Milostoanu Andreea
Mihoci Valentina

Tutoriat 2
Geometrie I

27.10.2021

1. Izometrii

Aplicația $f: \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ se numește **izometrie** dacă păstrează distanțele, i.e.

$$d(A,B) = d(f(A), f(B)), (\forall)\ A, B \in \mathcal{E}_2.$$

2. Simetrii centrale

Fie $M(x_0, y_0)$ un punct fixat și segmentul $[PP']$, unde M este mijlocul segmentului. Aplicația $S_M : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, definită prin $S_M(P) = P'$ se numește **simetrie centrală de centru M**.

Ecuația unei simetrii centrale

Fie xOy un sistem cartezian de coordonate și punctele $P(x,y)$ și $P'(x',y')$.
Dacă punctul $M(x_0, y_0)$ este mijlocul segmentului $[PP']$, atunci avem:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x+x'}{2} \\ y_0 = \dfrac{y+y'}{2} \end{cases}, \text{ așadar obținem: } \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y. \end{cases}$$

Matriceal, ecuația devine:

$$\boxed{X' = AX + B \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}}$$

unde $A = -I_2$ și $B = 2X_0$.

Obs. 1° $S_M \circ S_M = id_{\mathcal{E}_2} \Rightarrow$ simetria centrală este o involuție.

2° Dacă $M \in d$, atunci dreapta d este invariantă în raport cu S_M, i.e. $S_M(d) = d$.

3° Fie d o dreaptă a.î. $M \notin d$. Atunci $S_M(d) = d'$, unde $d \parallel d'$.

3. Simetrii axiale

Fie d o dreaptă fixată. Aplicația $S_d : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, definită prin $S_d(P) = P'$, unde P' este simetricul lui P față de d se numește **simetrie axială de axă d**.

Ecuația unei simetrii axiale $\to$ Notăm $P(x,y)$ și $P'(x',y')$

$$\boxed{X' = AX + B \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & \dfrac{-2ab}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-2ab}{a^2+b^2} & \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{-2ac}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-2bc}{a^2+b^2} \end{pmatrix}}$$

unde $d: ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 > 0$.

Obs. 1° $S_d \circ S_d = id_{E_2} \Rightarrow$ simetria axială este o involuție

2°. Dacă $P \in d$, atunci $S_d(P) = P$, i.e. toate punctele dreptei d sunt puncte fixe.

3°. Fie $S_d(d_1) = d_1'$.

(i) Dacă $d_1 \parallel d$, atunci $d_1' \parallel d$ și $dist(d_1, d) = dist(d_1', d)$.

(ii) Dacă $d_1 \cap d = \{A\}$, atunci $A \in d_1'$.

3. Translații

Fie $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} \in V_2$, un vector fixat. Aplicația $T_{\vec{v}} : E_2 \to E_2$, definită prin $T_{\vec{v}}(P) = P'$, unde $\vec{PP'} = \vec{v}$, se numește **translație de vector $\vec{v}$**.

Ecuația translației de vector $\vec{v} = (a, b) \rightsquigarrow$ avem $P(x, y)$ și $P'(x', y')$

Avem $\underset{\substack{\| \\ (x'-x,\, y'-y)}}{\vec{PP'}} = \vec{v} = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Matriceal, ecuația devine $\boxed{X' = X + X_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$

Obs. 1° $T_{\vec{v}}^{-1} = T_{-\vec{v}}$.

2° O dreaptă cu direcția paralelă cu $\vec{v}$ este invariantă în raport cu $T_{\vec{v}}$.

3° $T_{\vec{v}}(d) = d'$, unde $d \parallel d'$.

Teoremă Compunerea a două simetrii centrale este o translație. Reciproc, orice translație se poate scrie ca o compunere de două simetrii centrale.

Teoremă Compunerea a două simetrii axiale, cu axele paralele, este o translație. Reciproc, orice translație se poate scrie ca o compunere de două simetrii axiale de axe paralele.

Teoremă Fie d_1, d_2, d_3 trei drepte paralele. Atunci $S_{d_1} \circ S_{d_2} \circ S_{d_3} = S_d$, unde $d \parallel d_m$, $(\forall)\, m \in \overline{1,3}$.