Cursul 1

1 Bibliografie

minimală: curs + seminar

uzuală:

1. A.C., Elemente de teoria ecuaţiilor diferenţiale, Editura Universităţii din Bucureşti, 2010.
2. Şt. Mirică, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale I, II*, Ed. Universităţii Bucureşti, 1999.
3. I. I. Vrabie, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 1999.
4. A. Halanay, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.
5. V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Junimea, Iaşi, 1985.

exerciţii:

1. Şt. Mirică, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale III*, Ed. Universităţii Bucureşti, 1999.
2. Gh. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989.
3. I. A. Rus, Gh. Micula, P. Pavel, B. Ionescu, *Probleme de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

2 O scurtă introducere

2.1 Obiectul teoriei ecuaţiilor diferenţiale

Definiţia 1. Dacă $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie dată, vom spune că $f(.,.)$ defineşte obiectul matematic, numit *ecuaţie diferenţială*,

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \tag{1}$$

O funcţie $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, se numeşte *soluţie a ecuaţiei diferenţiale* (1) dacă $\varphi(.)$ este derivabilă, graficul lui $\varphi(.)$, definit prin $Graph(\varphi) = \{(t, \varphi(t)), t \in I\}$ este conţinut în D şi dacă $\varphi(.)$ verifică identitatea

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I. \tag{2}$$

Funcţia $f(.,.)$ care defineşte ecuaţia differenţială se mai numeşte *câmp vectorial* (sau *câmp de vectori*).

Simbolul matematic care descrie ecuaţia diferenţială (1) are şi alte formulări; ca de exemplu

$$x' = f(t,x), \quad \dot{x} = f(t,x) \tag{3}$$

Cum orice bază din $\mathbf{R}^n$ introduce un sistem de coordonate pe $\mathbf{R}^n$, dacă $x \in \mathbf{R}^n$ are componentele $x_i, i = 1, 2, ..., n$ şi $f_i(.,.), i = 1, 2, ..., n$ sunt componentele lui $f(.,.)$ atunci ecuaţia diferenţiala (1) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, ..., x_n) \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{4}$$

iar formularea (4) se mai numeşte un *sistem de ecuaţii diferenţiale* (pe $\mathbf{R}$) de dimensiune n. Corespunzător, o soluţie a sistemului (4) este o funcţie $\varphi(.) = (\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ derivabilă care verifică

$$\varphi_i'(t) = f_i(t, (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))) \quad \forall t \in I, \forall i = 1, 2, ..., n.$$

În terminologia clasică a ecuaţiilor diferenţiale $x \in \mathbf{R}^n$ poartă denumirea de *variabilă dependentă* sau *variabilă de stare*, iar $t \in \mathbf{R}$ se numeşte *variabilă independentă* sau *variabilă temporală*.

Unele exemple au condus la egalităţi de altă natură decât cea din (1); mai precis, la egalităţi în care apar derivate de ordin superior.

Dacă $F : D \subset \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată vom spune că F defineşte *ecuaţia diferenţială de ordinul n (sub forma implicită).*

$$F(t, x, x', x'', ..., x^{(n)}) = 0. \tag{5}$$

O funcţie $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de n ori derivabilă care verifică

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n)}(t)) \in D \quad \forall t \in I,$$

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

se numeşte soluţie a ecuaţiei (5).

În anumite condiţii de regularitate asupra funcţiei F (cerute de aplicarea teoremei funcţiilor implicite), ecuaţia (5) poate fi rescrisă sub forma

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}), \tag{6}$$

unde $f : D \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$.

Ecuaţia (6) poartă denumirea de *formă normală* sau *formă explicită.*

Mulţimea tuturor soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale se numeşte *soluţia generală* a ecuaţiei.

Un studiu teoretic complet pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul n se poate face doar pentru ecuaţii explicite de forma (6); această ecuaţie fiind echivalentă într-un anumit sens care va fi precizat ulterior cu sistemul canonic asociat

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{7}$$

În acest fel, studiul ecuaţiei (6) se reduce la studiul unei ecuaţii de tipul (1) (sau, echivalent, la studiul unui sistem de ecuaţii diferenţiale de tipul (4)). Din acest motiv, în cele ce urmează ne vom ocupa numai de studiul ecuaţiei (1), precizând când este cazul cum se transcriu rezultatele obţinute pentru ecuaţia (1) la cazul ecuaţiilor (6).

Ori de câte ori funcţia $f(.,.)$ din (1) nu depinde explicit de t, ecuaţia (1) se numeşte *autonomă*. În caz contrar, ecuaţia (1) se numeşte *neautonomă*.

Trebuie menţionat faptul că, de la bun început (prin Definiţia 1) am înţeles prin soluţie a ecuaţiei (1) o funcţie care verifică ecuaţia (i.e. egalitatea

(2)) pentru orice t din I. În teoria modernă a ecuaţiilor diferenţiale mai apar concepte de soluţii care verifică ecuaţia, fie, pentru toţi t din $I \backslash E$ unde E este o mulţime de excepţie (E poate fi finită, numărabilă, de măsură nulă etc), fie într-un sens generalizat în care nu se cere verificarea egalităţii în nici măcar un punct. Toate aceste tipuri de soluţii sunt legate, evident, de clasa de funcţii în care căutăm ,,soluţiile". În acelaşi timp această clasă de soluţii depinde în mod esenţial de regularitatea câmpului vectorial.

2.2 Motivaţie

- Din punct de vedere *strict matematic* este o continuare naturală a cusului de Analiză Matematică (pe $\mathbf{R}^n$)

- A dat răspusuri la probleme concrete apărute în alte domenii: mecanică, astronomie, geometrie etc..

2.3 Un exemplu (Legea a II-a a lui Newton)

$$F = m.a$$

$x(t)$ - starea unui sistem fizic la momentul t
$v(t) = x'(t)$ - viteza de schimbare a stării
$a(t) = x"(t)$ - acceleraţia
Experimental se constantă ca forţa este o funcţie $(x, x') \to F(x, x')$

$$mx"(t) = F(x(t), x'(t)), \qquad x" = \frac{1}{m}F(x, x').$$

2.4 Obiective

O primă problemă pe care o studiem este aceea a *existenţei soluţiilor*; anume în ce ipoteze asupra funcţiei $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ ecuaţia (1) are cel puţin o soluţie ?

După ce s-a dat răspuns la problema existenţei soluţiilor apare în mod natural problema *unicităţii soluţiilor*; adică cum trebuie să fie funcţia $f(.,.)$ şi ce fel de condiţii suplimentare trebuie adăugate astfel încât dacă ecuaţia (1) are soluţii acestea sunt unice ?

O a treia problemă fundamentală în teoria ecuaţiilor diferenţiale, care poartă denumirea generică de *teoria calitativă a ecuatiilor diferenţiale*, constă în studiul diverselor proprietăţi ale soluţiilor ecuaţiei diferenţiale în absenţa unor formule explicite pentru aceste soluţii. Dintre acestea menţionăm: problema prelungirii soluţiilor, determinarea intervalului pe care o anumită soluţie este definită, dependenţa soluţiilor de datele iniţiale sau parametrii (continuă, diferenţiabilă etc), problema comportării soluţiilor ne-prelungibile la capetele intervalului maxim de definiţie, studiul comportării soluţiilor pentru t tinzând la ∞.

O altă problemă esenţială, mai ales în zona aplicativă a ecuaţiilor diferenţiale, este aceea a *determinării efective a soluţiilor*. Această problemă comportă două aspecte: pe de o parte este vorba de aşa-numitele ,,ecuaţii integrabile prin cuadraturi", adică ecuaţii ale căror soluţii pot fi exprimate ca primitive de funcţii continue; pe de altă parte, atunci când ecuaţiile nu sunt integrabile prin cuadraturi, se urmăreşte determinarea de soluţii aproximative, obţinute utilizând tehnici de analiză numerică.

3 Ecuaţii integrabile prin metode elementare

Vom prezenta mai multe tipuri de ecuaţii diferenţiale ale căror soluţii pot fi determinate prin operaţii de integrare a unor funcţii cunoscute. Cum integrarea funcţiilor reale de variabilă reală mai poartă denumirea şi de cuadratură, aceste ecuaţii poartă numele de ecuaţii rezolvabile (integrabile) prin cuadraturi.

Exemplul cel mai simplu de astfel de ecuaţie este dat de ecuaţia

$$x' = f(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

unde $f(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă. Evident, soluţia sa se obţine găsind primitivele funcţiei continue $f(.)$.

I. Ecuaţii diferenţiale scalare ($n = 1$)

Ecuaţii cu variabile separabile.

Dacă $I, J \subset \mathbf{R}$ sunt două intervale deschise nevide, $a(.) : I \to \mathbf{R}$, $b(.) : J \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue atunci *ecuaţiile cu variabile separabile* au forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x) \tag{1}$$

Propoziţia 1. (Structura soluţiilor) *Fie* $a(.) : I \to \mathbf{R}$, $b(.) : J \to \mathbf{R}$ *continue care definesc ecuaţia (1).*

a) Dacă $x_0 \in J$ *este astfel încât* $b(x_0) = 0$ *atunci* $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) \equiv x_0$ *este soluţie (staţionară) a ecuaţiei.*

b) Dacă $A(.) : I \to \mathbf{R}$ *este o primitivă a funcţiei* $a(.)$ *şi* $B(.) : J_0 = \{x \in J; b(x) \neq 0\} \to \mathbf{R}$ *este o primitivă a funcţiei* $\frac{1}{b(.)}|_{J_0}$ *atunci o funcţie continuă* $\varphi(.) : I_1 \subset I \to J_0$, I_1 *interval, este soluţie a ecuaţiei dacă şi numai dacă există* $c \in \mathbf{R}$ *astfel încât*

$$B(\varphi(t)) \equiv A(t) + c.$$

Demonstraţie. Exerciţiu!

Propoziţia 2. („Lipirea" soluţiilor) *Fie* $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *continuă care defineşte ecuaţia* $x' = f(t,x)$. *Dacă* $\varphi_1(.) : [a,b] \to J, \varphi_2(.) : (b,c) \to J$ *sunt soluţii astfel încât* $\varphi_1(t) \equiv x_0 \in J$ *şi* $\lim_{t\searrow b} \varphi_2(t) = x_0$, *atunci funcţia*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in [a,b] \\ \varphi_2(t), & t \in (b,c) \end{cases}$$

este, de asemenea, soluţie.

Demonstraţie. Exerciţiu!

Propoziţia 3. (Existenţa şi unicitatea locală a soluţiilor) *Dacă* $a(.) : I \to \mathbf{R}$, $b(.) : J \to \mathbf{R}$ *sunt continue şi definesc ecuaţia (1) atunci*

a) $\forall (t_0, x_0) \in I \times J$, *există* $I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ *o vecinătate a lui* t_0 *şi există* $\varphi(.) : I_0 \to J$ *soluţie a ecuaţiei (1) astfel încât* $\varphi(t_0) = x_0$.

b) $\forall (t_0, x_0) \in I \times J_0$, *există* $I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ *o vecinătate a lui* t_0 *şi există în mod unic* $\varphi(.) : I_0 \to J_0$ *soluţie a ecuaţiei (1) astfel încât* $\varphi(t_0) = x_0$.

Demonstraţie. Exerciţiu!

Algoritm.

1. Rezolvă ecuaţia algebrică $b(x) = 0$ cu rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n, ...$
Scrie soluţiile staţionare $\varphi_1(t) \equiv x_1, \varphi_2(t) \equiv x_2, ..., \varphi_n(t) \equiv x_n, ...$
2. Pe J_0

a) ,,separă" variabilele $\frac{dx}{b(x)} = a(t)dt$

b) integrează $\int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)dt$

c) scrie ,,soluţia generală" sub forma implicită $B(x) = A(t) + c$, $c \in \mathbf{R}$

d) inversează (dacă este posibil) şi scrie ,,soluţia generală" sub forma explicită $x = \varphi(t, c)$

Ecuaţii liniare scalare.

O clasă particulară importantă de ecuaţii cu variabile separabile este aceea a *ecuaţiilor liniare scalare*, de forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x, \tag{2}$$

unde $a(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este continuă, iar $I \subset \mathbf{R}$ este interval.

Rezultatele de la ecuaţii cu variabile separabile pot fi îmbunătăţite, după cum urmează.

Propoziţia 4. (Structura soluţiilor) *Dacă $A(.)$ este o primitivă a funcţiei continue $a(.)$ atunci $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (2) dacă şi numai dacă $\exists c \in \mathbf{R}$ astfel încât*

$$\varphi(t) = ce^{A(t)}, \quad t \in I.$$

Demonstraţie. Exerciţiu!

Propoziţia 5. (Existenţa şi unicitatea globală a soluţiilor) *Dacă funcţia $a(.) : I \to \mathbf{R}$ este continuă atunci $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}$, $\exists! \varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ soluţie a ecuaţiei (2) astfel încât $\varphi(t_0) = x_0$. Mai precis,*

$$\varphi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \quad t \in I.$$

Demonstraţie. Exerciţiu!

Ecuaţii afine scalare.

Ecuaţiile diferenţiale afine scalare sunt de forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \tag{3}$$

unde $a(.), b(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt continue, iar $I \subset \mathbf{R}$ este interval.

Oricărei ecuaţii afine i se ataşează *ecuaţia liniară asociată*

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = a(t)\overline{x}; \tag{4}$$

aceasta jucând un rol esenţial în integrarea ecuaţiilor afine, dupa cum se vede din afirmaţia următoare care poartă denumirea de *principiul variaţiei constantelor (al lui Lagrange).*

Propoziţia 6. (Principiul variaţiei constantelor) *Dacă* $a(.), b(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *sunt continue şi dacă* $A(.)$ *este o primitivă a lui* $a(.)$*, atunci* $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ *este soluţie a ecuaţiei (3) dacă şi numai dacă* $\exists c(.)$ *o primitivă a funcţiei* $t \to e^{-A(t)}b(t)$ *astfel încât*

$$\varphi(t) = c(t)e^{A(t)}, \quad t \in I.$$

Demonstraţie. Exerciţiu!

Propoziţia 7. (Existenţa şi unicitatea globală a soluţiilor) *Dacă* $a(.), b(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *sunt continue, atunci* $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}$, $\exists! \varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ *soluţie a ecuaţiei (3) astfel încât* $\varphi(t_0) = x_0$. *Mai precis,*

$$\varphi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} b(s)ds, \quad t \in I.$$

Demonstraţie. Exerciţiu!

Algoritm. (Metoda variaţiei constantelor)

1. Consideră ecuaţia liniară asociată

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = a(t)\overline{x}$$

şi scrie ,,soluţia generală" $\overline{x}(t) = ce^{A(t)}$, $c \in \mathbf{R}$.

2. Pune condiţia ca $x(t) = c(t)e^{A(t)}$ să fie soluţie a ecuaţiei afine.
3. Obţine $c'(t) = e^{-A(t)}b(t)$; determină pe $c(.)$, apoi pe $x(.)$.

Ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli.

Dacă $\alpha \in \mathbf{R}$ şi $a(.), b(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue acestea definesc *ecuaţia diferenţială de tip Bernoulli*

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^{\alpha}. \tag{5}$$

Metoda variaţiei constantelor de la ecuaţii afine poate fi utilizată şi pentru integrarea ecuaţiilor Bernoulli.

Propoziţia 9. (Principiul variaţiei constantelor) *Dacă $a(.), b(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt continue şi dacă $A(.)$ este o primitivă a lui $a(.)$, atunci $\varphi(.) : I_1 \subset I \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (5) dacă şi numai dacă $\exists c(.) : I_1 \to \mathbf{R}$ soluţie a ecuaţiei cu variabile separabile*

$$\frac{dc}{dt} = e^{(\alpha-1)A(t)}b(t)c^{\alpha},$$

astfel încât

$$\varphi(t) = c(t)e^{A(t)}, \quad t \in I_1.$$

Demonstraţie. Exerciţiu!

Algoritm. (Metoda variaţiei constantelor)

1. Consideră ecuaţia liniară asociată

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = a(t)\overline{x}$$

şi scrie ,,soluţia generală” $\overline{x}(t) = ce^{A(t)}$, $c \in \mathbf{R}$.

2. Pune condiţia ca $x(t) = c(t)e^{A(t)}$ să fie soluţie a ecuaţiei Bernoulli.
3. Obţine ecuaţia cu variabile separabile $\frac{dc}{dt} = e^{(\alpha-1)A(t)}b(t)c^{\alpha}$.
4. Determină pe $c(.)$ (vezi algoritm), apoi pe $x(.)$.

Ecuaţii diferenţiale de tip Riccati.

O *ecuaţie de tip Riccati* este de forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \tag{6}$$

unde $a(.), b(.), c(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt continue, iar $I \subset \mathbf{R}$ este interval.

În general o ecuaţie de tip Riccati nu poate fi rezolvată prin cuadraturi în afară de situaţia în care se poate pune în evidenţa o soluţie particulară a sa.

Propoziţia 10. *Fie $a(.), b(.), c(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue şi $\varphi_0(.) : I \to \mathbf{R}$ o soluţie a ecuaţiei (6). Atunci $\varphi(.) : I_1 \subset I \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (6) dacă şi numai dacă $y(t) := \varphi(t) - \varphi_0(t), t \in I_1$ este soluţie a ecuaţiei Bernoulli*

$$\frac{dy}{dt} = (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))y + a(t)y^2.$$

Demonstraţie. Exerciţiu!

Algoritm.

1. Efectuează s.v. (schimbarea de variabilă) $y = x - \varphi_0(t)$ (i.e., pentru orice $x(.)$ soluţie a ecuaţiei Riccati s.v. defineşte o nouă funcţie după regula $y(t) = x(t) - \varphi_0(t)$) care conduce la ecuaţia Bernoulli

$$\frac{dy}{dt} = (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))y + a(t)y^2.$$

2. Determină pe $y(.)$ (vezi algoritm), apoi pe $x(.)$.

Ecuaţii omogene.

Se numeşte *ecuaţie diferenţială omogenă* o ecuaţie de forma

$$\frac{dx}{dt} = f(\frac{x}{t}), \tag{7}$$

unde $f(.) : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă dată.

Propoziţia 11. *Funcţia $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (7) dacă şi numai dacă funcţia definită prin $\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{t}, t \in I$ este soluţie a ecuaţiei cu variabile separabile*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t}.$$

Demonstraţie. Exerciţiu!

Algoritm.

1. Efectuează s.v. (schimbarea de variabilă) $y = \frac{x}{t}$ (i.e., pentru orice $x(.)$ soluţie a ecuaţiei (7) s.v. defineşte o nouă funcţie după regula $y(t) = \frac{x(t)}{t}$) care conduce la ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t}.$$

2. Determină pe $y(.)$ (vezi algoritm), apoi pe $x(.)$.

Cursul 2

Noţiuni fundamentale

Fie funcţia $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1}$$

şi fie $(t_0, x_0) \in D$.

Problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială (1) constă în găsirea unei soluţii $\varphi(.) : I_0 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ (vecinătate a lui t_0) a ecuaţiei diferenţiale care satisface condiţia iniţială $\varphi(t_0) = x_0$.

Vom spune, în acest caz, că $\varphi(.)$ este soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Condiţia iniţială $\varphi(t_0) = x_0$ mai poartă denumirea şi de condiţie Cauchy.

Definiţia 1. a) Spunem că ecuaţia diferenţială (1) (sau câmpul vectorial $f(.,.)$) admite *proprietatea de existenţa locală* (E.L.) a soluţiilor în $(t_0, x_0) \in D$ dacă $\exists I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ şi $\exists \varphi(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

b) Spunem că ecuaţia diferenţială (1) (sau câmpul vectorial $f(.,.)$) admite *proprietatea de existenţa globală* (E.G.) a soluţiilor în $(t_0, x_0) \in D$ dacă $D = I \times G$, $I \subset \mathbf{R}$ interval, $G \subset \mathbf{R}^n$ şi $\exists \varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

c) Spunem că ecuaţia diferenţială (1) (sau câmpul vectorial $f(.,.)$) admite *proprietatea de unicitate locală* (U.L.) a soluţiilor în (t_0, x_0) dacă pentru oricare două soluţii $\varphi(.) : I_1 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$, $\psi(.) : I_2 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ ale problemei (f, t_0, x_0) există $I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ astfel încât

$$\varphi(.)|_{I_0 \cap (I_1 \cap I_2)} = \psi(.)|_{I_0 \cap (I_1 \cap I_2)}.$$

d) Ecuaţia diferenţială (1) (sau câmpul vectorial $f(.,.)$) admite *proprietatea de unicitate globală* (U.G.) a soluţiilor în (t_0, x_0) dacă pentru oricare două soluţii $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n$, $\psi(.) : J \to \mathbf{R}^n$ ale problemei (f, t_0, x_0) avem

$$\varphi(.)|_{I \cap J} = \psi(.)|_{I \cap J}.$$

Înainte de a demonstra principalul rezultat privitor la existenţa locală a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale prezentăm un rezultat simplu care va fi utilizat frecvent pe parcursul acestui curs.

Propoziţia 2. (Ecuaţia integrală asociată unei ecuaţii diferenţiale) *Fie $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială (1). Atunci funcţia $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1) dacă şi numai dacă $\varphi(.)$ este continuă, $Graph(\varphi) \subset D$ şi $\varphi(.)$ verifică relaţia*

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) \quad \forall t, t_0 \in I. \tag{2}$$

Demonstraţie. Dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1), atunci $\varphi(.)$ este continuă (este chiar derivabilă), $Graph(\varphi) \subset D$ şi $\varphi(.)$ verifică

$$\varphi'(s) = f(s, \varphi(s)) \quad \forall s \in I.$$

Integrând egalitatea precedentă între t_0 şi t, din formula Leibnitz-Newton obţinem relaţia (2).

Reciproc, cum $\varphi(.)$ este continuă şi $t_0 \in I$ este astfel încât (2) are loc pentru orice $t \in I$, din relaţia (2) va rezulta că $\varphi(.)$ este derivabilă şi, deci, derivând, obţinem $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$, adică $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1). $\square$

În cele ce urmează vom prezenta celebra teoremă a lui Peano, care afirmă că orice ecuaţie diferenţială definită de un câmp vectorial continuu admite proprietatea de existenţă locală. Acest rezultat a fost demonstrat în 1890 de matematicianul italian Giuseppe Peano. Din numeroasele demonstraţii ale acestei teoreme am ales pe cea utilizând ,,şirul lui Tonelli", care pare a fi cea mai ,,scurtă", utilizând în acelaşi timp un minim de rezultate auxiliare de analiză matematică (i.e., teorema Arzela-Ascoli).

Teorema lui Peano. (E.L.) *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă care defineşte ecuaţia diferenţială (1). Atunci ecuaţia (1) admite proprietatea de existenţă locală a soluţiilor pe D.*

Demonstraţie. Considerăm $(t_0, x_0) \in D$ arbitrar.

Planul demonstraţiei.

1) $I_0 = [t_0 - a, t_0 + a]$, $a = ?$

2) Construirea unui şir de funcţii $\varphi_m(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$ egal (echi) mărginite şi egal (echi) uniform continue

3) Aplicarea teoremei Arzela-Ascoli din care se deduce există unui subşir $\varphi_{m_l}(.)$, uniform convergent la o funcţie continuă $\varphi(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$.

4) Demonstrarea faptului că $\varphi(.)$ este soluţia problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

1) Cum $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ este o mulţime deschisă, există $\delta, \gamma > 0$ astfel încât $D_0 = \overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\gamma(x_0) \subset D$ (unde, în general, $\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbf{R}^n; ||x - a|| \leq r\}$). Cum $f(.,.)$ este continuă şi $D_0 \subset D$ este compactă există $M \geq 0$ definit de $M = \max_{(t,x)\in D_0} ||f(t,x)||$.

Dacă $M = 0$, atunci $f(t,x) \equiv 0$ şi soluţia căutată este $\varphi_0(t) \equiv x_0$. Evident, ne interesează cazul în care $M > 0$. Fie

$$a = \min\{\delta, \frac{\gamma}{M}\}, \quad I_0 = [t_0 - a, t_0 + a].$$

2) Pentru $m \geq 1$ definim *şirul lui Tonelli*, $\varphi_m(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$, astfel:

$$\varphi_m(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [t_0 - \frac{a}{m}, t_0 + \frac{a}{m}] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds, & t \in [t_0 + \frac{a}{m}, t_0 + a] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t+\frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds, & t \in [t_0 - a, t_0 - \frac{a}{m}]. \end{cases} \tag{3}$$

Să observăm mai întâi că acest şir este bine definit. Acest lucru se va face prin inducţie relativ la intervalele de forma $[t_0 - \frac{la}{m}, t_0 + \frac{la}{m}]$, $l = 1, 2, ..., m$.

Pentru $l = 1$, $\varphi_m(t) \equiv x_0$, evident definit. Presupunem că $\varphi_m(.)$ este bine definit pentru $t \in [t_0 - \frac{la}{m}, t_0 + \frac{la}{m}]$, $l < m$ şi vom demonstra acelaşi lucru pentru $t \in [t_0 - \frac{(l+1)a}{m}, t_0 + \frac{(l+1)a}{m}]$. Fie, deci, $t \in [t_0 - \frac{(l+1)a}{m}, t_0 + \frac{(l+1)a}{m}]$. Să presupunem, de exemplu, că $t \in [t_0 - \frac{(l+1)a}{m}, t_0 - \frac{la}{m}]$. Prin urmare, $t + \frac{a}{m} \in [t_0 - \frac{la}{m}, t_0 - \frac{(l-1)a}{m}]$ şi în baza ipotezei de inducţie dacă $s \in [t_0, t + \frac{a}{m}]$ atunci $\varphi_m(s)$ este bine definită, deci şi $\varphi_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t+\frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds$ este bine definită.

Vom demonstra, în continuare, că şirul de funcţii $\varphi_m(.)$ este un şir egal marginit şi uniform echicontinuu.

Pentru prima parte vom arăta că $\varphi_m(t) \in \overline{B}_\gamma(x_0)$ $\forall t \in I_0, m \geq 1$, de unde vom avea imediat că

$$||\varphi_m(t)|| \leq ||\varphi_m(t) - x_0|| + ||x_0|| = \gamma + ||x_0||, \quad \forall t \in I_0, m \geq 1,$$

adică şirul este marginit de o constantă care nu depinde de t şi m. Demonstraţia se va face, din nou, prin inducţie relativ la intervalele de forma $[t_0 - \frac{la}{m}, t_0 + \frac{la}{m}]$, $l = 1, 2, ..., m$. Pentru $l = 1$, evident, $\varphi_m(t) \equiv x_0 \in \overline{B}_\gamma(x_0)$. Să presupunem afirmaţia adevărată pentru l şi o demonstrăm pentru $l + 1$. De data aceasta să presupunem că $t \in [t_0 + \frac{la}{m}, t_0 + \frac{(l+1)a}{m}]$, deci $t - \frac{a}{m} \in [t_0 + \frac{(l-1)a}{m}, t_0 + \frac{la}{m}]$ şi în baza ipotezei de inducţie $\varphi_m(s) \in \overline{B}_\gamma(x_0)$ $\forall s \in [t_0, t - \frac{a}{m}]$. Prin urmare

$$||\varphi_m(t) - x_0|| \leq |\int_{t_0}^{t-\frac{a}{m}} ||f(s, \varphi_m(s))||ds| \leq M|t - \frac{a}{m} - t_0| \leq$$

$$\leq M\frac{la}{m} \leq Ma \leq \gamma, \quad \forall t \in [t_0 + \frac{la}{m}, t_0 + \frac{(l+1)a}{m}].$$

Pentru a arăta că şirul $\{\varphi_m(.)\}$ este uniform echicontinuu vom demonstra (chiar mai tare) că

$$||\varphi_m(t') - \varphi_m(t'')|| \leq M|t' - t''| \quad \forall t', t'' \in I_0, m \geq 1.$$

Fie, aşadar, $t', t'' \in I_0$. Există mai multe posibilităţi, după cum t', t'' se găsesc în subintervalele $[t_0 - a, t_0 + \frac{a}{m}]$, $[t_0 - \frac{a}{m}, t_0 + \frac{a}{m}]$, $[t_0 + \frac{a}{m}, t_0 + a]$. Să admitem, de exemplu, că $t', t'' \in [t_0 + \frac{a}{m}, t_0 + a]$ (analog se tratează şi celelalte situaţii). Ţinând cont de definiţia lui $\varphi_m(.)$, de construcţia lui D_0 şi de faptul că $(s, \varphi_m(s)) \in D_0$ $\forall s \in I_0$ avem

$$||\varphi_m(t') - \varphi_m(t'')|| \leq |\int_{t'-\frac{a}{m}}^{t''-\frac{a}{m}} ||f(s, \varphi_m(s))||ds| \leq M|t' - t''|.$$

3) Teorema Arzela-Ascoli este un rezultat analog lemei lui Cesaro, care oferă un criteriu de compacitate în spaţiul funcţiilor continue definite pe un interval compact real cu valori în $\mathbf{R}^n$.

Cu $||.||$ vom nota norma euclidiană pe $\mathbf{R}^n$, fie $I := [a, b] \subset \mathbf{R}$ un interval şi fie $C(I, \mathbf{R}^n)$ spaţiul funcţiilor continue de la I la $\mathbf{R}^n$ înzestrat cu topologia convergenţei uniforme pe I. Reamintim că, norma care generează această topologie este definită de $d_C(f, g) := \sup\{||f(x) - g(x)||; \quad x \in I\}, \quad f, g \in C(I, \mathbf{R}^n)$.

O familie $\mathcal{A} \subset C(I, \mathbf{R}^n)$ se numeşte *relativ compactă* dacă orice şir de elemente din $\mathcal{A}$ are cel puţin un subşir convergent pe I.

O familie $\mathcal{A} \subset C(I, \mathbf{R}^n)$ se numeşte *uniform echicontinuă (sau egal uniform continuă)* pe I dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x, y \in I$ cu $|x-y| < \eta_\varepsilon$ are loc $d_C(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

O familie $\mathcal{A} \subset C(I, \mathbf{R}^n)$ se numeşte *egal mărginită* pe I dacă $\exists M > 0$ astfel încât pentru orice $f \in \mathcal{A}$ şi $t \in I$ avem $||f(t)|| \leq M$.

Teorema Arzela-Ascoli afirmă că dacă $\mathcal{A} \subset C(I, \mathbf{R}^n)$ este o familie uniform echicontinuă şi egal mărginită pe I, atunci $\mathcal{A}$ este relativ compactă.

Aşadar, putem aplica Teorema Arzela-Ascoli şi deducem că există un subşir, notat pentru simplitate tot cu, $\varphi_m(.)$, uniform convergent la o funcţie continuă $\varphi(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$.

4) Cum $\varphi_m(.) \to \varphi(.)$ uniform pe I_0, atunci din proprietăţile integralei avem, pe de o parte, faptul că

$$\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \quad \forall t \in I_0$$

şi pe de altă parte

$$||\int_{t}^{t \pm \frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds|| \leq M \frac{a}{m} \to 0;$$

rescriind formula (3) sub forma

$$\varphi_m(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [t_0 - \frac{a}{m}, t_0 + \frac{a}{m}] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds + \int_{t}^{t-\frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds, & t \in [t_0 + \frac{a}{m}, t_0 + a] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds + \int_{t}^{t+\frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds, & t \in [t_0 - a, t_0 - \frac{a}{m}] \end{cases}$$

şi trecând la limită în această ultimă egalitate cu $m \to \infty$, obţinem că $\varphi(.)$ verifică

$$\varphi(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,$$

care, în baza Propoziţiei 2 şi a faptului că $\varphi(t_0) = x_0$, implică că $\varphi(.)$ este soluţie a problemei (f, t_0, x_0). $\square$

Observaţia 3. Dacă $f(.,.)$ nu este continuă, atunci ecuaţia poate să nu admită proprietatea de existenţă locală a soluţiilor. De exemplu, dacă

$$f(t, x) = g(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t \in \mathbf{Q} \\ 1 & \text{dacă } t \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q} \end{cases}$$

atunci ecuaţia diferenţială $x' = f(t,x)$ nu are nici o soluţie pentru nici o conditie iniţială. (Exerciţiu !)

În acelaşi timp, există exemple în care, deşi funcţia care defineşte ecuaţia nu este continuă, totuşi ecuaţia să admită proprietatea de existenţă locală. Dacă

$$f(t,x) = g(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ 1 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

atunci ecuaţia $x' = f(t,x)$ are soluţie locală (care este chiar unică) pentru orice condiţie iniţială $(t_0, x_0) \in D = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. (Exerciţiu !)

Funcţii local-lipschitziene

Înainte de a obţine o condiţie suficientă de unicitate a soluţiilor, pentru o mai bună înţelegere a rezultatelor ce urmează a fi prezentate, reamintim câteva rezultate fundamentale de analiză matermatică.

Definiţia 4. a) Funcţia $g(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ se numeşte *local lipschitziană* în $x_0 \in G$, dacă $\exists G_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $\exists L \geq 0$ astfel încât

$$||g(x) - g(y)|| \leq L||x - y|| \quad \forall x, y \in G \cap G_0.$$

b) Funcţia $g(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ se numeşte *(global) lipschitziană (pe G)* dacă $\exists L \geq 0$ astfel încât

$$||g(x) - g(y)|| \leq L||x - y|| \quad \forall x, y \in G.$$

Vom spune că $g(.)$ este local lipschitziană pe G dacă $g(.)$ este local lipschitziană în fiecare punct al lui G.

Evident că orice funcţie lipschitziană este şi local lipschitziană; reciproca nu este adevărată (de exemplu, $g(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$). De asemenea, orice funcţie local lipschitziană în x_0 este uniform continuă pe o vecinătate a lui x_0 şi deci este continuă; reciproca nu este adevărată (de exemplu, $g(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbf{R}$ în $x = 0$).

O caracterizare echivalentă a funcţiilor local lipschitziene este dată de următorul rezultat.

Propoziţia 5. *Fie $G \subset \mathbf{R}^n$ deschisă şi $g(.) : G \to \mathbf{R}^n$. Atunci $g(.)$ este local lipschitziană dacă şi numai dacă restricţia sa $g(.)|_{G_0}$ la orice mulţime compactă $G_0 \subset G$ este lipschitziană.*

Demonstraţie. Suficienţa este evidentă. Pentru necesitate să presupunem, prin absurd, că există $G_0 \subset G$ compact astfel încât $g(.)|_{G_0}$ nu este lipschitziană; aceasta însemnând că $\forall k \in \mathbf{N}$, $\exists x_k, y_k \in G_0$ astfel încât

$$||g(x_k) - g(y_k)|| > k||x_k - y_k||. \tag{4}$$

Deoarece $G_0 \subset G$ este compactă vor exista subşirurile (pentru simplitate notate la fel) $\{x_k\}$ şi $\{y_k\}$ astfel încât $x_k \to x_0 \in G_0$ $y_k \to y_0 \in G_0$ pentru $k \to \infty$.

În acelaşi timp, $g(.)$ este continuă (fiind local lipschitziană), $G_0 \subset G$ este compactă, deci, dacă notăm $M = \max_{z \in G_0} ||g(z)||$, avem

$$||x_k - y_k|| \leq \frac{1}{k}||g(x_k) - g(y_k)|| \leq \frac{2M}{k}.$$

Dacă $k \to \infty$ în ultima inegalitate deducem că $x_0 = y_0$. Folosind ipoteza că $g(.)$ este local lipschitziană în $x_0 \in G$ vom deduce că există $G_1 \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $L \geq 0$ astfel încât

$$||g(x) - g(y)|| \leq L||x - y|| \quad \forall x, y \in G \cap G_1.$$

Pe de altă parte, din convergenţa lui x_k şi y_k la x_0 există un rang $k_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $x_k, y_k \in G \cap G_1$ $\forall k \geq k_0$ şi $k \geq L$. Deci

$$||g(x_k) - g(y_k)|| \leq L||x_k - y_k|| \leq k||x_k - y_k|| \quad \forall k \geq k_0,$$

care, evident, contrazice (4). $\square$

Sunt foarte frecvente situaţiile în care verificarea proprietăţii de lipschitzianitate a unei funcţii cu ajutorul definiţiei este foarte dificilă. De aceea un criteriu foarte util este dat în următoarea propoziţie.

Propoziţia 6. *Fie $G \subset \mathbf{R}^n$ deschisă, $g(.) : G \to \mathbf{R}^n$ o funcţie de clasă C^1. Atunci $g(.)$ este local lipschitziană.*

Demonstraţie. Este o consecinţă imediată a teoremei de medie a lui Lagrange şi a convexităţii bilelor din $\mathbf{R}^n$. Este un exerciţiu util! $\square$

În studiul unicităţii soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale vom folosi următoarea variantă de lipschitzianitate parţială a funcţiilor.

Definiţia 7. Funcţia $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ se numeşte *local lipschitziană în raport cu al doilea argument* în $(t_0, x_0) \in D$, dacă $\exists D_0 \in \mathcal{V}(t_0, x_0)$ şi $\exists L \geq 0$ astfel încât

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L||x - y|| \quad \forall (t,x), (t,y) \in D \cap D_0.$$

Propoziţiile 5 şi 6 pot fi extinse imediat la funcţii local lipschitziene în raport cu al doilea argument.

Propoziţia 8. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă. Atunci $f(.,.)$ este local lipschitziană în raport cu al doilea argument dacă şi numai dacă $\forall D_0 \subset D$ compact, $\exists L \geq 0$ astfel încât*

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L||x - y|| \quad \forall (t,x), (t,y) \in D_0.$$

Demonstraţie. Exerciţiu!

Propoziţia 9. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument. Atunci $f(.,.)$ este local lipschitziană în raport cu al doilea argument.*

Demonstraţie. Exerciţiu!

Cursul 3

Un rezultat de analiză matematică, extrem de folositor, având, de altfel, o demonstraţie elementară, este aşa-numita lemă Bellman-Gronwall. Prezentăm, în continuare, o versiune particulară a acestui rezultat, pe care o vom utiliza frecvent la acest curs.

Lema Bellman-Gronwall. *Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval, $t_0 \in I$, $M \geq 0$, $u(.), v(.) : I \to \mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ două funcţii continue care verifică inegalitatea*

$$u(t) \leq M + |\int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds| \quad \forall t \in I.$$

Atunci are loc inegalitatea

$$u(t) \leq Me^{|\int_{t_0}^{t} v(s)ds|} \quad \forall t \in I.$$

Demonstraţie. Fie funcţia $w(.) : I \to \mathbf{R}$ dată prin

$$w(t) = (M + |\int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds|)e^{-|\int_{t_0}^{t} v(s)ds|}.$$

Fie $I_+ = \{t \in I, t \geq t_0\}$ şi $I_- = \{t \in I, t \leq t_0\}$. Vom arăta că $w(.)$ este descrescătoare pe I_+ şi este crescătoare pe I_-. De exemplu pe I_+. Evident, $w(.)$ este derivabilă şi

$$w'(t) = v(t)[u(t) - (M + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds)]e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)ds} \leq 0, t \in I_+.$$

Deci $w(.)$ este descrescătoare şi deci $w(t) \leq w(t_0) = M$ $\forall t \in I_+$. Adică $(M + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds)e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)ds} \leq M$ şi ca atare, $u(t) \leq M + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds \leq Me^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds}$ $\forall t \in I_+$. Analog se procedează pentru $t \in I_-$. $\square$

Putem, în acest moment, să formulăm şi să demonstrăm binecunoscuta teoremă Cauchy-Lipschitz privitoare la existenţa şi unicitatea locală a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale. Demonstraţia pe care o prezentăm este o consecinţa a teoremei lui Peano şi a lemei Bellman-Gronwall.

Teorema Cauchy-Lipschitz (E.U.L.) *Fie* $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *o mulţime deschisă şi* $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ *continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia diferenţială* $x' = f(t, x)$*. Atunci* $\forall (t_0, x_0) \in D$ $\exists I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ *şi* $\exists ! \varphi(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$ *soluţie a problemei Cauchy* (f, t_0, x_0).

În plus, dacă $\varphi_1(.)$ *şi* $\varphi_2(.)$ *sunt două soluţii ale problemei* (f, t_0, x_0) *definite pe intervalul compact* $I_1 = [t_0 - r, t_0 + r], r > 0$ *atunci* $\varphi_1(.) = \varphi_2(.)$.

Demonstraţie. Fie $(t_0, x_0) \in D$. Aplicăm teorema lui Peano şi rezultă că există $a > 0$ şi $\varphi(.) : I_0 = [t_0 - a, t_0 + a]$ soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Pentru a încheia demonstraţia, rămâne să arătam a doua afirmaţie din teoremă.

Fie $\varphi_i(.) : I_1 = [t_0 - r, t_0 + r] \to \mathbf{R}^n, i = 1, 2$ soluţii ale problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Definim $u(t) := ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||$, $t \in I_1$. Atât $\varphi_1(.)$ cât şi $\varphi_2(.)$ verifică ecuaţia integrală asociată

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s)) ds \quad \forall t, t_0 \in I, \quad i = 1, 2.$$

Scăzându-le şi trecând la normă obţinem

$$u(t) = || \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_2(s)) ds|| \leq$$

$$\leq | \int_{t_0}^{t} ||f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))|| ds|, \quad t \in I_1.$$

$I_1 \subset \mathbf{R}$ este compact, $\varphi_1(.)$, $\varphi_2(.)$ sunt continue, deci mulţimea

$$D_0 = \{(t, \varphi_1(t)), (t, \varphi_2(t)), t \in I_1\}$$

este compactă şi în baza Propoziţiei 8 (Curs 2) există $L > 0$ astfel încât

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y|| \quad \forall (t, x), (t, y) \in D_0.$$

În particular,

$$||f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))|| \leq L||\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|| \quad \forall s \in I_1.$$

Deci avem $u(t) \leq | \int_{t_0}^{t} Lu(s) ds|$ $\forall t \in I_1$. Aplicăm Lema B-G şi deducem că $u(t) \equiv 0$ pe I_1. Prin urmare, $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

Observaţie. Teorema Cauchy-Lipschitz conţine doar o condiţie suficientă de existenţă şi unicitate locală a soluţiilor. Dacă $f(t,x) = 3x^{2/3} + 1, (t,x) \in \mathbf{R}^2$, deşi $f(.,.)$ nu este local lipschitziană în nici un punct de forma $(t_0, 0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (Exerciţiu !) totuşi ecuaţia diferenţială $x' = f(t,x)$ admite soluţii locale unice în orice punct $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (Exerciţiu !).

Continuitatea soluţiilor locale în raport cu datele iniţiale şi parametrii

Fie $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ definit pe mulţimea deschisă $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ şi care admite proprietatea E.U.L.. Atunci ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1}$$

are o soluţie unică prin fiecare punct $(t_0, x_0) \in D$ a problemei Cauchy (f, t_0, x_0); anume $\varphi_{t_0,x_0}(.) : I_{t_0,x_0} \to \mathbf{R}^n$.

Definiţia 1. Se numeşte *curent local* al ecuaţiei (sau al câmpului vectorial $f(.,.)$) în $(t_0, x_0) \in D$ funcţia $\alpha(.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \in \mathcal{V}(t_0, t_0, x_0) \to \mathbf{R}^n$ definită prin: $\forall (\tau, \xi) \in I_0 \times G_0$ aplicaţia $\alpha(., \tau, \xi) : I_1 \to \mathbf{R}^n$ este soluţia unică a problemei Cauchy (f, τ, ξ).

În teoria ecuaţiilor diferenţiale există situaţii în care câmpul vectorial variază într-o familie ,,parametrizată" dată. Mai exact, avem următorul concept.

Definiţia 2. Se numeşte *ecuaţie diferenţială parametrizată* simbolul matematic

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda) \tag{2}$$

definit de o funcţie $f(.,.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, care se numeşte *câmp vectorial parametrizat*. Prin soluţie a ecuaţiei se înţelege o funcţie derivabilă $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $I \subset \mathbf{R}$ interval, pentru care există $\lambda \in pr_3 D$ astfel încât $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale definită de

$$f(.,.,\lambda) : D_\lambda := \{(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n; \quad (t,x,\lambda) \in D\} \to \mathbf{R}^n.$$

Cu alte cuvinte, pentru fiecare $\lambda \in pr_3 D$, (2) este o ecuaţie diferenţială obişnuită, adică ecuaţia diferenţială parametrizată (2) este, de fapt, o familie de ecuaţii diferenţiale de forma (1). Este clar că soluţiile ecuaţiilor diferenţiale parametrizate (2) depind nu numai de datele iniţiale ci şi de parametri. Pentru a studia dependenţa soluţiilor locale de datele iniţiale şi de parametri vom introduce noţiunea de curent local parametrizat.

Definiţia 3. Dacă $f(.,.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie continuă astfel încât pentru orice $\lambda \in pr_3 D$ ecuaţia diferenţială definită de $f(.,.,\lambda)$ admite proprietatea de unicitatea a soluţiilor, atunci se numeşte *curent local parametrizat* al ecuaţiei (2) funcţia $\alpha(.,.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \times \Lambda_0 \in \mathcal{V}(t_0, t_0, x_0, \lambda_0) \to \mathbf{R}^n$ definită prin: $\forall(\tau, \xi, \lambda) \in I_0 \times G_0 \times \Lambda_0$ aplicaţia $\alpha(., \tau, \xi, \lambda) : I_1 \to \mathbf{R}^n$ este soluţia unică a problemei Cauchy $(f(.,.,\lambda), \tau, \xi)$.

Teorema privind existenţa, unicitatea şi continuitatea curentului local parametrizat. *Fie $D \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^k$ deschisă şi $f(.,.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (2). Atunci $\forall(t_0, x_0, \lambda_0) \in D$ $\exists I_1 \times I_0 \times G_0 \times \Lambda_0 \in \mathcal{V}(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)$ şi $\exists!$ $\alpha(.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \times \Lambda_0 \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\forall(\tau, \xi, \lambda) \in I_0 \times G_0 \times \Lambda_0$ $\alpha(., \tau, \xi, \lambda) : I_1 \to \mathbf{R}^n$ este soluţie a problemei Cauchy $(f(.,.,\lambda), \tau, \xi)$.*

Demonstraţie. Considerăm $(t_0, x_0, \lambda_0) \in D$. $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ este o mulţime deschisă, deci există $\delta, \gamma, \eta > 0$ astfel încât $D_0 = \overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\gamma(x_0) \times \overline{B}_\eta(\lambda_0) \subset D$. Pe de altă parte, deoarece $f(.,.,.)$ este local lipschitziană în raport cu al doilea argument, conform Propozitiei 8 (Curs 2), există $L \geq 0$ astfel încât

$$||f(t, x, \lambda) - f(t, y, \lambda)|| \leq L||x - y|| \quad \forall(t, x, \lambda), (t, y, \lambda) \in D_0.$$

În acelaşi timp, cum $f(.,.,.)$ este continuă şi $D_0 \subset D$ este compactă există $M \geq 0$ definit de $M = \max_{(t,x,\lambda)\in D_0} ||f(t, x, \lambda)||$.

Dacă $M = 0$, atunci $f(t, x, \lambda) \equiv 0$ şi deci $\alpha(t, \tau, \xi, \lambda) \equiv \xi$ pe D_0.

Dacă $M > 0$ definim

$$a = \min\{\delta, \frac{\gamma}{4M}\}, \quad I_1 = \overline{B}_a(t_0), I_0 = \overline{B}_a(t_0), G_0 = \overline{B}_{\frac{\gamma}{2}}(x_0), \Lambda_0 = \overline{B}_\eta(\lambda_0).$$

Definim, în continuare, şirul aproximaţiilor succesive $\alpha_m(.,.,.,.) : I_1 \times$

$I_0 \times G_0 \times \Lambda_0 \to \mathbf{R}^n$ astfel

$$\alpha_0(t,\tau,\xi,\lambda) = \xi,$$

$$\alpha_m(t,\tau,\xi,\lambda) = \xi + \int_\tau^t f(s,\alpha_{m-1}(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda)ds, \quad m \geq 1, (t,\tau,\xi,\lambda) \in I_1 \times I_0 \times G_0 \times \Lambda_0.$$

Vom arăta, prin inducţie după $m \geq 0$, că

a) $\alpha_m(t,\tau,\xi,\lambda) \in \overline{B}_\gamma(x_0)$, $\forall (t,\tau,\xi,\lambda) \in I_1 \times I_0 \times G_0 \times \Lambda_0$.

b) $\alpha_m(.,.,.,.)$ este continuă

c) $||\alpha_m(t,\tau,\xi,\lambda) - \alpha_{m-1}(t,\tau,\xi,\lambda)|| \leq ML^{m-1}\frac{|t-\tau|^m}{m!}$, $\forall (t,\tau,\xi,\lambda) \in I_1 \times I_0 \times G_0 \times \Lambda_0$, $m \geq 1$.

Demonstraţia prin inducţie a afirmaţiei b) rezultă imediat din definiţia lui $\alpha_m(.,.,.,.)$ şi din teorema privind continuitatea integralei in raport cu parametri. Pentru afirmaţia a) avem:

$$\alpha_0(t,\tau,\xi,\lambda) = \xi \in \overline{B}_{\frac{\gamma}{2}}(x_0) \subset \overline{B}_\gamma(x_0).$$

Presupunem a) adevărată pentru $m-1$ şi o demonstrăm pentru m

$$||\alpha_m(t,\tau,\xi,\lambda) - x_0|| \leq ||\xi - x_0|| + |\int_\tau^t ||f(s,\alpha_{m-1}(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda)||ds| \leq$$

$$\leq \frac{\gamma}{2} + M|t-\tau| \leq \frac{\gamma}{2} + M.2.a \leq \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma$$

şi a) este demonstrată.

Pentru afirmaţia c), verificăm mai întâi proprietatea pentru $m = 1$

$$||\alpha_1(t,\tau,\xi,\lambda) - \alpha_0(t,\tau,\xi,\lambda)|| = ||\int_\tau^t f(s,\xi,\lambda)ds|| \leq M|t-\tau|.$$

Presupunem c) verificată pentru $m-1$ şi o demonstrăm pentru m. Avem următoarele estimări succesive

$$||\alpha_m(t,\tau,\xi,\lambda) - \alpha_{m-1}(t,\tau,\xi,\lambda)|| \leq |\int_\tau^t ||f(s,\alpha_{m-1}(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda) -$$

$$f(s,\alpha_{m-2}(s,\tau,\xi))||ds| \leq |\int_\tau^t L||\alpha_{m-1}(s,\tau,\xi,\lambda) - \alpha_{m-2}(s,\tau,\xi,\lambda)||ds|$$

$$\leq L|\int_\tau^t ML^{m-2}\frac{|s-\tau|^{m-1}}{(m-1)!}ds| = ML^{m-1}\frac{|t-\tau|^m}{m!}.$$

deci c) este adevărată.

Deoarece din c) putem scrie succesiv pentru orice $m, p \in \mathbf{N}$

$$||\alpha_{m+p}(t,\tau,\xi,\lambda) - \alpha_m(t,\tau,\xi,\lambda)|| \leq ||\alpha_{m+p}(t,\tau,\xi,\lambda) - \alpha_{m+p-1}(t,\tau,\xi,\lambda)||+$$

$$||\alpha_{m+p-1}(t,\tau,\xi,\lambda) - \alpha_{m+p-2}(t,\tau,\xi,\lambda)|| + ... + ||\alpha_{m+1}(t,\tau,\xi,\lambda) - \alpha_m(t,\tau,\xi,\lambda)||$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p} ML^{m+j-1}\frac{|t-\tau|^{m+j}}{(m+j)!} \leq \frac{M}{L}\sum_{j=1}^{p}\frac{(2aL)^{m+j}}{(m+j)!} \leq \frac{M}{L}(S_{m+p} - S_m),$$

unde

$$S_m := \sum_{j=0}^{m} \frac{(2aL)^j}{j!} \to e^{2aL},$$

deducem că $\alpha_m(.,.,.,.)$ este un şir Cauchy uniform pe $I_1 \times I_0 \times G_0 \times \Lambda_0$.

Fie, aşadar $\alpha(.,.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \times \Lambda_0 \to \mathbf{R}^n$ continuă, astfel încât $\alpha_m(.,.,.,.)$ converge uniform la $\alpha(.,.,.,.)$ pentru $m \to \infty$. Trecând la limită în relaţia de recurenţa care defineşte şirul $\alpha_m(.,.,.,.)$ obţinem

$$\alpha(t,\tau,\xi,\lambda) = \xi + \int_\tau^t f(s, \alpha(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda)ds, \quad (t,\tau,\xi,\lambda) \in I_1 \times I_0 \times G_0 \times \Lambda_0,$$

adică $\alpha(.,\tau,\xi,\lambda)$ verifică ecuaţia integrală asociată problemei Cauchy $(f(.,.,\lambda),\tau,\xi)$.

Pentru a încheia demonstraţia va mai trebui să demonstrăm unicitatea lui $\alpha(.,.,.,.)$.

Dacă $\overline{\alpha}(.,.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \times \Lambda_0 \to \mathbf{R}^n$ este o altă funcţie continuă care verifică proprietăţiile din enunţ, aplicând Teorema Cauchy-Lipschitz pentru orice $(\tau,\xi,\lambda) \in I_0 \times G_0 \times \Lambda_0$, $\alpha(.,\tau,\xi,\lambda) = \overline{\alpha}(.,\tau,\xi,\lambda)$ pe intervalul compact I_1 şi teorema este demonstrată. □

Ecuaţii de ordin superior. Existenţa şi unicitatea soluţiilor

După cum s-a văzut, deja, studiul soluţiilor unei *ecuaţii diferenţiale de ordin superior* de forma

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}), \tag{3}$$

definită de o funcţie $f : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, se reduce la studiul soluţiilor *sistemului canonic asociat*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{4}$$

care este o ecuaţie diferenţială pe $\mathbf{R}^n$ de forma (1) definită de

$$\tilde{f}(.,.) : D \to \mathbf{R}^n, \quad \tilde{f}(t,(x_1,...,x_n)) = (x_2, x_3, ..., x_n, f(t, x_1, ..., x_n)).$$

Mai precis, avem următorul rezultat de echivalenţă.

Propoziţia de echivalenţă. *O funcţie $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (3) dacă şi numai dacă $\varphi(.)$ este de n ori derivabilă şi $\tilde{\varphi}(.) : I \to \mathbf{R}^n$ definită prin*

$$\tilde{\varphi}(t) := (\varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)), \quad t \in I$$

este soluţie a ecuaţiei (4).

Demonstraţie. Dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (3), atunci $\varphi(.)$ este de n ori derivabilă $(t, \tilde{\varphi}(t)) \in D$ şi $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t))$ $\forall t \in I$ şi evident $\tilde{\varphi}(.)$ este soluţie a ecuaţiei (4).

Reciproc, dacă $\tilde{\varphi}(.) = (\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.))$ este soluţie a ecuaţiei (4) atunci este derivabilă şi verifică ecuaţia (4), care înseamnă că $\varphi_1'(t) = \varphi_2(t)$, $\varphi_2'(t) = \varphi_3(t)$,..., $\varphi_{n-1}'(t) = \varphi_n(t)$ şi că $\varphi_n'(t) = f(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$, de unde obţinem, inductiv, că $\varphi_1(.)$ este de n ori derivabilă, $\varphi_{k+1}(t) = \varphi_1^{(k)}(t)$ $\forall t \in I, k \geq 1$ şi deci $\varphi_1(.)$ este soluţie a ecuaţiei (3). $\square$

Cum problema Cauchy pentru ecuaţia (4) înseamnă o soluţie $\tilde{\varphi}(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ a ecuaţiei (4) care satisface condiţia iniţială $\tilde{\varphi}(t_0) = \tilde{x}_0$, dacă notăm componentele vectorului $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ cu $\tilde{x}_0 = (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})$ şi avem în vedere Propoziţia de echivalenţă deducem că $\tilde{\varphi}(.)$ este soluţie a problemei Cauchy $(\tilde{f}, t_0, \tilde{x}_0)$ dacă şi numai dacă prima componentă a lui $\tilde{\varphi}(.)$, notată cu $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (3) care satisface condiţiile iniţiale

$$\varphi(t_0) = x_0,\ \varphi'(t_0) = x_0^1,\ ...,\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}. \tag{5}$$

Prin urmare, *problema Cauchy pentru ecuaţii de ordin superior* este următorul concept: dacă sunt cunoscute funcţia $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ care defineşte ecuaţia (3) şi punctul iniţial $(t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in D$ se cere să se determine $\varphi(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}$ soluţie a ecuaţiei (3) care verifică condiţiile iniţiale (5). Vom spune că $\varphi(.)$ este soluţie a problemei Cauchy $(f, t_0, x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})$.

Din Teorema lui Peano şi Propoziţia de echivalenţă obţinem imediat o teoremă privitoare la existenţa soluţiilor locale ale ecuaţiilor de ordin superior.

Teorema lui Peano pentru ecuaţii de ordin superior. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}$ continuă care defineşte ecuaţia (3). Atunci pentru orice $(t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in D$ există $\varphi(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}$ soluţie a problemei Cauchy $(f, t_0, x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})$.*

Demonstraţie. Fie $(t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in D$ şi fie $\tilde{f}(t, (x_1, ..., x_n)) = (x_2, x_3, ..., x_n, f(t, x_1, ..., x_n))$. Cum $f(.,.)$ este continuă şi $\tilde{f}(.,.)$ va fi continuă. Deci, dacă aplicăm Teorema lui Peano există $\tilde{\varphi}(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy $(\tilde{f}, t_0, \tilde{x}_0)$, unde am notat $\tilde{x}_0 = (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1}) \in \mathbf{R}^n$. Din Propoziţia de echivalenţă deducem că $\tilde{\varphi}(.) = (\varphi(.), \varphi'(.), ..., \varphi^{(n-1)}(.))$, unde $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (3), iar condiţia $\tilde{\varphi}(t_0) = \tilde{x}_0$, se rescrie sub forma $\varphi(t_0) = x_0, \varphi'(t_0) = x_0^1, ..., \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$. $\square$

Din Propoziţia de echivalenţă şi Teorema Cauchy-Lipschitz obţinem imediat un rezultat de existenţă şi unicitate locală pentru ecuaţia (3).

Teorema Cauchy-Lipschitz pentru ecuaţii de ordin superior. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (3). Atunci pentru orice $(t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in D$ $\exists!$ $\varphi(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}$ soluţie a problemei Cauchy $(f, t_0, x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})$.*

Demonstraţie. Exerciţiu!

Cursul 4

Studiul existenţei şi unicităţii globale

Considerăm funcţia $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1}$$

şi fie $(t_0, x_0) \in D$.

Următorul rezultat ne arată că unicitatea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale este o proprietate pentru care caracterul local este echivalent cu cel global. De aceea, în ce priveşte proprietatea de unicitate se poate renunţa la precizarea privitoare la caracterul său local sau global.

Teorema privind unicitatea globală. *Fie $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială (1). Atunci ecuaţia (1) admite proprietatea de unicitate locală dacă şi numai dacă admite proprietatea de unicitate globală a soluţiilor.*

Demonstraţie. Suficienţa este evidentă. Pentru necesitatea afirmaţiei să considerăm $(t_0, x_0) \in D$ şi $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n$, $\psi(.) : J \to \mathbf{R}^n$ două soluţii ale problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Fie

$$I_0 = \{t \in I \cap J; \quad \varphi(t) = \psi(t)\}.$$

Evident $t_0 \in I_0$ şi, deci, $I_0 \neq \emptyset$. De asemenea, mulţimea $I_0 \subset I \cap J$ este închisă, deoarece funcţiile $\varphi(.), \psi(.)$ sunt continue, deci şi $\varphi(.) - \psi(.)$ este continuă, mulţimea $\{0\} \subset \mathbf{R}^n$ este închisă şi $I_0 = (\varphi - \psi)^{-1}(.)(0)$. Demonstrăm că $I_0 \subset I \cap J$ este şi relativ deschisă. Într-adevăr, fie $t_* \in I_0$, deci $\varphi(t_*) = \psi(t_*)$ şi cum ecuaţia are proprietatea de unicitate locală există $I_* \in \mathcal{V}(t_*)$ astfel încât $\varphi(.)|_{I_* \cap I \cap J} = \psi(.)|_{I_* \cap I \cap J}$, adică $I_* \cap (I \cap J) \subset I_0$ şi mulţimea I_0 este relativ deschisă. Prin urmare, cum orice interval (în particular, intervalul $I \cap J$) este o mulţime conexă (i.e., este simultan deschisă şi închisă şi nu admite o submulţime proprie cu această proprietate) a lui $\mathbf{R}$ vom avea că $I_0 = I \cap J$ şi deci $\varphi(.)|_{I \cap J} = \psi(.)|_{I \cap J}$. $\square$

Prelungirea soluţiilor. Soluţii maximale

Trecerea de la soluţiile locale la soluţiile maximale are loc în mod natural printr-un procedeu care constă în a prelungi soluţia locală şi a vedea cât de ,,mult” se poate face acest lucru. În această secţiune se va vedea în ce condiţii o soluţie poate fi prelungită şi de asemenea dacă există soluţii care nu mai pot fi prelungite, adică soluţii maximale.

Reamintim, mai întâi, că dacă $\varphi_i(.) : I_i \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n, i = 1, 2$ sunt două funcţii atunci, prin definiţie, $\varphi_1(.)$ *prelungeşte pe* $\varphi_2(.)$ dacă $I_2 \subset I_1$ şi restricţia lui $\varphi_1(.)$ la intervalul I_2 este $\varphi_2(.)$. În definiţia precedentă daca $\varphi_1(.) \neq \varphi_2(.)$ spunem că $\varphi_1(.)$ este o prelungire strictă a lui $\varphi_2(.)$.

Dacă $\varphi_i(.) : (a_i, b_i) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n, i = 1, 2$ atunci, prin definiţie, $\varphi_1(.)$ *prelungeşte strict la dreapta pe* $\varphi_2(.)$ dacă $b_2 < b_1, a_2 \geq a_1$ şi restricţia lui $\varphi_1(.)$ la intervalul (a_2, b_2) este $\varphi_2(.)$. În mod similar, $\varphi_1(.)$ *prelungeşte strict la stânga pe* $\varphi_2(.)$ dacă $b_1 \geq b_2, a_2 > a_1$ şi restricţia lui $\varphi_1(.)$ la intervalul (a_2, b_2) este $\varphi_2(.)$.

Este uşor de observat că mulţimea soluţiilor oricărei ecuaţii diferenţiale împreună cu relaţia de prelungire de mai sus este o mulţime ordonată. Un element maximal în această mulţime ordonată se va numi *soluţie maximală* a ecuaţiei diferenţiale respective.

Definiţia 1. a) O soluţie $\varphi(.)$ a ecuaţiei (1) se numeşte *maximală (neprelungibilă, saturată)* dacă oricare ar fi $\psi(.)$ soluţie a ecuaţiei (1), dacă $\psi(.)$ prelungeşte pe $\varphi(.)$ atunci $\varphi(.) = \psi(.)$.

a) O soluţie $\varphi(.)$ a ecuaţiei (1) se numeşte *maximală la dreapta (respectiv, la stânga)* dacă oricare ar fi $\psi(.)$ soluţie a ecuaţiei (1), dacă $\psi(.)$ prelungeşte la dreapta (respectiv, la stânga) pe $\varphi(.)$ atunci $\varphi(.) = \psi(.)$.

Principalul rezultat privitor la prelungirea soluţiilor afirmă că o condiţie necesară şi suficientă ca o soluţie a unei ecuaţii diferenţiale definită pe un interval deschis să admită o prelungire strictă este ca graficul său să nu părăsească un compact. Mai precis, avem următoarea teoremă.

Teorema asupra prelungirii soluţiilor. *Fie* $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *o mulţime deschisă,* $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ *o funcţie continuă care defineşte ecuaţia (1) şi* $\varphi(.) : (a, b) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *soluţie a ecuaţiei (1). Atunci*

1) $\varphi(.)$ *admite o prelungire strictă la dreapta dacă şi numai dacă* $b < +\infty$, $\exists t_0 \in (a,b)$ *şi* $\exists D_0 \subset D$ *compactă astfel încât* $(t,\varphi(t)) \in D_0$ $\forall t \in [t_0, b)$.

2) $\varphi(.)$ *admite o prelungire strictă la stânga dacă şi numai dacă* $a > -\infty$, $\exists t_0 \in (a,b)$ *şi* $\exists D_0 \subset D$ *compactă astfel încât* $(t,\varphi(t)) \in D_0$ $\forall t \in (a, t_0]$.

Demonstraţie. Vom demonstra afirmaţia 1) [afirmaţia 2) se demonstrează în mod analog].

Fie $\psi(.) : (a, b_1) \to \mathbf{R}^n$ o soluţie a ecuaţiei care prelungeşte strict la dreapta soluţia $\varphi(.)$. Atunci $b < b_1$, deci $b < +\infty$. Fie $t_0 \in (a,b)$ arbitrar şi definim $D_0 := \{(t,\psi(t)); t \in [t_0, b]\}$. Cum $\psi(.)$ este continuă şi intervalul $[t_0, b]$ este compact rezultă că şi $D_0 \subset D$ este o mulţime compactă. Pe de altă parte, pentru orice $t \in [t_0, b)$ $(t,\varphi(t)) = (t,\psi(t)) \in D_0$.

Reciproc, vom arăta, folosind criteriul Cauchy referitor la existenţa limitei unei funcţii că $\exists \lim_{t\nearrow b} \varphi(t) =: x_0$ şi $(b, x_0) \in D_0 \subset D$.

Arătăm, aşadar, că $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta_\epsilon > 0$ astfel încât $\forall t', t'' \in (b - \delta_\epsilon, b)$ avem $||\varphi(t') - \varphi(t'')|| < \epsilon$.

Fie $M = \max_{(t,x)\in D_0} ||f(t,x)||$. Din ecuaţia integrală asociată ecuaţiei diferenţiale (1) rezultă că pentru orice $t', t'' \in [t_0, b)$ avem

$$||\varphi(t') - \varphi(t'')|| = ||\int_{t'}^{t''} f(s,\varphi(s))ds|| \leq |\int_{t'}^{t''} ||f(s,\varphi(s))||ds| \leq M|t' - t''|,$$

iar dacă luăm $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{M}$ existenţa limitei este demonstrată.

În acelaşi timp, cum $D_0 \subset D$ este compact rezultă $(b, x_0) = \lim_{t\nearrow b}(t,\varphi(t)) \in D_0$.

Aplicăm, în continuare, Teorema lui Peano şi deducem că există $\alpha > 0$ şi o soluţie $\varphi_1(.) : [b-\alpha, b+\alpha] \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f, b, x_0).

Rămâne să definim funcţia $\varphi_2(.) : (a, b+\alpha] \to \mathbf{R}^n$ prin

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{dacă } t \in (a,b) \\ \varphi_1(t), & \text{dacă } t \in [b, b+\alpha], \end{cases}$$

care este, evident, soluţie a ecuaţiei (vezi Prop. ,,Lipirea" soluţiilor) şi care, prin felul în care a fost construită, este o prelungire strictă la dreapta a soluţiei $\varphi(.)$. $\square$

În general, în ipoteze de tip Peano, soluţiile locale pot fi extinse până la soluţii maximale. Mai exact, avem următorul rezultat privitor la existenţa soluţiilor maximale.

Teorema privind existenţa soluţiilor maximale. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă, care defineşte ecuaţia (1). Atunci pentru orice soluţie $\varphi(.)$ a ecuaţiei (1) există o soluţie maximală a aceleaşi ecuaţii care o prelungeşte pe $\varphi(.)$.*

Demonstraţie. Fie $\varphi(.)$ soluţie a ecuaţiei (1) şi definim mulţimea

$$S := \{\psi(.); \quad \psi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei}, \quad \psi(.) \text{ prelungeşte pe } \varphi(.)\}.$$

Faptul că S împreună cu relaţia de prelungire este o mulţime ordonată se poate verifica imediat. Ca atare, afirmaţia din enunţ se reduce la a demonstra existenţa unui element maximal în această mulţime ordonată. Pentru aceasta vom folosi Lema lui Zorn (care afirmă că dacă în mulţimea ordonată S orice parte inductiv ordonată P admite un majorant, atunci există $\psi(.) \in S$ element maximal).

Fie, aşadar, $P = \{\varphi_j\}_{j \in J} \subset S$ o mulţime inductiv ordonată. Dacă notăm cu I_j domeniul de definiţie al funcţiei $\varphi_j(.)$, vom arăta că majorantul lui P este funcţia $\psi(.)$ definită prin

$$I = \cup_{j \in J} I_j, \quad \psi(t) = \varphi_j(t) \text{ dacă } t \in I_j, j \in J.$$

Pentru aceasta vom demonstra că a) $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, b) $\psi(.)$ este bine definită şi c) $\psi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1).

a) Este suficient să demonstrăm că $\forall t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ avem $[t_1, t_2] \subset I$. Deoarece $t_l \in I$, $l = 1, 2$, rezultă că $\exists j_1, j_2 \in J$ astfel încât $t_l \in I_{j_l}$, $l = 1, 2$. Cum P este inductiv ordonată, sau $\varphi_{j_1}(.)$ prelungeşte pe $\varphi_{j_2}(.)$ şi deci $I_{j_2} \subset I_{j_1}$ sau $\varphi_{j_2}(.)$ prelungeşte pe $\varphi_{j_1}(.)$ şi deci $I_{j_1} \subset I_{j_2}$. În primul caz $[t_1, t_2] \subset I_{j_1} \subset I$, iar în al doilea caz $[t_1, t_2] \subset I_{j_2} \subset I$.

b) Revine la a arăta că dacă $t \in I_{j_1} \cap I_{j_2}$ atunci $\varphi_{j_1}(t) = \varphi_{j_2}(t)$. Demonstraţia este identică cu cea de la a).

c) Această afirmaţie rezultă imediat, având în vedere definiţia aplicaţiei $\psi(.)$. $\square$

Următorul rezultat ne arată că intervalul de definiţie al unei soluţii maximale este deschis.

Propoziţie (intervalul de definiţie al soluţiilor maximale). *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă, care* *defineşte ecuaţia (1) şi fie $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ soluţie maximală a ecuaţiei (1).*

Atunci $I \subset \mathbf{R}$ este interval deschis.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că I nu este deschis. Să presupunem fără a restrânge generalitatea că $I = (a, b]$ (cazurile $I = [a, b)$ şi $I = [a, b]$ se tratează analog). Conform Teoremei lui Peano $\exists\alpha > 0$ şi $\exists\varphi_1(.) : [b - \alpha, b + \alpha] \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei $(f, b, \varphi(b))$. La fel ca în demonstraţia Teoremei asupra prelungirii soluţiilor construim funcţia $\varphi_2(.)$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{dacă } t \in (a, b) \\ \varphi_1(t), & \text{dacă } t \in [b, b + \alpha], \end{cases}$$

care este soluţie a ecuaţiei, care în plus prelungeşte strict pe $\varphi(.)$. Cum $\varphi(.)$ este maximală am obţinut o contradicţie. $\square$

În ipoteze de unicitate pentru câmpul vectorial soluţiile maximale sunt unice.

Propoziţie (unicitatea soluţiilor maximale). *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă, care defineşte ecuaţia (1). Presupunem că ecuaţia (1) are proprietatea de unicitate a soluţiilor.*

Atunci pentru orice soluţie $\varphi(.)$ a ecuaţiei (1) există şi este unică o soluţie maximală $\psi(.)$ astfel încât $\psi(.)$ prelungeşte pe $\varphi(.)$.

Demonstraţie. Din Teorema privind existenţa soluţiilor maximale există $\varphi_1(.) : I_1 \to \mathbf{R}^n$ soluţie maximală care prelungeşte pe $\varphi(.)$. Dacă $\varphi_2(.) : I_2 \to \mathbf{R}^n$ este o altă soluţie maximală care prelungeşte pe $\varphi(.)$, atunci rezultă $\varphi_1(.) = \varphi_2(.)$, deoarece dacă presupunem prin reducere la absurd că $\varphi_1(.) \neq \varphi_2(.)$, prin construirea unei prelungiri ca în Propoziţia (intervalul de definiţie al soluţiilor maximale) ajungem la o contradicţie cu maximalitatea lui $\varphi_1(.)$. Mai mult, $I_1 \neq I_2$ pentru că din Teorema privind unicitatea globală, $\varphi_1(.)|_{I_1 \cap I_2} = \varphi_2(.)|_{I_1 \cap I_2}$ ($\varphi_1(.) = \varphi_2(.)$ pe domeniul de definiţie al lui $\varphi(.)$). Definim $\varphi_3(.)$ prin

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & \text{dacă } t \in I_1 \\ \varphi_2(t), & \text{dacă } t \in I_1 \cup (I_2 \backslash I_1), \end{cases}$$

care este o prelungire strictă a lui $\varphi_1(.)$, ceea ce contrazice maximalitatea lui $\varphi_1(.)$. $\square$

Corolar. *Fie* $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *o mulţime deschisă,* $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ *o funcţie continuă, care defineşte ecuaţia (1). Presupunem că ecuaţia (1) are proprietatea de unicitate a soluţiilor.*

Atunci $\forall (t_0, x_0) \in D \ \exists! \ \varphi_{t_0,x_0}(.) : I(t_0, x_0) := (t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0))$ $\to \mathbf{R}^n$ *soluţie maximală a problemei Cauchy* (f, t_0, x_0)*.*

Demonstraţie. Fie $(t_0, x_0) \in D$. Din Teorema lui Peano există $\varphi_0(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Din Propoziţie (unicitatea soluţiilor maximale) $\exists! \ \varphi_1(.) : I_1 \to \mathbf{R}^n$ soluţie maximală care prelungeşte pe $\varphi_0(.)$. La fel ca în demonstraţia Propoziţiei (unicitatea soluţiilor maximale), presupunând că $\varphi_2(.)$ este o altă soluţie maximală a problemei Cauchy (f, t_0, x_0) deducem că $\varphi_2(.) = \varphi_1(.)$. Prin urmare, $\exists! \ \varphi_{t_0,x_0}(.) : I(t_0, x_0) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ soluţie maximală a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

Din Propoziţia (intervalul de definiţie al soluţiilor maximale), $I(t_0, x_0) \subset \mathbf{R}$ este interval deschis, $t_0 \in I(t_0, x_0)$, interval ale cărui capete le vom nota cu $t^-(t_0, x_0)$, respectiv $t^+(t_0, x_0)$. $\square$

Existenţa globală a soluţiilor

Spre deosebire de proprietatea de unicitate globală a soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale, care, după cum s-a văzut la începutul cursului, coincide cu proprietatea de unicitate locală, proprietatea de existenţă globală este foarte restrictivă şi implicit ,,îndepărtată” de proprietatea de existenţă locală.

De exemplu, ecuaţia diferenţială scalară

$$x' = x^2$$

are soluţiile maximale $x_0(t) \equiv 0, t \in \mathbf{R}$, $x_c(t) \equiv -\frac{1}{t+c}$, $t \in (-\infty, -c)$ sau $t \in (-c, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. Dintre ele doar soluţia staţionară $x_0(t) \equiv 0$ este globală.

Există mai multe tipuri de rezultate care dau condiţii suficiente de existenţă globală. Prezentăm, în continuare, o teoremă care face apel la noţiunea de disipativitate.

Definiţie. a) Spunem că funcţia $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ are *proprietatea de disipativitate bilaterală* (D) dacă există $r \geq 0$ şi există o funcţie continuă $a(.) : I \to \mathbf{R}_+$ astfel încât

$$| < x, f(t,x) > | \leq a(t)||x||^2 \quad \forall t \in I, x \in \mathbf{R}^n \text{ cu } ||x|| > r.$$

unde cu $< .,. >$ am notat produsul scalar de pe $\mathbf{R}^n$.

b) Spunem că funcţia $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ are proprietatea de *creştere liniară* (C.L.) dacă există $r \geq 0$ şi există o funcţie continuă $a(.) : I \to \mathbf{R}_+$ astfel încât

$$||f(t,x)|| \leq a(t)||x|| \quad \forall t \in I, x \in \mathbf{R}^n \text{ cu } ||x|| > r.$$

c) Spunem că funcţia $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ are proprietatea de *creştere afină* (C.A.) dacă există $r \geq 0$ şi există funcţiile continue $a(.), b(.) : I \to \mathbf{R}_+$ astfel încât

$$||f(t,x)|| \leq a(t)||x|| + b(t) \quad \forall t \in I, x \in \mathbf{R}^n \text{ cu } ||x|| > r.$$

Propoziţie.
1) (C.L.) este echivalentă cu (C.A.).
2) (C.L.) implică (D).
3) Dacă $n = 1$ (C.L.) este echivalentă cu (D).
4) Dacă $n > 1$ (D) nu implică (C.L.).

Demonstraţie. Exerciţiu !

Teorema privind existenţă globală. *Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval şi $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă cu proprietatea de disipativitate bilaterală, care defineşte ecuaţia (1).*

Atunci $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ $\exists$ $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie (globală) a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

Demonstraţie. Cursul viitor !

Cursul 5

Teorema privind existenţă globală. *Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval şi $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă cu proprietatea de disipativitate bilaterală, care defineşte ecuaţia (1).*

Atunci $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ $\exists$ $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie (globală) a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

Demonstraţie. Presupunem că $I = (\alpha, \beta)$ (în mod similar tratându-se celelalte cazuri) şi considerăm $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$. Fie $\varphi(.) : I_0 \subset I \to \mathbf{R}^n$ o soluţie maximală a ecuaţiei care satisface $\varphi(t_0) = x_0$. Vom demonstra că $I_0 = I$. I_0 este un interval deschis (fiind intervalul de definiţie al unei soluţii maximale) de forma $I_0 = (a, b)$. Vom arăta că $\alpha = a$ şi $\beta = b$. De exemplu, vom demonstra că $\alpha = a$. Presupunem că $\alpha < a$. Arătăm, în continuare, că $\exists D_0 \subset I \times \mathbf{R}^n$ compact astfel încât $(t, \varphi(t)) \in D_0$ $\forall t \in (a, t_0]$. Deci în baza Teoremei asupra prelungirii soluţiilor soluţia (maximală !) admite o prelungire strictă la stânga, ceea ce este contradictoriu.

Rămâne, deci, de găsit compactul D_0. Funcţia $\varphi(.)$ este derivabilă (fiind soluţie a unei ecuaţii diferenţiale) deci şi funcţia $t \to <\varphi(t), \varphi(t)> = ||\varphi(t)||^2$ este derivabilă, având derivata

$$(||\varphi(t)||^2)' = 2 < \varphi(t), \varphi'(t) >= 2 < \varphi(t), f(t, \varphi(t)) >$$

Fie $r > 0$ şi $a(.) : I \to \mathbf{R}_+$ care apar în definiţia disipativităţii funcţiei $f(.,.)$.

Considerăm $A := \{t \in (a, t_0]; ||\varphi(t)|| \leq r\}$, $B := (a, t_0] \setminus A$ şi pe baza proprietăţi de disipativitate a lui $f(.,.)$ rezultă că

$$< \varphi(t), f(t, \varphi(t)) > \geq -a(t)||\varphi(t)||^2 \quad \forall t \in B$$

Prin urmare, dacă $t \in B$

$$(||\varphi(t)||^2)' = 2 < \varphi(t), f(t, \varphi(t)) > \geq -2a(t)||\varphi(t)||^2,$$

iar dacă $t \in A$, în baza inegalităţii Cauchy-Schwartz (i.e., $| < u, v > | \leq ||u||.||v||$ $\forall u, v \in \mathbf{R}^n$)

$$(||\varphi(t)||^2)' = 2 < \varphi(t), f(t, \varphi(t)) > \geq -2||\varphi(t)||.||f(t, \varphi(t)|| \geq -2rM,$$

unde am notat $M = \max_{t\in[a,t_0],x\in\overline{B}_r(0)} ||f(t,x)||$.

Aşadar, dacă $t \in (a, t_0]$

$$(||\varphi(t)||^2)' \geq \min\{-2rM, -2a(t)||\varphi(t)||^2\} \geq -2rM - 2a(t)||\varphi(t)||^2.$$

Integrăm în ultima inegalitate de la t la t_0 şi folosind formula Leibnitz-Newton obţinem

$$||\varphi(t_0)||^2 - ||\varphi(t)||^2 \geq -2rM(t_0 - t) - 2\int_t^{t_0} a(s)||\varphi(s)||^2 ds,$$

inegalitate care poate fi rescrisă sub forma

$$||\varphi(t)||^2 \leq ||\varphi(t_0)||^2 + 2rM(t_0 - a) + 2\int_t^{t_0} a(s)||\varphi(s)||^2 ds,$$

Utilizând Lema Bellman-Gronwall deducem

$$||\varphi(t)||^2 \leq [||\varphi(t_0)||^2 + 2rM(t_0 - a)]e^{2|\int_{t_0}^t a(s)ds|}.$$

Notăm $K^2 := [||\varphi(t_0)||^2 + 2rM(t_0 - a)]e^{2|\int_{t_0}^a a(s)ds|}$ şi avem că $\varphi(t) \in \overline{B}_K(0)$ şi deci compactul căutat este $D_0 = [a, t_0] \times \overline{B}_K(0)$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Continuitatea soluţiilor maximale în raport cu datele iniţiale şi parametrii

Pentru orice câmp vectorial $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuu, definit pe mulţimea deschisă $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ şi care admite proprietatea de unicitate a soluţiilor locale, ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1}$$

are o soluţie maximală unică prin fiecare punct $(t_0, x_0) \in D$, $\varphi_{t_0,x_0}(.) : I(t_0, x_0) = (t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0)) \to \mathbf{R}^n$.

Definiţie. Dacă $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie continuă definită pe mulţimea deschisă D astfel încât ecuaţia (1) admite proprietatea de unicitatea a soluţiilor, atunci se numeşte *curent maximal* al ecuaţiei (1) (sau al câmpului vectorial $f(.,.)$) funcţia $\alpha_f(.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ definită prin: $\forall(\tau,\xi) \in D$ aplicaţia $\alpha_f(.,\tau,\xi) : I(\tau,\xi) = (t^-(\tau,\xi), t^+(\tau,\xi)) \to \mathbf{R}^n$ este soluţia maximală a problemei Cauchy (f,τ,ξ); $D_f = \{(t,\tau,\xi); (\tau,\xi) \in D, t \in I(\tau,\xi)\}$.

Rezultatul principal al acestei secţiuni afirmă, că, în ipoteze de tip Cauchy-Lipschitz, soluţiile maximale ale ecuaţiei diferenţiale depind continuu de datele iniţiale.

Teorema asupra curentului maximal. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (1). Fie $\alpha_f(.,.,.) : D_f \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal al ecuaţiei (1). Atunci $D_f \subset \mathbf{R} \times D$ este o mulţime deschisă şi $\alpha_f(.,.,.)$ este o funcţie continuă.*

Demonstraţie. Fie $(t_0,x_0) \in D$ arbitrar. Notăm

$$I^*(t_0,x_0) = \{t \in I(t_0,x_0); \quad \exists I_1 \times I_0 \times G_0 \in \mathcal{V}(t,t_0,x_0)$$

$$\text{astfel încât} \quad \alpha_f(.,.,.)|_{I_1 \times I_0 \times G_0} \quad \text{este continuă}\}$$

şi să observăm că cele două afirmaţii ale teoremei sunt echivalente (simultan) cu afirmaţia

$$I^*(t_0,x_0) = I(t_0,x_0), \quad \forall(t_0,x_0) \in D. \tag{2}$$

Cum $I(t_0,x_0) = (t^-(t_0,x_0), t^+(t_0,x_0))$ este mulţime conexă (fiind interval), egalitatea (2) este implicată de

a) $I^*(t_0,x_0) \neq \emptyset$.

b) $I^*(t_0,x_0) \subset I(t_0,x_0)$ este deschisă.

c) $I^*(t_0,x_0) \subset I(t_0,x_0)$ este relativ închisă (i.e., $\overline{I^*(t_0,x_0)} \cap I(t_0,x_0)$ $= I^*(t_0,x_0)$).

a) În ipoteza noastră putem aplica Teorema privind existenţa, unicitatea şi continuitatea curentului local şi deducem că există $\beta(.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \in \mathcal{V}(t_0,t_0,x_0) \to \mathbf{R}^n$ continuă ca în Teorema privind existenţa, unicitatea şi continuitatea curentului local. Din teorema de unicitate globală rezultă că $\forall(\tau,\xi) \in I_0 \times G_0$ avem $\alpha_f(.,\tau,\xi)|_{I_1} = \beta(.,\tau,\xi)$, deci $I_1 \times I_0 \times G_0 \subset D_f$ şi restricţia $\alpha_f(.,.,.)|_{I_1 \times I_0 \times G_0} = \beta(.,.,.)$ este continuă, deci $t_0 \in I^*(t_0,x_0)$.

b) Dacă $t_1 \in I^*(t_0,x_0)$ atunci există $I_1 \times I_0 \times G_0 \in \mathcal{V}(t_1,t_0,x_0)$ astfel încât $\alpha_f(.,.,.)|_{I_1 \times I_0 \times G_0}$ este continuă şi deci $int(I_1) \subset I^*(t_0,x_0)$, adică $I^*(t_0,x_0)$ este deschisă.

c) Este suficient să demonstrăm incluziunea

$$\overline{I^*(t_0,x_0)} \cap I(t_0,x_0) \subset I^*(t_0,x_0)$$

pentru că incluziunea reciprocă este evidentă. Fie, deci, $t_1 \in \overline{I^*(t_0,x_0)} \cap I(t_0,x_0)$. În particular, $t_1 \in I(t_0,x_0)$ şi dacă notăm $x_1 = \alpha_f(t_1,t_0,x_0)$ atunci conform Teoremei privind existenţa, unicitatea şi continuitatea curentului local există $\beta(.,.,.) : I_1' \times I_0' \times G_0' \in \mathcal{V}(t_1,t_1,x_1) \to \mathbf{R}^n$ continuă ca în Teorema privind existenţa, unicitatea şi continuitatea curentului local.

Vom demonstra că $\exists t_2 \in I^*(t_0,x_0)$ şi $\exists I_0 \times G_0 \in \mathcal{V}(t_0,x_0)$ astfel încât restricţia lui $\alpha_f(t_2,.,.)$ la $I_0 \times G_0$ este continuă şi

$$\alpha_f(t,\tau,\xi) = \beta(t,t_2,\alpha_f(t_2,\tau,\xi)), \quad \forall (t,\tau,\xi) \in I_1' \times I_0 \times G_0. \tag{3}$$

De aici va rezulta că $I_1' \times I_0 \times G_0 \subset D_f$ şi $\alpha_f(.,.,.)|_{I_1' \times I_0 \times G_0}$ este continuă; deci $t_1 \in I^*(t_0,x_0)$.

Cum $\alpha_f(.,t_0,x_0)$ este continuă, în particular în t_1, pentru $G_0' \in \mathcal{V}(x_1)$ $\exists I_0 \in \mathcal{V}(t_1)$ astfel încât

$$\alpha_f(I_0,t_0,x_0) \subset G_0'.$$

Pe de altă parte, $t_1 \in \overline{I^*(t_0,x_0)}$. Deci pentru $I_0' \cap I_0 \in \mathcal{V}(t_1)$ $\exists t_2 \in (I_0' \cap I_0) \cap I^*(t_0,x_0)$. În particular, $t_2 \in I^*(t_0,x_0)$; deci există $I_1'' \times I_0'' \times G_0'' \in \mathcal{V}(t_2,t_0,x_0)$ în D_f astfel încât $\alpha_f(.,.,.)|_{I_1'' \times I_0'' \times G_0''}$ este continuă. În particular, $\alpha_f(t_2,.,.)|_{I_0'' \times G_0''}$ este continuă. În final micşorăm, eventual, pe $I_0'' \times G_0''$ până la $I_0 \times G_0$ astfel ca $\alpha_f(t_2, I_0 \times G_0) \subset G_0'$ (ceea ce se poate, din cauză că $\alpha_f(t_2,.,.)$ este continuă).

În cele din urmă egalitatea din (3) rezultă din proprietatea de unicitate şi din faptul că funcţiile $\alpha_f(.,\tau,\xi)$ şi $\beta(.,t_2,\alpha_f(t_2,\tau,\xi))$ sunt soluţii ale aceleaşi probleme Cauchy $(f,t_2,\alpha_f(t_2,\tau,\xi))$. $\square$

Continuitatea soluţiilor maximale în raport cu parametrii

În continuare vom considera ecuaţia diferenţială parametrizată

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda) \tag{1}$$

definită de o funcţie $f(.,.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$.

Definiţie. Dacă $f(.,.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie continuă astfel încât pentru orice $\lambda \in pr_3 D$ ecuaţia diferenţială definită de $f(.,.,\lambda)$ admite proprietatea de unicitatea a soluţiilor, atunci se numeşte *curent maximal parametrizat* al ecuaţiei (1) funcţia $\alpha_f(.,.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ definită prin: $\forall(\tau, \xi, \lambda) \in D$ aplicaţia $\alpha_f(.,\tau,\xi,\lambda) : I(\tau,\xi,\lambda) = (t^-(\tau,\xi,\lambda), t^+(\tau,\xi,\lambda)) \to \mathbf{R}^n$ este soluţia maximală a problemei Cauchy $(f(.,.,\lambda), \tau, \xi)$; $D_f = \{(t,\tau,\xi,\lambda); (\tau,\xi,\lambda) \in D, t \in I(\tau,\xi,\lambda)\}$.

Ecuaţiile diferenţiale parametrizate se reduc la ecuaţii diferenţiale (neparametrizate) cu ajutorul *ecuaţiei extinse asociate ecuaţiei diferenţiale parametrizate*. Mai precis, dacă $f(.,.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ este un câmp vectorial parametrizat atunci *câmpul vectorial extins* se defineşte ca fiind funcţia $\overline{f}(.,.) : D \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$

$$\overline{f}(t, \overline{x}) = (f(t,x,\lambda), 0_{\mathbf{R}^k}), \quad \forall(t,(x,\lambda)) = (t,\overline{x}) \in D.$$

Ecuaţia diferenţială extinsă asociată ecuaţiei diferenţiale parametrizate (1) este

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}(t,\overline{x}) \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda) \\ \frac{d\lambda}{dt} = 0_{\mathbf{R}^k}. \end{cases} \tag{2}$$

Evident ecuaţia (2) este o ecuaţie diferenţială obişnuită (neparametrizată) pe $\mathbf{R}^{n+k} \sim \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$. Echivalenţa dintre ecuaţiile (1) şi (2) este dată de următorul rezultat.

Propoziţia de echivalenţă. *Funcţia $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ este soluţie a ecuaţiei (1) dacă şi numai dacă funcţia $\overline{\varphi}(.) : I \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ dată de $\overline{\varphi}(t) := (\varphi(t), \lambda)$, $t \in I$ este soluţie a ecuaţiei (2).*

Demonstraţie Fie $\overline{\varphi}(.) := (\varphi_1(.), \varphi_2(.))$ soluţie a ecuaţiei (2). Atunci $\varphi_1'(t) \equiv f(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t))$ şi $\varphi_2'(t) \equiv 0$ deci există $\lambda \in pr_3 D$ astfel încât $\varphi_2(t) \equiv \lambda$ de unde rezultă $\varphi_1'(t) \equiv f(t, \varphi_1(t), \lambda)$, i.e. $\varphi_1(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1). Cum reciproca acestei afirmaţii este imediată propoziţia este demonstrată. $\square$

Rezultatele obţinute pentru ecuaţiile diferenţiale (neparametrizate) pot fi transpuse în cazul parametrizat.

Teorema asupra curentului maximal parametrizat. *Fie* $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ *deschisă şi* $f(.,.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ *continuă în raport cu toate argumentele şi local lipschitziană în raport cu al doilea şi al treilea argument care defineşte ecuaţia diferenţială parametrizată (1). Fie* $\alpha_f(.,.,.,.) : D_f \to \mathbf{R}^n$ *curentul maximal parametrizat al ecuaţiei (1). Atunci* $D_f \subset \mathbf{R} \times D$ *este o mulţime deschisă şi* $\alpha_f(.,.,.,.)$ *este o funcţie continuă.*

Demonstraţie. Câmpul vectorial extins $\overline{f}(.,.)$ definit în (2) verifică ipotezele Teoremei asupra curentului maximal, deci dacă $\alpha_{\overline{f}} : D_{\overline{f}} \to \mathbf{R}^n$ este curentul maximal (neparametrizat) al ecuaţiei (2), conform Teoremei asupra curentului maximal $D_{\overline{f}} \subset \mathbf{R} \times D$ este deschisă şi $\alpha_{\overline{f}}(.,.,.)$ este continuă. Cum, din Propoziţia de echivalenţă, $\alpha_{\overline{f}}(t,\tau,(\xi,\lambda)) = (\alpha_f(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)$ $\forall (t,\tau,\xi,\lambda) \in D_{\overline{f}} = D_f$ rezultă că $D_f \subset \mathbf{R} \times D$ este deschisă şi $\alpha_f(.,.,.,.)$ este continuă. □

Cursul 6

Ecuaţii diferenţiale liniare pe $\mathbf{R}^n$

În continuare vom nota cu $M_n(\mathbf{R})$ mulţimea matricilor pătratice de dimensiune n peste $\mathbf{R}$. Reamintim că pe spaţiul $M_n(\mathbf{R})$ se defineşte norma ,,operatorială”

$$||A|| = \sup\{||Ax||; \quad x \in \mathbf{R}^n,\ ||x|| \leq 1\}, \quad A \in M_n(\mathbf{R}).$$

Definiţie. Dacă $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ este o funcţie definită pe intervalul real I, spunem că $A(.)$ defineşte *ecuaţia diferenţială liniară* pe $\mathbf{R}^n$.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

Dacă elementele matricii $A(t)$ sunt $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$, $t \in I$ atunci ecuaţia (1) poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1,n} \tag{2}$$

care poartă denumirea de *sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de dimensiune n.*

Atunci când funcţia $A(.)$ este continuă, ecuaţia (1) admite existenţa şi unicitatea globală a soluţiilor.

Teorema 1. **(E.U.G.)** *Fie $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ continuă care defineşte ecuaţia (1). Atunci $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ $\exists! \varphi_{t_0,x_0}(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie a ecuaţiei (1) care satisface condiţia iniţială $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$.*

Demonstraţie. Fie $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ definită prin $f(t, x) = A(t)x$. Este evident faptul că $f(.,.)$ este continuă, local lipschitziană în raport cu al doilea argument (fiind liniară în al doilea argument) şi $f(.,.)$ are proprietatea de creştere liniară ($||f(t, x)|| = ||A(t)x|| \leq ||A(t)||.||x||$), deci are şi proprietatea disipativitate bilaterală.

Aşadar, din Teorema Cauchy Lipschitz are E.U.L., deci şi U.G. Din Teorema privind existenţă globală are şi E.G.. □

Pe baza Teoremei 1 vom nota mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1) cu

$$S_{A(.)} = \{\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n; \quad \varphi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei (1)}\}$$

Corolar (Soluţia banală). *Fie $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ continuă care defineşte ecuaţia (1). Dacă $\varphi(.) \in S_{A(.)}$, atunci $\varphi(t) \equiv 0$ dacă şi numai dacă $\exists t_0 \in I$ astfel încât $\varphi(t_0) = 0$.*

Demonstraţie. Fie $\varphi(.) \in S_{A(.)}$ astfel încât $\exists t_0 \in I$ cu $\varphi(t_0) = 0$. Fie $\psi(.) : I \to \mathbf{R}^n$ definită prin $\psi(t) \equiv 0$. Cum $\psi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1) care evident satisface $\psi(t_0) = 0$, din Teorema 1 deducem că $\varphi(t) \equiv \psi(t) \equiv 0$. Reciproca este evidentă. □

Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii liniare pe $\mathbf{R}^n$ este un spaţiu vectorial de dimensiune n.

Teorema 2 (Spaţiul soluţiilor). *Fie $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ continuă care defineşte ecuaţia (1). Atunci $S_{A(.)}$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune n al spaţiului vectorial al funcţiilor de clasă C^1 definite pe I cu valori în $\mathbf{R}^n$, $C^1(I, \mathbf{R}^n)$.*

Demonstraţie. Demonstrarea faptului că $S_{A(.)} \subset C^1(I, \mathbf{R}^n)$ este un subspaţiu vectorial este un simplu exerciţiu.

Arătăm în continuare că $dim S_{A(.)} = n$.

Fie $t_0 \in I$ arbitrar şi $E_{t_0}(.) : S_{A(.)} \to \mathbf{R}^n$, *aplicaţia de evaluare*, definită prin

$$E_{t_0}(\varphi(.)) = \varphi(t_0).$$

Evident $E_{t_0}(.)$ este liniară. Vom arăta că este şi bijectivă. Fie $\varphi_1, \varphi_2 \in S_{A(.)}$ astfel încât $E_{t_0}(\varphi_1) = E_{t_0}(\varphi_2)$. Prin urmare, $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ şi în baza unicităţi globale (Teorema 1) decucem $\varphi_1 = \varphi_2$, adică E_{t_0} este injectivă. Pe de alta parte, $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$ $\exists ! \varphi_{t_0,\xi}(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie cu $\varphi_{t_0,\xi}(t_0) = \xi$ (tot în baza Teoremei 1) şi deci $E_{t_0}(\varphi_{t_0,\xi}) = \varphi_{t_0,\xi}(t_0) = \xi$, deci E_{t_0} este şi surjectivă.

Aşadar, $E_{t_0}(.)$ este un izomorfism şi teorema este demonstrată. □

Observaţie. Cum $S_{A(.)} \subset C^1(I, \mathbf{R}^n)$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune n, există $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ o bază. Mulţimea acestor funcţii $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)\}$ poartă denumirea de *sistem fundamental de soluţii* pentru ecuaţia (1). Cum orice element din $S_{A(.)}$ se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară de elementele bazei, înseamnă că dacă $\varphi(.) \in S_{A(.)}$, atunci există constantele $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ unic determinate, astfel încât

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t), \quad t \in I. \tag{3}$$

În terminologia clasică a ecuaţiilor diferenţiale relaţia (3) poartă denumirea de *soluţie generală a ecuaţiei* (1).

Definiţie. Dacă $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_m(.)\} \subset S_{A(.)}$ şi definim $X(t) = col[\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)]$, $t \in I$ (i.e., matricea ale cărei coloane sunt $\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)$), $X(.)$ se numeşte *matrice de soluţii* ale ecuaţiei (1).

Dacă $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ este un sistem fundamental de soluţii atunci $X(t) = col[\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)]$ se numeşte *matrice fundamentală de soluţii.*

Observaţie. Dacă $X(t) = col[\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)]$ cu $\varphi_i(.) \in S_{A(.)}$, $i = \overline{1, m}$, din faptul că fiecare coloană a matricii $X(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1) rezultă că $X(.)$ este soluţie pentru ecuaţia matriceală

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad t \in I. \tag{4}$$

În general, dacă $X(.) : I \to M_{n,m}(\mathbf{R})$ este derivabilă şi verifică (4) atunci $X(.)$ se numeşte *soluţie matriceală a ecuaţiei* (1).

Observaţie. Dacă $X(t) = col[\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)]$ este o matrice fundamentală de soluţii atunci soluţia generală (3) poate fi rescrisă sub formă: $\varphi(.) \in S_{A(.)}$ dacă şi numai dacă există $c \in \mathbf{R}^n$ (vector coloană) de componente $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\varphi(t) = X(t)c, \quad t \in I. \tag{5}$$

Trebuie remarcat faptul că pentru elementele din $S_{A(.)}$ există criterii de independenţă liniară mai tari decât liniar independenţa din $C^1(I, \mathbf{R}^n)$. Acest lucru se poate observa în următorul rezultat.

Propoziţie (Soluţii liniar independente). *Fie* $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_m(.)\} \subset S_{A(.)}$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_m(.)\} \subset S_{A(.)}$ *sunt liniar independente.*

b) $\{\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)\} \subset \mathbf{R}^n$ *sunt vectori liniari independenţi* $\forall t \in I$.

c) $\exists t_0 \in I$ *astfel încât* $\{\varphi_1(t_0), ..., \varphi_m(t_0)\} \subset \mathbf{R}^n$ *sunt vectori liniari independenţi.*

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b) rezultă imediat din faptul că funcţia E_t (definită în demonstraţia Teoremei 2) este izomorfism liniar (care păstrează liniar independenţa); b) $\Rightarrow$ c) este evident; c) $\Rightarrow$ a) rezultă, la fel, din faptul că funcţia E_{t_0} este izomorfism liniar. $\square$

Definiţie. Fie $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.) \subset S_{A(.)}$. Se numeşte *wronskianul* soluţiilor $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)$, funcţia $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(.) : I \to \mathbf{R}$ definită prin

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) := det[col(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))], \quad t \in I.$$

Următoarea teoremă, cunoscută sub denumirea de teorema lui Liouville, este un rezultat important în teoria ecuaţiilor diferenţiale liniare.

Teoremă (Liouville). *Dacă* $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.) \subset S_{A(.)}$, *atunci wronskianul acestor soluţii verifică relaţia*

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))ds} \quad \forall t, t_0 \in I \tag{6}$$

(unde, dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbf{R})$, *urma sa este definită prin* $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$*).*

Demonstraţie. Având în vedere Propoziţia privind structura soluţiilor unei ecuaţii liniare scalare, afirmaţia (6) este echivalentă cu faptul că funcţia $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(.)$ este soluţie a ecuaţiei liniare

$$\frac{dy}{dt} = Tr(A(t))y \tag{7}$$

Din ipoteză ştim că $\varphi_i(.) = (\varphi_i^j(.))_{j=\overline{1,n}}$, $i = \overline{1,n}$ sunt soluţii ale ecuaţiei (1) ceea ce poate fi scris sub forma

$$(\varphi_i^j(t))' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)\varphi_i^k(t) \quad i, j = \overline{1,n}, t \in I. \tag{8}$$

Din definiţia unui determinant avem, pentru $t \in I$,

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = det(\varphi_i^j(t)) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sgn(\sigma)\varphi^1_{\sigma(1)}(t)...\varphi^n_{\sigma(n)}(t) \tag{9}$$

unde Σ_n este grupul permutărilor mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$, iar $sgn(\sigma)$ este semnul permutării σ_n. Din (9) rezultă, evident, că $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(.)$ este derivabilă, iar derivata sa este (folosind (8))

$$W'_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) =$$

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_n} sgn(\sigma) \sum_{j=1}^{n} \varphi^1_{\sigma(1)}(t)...\varphi^{j-1}_{\sigma(j-1)}(t)(\varphi^j_{\sigma(j)}(t))'\varphi^{j+1}_{\sigma(j+1)}(t)...\varphi^n_{\sigma(n)}(t)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t) \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sgn(\sigma)\varphi^1_{\sigma(1)}(t)...\varphi^{j-1}_{\sigma(j-1)}(t)\varphi^k_{\sigma(j)}(t)\varphi^{j+1}_{\sigma(j+1)}(t)...\varphi^n_{\sigma(n)}(t).$$

Cum

$$\Delta_{jk}(t) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sgn(\sigma)\varphi^1_{\sigma(1)}(t)...\varphi^{j-1}_{\sigma(j-1)}(t))\varphi^k_{\sigma(j)}(t)\varphi^{j+1}_{\sigma(j+1)}(t)...\varphi^n_{\sigma(n)}(t).$$

este determinantul unei matrici cu două linii identice dacă $j \neq k$ şi deci este 0, şi coincide cu $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t)$ dacă $j = k$ vom avea că

$$W'_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = (\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t))W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t),$$

adică $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(.)$ este soluţia ecuaţiei liniare scalare (7) şi teorema este demonstrată. □

Observaţie. Fie $t_0 \in I, x_0 \in \mathbf{R}^n$ şi $X(.)$ o matrice fundamentală de soluţii pentru ecuaţia (1). Atunci unica soluţie a problemei Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

este dată de $\varphi_{t_0,x_0}(t) = X(t)(X(t_0))^{-1}x_0, t \in I$.

Într-adevăr ştim că $\varphi_{t_0,x_0}(t) = X(t)c, t \in I$, unde $c \in \mathbf{R}^n$. Din condiţia $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$ deducem că $X(t_0)c = x_0$. Cum $X(t_0)$ este inversabilă deducem $c = (X(t_0))^{-1}x_0$.

Propoziţie. *Fie $X(.)$ o matrice fundamentală de soluţii pentru ecuaţia (1). Atunci funcţia $\mathcal{R}(.,.) : I \times I \to M_n(\mathbf{R})$ definită prin*

$$\mathcal{R}(t,s) = X(t)(X(s))^{-1}, \quad t,s \in I$$

nu depinde de alegerea matricii fundamentale de soluţii $X(.)$.

În plus, pentru orice $s \in I$, $\mathcal{R}(.,s)$ verifică

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t}(t,s) = A(t)\mathcal{R}(t,s), \quad \mathcal{R}(s,s) = I_n \quad \forall t \in I \tag{10}$$

unde I_n este matricea unitate de ordin n.

Demonstraţie. Faptul că $\mathcal{R}(.,s)$ verifică (10) rezultă din Observaţia anterioară cu $t_0 = s$ şi luând succesiv $x_0^1 = e^1, ..., x_0^n = e^n$ cu $\{e^1, ..., e^n\}$ baza canonică în $\mathbf{R}^n$. Din unicitatea soluţiei problemei Cauchy (10) rezultă că $\mathcal{R}(.,.)$ nu depinde de matricea fundamentală de soluţii $X(.)$. $\square$

Definiţie. Funcţia $\mathcal{R}(.,.)$ definită în Propoziţia precedentă se numeşte *rezolvanta ecuaţiei* (1). O altă denumire a lui $\mathcal{R}(.,.)$ este aceea de *operator de evoluţie* generat de $A(.)$.

Observaţie. Notăm faptul că $\mathcal{R}(.,.)$ are următoarele proprietăţi

$$\mathcal{R}(s,s) = I_n \quad \forall s \in I,$$

$$\mathcal{R}(t,s)\mathcal{R}(s,\tau) = \mathcal{R}(t,\tau) \quad \forall t,s,\tau \in I.$$

Observaţia. Soluţia unică a problemei Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale liniare pe $\mathbf{R}^n$ poate fi rescrisă folosind rezolvanta $\mathcal{R}(.,.)$. Mai exact, $\forall t_0, x_0 \in \mathbf{R}^n$ unica soluţie a problemei Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

este dată de $\varphi_{t_0,x_0}(t) = \mathcal{R}(t,t_0)x_0$.

Cursul 7

Ecuaţii liniare pe $\mathbf{R}^n$ cu coeficienţi constanţi

În această secţiune considerăm cazul particular al ecuaţiilor liniare pe $\mathbf{R}^n$ în care funcţia $A(.)$ care defineşte ecuaţia liniară este constantă.

Spunem că o matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ defineşte *ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi pe* $\mathbf{R}^n$

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{1}$$

Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, atunci ecuaţia (1) poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

adică un *sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de dimensiune n.*

Cum ecuaţia (2) este un caz particular al ecuaţiei (1) ($A(t) \equiv A$) toate rezultatele din cursul trecut rămân valabile şi pentru ecuaţia (1).

Vom nota mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1) cu

$$S_A = \{\varphi(.) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n; \quad \varphi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei (1)}\} \tag{3}$$

Observaţie. Prin inducţie după $k \in \mathbf{N}$ rezultă imediat că, dacă $\varphi(.) \in S_A$, atunci $\varphi(.)$ este de k ori derivabilă şi

$$\varphi^{(k)}(t) = A^k \varphi(t) \quad k \in \mathbf{N}, t \in I.$$

Prin urmare, $\varphi(.)$ este de clasă C^∞ şi seria Taylor a lui $\varphi(.)$ în $t = 0$ este

$$\sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) = (\sum_{k \geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}) \varphi(0).$$

Se pune, deci, problema de a studia seria de puteri $\sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}$. Prin analogie cu cazul scalar vom demonstra că seria $\sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}$ este uniform convergentă pe mulţimi compacte din $\mathbf{R}$ şi vom arăta ca suma acestei serii este unica matrice fundamentală de soluţii a ecuaţiei (1) care satisface $X(0) = I_n$, unde I_n este matricea identitate.

Definiţie. a) Seria $\sum_{k\geq 0} A_k$, cu $A_k \in M_n(\mathbf{R})$ este *convergentă* la $A \in M_n(\mathbf{R})$ dacă

$$\lim_{m\to\infty} ||\sum_{k=0}^{m} A_k - A|| = 0.$$

b) Fie $A_k(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R}), k \in \mathbf{N}$. Spunem că seria de funcţii cu valori matrici $\sum_{k\geq 0} A_k(t)$ este *uniform convergentă* pe I la $A(.) : I \to M_n(\mathbf{R})$ dacă $\forall \epsilon > 0$ $\exists m_\epsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât $\forall m \geq m_\epsilon$

$$||\sum_{k=0}^{m} A_k(t) - A(t)|| \leq \epsilon, \forall t \in I.$$

Teoremă (Legătura cu ecuaţiile liniare). *Pentru orice* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *seria*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!},$$

unde prin convenţie $A^0 = I_n$, *este uniform convergentă pe orice interval compact* I *din* $\mathbf{R}$. *În plus, suma ei* $\exp(tA)$ *este derivabilă pe* $\mathbf{R}$ *şi*

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A.\exp(tA) = \exp(tA).A \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Demonstraţie. Din proprietăţile normei unei matrici avem

$$||\sum_{k=m}^{m+p} \frac{t^k A^k}{k!}|| \leq \sum_{k=m}^{m+p} \frac{(|t|.||A||)^k}{k!} \quad \forall m, p \in \mathbf{N}, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Această inegalitate ne arată că seria considerată satisface condiţia lui Cauchy uniform pentru t în orice mulţime compactă întrucât seria cu termeni pozitivi care o majorează are această proprietate. Deci şirul sumelor parţiale este un şir Cauchy uniform pe orice interval compact I şi ca atare, seria considerată este uniform convergentă pe I.

Pentru a demonstra cea de-a doua parte a teoremei începem prin a observa că seria este derivabilă termen cu termen şi seria derivatelor este la rândul ei uniform convergentă pe orice interval compact din $\mathbf{R}$. Este uşor de văzut că $\frac{d}{dt}(I_n) = 0$ şi

$$\frac{d}{dt}(\frac{t^k A^k}{k!}) = A.\frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}.A \quad \forall k \in \mathbf{N}, k \geq 1, t \in \mathbf{R}.$$

De aici rezultă că

$$||\sum_{k=m}^{m+p} \frac{d}{dt}(\frac{t^k A^k}{k!})|| \leq ||A|| \sum_{k=m}^{m+p} \frac{(|t|.||A||)^{k-1}}{(k-1)!},$$

inegalitate care arată că seria derivatelor satisface condiţia lui Cauchy uniform pentru t din orice interval compact. Ca atare, suma seriei iniţiale este derivabilă şi derivata ei este dată de formula

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A.(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}) = (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}).A$$

şi demonstraţia este încheiată. □

Câteva dintre proprietăţiile exponenţialei unei matrici sunt prezentate în rezultatul următor.

Propoziţie. *Pentru orice* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *seria* $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ *este convergentă. În plus,*

a) $\exp(0_n) = I_n$.
b) Dacă $AB = BA$ *atunci* $\exp(A + B) = \exp(A).\exp(B)$.
c) $\forall A \in M_n(\mathbf{R})$ $\exists(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.
d) Dacă $A = C^{-1}BC$ *atunci* $\exp(A) = C^{-1}\exp(B)C$.

Demonstraţie. Exerciţiu!

O consecinţă imediată a Teoremei anterioare este:

Corolar. *Dacă* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *atunci* $\varphi(.) \in S_A$ *dacă şi numai dacă* $\forall t_0 \in \mathbf{R}$ $\exists x_0 \in \mathbf{R}^n$ *astfel încât* $\varphi(t) = \exp((t - t_0)A)x_0$ $\forall t \in \mathbf{R}$.

În plus, rezolvanta ecuaţiei (1) este dată de $\mathcal{R}(t, s) = \exp((t-s)A)$ $t, s \in \mathbf{R}$.

Demonstraţie. Fie $t_0 \in \mathbf{R}$ şi $x_0 \in \mathbf{R}^n$ astfel încât $\varphi(t) = \exp((t - t_0)A)x_0$. $\varphi(.)$ este derivabilă (din Teoremă) şi $\varphi'(t) = A\varphi(t)$. Evident $\varphi(t_0) = \exp(0)x_0 = x_0$.

Reciproc, fie $\varphi(.) \in S_A$ $t_0 \in \mathbf{R}$ şi $x_0 \in \mathbf{R}^n$ astfel încât $\varphi(t_0) = x_0$. Pe de altă parte, funcţia $\psi(t) = \exp((t-t_0)A)x_0$ este soluţie a ecuaţiei (1) şi satisface $\psi(t_0) = x_0$; deci din proprietatea de unicitate a soluţiilor deducem $\varphi(t) \equiv \psi(t)$. Ultima afirmaţie rezultă imediat din definiţia rezolvantei. □

Valori proprii. Vectori proprii. Soluţiile ecuaţiilor liniare pe $\mathbf{R}^n$ cu coeficienţi constanţi

a) Dacă $A \in M_n(\mathbf{R})$ notăm $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C};\ det(A-\lambda I_n) = 0\}$. $\lambda \in \sigma(A)$ se numeşte *valoare proprie* a lui A.

b) Pentru $\lambda \in \sigma(A)$ notăm $VP_A(\lambda) = \{u \in \mathbf{C}^n \backslash \{0\};\ (A-\lambda I_n)u = 0\}$. $u \in VP_A(\lambda)$ se numeşte *vector propriu* corespunzător valorii proprii λ.

Propoziţia 1. *Dacă $A \in M_n(\mathbf{R})$ şi $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbf{R}$ atunci $VP_A(\lambda) \cap \mathbf{R}^n \neq \emptyset$.*

Demonstraţie. Fie $u \in \mathbf{C}^n \backslash \{0\}$ cu $(A-\lambda I_n)u = 0$. Cum $u = v + iw$ cu $v, w \in \mathbf{R}^n$, egalez parţile reale şi imaginare din egalitatea $(A-\lambda I_n)v + i(A-\lambda I_n)w = 0$; de unde găsim $(A-\lambda I_n)v = (A-\lambda I_n)w = 0$. Cum $u \neq 0$, cel puţin unul dintre v şi w este nenul; ca atare este vector propriu real. □

Propoziţia 2. *Dacă $A \in M_n(\mathbf{R})$, $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)$ şi $u = v + iw \in VP_A(\lambda)$ atunci $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta \in \sigma(A)$ şi $\overline{u} = v - iw \in VP_A(\overline{\lambda})$.*

Demonstraţie. În egalitatea $det(A-\lambda I_n) = 0$ se trece la conjugată şi se obţine

$$0 = \overline{det(A-\lambda I_n)} = det(\overline{A-\lambda I_n}) = det(A-\overline{\lambda} I_n).$$

Analog, conjugând în $(A-\lambda I_n)u = 0$ avem

$$0 = \overline{(A-\lambda I_n)u} = \overline{(A-\lambda I_n)}\,\overline{u} = (A-\overline{\lambda} I_n)\overline{u}.$$

□

Propoziţia 3 (Legătura cu ecuaţiile liniare).

1. Dacă $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbf{R}$, $u \in VP_A(\lambda) \cap \mathbf{R}^n$ şi dacă definim $\varphi_\lambda(t) = e^{\lambda t}u$ atunci $\varphi_\lambda(.) \in S_A$.

2. Dacă $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)$, $u = v + iw \in VP_A(\lambda)$ *şi dacă definim* $\varphi_\lambda(t) = Re(e^{\lambda t}u)$, $\varphi_{\overline{\lambda}}(t) = Im(e^{\lambda t}u)$ *atunci* $\varphi_\lambda(.), \varphi_{\overline{\lambda}}(.) \in S_A$.

Demonstraţie. 1. $\varphi'_\lambda(t) = \lambda e^{\lambda t}u = Ae^{\lambda t}u = A\varphi_\lambda(t)$ (am folosit $u \in VP_A(\lambda)$, i.e., $Au = \lambda u$).

2. Fie $\tilde{\varphi}_\lambda(t) = e^{\lambda t}u = Re(\tilde{\varphi}_\lambda(t)) + iIm(\tilde{\varphi}_\lambda(t)) = \varphi_\lambda(t) + i\varphi_{\overline{\lambda}}(t)$. Acelaşi calcul ca la 1. ne dă $\tilde{\varphi}'_\lambda(t) = A\tilde{\varphi}_\lambda(t)$. E suficient să egalez parţile reale şi imaginare din această egalitate. □

Propoziţia 4 (Vectori proprii liniar independenţi). *Fie* $A \in M_n(\mathbf{R})$.

1. Dacă $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \sigma(A)$, $\lambda_j \neq \lambda_p$ $\forall j \neq p$ *şi dacă* $u_j \in VP_A(\lambda_j)$, $j = 1, ..., k$ *atunci* $\{u_1, ..., u_k\} \subset \mathbf{C}^n$ *sunt liniar independenţi.*

2. Dacă $\lambda_1, ..., \lambda_l \in \sigma(A) \cap \mathbf{R}$, $u_j \in VP_A(\lambda_j) \cap \mathbf{R}^n$, $j = 1, ..., l$, *dacă* $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \in \sigma(A)$, $u_j = v_j + iw_j \in VP_A(\lambda_j)$, $j = l+1, ..., k$ *şi dacă* $\lambda_j \neq \lambda_p$ $\forall j \neq p$ *atunci* $\{u_1, ..., u_l, v_{l+1}, ..., v_k, w_{l+1}, ..., w_k\} \subset \mathbf{R}^n$ *sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie. 1. Inducţie după k.

Pentru $k = 1$, $u_1 \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, i.e., $u_1 \neq 0$.

Pasul de inducţie. Presupunem adevărat pentru k şi demonstrăm pentru $k + 1$. Fie c_j astfel ca

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j u_j = 0. \tag{4}$$

Înmulţim la stânga cu A şi folosesc că u_j sunt vectori proprii pentru λ_j. Avem

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j \lambda_j u_j = 0. \tag{5}$$

Înmulţim cu λ_{k+1} şi vom avea

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j \lambda_{k+1} u_j = 0. \tag{6}$$

Scădem (5) şi (6). Se găseşte

$$\sum_{j=1}^{k} c_j (\lambda_{k+1} - \lambda_j) u_j = 0.$$

Conform ipotezei de inducţie $c_j(\lambda_{k+1} - \lambda_j) = 0$, $j = 1, ..., k$. Dar, prin ipoteză, λ_j sunt diferiţi. Ca atare, $c_j = 0$, $j = 1, ..., k$. Din (4), rezultă şi $c_{k+1} = 0$.

2. Fie

$$\sum_{j=1}^{l} c_j u_j + \sum_{j=l+1}^{k} c_j v_j + \sum_{j=l+1}^{k} d_j w_j = 0$$

Din $u_j = v_j + iw_j$ şi $\overline{u}_j = v_j - iw_j$ deducem $v_j = \frac{1}{2}(u_j + \overline{u}_j)$ şi $w_j = \frac{1}{2i}(u_j - \overline{u}_j)$, adică

$$\sum_{j=1}^{l} c_j u_j + \sum_{j=l+1}^{k} c_j \frac{1}{2}(u_j + \overline{u}_j) + \sum_{j=l+1}^{k} d_j \frac{1}{2i}(u_j - \overline{u}_j) = 0,$$

sau

$$\sum_{j=1}^{l} c_j u_j + \sum_{j=l+1}^{k} (\frac{c_j}{2} + \frac{d_j}{2i}) u_j + \sum_{j=l+1}^{k} (\frac{c_j}{2} - \frac{d_j}{2i}) \overline{u}_j = 0,$$

Din 1. avem $c_j = 0$, $j = 1, ..., l$, $c_j + \frac{d_j}{i} = c_j - \frac{d_j}{i} = 0$, $j = l+1, ..., k$, de unde se deduce $c_j = 0$, $j = 1, ..., k$ şi $d_j = 0$, $j = l+1, ..., k$. $\square$

Teoremă (Structura soluţiilor în cazul valoriilor proprii simple). *Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$ care defineşte ecuaţia $\frac{dx}{dt} = Ax$.*

Presupunem că $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ distincte. Definim

$$\varphi_\lambda(t) = \begin{cases} e^{\lambda t} u_\lambda \quad dac\breve{a} \quad \lambda \in \sigma(A) \cap \mathbf{R}, u_\lambda \in VP_A(\lambda) \cap \mathbf{R}^n \\ Re(e^{\lambda t} u_\lambda) \quad dac\breve{a} \quad \lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A), \beta > 0, u_\lambda \in VP_A(\lambda) \\ Im(e^{\lambda t} u_\lambda) \quad dac\breve{a} \quad \lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A), \beta > 0, u_\lambda \in VP_A(\lambda) \end{cases}$$

Atunci $\{\varphi_\lambda(.)\}_{\lambda \in \sigma(A)} \subset S_A$ este un sistem fundamental de soluţii.

Demonstraţie. Din Propoziţia 3, $\varphi_\lambda(.) \subset S_A$. Cum avem n soluţii este suficient de arătat liniar independenţa. Din Propoziţia (Soluţii liniar independente) liniar independenţa acestor soluţii în S_A este echivalentă cu liniar independenţa valorilor (de exemplu, în $t = 0$) acestor soluţii în $\mathbf{R}^n$. Dar $\{\varphi_\lambda(0)\}_{\lambda \in \sigma(A)} \subset \mathbf{R}^n$ sunt liniar independente din Propoziţia 4 punctul 2. $\square$

Algoritm. (cazul valoriilor proprii simple)

1. Rezolvă ecuaţia caracteristică $det(A - \lambda I_n) = 0$. Se obţine $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ distincte.

2. Pentru $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbf{R}$ caută $u_\lambda \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ astfel încât $(A - \lambda I_n)u_\lambda = 0$. Scrie soluţia $\varphi_\lambda(t) = e^{\lambda t} u_\lambda$.

3. Pentru $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)$, $\beta > 0$ caută $u_\lambda \in \mathbf{C}^n \backslash \{0\}$ astfel încât $(A - \lambda I_n)u_\lambda = 0$. Scrie soluţiile $\varphi_\lambda(t) = Re(e^{\lambda t} u_\lambda)$, $\varphi_{\overline{\lambda}}(t) = Im(e^{\lambda t} u_\lambda)$.

4. Renumerotează $\{\varphi_\lambda(.)\}_{\lambda \in \sigma(A)} = \{\varphi_i(.)\}_{i=1,...,n}$, care este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei şi scrie soluţia generală

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t) \quad c_i \in \mathbf{R}, i = 1, ..., n.$$

Cursul 8

Structura soluţiilor în cazul general

Lemă. *Fie* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *care defineşte ecuaţia* $\frac{dx}{dt} = Ax$, $\lambda \in \sigma(A)$, $P_j \in \mathbf{C}^n$ *şi funcţia* $\tilde{\varphi}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j t^j$.

Atunci $\tilde{\varphi}'(t) \equiv A\tilde{\varphi}(t)$ *dacă şi numai dacă* $(A - \lambda I_n)^m P_0 = 0$ *şi* $P_j = \frac{1}{j!}(A - \lambda I_n)^j P_0$, $j = 1, ..., m-1$.

Demonstraţie. $\tilde{\varphi}'(t) \equiv A\tilde{\varphi}(t)$ dacă şi numai dacă

$$\lambda e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j t^j + e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} j P_j t^{j-1} \equiv A e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j t^j.$$

Identificarea coeficienţilor

$$\lambda P_{m-1} = AP_{m-1}, \qquad (A - \lambda I_n)P_{m-1} = 0,$$

$$\lambda P_j + (j+1)P_{j+1} = AP_j, \quad P_{j+1} = \frac{1}{j+1}(A - \lambda I_n)P_j, \quad j = 0, ..., m-2.$$

De unde avem $P_1 = (A - \lambda I_n)P_0$, $P_2 = \frac{1}{2}(A - \lambda I_n)P_1 = \frac{1}{2!}(A - \lambda I_n)^2 P_0$,... $P_j = \frac{1}{j!}(A - \lambda I_n)^j P_0$.

Pe de altă parte, $0 = (A - \lambda I_n)P_{m-1} = (A - \lambda I_n)\frac{1}{(m-1)!}(A - \lambda I_n)^{m-1} P_0 = \frac{1}{(m-1)!}(A - \lambda I_n)^m P_0$. $\square$

Teorema asupra formei canonice Jordan a unei matrice. *Pentru orice matrice pătratică cu elemente complexe* $A \in M_n(\mathbf{C})$ *există o matrice nesingulară* $C \in M_n(\mathbf{C})$ *astfel încât*

$$A = C^{-1} J C$$

unde J *este forma canonică Jordan a matricei* A.

Mai precis, dacă $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice $det(A - \lambda I_n) = 0$ *având ordinele de multiplicitate $m_1, ..., m_r$, $\sum_{p=1}^{r} m_p = n$ atunci*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & J_p \end{pmatrix} \text{ unde } J_r = \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_r & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_r \end{pmatrix}$$

este o celulă Jordan de ordin m_r, $r = \overline{1,p}$.

În plus, $s_r = dim(J_r) \leq multiplicitatea(\lambda_r) =: m_{\lambda_r}$ şi $\sum_{\lambda_r = \lambda} dim(J_r) = m_\lambda$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

Formă echivalentă. *Pentru orice $A \in M_n(\mathbf{C})$ există $\mathcal{B}_J = \{b_r^s; r = 1, ..., p, \quad s = 1, ..., s_r\} \subset \mathbf{C}^n$ bază (baza canonică Jordan) astfel încât:*

1) Pentru orice $r = 1, 2, ..., p$ există $\lambda_r \in \sigma(A)$ cu

$$Ab_r^1 = \lambda_r b_r^1 + b_r^2$$

$$Ab_r^2 = \lambda_r b_r^2 + b_r^3$$

$$.................................$$

$$Ab_r^{s_r - 1} = \lambda_r b_r^{s_r - 1} + b_r^{s_r}$$

$$Ab_r^{s_r} = \lambda_r b_r^{s_r}$$

2) $s_r \leq m_{\lambda_r}$, $\sum_{\lambda_r = \lambda} s_r = m_\lambda$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

3) $b_r^s \in \mathbf{R}^n$ dacă $\lambda_r \in \mathbf{R}$ şi dacă $Im(\lambda_r) \neq 0$ atunci $b_r^s = \overline{b_t^s}$ dacă $\lambda_r = \overline{\lambda_t}$.

Corolarul 1. *Fie $\mathcal{B}_J = \{b_r^s; \; r = 1, ..., p, s = 1, ..., s_r\} \subset \mathbf{C}^n$ baza canonică Jordan. Atunci*

$$\mathcal{B}_J^{\mathbf{R}^n} = \{b_r^s; \lambda_r \in \mathbf{R}, s = 1, ..., s_r\} \cup \{Re(b_r^s), Im(b_r^s); Im(\lambda_r) > 0, s = 1, ..., s_r\} \subset \mathbf{R}^n$$

este bază (urma pe $\mathbf{R}^n$ a bazei canonice Jordan).

Demonstraţie. Cum avem n vectori este de ajuns să arătăm doar liniar independenţa lor. Fie următoarea combinatie liniară a lor nulă

$$\sum_{\lambda_r \in \mathbf{R}, s=1,...,s_r} c_r^s b_r^s + \sum_{Im(\lambda_r) > 0, s=1,...,s_r} c_r^s Re(b_r^s) + \sum_{Im(\lambda_r) > 0, s=1,...,s_r} k_r^s Im(b_r^s) = 0.$$

Cum $Re(b_r^s) = \frac{1}{2}(b_r^s + \overline{b_r^s})$ şi $Im(b_r^s) = \frac{1}{2i}(b_r^s - \overline{b_r^s})$ egalitatea de mai sus devine

$$\sum_{\lambda_r \in \mathbf{R}, s=1,...,s_r} c_r^s b_r^s + \sum_{Im(\lambda_r)>0, s=1,...,s_r} \frac{1}{2}(c_r^s + \frac{1}{i}k_r^s) b_r^s + \sum_{Im(\lambda_r)>0, s=1,...,s_r} \frac{1}{2}(c_r^s - \frac{1}{i}k_r^s)\overline{b_r^s} = 0.$$

Dar $\mathcal{B}_J \subset \mathbf{C}^n$ este bază. Ca atare, toţi coeficienţii sunt nuli, i.e., $c_r^s = 0$ $\forall \lambda_r \in \mathbf{R}, s = 1, ..., s_r$ şi

$$c_r^s + \frac{1}{i}k_r^s = 0,$$

$$c_r^s - \frac{1}{i}k_r^s = 0$$

$\forall Im(\lambda_r) > 0, s = 1, ..., s_r$ Din ultimul sistem, evident, rezultă $c_r^s = k_r^s = 0$ $\forall Im(\lambda_r) > 0, s = 1, ..., s_r$ $\square$

Corolarul 2. *Fie* $\lambda \in \sigma(A)$ *şi* $\mathcal{B}_J^\lambda = \{b_r^s; \lambda_r = \lambda, s = 1, ..., s_r\}$.
Atunci $card(\mathcal{B}_J^\lambda) = m_\lambda$ *şi* $(A - \lambda I_n)^{m_\lambda} b_r^s = 0$ *pentru orice* $b_r^s \in \mathcal{B}_J^\lambda$.

Demonstraţie. Cum prima afirmaţie este evidentă din teoremă, rămâne să demonstrăm pe a doua. Avem:

$$Ab_r^1 = \lambda b_r^1 + b_r^2$$

$$Ab_r^2 = \lambda b_r^2 + b_r^3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Ab_r^{s_r-1} = \lambda b_r^{s_r-1} + b_r^{s_r}$$

$$Ab_r^{s_r} = \lambda b_r^{s_r}$$

Din prima egalitate $b_r^2 = (A - \lambda I_n)b_r^1$, din a doua egalitate $b_r^3 = (A - \lambda I_n)b_r^2 = (A - \lambda I_n)^2 b_r^1$. Repetăm şi găsim $b_r^{s+1} = (A - \lambda I_n)^s b_r^1$, $s = 1, ..., s_r - 1$. Din ultima egalitate se deduce $(A - \lambda I_n)^{s_r} b_r^1 = 0$. De aici rezultă $(A - \lambda I_n)^{s_r} b_r^s = (A - \lambda I_n)^{s_r+s-1} b_r^1 = 0$. Dar $s_r \leq m_\lambda$, deci $(A - \lambda I_n)^{m_\lambda} b_r^s = 0$. $\square$

Teoremă (Structura soluţiilor în cazul general). *Fie* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *care defineşte ecuaţia* $\frac{dx}{dt} = Ax$.

1. Pentru orice $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbf{R}$ *cu* $m = m_\lambda \geq 1$ *există* $P_j^{\lambda l} \in \mathbf{R}^n$ *astfel încât dacă definim*

$$\varphi_{\lambda l}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda l} t^j$$

atunci $\{\varphi_{\lambda l}(.)\}_{l=1,...,m} \subset S_A$ *sunt soluţii liniar independente.*

2. Pentru orice $\lambda \in \sigma(A)$, $Im(\lambda) > 0$ *cu* $m = m_\lambda \geq 1$ *există* $P_j^{\lambda l} \in \mathbf{C}^n$ *astfel încât dacă definim*

$$\varphi_{\lambda l}(t) = Re(e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda l} t^j), \quad \varphi_{\overline{\lambda} l}(t) = Im(e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda l} t^j)$$

atunci $\{\varphi_{\lambda l}(.), \varphi_{\overline{\lambda} l}(.)\}_{l=1,...,m} \subset S_A$ *sunt soluţii liniar independente.*

3. $\{\varphi_{\lambda l}(.)\}_{l=1,...,m_\lambda, \lambda \in \sigma(A)} \subset S_A$ *formează un sistem fundamental de soluţii.*

Demonstraţie. Cum $A \in M_n(\mathbf{R})$ consider $\mathcal{B}_J = \{b_r^s; r = 1, ..., p, \quad s = 1, ..., s_r\} \subset \mathbf{C}^n$ baza canonică Jordan corespunzătoare.

1. Fie $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbf{R}$. Renotez $\mathcal{B}_J^\lambda = \{b_r^s; \lambda_r = \lambda, s = 1, ..., s_r\} = \{P_0^{\lambda l}, l = 1, ..., m\} \subset \mathbf{R}^n$; care sunt vectori liniar independenţi din Corolarul 1.

Definesc $P_j^{\lambda l} = \frac{1}{j!}(A - \lambda I_n)^j P_0^{\lambda l}$, $j = 1, ..., m-1$ şi $\varphi_{\lambda l}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda l} t^j$, $l = 1, ..., m$. Din Lemă $\{\varphi_{\lambda l}(.)\}_{l=1,...,m} \in S_A$.

Pe baza Propoziţiei (Soluţii liniar independente) [Cursul 6] $\{\varphi_{\lambda l}(.)\}_{l=1,...,m} \subset S_A$ sunt liniar independente dacă şi numai dacă $\{\varphi_{\lambda l}(0)\}_{l=1,...,m} \subset \mathbf{R}^n$ sunt liniar independenţi. Dar $\{\varphi_{\lambda l}(0)\}_{l=1,...,m} = \{P_0^{\lambda l}, l = 1, ..., m\}$.

2. Fie $\lambda \in \sigma(A)$, $Im(\lambda) > 0$. Renotez $\mathcal{B}_J^\lambda = \{b_r^s; \lambda_r = \lambda, s = 1, ..., s_r\} = \{P_0^{\lambda l}, l = 1, ..., m\} \subset \mathbf{C}^n$

Definesc $P_j^{\lambda l} = \frac{1}{j!}(A - \lambda I_n)^j P_0^{\lambda l}$, $j = 1, ..., m-1$ şi $\tilde{\varphi}_{\lambda l}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda l} t^j$, $l = 1, ..., m$. Cum $\tilde{\varphi}_{\lambda l}(t) = \varphi_{\lambda l}(t) + i\varphi_{\overline{\lambda} l}(t)$ şi din Lemă $\tilde{\varphi}'_{\lambda l}(t) \equiv A\tilde{\varphi}_{\lambda l}(t)$ egalând părţile reale şi imaginare avem că $\{\varphi_{\lambda l}(.), \varphi_{\overline{\lambda} l}(.)\}_{l=1,...,m} \subset S_A$.

Pe baza Propoziţiei (Soluţii liniar independente) $\{\varphi_{\lambda l}(.), \varphi_{\overline{\lambda} l}(.)\}_{l=1,...,m} \subset S_A$ sunt liniar independente dacă şi numai dacă $\{\varphi_{\lambda l}(0), \varphi_{\overline{\lambda} l}(0)\}_{l=1,...,m} \subset \mathbf{R}^n$ sunt liniar independenţi. Dar $\{\varphi_{\lambda l}(0), \varphi_{\overline{\lambda} l}(0)\}_{l=1,...,m} = \{Re(b_r^s), Im(b_r^s); \lambda_r = \lambda, s = 1, ..., s_r\} \subset \mathbf{R}^n$ sunt liniar independenţi din Corolarul 1.

3. Cum avem n soluţii este suficient de arătat liniar independenţa. Pe baza Propoziţiei (Soluţii liniar independente) $\{\varphi_{\lambda l}(.)\}_{l=1,...,m_\lambda, \lambda \in \sigma(A)} \subset S_A$

sunt liniar independente dacă şi numai dacă $\{\varphi_{\lambda l}(0)\}_{l=1,...,m_\lambda,\lambda\in\sigma(A)} \subset \mathbf{R}^n$ sunt liniar independenţi. Dar $\{\varphi_{\lambda l}(0)\}_{l=1,...,m_\lambda,\lambda\in\sigma(A)} = \{b_r^s; \lambda_r \in \mathbf{R}, s = 1, ..., s_r\} \cup \{Re(b_r^s), Im(b_r^s); Im(\lambda_r) > 0, s = 1, ..., s_r\}$ care sunt liniar independenţi din Corolarul 1. $\square$

Algoritm.

1. Rezolvă ecuaţia caracteristică $det(A - \lambda I_n) = 0 \quad \sigma(A)$: (λ, m_λ).

2. $\forall \lambda \in \sigma(A) \cap \mathbf{R}$, $m_\lambda = 1$ caută $u_\lambda \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ astfel încât $(A - \lambda I_n)u_\lambda = 0$. Scrie soluţia

$$\varphi_\lambda(t) = e^{\lambda t} u_\lambda.$$

3. $\forall \lambda \in \sigma(A) \cap \mathbf{R}$ cu $m = m_\lambda > 1$ caută $\{P_0^{\lambda 1}, ..., P_0^{\lambda m}\} \subset Ker(A - \lambda I_n)^m$ liniar independenţi (în $\mathbf{R}^n$). Defineşte $P_j^{\lambda l} = \frac{1}{j!}(A - \lambda I_n)^j P_0^{\lambda l}$, $j = 1, ..., m-1$. Scrie soluţiile

$$\varphi_{\lambda l}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda l} t^j, \quad l = 1, ..., m.$$

4. $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $Im(\lambda) > 0$, $m_\lambda = 1$ caută $u_\lambda \in \mathbf{C}^n \backslash \{0\}$ astfel încât $(A - \lambda I_n)u_\lambda = 0$. Scrie soluţiile

$$\varphi_\lambda(t) = Re(e^{\lambda t} u_\lambda), \quad \varphi_{\overline{\lambda}}(t) = Im(e^{\lambda t} u_\lambda).$$

5. $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $Im(\lambda) > 0$, cu $m = m_\lambda > 1$ caută $\{P_0^{\lambda 1}, ..., P_0^{\lambda m}\} \subset Ker(A - \lambda I_n)^m$ liniar independenţi (în $\mathbf{C}^n$). Defineşte $P_j^{\lambda l} = \frac{1}{j!}(A - \lambda I_n)^j P_0^{\lambda l}$, $j = 1, ..., m-1$. Scrie soluţiile

$$\varphi_{\lambda l}(t) = Re(e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda l} t^j), \quad \varphi_{\overline{\lambda} l}(t) = Im(e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda l} t^j), \quad l = 1, ..., m.$$

6. Renumerotează $\{\varphi_{\lambda l}(.)\}_{l=1,...,m_\lambda,\lambda\in\sigma(A)} = \{\varphi_i(.)\}_{i=1,...,n}$, care este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei şi scrie soluţia generală

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t) \quad c_i \in \mathbf{R}, i = 1, ..., n.$$

Ecuaţii diferenţiale afine pe $\mathbf{R}^n$

Definiţie. Fiind date funcţiile $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ şi $b(.) : I \to \mathbf{R}^n$, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, acestea vor defini *ecuaţia diferenţială afină* pe $\mathbf{R}^n$.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t). \tag{1}$$

Dacă elementele matricii $A(t)$ sunt $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$, $t \in I$ şi elementele vectorului coloană $b(t)$ sunt $b_1(t), ..., b_n(t)$ atunci ecuaţia (1) poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

care poartă denumirea de *sistem de ecuaţii diferenţiale afine de dimensiune n.*

Atunci când funcţiile $A(.)$ şi $b(.)$ sunt continue, ecuaţia (1) admite existenţa şi unicitatea globală a soluţiilor.

Teorema 1. (E.U.G.) *Fie $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ şi $b(.) : I \to \mathbf{R}^n$ continue care definesc ecuaţia (1). Atunci $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ $\exists! \varphi_{t_0,x_0}(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie a ecuaţiei (1) care satisface condiţia iniţială $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$.*

Demonstraţie. Fie $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ definită prin $f(t,x) = A(t)x + b(t)$. Este evident faptul că $f(.,.)$ este continuă, local lipschitziană în raport cu al doilea argument (fiind liniară în al doilea argument) şi $f(.,.)$ are proprietatea de creştere afină ($||f(t,x)|| = ||A(t)x + b(t)|| \leq ||A(t)||.||x|| + ||b(t)||$), deci are şi proprietatea disipativitate bilaterală. Aşadar, din Teorema Cauchy Lipschitz are E.U.L., deci şi U.G. Din Teorema privind existenţă globală are şi E.G.. $\square$

Pe baza Teoremei 1 vom nota mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1) cu

$$S_{A(.),b(.)} = \{\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n; \quad \varphi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei (1)}\} \tag{3}$$

Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$ este o o varietate afină de dimensiune n, paralelă cu subspaţiul $S_{A(.)} \subset C^1(I, \mathbf{R}^n)$ (al soluţiilor ecuaţiei linare asociate $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}$). Mai precis, avem următorul rezultat.

Teorema 2. **(Varietatea soluţiilor)** *Dacă* $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$, $b(.) : I \to \mathbf{R}^n$ *sunt continue şi dacă* $S_{A(.)}$ *este mulţimea soluţiilor ecuaţiei linare asociate* $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}$ *atunci*

$$S_{A(.),b(.)} = S_{A(.)} + \{\varphi_0(.)\}, \quad \forall \varphi_0(.) \in S_{A(.),b(.)}. \tag{4}$$

Demonstraţie. ,,$\subset$" Fie $\varphi_0(.) \in S_{A(.),b(.)}$; dacă $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ atunci $\overline{\varphi}(.) := \varphi(.) - \varphi_0(.) \in S_{A(.)}$ şi deci $\varphi(.) := \overline{\varphi}(.) + \varphi_0(.) \in S_{A(.)} + \{\varphi_0(.)\}$.

,,$\supset$" Fie $\overline{\varphi}(.) \in S_{A(.)}$ atunci

$$(\overline{\varphi}(t) + \varphi_0(t))' \equiv A(t)(\overline{\varphi}(t) + \varphi_0(t)) + b(t),$$

deci $\overline{\varphi}(.) + \varphi_0(.) \in S_{A(.),b(.)}$. $\square$

Corolar. *Dacă* $\varphi_0(.) \in S_{A(.),b(.)}$ *şi* $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ *este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată atunci* $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ *dacă şi numai dacă există* $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ *astfel încât*

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\varphi}_i(t) + \varphi_0(t), \quad t \in I. \tag{5}$$

Demonstraţie. Dacă $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ este un sistem fundamental de soluţii atunci

$$S_{A(.)} = \{\sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\varphi}_i(.), \quad c_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1,n}\}$$

şi afirmaţia rezultă din (4). $\square$

Egalitatea (5) se numeşte *soluţia generală* a ecuaţiei afine (1). Afirmaţia din Corolar poate fi reformulată astfel: soluţia generală a ecuaţiei afine este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei liniare asociate şi o soluţie particulară a ecuaţiei afine.

Cursul 9

Ecuaţii diferenţiale afine pe $\mathbf{R}^n$ (continuare)

Fie $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ şi $b(.) : I \to \mathbf{R}^n$ funcţii continue, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, care definesc *ecuaţia diferenţială afină* pe $\mathbf{R}^n$.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t). \tag{1}$$

Există clase particulare de ecuaţii afine pentru care o soluţie particulară poate fi găsită efectiv. În general, însă, pentru determinarea soluţiei generale a unei ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$ se utilizează (ca şi în cazul ecuaţiilor afine scalare) *metoda variaţiei constantelor*. Mai exact, avem următorul principiu al variaţiei constantelor pentru ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$.

Teoremă (Principiul variaţiei constantelor). *Dacă $X(.)$ este o matrice fundamentală de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}$, atunci $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ dacă şi numai dacă $\exists c(.) : I \to \mathbf{R}^n$ o primitivă a funcţiei $(X(.))^{-1}b(.)$ astfel încât*

$$\varphi(t) = X(t)c(t), \quad \forall t \in I. \tag{2}$$

Demonstraţie. Fie $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ şi $c(t) = (X(t))^{-1}\varphi(t)$. $X(.)$ fiind matrice fundamentală de soluţii este derivabilă şi $X(t)$ este nesingulară $\forall t \in I$. Prin urmare, $(X(.))^{-1}$ este derivabilă. Din (2) şi din faptul că $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ obţinem

$$X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + b(t),$$

şi cum $X'(t) = A(t)X(t)$ deducem $X(t)c'(t) = b(t)$ deci $c'(t) = (X(t))^{-1}b(t)$.

Reciproc, dacă $c(.)$ este primitivă a lui $(X(.))^{-1}b(.)$ şi $\varphi(.)$ este definită în (2) atunci $\varphi(.)$ este derivabilă şi

$$\begin{aligned}&\varphi'(t) = X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t)\\ &+X(t)(X(t))^{-1}b(t) = A(t)X(t)c(t) + b(t)\end{aligned}$$

adică $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ şi teorema este demonstrată. $\square$

Corolarul 1. *Dacă* $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ *este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată atunci* $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ *dacă şi numai dacă există* $c_1(.), ..., c_n(.)$ *derivabile astfel încât pentru orice* $t \in I$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i(t) = b(t), \quad \varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\overline{\varphi}_i(t).$$

Demonstraţie. Dacă $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ este un sistem fundamental de soluţii atunci $X(t) = col[\overline{\varphi}_1(t), ..., \overline{\varphi}_n(t)]$ este matrice fundamentală de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată şi cum $X(t)c(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\overline{\varphi}_i(t)$ afirmaţia rezultă din Teoremă. $\square$

Corolarul 2. *a) Dacă* $X(.)$ *este matrice fundamentală de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată* $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}$*, atunci soluţia globală a ecuaţiei (1) care satisface condiţia iniţială* $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$ *este*

$$\varphi_{t_0,x_0}(t) = X(t)(X(t_0))^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t)(X(s))^{-1}b(s)ds, \quad t \in I.$$

b) Dacă $\mathcal{R}(.,.) : I \times I \to M_n(\mathbf{R})$ *este rezolvanta ecuaţiei liniare asociate atunci*

$$\varphi_{t_0,x_0}(t) = \mathcal{R}(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathcal{R}(t,s)b(s)ds, \quad t \in I.$$

Demonstraţie. a) $\varphi_{t_0,x_0}(.)$ este soluţie, deci conform Teoremei $\varphi_{t_0,x_0}(t) = X(t)(\int_{t_0}^{t}(X(s))^{-1}b(s)ds + k)$; din condiţia iniţială deducem că $k = (X(t_0))^{-1}x_0$.

b) Dar $\mathcal{R}(t,s) = X(t)(X(s))^{-1}$ (Cursul 6) $\forall t, s \in I$ şi afirmaţia rezultă imediat din a). $\square$

Algoritm (Metoda variaţiei constantelor).

1. Determină soluţia generală a ecuaţiei liniare asociate $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}$

$$\overline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\overline{\varphi}_i(t), \quad c_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1,n}.$$

(Dacă $A(t) \equiv A$ vezi Algoritm.)

2. Caută funcţiile $c_1(.), ..., c_n(.)$ astfel încât funcţia

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\overline{\varphi}_i(t)$$

să fie soluţie a ecuaţiei afine (1).

3. Din identitatea $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ după reducerea termenilor asemenea, determinarea lui $c_i(.)$ este imediată după ce se rezolvă sistemul algebric liniar

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i(t) = b(t).$$

Ecuaţii liniare de ordin superior

Definiţie. Dacă $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, funcţiile $a_1(.), ..., a_n(.) : I \to \mathbf{R}$ definesc *ecuaţia liniară de ordinul n*

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)x^{(n-j)} \tag{1}$$

Ecuaţia (1) este un caz particular de ecuaţie diferenţială de ordinul n de forma $x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)})$, deci este echivalentă cu un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi (sistemul canonic asociat). Mai precis, sistemul canonic asociat devine în acest caz

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)x_{n-j+1}, \end{cases} \tag{2}$$

care este un sistem de ecuaţii liniare, de dimensiune n, definit de $A(.) : I \to M_n(\mathbf{R})$

$$A(t) = \mathrm{comp}(a_1(t), ..., a_n(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & ... & a_1(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Matricea $A(t)$ definită în (3) se numeşte *matricea companion* asociată numerelor reale $a_1(t), ..., a_n(t)$.

Reamintim că, în baza Propoziţiei de echivalenţă $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (1) dacă şi numai dacă $\varphi(.)$ este de n ori derivabilă şi $\tilde{\varphi}(.) := (\varphi(.), \varphi'(.), ..., \varphi^{(n-1)}(.))$ este soluţie a sistemului canonic asociat (2).

Prin urmare, toate considerentele făcute la ecuaţii liniare pe $\mathbf{R}^n$ se pot reformula pentru ecuaţia (1). Trecem în revistă câteva dintre acestea.

Teoremă (E.U.G.). *Dacă funcţiile $a_1(.), ..., a_n(.) : I \to \mathbf{R}$ care definesc ecuaţia (1) sunt continue, atunci $\forall (t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in I \times \mathbf{R}^n$ $\exists! \varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ soluţie a ecuaţiei (1) care verifică condiţiile iniţiale $\varphi^{(k)}(t_0) = x_0^k$, $k = \overline{0, n-1}$.*

Demonstraţie. Cum $a_i(.)$, $i = \overline{1, n}$ sunt continue rezultă că şi funcţia $A(.)$ definită în (3) este continuă, deci putem aplica Teorema (E.U.G.) pentru ecuaţia (2) pentru a deduce existenţa şi unicitatea globală a soluţiilor pentru ecuaţia (2). Propoziţia de echivalenţă încheie demonstraţia. □

Pe baza Teoremei precedente vom nota mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1) cu

$$S_{a_1(.), ..., a_n(.)} = \{\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n; \quad \varphi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei (1)}\} \tag{4}$$

care este un subspaţiu vectorial de dimensiune n al spaţiului funcţiilor reale de clasă C^n definite pe I, $C^n(I, \mathbf{R})$.

Teoremă (Spaţiul soluţiilor). *Dacă $a_1(.), ..., a_n(.) : I \to \mathbf{R}$ sunt continue, atunci $S_{a_1(.), ..., a_n(.)} \subset C^n(I, \mathbf{R})$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune n.*

Demonstraţie. Verificarea faptului că $S_{a_1(.), ..., a_n(.)} \subset C^n(I, \mathbf{R})$ este un subspaţiu vectorial este imediată. Pentru a demonstra că dimensiunea acestui subspaţiu este n observăm că Propoziţia de echivalenţă defineşte izomorfismul liniar $T : S_{a_1(.), ..., a_n(.)} \to S_{A(.)}$, unde $A(.)$ a fost definită în (3)

$$T(\varphi) = (\varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n-1)}).$$

Cum, conform Teoremei (Spaţiul soluţiilor), $S_{A(.)}$ este un spaţiu vectorial de dimensiune n şi T este un izomorfism rezultă concluzia teoremei. □

Definiţie. Dacă $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)\} \subset S_{a_1(.),...,a_n(.)}$ este o bază, atunci spunem că $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)\}$ formează un *sistem fundamental de soluţii* pentru ecuaţia (1).

În acest caz, $\varphi(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.)}$ daca şi numai dacă există constantele $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t), \quad t \in I. \tag{5}$$

Egalitatea (5) se numeşte *soluţie generală a ecuaţiei* (1).

Definiţie. Fie $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.)}$. Se numeşte *wronskianul* soluţiilor $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)$, funcţia $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(.) : I \to \mathbf{R}$ definită prin

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) := det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & ... & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & ... & \varphi_n'(t) \\ .. & .. & ... & .. \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & ... & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Versiunea teoremei lui Liouville pentru ecuaţii de ordin superior este:

Teoremă. *Dacă* $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.)}$, *atunci wronskianul acestor soluţii verifică relaţia*

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds} \quad \forall t, t_0 \in I.$$

Demonstraţie. Având în vedere definiţia wronskianului soluţiilor unei ecuaţii liniare pe $\mathbf{R}^n$, definiţia izomorfisnului $T(.)$ şi faptul că urma matricii $A(t)$ definită în (3) este $a_1(t)$, Teorema lui Liouville aplicată soluţiilor $T(\varphi_1), ..., T(\varphi_n)$ ne dă

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = W_{T(\varphi_1),...,T(\varphi_n)}(t) =$$

$$= W_{T(\varphi_1),...,T(\varphi_n)}(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))ds} = W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds},$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. $\square$.

Ecuaţii liniare de ordin superior cu coeficienţi constanţi

Definiţie. Se numeşte *ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi* o ecuaţie de forma

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j x^{(n-j)} \tag{1}$$

unde $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$.

Fiind vorba de un caz particular al ecuaţiei liniare ($a_j(t) \equiv a_j \quad \forall j = \overline{1,n}, t \in \mathbf{R}$) toate rezultatele din Secţiunea anterioară rămân adevărate şi pentru ecuaţiile de forma (1).

Să remarcăm că sistemul canonic asociat $\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x}$ este definit de matricea companion

$$A = \mathrm{comp}(a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & ... & a_1 \end{pmatrix},$$

care este o matrice cu coeficienţi constanţi şi deci sistemul canonic asociat are, de asemenea, coeficienţi constanţi.

Observaţie. Se constată prin calcul direct că ecuaţia $det(A - \lambda I_n) = 0$ are în acest caz forma

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{2}$$

Această ecuaţie (algebrică) se numeşte *ecuaţia caracteristică* asociată ecuaţiei (1), iar polinomul corespunzător se numeşte *polinomul caracteristic* asociat ecuaţiei (1).

Rezultatul fundamental în teoria ecuaţiilor liniare de ordin superior cu coeficienţi constanţi afirmă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1) coincide cu spaţiul cvasipolinoamelor asociat matricii A.

Teoremă (Structura soluţiilor). *Fie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ rădăcinile ecuaţiei (2) având ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, ..., m_r$. Atunci un sistem funda-*

mental de soluţii pentru ecuaţia (1) este

$$\varphi^j_{\lambda_k}(t) = \begin{cases} t^{j-1}e^{\lambda_k t} & \text{dacă } \lambda_k \in \mathbf{R}, j = \overline{1, m_{\lambda_k}} \\ t^{j-1}e^{\alpha_k t}cos\beta_k t & \text{dacă } \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \beta_k > 0, j = \overline{1, m_{\lambda_k}} \\ t^{j-1}e^{\alpha_k t}sin\beta_k t & \text{dacă } \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \beta_k > 0, j = \overline{1, m_{\lambda_k}}, \end{cases} \tag{3}$$

$k = \overline{1, r}$.

Demonstraţie. Este uşor de constatat că mulţimea de funcţii $\mathcal{B} = \{\varphi^j_{\lambda_k}(.)\}_{j=\overline{1,m_{\lambda_k}},k=\overline{1,r}}$ conţine cel mult n elemente. Ca atare, pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că orice soluţie a ecuaţiei (1) este o combinaţie liniară de elemente din $\mathcal{B}$. Dacă ar fi aşa, atunci $\mathcal{B}$ ar fi o familie de generatori pentru mulţimea soluţiilor $S_{a_1,...,a_n}$, care conform Teoremei (Spaţiul soluţiilor), este un spaţiu vectorial de dimensiune n. Aşadar $\mathcal{B}$ are exact n elemente, deci ar fi o bază în $S_{a_1,...,a_n}$, ceea ce ar completa demonstraţia.

Fie $\varphi \in S_{a_1,...,a_n}$, atunci $T(\varphi) = \tilde{\varphi}$ definită în Teorema (Spaţiul soluţiilor), este o soluţie a ecuaţiei liniare pe $\mathbf{R}^n$ $\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x}$. Din Teorema (Structura soluţiilor în cazul general) (Cursul 8) toate componentele lui $\tilde{\varphi}$ sunt combinaţii liniare de elemente din $\mathcal{B}$. În particular, prima componentă a lui $\tilde{\varphi}$, care este φ are aceeaşi proprietate şi demonstraţia este încheiată. $\square$

Algoritm.

1. Rezolvă ecuaţia algebrică

$$\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$$

2. Pentru fiecare rădăcină $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ cu ordinul de multiplicitate m_1, m_2, ..., respectiv, m_r scrie sistemul fundamental de soluţii

$$\varphi^j_{\lambda_k}(t) = \begin{cases} t^{j-1}e^{\lambda_k t} & \text{dacă } \lambda_k \in \mathbf{R}, j = \overline{1, m_{\lambda_k}} \\ t^{j-1}e^{\alpha_k t}cos\beta_k t & \text{dacă } \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \beta_k > 0, j = \overline{1, m_{\lambda_k}} \\ t^{j-1}e^{\alpha_k t}sin\beta_k t & \text{dacă } \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \beta_k > 0, j = \overline{1, m_{\lambda_k}}, \end{cases} , k = \overline{1, r}.$$

3. Scrie o combinaţie liniară a acestora, care este soluţia generală.

Ecuaţii afine de ordin superior

Ca şi în cazul ecuaţiilor afine pe $\mathbf{R}^n$, ecuaţiile afine de ordin superior se studiază cu ajutorul metodei variaţiei constantelor; metodă care în acest caz are anumite particularităţi, după cum se va vedea în continuare.

Definiţie. Dacă $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, funcţiile $a_1(.), ..., a_n(.),\ b(.) : I \to \mathbf{R}$ definesc *ecuaţia afină de ordinul* n

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) x^{(n-j)} + b(t) \tag{1}$$

Sistemul canonic asociat ecuaţiei (1) este

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A(t)\tilde{x} + \tilde{b}(t), \tag{2}$$

unde

$$A(t) = \mathrm{comp}(a_1(t), ..., a_n(t)), \quad \tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

matricea $A(t)$ este matricea companion definită anterior.

Propoziţia de echivalenţă afirmă, în acest caz, că $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (1) dacă şi numai dacă $\varphi(.)$ este de n ori derivabilă şi $\tilde{\varphi}(.) := (\varphi(.), \varphi'(.), ..., \varphi^{(n-1)}(.))$ este soluţie a ecuaţiei (2).

Aşadar, toate rezultatele de la ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$ pot fi transpuse şi pentru ecuaţiile de forma (1).

Teoremă (E.U.G.). *Dacă* $a_1(.), ..., a_n(.), b(.) : I \to \mathbf{R}$ *sunt continue, atunci* $\forall (t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in I \times \mathbf{R}^n$ $\exists! \varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ *soluţie a ecuaţiei (1) care verifică condiţiile iniţiale* $\varphi^{(k)}(t_0) = x_0^k$, $k = \overline{0, n-1}$.

Demonstraţie. Este imediată, din Teorema (E.U.G.) pentru ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$ şi Propoziţia de echivalenţă. □

Pe baza acestei teoreme introducem următoarea notaţie

$$S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)} = \{\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n; \quad \varphi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei (1)}\} \tag{3}$$

La rândul său $S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)} \subset C^n(I, \mathbf{R})$ este o varietate afină paralelă cu subspaţiul $S_{a_1(.),...,a_n(.)} \subset C^n(I, \mathbf{R})$.

Teoremă (Varietatea soluţiilor). *Dacă* $a_1(.), ..., a_n(.), b(.) : I \to \mathbf{R}$, *sunt continue şi dacă* $S_{a_1(.),...,a_n(.)}$ *este mulţimea soluţiilor ecuaţiei linare asociate atunci*

$$S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)} = S_{a_1(.),...,a_n(.)} + \{\varphi_0(.)\}, \quad \forall \varphi_0(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)}$$

Demonstraţie. Rezultă imediat din Teorema (Varietatea soluţiilor) pentru ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$ observând că funcţia $T : S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)} \to S_{A(.),\tilde{b}(.)}$, $T(\varphi) := (\varphi(.), \varphi'(.), ..., \varphi^{(n-1)}(.))$ este o aplicaţie liniară şi bijectivă. $\square$

Corolar. *Dacă* $\varphi_0(.)$ *este soluţie a ecuaţiei (1) şi* $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{a_1(.),...,a_n(.)}$ *este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată atunci* $\varphi(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)}$ *dacă şi numai dacă există* $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ *astfel încât*

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\varphi}_i(t) + \varphi_0(t), \quad t \in I. \tag{4}$$

Spunem că relaţia (4) reprezintă *soluţia generală a ecuaţiei afine* (1).

Principiul variaţiei constantelor pentru ecuaţii afine de ordin superior afirmă că orice soluţie a unei ecuaţii afine de ordinul n se poate obţine cu ajutorul soluţiei generale a ecuaţiei linare asociate şi a unei primitive.

Teoremă (Principiul variaţiei constantelor). *Dacă* $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{a_1(.),...,a_n(.)}$ *este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată atunci* $\varphi(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)}$ *dacă şi numai dacă există* $c_1(.), ..., c_n(.) :$ $I \to \mathbf{R}$ *derivabile care satisfac pentru orice* $t \in I$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i(t) \equiv 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i'(t) \equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i^{(n-2)}(t) \equiv 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i^{(n-1)}(t) \equiv b(t) \end{cases} \tag{5}$$

şi astfel încât

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\overline{\varphi}_i(t), \quad t \in I.$$

Demonstraţie. Cum $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată atunci $\{\tilde{\overline{\varphi}}_1(.), ..., \tilde{\overline{\varphi}}_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul liniar definit de $A(.) = comp(a_1(.), ..., a_n(.))$ şi teorema rezultă din Corolarul 1 (pag. 2) şi Propoziţia de echivalenţă. $\square$

Algoritm (Metoda variaţiei constantelor).

1. Determină soluţia generală a ecuaţiei liniare asociate $\overline{x}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\overline{x}^{(n-j)}$

$$\overline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\varphi}_i(t), \quad c_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}.$$

(Dacă $a_j(t) \equiv a_j, j = \overline{1, n}$ vezi Algoritm.)

2. Rezolvă sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i(t) \equiv 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i'(t) \equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i^{(n-2)}(t) \equiv 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i^{(n-1)}(t) \equiv b(t) \end{cases}$$

3. Determină $c_1(.), ..., c_n(.)$, calculând primitivele funcţiilor $c_1'(.), ..., c_n'(.)$.
4. Scrie soluţia generală a ecuaţiei afine

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\overline{\varphi}_i(t).$$

Cursul 10

Diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu datele iniţiale şi parametrii

$f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1}$$

Definiţie. Dacă $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie continuă definită pe mulţimea deschisă D astfel încât ecuaţia (1) admite proprietatea de unicitatea a soluţiilor, atunci se numeşte *curent maximal* al ecuaţiei (1) (sau al câmpului vectorial $f(.,.)$) funcţia $\alpha_f(.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ definită prin: $\forall(\tau,\xi) \in D$ aplicaţia $\alpha_f(.,\tau,\xi) : I(\tau,\xi) = (t^-(\tau,\xi), t^+(\tau,\xi)) \to \mathbf{R}^n$ este soluţia maximală a problemei Cauchy (f,τ,ξ); $D_f = \{(t,\tau,\xi); (\tau,\xi) \in D, t \in I(\tau,\xi)\}$.

Teorema asupra curentului maximal. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (1). Fie $\alpha_f(.,.,.) : D_f \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal al ecuaţiei (1). Atunci $D_f \subset \mathbf{R} \times D$ este o mulţime deschisă şi $\alpha_f(.,.,.)$ este o funcţie continuă.*

Dependenţa continuă a soluţiilor maximale de datele iniţiale demonstrată în Teorema asupra curentului maximal poate fi îmbunătăţită demonstrându-se lipschitzianitatea locală a curentului maximal.

Teoremă (Lipschitzianitatea locală a curentului maximal). *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia diferenţială (1)*

Dacă $\alpha_f(.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ este curentul maximal al ecuaţiei (1) atunci $\alpha_f(.,.,.)$ este o funcţie local lipschitziană.

Demonstraţie. Fie $(t_0, \tau_0, \xi_0) \in D_f$. Conform Teoremei asupra curentului maximal, $D_f \subset \mathbf{R} \times D$ este deschisă, deci există $r, \rho, \gamma > 0$ astfel încât

$$\overline{B}_r(t_0) \times \overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\gamma(\xi_0) \in D_f,$$

$$\overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\gamma(\xi_0) \in D_f.$$

Fie $I_0 = [\min\{t_0 - r, \tau_0 - \rho\}, \max\{t_0 + r, \tau_0 + \rho\}]$. Atunci $D_0 := I_0 \times \overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\gamma(\xi_0)$ este o vecinătate a punctului (t_0, τ_0, ξ_0), $D_0 \subset D_f$ şi $I_0 \subset I(\tau, \xi)$, $\forall (\tau, \xi) \in \overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\gamma(\xi_0)$.

Cum $f(.,.)$ şi $\alpha_f(.,.,.)$ sunt continue şi D_0 este compact are sens să definim

$$M = \max_{(s,\tau,\xi)\in D_0} ||f(s, \alpha_f(s, \tau, \xi))||.$$

În plus, pentru compactul $D_1 = \{(t, \alpha_f(t, \tau, \xi)); (t, \tau, \xi) \in D_0\} \subset D$ există $L > 0$ astfel încât

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D_1. \tag{2}$$

Vom arăta că restricţia lui $\alpha_f(.,.,.)$ la D_0 este lipschitziană în raport cu fiecare din cele trei variabile ale sale. Argumentul principal se bazează pe ecuaţia integrală asociată ecuaţiei diferenţiale (1).

$$\alpha_f(t, \tau, \xi) = \xi + \int_\tau^t f(s, \alpha_f(s, \tau, \xi))ds, \quad \forall (t, \tau, \xi) \in D_f. \tag{3}$$

i) Lipschitzianitatea în raport cu primul argument.

Fie $t_1, t_2 \in I_0$ şi $(\tau, \xi) \in \overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\gamma(\xi_0)$. Din (2) şi (3) avem

$$||\alpha_f(t_1, \tau, \xi) - \alpha_f(t_2, \tau, \xi)|| \leq |\int_{t_1}^{t_2} ||f(s, \alpha_f(s, \tau, \xi))||ds| \leq M|t_1 - t_2|.$$

ii) Lipschitzianitatea în raport cu al doilea şi al treilea argument.

Fie $(t, \tau_1, \xi_1), (t, \tau_2, \xi_2) \in D_0$; din (2) şi (3) deducem succesiv

$$u(t) := ||\alpha_f(t, \tau_1, \xi_1) - \alpha_f(t, \tau_2, \xi_2)|| \leq ||\xi_1 - \xi_2|| +$$

$$|\int_{\tau_1}^{\tau_2} ||f(s, \alpha_f(s, \tau_1, \xi_1))||ds| + |\int_{\tau_2}^{t} ||f(s, \alpha_f(s, \tau_1, \xi_1)) -$$

$$-f(s, \alpha_f(s, \tau_2, \xi_2))||ds| \leq ||\xi_1 - \xi_2|| + M|\tau_1 - \tau_2| + |\int_{\tau_2}^{t} Lu(s)ds|.$$

Aplicăm Lema Bellman-Gronwall şi deducem

$$u(t) \leq (||\xi_1 - \xi_2|| + M|\tau_1 - \tau_2|)e^{L|t-\tau_2|} \leq (1 + M)e^{2rL}||(\tau_1, \xi_1) - (\tau_2, \xi_2)||.$$

Deci din i) şi ii), pentru orice (t_1, τ_1, ξ_1), $(t_2, \tau_2, \xi_2) \in D_0$ avem

$$||\alpha_f(t_1,\tau_1,\xi_1) - \alpha_f(t_2,\tau_2,\xi_2)|| \leq ||\alpha_f(t_1,\tau_1,\xi_1) - \alpha_f(t_2,\tau_1,\xi_1)|| +$$

$$+||\alpha_f(t_2,\tau_1,\xi_1) - \alpha_f(t_2,\tau_2,\xi_2)|| \leq M|t_1 - t_2| + (1+$$

$$M)e^{2rL}||(\tau_1,\xi_1) - (\tau_2,\xi_2)|| \leq [M + (1+M)e^{2rL}]||(t_1,\tau_1,\xi_1) - (t_2,\tau_2,\xi_2)||$$

şi teorema este demonstrată. □

$f(.,.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda) \tag{4}$$

Definiţie. Dacă $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie continuă astfel încât pentru orice $\lambda \in pr_3 D$ ecuaţia diferenţială definită de $f(.,.,\lambda)$ admite proprietatea de unicitatea a soluţiilor, atunci se numeşte *curent maximal parametrizat* al ecuaţiei (4) funcţia $\alpha_f(.,.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ definită prin: $\forall(\tau,\xi,\lambda) \in D$ aplicaţia $\alpha_f(.,\tau,\xi,\lambda) : I(\tau,\xi,\lambda) = (t^-(\tau,\xi,\lambda), t^+(\tau,\xi,\lambda)) \to \mathbf{R}^n$ este soluţia maximală a problemei Cauchy $(f(.,.,\lambda),\tau,\xi)$; $D_f = \{(t,\tau,\xi,\lambda); (\tau,\xi,\lambda) \in D, t \in I(\tau,\xi,\lambda)\}$.

Propoziţia de echivalenţă. *Funcţia $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ este soluţie a ecuaţiei (4) dacă şi numai dacă funcţia $\overline{\varphi}(.) : I \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ dată de $\overline{\varphi}(t) := (\varphi(t), \lambda)$, $t \in I$ este soluţie a ecuaţiei*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda) \\ \frac{d\lambda}{dt} = 0_{\mathbf{R}^k}. \end{cases} \tag{5}$$

Corolar. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ deschisă şi $f(.,.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea şi al treilea argument care defineşte ecuaţia diferenţială parametrizată (4)*

Dacă $\alpha_f(.,.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ este curentul maximal parametrizat al ecuaţiei (4) atunci $\alpha_f(.,.,.)$ este o funcţie local lipschitziană.

Demonstraţie. Din Propoziţia de echivalenţă avem că $\alpha_{\overline{f}}(t,\tau,(\xi,\lambda)) = (\alpha_f(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)$, unde $\alpha_{\overline{f}} : D_{\overline{f}} \to \mathbf{R}^n$ este curentul maximal (neparametrizat) al ecuaţiei extinse (5). În ipotezele noastre $\overline{f}(.,.)$ $(\overline{f}(t,\overline{x}) = (f(t,x,\lambda), 0_{\mathbf{R}^k}))$

verifică ipotezele Teoremei precedente şi deci $\alpha_{\overline{f}}(.,.,.,.)$ este local lipschitziană; în particular, şi prima componentă a sa este local lipschitziană. $\square$

Reamintim că funcţia $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$, $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă este de clasă C^1 în raport cu al doilea argument dacă $\forall (t,x) \in D$ există $D_2 f(t,x)(= \frac{\partial f}{\partial x}(t,x))$ şi aplicaţia $(t,x) \to D_2 f(t,x)$ este continuă.

Teoremă (Derivatele parţiale ale curentului maximal şi proprietatea de integrală primă a curentului maximal). *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (1)*

Fie $\alpha_f(.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal al ecuaţiei (1).

Dacă $\alpha_f(.,.,.)$ este de clasă C^1 atunci pentru orice $\forall (\tau,\xi) \in D$ avem:

1) Funcţia $D_2\alpha_f(.,\tau,\xi)$ este soluţie a ecuaţiei în variaţii

$$\frac{dy}{dt} = D_2 f(t, \alpha_f(t,\tau,\xi))y$$

cu condiţia iniţială

$$D_2\alpha_f(\tau,\tau,\xi) = -f(\tau,\xi).$$

2) Funcţia $D_3\alpha_f(.,\tau,\xi)$ este soluţie matriceală a ecuaţiei în variaţii

$$\frac{dy}{dt} = D_2 f(t, \alpha_f(t,\tau,\xi))y$$

cu condiţia iniţială

$$D_3\alpha_f(\tau,\tau,\xi) = I_n.$$

3)

$$D_2\alpha_f(t,\tau,\xi) + D_3\alpha_f(t,\tau,\xi) f(\tau,\xi) \equiv 0, \quad \forall t \in I(\tau,\xi).$$

Demonstraţie. 1) $\alpha_f(.,\tau,\xi)$ este soluţie a problemei Cauchy (f,τ,ξ), deci avem, pe de o parte, că

$$D_1\alpha_f(t,\tau,\xi) \equiv f(t, \alpha_f(t,\tau,\xi)). \tag{6}$$

Cum $\tau \to f(t,\alpha_f(t,\tau,\xi))$ este de clasă C^1, derivând în relaţia (6) în raport cu τ şi folosind Teorema lui Schwartz obţinem că

$$\exists \quad D_1(D_2\alpha_f(t,\tau,\xi)) \equiv D_2(D_1\alpha_f(t,\tau,\xi)) \equiv$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}[f(t,\alpha_f(t,\tau,\xi))] \equiv D_2 f(t,\alpha_f(t,\tau,\xi))(D_2\alpha_f(t,\tau,\xi)),$$

adică $D_3\alpha_f(.,\tau,\xi)$ este soluţie a ecuaţiei în variaţii.

Pe de altă parte,

$$\alpha_f(\tau,\tau,\xi) = \xi.$$

Derivând această egalitate în raport cu τ obţinem $D_1\alpha_f(\tau,\tau,\xi)+D_2\alpha_f(\tau,\tau,\xi) \equiv 0$, dar $D_1\alpha_f(\tau,\tau,\xi) \equiv f(\tau,\alpha_f(\tau,\tau,\xi)) \equiv f(\tau,\xi)$.

2) Se raţionează la fel ca la 1).

3) Pentru $t \in I(\tau,\xi)$ definim $v(t) := D_2\alpha_f(t,\tau,\xi) + D_3\alpha_f(t,\tau,\xi)f(\tau,\xi)$. Din 1) şi 2) $v(.)$ este soluţie a ecuaţiei în variaţii (care este liniară) şi $v(\tau) = 0$. Ca atare, pe baza Corolarului (Soluţia banală) [Cursul 6], $v(t) \equiv 0$. $\square$

Teoremă (Diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei dependente). *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (1)*

Fie $\alpha_f(.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal al ecuaţiei (1). Atunci $\alpha_f(.,.,.)$ este de clasă C^1 în raport cu al treilea argument.

Mai mult, $\forall(\tau,\xi) \in D$ funcţia $D_3\alpha_f(.,\tau,\xi)$ este soluţie matriceală a ecuaţiei în variaţii

$$\frac{dy}{dt} = D_2 f(t,\alpha_f(t,\tau,\xi))y$$

cu condiţia iniţială

$$D_3\alpha_f(\tau,\tau,\xi) = I_n.$$

Teoremă (Diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei independente). *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (1). Fie $\alpha_f(.,.,.) : D_f \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal al ecuaţiei (1). Atunci $\alpha_f(.,.,.)$ este de clasă C^1 în raport cu al doilea argument.*

Mai mult, $\forall(\tau,\xi) \in D$ funcţia $D_2\alpha_f(.,\tau,\xi)$ este soluţie a ecuaţiei în variaţii

$$\frac{dy}{dt} = D_2 f(t,\alpha_f(t,\tau,\xi))y$$

cu condiţia iniţială

$$D_2\alpha_f(\tau,\tau,\xi) = -f(\tau,\xi).$$

Demonstraţie. Ţinând cont de afirmaţia din Teorema precedentă afirmaţia din enunţ este echivalentă cu a demonstra că există $D_2\alpha_f(t,\tau,\xi)$ şi

$$D_2\alpha_f(t,\tau,\xi) = -D_3\alpha_f(t,\tau,\xi)f(\tau,\xi), \quad \forall (t,\tau,\xi) \in D_f. \tag{7}$$

Să observăm, mai întâi că,

$$\alpha_f(t,\theta,\alpha_f(\theta,\tau,\xi)) = \alpha_f(t,\tau,\xi), \quad \forall (\tau,\xi) \in D, t, \theta \in I(\tau,\xi). \tag{8}$$

Egalitatea (8) este adevărată -via unicitatea soluţiilor- deoarece atât $\alpha_f(,,\theta,\alpha_f(\theta,\tau,\xi))$ cât şi $\alpha_f(.,\tau,\xi)$ sunt soluţii ale aceleaşi probleme Cauchy $(f,\theta,\alpha_f(\theta,\tau,\xi))$.

Reamintim că dacă $F(.) : G \to \mathbf{R}^m$, $G \subset \mathbf{R}^n$ deschisă este o funcţie diferenţiabilă şi $x_1, x_2 \in G$ sunt astfel încât $[x_1,x_2] = \{sx_1 + (1-s)x_2, s \in [0,1]\} \subset G$ atunci formula creşterilor finite de tip integral este

$$F(x_1) - F(x_2) = \int_0^1 DF(x_2 + s(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)ds. \tag{9}$$

Din (8), teorema privind diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei dependente, continuitatea curentului maximal, teorema privind continuitatea integralelor în raport cu parametri şi (9) putem scrie succesiv

$$D_2\alpha_f(t,\tau,\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\alpha_f(t,\tau+h,\xi) - \alpha_f(t,\tau,\xi)] =$$

$$-\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\alpha_f(t,\tau+h,\alpha_f(\tau+h,\tau,\xi)) - \alpha_f(t,\tau+h,\xi)] =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 D_3\alpha_f(t,\tau+h,\xi+\sigma(\alpha_f(\tau+h,\tau,\xi)-\xi))[\alpha_f(\tau+h,\tau,\xi)-\xi]d\sigma$$

$$= -\lim_{h\to 0} \int_0^1 D_3\alpha_f(t,\tau+h,\xi+\sigma(\alpha_f(\tau+h,\tau,\xi)-\xi))d\sigma \frac{\alpha_f(\tau+h,\tau,\xi)-\xi}{h}$$

$$= -D_3\alpha_f(t,\tau,\xi)D_1\alpha_f(\tau,\tau,\xi) = -D_3\alpha_f(t,\tau,\xi)f(\tau,\alpha_f(\tau,\tau,\xi))$$

$$= -D_3\alpha_f(t,\tau,\xi)f(\tau,\xi). \square$$

Diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu parametrii este o consecinţă imediată a Teoremelor anterioare şi a Propoziţiei de echivalenţă.

Teoremă (Diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu parametrii). *Fie* $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ *deschisă şi* $f(.,.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ *continuă şi de clasă* C^1 *în raport cu al doilea şi al treilea argument care defineşte ecuaţia (4).*

Fie $\alpha_f(.,.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ *curentul maximal parametrizat al ecuaţiei (4).*

Atunci $\alpha_f(.,.,.,.)$ *este o funcţie de clasă* C^1.

Mai mult, $\forall(\tau, \xi, \lambda) \in D$

1) funcţia $D_2\alpha_f(., \tau, \xi, \lambda)$ *are proprietăţile din Teorema privind diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei independente,*

2) funcţia $D_3\alpha_f(., \tau, \xi, \lambda)$ *are proprietăţile din Teorema privind diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei dependente,*

3) funcţia $D_4\alpha_f(., \tau, \xi, \lambda)$ *este soluţie matriceală a ecuaţiei diferenţiale afine, numită* ecuaţia în variaţii pentru parametri

$$\frac{dy}{dt} = D_2 f(t, \alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)y + D_3 f(t, \alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda) \tag{10}$$

cu condiţia iniţială

$$D_4\alpha_f(\tau, \tau, \xi, \lambda) = 0. \tag{11}$$

Demonstraţie. În ipotezele noastre, funcţia $\overline{f}(.,.)$, care defineşte ecuaţia extinsă (5), este continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument. Putem, aşadar, aplica Teoremele privind diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei independente şi privind diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei dependente pentru a deduce că $\alpha_{\overline{f}}(.,.,.,.)$ este de clasă C^1.

Cum, conform Propoziţiei de echivalenţă $\alpha_{\overline{f}}(t, \tau, (\xi, \lambda)) = (\alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)$, deducem că $\alpha_f(.,.,.)$ este, de asemenea, de clasă C^1.

$\alpha_f(., \tau, \xi, \lambda)$ este soluţie a problemei Cauchy $(f(.,., \lambda), \tau, \xi)$, deci avem, pe de o parte, că

$$D_1\alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda) \equiv f(t, \alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda). \tag{12}$$

Cum $\lambda \to f(t, \alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)$ este de clasă C^1, derivând în relaţia (12) în raport cu λ şi folosind Teorema lui Schwartz obţinem că

$$\exists \quad D_1(D_4\alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda)) \equiv D_4(D_1\alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda)) \equiv$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}[f(t, \alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)] \equiv D_2 f(t, \alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)(D_4\alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda)) +$$

$$+D_3 f(t, \alpha_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda),$$

adică $D_4\alpha_f(., \tau, \xi, \lambda)u$ este soluţie a ecuaţiei (10).

Pe de altă parte,

$$\alpha_f(\tau, \tau, \xi, \lambda) \equiv \xi.$$

Derivând această egalitate în raport cu λ obţinem $D_4\alpha_f(\tau, \tau, \xi, \lambda) \equiv 0$, adică (11). $\square$

Cursul 11

Integrale prime

Există numeroase situaţii în care studiul soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale este făcut cu ajutorul noţiunii de integrală primă. Această noţiune, care este justificată de considerente ce privesc în special semnificaţiile fizice ale funcţiilor care definesc ecuaţia diferenţială, se referă la funcţii care, deşi sunt neconstante, rămân constante pe graficele soluţiilor ecuaţiei diferenţiale.

Fie $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{1}$$

Definiţie. Se numeşte *integrală primă* a ecuaţiei diferenţiale (1) o funcţie $F(.,.) : D_0 \subset D \to \mathbf{R}$, neconstantă cu următoarea proprietate: $\forall \varphi(.) : I_0 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ soluţie a ecuaţiei (1) pentru care $Graph(\varphi) \subset D_0$, există $c \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$F(t, \varphi(t)) \equiv c. \tag{2}$$

Într-o formulare ne-riguroasă o funcţie este integrală primă pentru o ecuaţie diferenţială dacă este neconstantă şi dacă este constantă de-a lungul oricărei soluţii a ecuaţiei.

Următorul rezultat oferă a altă caracterizare a integralelor prime.

Teoremă (Criteriul pentru integrale prime). *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă care defineşte ecuaţia (1). Fie $D_0 \subset D$ deschisă şi $F(.,.) : D_0 \to \mathbf{R}$ o funcţie diferenţiabilă.*

Atunci $F(.,.)$ este integrală primă pentru ecuaţia (1) dacă şi numai dacă pentru orice $(t, x) \in D_0$

$$D_1F(t, x) + D_2F(t, x)f(t, x) = 0. \tag{3}$$

Demonstraţie. Fie $(t_0, x_0) \in D_0$. În baza Teoremei lui Peano $\exists \varphi(.) : I_0 \in$

$\mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Evident, putem micşora pe I_0 astfel încât $Graph(\varphi) \subset D_0$.

Cum $F(.,.)$ este integrală primă, $\exists c \in \mathbf{R}$ astfel încât are loc (2). Derivând în raport cu t în identitatea (2) obţinem

$$D_1 F(t, \varphi(t)) + D_2 F(t, \varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0.$$

Dar $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1), deci $\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ pe I_0. În particular, dacă $t = t_0$, avem $\varphi(t_0) = x_0$ şi obţinem (3) pentru $(t_0, x_0) \in D_0$ arbitrar.

Reciproc, fie $\varphi(.)$ o soluţie a ecuaţiei (1) cu $Graph(\varphi) \subset D_0$. Prin urmare,

$$0 = D_1 F(t, \varphi(t)) + D_2 F(t, \varphi(t)) f(t, \varphi(t)) =$$

$$= D_1 F(t, \varphi(t)) + D_2 F(t, \varphi(t))\varphi'(t) = \frac{d}{dt}(F(t, \varphi(t)).$$

Aşadar, cum domeniul de definiţie al lui $\varphi(.)$ este un interval, $\exists c \in \mathbf{R}$ astfel încât $F(t, \varphi(t)) \equiv c$. $\square$

Observaţie. Cum $x = (x_1, ..., x_n)$ şi $f(.,.) = (f_1(.,.), ..., f_n(.,.))$ egalitatea (3) înseamnă

$$D_1 F(t, x) + D_2 F(t, x) f(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x) f_i(t, x) = 0.$$

Definiţie. Dacă $D_0 \subset D$ este deschisă şi $F^1(.,.), ..., F^k(.,.) : D_0 \to \mathbf{R}$ sunt integrale prime diferenţiabile atunci $F^1(.,.), ..., F^k(.,.) : D_0 \to \mathbf{R}$ se numesc *integrale prime funcţional independente (în raport cu al doilea argument)* dacă următoarea condiţie este satisfăcută

$$\text{rang}(\frac{\partial F^i}{\partial x_j}(t, (x_1, ..., x_n)))_{i=\overline{1,k}, j=\overline{1,n}} = k(\text{maxim}), \quad \forall (t, x) \in D_0.$$

Următorul rezultat arată că problema caracterizării soluţiei unei ecuaţii diferenţiale pe $\mathbf{R}^n$ se reduce la o problemă de funcţii implicite.

Teoremă (Determinarea soluţiilor cu ajutorul integralelor prime). *Fie* $f(.,.) : D \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *o funcţie continuă care defineşte ecuaţia (1) şi fie* $F^1(.,.), ..., F^n(.,.) : D_0 \subset D \to \mathbf{R}$, D_0 *deschisă, integrale prime funcţional independente, funcţii de clasă* C^1.

Atunci $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *cu* $Graph(\varphi) \subset D_0$ *este soluţie a ecuaţiei (1) dacă şi numai dacă* $\exists c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ *astfel încât*

$$F^i(t, \varphi(t)) \equiv c_i, \quad t \in I, i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Demonstraţie. Necesitatea este evidentă din definiţia integralei prime. Pentru suficienţă, fie $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ cu $Graph(\varphi) \subset D_0$, care verifică condiţia (4). Fie $t_0 \in I$ arbitrar şi $x_0 = \varphi(t_0)$.

Aplicăm teorema funcţiilor implicite funcţiei $F(.,.) = (F^1(.,.), ..., F^n(.,.))$ în (t_0, x_0), fapt posibil deoarece $D_2F(t, x) \in M_n(\mathbf{R})$ este inversabilă ($F^1, ..., F^n$ fiind funcţional independente). Deducem că $\exists I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$, $\exists!\psi(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$ de clasă C^1 astfel încât $\psi(t_0) = x_0$, $F(t, \psi(t)) = F(t_0, x_0)$ pe I_0.

Din unicitatea lui $\psi(.)$ şi din faptul că $\varphi(.)$ verifică aceeaşi problemă de funcţi implicite, deducem că $\varphi(.)$ şi $\psi(.)$ coincid pe I_0, deci $\varphi(.)$ este de clasă C^1. Cum t_0 a fost ales arbitrar avem că $\varphi(.)$ este de clasă C^1 pe I.

Pe de o parte, dacă derivăm în egalitatea (4) avem

$$D_1F^i(t, \varphi(t)) + D_2F^i(t, \varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n},$$

egalitate care poate fi rescrisă sub forma vectorială

$$D_1F(t, \varphi(t)) + D_2F(t, \varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0. \tag{5}$$

Pe de altă parte, F^i, $i = \overline{1, n}$ sunt integrale prime. Deci, din (3) obţinem

$$D_1F^i(t, x) + D_2F^i(t, x)f(t, x) \equiv 0 \quad \text{pe} \quad D_0,$$

sau echivalent

$$D_1F(t, x) + D_2F(t, x)f(t, x) \equiv 0 \quad \text{pe} \quad D_0. \tag{6}$$

Aşadar, din (5) şi (6) gasim

$$\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))(\equiv -(D_2F(t, \varphi(t)))^{-1}D_1F(t, \varphi(t))) \quad \text{pe} \quad I_0. \square$$

Observaţie. Spunem că identităţile

$$F^i(t,x) = c_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

reprezintă *soluţia generală sub formă implicită* pe D_0 a ecuaţiei (1). Dacă sistemul (7) poate fi rezolvat în raport cu x, adică dacă se poate determina o funcţie $\psi(.,.)$ astfel încăt $F^i(t,\psi(t,c)) = c_i$, $i = \overline{1,n}$ atunci spunem că

$$x = \psi(t,c), \quad c = (c_1,...,c_n) \in \mathbf{R}^n$$

este *soluţia generală sub formă explicită* a ecuaţiei (1).

Observaţie (Reducerea ordinului cu ajutorul integralelor prime). Să admitem că se cunosc p $(< n)$ integrale prime ale ecuaţiei (1) funcţional independente. Atunci ecuaţia (1) este echivalentă cu o ecuaţie diferenţială pe $\mathbf{R}^{n-p}$.

Mai precis, fie $F^1,...,F^p : D_0 \to \mathbf{R}$ cele p integrale prime ale lui (1) şi fie $x(.) = (x_1(.),...,x_n(.))$ o soluţie a lui (1). Ţinând cont că există constantele $c_1,...,c_p$ astfel încât

$$F^i(t,(x_1(t),...,x_n(t))) \equiv c_i, \quad i = \overline{1,p},$$

în virtutea faptului că $F^1,...,F^p$ sunt funcţional independente şi a teoremei funcţiilor implicite rezultă că p componente ale lui $x(.)$ pot fi exprimate în mod unic ca funcţii de clasă C^1 de celelalte $n-p$.

Renumerotând componentele lui $x(.)$, dacă este cazul, putem presupune că acele componente care se exprimă ca funcţii de celelalte sunt primele p:

$$x_i(t) = \psi_i(t, x_{p+1}(t),...,x_n(t), c_1,...,c_p) \quad i = \overline{1,p}, .$$

Înlocuind aceste componente ale lui $x(.)$ în ultimele $n-p$ ale ecuaţiei (1) obţinem o ecuaţie diferenţială cu $n-p$ funcţii necunoscute:

$$\tfrac{dx_j}{dt} = f_j(t, \psi_1(t, x_{p+1}(t),...,x_n(t),\tilde{c}),...,\psi_p(t,x_{p+1}(t),...,x_n(t),\tilde{c}), x_{p+1},...,x_n) \\ j = \overline{p+1,n},$$

unde am notat $\tilde{c} = (c_1,...,c_p)$.

Următorul rezultat afirmă că în ipoteze ,,rezonabile" pentru orice ecuaţie diferenţială pe $\mathbf{R}^n$ există n integrale prime funcţional independente.

Teoremă (Existenţa integralelor prime). *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă si $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (1).*

Atunci pentru orice $(t_0, x_0) \in D$ există $F^1(.,.), ..., F^n(.,.) : D_0 \in \mathcal{V}(t_0, x_0) \to \mathbf{R}$ de clasă C^1, integrale prime funcţional independente care verifică condiţia $F(t_0, x_0) = (F^1(t_0, x_0), ..., F^n(t_0, x_0)) = x_0$ şi care, în plus, are următoarea proprietate de generare a tuturor integralelor prime pe D_0: $\tilde{F}(.,.) : D_0 \to \mathbf{R}$ este integrală primă a ecuaţiei (1) dacă şi numai dacă $\exists G(.) : F(D_0) \to \mathbf{R}$ astfel încât

$$\tilde{F}(t, x) = G(F^1(t, x), ..., F^n(t, x)), \quad \forall (t, x) \in D_0.$$

Demonstraţie. Fie $\alpha_f(.,.,.) = (\alpha_f^1(.,.,.), ..., \alpha_f^n(.,.,.)) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal al ecuaţiei (1). Din Teorema asupra curentului maximal şi din Teoremele de diferenţiabilitate a soluţiilor în raport cu datele iniţiale rezultă că $D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ este deschisă, $\alpha_f(.,.,.)$ este de clasă C^1 şi verifică proprietatea de integrală primă $D_2\alpha_f(t, \tau, \xi) + D_3\alpha_f(t, \tau, \xi)f(\tau, \xi) \equiv 0, \quad \forall t \in I(\tau, \xi)$.

Pentru orice $(t_0, x_0) \in D$ definim

$$D_0 := \{(t, x) \in D; \quad (t_0, t, x) \in D_f\},$$

$$F^i(t, x) = \alpha_f^i(t_0, t, x), \quad (t, x) \in D_0, i = \overline{1, n}.$$

Cum $D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ este deschisă avem că şi $D_0 \subset D$ este deschisă şi $D_0 \in \mathcal{V}(t_0, x_0)$. Din proprietatea de integrală primă a curentului maximal, pe baza criteriului pentru integrale prime rezultă că $F^i(.,.), i = \overline{1, n}$ sunt integrale prime; din Teoremele de diferenţiabilitate a soluţiilor în raport cu datele iniţiale rezultă că $F^i(.,.), i = \overline{1, n}$ sunt de clasă C^1. În plus, din faptul că $\alpha_f(t_0, t_0, x_0) = x_0$ rezultă că $F(t_0, x_0) = x_0$.

Notăm că $(\frac{\partial F^i}{\partial x_j}(t, x))_{i,j=\overline{1,n}} = D_2F(t, x) = D_3\alpha_f(t_0, t, x)$.

Dar din Teorema de diferenţiabilitate a soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei dependente, $s \to D_3\alpha_f(s, t, x)$ este soluţie matriceală a ecuaţiei în variaţii

$$\frac{dy}{ds} = D_2f(s, \alpha_f(s, t, x))y, \quad y(t) = I_n$$

şi în baza Teoremei lui Liouville

$$det(D_3\alpha_f(t_0,t,x)) = e^{\int_t^{t_0} Tr(D_2f(s,\alpha_f(s,t,x)))ds} \neq 0, \quad \forall (t,x) \in D_0,$$

ceea ce arată că $F^i(.,.), i = \overline{1,n}$ sunt funcţional independente pe D_0.

Să remarcăm că

$$F(D_0) \subset \{y \in \mathbf{R}^n; (t_0,y) \in D_0\} = pr_{t_0}D,$$

deoarece pentru orice $(t,x) \in D_0$ avem $(t_0, \alpha_f(t_0,t,x)) \in D_0$.

În final, deoarece $\tilde{F}(.,.)$ este integrală primă şi pentru orice $(t,x) \in D_0$, funcţia $\alpha_f(.,t,x)$ este soluţie a ecuaţiei (1) şi pentru $t, t_0 \in I(t,x)$ au loc egalităţile

$$\tilde{F}(t_0,\alpha_f(t_0,t,x)) = \tilde{F}(s,\alpha_f(s,t,x)) = \tilde{F}(t,\alpha_f(t,t,x)) = \tilde{F}(t,x),$$

$\forall s \in [t_0,t]$ şi, deci, dacă definim $G(.) : F(D_0) \to \mathbf{R}$ prin

$$G(y) = \tilde{F}(t_0,y), \quad y \in F(D_0)$$

obţinem proprietatea de generare. $\square$

Cursul 12

Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I

Definiţie. Funcţia $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ defineşte *ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I*

$$F(x, z, \frac{\partial z}{\partial x}) = 0. \tag{1}$$

Se numeşte *soluţie a ecuaţiei* (1) o funcţie $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ diferenţiabilă, G deschisă, care verifică ecuaţia, adică

$$F(x, \varphi(x), D\varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in G. \tag{2}$$

În coordonate ecuaţia (1) devine

$$F((x_1, ..., x_n), z, (\frac{\partial z}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n})) = 0,$$

iar dacă folosim notaţiile lui Monge

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad p = (p_1, ..., p_n),$$

ecuaţia poate fi rescrisă sub forma

$$F((x_1, ..., x_n), z, (p_1, ..., p_n)) = 0.$$

Daca $n = 1$, ecuaţia (1) este, de fapt, o ecuaţie diferenţială implicită

$$F(x, z, z') = 0.$$

Dacă $n = 2$ se utilizează, de obicei, notaţiile

$$(x_1, x_2) = (x, y), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

ecuaţia scriindu-se $F((x, y), z, (p, q)) = 0$.

Aşa cum în cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare, pentru a putea individualiza soluţiile unei ecuaţii diferenţiale este nevoie de o condiţie iniţială, la fel şi la ecuaţiile cu derivate parţiale este nevoie de condiţii suplimentare de acelaşi tip.

Definiţie. Fiind date funcţiile $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ şi $\varphi_0(.) : G_0 \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ spunem că $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este soluţie a *problemei la limită* (F, φ_0) dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1) şi verifică *condiţia la limită*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x), \quad \forall x \in G_0 \cap G.$$

În cele ce urmează vom considera doar situaţia în care graficul funcţiei date φ_0 este o mulţime parametrizată de două funcţii $\alpha(.), \beta(.)$,

$$Graph(\varphi_0(.)) = \{(\alpha(\sigma), \beta(\sigma)); \sigma \in A \subset \mathbf{R}^{n-1}\}.$$

Mulţimea $Graph(\varphi_0(.))$ se numeşte *varietate iniţială*.

Definiţie. Fiind date funcţiile $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\alpha(.) : A \subset \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$, $\beta(.) : A \to \mathbf{R}$ spunem că funcţia $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este soluţie a *problemei la limită parametrizată pentru ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I* (F, α, β) dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1) şi $\varphi(.)$ verifică condiţia la limită

$$\varphi(\alpha(\sigma)) = \beta(\sigma), \quad \forall \sigma \in B = \{\sigma \in A; \alpha(\sigma) \in G\}.$$

Definiţie. Fiind date funcţiile $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\alpha(.) : A \subset \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$, $\beta(.) : A \to \mathbf{R}$, $\gamma(.) : A \to \mathbf{R}^n$ cu $\alpha(.)$ şi $\beta(.)$ diferenţiabile, iar $\gamma(.)$ verificând condiţiile de compatibilitate

$$\begin{aligned} &F(\alpha(\sigma), \beta(\sigma), \gamma(\sigma)) \equiv 0, \\ &\gamma(\sigma) D\alpha(\sigma) \equiv D\beta(\sigma). \end{aligned} \tag{3}$$

spunem că funcţia $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este soluţie a *problemei la limită compatibilă cu ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I* $(F, \alpha, \beta, \gamma)$ dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1) şi $\varphi(.)$ verifică condiţiile

$$\begin{aligned} &\varphi(\alpha(\sigma)) = \beta(\sigma), \quad \forall \sigma \in A, \\ &D\varphi(\alpha(\sigma)) = \gamma(\sigma), \quad \forall \sigma \in A. \end{aligned} \tag{4}$$

Metoda caracteristicilor permite studiul unei ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întâi cu ajutorul unei ecuaţii (sistem) diferenţiale ordinare care se asociază unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi, aşa-numitul *sistem al caracteristicilor*. Prin urmare, rezultatele, pe care le vom prezenta în continuare, sunt aplicaţii ale teoriei generale a ecuaţiilor diferenţiale ordinare studiate deja.

Definiţie. Dacă $D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ este deschisă şi $F(.,.,.) : D \to \mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^1 atunci sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}(x, z, p), \\ \frac{dz}{dt} = < p, \frac{\partial F}{\partial p}(x, z, p) >, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, z, p) - p\frac{\partial F}{\partial z}(x, z, p) \end{cases} \tag{5}$$

se numeşte *sistemul caracteristicilor asociat ecuaţiei* (1).

Observaţie. În coordonate sistemul caracteristicilor (5) devine

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}((x_1, ..., x_n), z, (p_1, ..., p_n)), \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}((x_1, ..., x_n), z, (p_1, ..., p_n)), \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}((x_1, ..., x_n), z, (p_1, ..., p_n)) - \\ -p_i \frac{\partial F}{\partial z}((x_1, ..., x_n), z, (p_1, ..., p_n)), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Propoziţia 1. *Fie* $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$*, o funcţie de clasă* C^1 *şi* $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$*, o funcţie de clasă* C^2*, soluţie a ecuaţiei (1).*

Atunci pentru orice $x_0 \in G$ *există* $(X(.), Z(.), P(.)) : I_0 \in \mathcal{V}(0) \to D$ *soluţie a sistemului caracteristicilor (5), care, în plus verifică:* $X(0) = x_0$*,* $\varphi(X(t)) = Z(t)$*,* $\forall t \in I_0$ *şi* $D\varphi(X(t)) = P(t)$*,* $\forall t \in I_0$*.*

Demonstraţie. Considerăm următoarea problemă Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}(x, \varphi(x), D\varphi(x)), \quad x(0) = x_0. \tag{6}$$

Observăm că, în ipotezele noastre, funcţia

$$f_\varphi(t, x) := \frac{\partial F}{\partial p}(x, \varphi(x), D\varphi(x))$$

este continuă, şi deci putem aplica Teorema lui Peano pentru a deduce existenţa lui $X(.) : I_0 \in \mathcal{V}(0) \to G$ soluţie a problemei Cauchy considerate.

Definim $Z(.) : I_0 \to \mathbf{R}$, $P(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$ prin $Z(t) = \varphi(X(t))$, $P(t) = D\varphi(X(t))$, $t \in I_0$. Rămâne de demonstrat că $(X(.), Z(.), P(.))$ este soluţie a sistemului caracteristicilor. Din faptul că $X(.)$ verifică (6) şi din felul în care au fost definite $Z(.)$ şi $P(.)$ deducem imediat că

$$X'(t) \equiv \frac{\partial F}{\partial p}(X(t), Z(t), P(t)).$$

Pe de altă parte, din definiţia lui $Z(.)$ şi (6) avem

$$Z'(t) \equiv D\varphi(X(t))X'(t) \equiv < P(t), \frac{\partial F}{\partial p}(X(t), Z(t), P(t)) > .$$

În final, dacă derivăm în raport cu x identitatea (2) obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x), D\varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, \varphi(x), D\varphi(x))D\varphi(x)+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial p}(x, \varphi(x), D\varphi(x))D^2\varphi(x) \equiv 0,$$

şi dacă luăm $x = X(t)$, $t \in I_0$ obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial p}(X(t), Z(t), P(t))D^2\varphi(X(t)) \equiv$$

$$\equiv -\frac{\partial F}{\partial x}(X(t), Z(t), P(t)) - \frac{\partial F}{\partial z}(X(t), Z(t), P(t))P(t).$$

Din definiţia lui $P(.)$ şi prima ecuaţie a sistemului (5)

$$P'(t) \equiv D^2\varphi(X(t)).X'(t) \equiv D^2\varphi(X(t)).\frac{\partial F}{\partial p}(X(t), Z(t), P(t)).$$

Din ultimele două egalităţi deducem că şi cea de-a treia ecuaţie a sistemului (5) este verificată. $\square$

Propoziţia 2. *Dacă $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, care defineşte ecuaţia (1) este clasă C^1, atunci $F(.,.,.)$ este integrală primă pentru sistemul caracteristicilor (5).*

Demonstrație. Se aplică Criteriul pentru integrale prime. □

Definiţie. Fie $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\alpha(.) : A \subset \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$, $\beta(.) : A \to \mathbf{R}$, $\gamma(.) : A \to \mathbf{R}^n$ funcţii de clasă C^1 astfel încât $(F, \alpha, \beta, \gamma)$ este o problemă la limită compatibilă cu ecuaţia (1).

Se numeşte *curentul caracteristicilor asociat problemei* $(F, \alpha, \beta, \gamma)$ funcţia $C(.,.) = (X(.,.), Z(.,.), P(.,.)) : \Omega \subset \mathbf{R} \times A \to D$ cu proprietatea că $\forall \sigma \in A$, $C(., \sigma) : I(\sigma) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ este soluţie maximală a sistemului caracteristicilor (5) care verifică condiţia iniţială

$$C(0, \sigma) = (\alpha(\sigma), \beta(\sigma), \gamma(\sigma)), \quad \sigma \in A. \tag{7}$$

Principalul rezultat al acestei secţiuni este cunoscut sub denumirea de teorema asupra metodei caracteristicilor.

Teorema asupra metodei caracteristicilor. *Fie* $D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^{n-1}$ *deschise,* $F(.,.,.) : D \to \mathbf{R}$ *de clasă* C^2 *şi* $\alpha(.), \gamma(.) : A \to \mathbf{R}^n$, $\beta(.) : A \to \mathbf{R}$ *de clasă* C^1 *astfel încât* $(F, \alpha, \beta, \gamma)$ *este o problemă la limită compatibilă cu ecuaţia (1).*

Fie $C(.,.) = (X(.,.), Z(.,.), P(.,.)) : \Omega \subset \mathbf{R} \times A \to D$ *curentul caracteristicilor asociat problemei* $(F, \alpha, \beta, \gamma)$*, despre care presupunem că există* $\Omega_0 \subset \Omega$ *deschisă astfel încât* $X(.,.)|_{\Omega_0}$ *este un difeomorfism de clasă* C^1 *cu inversa*

$$(X(.,.)|_{\Omega_0})^{-1} = (T(.), \Sigma(.))$$

şi astfel încât $\{\sigma \in A; (0, \sigma) \in \Omega_0\} \neq \emptyset$.

Atunci funcţia $\varphi(.) : G := X(\Omega_0) \to \mathbf{R}$ *definită prin* $\varphi(x) = Z(T(x), \Sigma(x))$ *este soluţie a problemei la limită* $(F, \alpha, \beta, \gamma)$.

Demonstrație. Faptul că $(T(.), \Sigma(.))$ este inversa lui $X(.,.)$ pe Ω_0 se scrie sub forma

$$\begin{aligned} &T(X(t,\sigma)) = t, \Sigma(X(t,\sigma)) = \sigma, \quad \forall (t,\sigma) \in \Omega_0, \\ &X(T(x), \Sigma(x)) = x, \quad \forall x \in G. \end{aligned} \tag{8}$$

Vom structura demonstraţia în mai mulţi paşi.

Pasul 1. $\varphi(.)$ verifică condiţia la limită $\varphi(\alpha(\sigma)) = \beta(\sigma)$, $\sigma \in A$.

Într-adevăr, din definiţia lui $\varphi(.)$ şi (8) avem

$$\varphi(\alpha(\sigma)) \equiv Z(T(\alpha(\sigma)), \Sigma(\alpha(\sigma))) \equiv$$

$$\equiv Z(T(X(0,\sigma)),\Sigma(X(0,\sigma))) \equiv Z(0,\sigma) \equiv \beta(\sigma).$$

Pasul 2. $C(.,.)$ este de clasă C^1 şi verifică identitatea

$$DZ(t,\sigma) = P(t,\sigma)DX(t,\sigma), \quad \forall (t,\sigma) \in \Omega_0. \tag{9}$$

Faptul că $C(.,.)$ este de clasă C^1 rezultă imediat din ipoteza că F este de clasă C^2; de unde va rezulta că funcţia f care defineşte sistemul caracteristicilor (5) este de clasă C^1 şi deci curentul său maximal $\alpha_f(.,.,.)$ este de clasă C^1. Cum

$$C(t,\sigma) \equiv \alpha_f(t, 0, (\alpha(\sigma), \beta(\sigma), \gamma(\sigma)))$$

rezultă că aplicaţia $C(.,.)$ este de clasă C^1.

Demonstraţia identităţii (9) revine la demonstraţia următoarelor identităţi

$$D_1 Z(t,\sigma) \equiv < P(t,\sigma), D_1 X(t,\sigma) >, \tag{10}$$

$$D_2 Z(t,\sigma) \equiv P(t,\sigma) D_2 X(t,\sigma). \tag{11}$$

Egalitatea (10) rezultă imediat din faptul că $C(.,\sigma)$ este soluţie a sistemului caracteristicilor.

Pentru a demonstra egalitatea (11), fie $\sigma \in A$ arbitrar şi fie $w(.) : I(\sigma) \to \mathbf{R}^{n-1}$

$$w(t) = D_2 Z(t,\sigma) - P(t,\sigma) D_2 X(t,\sigma).$$

Prin calcul (exerciţiu!) se arată că $w(.)$ verifică următoarea problemă Cauchy

$$w' = -\frac{\partial F}{\partial z}(C(t,\sigma))w, \quad w(0) = 0.$$

Deci $w(.)$ este soluţie a unei ecuaţii liniare care se anulează la momentul 0; deci în baza Propoziţiei (Soluţia banală) de la ecuaţii liniare deducem că $w(t) \equiv 0$, adică (11).

Pasul 3. $\varphi(.)$ verifică condiţia $D\varphi(\alpha(\sigma)) = \gamma(\sigma)$, $\sigma \in A$.

Din definiţia lui $\varphi(.)$, derivând în egalitatea (8) şi folosind egalitatea (9) avem succesiv

$$D\varphi(x) = DZ(T(x),\Sigma(x)).D(T,\Sigma)(x) = P(T(x),\Sigma(x)).$$

$$.DX(T(x),\Sigma(x)).D(X(.,.)|_{\Omega_0})^{-1}(x) = P(T(x),\Sigma(x)) \tag{12}$$

Folosind din nou (8)

$$D\varphi(\alpha(\sigma)) \equiv P(T(\alpha(\sigma)), \Sigma(\alpha(\sigma))) \equiv$$

$$\equiv P(T(X(0,\sigma)), \Sigma(X(0,\sigma))) \equiv P(0,\sigma) \equiv \gamma(\sigma).$$

Pasul 4. $\varphi(.)$ verifică ecuaţia, i.e., egalitatea (2).
Din Propoziţia 2 deducem că există $c \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$F(X(t,\sigma), Z(t,\sigma), P(t,\sigma)) = c, \quad \forall (t,\sigma) \in \Omega_0.$$

În particular, pentru $t = 0$ din condiţia (3) deducem $c = 0$. Deci

$$F(X(t,\sigma), Z(t,\sigma), P(t,\sigma)) \equiv 0.$$

Pentru $t = T(x), \sigma = \Sigma(x)$, $x \in G$ utilizând iar (8) şi (12) deducem

$$F(x, \varphi(x), D\varphi(x)) \equiv 0.$$

Prin urmare, pe baza afirmaţiilor de la Paşii 1,3 şi 4 teorema este complet demonstrată. □

Algoritm (Metoda caracteristicilor). În baza rezultatelor anterioare, pentru determinarea soluţiilor unei probleme la limită (F, φ_0) unde F este o funcţie de clasă C^2 trebuie parcurse următoarele etape.

1. Determină o parametrizare (de clasă C^1) $(\alpha(.), \beta(.))$ a varietăţii iniţiale:

$$\begin{cases} x = \alpha(\sigma) \\ z = \beta(\sigma), \quad \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}) \in A \subset \mathbf{R}^{n-1}, \end{cases}$$

2. Determină funcţia $\gamma(.)$, rezolvând în raport cu necunoscuta p sistemul algebric

$$\begin{cases} F(\alpha(\sigma), \beta(\sigma), p) \equiv 0, \\ pD\alpha(\sigma) \equiv D\beta(\sigma). \end{cases}$$

3. Determină $C(.,.) = (X(.,.), Z(.,.), P(.,.))$ curentul caracteristicilor, i.e., integrează sistemul caracteristicilor

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}(x,z,p), \quad x(0) = \alpha(\sigma) \\ \frac{dz}{dt} =< p, \frac{\partial F}{\partial p}(x,z,p) >, \quad z(0) = \beta(\sigma) \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x,z,p) - p\frac{\partial F}{\partial z}(x,z,p), \quad p(0) = \gamma(\sigma) \end{cases}$$

– caută ecuaţii independente (metode elementare)
– caută subsisteme independente (liniare, afine, integrale prime)
– utilizează informaţia suplimentară $F(C(t,\sigma)) \equiv 0$

4. Scrie
$$\begin{cases} x = X(t,\sigma), \\ z = Z(t,\sigma), \quad \sigma \in A, t \in I(\sigma) \end{cases}$$
soluţia sub formă parametrizată.

5. Inversează (dacă este posibil) $X(.,.)$ (pe un domeniu maximal) obţinându-se $t = T(x)$, $\sigma = \Sigma(x)$ şi se scrie soluţia explicită $\varphi(x) = Z(T(x), \Sigma(x))$.