Rezolvari examen iulie 2022

Thursday, September 8, 2022 4:12 PM

Adevărat

I 1. f este de forma

$$f(x,y,z)=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+b \quad \text{unde } A=\begin{pmatrix}4&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$b=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

$\overset{\text{curs}}{\Longrightarrow}$ f este aplicație afină

2. Fals: M poate fi ales o dreaptă, $M=d\subset\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ M infinită (evident) și $Af(M)\underset{\uparrow}{=}M$

este subsp. afin

3. Fals Π și Π' pot fi ortogonale, caz în care $pr_{\Pi}|_{\Pi'}$ nu este nici injectivă, nici surjectivă.

4. Fals Hiperboloidul cu o pânză este dublu riglat $\Rightarrow$ reuniune de drepte. (este nedegenerat)

5. Adevărat Alegem $\Gamma=S^{n-1}=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2=1\}$.

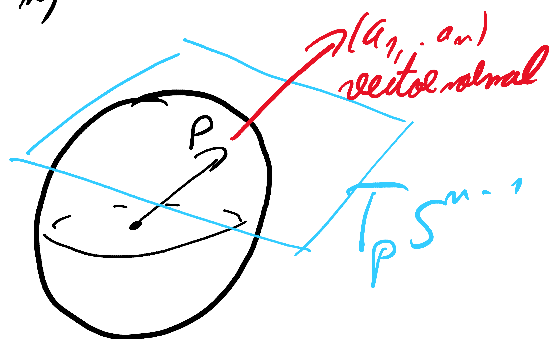
Atunci, în punctul $P=(a_1,\dots,a_n)\in S^{n-1}$, Atunci, în punctul $P=(a_1,\dots,a_n)\in S$,

$$T_P S^{n-1}: \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i-a_i)=0$$

(calculat după formula $\Gamma: F(x_1,\dots,x_n)=0 \Rightarrow$

$$T_P\Gamma: \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(P)\,(x_i-a_i)=0\;)$$

Cu alte cuvinte, $P=(a_1,\dots,a_n)$ este vector normal pentru $T_P S^{n-1}$.



Fie acum un hiperplan $\Pi: \alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n+b=0$

$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0 \Rightarrow$ Fie $M=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}=\|(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\|\neq 0$

și $(a_1,\dots,a_n)=\frac{1}{M}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

Atunci $\Pi: a_1x_1+\dots+a_nx_n+\frac{b}{M}=0$

deci $\Pi \parallel T_P S^{n-1}$, unde $P=(a_1,\dots,a_n)$.

6. Adevărat. Fie $\mathcal{C}: P(x,y)=0$, unde $P\in\mathbb{C}[x,y]$, $\deg P\geq 1$.

$\Rightarrow \overline{\mathcal{C}}: P^h(X,Y,Z)=0$, unde $P^h(X,Y,Z)=Z^{\deg P}\cdot P\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)$.

$\Rightarrow \overline{\mathcal{C}}: P^h(X,Y,Z)=0$, unde $P^h(X,Y,Z)=Z^{\deg}\cdot P\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)$

(omogenizatul lui P)

Puncte la infinit ale lui $\overline{\mathcal{C}}$: puncte care respectă $P^h(X,Y,Z)=0$ și $Z=0$.

$$P^h(X,Y,Z)=\underbrace{Q(X,Y)}_{\text{partea fără } Z}+Z\,S(X,Y,Z);$$

Cum P^h este omogenizatul unui polinom, $Q(X,Y)\neq 0$.

$$\begin{cases} P^h(X,Y,Z)=0 \\ Z=0 \end{cases} \Rightarrow Q(X,Y)=0 \leftarrow \text{polinom omogen}$$

$\Rightarrow$ are doar un nr finit de rădăcini puncte proiective $[X:Y]$

(Explicație: dc $Y=0 \Rightarrow X=1$ – o posibilă răd

dc $Y\neq 0 \Rightarrow [X:Y]=\left[\frac{X}{Y}:1\right]=[t:1]$

$\Rightarrow Q(t,1)=0 \leftarrow$ polinom într-o variabilă nenul $\Rightarrow$ nr finit de rădăcini)

II 1. a) $\Pi_1: 2x-6y+3z+2=0 \Rightarrow n_{\Pi}=(2,-6,3)$

$\Pi_2: 4x-12y+6z-3=0 \Rightarrow n_{\Pi'}=(4,-12,6)$

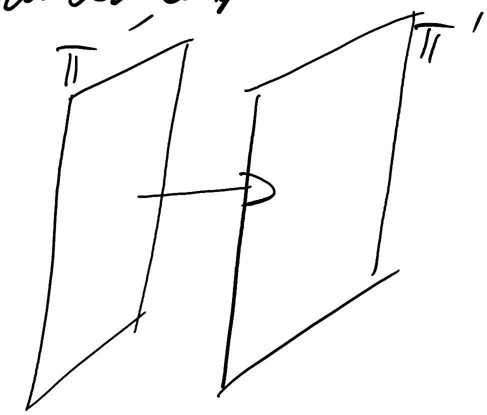
proporționale

$\Rightarrow \Pi_1 \parallel \Pi_2$

$\Rightarrow \Pi_1 \parallel \Pi_2$.

În plus, $\Pi_1 \neq \Pi_2$ evident $\left(\frac{2}{-3} \neq \frac{1}{2}\right)$

b) Putem alege o translație pe direcția vectorului normal:



$\Pi_1: 4x - 12y + 6z + 4 = 0$

$\Pi_2: 4x - 12y + 6z - 3 = 0$

Aleg că $A = (-1,0,0) \in \Pi_1$

$(-1,0,0) + \lambda(4,-12,6) \in \Pi_2 \Leftrightarrow$

$4(-1) - 12\cdot 0 + 6\cdot 0 + \lambda\left(4\cdot 4 + 12\cdot 12 + 6\cdot 6\right) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda\cdot\left(4^2+12^2+6^2\right) = 7$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{4^2+12^2+6^2}$

$\Rightarrow$ Alegem $v = \frac{7}{4^2+12^2+6^2}\cdot(4,-12,6)$

și $T_v(\Pi_1) = \Pi_2 \Rightarrow T_v \in \mathcal{M}$.

c) Evident $\mathcal{M}$ nu este grup,

$T_v \circ T_v \notin \mathcal{M}$

$((T_v \circ T_v)(\pi_1) \neq \pi_2)$

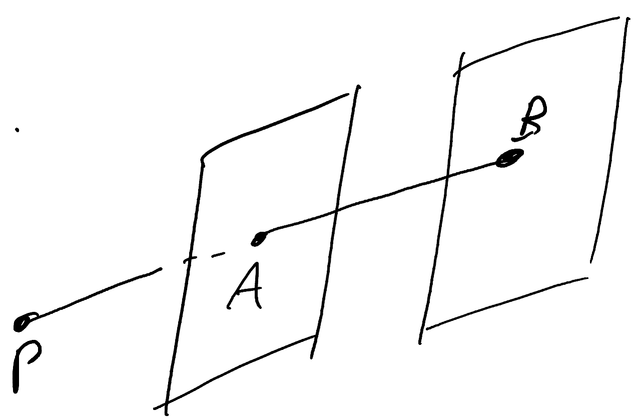
d) • M conține o infinitate de izometrii:
De exemplu, pentru orice $B \in \pi_2$, $T_{\vec{AB}} \in M$.

• M conține o infinitate de izo afine care nu sunt izometrii:

Alegem $P \in \mathbb{R}^3$ arbitrar, $P \notin \pi_1 \cup \pi_2$.

și fie $B = PA \cap \pi_2$.

Fie $\lambda = \frac{\|PB\|}{\|PA\|}$ (cu semn)



$\Rightarrow \mathcal{H}_{P,\lambda}(\pi_1) = \pi_2$

$\Rightarrow$ o infinitate de omotetii.

2. $\Gamma: x^2+2y^2-z^2+2xy-4yz+6x-4y+2z-7=0$

a) $(x^2+2xy+6x)+2y^2-z^2-4yz-4y+2z-7$

$= (\underbrace{x+y+3}_{x_1})^2 - y^2 - 9 - 6y + 2y^2 - z^2 - 4yz - 4y + 2z - 7$

$= x_1^2 + (y_1^2 - 4y_1 z_1 - 10y_1) - z_1^2 + 2z_1 - 16$