EXAMEN
Teoria măsurii
28.01.2022

Exerciţiu 1 Aplicaţi teorema de convergenţă monotonă şirului de funcţii

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{10}}\chi_{[1,n^2+1]}(x) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

în spaţiul cu măsură $([1,\infty), \mathcal{L}\mathrm{eb}([1,\infty)), \lambda)$. Analizaţi limita

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^{10}}(\sin(2022x))^n d\lambda(x).$$

Exerciţiu 2 Fie $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, suprafaţa dată prin

$$\sigma(u,v) = (-v, 0, u^2 v).$$

Determinaţi $\partial\sigma$ şi, folosind formula Stokes-Ampere, calculaţi

$$\int_\sigma (\mathrm{curl}(F)|ds)_{\mathbb{R}^3},$$

unde

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = (z+x, x, y+x).$$

Exerciţiu 3 Fie $f : [1,\infty) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea

$$|f(x,y)| \le \frac{1}{(xy)^{10}}, \quad \forall (x,y) \in [1,\infty) \times [1,\infty).$$

Arătaţi că f este Lebesgue integrabilă.