0 \Rightarrow \sum_{i=1} x_i = 0}$$

$P(\hat{\theta}=0) = ?$

$$1_\theta + \int_\theta^\infty e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}\,dx$$

iii) Det estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.

$$L(\theta \mid x) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} (\theta-1)^2 \theta^{x_i}(x_i+1)$$

$$= (\theta-1)^{2n}\, \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n}(x_i+1)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = 0$$

$$\ln(L) = \ln(\theta-1)^{2n} + \ln \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} + \ln \prod_{i=1}^{n}(x_i+1)$$

$$= 2n\ln(\theta-1) + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln\theta + \ln \prod_{i=1}^{n}(x_i+1)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = 0 \iff \frac{-2n}{1-\theta} + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{-2n}{1-\theta} + \frac{S_n}{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow -2\theta n + S_n\theta + S_n = 0 \Rightarrow \theta(-2n + S_n) = S_n$$

$$\theta = \frac{S_n}{-2n+S_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{-2n+\sum_{i=1}^{n} x_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{-2n + n \cdot \frac{\sum x_i}{n}} = \frac{n\overline{X}_n}{-2n+\overline{X}_n \cdot n} = \frac{\overline{X}_n}{-2+\overline{X}_n}$$

iv) Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}[X_1]$$

$$\Rightarrow \overline{X}_n - 2 \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}[X_1] - 2$$

Iau aplicația continuă $g(x) = \frac{x}{x-2}$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} \xrightarrow{a.s.} \frac{\frac{-2\theta}{1-\theta}}{\frac{-2\theta}{1-\theta} - \frac{1-\theta}{2}} \Rightarrow \tilde{\theta} \xrightarrow{a.s.} \frac{-2\theta}{1-\theta} \cdot \frac{1-\theta}{-2\theta - 2 + 2\theta}$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} \xrightarrow{a.s.} \theta$$

$\boxed{EX2}$

7) Fie $X_1, \dots, X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{[\theta, +\infty)}(x)$$

A. a) Determinați repartiția lui $\frac{X_1}{\theta} - 1$

Ca să fac a) trebuie mai întâi rezolvat b)

b) Determinați estimatorul $\hat{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acesteia.

$$\mathbb{E}_\theta[X] = \int_\theta^\infty x \cdot f_\theta(x)\, dx = \int_\theta^\infty x \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}\, dx =$$

$$= \int_\theta^\infty x \cdot \left(-e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}\right)' dx = -x e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \Big|_\theta^\infty + \int_\theta^\infty e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}\, dx$$

$= \theta + \theta = 2\theta$

$E_\theta[x] = 2\theta$

$\left.\begin{array}{l} E_\theta[x] = 2\theta \\ E_\theta[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X_n} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X_n} = 2\theta \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\overline{X_n}}{2}$

$\tilde{\theta} = \frac{\overline{X_n}}{2}$ estimator pentru θ

- $MSE_\theta[\tilde{\theta}_n] = Var_\theta[\tilde{\theta}_n] + (b_\theta(\tilde{\theta}_n))^2$
- $b_\theta(\tilde{\theta}_n) = E_\theta(\tilde{\theta}) - \theta$
- $E_\theta(\tilde{\theta}) = E\left(\frac{\overline{X_n}}{2}\right) = \frac{1}{2} E[\overline{X_n}] = \frac{1}{2} E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) =$

$= \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{2n} \cdot n \cdot 2\theta = \theta$

$b_\theta(\tilde{\theta}_n) = 0 \Rightarrow MSE_\theta[\tilde{\theta}_n] = Var_\theta[\tilde{\theta}_n]$

- $Var_\theta[\tilde{\theta}_n] = Var_\theta\left[\frac{\overline{X_n}}{2}\right] = \frac{1}{4} Var_\theta\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right] =$

$= \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} Var_\theta[x_i] = \frac{n}{4n^2} Var_\theta(x_1) = \frac{1}{4n} Var_\theta(x_1)$

$Var(x_1) = E[x^2] - (E[x])^2$

$E[x^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}\, dx = \int_0^\infty x^2 \cdot \left(-e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}\right)' dx$

$= -x^2 e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \Big|_0^\infty + 2\theta \underbrace{\int x \cdot \frac{e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}}{\theta}}_{2\theta} =$

$= \theta^2 + 4\theta^2 = 5\theta^2$

$Var(x_1) = 5\theta^2 - 4\theta^2 = \theta^2$

$\boxed{MSE_\theta(\tilde{\theta}_n) = \theta^2}$

a) Din TLC știm: $\frac{\bar{X}_m - E[\bar{X}_m]}{\sqrt{Var(\bar{X}_m)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

$$\frac{\bar{X}_m - E[\bar{X}_m]}{\sqrt{Var(\bar{X}_m)}} = \frac{2\bar{\theta} - 2\theta}{\sqrt{\frac{1}{m}\cdot\theta^2}} = \frac{2(\bar{\theta} - \theta)}{\theta \cdot \sqrt{\frac{1}{m}}} = \frac{2m\,(\bar{\theta} - \theta)}{\theta \cdot m\sqrt{\frac{1}{m}}} =$$

$$= \frac{2m\,(\bar{\theta} - \theta)}{\theta\sqrt{\frac{m^2}{m}}} = 2\overset{\sqrt{m}}{\cancel{m}}\,\frac{\bar{\theta} - \theta}{\theta \cdot \cancel{\sqrt{m}}} = 2\sqrt{m}\,\frac{\bar{\theta} - \theta}{\theta} \longrightarrow N(0,1)$$