# LUCRARE - NR 2

**Exercițiul 1.** Fie $L = \langle (1,1,1), (1,-1,-7), (-1,-3,9), (1,3,3) \rangle \leq_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^3$. Determinați rangul lui $L$ în $\mathbb{Z}^3$ şi găsiţi o bază în $L$.

**Exercițiul 2.** Precizați tipurile de izomorfism de grupuri abeliene cu 1352 elemente.

**Exercițiul 3.** Fie polinomul $f = X^4 - 6X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(1) Arătați că $f$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.
(2) Calculați inversul elementului $a+2$ în $\mathbb{Q}(a)$ (în funcție de baza $\{1, a, a^2, a^3\}$ a lui $\mathbb{Q}(a)$ peste $\mathbb{Q}$).

Păun Liviu-Dumitru
Grupa 222

9,7 p

# Test la Algebră IV
~5 mai 2022~
Nr 2

2,7p **Exc 1.** Fie $L = \langle (1,1,1), (1,-1,-7), (-1,-3,9), (1,3,3) \rangle \leq_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^3$
rang(L)=? Găsiți o bază în L.

Fie $h = (h_1\ h_2\ h_3\ h_4)^T$ o bază în $L$
$e = (e_1\ e_2\ e_3)^T$ baza can în $\mathbb{Z}^3$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -7 \\ -1 & -3 & 9 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Diagonalizăm matricea $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{Z})$

$$A \xrightarrow[\substack{T_{31}(1)\cdot \\ T_{41}(-1)\cdot}]{T_{21}(-1)\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdot T_{13}(-1)]{\cdot T_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[T_{42}(1)\cdot]{T_{32}(-1)\cdot}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot T_{23}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{43}(3)\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D \xrightarrow{P_{34}\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

$1 \mid (-2) \mid 18$ ✓ $\Rightarrow d_1 = 1 \quad d_2 = -2 \quad d_3 = 18$

$$D = \underbrace{T_{43}(3) \cdot T_{32}(-1) \cdot T_{42}(1) \cdot T_{21}(-1) \cdot T_{31}(1) \cdot T_{41}(-1)}_{U \in GL_4(\mathbb{Z})} \cdot A \cdot \underbrace{T_{12}(-1) \cdot T_{13}(-1) \cdot T_{23}(-4)}_{V \in GL_3(\mathbb{Z})}$$

$$\left.\begin{aligned} D = UAV &\Rightarrow A = U^{-1} D V^{-1} \\ Ae &= h \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cancel{UAVe = h} \Rightarrow U^{-1} D V^{-1} e = h \Rightarrow D V^{-1} e = U h$ ; 2)

a

1.

Notez $V^{-1} e = f \in \mathbb{Z}^3$

propr. matricelor elem.

$$V^{-1} = (T_{12}(-1) \cdot T_{13}(-1) \cdot T_{23}(-4))^{-1} = T_{23}(+4) \cdot T_{13}(+1) \cdot T_{12}(+1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_{13}(+1) \cdot T_{12}(+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_{12}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Atunci:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 - e_3 \\ f_2 = e_2 + 4e_3 \\ f_3 = e_3 \end{cases}$$

Așadar, o bază este $\langle (1,-1,-1), (0,1,4), (0,0,1) \rangle$ a lui $L$

Altă bază este $d_i f_i$ $i = \overline{1,3}$ $\langle d_1 f_1, d_2 f_2, d_3 f_3 \rangle =$

$= \langle f_1, -2 f_2, 18 f_3 \rangle$

$\text{rang}(L) = 3$

2) Precizați tipurile de izomorfism de grupuri abeliene cu 1352 elemente.

5p 1. Îl descompunem pe 1352 în factori primi

| | |
|---|---|
| 1352 | 2 |
| 676 | 2 |
| 338 | 2 |
| 169 | $13^2$ |

$1352 = 2^{(3)} \cdot 13^2$ => poate avea cel mult 3 factori invarianți

i) Un factor invariant

$d_1 = 1352$ => $G \simeq \mathbb{Z}_{1352}$

ii) Doi factori invarianți

$\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_2 = 2^2 \cdot 13^2 \end{cases}$ => $G \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{676}$

$\begin{cases} d_1 = 2 \cdot 13 \\ d_2 = 2^2 \cdot 13 \end{cases}$ => $G \simeq \mathbb{Z}_{26} \oplus \mathbb{Z}_{52}$

$\begin{cases} d_1 = 13 \\ d_2 = 2^3 \cdot 13 \end{cases}$ => $G \simeq \mathbb{Z}_{13} \oplus \mathbb{Z}_{104}$

iii) Trei factori invarianți

$\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_2 = 2 \\ d_3 = 2 \cdot 13^2 \end{cases}$ => $G \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{338}$

$\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_2 = 2 \cdot 13 \\ d_3 = 2 \cdot 13 \end{cases}$ => $G \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{26} \oplus \mathbb{Z}_{26}$

Deci, există 6 tipuri de izomorfism de grupuri abeliene cu 1352 elem.

Exc 3, Fie polinomul $f = X^4 - 6X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$

3p 1) Arătați că $f$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$

Observăm că $f$ este 2-Eisenstein întrucât

$$\left.\begin{array}{l} 2 \mid -2, -6 \\ 2 \nmid 1 \\ 2^2 \nmid -2 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ este ired. în } \mathbb{Q}[X]$$

2) Calculați inversul elementului $a+2$ în $\mathbb{Q}(a)$ (în fct de baza $\{1, a, a^2, a^3\}$ a lui $\mathbb{Q}(a)$ peste $\mathbb{Q}$), $a$ răd lui $f$

$(a+2)^{-1} = ?$ în $\mathbb{Q}(a)$

Cum $f$ este monic (coef termenului dominant $=1$) și este ireductibil cf 1) $\Rightarrow f$ este polinomul minimal pt $\mathbb{Q}(a) \Rightarrow (*)$

~~$\Rightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow a^4 - 6a - 2 = 0$~~

~~$a^4 = 6a + 2 = 2(3a+1)$~~

$(*) \Rightarrow [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 4 = \text{grad } f$

$f(a) = a$ cum $a$-răd $\Rightarrow a^4 - 6a - 2 = 0$

$a^4 = 6a + 2 = 2(3a+1)$

Vrem să găsim $(a+2)^{-1}$

Fie $(a+2)(x + ya + za^2 + wa^3) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+2)^{-1} = x + ya + za^2 + wa^3$ cu $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$

Desfacem parantezele:

$$\left.\begin{array}{l} ax + ya^2 + za^3 + wa^4 + 2x + 2ya + 2za^2 + 2wa^3 = 1 \\ \text{Știm că } a^4 = 6a + 2 = 2(3a+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow ax + ya^2 + za^3 + 2w(3a+1) + 2x + 2ya + 2za^2 + 2wa^3 = 1$

$(z + 2w)a^3 + (y + 2z)a^2 + (x + 6w + 2y)a + 2x + 2w = 1$

Ajungem la următorul sistem:

$$\begin{cases} z+2w=0 & \mid\cdot(-2) \\ y+2z=0 \\ x+2y+6w=0 \\ 2x+2w=1 \end{cases} \Big\}(+) \Rightarrow y-4w=0$$

$$\begin{cases} y-4w=0 & \mid\cdot(-2) \\ x+2y+6w=0 \\ 2x+2w=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y+8w=0 \\ x+2y+6w=0 \\ 2x+2w=1 \end{cases} \Big\}\overset{(+)}{\Rightarrow} x+14w=0 \quad \mid\cdot(-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x-28w=0 \\ 2x+2w=1 \quad (+) \end{cases}$$

$$-26w=1 \Rightarrow w=-\frac{1}{26}$$

Revenim în ec. inițiale:

$z+2w=0 \Leftrightarrow z-\frac{1}{13}=0 \Rightarrow z=\frac{1}{13}$

$y+2z=0 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{13}$

$2x+2w=1 \Leftrightarrow 2x=\overset{13}{1}+\frac{1}{13} \Rightarrow x=\frac{7}{13}$

Așadar, am găsit polinomul $\frac{7}{13}-\frac{2}{13}a+\frac{1}{13}a^2-\frac{1}{26}a^3=(a+2)^{-1}$

Verificare:

$\left(\frac{7}{13}-\frac{2}{13}a+\frac{1}{13}a^2-\frac{1}{26}a^3\right)(a+2)=\frac{7}{13}a-\cancel{\frac{2}{13}a^2}+\cancel{\frac{1}{13}a^3}-\frac{1}{26}a^4+\frac{14}{13}-\frac{4}{13}a+\cancel{\frac{2}{13}a^2}-\cancel{\frac{a^3}{13}}$

$=\frac{3}{13}a+\frac{14}{13}-\frac{1}{\cancel{26}_{13}}\cdot\cancel{2}(3a+1)=\cancel{\frac{3}{13}a}+\frac{14}{13}-\cancel{\frac{3}{13}a}-\frac{1}{13}=1$ ☒