(1) 05.03.24

ElemTN_S2_3(1)

Reguli de divizibilitate:

(2) Un număr natural n e divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră e 0, 2, 4, 6 sau 8.

Dem: Dacă $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$, atunci

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1} \cdot 10 + a_0.$$ Prin urmare,

$$n \vdots 2 \iff a_0 \vdots 2 \iff a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \square$$

(4) Un număr natural n e divizibil cu 4 dacă numărul format de ultimele sale două cifre e divizibil cu 4

Dem: Dacă $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$, atunci

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2} \cdot 100 + \overline{a_1 a_0}.$$ Cum $100 \vdots 4$,

obținem $n \vdots 4 \iff \overline{a_1 a_0} \vdots 4 \square$

Generalizare:

(2^k) Un număr natural n e divizibil cu 2^k dacă numărul format de ultimele sale k cifre e divizibil cu 2^k.

Dem: Considerând scrierea $n = \overline{a_r a_{r-1} \dots a_0}$ a lui n în baza 10,

$$n = \overline{a_r a_{r-1} \dots a_k} \cdot 10^k + \overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_0}.$$ Întrucât

$10^k = 2^k \cdot 5^k \vdots 2^k$ de aici obținem $n \vdots 2^k \iff \overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_0} \vdots 2^k \square$

(5) Un număr natural n e divizibil cu 5 dacă ultima cifră a lui n e 0 sau 5.

Dem: Considerând scrierea $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ a lui n în baza 10,

$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1} \cdot 10 + a_0$; Cum $10 \vdots 5$, de aici obținem $n \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0, 5\}$. □

(25) Un număr natural n e divizibil cu 25 dacă numărul format de ultimele sale două cifre e divizibil cu 25.

Dem: Considerând scrierea $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ a lui n în baza 10,

$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2} \cdot 100 + \overline{a_1 a_0}$. Cum $100 \vdots 25$, de aici rezultă că $n \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 25$. □

Generalizare:

(5^k) Un număr natural n e divizibil cu 5^k ($k \in \mathbb{N}$) dacă numărul format de ultimele sale k cifre e divizibil cu 5^k.

Dem: Ca la (2^k). □

(9) Un număr natural n e divizibil cu 9 dacă suma cifrelor sale (din baza 10) e divizibilă cu 9.

Dem: Considerând scrierea $n = a_r a_{r-1} \ldots a_0$ a lui n în baza 10,

$$n = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 =$$

$$= a_r(10^r - 1) + a_{r-1}(10^{r-1} - 1) + \ldots + a_1(10 - 1) + a_r + a_{r-1} + \ldots + a_0 =$$

$$= \sum_{j=2}^{r} a_j(10^j - 1) + 9a_1 + a_r + \ldots + a_0 =$$

$$= \sum_{j=2}^{r} a_j(10 - 1)(10^{j-1} + 10^{j-2} + \ldots + 1) + 9a_1 + a_0 + \ldots + a_r$$

$$= 9\left(a_1 + \sum_{j=2}^{r} a_j(10^{j-1} + 10^{j-2} + \ldots + 1)\right) + a_0 + \ldots + a_r,$$

Ca urmare $n \vdots 9 \iff a_0 + \ldots + a_r \vdots 9$.

Corolar:

(3) Un număr natural n e divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale din baza 10 e divizibilă cu 3.

(10^k) Un număr natural n e divizibil cu 10 dacă scrierea sa în baza 10 se termină cu k de 0.

(27) (/(37)) Un număr natural

$n = \overline{a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0}$ (în baza 10)

e divizibil cu 27 (respectiv cu 37)

ddacă $\overline{a_r a_{r-1} \ldots a_3} + \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 27$ (respectiv $\vdots 37$)

Dem:

$n = \overline{a_r a_{r-1} \ldots a_3} \cdot 1000 + \overline{a_2 a_1 a_0} =$

$= \overline{a_r a_{r-1} \ldots a_3} \cdot 27 \cdot 37 + \overline{a_r a_{r-1} \ldots a_3} + \overline{a_2 a_1 a_0}$.

Cum, evident, $\overline{a_r a_{r-1} \ldots a_3} \cdot 27 \cdot 37 \vdots 27$,

de aici obținem

$n \vdots 27 \iff \overline{a_r a_{r-1} \ldots a_3} + \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 27$

Afirmația referitoare la 37 se probează analog.

Dacă noi luăm $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $\boxed{\text{cel mai mic multiplu comun}}$ m, al acestora,

↳ în sens semantic!!

și dacă considerăm un alt multiplu comun, M, al lui a și b,

cf TÎR $\exists\, q, r \in \mathbb{N}$ cu $M = mq + r$ și $r < m$.

Dar $M = mq + r \Rightarrow r = M - mq$ și (5)

deci r e multiplu comun pt a și b.

Ca urmare, $r = 0$, deci $m | M$.

Notă: În locul definiției „semantice" e preferată (prin prisma aplicabilității și a deschiderii către generalizări)

Def Date fiind numerele naturale a și b, un număr natural m s.n. cel mai mic multiplu comun pt a și b dacă au loc simultan:

(i) $a | m \wedge b | m$

și (ii) $\forall m' \in \mathbb{N}\ (a | m' \wedge b | m' \Rightarrow m | m')$

T Orice două numere naturale admit un UNIC c.m.m.m.c.

Dem: Existența rezultă din observația anterioară.

Pt unicitate, fie m', m'' c.m.m.m.c pt a și b.

~~Atunci~~, cf (ii), $\left.\begin{matrix} m' | m'' \\ \text{și} \\ m'' | m' \end{matrix}\right\} \Rightarrow m' = m''$ □

Fie $a, b \in \mathbb{N}$. și fie $d = (a, b)$

NOTAȚII

$(a, b) \stackrel{\text{not}}{=}$ c.m.m.d.c $\{a, b\}$

$[a, b] \stackrel{\text{not}}{=}$ c.m.m.m.c $\{a, b\}$

Atunci există $a', b' \in \mathbb{N}$ așa încât:

$a = a'd$ și $b = b'd$.

[Prop] Fie $a, b \in \mathbb{N}$, $d = (a, b)$ și $a', b' \in \mathbb{N}$ așa încât $a = da'$ și $b = db'$. Atunci $(a', b') = 1$.

~~Dem~~: Dacă $a = 0$, $d = (a,b) = 0$; $a' = 0$, $b' = 1$, deci $(a', b') = 1$.

Analog pt $b = 0$.

Dacă $ab \neq 0$, presupunem $\boxed{d' \overset{not}{=} (a', b') > 1}$.

Atunci $d' | a'$, deci $d'd | a'd = a$

și $d' | b'$, deci $d'd | b'd = b$,

deci $d'd | (a, b) = d$.

Dar $d' > 1$, deci $d'd > d$ $\Big\}$ ↯.

Rămâne, deci, că $(a', b') = 1$. □

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$, $d = (a, b)$, $a = da'$, $b = db'$.

Notăm $m = da'b'$.

Atunci:
1. $m = ab' \vdots a$
2. $m = a'b \vdots b$

Fie $M \in \mathbb{N}$ cu $M \vdots a$ și $M \vdots b$.

Atunci există $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

$$a'd\alpha = a\alpha = M = b\beta = b'\beta d \xRightarrow{d \neq 0} a'\alpha = b'\beta \quad (*)$$

$\boxed{\text{Prop}}$ Fie $A, B \in \mathbb{N}$ și fie $k \in \mathbb{N}$.

Atunci $(kA, kB) = k(A,B)$.

Dem: Pt $A=0$ sau $B=0$ sau $k=0$ egalitatea e evidentă.

La fel pt $A = B \neq 0$, pt $k \neq 0$

Dacă $A, B \in \mathbb{N}$ și $A \neq B$, $k \neq 0$ scriem

Algoritmul lui Euclid:

$kA = q_0 kB + kr_0$

$kB = q_1 kr_0 + kr_1$

$kr_0 = q_2 kr_1 + kr_2$

$kr_{n-1} = q_{n+1} kr_n + kr_{n+1}$

$kr_n = q_{n+2} kr_{n+1}$

Alg. Euclid pt kA și kB

Mai deci: $k(A,B) = kr_{n+1} = (kA, kB)$ □

$\boxed{\text{Prop}}$ Fie $A, B, C \in \mathbb{N}$

Dacă $A \mid BC$ și (A,B), atunci $A \mid C$

dem: $C \overset{\text{Prop}}{\underset{\text{ant}}{=}} C \cdot (A,B) = (AC, BC) \vdots A$ □

Dacă din $(*)$ obținem $\alpha \mid \beta$, deci $\exists \lambda \in \mathbb{N}$ $\beta = \lambda \alpha$.

Ca urmare $\exists \lambda \in \mathbb{N}$ $M = \lambda a'b'd = \lambda m$. (8)

Morala:

$\boxed{\text{Prop}}$ Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, $d = (a, b)$, $a', b' \in \mathbb{N}$ sunt așa încât $a = da'$ și $b = db'$, atunci $da'b'$ e c.m.m.m.c al lui a și b.

$\Rightarrow d \cdot (da'b') = d^2a'b' = da' \cdot db' = ab$

[cazurile $a = 0$ sau $b = 0$ sunt neevidente]

$\boxed{\text{Corolar}}$ $\forall a, b \in \mathbb{N}$ $(a, b) \cdot [a, b] = ab$

$\boxed{\text{Corolar}}$ Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ și $(a, b) = 1$, atunci $[a, b] = ab$.

$\boxed{\text{Corolar}}$: Un număr natural e divizibil cu 6 dacă și numai dacă e divizibil atât cu 2, cât și cu 3.