Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

28 ianuarie 2021, 11:00–13:30

NUME:	....
PRENUME:	....
GRUPA:	....

INSTRUCŢIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
3. Pe prima pagină a rezolvării fiecarei probleme, vor fi scrise **cu litere de tipar** `numele şi prenumele studentului, precum şi grupa acestuia.`
4. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
5. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 11:00–13:30.**
6. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email:
   - ca fişier PDF, împreună cu fişierul cu subiectele examenului la adresa `andreea.grecu@fmi.unibuc.ro` (Drd. Andreea GRECU);
   - vor avea următoarea **linie de subiect**: `Examen AnNum - Nume si prenume student, Grupa 3XX`
7. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **joi, 28 ianuarie 2021, orele 14:00.**

Analiză Numerică
Examen – Anul III – Subiectul#2

I. Care este viteza de convergenţă a metodei Newton-Raphson pentru determinarea rădăcinii $x^* = 2$ a următoarelor ecuaţii neliniare:

(a) $f(x) := (x-1)(x-2)^2 = 0\,,\ x \in [1,3]$;
(b) $f(x) := (x-1)^2(x-2) = 0\,,\ x \in [1,3]$?

II. Fie nodurile de interpolare $x_j = j$, $j = \overline{0,3}$. Dacă

$$P_{0,1}(x) = x + 1\,, \qquad P_{1,2}(x) = 3x - 1\,, \qquad P_{1,2,3}(1,5) = 4\,, \tag{1}$$

să se determine $P_{0,1,2,3}(1,5)$.

III. Determinaţi formula de aproximare cu diferenţe finite descendente de ordin $\mathsf{O}(h^2)$ pentru $f'(x)$ şi eroarea aproximării folosind polinomul de interpolare Lagrange corespunzător asociat lui f.

IV. Determinaţi cea mai bună aproximare polinomială $p_2 \in \mathbb{P}_2$ a funcţiei x^3 în raport cu $\|\cdot\|_{2,w}$, unde ponderea este dată de $w : (0,2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = x$.

CĂBĂLĂU
RĂZVAN
GRUPA 312

28/01/2021

EXAMEN ANALIZĂ NUMERICĂ

II. Fie nodurile de interpolare $x_j = j$, $j = \overline{0,3}$.

Dacă $P_{0,1}(x) = x+1$

$P_{1,2}(x) = 3x-1$

$P_{1,2,3}(1,5) = 4$

Să se determine $P_{0,1,2,3}(1,5)$

$f(x_0) = P_{0,1}(x_0) = x_0+1$

$f(x_1) = P_{0,1}(x_1) = x_1+1$

$= P_{1,2}(x_1) = 3x_1-1$

$\Rightarrow x_1+1 = 3x_1-1$

$-2x_1 = -2$

$\boxed{x_1 = 1}$

$f(x_2) = P_{1,2}(x_2) = 3x_2-1$

<u>Formula de recurență</u>

$x_0, \dots, x_n;$ $\forall k \geq 1$, $\forall x_0, \dots, x_k$, $\forall 0 \leq j \neq j \leq k$

Atunci $P_{0,\dots,k}(x) = \dfrac{1}{x_i - x_j} \cdot \begin{vmatrix} P_{0,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) & x-x_i \\ P_{0,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x) & x-x_j \end{vmatrix}$

$$P_{0,1,2,3}(x) = \frac{1}{x_0 - x_3} \begin{vmatrix} P_{0,1,2}(x) & x - x_0 \\ P_{1,2,3}(x) & x - x_3 \end{vmatrix}$$

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_0 - x_2} \cdot \begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x - x_0 \\ P_{1,2}(x) & x - x_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_2} \begin{vmatrix} x+1 & x - x_0 \\ 3x-1 & x - x_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_2} \cdot \left[(x+1)(x-x_2) - (x-x_0)(3x-1) \right]$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_2} \left(x^2 - x x_2 + x - x_2 - 3x^2 + x + 3x x_0 - x_0 \right)$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_2} \left(-2x^2 - x x_2 + 2x - x_2 - x_0 + 3x x_0 \right)$$

$$P_{1,2,3}(x) = \frac{1}{x_1 - x_3} \cdot \begin{vmatrix} P_{1,2}(x) & x - x_1 \\ P_{2,3}(x) & x - x_3 \end{vmatrix}$$

CĂBĂLĂU
RĂZVAN
GRUPA 312

$$P_{1,2,3}(x) = \frac{1}{x_1 - x_3} \cdot \begin{vmatrix} 3x-1 & x-x_1 \\ P_{2,3}(x) & x-x_3 \end{vmatrix}$$

$P_{1,2,3}(1,5) = 4$.

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_0 - x_2}\left(-2x^2 - x x_2 + 2x - x_2 - x_0 + 3x x_0\right)$$

$$P_{0,1,2}(1,5) = \frac{1}{1-5}\left(-2x^2 - x \cdot 5 + 2x - 5 - 1 + 3x\right)$$

$$= \frac{1}{-4}\left(-2x^2 \cancel{-5x} \cancel{+2x} - 6 \cancel{+3x}\right)$$

$$= \frac{-2x^2 - 6}{-4}$$

$$= \frac{-\cancel{2}(x^2+3)}{-4} = \frac{x^2+3}{2}$$

$$P_{1,2,3}(1,5) = \begin{vmatrix} \frac{x^2+3}{2} & x-1 \\ 4 & x-5 \end{vmatrix} = \frac{x^2+3}{2} \cdot (x-5) - 4x + 4$$

$$\frac{(x^2+3)(x-5)}{2} - \overset{2}{(4x+4)} = x^3 - 5x^2 + 3x - 15 - 8x + 8$$

$$= \underline{x^3 - 5x^2 - 5x - 7}$$

CĂBĂLĂU
RĂZVAN
312

III. Determinați formula de aproximare cu diferențe finite descendente de ordin $O(h^2)$ pentru $f'(x)$ și eroarea aproximării folosind Polinomul Lagrange coresp. asociat lui f.

Fie $f \in C^2[a,b]$, $\exists f'''(\xi)$, $\forall \xi \in (a,b)$

• Teorema lui Taylor pentru $h>0$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(\xi_+)\frac{h^3}{6}, \quad \xi_+ \in [x, x+h]$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(\xi_-)\frac{h^3}{6}, \quad \xi_- \in [x-h, x]$$

Obținem:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + [f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)]\frac{h^3}{6} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} [f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)]\frac{h^2}{12}$$

Cum $f \in C^3[a,b]$, $f''' \in C[a,b]$ și deci

$$\exists\ m := \min_{x \in [a,b]} |f'''(x)|$$

$$\exists\ M := \max_{x \in [a,b]} |f'''(x)| :$$

$$m \le f'''(\xi) \le M,$$

$$\left.\begin{array}{l} m \le \frac{1}{2}\left[f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-) \right] \le M \\ f''' \in C[a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\exists\ \xi \in [a,b],\ f'''(\xi) = \frac{1}{2}\left[f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)\right]$$

Și obținem:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{6} h^2$$

cu $\xi \in [a,b]$

• Eroarea de trunchiere: $|e_t(x)| \le \frac{\|f'''\|_\infty}{6} h^2 = O(h^2).$

CABĂLĂU
RĂZVAN
312

I. Care este viteza de convergentă a metodei Newton Raphson pentru deter. rădăcinii $x^* = 2$ a următoarelor ecuații neliniare:

(a) $f(x) := (x-1)(x-2)^2 = 0, \quad x \in [1,3]$

(b) $f(x) := (x-1)^2(x-2) = 0, \quad x \in [1,3]$?

a) $$x^* \simeq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} =: x_1$$

$$f'(x_0) = \left((x_0-1)(x_0-2)^2\right)' = \left((x_0-1)(x_0^2-4x_0+4)\right)'$$

$$\cancel{= x^2 - 2x - x + 2)}$$

$$= (x_0^3 - 2x_0^2 + 2x_0 - x_0^2 + 4x_0 - 4)'$$

$$= (x_0^3 - 3x_0^2 + 6x_0 - 4)'$$

$$= 3x_0^2 - 6x_0 + 6$$

$$\cancel{x^* = x_0 - \frac{}{3x_0^2 - 6x_0 + 4}}$$

$$2a = x_0 - \frac{(x_0-1)(x_0-2)^2}{3x_0^2 - 6x_0 + 6}$$

$$2a = \frac{3x_0^2-6x_0+6}{\cancel{x_0}} - \frac{x_0^3 - 3x_0^2 + 6x_0 - 4}{3x_0^2 - 6x_0 + 6} \iff$$

$$\cancel{2a = \frac{3x_0^3 - 6x_0^2 + 4x_0 - x_0^3 + 3x_0^2 - 4x_0 + 2}{3x_0^2 - 6x_0 + 4}}$$

$$2a = \frac{2x_0^3 - 3x_0^2 + 4}{3x_0^2 - 6x_0 + 4}$$

$\Rightarrow$ converge către x^* cu viteza de convergență cel puțin pătratică.

b) $f(x) := (x-1)^2(x-2) = 0, \quad x \in [1,3]$

$$f'(x) = ((x^2-2x+1)(x-2))'$$

$$= (x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + x - 2)'$$

$$= (x^3 - 4x^2 + 5x - 2)'$$

$$= 3x^2 - 8x + 5$$

$3x_0^2-8x_0+5$

$$2a = x_0 - \frac{x_0^3 - 4x_0^2 + 5x_0 - 2}{3x_0^2 - 8x_0 + 5}$$

$$2a = \frac{3x_0^3 - 8x_0^2 + 5x_0 - x_0^3 + 4x_0^2 + 5x_0 + 2}{3x_0^2 - 8x_0 + 5}$$

$$2a = \frac{2x_0^2 - 4x_0^2 + 2}{3x_0^2 - 8x_0 + 4}$$

=> Converge către x^* cu viteza de convergență cel puțin pătratică.

$$e_n := x^* - x_n = 2a - \frac{2x_0^2 - 4x_0^2 + 2}{3x_0^2 - 8x_0 + 4}$$

IV.

CĂBĂLĂU RĂZVAN
GRUPA 312

Determinați cea mai bună aproximare polinomială $p_2 \in \mathbb{P}_2$ a funcției x^3 în raport cu $\|\cdot\|_{2,w}$, unde ponderea este dată de $w : (0,2) \to \mathbb{R}$, $w(x) = x$

Problema celor mai mici pătrate.

$f \in L^2_w(0,2)$ și $n \in \mathbb{N}$,

Să se determine $P_2 \in \mathbb{P}_2$ a.î.

$$\|f - P_2\|_{2,w} = \inf_{g \in \mathbb{P}_2} \|f - g\|_{2,w}$$

$$\|e\|^2_{2,w} := \|f - P_2\|^2_{2,w} = \int_0^2 (f(x) - P_n(x))^2 dx$$