Examen Statistică

8 Feb 2020

(11 feb 2018, 2 iunie 2018)

Exercițiul 1: Fie o variabilă aleatoare repartizată $P_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k$, $k \in \mathbb{N}$ unde $\theta \in (0,1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $E[X]$ și $Var(X)$. Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2 \dots X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.
2. Det. estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ prin metoda momentelor și calculați $P_\theta(\tilde{\theta}=0)$.
3. Det. estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și det. legea la limită.

Exercițiul 2: Considerăm cuplul de variabile aleatoare (X,Y) cu densitatea: $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-y^2x/2} \cdot e^{-\sqrt{x}}$, $x>0$

1. Det. repartiția condiționată a lui Y la $X=x$.
2. Det. repartiția lui $\sqrt{X}$
3. Propuneți o metodă de simulare a unei observații din cuplul (X,Y) și scrieți un cod R care să permită acest lucru.

Scanned with CamScanner

<u>Exercițiul 3</u>. Fie $X_1 \dots X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde $f_\theta(x) = \frac{7}{(x-\theta)^8} \mathbb{1}_{[1+\theta, +\infty)}(x)$

a) Calculați $E_\theta[X_1]$, $Var_\theta(X_1)$ și funcția de repartiție $F_\theta(x)$ a lui X_1.

b) În cazul în care $\theta = 2$, dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0,1]$ $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$, $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

c). Determinați estimatorul $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestui estimator. Care este legea la limită?

d) Exprimați în funcție de θ mediana repartiției lui X_1 și, plecând de la aceasta, găsiți un alt estimator $\hat{\theta}_n^{a}$ pt θ

e). Det. legea la limită a lui $\hat{\theta}_n^{a}$ și arătați că, asimptotic acesta este mai bun decât $\hat{\theta}_n^M$

f). Det. estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n^{VM}$ a lui θ și verificați dacă este deplasat.

h) Pe care dintre cei trei estimatori îi preferați?

$\boxed{\text{Ex 4}}$ Considerăm densitatea $f(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ unde folosim convenția $f(1) = +\infty$.

(1) Dc v.a. Y are densitatea f, care este dens. v.a $X = \theta Y$, $\theta > 0$?

(2) $X_1 \dots X_n$ eșantion talie n din X. Det. estimatorul de verosimilitate max. $\hat{\theta}_n$ a lui θ.

(3) Det. repart. limită a lui $n\sqrt{\theta - \hat{\theta}_n}$

(4) Det. mediana repartiției v.a. X și deduceți un nou estimator $\bar{\theta}_n$. Pe care din cei doi estimatori îl preferați?

Scanned with CamScanner

Ex 3 **Examen 8 feb 2020**

b) $f_\theta(x) = \frac{7}{(x-\theta)^8} \mathbb{1}_{[1+\theta, \infty)}(x)$

$F_\theta(x) = 1 - \frac{1}{(x-\theta)^7} \mathbb{1}_{[1+\theta,\infty)}(x)$

$\theta = 2$

$F_\theta(x) = y \Rightarrow 1 - \frac{1}{(x-\theta)^7} = y \Rightarrow \frac{1}{(x-\theta)^7} = 1-y \Rightarrow (x-\theta)^7 = \frac{1}{1-y} =$

$x - \theta = \sqrt[7]{\frac{1}{1-y}} \Rightarrow x = \sqrt[7]{\frac{1}{1-y}} + \theta$

$F_\theta^{-1}(y) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-y}} + \theta$

$\theta = 2 \Rightarrow F_2^{-1}(y) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-y}} + 2$

Aplic $F_2^{-1}(y)$ pe u_1, u_2, u_3.

Ex 3: f) $\hat{\theta}_n^{vm}$ deplasat?

$\hat{\theta}_n = x_{(1)} - 1$

$E[\hat{\theta}_n] = E[x_{(1)} - 1] = E[x_{(1)}] - 1$

$E[x_{(1)}] = P(x_1 \le t, \dots, x_n \le t) \overset{iid}{=} \left(P(x_1 \le t)\right)^n = \left(F_\theta(x_1)\right)^n$

$F_\theta(x_1) = 1 - \frac{1}{(x-\theta)^7} \Rightarrow \left(F_\theta(x_1)\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(x-\theta)^7}\right)^n$

$E[\hat{\theta}_n] = \left(1 - \frac{1}{(x-\theta)^7}\right)^n - 1 \neq 0 \Rightarrow$ deplasat.

Ex4:

2) $$\frac{n}{2\theta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\theta - x_i}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\theta - x_i}} = 0$$

$$\frac{n}{2\theta} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta - x_i} = 0$$

$$\frac{1}{\theta - x_1} + \frac{1}{\theta - x_2} + \frac{1}{\theta - x_3} \dots + \frac{1}{\theta - x_n}$$

??

4) Mediana repartitiei

$$F_\theta^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = x_{\frac{1}{2}}$$

$$F_\theta(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{x}{\theta}}$$

$$F_\theta(x) = y \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{x}{\theta}} = 1 - y \,\Big|^2 \Rightarrow 1 - \frac{x}{\theta} = (1-y)^2$$

$$\frac{x}{\theta} = 1 - (1-y)^2$$

$$x = \theta\left(1 - (1-y)^2\right)$$

$$F^{-1}(y) = \theta\left(1 - (1-y)^2\right)$$

$$F_\theta^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \theta\left(1 - \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^2\right) = \theta\left(1 - \tfrac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x_{\frac{1}{2}} = \theta\left(1 - \tfrac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\ln x} \frac{1}{u} \cdot e^{-\frac{(\ln u - \theta)^2}{2}} du =$$ $x > 0$

$\ln u - \theta = t \Rightarrow \ln u = t + \theta$

$\frac{1}{u} du = dt$

$u_1 = 0 \Rightarrow$

$$\phi(\ln x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\ln x} \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2}} du$$

$N(\mu, \sigma)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Noi avem $N(\theta, 1)$:

$$f(\ln x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2}}$$

Dar $\ln x = y \Rightarrow f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\theta)^2}{2}}$

↳ Din teorie $E(x) = \mu$; $Var[x] = \sigma^2$

$E[y] = \theta$

$Var[y] = 1.$