Examen Statistică

8 Feb 2020

(11 feb 2019, 2 iunie 2018)

Exercițiul 1: Fie o variabilă aleatoare repartizată

$$\mathbb{P}_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N} \text{ unde } \theta \in (0,1)$$

un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$. Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2 \dots X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.
2. Det. estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta}=0)$.
3. Det. estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și det. legea la limită.

Exercițiul 2: Considerăm cuplul de variabile aleatoare (X,Y) cu densitatea:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-y^2 x/2} \cdot e^{-\sqrt{x}/k} \quad x>0$$

1. Det. repartiția condiționată a lui Y la $X=x$.
2. Det. repartiția lui $\sqrt{X}$
3. Propuneți o metodă de simulare a unei observații din cuplul (X,Y) și scrieți un cod R care să permită acest lucru.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Exercițiul 3. Fie $X_1 \dots X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde $f_\theta(x) = \frac{7}{(x-\theta)^8} \mathbb{1}_{[1+\theta, +\infty)}(x)$

a) Calculați $E_\theta[X_1]$, $Var_\theta(X_1)$ și funcția de repartiție $F_\theta(x)$ a lui X_1.

b) În cazul în care $\theta = 2$, dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0, 1]$ $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$, $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

c). Determinați estimatorul $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestui estimator. Care este legea la limită?

d) Exprimați în funcție de θ mediana repartiției lui X_1 și, plecând de la aceasta, găsiți un alt estimator $\hat{\theta}_n^Q$ pt θ

e). Det. legea la limită a lui $\hat{\theta}_n^Q$ și arătați că, asimptotic acesta este mai bun decât $\hat{\theta}_n^M$

f). Det. estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n^{VM}$ a lui θ și verificați dacă este deplasat.

h) Pe care dintre cei trei estimatori îi preferați?

Ex 4. Considerăm densitatea $f(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ unde folosim convenția $f(1) = +\infty$.

① Dc v.a. Y are densitatea f, care este dens. v.a $X = \theta Y$, $\theta > 0$?

② $X_1 \dots X_n$ eșantion talie n din X. Det. estimatorul de verosimilitate max $\hat{\theta}_n$ a lui θ.

③ Det. repart limită a lui $n\sqrt{\theta - \hat{\theta}_n}$

④ Det. mediana repartiției v.a. X și deduceți un nou estimator $\overline{\theta}_n$. Pe care din cei doi estimatori îi preferați?

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Iarnă 2020

① Fie X o v.a. $P_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0,1)$ parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ o constantă.

1) Determinați constanta A și calculați $E[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $x_1, x_2, \dots, x_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2) Determinați estimatorul $\hat{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $P_\theta(\hat{\theta} = \theta)$

3) Det estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă este bine definit.

4) Studiați consistența estimatorului $\hat{\theta}$ și det legea lui limită.

1) $$\sum_{k\geq 0} A \cdot (k+1)\theta^k = A \cdot \sum_{k \geq 0} (k+1)\theta^k$$

$$\sum_{k\geq 0} \theta^{k+1} = \theta \cdot \frac{1}{1-\theta} \quad \Big| \frac{d}{d\theta}$$

$$\sum_{k\geq 0} (k+1)\theta^k = \frac{1}{(1-\theta)^2} \Rightarrow A = (1-\theta)^2$$

$$E[X] = (1-\theta)^2 \sum_{k\geq 0} k(k+1)\theta^k$$

$$\sum_{k\geq 0} \theta^k = \frac{1}{1-\theta} \quad \Big| \frac{d}{d\theta}$$

$$\sum_{k\geq 0} k\theta^k = \frac{1}{(1-\theta)^2} \Rightarrow \sum_{k\geq 0} k \cdot \theta^k = \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

Mai derivăm o dată:

$$\sum_{k\geq 0} k^2 \theta^{k-1} = \frac{(1-\theta)^2 + 2\theta(1-\theta)}{(1-\theta)^4} = \frac{1-2\theta+\theta^2+2\theta-2\theta^2}{(1-\theta)^4} =$$

$$= \frac{1-\theta^2}{(1-\theta)^4} = \frac{1+\theta}{(1-\theta)^3}$$

$$\sum_{k\geq 0} k^2 \cdot \theta^k = \frac{\theta+\theta^2}{(1-\theta)^3} \quad \Big| \frac{d}{d\theta}$$

$$\sum_{k\geq 0} k^3 \cdot \theta^{k-1} = \frac{(1+2\theta)(1-\theta)^3 + 3(\theta+\theta^2)(1-\theta)^2}{(1-\theta)^6} = \frac{1+2\theta-\theta-2\theta^2+3\theta+3\theta^2}{(1-\theta)^4} =$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{1+5\theta+\theta^2}{(1-\theta)^5}$$

$$\sum_{k\geq 0} k^3 \cdot \theta^k = \frac{\theta+5\theta^2+\theta^3}{(1-\theta)^3}$$

$$E[X] = (1-\theta)^2\left(\frac{\theta}{(1-\theta)^2} + \frac{\theta+\theta^2}{(1-\theta)^3}\right) = \theta + \frac{\theta+\theta^2}{1-\theta} = \frac{\theta-\theta^2+\theta+\theta^2}{1-\theta} = \frac{2\theta}{1-\theta}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$E[X^2] = \sum_{k\geq 0} k^2(k+1)\theta^k(1-\theta)^2 = \underbrace{\sum_{k\geq 0}(k-1)k(k+1)\theta^k(1-\theta)^2}_{S_1} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k\geq 0} k(k+1)\theta^k(1-\theta)^2}_{S_2}$$

$$S_1 = (1-\theta)^2\theta^2\sum_{k\geq 1} k(k+1)\theta^{k-2} = (\theta-1)^2\theta^2\sum_{k\geq 1}(\theta^{k+1})''' = (\theta-1)^2\theta^2\left(\sum_{k\geq 1}\theta^{k+1}\right)''' =$$

$$= (\theta-1)^2\theta^2 \cdot \left(\sum_{k\geq 0}\theta^k\right)''' = (\theta-1)^2\theta^2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\theta^{n+1}-1}{\theta-1}\right)''' = (\theta-1)^2\theta^2\left(\frac{1}{1-\theta}\right)''' =$$

$$= (\theta-1)^2\theta^2\left(\frac{1}{(\theta-1)^2}\right)'' = (\theta-1)^2\theta^2\left(\frac{-2}{(\theta-1)^3}\right)' = \frac{6\theta^2}{(\theta-1)^2}$$

2) $E[X] = \frac{2\theta}{1-\theta} \Rightarrow 2\theta = (1-\theta)E[X]$

$$\theta(2+E[X]) = E[X]$$

$$\theta = \frac{E[X]}{2+E[X]} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\bar{X}_n}{2+\bar{X}_n}$$ (metoda momentelor)

$P_\theta(\tilde{\theta}=0) = P(\bar{X}_n = 0)$ $X_1, \dots, X_n$ iau doar valori pozitive $\Rightarrow \bar{X}_n = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$

$$P_\theta(\tilde{\theta}=0) = (P(X_1=0))^n = ((1-\theta)^2(\theta+1))^n = (1-\theta)^{2n}$$

3) $L(\theta; x_1, \dots, x_n) = (1-\theta)^{2n}\prod_{i=1}^n (x_i+1)\cdot\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}$

$$\ell(\theta; x_1, \dots, x_n) = 2n\ln(1-\theta) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1) + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\ln\theta$$

$$\frac{d\ell}{d\theta} = -\frac{2n}{1-\theta} + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\cdot\frac{1}{\theta}$$

$$\frac{d\ell}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{2n}{1-\theta} = \frac{1}{\theta}\cdot\sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow 2n\theta = \sum x_i - \theta\cdot\sum x_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta(2n+\sum x_i) = \sum x_i$$

Scanned by CamScanner

$$\theta = \frac{\sum x_i}{2n + \sum x_i}$$

$\ell \nearrow$ pt $\theta < \frac{\sum x_i}{2n + \sum x_i}$

$\ell \searrow$ pt $\theta > \frac{\sum x_i}{2n + \sum x_i}$

Deci $\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{2n + \sum x_i} = \frac{\overline{X}_n}{2 + \overline{X}_n}$

$\overline{X}_n \geq 0 \Rightarrow 2 + \overline{X}_n \geq 2 \Rightarrow \theta$ este bine definit

5) $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$

$g(x) = \frac{x}{2+x}$ continuă

$\hat{\theta} = \frac{\overline{X}_n}{2 + \overline{X}_n}$

Din Th apl continue : $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} E[X_1] = \frac{2\theta}{1-\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_n = g(\overline{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(E[X]) = g\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right) = \frac{\frac{2\theta}{1-\theta}}{2 + \frac{2\theta}{1-\theta}} = \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_n$ este consistent

Din T.L.C. $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{2\theta}{1-\theta}\right) \xrightarrow{d} N(0, Var(X_1))$

Din T. privind metoda Delta:

$\sqrt{n}\left(g(\overline{X}_n) - g\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right)\right) \xrightarrow{d} g'\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right) \cdot N(0, Var(X_1))$

$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \left(g'\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right)\right)^2 \cdot Var(X_1)\right)$

$g'(x) = \frac{2 + x - x}{(2+x)^2} = \frac{2}{(2+x)^2}$

$g'\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right) = \frac{2}{\left(2 + \frac{2\theta}{1-\theta}\right)^2}$

Scanned by CamScanner

① Considerăm cuplul de variabile aleatoare (x,y) cu densitatea

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{y^2x}{2}} e^{-\sqrt{x}}$$

1) Determ repartiția condiționată a lui p la $x = z$

2) Determ repartiție lui $\sqrt{x}$

3) Prop o metodă de simulare a unei din cuplul (x,y) și scrieți cod R care să permită acest lucru.

1) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{y^2x}{2}} e^{-\sqrt{x}} \cdot 1_{x>0}$

$f_{y|x}(y|x) \overset{def}{=} \frac{f(x,y)}{f_x(x)}$, unde $f_x(x) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$

$f_x(z) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{z}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2z}{2}} dy$

s.v. $z = \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{2}}$ $\quad dz = dy \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2x}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} dz = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$

Deci $f_{y|x}(y|x) = \sqrt{5} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{2x}\; p(y|x) =$
$= 2e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2x}{2}} \cdot e^{-\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2x}{2}} \sim N(0, \frac{1}{x})$

2) Pt $t < 0$

$P(x \le t) = 0$

Pt $t > 0$

$P(x \le t) = P((x,y) \in [0,t] \times \mathbb{R}) = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \right) dx =$

$= \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{y^2x}{2}} dy \right) dx = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx$

s.v. $z = \sqrt{x}$ $\quad dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$P(x \le t) = \int_0^{\sqrt{t}} e^{-z} dz = 1 - e^{-\sqrt{t}}$

$P(\sqrt{x} \le t) = P(x \le t^2) = 1 - e^{-t}$

Deci $\sqrt{x} \sim Exp(1)$

Scanned by CamScanner

3) Generăm un eșantion din distribuția x, apoi pt fiecare valoare x a eșantionului, generăm o observație din distribuția (y | x = x)

Cod R:

```
n=100
Rx = rexp(n,1)
x = Rx^2
y = rep(0,n)
for (i in 1:n) {
    y[i]=rnorm(1,0,1/x[i])
}
```

Scanned by CamScanner

(1) Fie $X_1, \dots, X_n$ un eşantion de talie n din populaţia f_θ unde

$f_\theta(x) = \frac{7}{(x-\theta)^8} 1_{[1+\theta, +\infty)}(x)$

a) Calculaţi $E_\theta[X_1]$, $Var_\theta[X_1]$ şi funcţia de repartiţie $F_\theta(x)$ a lui X

b) În cazul în care $\theta = 2$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiţia lui $X \sim f_\theta(x)$. Pt aceasta dispunem de trei valori din repartiţia uniformă pe $[0,1]$, $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.5$ şi $u_3 = 0.5$

c) Det un estimator $\tilde{\theta}_n^M$ a lui θ obţinut prin metoda momentelor şi calculaţi eroarea pătratică medie a acestui estimator.

d) Care este legea lui limită exprimată în funcţie de θ şi plecând de la această repartiţie a lui X, găsiţi un alt estimator $\hat{\theta}_n^a$ al lui θ.

Determ legea lui limită a lui $\hat{\theta}_n^a$ şi arătaţi că acesta este mai bun decât θ_n^N

f) Det estimatorul de verosimilitate maximă θ_n^{VM} a lui θ şi verificaţi dacă este deplasat $\theta_n^{VM} \to \theta$

g) Calculaţi funcţia de repartiţie a lui

h) Pe care dintre cei trei estimatori ?

a) $E_\theta[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} \cdot 1_{[1+\theta,\infty)}(x) =$

$= \int_{1+\theta}^{\infty} x \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} = \int_{1+\theta}^{\infty} \frac{7}{(x-\theta)^7} + \theta \int_{1+\theta}^{\infty} \frac{7}{(x-\theta)^8} =$

$= -\frac{7}{6(x-\theta)^6} \Big|_{1+\theta}^{\infty} + \theta \cdot \frac{1}{(x-\theta)^7} \Big|_{1+\theta}^{\infty} = \frac{7}{6} + \theta$

$E_\theta[X_1^2] = \int_{1+\theta}^{\infty} x^2 \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} dx = \int_{1+\theta}^{\infty} (x-\theta)^2 \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} dx + 2\theta \int_{1+\theta}^{\infty} x \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} -$

$- \theta^2 \int_{1+\theta}^{\infty} \frac{7}{(x-\theta)^8} = \frac{7}{5} + 2\theta\left(\frac{7}{6} + \theta\right) - \theta^2 =$

$= \frac{7}{5} + 2\theta \cdot \frac{7}{6} + 2\theta^2 - \theta^2 = \frac{7}{5} + 2\theta\frac{7}{6} + \theta^2$

Scanned by CamScanner

$$Var_\theta(X_1) = E_\theta[X_1^2] - (E_\theta[X_1])^2 = \frac{7}{5} + 2\theta\cdot\frac{7}{6} + \theta^2 - \left(\frac{7}{6}+\theta\right)^2 =$$

$$= \frac{7}{5} + 2\theta\cdot\frac{7}{6} + \theta^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 - 2\cdot\frac{7}{6}\cdot\theta - \theta^2 = \frac{7}{5} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{7}{5} - \frac{49}{36} = \frac{7}{180}$$

$$F_\theta(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x \le 1+\theta \\ \int_{1+\theta}^{x} \frac{7}{(t-\theta)^8}\,dt \end{cases}$$

$$= \left(-\frac{1}{(t-\theta)^7}\Big|_{1+\theta}^{x}\right)\cdot \mathbb{1}_{[1+\theta,\infty)}(x) = \left(1-\frac{1}{(x-\theta)^7}\right)\cdot \mathbb{1}_{[1+\theta,\infty)}(x)$$

b) $\theta = 2$

pt $y \in (0,1)$

$$F_2(x) = y \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x-2)^7} = y \Leftrightarrow (x-2)^7 = \frac{1}{1-y}$$

$$x = 2 + \sqrt[7]{\frac{1}{1-y}}$$

Deci $F_2^{-1}(y) = 2 + \sqrt[7]{\frac{1}{1-y}}$

Dacă $U \sim U[0,1]$

$F_2^{-1}(U) \sim f_2$

Deci e suficient să aplicăm F_2^{-1} pe valorile date

$$2 + \sqrt[7]{\frac{1}{1-0,25}} \quad , \quad 2 + \sqrt[7]{\frac{1}{1-0,5}} \quad , \quad 2 + \sqrt[7]{\frac{1}{1-0,5}}$$

c) $E_\theta[X_1] = \frac{7}{6} + \theta$

Deci punem $\hat{\theta}_n^{\,n} = \overline{X}_n - \frac{7}{6}$ (înlocuim $E_\theta[X_i]$ cu $\overline{X}_n$)

$$MSE_\theta(\hat{\theta}_n^{\,n}) = E_\theta[(\hat{\theta}_n^{\,n} - \theta)^2] = E_\theta[(\overline{X}_n - \frac{7}{6} - \theta)^2] =$$

$$= E_\theta[\overline{X}_n^2] - 2\left(\frac{7}{6}+\theta\right)\cdot E[\overline{X}_n] + \left(\frac{7}{6}+\theta\right)^2 =$$

$$= E_\theta[\overline{X}_n^2] - (E_\theta[\overline{X}_n])^2 = Var_\theta(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot Var(X_1) = \frac{1}{n} Var(X_1) = \frac{1}{n}\cdot\frac{7}{180}$$

Din TLC : $E[X_1]$

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \left(\frac{7}{6}+\theta\right)}{\sqrt{\frac{7}{180}}}\right) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\text{Cum } \hat{\theta}_n^{\,n} = \overline{X}_n - \frac{7}{6}, \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{\,n} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0,\frac{7}{180}\right)$$

Scanned by CamScanner

d) Mediana este $F_\theta^{-1}(\frac{1}{2}) = x_{\frac{1}{2}}$ = mediana

$F_\theta^{-1}(y) = \theta + \sqrt[7]{\frac{1}{1-y}}$

$x_{\frac{1}{2}} = F_\theta^{-1}(\frac{1}{2}) = \theta + \sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = \theta + \sqrt[7]{2}$

Deci $\hat{\theta}_n^a = \hat{x}_n(\frac{1}{2}) - \sqrt[7]{2}$

F_θ e derivabilă în $x_{\frac{1}{2}}$ și $f_\theta(x_{\frac{1}{2}}) > 0$ deci

$\sqrt{n}(\hat{x}_n(\frac{1}{2}) - x_{\frac{1}{2}}) \xrightarrow{d} N(0, \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{(f_\theta(x_{\frac{1}{2}}))^2})$

$f_\theta(x_{\frac{1}{2}}) = \frac{7}{(\theta + \sqrt[7]{2} - \theta)^8} = \frac{7}{2^{8/7}}$

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^a - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \frac{(2^{\frac{8}{7}})^2}{4 \cdot 49})$

$\frac{7}{180} > \frac{(2^{\frac{8}{7}})^2}{4 \cdot 49} \Leftrightarrow \frac{28 \cdot 49}{180} > 2^{8/7}$

Deci, $\hat{\theta}_n^a$ e mai bun (are varianța mai mică, deci e mai bun)

f) $L(\theta, x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod f_\theta(x_i) =$

$= \frac{7}{(x_1-\theta)^8} \cdot \frac{7}{(x_2-\theta)^8} \cdot \dots \cdot \frac{7}{(x_n-\theta)^8} \cdot \mathbb{1}_{[1+\theta,\infty)}(x_1) \dots \mathbb{1}_{[1+\theta,\infty)}(x_n)$

Funcția $\theta \to \prod \frac{7}{(x_i-\theta)^8}$ e crescătoare pe $(-\infty, x_1 - 1)$ deci

maximul fct de verosimilitate este în $x_{(1)} - 1$

$\hat{\theta}_n^{VM} = x_{(1)} - 1$

$E[\hat{\theta}_n] = E[x_{(1)}] - 1$

$P(x_{(1)} \le t) = \mathbb{P}(x_1 \le t$ și $x_2 \le t$ și $\dots$ $x_n \le t) \overset{iid}{=} (\mathbb{P}(x_1 \le t))^n =$

$= (1 - \frac{1}{(t-\theta)^7})^n \cdot \mathbb{1}_{[1+\theta,\infty)}(t)$

$f_{(x_{(1)})}(t) = n \cdot (1 - \frac{1}{(t-\theta)^7})^{n-1} \cdot \frac{7}{(t-\theta)^8} - \mathbb{1}_{[1+\theta,\infty)}(t)$

$E[x_{(1)}] = \int_{1+\theta}^{\infty} x \cdot n \cdot (1 - \frac{1}{(x-\theta)^7})^{n-1} \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} =$

$= \int_{1+\theta}^{\infty} n \cdot (1 - \frac{1}{(x-\theta)^7})^{n-1} \cdot \frac{7}{(x-\theta)^7} + \theta \cdot \int_{1+\theta}^{\infty} n \cdot (1 - \frac{1}{(x-\theta)^7})^{n-1} \cdot \frac{7}{(x-\theta)^7}$

$E[\hat{\theta}_n^{VM}] - \theta = \int_{1+\theta}^{\infty} n \cdot (1 - \frac{1}{(x-\theta)^7})^{n-1} \cdot \frac{7}{(x-\theta)^7} dx - 1 =$

Scanned by CamScanner

$$\int_{1+\theta}^{\infty} n\cdot\left(1-\frac{1}{(x-\theta)^7}\right)^{n-1}\cdot\frac{7}{(x-\theta)^7} > \int_{1+\theta}^{\infty} x\cdot\left(1-\frac{1}{(x-\theta)^7}\right)^{n-1}\cdot\frac{7}{(x-\theta)^8} = 1$$

deci $E[\hat{\theta}_n^{VM}]-\theta>0$, de unde $\hat{\theta}_n^{VM}$ e DEPLASAT

$$F_{\hat{\theta}_n^{VM}-\theta}(t) = P(\hat{\theta}_n^{VM}-\theta\le t) = P(X_{(1)}\le 1+\theta+t) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{(1+\theta+t-\theta)^7}\right)^n\cdot \mathbb{1}_{[1+\theta,\infty)} = \left(1-\frac{1}{(1+t)^7}\right)^n\cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$$

$$P(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{VM}-\theta)\le t) = P\left(\hat{\theta}_n^{VM}-\theta\le \frac{t}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^7}\right)^n\cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$$

$$\ln\left(1-\left(\frac{x}{x+t}\right)^7\right)^{x^2} = x^2\cdot\ln\left(1-\left(\frac{x}{x+t}\right)^7\right) \xrightarrow{x\to\infty} \infty\cdot(-\infty) = -\infty$$

Deci $P(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)\le t)\xrightarrow{n\to\infty} 0$, de unde $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{VM}-\theta)\xrightarrow{d} 0$

$\hat{\theta}_n^{VM}$ e cel mai bun, îl alegem pe acesta

① Considerăm densitatea

$f(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}}$ unde $f(1) = +\infty$ convenție

1) Dacă v.a. y are densitatea f care este densitatea v.a. $X = a y$ cu $a > 0$?

2) Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n din X. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ a lui a

3) Determ repartiția limită a lui $n(\theta - \hat{\theta}_n)$

4) Determ mediana repartiției v.a. X și deduceți un nou estimator $\tilde{\theta}_n$. Pe care dintre cei doi preferați?

Scanned by CamScanner