FMI, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2020/2021
Logică matematică

Examen

23.06.2021, ora 10

1 Informaţii

- Subiectele se găsesc pe a doua pagină a acestui document.
- Rezolvările se vor redacta în următorul format – **un singur fişier pdf** ce va conţine foile cu soluţiile problemelor (scanate sau fotografiate), împreună cu numele şi grupa.
- **Recomand puternic** ca soluţiile să fie redactate cât mai ordonat posibil, iar paginile să fie numerotate.
- Acel fişier pdf se va trimite de pe adresa instituţională (cea cu `s.unibuc.ro`) la adresa de email `andrei.sipos@fmi.unibuc.ro` (NU cea cu `unibuc.ro` sau vreo alta) până la ora 13:15.
- Nota finală (care va cuprinde, de pildă, şi bonusul de la seminar) va fi comunicată ca răspuns la acel email până la sfârşitul săptămânii.
- Pentru orice nelămuriri apărute pe durata examenului, mă puteţi contacta printr-un mesaj privat pe platforma Microsoft Teams, la adresa de email `andrei.sipos@fmi.unibuc.ro` sau la numărul de telefon 0724293143.
- Orice nelămuriri legate de corectură şi notare se vor putea rezolva la o întâlnire online ale cărei coordonate se vor stabili în timp util.

2 Subiectele

1. (2 puncte) Definim, pentru orice x şi y, $[x, y] := \{x, \{x, y\}\}$. Arătaţi că această definiţie satisface analogul corespunzător al Proprietăţii perechilor ordonate. Speculaţi care ar putea fi neajunsul acestei definiţii.

2. (1 punct) Arătaţi că orice ordinal finit este număr natural.

3. (1 punct) Fie κ un cardinal infinit. Arătaţi că $2^\kappa = \kappa^\kappa$.

4. (2 puncte) Arătaţi că imaginea printr-o funcţie a unei mulţimi finite este finită.

5. (1 punct) Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Notăm $\varphi := \neg(v_0 \to \neg v_0) \in E(Q)$. Găsiţi cea mai scurtă formulă $\psi \in E(Q)$ cu proprietatea că $\varphi \sim \psi$. Justificaţi răspunsul.

6. (2 puncte) Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Definim $e^\infty : Q \to 2$ ca fiind funcţia constantă 0. Definim şi, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $e_k : Q \to 2$, punând, pentru orice $i \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_i) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } i < k, \\ 1, & \text{dacă } i \geq k. \end{cases}$$

   Găsiţi $\Gamma \subseteq E(Q)$ astfel încât

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \in \mathbb{N},\ k \neq 0\} \cup \{e^\infty\}.$$

   Justificaţi răspunsul.

7. (1 punct) Fie σ o signatură. Arătaţi că pentru orice σ-formulă φ şi orice $x \in V$ cu $FV(\varphi) \subseteq \{x\}$, avem $\forall x\varphi \models \exists x\varphi$.

8. (2 puncte) Daţi exemplu de signatură σ şi de σ-formule φ, ψ cu $FV(\varphi) \cup FV(\psi) \subseteq \{x_0\}$ astfel încât $\forall x_0(\varphi \to \psi) \not\models \exists x_0(\varphi \land \psi)$. Justificaţi răspunsul.