Davidescu - Filip Olivia - Alexandra 16.03.2022

Elemente de calcul științific
TUTORIAT 2

· Metoda de Eliminare Gauss cu Pivotare Parțială Scalată (MEGPPS)

La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului MEGPP:

→ determinăm factorul de scalare al fiecărei linii $i = \overline{k, n}$

↳ cel mai mare element în valoare absolută ($\stackrel{not.}{=} s_i$)

→ scalăm elementele de pe coloana pivotului cu factorul de scalare corespunzător

↳ $i = \overline{k, n}$: $\tilde{a}_{ik} = a_{ik}^{(k)} / s_i$

→ determinăm poziția noului pivot folosind MEGPP

→ aplicăm MEGPP

Date: $A = (a_{ij})_{i,j = \overline{1,n}}$ $\quad b = (b_i)_{i = \overline{1,n}}$

Algoritm:

$k = \overline{1, n-1}$:

$\quad i = \overline{k, n}$:

$\quad\quad s_i = \max\limits_{j = \overline{k,n}} |a_{ij}|$

$\quad\quad \tilde{a}_i = a_{ik} / s_i$

$\quad$ end

$\quad \ell : |\tilde{a}_\ell| = \max\limits_{i = \overline{k,n}} |\tilde{a}_i| \quad (k \le \ell)$

$\quad A = P_{k\ell} A \longrightarrow E_k \leftrightarrow E_\ell$

$\quad i = \overline{k+1, n}$:

$\quad\quad m = a_{ik} / a_{kk}$

$\quad\quad b_i = b_i - m b_k$

$\quad\quad j = \overline{k+1, n}$:

$\quad\quad\quad a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$

$\quad\quad$ end

$a_{ik} = 0$

end

end

- **Metoda de Eliminare Gauss cu Pivotare Totală (MEGPT)**

La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului MEGPT:

→ determinăm cel mai mare element în valoare absolută dintre elementele situate la dreapta și sub pivotul de la pasul k, a_{kk}

$$l, m = \overline{k, n} : \quad |a_{lm}^{(k)}| = \max_{\substack{i = \overline{k,n} \\ j = \overline{k,n}}} |a_{ij}^{(k)}|$$

→ prin transformări elementare, mutăm noul pivot pe poziția actualului pivot

- $l > k \Rightarrow E_l \leftrightarrow E_k$
- $m > k \Rightarrow C_l \leftrightarrow C_k$

→ aplicăm MEGFP pentru noua matrice extinsă

Date: $A = (a_{ij})_{i,j = \overline{1,n}}$

$b = (b_i)_{i = \overline{1,n}}$

Algoritm:

$k = \overline{1, n-1}$:

$l = \overline{k,n}$ & $m = \overline{k,n}$ a.î. $|a_{lm}| = \max_{i,j = \overline{k,n}} |a_{ij}|$

$A = P_{kl} A P_{km}$ → interschimbăm liniile k și l

coloanele k și m

$i = \overline{k+1, n}$:

$m = a_{ik} / a_{kk}$

$b_i = b_i - m b_k$

$j = \overline{k+1, n}$:

$a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$

end

$a_{ik} = 0$

end

end

Observații:

1) Interschimbarea liniilor E_i și E_j în matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ este echivalentă cu înmulțirea lui A la stânga cu permutarea simplă P_{ij}

$$P_{ij} A = \tilde{A}$$

2) Interschimbarea coloanelor C_i și C_j în matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ este echivalentă cu înmulțirea lui A la dreapta cu permutarea simplă P_{ij}

$$A P_{ij} = \tilde{A}$$

3) Scalarea liniei E_i cu $s_i \in \mathbb{R}^*$ este echivalentă cu înmulțirea lui A la stânga cu matricea diagonală $D_i = \mathrm{diag}(d_j)_{j=\overline{1,n}}$

$$d_j = \begin{cases} 1, & j \neq i \\ s_i, & j = i \end{cases}$$

$$D_i A = \tilde{A}$$

$$\tilde{a}_{jk} = \begin{cases} a_{jk} / s_i, & k = \overline{1,n},\ j = i \\ a_{jk}, & k = \overline{1,n},\ j \neq i \end{cases}$$