<u>Consecință</u>. Dacă $\lambda \in K$, notăm

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ pt. } m \geq 2 \text{ și } J_1(\lambda) = (\lambda).$$

Matricea $J_m(\lambda) \in M_m(K)$ s.n. celulă Jordan de ordin m corespunzătoare lui λ.

Acum aplicăm teorema precedentă pt. $N = (T - \lambda I)_{|V^\lambda(T)}$ unde λ e val. proprie pt. T. Rezultă că există o bază B_λ a lui $V^\lambda(T)$ astfel încât

$$M_{B_\lambda}(T_{|V^\lambda(T)}) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_r}(\lambda)} \end{pmatrix} \text{ pt. niște } r, m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$$

cu $m_1 + \dots + m_r = \dim V^\lambda(T) = a_T(\lambda)$.

Avem $r = \dim(\operatorname{Ker}((T - \lambda I)_{|V^\lambda(T)})) = \dim V_\lambda(T) = g_T(\lambda)$.

<u>Teoremă</u>. Fie V un K-sp. vect. finit dimensional și $T \in \operatorname{End}_K(V)$. Dacă P_T este produs de factori liniari în $K[X]$ (de exemplu în cazul $K = \mathbb{C}$), atunci există o bază B a lui V a.î.

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_s}(\lambda_s)} \end{pmatrix} \text{ pt. niște } \lambda_1, \dots, \lambda_s \in K \text{ și } m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}^*.$$

(spunem că $M_B(T)$ are formă canonică Jordan).

Mai mult, celulele Jordan $J_{m_1}(\lambda_1), \dots, J_{m_s}(\lambda_s)$ sunt determinate până la o permutare doar de T (adică nu depind de baza B).

Dem. Existența: Alegem pt. fiecare valoare proprie λ o bază B_λ a lui $V^\lambda(T)$ ca în Consecința, apoi luăm

$$B = \bigcup_\lambda B_\lambda .$$

Unicitatea până la o permutare a celulelor Jordan: Presupunem că pt. o altă bază B' avem

$$M_{B'}(T) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{p_1}(\mu_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{p_t}(\mu_t)} \end{pmatrix}$$ pt. niște $p_1, \ldots, p_t \in \mathbb{N}^*$; $\mu_1, \ldots, \mu_t \in K$.

Ideea demonstrației: am arătat că obținem matricea lui T într-o bază având formă canonică Jordan în urma descompunerii fiecărui $V^\lambda(T)$ ca sumă directă de subspații ciclice; mai mult, am arătat că celulele Jordan rezultate astfel depind doar de T și nu de reprezentările spațiilor $V^\lambda(T)$ ca astfel de sume directe.
Vom arăta că și $M_{B'}(T)$ este asociată tot unei descompuneri a fiecărui $V^\lambda(T)$ ca sumă directă de subspații ciclice, prin urmare celulele Jordan obținute trebuie să fie aceleași.

Dem. $P_T(X) = (X-\mu_1)^{p_1} \cdots (X-\mu_t)^{p_t} \Rightarrow \mu_1, \ldots, \mu_t$ se găsesc printre valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ale lui T (presupunem că acestea sunt toate val. proprii distincte).

Fie $B'_1, \ldots, B'_t$ submulțimile lui B' corespunzătoare celulelor Jordan $J_{p_1}(\mu_1), \ldots, J_{p_t}(\mu_t)$; avem $B' = B'_1 \cup \ldots \cup B'_t$.

Fie $V_i = \langle B'_i \rangle$. Atunci $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$, fiecare V_i este

T-invariant și $M_{B'_i}(T_{|V_i}) = J_{p_i}(\mu_i)$ pt. orice i.

Dacă λ este o val. proprie a lui T, avem

$\ker(\lambda I - T)^j = \ker(\lambda I - T)^j_{|V_1} \oplus \dots \oplus \ker(\lambda I - T)^j_{|V_t}$ pt. orice j.

Deoarece pt. i astfel încât $\mu_i \neq \lambda$ avem că $(\lambda I - T)_{|V_i}$ are matricea $\begin{pmatrix} \lambda-\mu_i & -1 & & 0 \\ & \lambda-\mu_i & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & \lambda-\mu_i \end{pmatrix}$ sau $(\lambda - \mu_i)$ în baza B'_i, rezultă că este izomorfism, deci $\ker(\lambda I - T)^j_{|V_i} = 0$ pt. orice j.

Dacă i este astfel ca $\mu_i = \lambda$, atunci $(\lambda I - T)^{p_i}_{|V_i} = 0$, deci $\ker(\lambda I - T)^{p_i}_{|V_i} = V_i$.

Rezultă că $V^\lambda(T) = \bigcup_{j \geq 1} \ker(\lambda I - T)^j = \bigoplus_{\mu_i = \lambda} V_i$.

Atunci dacă luăm $N = (T - \lambda I)_{|V^\lambda(T)}$, care este aplic. lin. nilpotentă (cu indice de nilpotență $\max\{p_i : \mu_i = \lambda\}$) a lui $V^\lambda(T)$, avem că $V^\lambda(T) = \bigoplus_{\mu_i = \lambda} V_i$ e o descompunere ca sumă de subesp. ciclice și din a doua parte a Teoremei (pag. 16) obținem că $(p_i)_{\mu_i = \lambda}$ sunt unic determinate de N, adică de T și λ.

<u>Algoritm pt. determinarea formei canonice Jordan a lui T (în ipoteza că P_T = produs de factori liniari în $K[X]$).</u>

$T : V \to V$, $\dim V = n$

- Se determină matricea A a lui T într-o bază (de obicei T e dat direct printr-o astfel de matrice).
- Se calculează pol. caracteristic $P_T(X) = \det(XI_n - A)$ și rădăcinile sale, adică valorile proprii ale lui T.

- Pt. o valoare proprie λ fie $N = (T-\lambda I)_{|V^\lambda(T)}$; avem $\dim V^\lambda(T) = a_T(\lambda)$ = multiplicitatea algebrică a lui λ.
- Se determină indicele de nilpotență m al lui N și dimensiunile subspațiilor $\operatorname{Ker} N, \operatorname{Ker} N^2, \dots, \operatorname{Ker} N^{m-1}$. Se procedează astfel: dacă $\lambda_1, \dots, \lambda_2$ sunt val. proprii distincte, avem $V = V^{\lambda_1}(T) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_2}(T)$. Dacă $\tilde{N} = T - \lambda I : V \to V$, atunci $\tilde{N}_{|V^{\lambda_i}(T)}$ e izo pt. $\lambda_i \neq \lambda$, deci $\operatorname{Ker}\tilde{N} = \operatorname{Ker} N$. Atunci

$$\dim(\operatorname{Ker} N) = \dim(\operatorname{Ker}\tilde{N}) \xlongequal[\text{defect}]{\text{Th. rang}} n - \dim(\operatorname{Im}\tilde{N}) = n - \operatorname{rang}(A-\lambda I).$$

La fel $\dim(\operatorname{Ker} N^j) = n - \operatorname{rang}(A-\lambda I)^j$ pt. orice j, iar m e cel mai mic j pt. care $\dim(\operatorname{Ker} N^j) = a_T(\lambda)$.

- Se folosesc relațiile

$$r = \dim(\operatorname{Ker} N)$$
$$2r - \gamma_1 = \dim(\operatorname{Ker} N^2)$$
$$3r - 2\gamma_1 - \gamma_2 = \dim(\operatorname{Ker} N^3)$$
$$\text{— — — — — — —}$$
$$jr - (j-1)\gamma_1 - (j-2)\gamma_2 - \dots - \gamma_{j-1} = \dim(\operatorname{Ker} N^j) \text{ pt. } 2 \le j \le m$$
$$\text{— — — — —}$$
$$mr - (m-1)\gamma_1 - (m-2)\gamma_2 - \dots - \gamma_{m-1} = \dim(\operatorname{Ker} N^m) = \dim V^\lambda(T) = a_T(\lambda)$$

pt. a calcula $r, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ și $\gamma_m = r - \gamma_1 - \dots - \gamma_{m-1}$.

- Pt. valoarea proprie λ vom avea γ_1 celule Jordan $J_1(\lambda)$, γ_2 celule Jordan $J_2(\lambda)$, …, γ_m celule Jordan $J_m(\lambda)$.
- Facem calculele precedente pt. fiecare valoare proprie. Forma canonică Jordan a lui T se obține scriind ca blocuri diagonale toate celulele Jordan rezultate din toate valorile proprii.