Universitatea din Bucureşti 29 mai 2021
Facultatea de Matematică şi Informatică

Elemente de calcul ştiinţific
Verificare – Matematică, Anul I

INSTRUCŢIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
3. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
4. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 10:30–13:00.**
5. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email printr-un Reply simplu la emailul în care aţi primit subiectele ca fişier PDF, cu denumirea `NUME_PRENUME_GRUPA.pdf`.
6. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **29 mai 2021, orele 13:40.**

EX#1 Fie sistemul

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(a) Menţionaţi dacă matricea asociată sistemului (1):

(i) admite factorizarea LU fără pivotare;
(ii) admite factorizarea LU cu pivotare (factorizarea PLU);
(iii) admite metoda de eliminare Gauss fără pivotare;
(iv) admite metoda de eliminare Gauss cu pivotare (parţială, parţială scalată sau totală);
(v) admite factorizarea Cholesky.
(vi) este (strict) diagonal dominantă.

Justificaţi răspunsurile date.

(b) Determinaţi soluţia sistemului (1), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, folosind metoda de eliminare Gauss fără pivotare.

EX#2 Determinaţi ecuaţia *parabolei de regresie* asociată punctelor (i.e. parabola cea mai apropiată de punctele respective): $\mathrm{P}_1(-1;0)$, $\mathrm{P}_2(0;3)$, $\mathrm{P}_3(1;0)$, $\mathrm{P}_4(2;11)$, rezolvând sistemul de ecuaţii normale asociat folosind metoda de eliminare Gauss cu pivotare parţială scalată. Explicaţi şi ilustraţi grafic rezultatul obţinut.

EX#3 Fie $\mathbf{A} \coloneqq [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n] \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$ şi $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$, unde $\mathbf{a}_k \coloneqq \big(a_{ik}\big)_{i=\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{1,n}$. Considerăm *factorizarea QR* a matricei $\mathbf{A}$, i.e. $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\,\mathbf{R}$, unde $\mathbf{Q} \coloneqq [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \ldots\ \mathbf{q}_n] \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$ şi $\mathbf{q}_k \coloneqq \big(q_{ik}\big)_{i=\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{1,n}$, iar $\mathbf{R} = \big(r_{ij}\big)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice superior triunghiulară cu $r_{kk} > 0$, $k = \overline{1,n}$. Definim matricele proiecţie ortogonală $\mathbf{Q}_k \coloneqq \mathbf{q}_k\mathbf{q}_k^\mathsf{T} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$, $k = \overline{0,n-1}$, cu convenţia $\mathbf{Q}_0 \equiv \mathbf{0} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$. Arătaţi că metoda Gram-Schmidt clasică/standard este echivalentă cu

$$\mathbf{q}_k\, r_{kk} = \big[\mathbf{I}_m - \big(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \ldots + \mathbf{Q}_{k-1}\big)\big]\,\mathbf{a}_k\,, \quad k = \overline{1,n}\,. \tag{2}$$