SEMINAR ALGEBRA AN 2 SEM 1

TD

1. Determinaţi:
   (i) câtul şi restul împărţirii lui $X^{23}-1$ la X^5-1 în $\mathbb{Q}[X]$,
   (ii) câtul şi restul împărţirii lui $2^{23}-1$ la 31 în $\mathbb{Z}$.

2. Fie $A=\{a/12^n;\ a,n\in\mathbb{Z},n\geq 0\}$.
   (i) Arătaţi că A este un subinel al lui $\mathbb{Q}$.
   (ii) Determinaţi unităţile lui A (i.e. elementele inversabile ale lui A).

3. Arătaţi că $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]=\{a+b\sqrt{-3};\ a,b\in\mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{C}$.

4. Fie $\theta=(1+\sqrt{5})/2$. Arătaţi că $\mathbb{Z}[\theta]=\{a+b\theta;\ a,b\in\mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{C}$.

5. Fie $\theta=(1+\sqrt{7})/2$. Arătaţi că $\mathbb{Z}[\theta]=\{a+b\theta;\ a,b\in\mathbb{Z}\}$ nu este subinel al lui $\mathbb{C}$.

6. (i) Factorizaţi $f=X^5+X^3-X^2-1$ peste $\mathbb{Q}$ şi peste $\mathbb{C}$.
   Arătaţi că:
   (ii) f divide $X^n-1\Leftrightarrow 12$ divide n.
   (iii) $f(2)$ divide $2^n-1\Leftrightarrow 12$ divide n.
   (iv) $f(3)$ divide $3^n-1\Leftrightarrow 12$ divide n.

7. Fie funcţia $f:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{Z}_5$ dată prin $f(a+bi)=\widehat{a-2b}$. Arătaţi că:
   (i) f este morfism de inele,
   (ii) g este surjecţie,
   (iii) $ker(f)=(2+i)\mathbb{Z}[i]$ (i.e. idealul generat de $2+i$),
   (iv) inelul factor $\mathbb{Z}[i]/(2+i)\mathbb{Z}[i]$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_5$,
   (v) $2+i$ divide $a+bi\Leftrightarrow 5$ divide $a-2b$.

8. Fie funcţia $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[i]/(4+i)\mathbb{Z}[i]$ dată prin $g(n)=\widehat{n}$. Arătaţi că:
   (i) g este morfism de inele,
   (ii) g este surjecţie,
   (iii) $17\mathbb{Z}=ker(g)$,
   (iv) $\mathbb{Z}_{17}$ este izomorf cu inelul factor $\mathbb{Z}[i]/(4+i)\mathbb{Z}[i]$.

9. Fie funcţia $f:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{Z}_2[X]/X^2\mathbb{Z}_2[X]$ dată prin $f(a+bi)=\widehat{\bar{a}+\bar{b}+\bar{b}X}$.
Arătaţi că:
   (i) f este morfism de inele,
   (ii) f este surjecţie,
   (iii) $ker(f)=2\mathbb{Z}[i]$,
   (iv) inelele factor $\mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$ şi $\mathbb{Z}_2[X]/X^2\mathbb{Z}_2[X]$ sunt izomorfe.

10. Fie funcţia $g:\mathbb{Z}_2[X]\to\mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$ dată prin $g(P(X))=\widehat{P(1+i)}$. Arătaţi că:
   (i) g este bine-definită,
   (ii) g este morfism de inele,
   (iii) g este surjecţie,

(iv) $ker(g) = X^2\mathbb{Z}_2[X]$,
(v) inelele factor $\mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$ şi $\mathbb{Z}_2[X]/X^2\mathbb{Z}_2[X]$ sunt izomorfe.

11. Fie $\theta = (1+\sqrt{5})/2$. Arătaţi că inelul factor $\mathbb{Z}[\theta]/11\mathbb{Z}[\theta]$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11}$.

12. Fie $\theta = (1+\sqrt{5})/2$. Arătaţi că inelele factor $\mathbb{Z}[\theta]/5\mathbb{Z}[\theta]$ şi $\mathbb{Z}_5[X]/X^2\mathbb{Z}_5[X]$ sunt izomorfe.

13. Fie $\theta = (1+\sqrt{21})/2$. Arătaţi că inelul factor $\mathbb{Z}[\theta]\sqrt{21}\mathbb{Z}[\theta]$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_{21}$.

14. Fie $\theta = (1+\sqrt{-15})/2$. Arătaţi că inelul factor $\mathbb{Z}[\theta]/\theta\mathbb{Z}[\theta]$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_4$.

15. Fie A un inel comutativ şi $x, y \in A$. Arătaţi că inelele factor $A/(xA+yA)$ şi $(A/xA)/\hat{y}(A/xA)$ sunt izomorfe.

16. Arătaţi că $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4};\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{C}$.

17. Arătaţi că $A = \{a + b\sqrt[3]{12} + c\sqrt[3]{18};\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{R}$.

18. Fie $\theta = (1 + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100})/3$.
(i) Găsiţi $m, n, p \in \mathbb{Z}$ aşa ca $\theta^3 = m\theta^2 + n\theta + p$.
(ii) Arătaţi că $\mathbb{Z}[\theta] = \{a + b\theta + c\theta^2;\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{R}$.

19. Arătaţi că $\mathbb{Z}[\sqrt[4]{2}] = \{a + b\sqrt[4]{2} + c\sqrt[4]{4} + d\sqrt[4]{8};\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{R}$.

20. Arătaţi că $\{a + b\sqrt[4]{5} + c(1+\sqrt{5})/2 + d\sqrt[4]{5}(1+\sqrt{5})/2;\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{C}$.

21. Fie numerele $2-i$, $14+3i$, $13+4i$, $1+i$, $6+i$ din $\mathbb{Z}[i]$.
(i) Calculaţi norma acestor numere.
(ii) Ce relaţii de divizibilitate există între aceste numere?

22. Fie numerele $(3+\sqrt{5})/2$, $(13+5\sqrt{5})/2$, $(11+3\sqrt{5})/2$, $24+10\sqrt{5}$ din inelul $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$.
(i) Calculaţi norma acestor numere.
(ii) Ce relaţii de divizibilitate există între aceste numere?

23. Verificaţi dacă $5+\sqrt{-7}$ divide $11-\sqrt{-7}$
(i) în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$,
(ii) în inelul $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{-7})/2]$.

24. Fie $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$. Arătaţi că $2-i$ divide $a+bi$ în $\mathbb{Z}[i] \Leftrightarrow 5$ divide $a+2b$ în $\mathbb{Z}$.

25. Stabiliţi criterii de divizibilitate cu $1+i$, $2+i$ sau $4-i$ similare cu cel din ex. precedent.

26. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ coprime. Arătaţi că există $c \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea: $a+b\sqrt{d}$ divide $x+y\sqrt{d}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \Leftrightarrow a^2-b^2d$ divide $x+cy$.

27. Determinaţi divizorii lui $13+4i \in \mathbb{Z}[i]$.

28. Verificaţi dacă numerele următoare sunt asociate în divizibilitate:
(i) 2 şi $1+\sqrt{-3}$ în $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{-3})/2]$,
(ii) $7+6\sqrt{2}$ şi $5+\sqrt{2}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$,
(iii) $9+7i$ şi $7+9i$ în $\mathbb{Z}[i]$,
(iv) $2+\sqrt{13}$ şi $(19+5\sqrt{13})/2$ în $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{13})/2]$.

29. Arătaţi că numărul $170+39\sqrt{19}$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{19}]$.

30. Arătaţi că numărul $1520 + 273\sqrt{31}$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{31}]$.

31. Determinaţi unităţile inelului $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-7})/2]$.

32. Arătaţi că unităţile inelului $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ sunt numerele de forma $\pm(2 + \sqrt{3})^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

33. Fie $A = \{a/(1 + 2b);\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(i) Arătaţi că A este un subinel al lui $\mathbb{Q}$.
(ii) Determinaţi unităţile lui A.
(iii) Arătaţi că pentru orice $x, y \in A$ rezultă x divide y sau y divide x.

34. Fie $n \geq 2$ un număr întreg şi $A = \{a/(1 + bn);\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(i) Arătaţi că A este un subinel al lui $\mathbb{Q}$.
(ii) Determinaţi unităţile lui A.
(iii) Arătaţi că n este putere de număr prim $\Leftrightarrow$ pentru orice $x, y \in A$ rezultă x divide y sau y divide x.

35. Verificaţi dacă $1 + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ divide $9 + 3\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.
[Ind. $x^3 - 2 = (x^2 - 2x - 1)(x + 2) + 5x$.]

36. Verificaţi dacă numărul $4 + 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{7}]$.

37. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:
(i) 11 şi $3 + 2\sqrt{-5}$ sunt atomi primi,
(ii) $3 + \sqrt{-5}$ este atom neprim,
(iii) $7 - \sqrt{-5}$ este element reductibil.

38. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$:
(i) 7 şi $1 - \sqrt{6}$ sunt atomi primi,
(ii) 2, 3, 5 şi $\sqrt{6}$ sunt reductibile.

39. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$:
(i) $8 = 2^3$ şi $8 = (1 + \sqrt{-7})(1 - \sqrt{-7})$ sunt factorizări atomice ale lui 8,
(ii) $16 = 2^4$ şi $16 = (3 + \sqrt{-7})(3 - \sqrt{-7})$ sunt factorizări atomice ale lui 16.

40. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$:
(i) 2 şi 5 sunt atomi neprimi,
(ii) 7 şi $3 - 2\sqrt{10}$ sunt atomi primi.

41. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$:
(i) 2 şi $1 + \sqrt{-3}$ sunt atomi neprimi,
(ii) 5 şi $2 + \sqrt{-3}$ sunt atomi primi,
(iii) 7 este element reductibil.

42. Factorizaţi $5 + \sqrt{-3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ în produs de atomi.

43. Fie $a + b\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$. Arătaţi că a, b au aceeaşi paritate $\Leftrightarrow$ $a + b\sqrt{-3}$ se divide cu 2, $1 + \sqrt{-3}$ sau $1 - \sqrt{-3}$.

44. Fie $A = \{(a + b\sqrt{-3})/(2c + 1);\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$. Arătaţi că:
(i) A este subinel al lui $\mathbb{C}$,
(ii) $a + b\sqrt{-3})/(2c + 1)$ inversabil $\Leftrightarrow$ a, b au parităţi diferite,
(iii) atomii lui A sunt 2, $1 + \sqrt{-3}$ şi $1 - \sqrt{-3}$ (pâna la o asociere),
(iv) A nu are atomi primi.

45. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{-15})/2]$:
(*i*) 2 şi 3 sunt atomi neprimi,
(*ii*) $2+\sqrt{-15}$ şi $2-\sqrt{-15}$ sunt atomi primi.

46. Fie $A = \{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}$. Arătaţi că:
(*i*) A este un subinel al lui $\mathbb{Q}[X]$,
(*ii*) X nu are factorizare atomică în A,
(*iii*) 2 şi X^2+X+1 sunt atomi primi în A.

47. Fie A inelul de "polinoame" cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_2$ şi exponenţi raţionali ≥ 0 (e.g. $\hat{1}+X^{2/5}+X^{11/3}$). Arătaţi că A nu are atomi.

48. Fie $A = \{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f(a) \in \mathbb{Z}\ \forall a \in \mathbb{Z}\}$. Arătaţi că:
(*i*) A este un subinel al lui $\mathbb{Q}[X]$,
(*ii*) $X(X-1)(X-2)/6$ este atom neprim al lui A.

49. Găsiţi factorizările atomice ale lui 81 în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

50. Folosind egalitatea $\sqrt{-6}^2 = -2 \cdot 3$, arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ nu este factorial.

51. Rezultă din egalitatea $\sqrt{6}^2 = 2 \cdot 3$ că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ nu este factorial?

52. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ nu este factorial.

53. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ nu este factorial.

54. Scrieţi numărul $33+13i \in \mathbb{Z}[i]$ ca produs de atomi primi.

55. Găsiţi factorizările atomice ale lui $-29+5\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

56. Găsiţi factorizările atomice ale lui $11+17\sqrt{-6} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.

57. Arătaţi că orice subinel al lui $\mathbb{Z}[X]$ este ACCP deci atomic.

58. Fie $A = \mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}[X]$.
(*i*) Arătaţi că A este subinel al lui $\mathbb{Z}[X]$.
(*ii*) Determinaţi factorizările atomice ale lui $16X^4$ în A.
(*iii*) Deduceţi că A nu este factorial.

59. Arătaţi că orice $f \in (\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]) - X\mathbb{Q}[X]$, $f \neq \pm 1$, este produs de atomi primi.

60. Arătaţi că inelul $\mathbb{R} + X\mathbb{C}[X]$ este atomic nefactorial.

61. Fie K un corp comutativ astfel încât toate subinelele lui $K[X]$ sunt atomice. Ce putem afirma despre K ?

62. Arătaţi că $1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ este atom prim al inelului $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{3}]$.

63. Arătaţi că $3-\sqrt[3]{4}$ este un divizor prim al lui 23 în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$. Găsiţi o factorizare atomică a lui 23 în $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

64. Fie $A = \{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f'(0) = 0\}$, unde f' este derivata lui f.
(*i*) Arătaţi că A este subinel al lui $\mathbb{Q}[X]$.
(*ii*) Determinaţi factorizările atomice ale lui $X^8 - X^5$ în A.

65. Calculaţi cmmdc al numerelor $2-9i$, $6-7i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

66. Arătaţi că numerele $2-9i$, $6-7i \in \mathbb{Z}[i]$ au cmmmc egal cu $17(2+i)$.

67. Arătaţi că în domeniul $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$:
(*i*) $2+\sqrt{-17}$ şi 7 au cmmdc,
(*ii*) $2+\sqrt{-17}$ şi 7 nu au cmmmc,
(*iii*) $6+3\sqrt{-17}$ şi 21 nu au cmmdc.

68. Fie A un domeniu şi $a, b, c \in A - \{0\}$ cu $aA + bA = cA$. Arătaţi că $(a, b) = c$ şi $[a, b] = ab/c$.

69. Fie $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ cu $N(x)$,$N(y)$ coprime în $\mathbb{Z}$. Arătaţi că idealul generat de x şi y în $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ este $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

70. Arătaţi că în domeniul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:
(*i*) idealul generat de 29 şi $13+\sqrt{-5}$ este principal,
(*ii*) 29 şi $13+\sqrt{-5}$ au cmmdc,
(*iii*) 29 şi $13+\sqrt{-5}$ au cmmmc.

71. Arătaţi că în domeniul $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$:
(*i*) 2 şi $1+\sqrt{13}$ sunt coprime,
(*ii*) idealul generat de 2 şi $1+\sqrt{13}$ nu este principal.

72. Arătaţi că în domeniul $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$:
(*a*) 2 şi $1+\sqrt{-3}$ sunt coprime
(*b*) 2^3 şi $(1+\sqrt{-3})^3$ nu sunt coprime.

73. Arătaţi că în domeniul $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{-15})/2]$ idealul generat de 19 şi $9-(1+\sqrt{-15})/2$ este principal.

74. Fie a, b numere întregi coprime. Arătaţi că numerele $a+bi$, $a-bi$ din $\mathbb{Z}[i]$ au cmmdc egal cu
$1+i$, dacă a, b sunt impare,
1, în caz contrar.

75. Arătaţi că $\cup_{n\geq 1}\mathbb{R}[X^{1/2^n}]$ este inel Bezout neprincipal (adică orice ideal finit generat este principal).

76. Fie A un domeniu. Arătaţi că dacă $A[X]$ este inel Bezout, atunci A este corp.

In exerciţiile 77-84, calculaţi cmmdc d al elementelor a, b
(*i*) folosind algoritmul lui Euclid,
(*ii*) descompunând a şi b în produs de elemente prime.
In cazul (*i*) scrieţi pe d ca o combinaţie liniară de a şi b.

77. $a = 11 + 17i$, $b = 1 + 13i$ în inelul $\mathbb{Z}[i]$.

78. $a = 31 - 19\sqrt{-2}$, $b = 21 + 7\sqrt{-2}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

79. $a = 41 - 16\theta$, $21 + 2\theta$ în inelul $\mathbb{Z}[\theta]$, unde $\theta = (1+\sqrt{-11})/2$.

80. $a = 31 - 16\theta$, $b = 17 + 2\theta$ în inelul $\mathbb{Z}[\theta]$, unde $\theta = (1+\sqrt{-7})/2$.

81. $a = 18 - 17\omega$, $b = 23 + 2\omega$ în inelul $\mathbb{Z}[\omega]$ unde $\omega = (1+\sqrt{-3})/2$.

82. $a = x^{19} + x + 1$, $b = x^8 + x^7 + x + 1$ în inelul $\mathbb{Z}_2[x]$.

83. $a = 11 + 15\sqrt{2}$, $b = 3 + 13\sqrt{2}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

84. $a = 67 - 3\sqrt{3}$, $b = 73 - 17\sqrt{3}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

85. Calculaţi un generator al idealului $(65 + 55i)\mathbb{Z}[i] \cap (29 + 3i)\mathbb{Z}[i]$.

86. Găsiţi un singur generator pentru idealul generat de $3 + i$, $5 - i$, $7 + i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

87. Rezolvaţi ecuaţia $(2 + 2i)x + (5 - i)y = 7 + i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

88. Rezolvaţi ecuaţia $(11 + 15\sqrt{2})x + (3 + 13\sqrt{2})y = 8 + 5\sqrt{2}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

89. Determinaţi imaginea şi nucleul aplicaţiei liniare $\phi : A \times A \to A$, $\phi(x, y) = (11 - 15\sqrt{2})x + (3 - 13\sqrt{2})y$, unde $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

90. In inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{12}]$, găsiţi o două elemente fără cmmdc.

91. In inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$, găsiţi un exemplu de factorizare atomică neunică.

92. Găsiţi factorizarea atomică a lui 20 în inelul $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-19})/2]$.

93. Arătaţi că inelul $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ este euclidian.

94. Arătaţi că subinelul $\{(a + b\sqrt{-5})/(2c + 1);\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ al lui $\mathbb{C}$ este euclidian.

95. Factorizaţi polinomul $X^4 + X^2 + 1$ în inelul $\mathbb{Z}[i][X]$.

96. Calculaţi cmmdc al polinoamelor $(3 + i)x^4 - 3 - i$ şi $(5 - i)x^6 - 5 + i$ în inelul $\mathbb{Z}[i][x]$.

97. Factorizaţi polinomul $X^4 - 10X^2 + 1$ în inelul
(*i*) $\mathbb{Z}[X]$
(*ii*) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}][X]$
(*iii*) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}][X]$
(*iv*) $\mathbb{Z}[\sqrt{6}][X]$
(*v*) $\mathbb{Z}_2[X]$
(*vi*) $\mathbb{Z}_3[X]$.

98. Factorizaţi polinomul $X^3 + i$ în inelul $\mathbb{Z}[i][X]$.

99. Descompuneţi numărul $20538 - 110334i$ în produs de factori primi în $\mathbb{Z}[i]$.

100. Câţi divizori are numărul din ex. precedent ?

101. In $\mathbb{Z}[i]$, descompuneţi toate numerele de normă 24375 în produs de factori primi.

102. Descompuneţi numărul $140770 - 91910\sqrt{2}$ în produs de factori primi în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

103. Descompuneţi numărul $1170570 - 150780\sqrt{3}$ în produs de factori primi în $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

104. Descompuneţi numărul $406305 + 78315\sqrt{5}$ în produs de factori primi în $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{5})/2]$.

105. Determinaţi elementele prime din inelul $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-3})/2]$.

106. Determinaţi elementele prime din inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

107. In $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$, găsiţi atomi $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_{2n}$ astfel încât $a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_{2n}$.

108. Calculaţi conţinutul polinomului $420X^5 + 1170X^3 + 1650X^2 + 900 \in \mathbb{Z}[X]$.

109. Calculaţi conţinutul polinomului $(3+i)X^5+20X^4+(13+i)X^3+(19+3i)X^2+70 \in \mathbb{Z}[i][X]$.

110. Este polinomul $f = 111X^6 + 147X^5 - 91X^3 + 161X^2 + 203$ ireductibil in $\mathbb{Q}[X]$?

111. Arătaţi că polinomul $f = X^5 + X^3 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

112. Arătaţi că polinomul $f = 2X^5 - 4X^4 - 7X^3 + 25X^2 - 14X - 17$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. [Ind. $X \mapsto X + 1$.]

113. Arătaţi că polinomul $f = X^4 + (3 + 4i)X^3 + (3 - i)X^2 - 5X + 6 - 7i$ este ireductibil în $\mathbb{Q}(i)[X]$.

114. Arătaţi că polinomul $f = X^5Y + X^4Y^3 - X^4 + X^2Y - X^2 + Y^2 + Y - 2$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X, Y]$.

115. Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ cu $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ si $n \geq 2$. Arătaţi că f este ireductibil dacă şi numai dacă $g = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ este ireductibil.

116. Arătaţi că polinomul $f = (1 + 4\omega)X^4 + 3\omega X^3 + (1 + \omega)X^2 - 6X + 2 + \omega$ este ireductibil în $\mathbb{Q}(\omega)[X]$, unde $\omega = (1 + \sqrt{-3})/2$.

117. Arătaţi că polinomul $f = (6 - 7i)X^4 + (15 + 8i)X^3 + (11 - 10i)X^2 - 17X + 2i$ este ireductibil în $\mathbb{Q}(i)[X]$.

118. Factorizaţi $X^5 + i$ în $\mathbb{Q}(i)[X]$. [Ind. $\mathbb{Z}[i]/(1 + i) \simeq \mathbb{Z}_2$.]

119. Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ două polinoame unitare cu $fg \in \mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că $f, g \in \mathbb{Z}[X]$.

120. Arătaţi că nu există un subinel propriu D al lui $\mathbb{R}$ astfel încât D este factorial şi are corpul de fracţii $\mathbb{R}$.

121. Arătaţi că $f = X^2 - X + 3$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}][X]$ dar este reductibil în $\mathbb{Q}[\sqrt{-11}][X]$.

122. Arătaţi că în $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}][X]$ polinoamele $2X + 1 + \sqrt{-3}$ si $2X + 1 - \sqrt{-3}$ sunt primitive dar produsul lor nu este primitiv.

123. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom primitiv de grad ≥ 1. Arătaţi că f este primitiv în $\mathbb{Z}[i][X]$.

124. Daţi exemplu de extindere de inele factoriale $A \subseteq B$ astfel încât nu orice polinom primitiv din $A[x]$ este primitiv in $B[x]$.

125. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom de grad $n \geq 1$. Arătaţi că f se poate scrie ca suma a două polinoame ireductibile de grad n din $\mathbb{Z}[X]$.

126. Arătaţi că $x^{2^n} + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

127. Fie p un numar prim. Arătaţi că $x^{p-1} + \cdots + x + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

128. Factorizaţi 541 in $\mathbb{Z}$ şi apoi $x^9 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ în $\mathbb{Z}[X]$ şi $\mathbb{Z}_2[X]$.

129. Factorizaţi $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - x - 2$ în $\mathbb{Z}[X]$.

130. Factorizaţi $x^4 + 6x^3 + 11x^2 - 8x + 1$ în $\mathbb{Z}_2[X]$, $\mathbb{Z}_3[X]$ şi $\mathbb{Z}[X]$.

131. Factorizaţi 2, 3, 5, 7 şi 31 în $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

132. Arătaţi că $(2, 1 + \sqrt{-5})$ este ideal maximal în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

133. Arătaţi că $(3, 1 - \sqrt{-5})$ este ideal prim în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

134. Determinaţi spectrul inelului $\mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]$.

135. Este idealul generat de $x^3 - 2$ şi $x^2 - 2x - 1$ în $\mathbb{Z}[x]$ prim ?

136. Este idealul generat de 2 şi $7x^5 - 3x - 1$ în $\mathbb{Z}[x]$ prim ?

137. Arătaţi că operaţia externă $(a + bi)x := (a + 5b)x$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}_{13}$, defineşte pe grupul abelian $\mathbb{Z}_{13}$ o structură de $\mathbb{Z}[i]$-modul.

138. Câte $\mathbb{Z}[i]$-module de ordin 13 există?

139. Arătaţi că nu există $\mathbb{Z}[i]$-modul de ordin 19.

140. Fie $n \geq 2$ un întreg ≥ 2. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(a) $\mathbb{Z}_n$ posedă o structură de $\mathbb{Z}[i]$-modul.
(b) Există $x \in \mathbb{Z}_n$ cu $x^2 = -\widehat{1}$.
(c) 4 nu divide n si factorii primi impari ai lui n sunt de forma $4k + 1$.

141. Arătaţi că operaţia externă $(a + bi)(x, y) := (ax - by, ay + bx)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{Z}_3$, defineşte pe grupul abelian $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ o structură de $\mathbb{Z}[i]$-modul. Determinaţi submodulele acestui modul.

142. Este conjugarea complexă un endomorfism al $\mathbb{Z}[i]$-modulului $\mathbb{C}$? Este conjugarea complexă un endomorfism al $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-modulului $\mathbb{C}$?

143. Fie M modulul definit de morfismul de inele $f(X) \mapsto f(X^2) : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$. Este modulul M finit generat?

144. Este $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-modulul $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ finit generat?

145. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}[i]$ este suma directă submodulelor generate $1 + 2i$ şi respectiv $2 + 3i$.

146. Descrieţi submodulul M generat de 1 şi $\sqrt{2}$ în $\mathbb{Z}[i]$-modulul $\mathbb{C}$. Este M un subinel al lui $\mathbb{C}$?

147. Fie M modulul definit de morfismul de inele $f(X) \mapsto f(1) : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$. Este M izomorf cu modulul standard ${}_{\mathbb{Z}[X]}\mathbb{Z}[X]$?

148. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}^2 / < (4, 1), (1, -4) >$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_{17}$.

149. Este $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-modulul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^2 / < (4, 1), (1, -4) >$ izomorf cu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/17\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

150. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}^2 / < (4, -2), (2, 4) >$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$ folosind aplicaţia liniară $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$ dată prin $f(x, y) = (\bar{x}, \widehat{2x - y})$.

151. Este $\mathbb{Z}[i]$-modulul $\mathbb{Z}[i]^2 / < (3 + i, 3 - i) >$ izomorf cu $\mathbb{Z}[i]$?

152. Este $\mathbb{Z}[i]$-modulul $\mathbb{Z}[i]^2 / < (2 + i, 2 - i) >$ izomorf cu $\mathbb{Z}[i]$?

153. Fie M modulul definit de morfismul de inele $f(X) \mapsto f(X^2) : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$. Este M izomorf cu modulul standard ${}_{\mathbb{Z}[X]}\mathbb{Z}[X]$?

154. In $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ considerăm submodulul M generat de 9, $9\sqrt{7}$, $5 + 2\sqrt{7}$ şi $14 + 5\sqrt{7}$. Arătaţi că $\{5 + 2\sqrt{7}, 9 + 3\sqrt{7}\}$ este o bază a lui M, deci M este liber. Aparţine $11 - \sqrt{7}$ lui M ?

155. Daţi un exemplu de sistem de generatori G al unui modul liber astfel încât din G nu se poate extrage o bază.

156. Fie $A = \mathbb{Z}[X, Y]$. Privim pe A ca modul peste el însuşi. Arătaţi că $M = \{f \in A \mid f(0,0) = 0\}$ este un submodul al lui A şi că M nu este liber. Generalizare.

157. Fie H un $\mathbb{Z}$-submodul al lui $\mathbb{Z}^3$. Presupunem că există $(a, b, c), (0, d, e), (0, 0, f) \in H$ astfel încât

$a = min\{x \mid (x, y, z) \in H, x > 0\}$,
$d = min\{y \mid (0, y, z) \in H, y > 0\}$,
$f = min\{z > 0 \mid (0, 0, z) \in H\}$.

Arătaţi că $(a, b, c), (0, d, e), (0, 0, f)$ este o bază a lui H.

158. Arătaţi că în $\mathbb{Z}$-modulul factor $\mathbb{Z}^3/ < (2, 3, 4) >$ clasele vectorilor (1,1,1), (0,0,1) formeaza o bază.

159. Fie M un $\mathbb{Z}$-modul liber. Arătaţi că M nu are elemente nenule de ordin finit. Deduceţi că $\mathbb{Z}$-modulul factor $\mathbb{Z}^3/ < (2, 4, -6) >$ nu este liber.

160. Fie M idealul inelului $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{11}]$ generat de 2 şi $3 + \sqrt[3]{11}$. Arătaţi că M privit ca $\mathbb{Z}$-modul are baza, $\{2,\ 1 + \sqrt[3]{11},\ 1 + \sqrt[3]{121}\}$ deci M este liber.

161. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Arătaţi că operaţia externă

$$(f(X), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \mapsto f(A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

defineşte pe $\mathbb{Q}^3$ o structură de $\mathbb{Q}[X]$-modul. Arătaţi că M este suma directă internă $\mathbb{Q}[X]g_1 \oplus \mathbb{Q}[X]g_2 \oplus \mathbb{Q}[X]g_3$, unde $g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

162. Fie E inelul endomorfismelor $\mathbb{Q}$-spaţiului vectorial $\mathbb{Q}[X]$. Considerăm elementele $a, b, c, d \in E$ definite prin relaţiile $a(X^n) = X^{2n}$, $b(X^n) = X^{2n+1}$, $c(X^{2n}) = X^n$, $c(X^{2n+1}) = 0$, $d(X^{2n+1}) = X^n$, $d(X^{2n}) = 0$, $n \geq 0$. Arătaţi că $\{c, d\}$ este o bază a lui E privit ca E-module stâng. [Ind. $ac + bd = 1$, $ca = 1$, $cb = 0$.]

163. Fie R un inel comutativ, M un R-modul, $x, y \in M$ şi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R)$ o matrice inversabilă. Arătaţi că $\{ax + by, cx + dy\}$ este bază a lui M dacă şi numai dacă $\{x, y\}$ este bază.

164. Posedă grupurile $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ structuri de $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{3}]$-modul ?

165. Este $\mathbb{Z}[X^2, X^3]$ un $\mathbb{Z}[X^2]$-modul liber ?

166. Găsiţi o bază de $\mathbb{Z}$-modul liber pentru inelul $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

167. Găsiţi o bază de $\mathbb{Z}$-modul liber pentru inelul $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{12}, \sqrt[3]{18}]$.