Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

28 ianuarie 2021, 11:00–13:30

NUME:	....
PRENUME:	....
GRUPA:	....

INSTRUCŢIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
3. Pe prima pagină a rezolvării fiecarei probleme, vor fi scrise **cu litere de tipar** `numele şi prenumele studentului, precum şi grupa acestuia.`
4. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
5. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 11:00–13:30.**
6. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email:
   - ca fişier PDF, împreună cu fişierul cu subiectele examenului la adresa `liviu.marin@fmi.unibuc.ro` (Prof. dr. Liviu MARIN);
   - vor avea următoarea **linie de subiect**: `Examen AnNum - Nume si prenume student, Grupa 3XX`
7. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **joi, 28 ianuarie 2021, orele 14:00.**

Analiză Numerică
Examen – Anul III – Subiectul#17

I. Fie $A > 0$ şi funcţia $\phi(x) = 2x - Ax^2$.

(a) Arătaţi că dacă metoda iterativă de punct fix asociată funcţiei ϕ converge către o limită nenulă, atunci această limită este $1/A$.

(b) Determinaţi o vecinătate a lui $1/A$ pentru care metoda iterativă de punct fix asociată funcţiei ϕ converge dacă aproximarea iniţială x_0 se găseşte în această vecinătate.

II. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ fixat şi nodurile echidistante $x_0 = x$, $x_1 = x + h$ şi $x_2 = x + 2h$, unde $h > 0$.

(a) Determinaţi polinomul de interpolare Lagrange, $P_2 \in \mathbb{P}_2$, asociat funcţiei f şi nodurilor de interpolare x_0, x_1 şi x_2.

(b) Dacă $f \in \mathrm{C}^3[x_0, x_2]$, aplicaţi teorema de interpolare Lagrange pentru $f(y)$ şi $P_2(y)$, unde $y \in [x_0, x_2]$.

(c) Folosind (a) şi (b), determinaţi formula de aproximare cu diferenţe finite ascendente pentru $f'(x)$ şi ordinul său de aproximare.

III. (a) Fie $I(f) = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Dacă $I_1(f) = 4$ şi $I_2(f) = 2$, determinaţi $f(1)$.

(b) Fie $I(f) = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Dacă $I_0(f) = 4$ şi $I_1(f) = 5$, determinaţi $I_2(f)$.

IV. Fie funcţia pondere $w : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = 1$.

(a) Folosind procedeul Gram-Schmidt, determinaţi polinoamele ortogonale în raport cu produsul scalar din $\mathrm{L}^2_w(-1, 1)$, $\big\{L_0, L_1, L_2\big\} \subset \mathbb{P}_2$ (*polinoamele Legendre*).

(b) Determinaţi cea mai bună aproximare polinomială $p_2 \in \mathbb{P}_2$ a funcţiei

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [-1, 0) \\ 1\,, & x \in [0, 1]\,. \end{cases}$$