TEME ALGEBRA III SERIILE 20,22

TIBERIU DUMITRESCU ŞI MIHAI EPURE

Tema 0

Termen limită depăşit.

1. Arătaţi că $6 + i$ divide $43 + i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

2. Determinaţi valorile lui n pentru care $X^4 - X^2 + 1$ divide $X^n - 1$ în $\mathbb{Q}[X]$.

3. Verificaţi dacă $127 + 48\sqrt{7}$ divide toate numerele din $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

4. Fie A un domeniu şi a un element nenul al lui A. Spunem că $b, c \in A$ sunt congruente modulo a (notaţie $b \equiv_a c$) dacă a divide $b - c$. Arătaţi că $\equiv_a$ este o relaţie de echivalenţă pe A.

5. Găsiţi un număr natural n astfel încât $5 + 2\sqrt{3} \equiv_{2-3\sqrt{3}} n$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ (cf. ex. precedent).

Tema 1

6. Determinaţi numerele $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ pentru care $a + bi$ divide $a - bi$.

7. Scrieţi asociaţii lui $2 + \sqrt{-3}$ în inelul $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-3})/2]$.

8. Arătaţi că $5 - 4i$ divide $a + bi$ în $\mathbb{Z}[i] \Leftrightarrow a \equiv_{41} 9b$.

9. Determinaţi divizorii lui $9 + 14\sqrt{-2}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

10. Determinaţi un număr din $\mathbb{Z}[\sqrt{33}] - \{\pm 1\}$ care divide numerele $2 + 5\sqrt{33}$ şi $1 + \sqrt{33}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{33}]$.

Tema 2

11. Fie A un domeniu şi $a, b \in A$ două elemente asociate. Arătaţi că a este element prim (resp. atom) dacă şi numai dacă b este element prim (resp. atom).

12. Arătaţi că numerele 3 şi $5 + 2\sqrt{-14}$ din inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ sunt atomi neprimi.

13. Investigaţi dacă numerele 17, $465 + 124\sqrt{14}$, $1 + \sqrt{14}$ din inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ sunt elemente prime, atomi neprimi sau elemente reductibile.

14. Găsiţi un atom al lui $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ care este reductibil în $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-7})/2.]$

15. Folosind inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, rezolvaţi ecuaţia $13x^2 = y^2 + 2z^2$ în numere întregi.

Tema 3

16. Găsiţi o factorizarea atomică a lui $-15+23i$ în inelul $\mathbb{Z}[i]$.

17. Găsiţi toate factorizările atomice ale lui $30+13\sqrt{-6}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.

18. Arătaţi că 2 este atom în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$. Găsiţi un număr $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ care are o factorizare atomică cu doi atomi şi alta cu 7 atomi.

19. Rezolvaţi în numere întregi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} xz - 5yv = -19 \\ xv + yz = 17. \end{cases}$$

20. Considerăm subinelul

$$A = \{a + 2f \mid a \in \mathbb{Z},\ f \in \mathbb{Z}[X]\}$$

al lui $\mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că A este inel CLD dar nu este Noetherian. (Ind. Utilizaţi idealul $I = \{f \in A \mid f(0) = 0\}$.)

Tema 4

21. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{82}]$ nu este factorial.

22. Găsiţi un număr din $\mathbb{Z}[\sqrt{-4}]$ cu factorizare atomică neunică.

23. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$. Arătaţi că
$$(a, b, c) = 1 \Leftrightarrow (a + b + c, ab + bc + ac, abc) = 1.$$

24. Descrieţi perechile de numere din $\mathbb{Z}[i]$ cu $(a, b) = 3 - i$ şi $[a, b] = 20 + 10i$.

25. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$. Arătaţi că
$$(a, [b, c])(a, b, c) = (a, b)(a, c).$$

Notaţiile (...), [...] înseamnă CMMDC, respectiv CMMMC.

Tema 5

26. Arătaţi că idealul $< 10 + 4\sqrt{6}, 22 - 9\sqrt{6} >$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ este principal.

27. Găsiţi $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ astfel încât idealul $< 11, z >$ nu este principal.

28. Vericaţi dacă în $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ avem egalitatea

$$< 2 > \cap < 1 + \sqrt{-5} > = < 6, 2 + 2\sqrt{-5} > .$$

29. Arătaţi că oricare două numere din şirul

$$(1+i)+1,\ (1+i)^2+1,\ (1+i)^4+1,\ (1+i)^8+1,\ ..., (1+i)^{2^n}+1, ...$$

sunt relativ prime în $\mathbb{Z}[i]$.

30. Considerăm subinelul lui $\mathbb{C}$

$$A = \{(a + b\sqrt{-5})/(2c+1) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Vericaţi dacă idealul generat în A de 2 şi $1 + \sqrt{-5}$ este principal.

Tema 6

31. Calculaţi $(11+15\sqrt{2}, 3+13\sqrt{2})$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ cu Algoritmul lui Euclid.

32. Rezolvaţi ex. precedent prin factorizare.

33. In $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, rezolvaţi ecuaţia
$$(11+15\sqrt{2})x+(3+13\sqrt{2})y=5-3\sqrt{2}.$$

34. In $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, rezolvaţi ecuaţia
$$(1+\sqrt{-3})x+(1-\sqrt{-3})y=2.$$

35. Determinaţi mulţimea $\{x\in\mathbb{Z}[i] \mid (3x+2)/(2x+3)\in\mathbb{Z}[i]\}$.

Tema 7

Trimiteţi prin email la adresa

`mihai.epure@gmail.com (grupele 201,221,222)`

un fişier pdf cu pozele soluţiilor dvs. (termen limită 7-ian-22 ora 24).
Numiţi acest fişier cu
numele dvs., numărul temei şi materia "algIII" (e.g. Ene7algIII.pdf).
Incepeţi tema precizând prenume, nume, grupa.

36. Găsiţi două numere întregi nenule a, b astfel încât idealul

$$< a + b\sqrt{10}, 9 + \sqrt{10} >$$

al inelului $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ este ideal prim.

37. Fie polinomul

$$f = 3X^7 + 1067X^6 + 1261X^5 + 1358X^4 + 1455X^3 + 1649X^2 + 1843X + 2037.$$

Arătaţi că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ folosind Criteriul lui Eisenstein.

38. Arătaţi că polinomul f din ex. 37 este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ reducându-l mod 2.

39. Este polinomul f din ex. 37 ireductibil peste $\mathbb{Q}(i)$?

40. Fie p un număr prim şi $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom p-Eisenstein de grad ≥ 2. Arătaţi că $f(X + p)$ este polinom p-Eisenstein.

41. Găsiţi o structură de $\mathbb{Z}[i]$-modul pe grupul abelian $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{13}$. Listaţi submodulele acestui modul.

42. Pe grupul abelian $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ considerăm structura de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$-modul dată de înmulţirea cu scalari

$$(a + b\sqrt{-3})(x, y) := ((a + b)x, (a - b)y),\ a, b \in \mathbb{Z},\ x, y \in \mathbb{Z}_4.$$

Calculaţi elementele submodulului generat de $(\hat{1}, \hat{1})$.

43. Arătaţi că în $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}^2$ avem

$$< (3, 0), (1, 1)) > \ \cap\ < (3, 0), (1, -1) > = < (3, 0), (0, 3) > .$$

44. Deduceţi din ex. precedent că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ intersecţia idealelor $< 3, 1 + \sqrt{-5} >$ şi $< 3, 1 - \sqrt{-5} >$ este un ideal principal.

45. Fie A un inel principal cu corpul de fracţii K astfel încât $A \neq K$. Pe K considerăm structura canonică de A-modul. Arătaţi că:
(i) orice A-submodul finit generat al lui K este ciclic,
(ii) K nu este A-modul finit generat.