TAFALAN ALEXANDRU-MARIAN

TUTORIAT GEOMETRIE – Nr 2 (SĂPTĂMÂNA 3)

Subspații afine. Operații cu subspații afine

Definiție: (subspațiu afin)

Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ spațiu afin, fie $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ submulțime. $\mathcal{A}_1$ se numește SUBSPAȚIU AFIN al lui $\mathcal{A}$ dacă $(\exists)\ O' \in \mathcal{A}_1$ cu proprietatea că mulțimea $\text{dir}_{O'}(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{O'P} \mid P \in \mathcal{A}_1\}$ este SUBSPAȚIU VECTORIAL a lui $V_{/K}$

Teoremă (de caracterizare a subspațiilor afine)

Fie $(\mathcal{A}; V_{/K}; \varphi)$ sp. afin și $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{A}_1$ este SUBSPAȚIU AFIN $\Leftrightarrow (\forall)\ n \in \mathbb{N}, (\forall)\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ și $(\forall)\ P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}_1$ avem că

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i \in \mathcal{A}_1$$

(închis la combinații afine arbitrare cu "elem." din $\mathcal{A}_1$)

Exercițiul 1:

Fie $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 1\}$ și

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}\right\}.$$

Să se arate că S_1 și S_2 sunt subspații afine în $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3_{/\mathbb{R}}, \varphi_{can})$ și să se determine $\text{dir}(S_1)$, $\text{dir}(S_2)$, $\dim(S_1)$ și $\dim(S_2)$.

Soluție: S_1

Folosim definiția:

Fie $O' = (2, 1, 1) \in S_1$

$dir_{O'}(S_1) = S_{1O'} = \{ \overrightarrow{O'P} \mid P \in S_1 \} = \{ (\underbrace{2-x}_{a}, \underbrace{1-y}_{b}, \underbrace{1-z}_{c}) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=1 \}$

$P = (x, y, z)$

$\overrightarrow{O'P} = (2-x, 1-y, 1-z) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

$\Rightarrow dir_{O'}(S_1) = \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid -a+\cancel{2}+\cancel{1}-b+2c-\cancel{2}=\cancel{1} \} \Rightarrow$

$\Rightarrow dir_{O'}(S_1) = \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid -a-b+2c=0 \} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$

$\hookrightarrow$ e subsp. vect

Deci, S_1 e subspațiu afin a lui $\mathbb{R}^3$.

Pentru S_2,

Folosim

Teorema menționată mai sus:

Fie $\underset{(x_1,x_2,x_3)}{P_1} \in S_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ (1)

$\underset{(y_1,y_2,y_3)}{P_2} \in S_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2 \\ -y_1 + y_2 + y_3 = -1 \end{cases}$ (2)

$\underset{(z_1,z_2,z_3)}{P_3} \in S_2 \Rightarrow \begin{cases} z_1 + 2z_2 = 2 \\ -z_1 + z_2 + z_3 = -1 \end{cases}$ (3)

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a+b+c=1$

$aP_1 + bP_2 + cP_3 = (ax_1 + by_1 + cz_1 ; ax_2 + by_2 + cz_2 ; ax_3 + by_3 + cz_3)$

$aP_1 + bP_2 + cP_3 \in S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + 2ax_2 + 2by_2 + 2cz_2 = 2 \\ -ax_1 - by_1 - cz_1 + ax_2 + by_2 + cz_3 + ax_3 + by_3 + cz_3 = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a(x_1 + 2x_2) + b(y_1 + 2y_2) + c(z_1 + 2z_2) = 2 \\ a(-x_1 + x_2 + x_3) + b(-y_1 + y_2 + y_3) + c(-z_1 + z_2 + z_3) = -1 \end{cases}$

$\overset{(1)(2)(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2a + 2b + 2c = 2 \\ -a - b - c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\overbrace{a+b+c}^{=1}) = 2 \\ -(a+b+c) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ -1 = -1 \end{cases}$ (A)

Deci, $aP_1 + bP_2 + cP_3 \in S_2$, $(\forall) a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a+b+c=1$

$(\forall) P_1, P_2, P_3 \in S_2$

$\Rightarrow S_2$ e subspațiu afin a lui $\mathbb{R}^3$

- $\mathrm{dir}(S_1) = \{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \}$
- $\mathrm{dir}(S_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \right\}$
- $\dim(S_1) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{dir}(S_1)) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$
- $\dim(S_2) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{dir}(S_2)) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$

Definiție: (reper afin și coordonate afine)

Fie $(A, V/_{K}, \varphi)$ spațiu afin. Fie $R_{af} := \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$! R_{af} se numește REPER AFIN ARBITRAR dacă $(\forall) M \in A$, $(\exists)! \alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$ cu $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$ a.î.:

$$M = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n$$

Numim: $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ = COORDONATELE AFINE sau BARICENTRICE ale lui M în raport cu R_{af}

Observații: 1) $\dim(A) = n \Rightarrow$ orice reper afin a lui A are $n+1$ puncte

2) $\dim(\emptyset) = -1$!! — CONVENȚIE

Definiție: (reper CARTEZIAN și coordonate carteziene)
Fie $(A, V/_{\mathbb{K}}, \varphi)$ un spațiu afin. Vom numi REPER CARTEZIAN al lui A un cuplu (O, B), $R_c = (O, B)$, unde $O \in A$, iar
↳ "ORIGINEA REPERULUI"
$B \subset V$ este o bază a spațiului vectorial V.

Observație Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază în V
Pentru $M \in A \Rightarrow \vec{r}_0(M) = \overrightarrow{OM}$ = vectorul de poziție a lui M în raport cu $R_c \Rightarrow$

$$\rightarrow \underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\in V} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Numim: $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ – COORDONATELE CARTEZIENE ale lui M în raport cu R_c.

Exercițiul 2: Fie $(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}; \varphi_{can})$ spațiu afin, $O(2;-1;3)$ și sistemul de puncte

$R = \{E_0 = (1,-2,-3), E_1 = (1,1,-5), E_2 = (-2,-1,3), E_4 = (6,1,2)\}$.

a) Se poate forma un reper cartezian R_c cu originea $O' = E_0$, asociat sistemului de puncte R? Dacă da, să se scrie acest reper.

b) Să se determine schimbarea de coordonate la trecerea de la reperul R_c la reperul $R' = \{O'' = O, e_1', e_2', e_3'\}$ unde

$e_1' = (1,2,0)$; $e_2' = (0,1,2)$; $e_3' = (2,0,1)$ și să se indice translația și centro-afinitatea prin care se realizează această schimbare de reper.

Soluție

a) $e_1 = \overrightarrow{E_1E_0} = (0, 3, -2)$

$e_2 = \overrightarrow{E_2E_0} = (-3, 1, 6)$

$e_3 = \overrightarrow{E_3E_0} = (5, 3, 5)$

$\mathcal{R}_c = \{O' = E_0(1, -2, -3) ; e_1, e_2, e_3\}$ este reper cartezian $\Leftrightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ e bază/reper în $\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$ ca sp. vect $\Leftrightarrow$ rang $A = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

rg $A = 3 \Rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ bază a lui $\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \mathcal{R}_c$ e reper cartezian în $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, f_{can})$ ca sp. afin

b) PROPOZIȚIE

Dacă $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ și $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$ sunt 2 repere carteziene în care un punct P are coordonatele cart $(x_1, .., x_n) \overset{not}{:=} (x_i)_{i=\overline{1,n}}$ în $\mathcal{R}$, respectiv coordonatele cart $(x_1', .., x_n') \overset{not}{:=} (x_i')_{i=\overline{1,n}}$ în $\mathcal{R}'$ atunci legătura este:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j' + a_{i0} \quad , \quad (\forall)\ i = \overline{1,n},$$

unde $(a_{i0})_{i=\overline{1,n}}$ = coordonatele lui O' în reperul $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ și $(c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$

MATRICIAL

Dacă

$$X=(x_i)^T,\quad X'=(x'_i)^T,\quad C=(c_{ij}),$$

$A_0=(a_{i0})^T$, atunci avem:

$$X=CX'+A_0$$

Definiție: O transformare de tipul $X=X'+A_0$ se numește TRANSLAȚIE, iar una de tipul $X=CX'$ se numește CENTRO-AFINITATE.

Revenim la exercițiu. Fie $P\in\mathbb{R}^3$

Fie $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ coordonatele lui P în reperul cartez. cartezian $\mathcal{R}_c$

$X'=\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}$ coordonatele carteziene ale lui P în reperul cartezian $\mathcal{R}'$

$\mathcal{R}_c=\{O'=E_0(1,-2,-3);\ e_1=(0,3,-2);\ e_2=(-3,1,6);\ e_3=(5,3,5)\}$

$\mathcal{R}'=\{O'=O(2,-1,3);\ e'_1=(1,2,0);\ e'_2=(0,1,2);\ e'_3=(2,0,1)\}$

$A_{0'}=(a_{i0'})_{i=\overline{1,3}}$ = coord lui O' în reperul $\mathcal{R}_c$

Determin C = matricea de trecere $\{e_1,e_2,e_3\}\xrightarrow{C}\{e'_1,e'_2,e'_3\}$

$e'_1=(1,2,0)=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3$

$(1,2,0)=(-3\beta+5\gamma;\ 3\alpha+\beta+3\gamma;\ -2\alpha+6\beta+5\gamma)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}-3\beta+5\gamma=1\\3\alpha+\beta+3\gamma=2\\-2\alpha+6\beta+5\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{77}{163}\\\beta=-\frac{1}{163}\\\gamma=\frac{32}{163}\end{cases}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{163}\begin{pmatrix} 77 & 17 & -40 \\ -1 & 40 & -27 \\ 32 & 24 & 49 \end{pmatrix} = \text{matricea de trecere de la } \{e_1, e_2, e_3\} \text{ la } \{e_1', e_2', e_3'\}$$

Determin A_{i_0}

$$(2,-1,3) = a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3b+5c=2 \\ 3a+b+3c=-1 \\ -2a+6b+5c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{113}{163} \\ b = -\frac{7}{163} \\ c = \frac{61}{163} \end{cases}$$

Deci:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{163}\begin{pmatrix} 77 & 17 & -40 \\ -1 & 40 & -27 \\ 32 & 24 & 49 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} + \frac{1}{163}\begin{pmatrix} -113 \\ -7 \\ 61 \end{pmatrix}$$

$$X = CX' + A_0$$

Terminologie subspații afine:

Un subspațiu afin de i) dimensiune 1 se numește DREAPTĂ AFINĂ

→ ii) dimensiune 2, se numește PLAN AFIN

→ iii) Dacă $\dim(\mathcal{A}) = n$ și dimensiunea subspațiului este $= n-1 \Rightarrow$

→ HIPERPLAN AFIN

Exercițiu 3: Fie $(\mathcal{A} = \mathbb{R}^3, V_{/\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3_{/\mathbb{R}}, \varphi = \varphi_{can})$ spațiu afin. Fie $M \subset \mathcal{A}$ sistem de puncte a.î.:

a) $M = \{\emptyset\}$

Scanned by CamScanner

b) $M = \{P\}$

c) $M = \{P_1, P_2\}$, $P_1 \neq P_2$

d) $M = \{P_1, P_2, P_3\}$, P_1, P_2, P_3 – necoliniare.

Determinați $Af(M) = ?$

Soluție: a) $Af(\emptyset) = \emptyset$, $\langle \emptyset \rangle = \emptyset$

b) $Af(\{P\}) = \{P\}$

c) $Af(\{P_1, P_2\}) \overset{def}{=} \{P \in A \mid (\exists)\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu $\alpha + \beta = 1$ a.î. ($\beta = 1 - \alpha$)

a.î. $P = \alpha P_1 + (1-\alpha) P_2 \}$

Fie $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

Avem: $(x, y, z) = \alpha(x_1, y_1, z_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y, z) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (x_2 - \alpha x_2; y_2 - \alpha y_2; z_2 - \alpha z_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha x_1 + x_2 - \alpha x_2 \\ y = \alpha y_1 + y_2 - \alpha y_2 \\ z = \alpha z_1 + z_2 - \alpha z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha(x_1 - x_2) + x_2 \\ y = \alpha(y_1 - y_2) + y_2 \\ z = \alpha(z_1 - z_2) + z_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_2 = \alpha(x_1 - x_2) \\ y - y_2 = \alpha(y_1 - y_2) \\ z - z_2 = \alpha(z_1 - z_2) \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow d: \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \alpha$$

↳ Ecuația parametrică a unei drepte în $\mathbb{R}^3$

↳ Ecuația carteziană a unei drepte în $\mathbb{R}^3$

! Fie $A(a_1, \dots, a_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$

Ecuația carteziana a dreptei care

trece prin punctul A şi are direcţia v este

$$d: \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{x-a_2}{v_2} = \dots = \frac{x-a_n}{v_n} = t$$

! Vectorul $v \in dir(d) \Rightarrow \langle v \rangle = dir(d)$

$Af(\{P_1, P_2\}) = d$ ↪ o dreaptă $\Rightarrow dir(d) = \{t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R} = K$

d) $Af(\{P_1, P_2, P_3\}) = \{P \in A \mid (\exists)\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ cu $\alpha+\beta+\gamma=1$ a.î. $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3\}$

P_1, P_2, P_3 necoliniare

$\alpha+\beta+\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 1-\alpha-\beta$

$$\underset{(x,y,z)}{P} = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) + \gamma(x_3, y_3, z_3)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x - x_3 = \alpha(x_1 - x_3) + \beta(x_2 - x_3) \\ y - y_3 = \alpha(y_1 - y_3) + \beta(y_2 - y_3) \\ z - z_3 = \alpha(z_1 - z_3) + \beta(z_2 - z_3) \end{cases}}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

↪ Ecuaţia parametrică a unui plan în $\mathbb{R}^3$

! Ecuaţia carteziană a planului det. de punctul $A(x_1, x_2, x_3)$ şi având direcţia generată de $\{u, v\}$

$$\Pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 & x - x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

! $dir(\Pi) = \langle u, v \rangle$
$= \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

! Ecuaţia carteziană a planului determinat de punctele $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ este:

$$\Pi : \begin{vmatrix} x-a_1 & x-a_2 & x-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$$

(îi not (ABC))

$\dim(\Pi) = 2$

$\Rightarrow Af(\{P_1, P_2, P_3\}) = \Pi$ ~ un plan. ∎

Exercitul 4: Fie $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, f_{can})$ spatiu afin. Se consideră reperul cartezian canonic $\mathcal{R}_C = \{O(0,0,0); e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$. Să se construiască un reper $\mathcal{R}' = \{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ a.î. e_1' şi $e_2' \in dir(\Pi)$, unde $\Pi: 2x+3y+z-1=0$, $O'=(0,0;\frac{1}{5})$, iar dreapta ce trece prin O' şi are ca vector director pe e_3' conține punctul $P=(1,1,1)$.

Soluție: $\Pi: 2x+3y+z-1=0$

$dir(\Pi): 2x+3y+z=0 \Leftrightarrow$ sp. vectorial

$z = -2x-3y$

$\Rightarrow dir(\Pi) = \{(x, y, -2x-3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,0,-2) + y(0,1,-3) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$= Sp_{\mathbb{R}}\{(1,0,-2); (0,1,-3)\}$

Cum $e_1', e_2' \in dir(\Pi) \Rightarrow$

Pot lua: $e_1' = (1,0,-2)$

$e_2' = (0,1,-3)$

Scriu ecuatia dreptei d care trece prin O' şi prin P:

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}$$

$dir(d) = \langle e_3' \rangle$

Dar $dir(d) = \langle (1, 1, \frac{4}{5}) \rangle$

Iau $e_3' = (1, 1, \frac{4}{5})$

$\Rightarrow R' = \{ O' = (0, 0; \frac{1}{5}) ; e_1' = (1, 0, -2) ; e_2' = (0, 1, -3) ;$

$e_3' = (1, 1, \frac{4}{5})$