① Curs geometrie 10

Transformări ortogonale

$(E, <\cdot,\cdot>)$ sp. vect euclidian real

f endomorfism $f \in End(E)$

- $f \in O(E) \Leftrightarrow <f(x), f(y)> = <x,y>, \forall x,y \in E$ "$\Rightarrow$" $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|x\| = \|f(x)\| \quad \forall x \in E$

"$\Leftarrow$"

$\|f(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 \Rightarrow <f(x)+f(y), f(x)+f(y)> = <x+y, x+y> \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2<f(x), f(y)> = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow <f(x), f(y)> = <x,y>, \forall x,y \in E$

- $f \in O(E) \Leftrightarrow$ matricea asociată în raport cu $\forall$ reper ortonormat este ortogonală din $O(n)$ i.e. $A \cdot A^T = I_n$

OBS.

$A \in O(2) \Rightarrow$ 1) $\det A = 1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

2) $\det A = -1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases} \Rightarrow a,b,c,d \in [-1,1]$

$ac = -bd \Rightarrow \frac{a}{-d} = \frac{b}{c} = \alpha \Rightarrow \begin{cases} a = -d\alpha \\ b = c\alpha \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} a = -d\alpha \\ b = c\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2+b^2 = \alpha^2(d^2+c^2) \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$

$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}$

$\exists \varphi \in [-\pi,\pi]$ a.î. $a = \cos\varphi \Rightarrow b = \pm\sin\varphi$

① $\alpha = 1$

a) $a = \cos\varphi = -d$, $b = \sin\varphi = c$ $\quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$, $\det A = -1$

b) $a = \cos\varphi = -d$, $b = -\sin\varphi = c$ $\quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & -\cos(-\varphi) \end{pmatrix}$, $\det A = -1$

② $\alpha = -1$

a) $a = \cos\varphi = d$, $b = \sin\varphi = -c$ $\quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$ $\det A = 1$

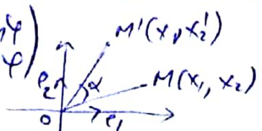
b) $a = \cos\varphi = d$, $b = -\sin\varphi = c$ $\quad \boxed{A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}$

Clasificare transformări ortogonale

① $\dim E = 1$, $f \in \{id_E, -id_E\}$

② $\dim E = 2$, $f \in O(E)$ $\exists$ un reper $\{e_1, e_2\}$ ortonormat a.î. matricea asoc lui f:

a) $\det A = 1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$



$f: E \to E$

$f(x_1, x_2) = (x_1', x_2') =$

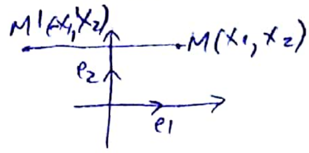
$= (x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi, x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi)$

f = rotație de $\measuredangle\varphi$ (în jurul originii)

b) $\det A = -1$ $\quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

$\exists$ un reper ortonormat $\{e_1, e_2\}$ a.î. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow f = s: E \to E$ simetrie



$s(e_1) = -e_1$

$s(e_2) = e_2$

$s(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$

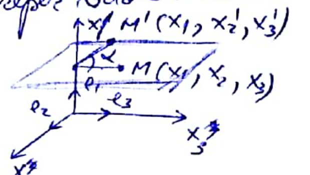
(simetria față de $<\{e_1\}>^\perp = <\{e_2\}>$)

$E = <\{e_1\}> \oplus <\{e_2\}>$

③ $\dim E = 3$

a) $\det A = 1$, $\exists \{e_1, e_2, e_3\}$ reper ortonormat a.î.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$



$f(e_1) = e_1$

$f/_{<\{e_1\}>^\perp}$ rotație de $\measuredangle\varphi$ în $\{<e_1\}>^\perp$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2', x_3') = (x_1, x_2\cos\varphi - x_3\sin\varphi, x_2\sin\varphi + x_3\cos\varphi)$

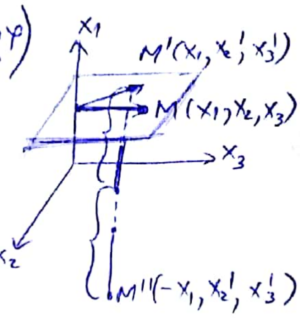
f = rotație de ~~în~~ în 2-planul $<\{e_1\}>^\perp$ și axa $<\{e_1\}>$

$\forall x \in <\{e_1\}> \Rightarrow x = ae_1$

AXĂ: $f(x) = af(e_1) = ae_1 = x$

$f \in O(E)$ de speța 1 $\Rightarrow A \in SO(3)$ i.e. $A \cdot A^T = I_3$ și $\det A = 1$

b) $\det A = -1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$



$f(e_1) = -e_1$

$f = s \circ R_\varphi$

$R_\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2', x_3')$

$= (x_1, x_2\cos\varphi - x_3\sin\varphi, x_2\sin\varphi + x_3\cos\varphi)$

$s(x_1, x_2', x_3') = (-x_1, x_2', x_3')$

$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2\cos\varphi - x_3\sin\varphi, x_2\sin\varphi + x_3\cos\varphi)$

f = compunerea dintre o simetrie ortogonală față de $<\{e_1\}>^\perp$ cu o rotație $\measuredangle\varphi$ în $<\{e_1\}>^\perp$

AXA: $f(x) = -x$

$f \in O(E)$ de speța 2, $A \cdot A^T = I_3$, $\det A = -1$

④ $\dim E \geq 4$

$\exists$ subsp invariante față de f de dim 1 sau 2

$\exists k$ subsp invariante: $s \longrightarrow$ coresp val proprii 1

$k-s \longrightarrow$ coresp val proprii -1

p subsp invariante de dim 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & A_1 & \\ & & & & & & \ddots \; A_p \end{pmatrix}$ $\quad A_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$, $\forall j = \overline{1,p}$

② Teorema Cartan

$\forall f \in O(E)$, $\dim E = n$ $(n \geq 1)$, $f \neq id_E$

$\Rightarrow$ f se poate scrie ca o compunere de cel mult n simetrii ortogonale față de hiperplane

Dem

Ind mat după $n = \dim E$

• $n = 1$ $f = -id_E$ = simetrie ortogonală față de hiperplanul $\{0\}$

• P.p. prop. adev. pt $\dim E = n-1$

Dem că $P_{n-1} \Rightarrow P_n$

$\dim E = n$

Fie $x \in E \Rightarrow f(x) = y \neq x. \Rightarrow x - y \neq 0_E$

$<\{x-y\}>^{\perp}$ - hiperplan

fie s = simetrie ortogonală față de acest hiperplan

$f \in O(E) \Rightarrow \|f(x)\| = \|x\|$
$\qquad\qquad \|y\|$

$s(x) = y \quad | \circ s \Rightarrow s \circ s(x) = s(y) \Rightarrow s(y) = x$

s = simetrie $\Leftrightarrow s \circ s = id_E$

$s \in O(E)$

$f \in O(E)$ $\Rightarrow s \circ f \in O(E)$

$s \circ f(x) = s(y) = x \Rightarrow$ $<\{x\}>$ subspațiu invariant pt $s \circ f$

$\Rightarrow H = <\{x\}>^{\perp}$ hiperplan invariant al lui $s \circ f$

$s \circ f/_H : H \to H$ este transf ortogonală

$\dim H = n-1 \overset{P_{n-1}}{\underset{Ind}{\Rightarrow}} \exists s_1', \dots, s_i'$ simetrii ortogonale față de hiperplane: $\underbrace{H_1', \dots, H_i'}_{(n-2)\text{ dimensionale}}$ din H, $i \leq n-1$

$E = <\{x\}> \oplus H$ $\quad H_k' \subset H, k = \overline{1,i}$ hiperplane

$H = \overbrace{H_k' \oplus <\{z_k\}>}^{H_k}, k = \overline{1,i}$

$E = <\{x\}> \oplus H_k' \oplus <\{z_k\}>, k = \overline{1,i}$

$s \circ f/_H = s_i' \circ \dots \circ s_1'$

„ridicăm" simetriile ortogonale s_k' la simetrii ortogonale s_k față de hiperplanele $H_k = <\{x\}> \oplus H_k'$

$s_k : E \xrightarrow[\supseteq H_k]{} E \qquad s_k/_{H_k'} = s_k'$

$s_k(\alpha x + u + \beta z_k) = \alpha x + u - \beta z_k$
$\underset{<\{x\}>}{} \quad \underset{H_k'}{\overset{\cap}{}}$

$s_k(u + \beta z_k) = u - \beta z_k = s_k'(u + \beta z_k)$

Fie $f' = s \circ f \circ s_i \circ s_{i-1} \circ \dots \circ s_1$

$E = <\{x\}> \oplus H$

$f'(x) = s \circ f \circ \underbrace{s_i \circ \dots \circ s_1(x)}_{x} = s \circ f(x) = x$

$\left.\begin{array}{l} f'/_H = s \circ f/_H \circ \underbrace{s_i' \circ s_{i-1}' \circ \dots \circ s_1'}_{} = s \circ \\ f'/_H = \underbrace{s \circ f/_H}_{s_i' \circ \dots \circ s_1'} \circ s_1' \circ s_{i-1}' \circ \dots \circ s_1' = id_H \end{array}\right\} \Rightarrow f' = id_E$

$id_E = s \circ f \circ s_i \circ \dots \circ s_1$

$s = f \circ s_i \circ \dots \circ s_1 \mid s_1$

$s \circ s_1 = f \circ s_i \circ \dots \circ s_2 \Rightarrow f = s \circ s_1 \circ \dots \circ s_i$

f se scrie ca o „$\circ$" de cel mult n simetrii ortog față de hiperplane.

Endomorfisme simetrice

Def $(E, <\cdot,\cdot>)$ sp vect euclidian real

$f \in End(E)$

f s.n. endomorfism simetric $\Leftrightarrow$ $<x, f(y)> = <f(x), y>$, $\forall x, y \in E$

Prop $f \in Sim(E) \Leftrightarrow$ Matricea asociată lui f în raport cu $\forall$ reper ortonormat este simetrică

Dem

Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper ortonormat în E

$<e_i, f(e_j)> = <f(e_i), e_j>$, $\forall i, j = \overline{1,n}$

Fie A = matricea asociată lui f în raport cu R

$f(e_j) = \sum^n a_{kj} \cdot e_k$, $\forall j = \overline{1,n}$

$<e_i, \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot e_k> = <\sum_{k=1}^n a_{ki} e_k, e_j> \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot \delta_{kj} = a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow A = A^T$

(matr simetrică)

Fie $R' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ reper orton în E și A' matricea asociată lui f

$R \xrightarrow{C} R'$, $C \in O(n)$

$A \qquad A' \qquad A' = C^{-1} A C = C^T A C$

A' simetrică $\Leftrightarrow A$ simetrică

$A'^T = (C^T A C)^T = C^T A^T C$

OBS. $f_1, f_2 \in Sim(E) \Rightarrow$ În general, $f_1 \circ f_2 \notin Sim(E)$

$<f_1 \circ f_2(x), y> = <f_2(x), f_1(y)> = <x, f_2 \circ f_1(y)>$

Dc. $f_1 \circ f_2 \in Sim(E) \Rightarrow <f_1 \circ f_2(x), y> =$
$= <x, f_1 \circ f_2(y)>$

$f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$

SAU f_k are A_k matr asociată în raport cu un reper ortonormat $\Rightarrow f_1 \circ f_2$ are $A_1 \cdot A_2$ matrice asociată $(A_1 \cdot A_2)^T = A_2^T A_1^T = A_2 A_1$

Dc $A_1 A_2 = A_2 A_1$ $\qquad \Rightarrow (A_1 A_2)^T = A_1 A_2$

(3)

Prop $f \in End(E)$ simetric

$\Rightarrow$ Toate răd polinomului caracteristic sunt reale

Dem. Fie $R' = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper ortonormat în E

A = matricea asociată lui f

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

Sistemul liniar și omogen $(A - \lambda I_n)X = 0_n$ are și soluții nenule

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & \overline{x_n} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1\overline{x_1} + a_{12}x_2\overline{x_1} + \dots + a_{1n}x_n\overline{x_1} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1\overline{x_n} + a_{n2}x_2\overline{x_n} + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n\overline{x_n} = 0 \end{cases} \quad (+)$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j \overline{x_k} = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{x_j}, \quad a_{jk} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\underbrace{\sum_{j<k} a_{jk} x_j \overline{x_k} + \underbrace{\sum_{j>k} a_{jk} x_j \overline{x_k}}_{\sum_{j<k} a_{kj} x_k \overline{x_j}}}_{\sum_{j<k} a_{jk}(x_j\overline{x_k} + x_k\overline{x_j})} + \sum_{k=1}^{n} \underset{\mathbb{R}}{a_{kk}}\, \underset{\mathbb{R}}{x_k\overline{x_k}} = \lambda \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{x_j}}_{\mathbb{R}}$$

$\sum_{j<k} \underset{\mathbb{R}}{a_{jk}} \underset{\mathbb{R}}{(x_j\overline{x_k} + x_k\overline{x_j})} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Prop Fie $f \in Sim(E)$

dacă $U \subseteq E$ subspațiu invariant al lui f, atunci $U^{\perp} \subseteq E$ —//—

și $f/_{U^{\perp}} : U^{\perp} \to U^{\perp}$ este endom simetric

Dem

$U \subseteq E$ subsp invariant al lui $f \Rightarrow [\forall x \in U \Rightarrow f(x) \in U]$

Fie $x \in U^{\perp}$. Dem că $f(x) \in U^{\perp}$

$\langle f(x), y\rangle = \langle \underset{U^{\perp}}{x}, \underset{U}{f(y)} \rangle = 0 \Rightarrow f(x) \in U^{\perp}$

$y \in U$

$\Rightarrow f/_{U^{\perp}} : U^{\perp} \to U^{\perp}$ endom simetric

Prop $f \in Sim(E)$

Vectori proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.

Dem Fie λ, μ ~~valori~~ valori proprii distincte și $x, y \in E \setminus \{0\}$ vectori proprii coresp

$f(x) = \lambda x \qquad \lambda \neq \mu$

$f(y) = \mu y$

$\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle =$

$\mu\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, y\rangle(\underbrace{\mu - \lambda}_{\neq 0_{\mathbb{R}}}) = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle$

$\Rightarrow x \perp y$

OBS. $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = A^T$

① $Q: E \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

② $f: E \to E$ endomorfism simetric

$f(x) = y \quad Y = AX$

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper orton. în E

$Q(x) = \langle x, f(x)\rangle$

$\langle x, f(x)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, f(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j)\rangle =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \underbrace{\langle e_i, f(e_j)\rangle}_{\langle e_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k\rangle} = \sum_{i,j,k=\overline{1,n}} x_i x_j a_{kj} \delta_{ik}$

$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = Q(x)$

Teoremă $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sp vect e real

$f \in End(E)$ simetric

$\Rightarrow \exists$ un reper ortonormat format din vectori proprii și matricea asociată lui f este diagonală

Dem. Fie λ_1 valoare proprie a lui f și e_1 = versor propriu coresp lui λ_1 (vector propriu cu norma 1)

$f(e_1) = \lambda_1 e_1 \Rightarrow \langle\{e_1\}\rangle$ subsp invariant $\Rightarrow$

$\langle\{e_1\}\rangle^{\perp}$ —//—

$f/_{\langle\{e_1\}\rangle^{\perp}} : \langle\{e_1\}\rangle^{\perp} \to \langle\{e_1\}\rangle^{\perp}$ este endom simetric

Fie λ_2 = valoare proprie pt $f/_{\langle\{e_1\}\rangle^{\perp}}$ și

e_2 = versor propriu coresp lui λ_2

$f(e_2) = \lambda_2 e_2, \quad e_1 \perp e_2$

dar $f(e_1) = \lambda_1 e_1$

$\Rightarrow \langle\{e_1, e_2\}\rangle \subset E$ subsp invariant pt f

$\Rightarrow \langle\{e_1, e_2\}\rangle^{\perp}$ —//—

Fie λ_3 val proprie pt $f/_{\langle\{e_1, e_2\}\rangle^{\perp}}$ și e_3 versor propriu $f(e_3) = \lambda_3 e_3$, $e_1 \perp e_2$, $e_1 \perp e_3$, $e_2 \perp e_3$

(4) După un număr finit de pași ($n = \dim E$) construim $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ SLI (ortogonali)
$|R| = \dim E$
R = reper ortonormat în E a.î. $f(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = \overline{1,n}$
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
(f sim $\Rightarrow$ toate rădăcinile polin caract. sunt reale)

OBS Fie $f \in End(E)$. Matricea asociată lui f se poate diagonaliza $\Leftrightarrow$ 1) răd pol caract sunt reale $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, λ_i cu multiplicitățile m_i, $i = \overline{1,s}$
2) $\dim V_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$, $i = \overline{1,s}$

b) $f \in End(E)$ simetric $\Rightarrow \dim V_\lambda = m_{\lambda_i}$, $i = \overline{1,s}$
$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}_{m_{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\lambda_s \cdots \lambda_s}_{m_{\lambda_s}} \end{pmatrix}$$

OBS Matricea asociată lui f se reduce la forma diagonală, efectuând schimbări de reper ortonormat, deci transformări ortogonale

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = A^T$

① $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală
$Q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$

a) Aducem Q la forma canonică, utilizând metoda Gauss.
$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - 7x_2^2$
Considerăm $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = \sqrt{7}\, x_2 \end{cases}$ $\boxed{Q(x) = x_1'^2 - x_2'^2}$
Am efectuat sch de reper arbitrară

b) Aducem Q la forma canonică canonică, efectuând schimbări de reper ortonormat.
Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfism simetric asociat
$Q(x) = \langle x, f(x) \rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$
$f(x) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow$
$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 7 = 0$
$(\lambda - 1)^2 - (2\sqrt{2})^2 = 0$
$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$
$V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^2 / f(x) = (-1 + 2\sqrt{2})x\}$
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = (-1 + 2\sqrt{2})x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 = (-1 + 2\sqrt{2})x_2 \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} (2 - 2\sqrt{2})x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-2 - 2\sqrt{2})x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (-1 - \sqrt{2})x_2 = 0 \end{cases}$
$\det \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = (1 - \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2}) - 1 = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) - 1 = 2 - 2 = 0$

$x_1 = (1 + \sqrt{2})x_2$
$(x_1, x_2) = x_2(1 + \sqrt{2}, 1)$ $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}(1 + \sqrt{2}, 1)$
$V_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 / f(x) = (-1 - 2\sqrt{2})x\}$
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = (-1 - 2\sqrt{2})x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 = (-1 - 2\sqrt{2})x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2 + 2\sqrt{2})x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-2 + 2\sqrt{2})x_2 = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (-1 + \sqrt{2})x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad x_1 = (1 - \sqrt{2})x_2$
$e_2 = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}(1 - \sqrt{2}, 1)$
$\langle e_1, e_2 \rangle = 0 \Rightarrow \|e_1\| = \|e_2\| = 1$
$\{e_1, e_2\}$ reper ortonormat a.î. $A = \begin{pmatrix} -1+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ex. $E = \{\alpha(1, 0, 1) / \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$
Să se determine ec rotației de $\measuredangle \varphi = \frac{\pi}{4}$ și axă E din $\mathbb{R}^3$, în raport cu reperul canonic

SOL
$R_0 = \{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$ reperul canonic $\xrightarrow{}$ $R = \{e_1, e_2, e_3\}$
A $\qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$
$E^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} / x_1 + x_3 = 0\} =$
$= \{(-x_3, x_2, x_3), x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2\}$
$(-1, 0, 1), (0, 1, 0)$
$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$, $e_3 = (0, 1, 0)$
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$
$A' = C^T A C \Rightarrow A = C A' C^T$
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = y$, $Y = AX$

Temă: Ex1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ matricea asociată lui f, $f \in End(\mathbb{R}^3)$ în raport cu R_0
a) Să se det reperul ortonormat în raport cu care A este diagonală
b) Să se det $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată
1. Să se aducă la f canonică utilizând Met Gauss
2. — // — transf ortogonale.

Ex2. $U = \{x \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$
Să se det ec rotației de axă $U^\perp$ și $\measuredangle \frac{2\pi}{3}$ în raport cu reperul canonic.