Miloșteanu Andreea
Mihoci Valentina

8.12.2021

Tutoriatul 8
Geometrie I
(exerciții)

1. Să se afle locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la o elipsă.

Sol. Fie $M_0(x_0, y_0) \in Ext\, \mathcal{E}$. Avem ecuația magică $d: y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ (tangenta) și M_0 fiind un punct exterior din care pleacă tangentele, impunem ca $M_0 \in d \Rightarrow$

$\Rightarrow y_0 = mx_0 \pm \sqrt{a^2m^2+b^2} \Rightarrow y_0 - mx_0 = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \,/^2 \Rightarrow y_0^2 - 2mx_0y_0 + m^2x_0^2 - a^2m^2 - b^2 = 0$

$\Rightarrow m^2(x_0^2-a^2) - 2mx_0 + (y_0^2-b^2) = 0$ avem o ecuație de gradul al II-lea în m care generează pantele tangentelor din M_0.

Știm că tangentele sunt perpendiculare $\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 \cdot m_2 = \dfrac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}$

$\Rightarrow \dfrac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_0^2 - b^2 = a^2 - x_0^2 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2+b^2 \Rightarrow \mathcal{C}(O(0,0), \sqrt{a^2+b^2})$ cercul lui Monge

Dacă adaptăm exercițiul la hiperbolă: avem ecuația magică $d: y = mx \pm \sqrt{m^2a^2-b^2}$

În urma calculelor, ajungem la $m^2(x_0^2-a^2) - 2mx_0y_0 + (y_0^2+b^2) = 0$

$m_1 \cdot m_2 = \dfrac{y_0^2+b^2}{x_0^2-a^2} = -1 \Rightarrow y_0^2 + b^2 = a^2 - x_0^2 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2$

Avem $\mathcal{C}(O(0,0), \sqrt{a^2-b^2})$. În particular,
- dacă $b > a \Rightarrow$ nu există LG a.î. să fie îndeplinită cerința
- dacă $a = b$ (h. echilateră), LG este $O(0,0)$ (centrul hiperbolei).

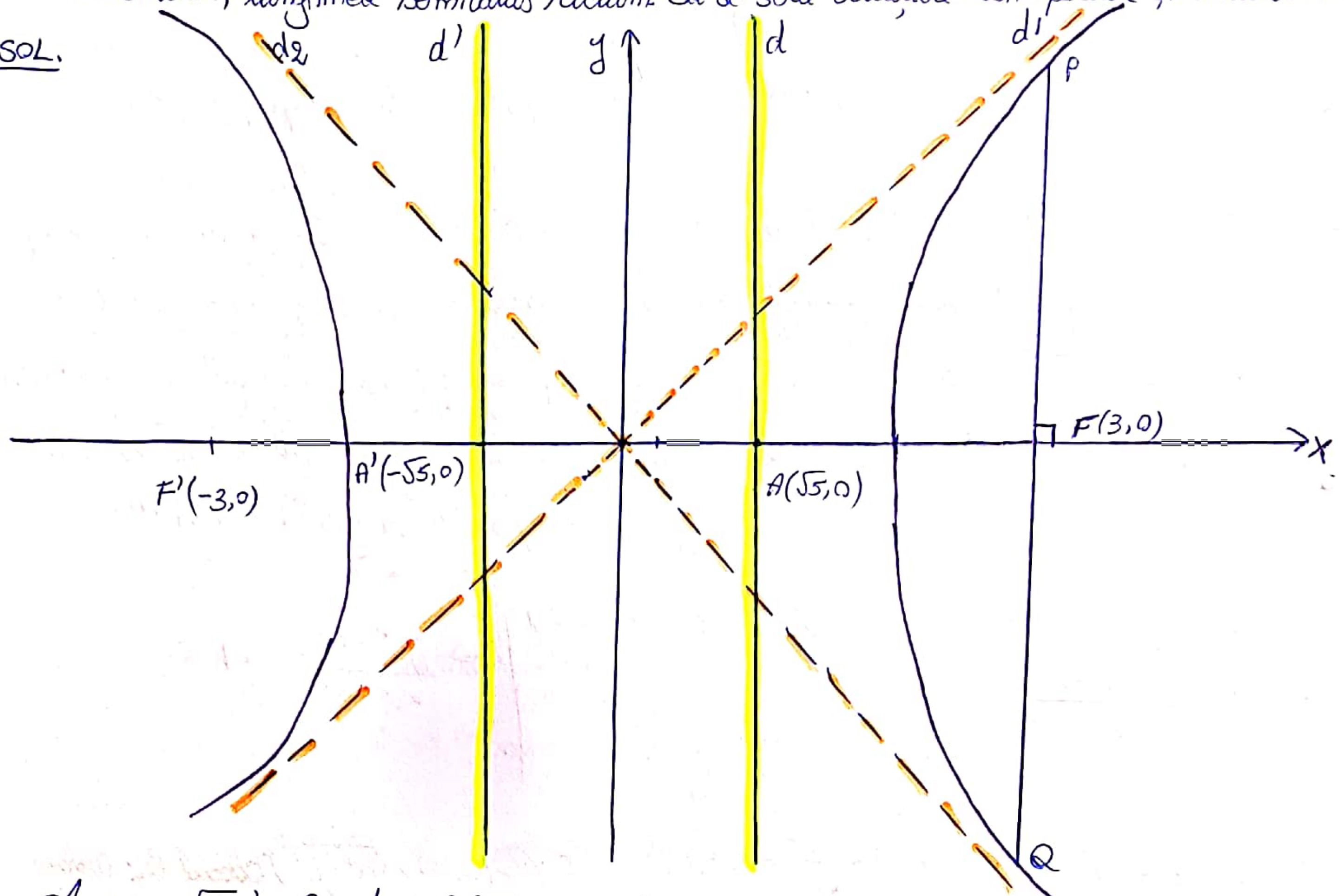
Atenție! La ambele cazuri trebuie să vedem ce se întâmplă și „reciproc".

$(\forall)$ $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}(O(0,0), \sqrt{a^2 \pm b^2})$, se verifică $x_0^2 + y_0^2 = a^2 \pm b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{y_0^2 \pm b^2}{x_0^2 - a^2} = -1 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow$ tangentele din M_0 sunt perpendiculare.

2. Fie hiperbola $\mathcal{H}: \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. Aflați coordonatele vârfurilor, focarelor, distanța focală, excentricitatea, lungimea semilatus rectum. Să se scrie ecuațiile asimptotelor și directoarelor.

SOL.



Avem $a=\sqrt{5}, b=2$, deci $\underbrace{A(\sqrt{5},0), A'(-\sqrt{5},0)}_{\text{vârfurile}}$. $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9}=3$.

$F(3,0), F(-3,0)$ - focarele.

Distanța focală este $FF'=2c=6$.

Excentricitatea este $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lungimea semilatus rectum este $PF=a(e^2-1)=\sqrt{5}\left(\frac{9}{5}-1\right)=\sqrt{5}\cdot\frac{4}{5}$

Asimptotele hiperbolei sunt: $d_1 \cup d_2: y=\pm\frac{b}{a}x \Rightarrow d_1 \cup d_2: y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$.

Directoarele hiperbolei sunt: $d \cup d': x=\pm\frac{a^2}{c} \Rightarrow d \cup d': x=\pm\frac{5}{3}$

În plus, să se scrie și ecuația hiperbolei conjugate: $\mathcal{H}': \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$

3. Fie hiperbola $\mathcal{H}: x^2-2y^2=2$.

a) Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M(2,1)$ la hiperbolă.

b) Scrieți ecuațiile tangentelor la hiperbolă, paralele cu dreapta $d: y=3x-1$.

c) Scrieți ecuațiile tangentelor la hiperbolă din punctul $P(0,1)$.

d) Să se scrie ecuația polarei lui $P(0,1)$.

SOL. $x^2-2y^2=2 \,/ :2 \Rightarrow \mathcal{H}: \frac{x^2}{2}-y^2=1. \Rightarrow a^2=2, b^2=1$.

a) Verificăm poziția punctului $M(2,1)$ față de hiperbolă:

$$\frac{2^2}{2}-1=1 \Leftrightarrow 2-1=1 \ \checkmark \Rightarrow M\in\mathcal{H}.$$

Aplicăm procedeul de dedublare pentru a determina tangenta în $M(2,1)$ la hiperbolă.

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x\cdot 2}{2}-\frac{y\cdot 1}{1}=1 \Rightarrow tg: x-y=1. \Rightarrow tg: y=x-1$$

Știm că tangenta și normala în punctul $M(2,1)$ la hiperbolă sunt perpendiculare

$$\Rightarrow m_{tg}\cdot m_{norm}=-1 \Rightarrow m_{norm}=-\frac{1}{m_{tg}}=-1$$

$m_{tg} \to 1$

Ecuația normalei în $M(2,1)$: $y-1=m_{norm}(x-2)$

$$y-1=-1\cdot(x-2) \Rightarrow d_n: y=-x+3.$$

b) Tangentele căutate sunt paralele cu $d: y=3x-1 \Rightarrow m_d=m_{tg_k}=3$, $k=\overline{1,2}$

Aplicăm ecuația magică: $y=mx\pm\sqrt{m^2a^2-b^2}$

$$tg_k: y=3x\pm\sqrt{9\cdot 2-1} \Leftrightarrow tg_k: y=3x\pm\sqrt{17}$$

$k=\overline{1,2}$

Tangentele căutate sunt $tg_1: y=3x+\sqrt{17}$ și $tg_2: y=3x-\sqrt{17}$.

c) Verificăm poziția punctului $P(0,1)$ față de hiperbolă:

$$\frac{0^2}{2}-1^2=-1<1 \Rightarrow P(0,1)\in Ext\,\mathcal{H}.$$

Avem ecuația magică: $y=mx\pm\sqrt{m^2a^2-b^2} \Rightarrow 1=\pm\sqrt{m^2\cdot 2-1}\,\Big/^2 \Rightarrow 1=2m^2-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1$$

Tangentele din punctul $P(0,1)$ sunt: $\left[\begin{array}{l} tg_1: y-1=x \\ tg_2: y-1=-x \end{array}\right.$

d) Pentru ecuația polarei lui $P(0,1)$ aplicăm dedublarea: $\frac{x\cdot 0}{2}-\frac{y\cdot 1}{1}=1 \Rightarrow -y=1$.

4. Scrieți ecuațiile hiperbolelor determinate prin condițiile următoare:

a) hiperbola de vârfuri $A(4,0)$, $A'(-4,0)$, ce trece prin $M(2\sqrt{5},1)$

b) hiperbola ce trece prin punctele $P(2\sqrt{2},1)$, $Q(2\sqrt{5},2)$, are ca axe de simetrie axele de coordonate și axa transversă Ox.

c) hiperbola ce trece prin $N(1,3)$ și are asimptotele $d_1 \cup d_2 : y = \pm 2x$.

Sol. a) Avem $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. $M(2\sqrt{5},1) \in \mathcal{H} \Rightarrow \frac{20}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$

Deoarece $A(4,0)$ și $A'(-4,0)$ sunt vârfurile hiperbolei $\Rightarrow a = 4$

$$\Rightarrow \frac{20}{16} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{b^2} = 1 \,/\cdot 4b^2$$

$$5b^2 - 4 = 4b^2$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

b) Avem $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. $\begin{cases} P(2\sqrt{2},1) \in \mathcal{H} \\ Q(2\sqrt{5},2) \in \mathcal{H} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \,/\cdot 4 \\ \frac{20}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{32}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 4 \\ \frac{20}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}$ (−)

$$\frac{12}{a^2} = 3 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow \frac{8}{2^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1.$$

c) Avem $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Asimptotele sunt $d_1 \cup d_2 : y = \pm 2x \Rightarrow \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow b = 2a$.

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1 \\ N(1,3) \in \mathcal{H} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{9}{4a^2} = 1 \Rightarrow \frac{-5}{4a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = -\frac{5}{4}$ ⊄ $\Rightarrow$ Vorbim despre o hiperbolă conjugată.

$$\Rightarrow \mathcal{H}': \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \text{ dar } b = 2a \text{ și } N(1,3) \in \mathcal{H}'$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}': \frac{1}{a^2} - \frac{9}{4a^2} = -1 \Rightarrow \frac{-5}{4a^2} = -1 \Rightarrow a^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

$$\mathcal{H}': \frac{x^2}{\frac{5}{4}} - \frac{y^2}{5} = -1.$$

5. Fie hiperbola $\mathcal{H}: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Să se determine ecuațiile tangentelor paralele cu dreapta $d: 4x - y = -1$.

b) Dați exemplu de o hiperbolă confocală cu $\mathcal{H}$.

SOL. a) Deoarece tangentele la hiperbolă ~~ă~~ sunt paralele cu dreapta $d: y = 4x+1$, înseamnă că au aceeași pantă $m = 4$.

Avem ecuația magică: $tg: y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 - b^2}$

$$tg_{1,2}: y = 4x \pm \sqrt{4^2 \cdot 4^2 - 3^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg_1: y = 4x + \sqrt{247} \\ tg_2: y = 4x - \sqrt{247} \end{array}\right.$$

b) Avem $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

! Dacă două hiperbole sunt confocale, atunci au același c !

Căutăm o hiperbolă de tipul $\mathcal{H}_1: \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$.

Alegem un $b_1 = 2 \Rightarrow b_1^2 = 4$. Deoarece $c = c_1 = 5 \Rightarrow a^2 = c^2 - b_1^2 = 25 - 4 = 21$

Așadar, un exemplu de hiperbolă confocală cu $\mathcal{H}$ este $\mathcal{H}_1: \frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$.

6. a) Fie hiperbola $\mathcal{H}: \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$. Să se determine ecuațiile tangentelor perpendiculare pe dreapta $d: x - 2y + 3 = 0$

b) Fie hiperbola $\mathcal{H}: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale asimptotelor cu semilatus rectum corespunzător focarului F.

SOL. a) Deoarece tangentele la hiperbolă sunt perpendiculare pe $d: x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_{tg_k} = -\frac{1}{m_d}, \ k = \overline{1,2} \Rightarrow m_{tg_k} = -2, \ k = \overline{1,2}$$

$$d: 2y = x + 3 \Rightarrow d: y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \Rightarrow m_d = \frac{1}{2}$$

Avem ecuația magică: $tg: y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 - b^2}$

$$tg: y = -2x \pm \sqrt{(-2)^2 \cdot 144 - 25} \Rightarrow tg: y = -2x \pm \sqrt{551}$$

$$\text{Avem} \left[\begin{array}{l} tg_1: y = -2x + \sqrt{551} \\ tg_2: y = -2x - \sqrt{551} \end{array}\right.$$

6) $\mathcal{H}: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1. \Rightarrow a = 4,\ b = 3$

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow$ avem focarul $F(5,0)$.

De asemenea, asimptotele hiperbolei sunt $d_1 \cup d_2$: $y = \pm \frac{b}{a} x \Rightarrow d_1 \cup d_2: y = \pm \frac{3}{4} x$

Semilatus rectum este PF, unde $P \in \mathcal{H}$, F focar.

Vrem să aflăm coordonatele punctelor de intersecție ale asimptotelor cu semilatus rectum corespunzător focarului $F(5,0)$, deci vom avea pentru început abscisa $x = 5$.

$\Rightarrow y = \pm \frac{3}{4} \cdot 5 \Rightarrow y = \pm \frac{15}{4}$. Punctele căutate sunt $(5, \pm\frac{15}{4})$

7. Fie hiperbola $\mathcal{H}: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Să se arate că produsul distanțelor unui punct oarecare al lui $\mathcal{H}$ la asimptote este o constantă.

SOL. Avem hiperbola $\mathcal{H}: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ cu $a = 4$ și $b = 3$, iar asimptotele sunt $d_1 \cup d_2: y = \pm \frac{3}{4} x$.

Fie un punct $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H} \Rightarrow \frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1 / \cdot 16 \cdot 9 \Rightarrow 9x_0^2 - 16y_0^2 = 16 \cdot 9$ (1)

I Avem asimptota $d_1: y = \frac{3}{4} x \Rightarrow 3x - 4y = 0$

$$dist(P_0, d_1) = \frac{|3x_0 - 4y_0|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|3x_0 - 4y_0|}{5}$$

II Avem asimptota $d_2: y = -\frac{3}{4} x \Rightarrow 3x + 4y = 0$

$$dist(P_0, d_2) = \frac{|3x_0 + 4y_0|}{5}$$

$$dist(P_0, d_1) \cdot dist(P_0, d_2) = \frac{1}{25} \cdot \underbrace{|9x_0^2 - 16y_0^2|}_{P_0 \in \mathcal{H}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{25} \cdot 16 \cdot 9 \text{ const.}$$

8. Dreptele $d_1: x+y-1=0$ și $d_2: 5x-4\sqrt{2}y-2=0$ sunt tangente hiperbolei $H: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. Să se scrie ecuația hiperbolei.

SOL. În cazul fiecărei drepte vom obține câte o ecuație de gradul 2 cu $\Delta=0$ (obținem un punct dublu)

$$H\cap d_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=-x+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{(1-x)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{1-2x+x^2}{b^2}=1 \quad /\cdot a^2b^2$$

$$b^2x^2-a^2(1-2x+x^2)=a^2b^2$$

$$(b^2-a^2)\cdot x^2+2a^2\cdot x-a^2-a^2b^2=0.$$

$$\Delta=4a^4+4(a^2+a^2b^2)(b^2-a^2)=$$

$$=\cancel{4a^4}+4(a^2b^2-\cancel{a^4}+a^2b^4-a^4b^2)=$$

$$=4a^2b^2+4a^2b^2(b^2-a^2)=$$

$$=a^2b^2(1+b^2-a^2)$$

$$\Delta=0\Rightarrow a^2b^2(b^2-a^2+1)=0$$

I $a^2b^2=0$ F

II $\boxed{a^2-b^2=1}$

$$H\cap d_2: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y\cdot 4\sqrt{2}=5x-2 \Rightarrow y=\frac{5x-2}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{(5x-2)^2}{b^2\cdot 32}=1 \quad /\cdot a^2b^2\cdot 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32b^2x^2-a^2(25x^2-20x+4)=32a^2b^2$$

$$32b^2x^2-25a^2x^2+20a^2x-4a^2-32a^2b^2=0$$

$$(32b^2-25a^2)x^2+20a^2x-4a^2-32a^2b^2=0$$

$$\Delta=400a^4+4(4a^2+32a^2b^2)(32b^2-25a^2)=\cancel{400a^4}+4(128a^2b^2-\cancel{100a^4}+1024a^2b^4-800a^4b^2)$$

$$=512a^2b^2+4096a^2b^4-3200a^4b^2=a^2b^2(512+4096b^2-3200a^2)$$

$$\Delta=0\Rightarrow a^2b^2(512+4096b^2-3200a^2)=0$$

I $a^2b^2=0$ F

II $3200a^2-4096b^2=512 \; /:128 \Rightarrow \boxed{25a^2-32b^2=4}$

$$\begin{cases} 25a^2-32b^2=4 \\ a^2-b^2=1 \; /\cdot(-25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25a^2-32b^2=4 \\ -25a^2+25b^2=-25 \end{cases} (+)$$

$$-7b^2=-21\Rightarrow b^2=3\Rightarrow a^2=1+b^2=4$$

$$H: \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1.$$