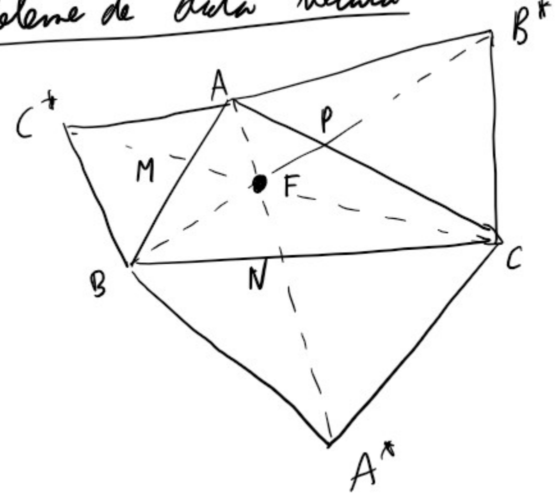
Seminarul 6 111

Tuesday, November 9, 2021 11:46 PM

Probleme de data trecută

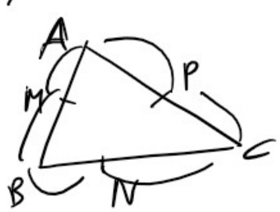


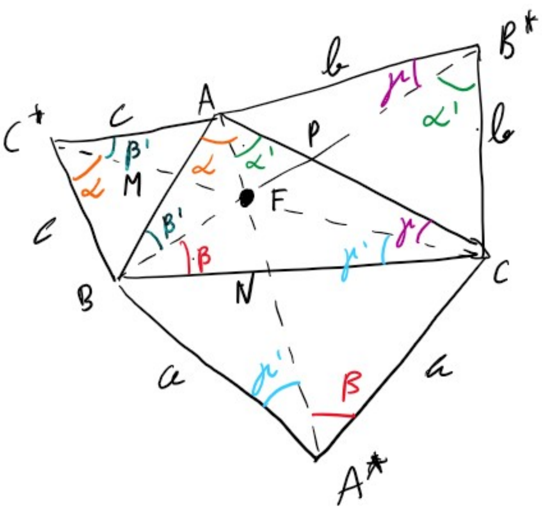
$\Delta AB^*C, \Delta CA^*B$ și ΔBC^*A echilaterale

$\Rightarrow AA^*, BB^*, CC^*$ concurente

fracții cu semn

Dem Th Ceva: AN, BP, CN concurente $\Leftrightarrow \frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$





$R_{A,60^\circ}(\Delta AC^*C) = \Delta ABB^* \Rightarrow \Delta AC^*C \equiv \Delta ABB^*$

$A \longmapsto A$

$C^* \longmapsto B$

$C \longmapsto B^*$

$\Rightarrow \sphericalangle AB^*P = \mu$

$\sphericalangle AC^*M = \beta'$

Th sinusurilor: • în ΔAB^*P:

$$\frac{AP}{\sin\mu} = \frac{AB^*}{\sin\sphericalangle APB^*} = \frac{b}{\sin\sphericalangle APB^*}$$

• în ΔPB^*C:

$$\frac{PC}{\sin\alpha'} = \frac{b}{\sin\sphericalangle B^*PC}$$

Analog, $R_{C,60^\circ}(\Delta CB^*B) = \Delta CAA^*$

$\Rightarrow \sphericalangle PB^*C = \alpha'$, $\sphericalangle CA^*N = \beta$

$R_{B,60^\circ}(\Delta ABA^*) = \Delta C^*BC$

$\Rightarrow \sphericalangle NA^*B = \mu'$, și $\sphericalangle BC^*M = \alpha$

$$\frac{PC}{\sin\alpha'} = \frac{b}{\sin \sphericalangle B^*PC} \quad \Rightarrow \sphericalangle NA^*B = \mu', \text{ și } \sphericalangle BC^*M = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{\sin\mu} = \frac{PC}{\sin\alpha'} \iff \boxed{\frac{\sin\mu}{\sin\alpha'} = \frac{AP}{PC}} \cdot (1)$$

Analog, $\frac{CN}{NB} = \frac{\sin\beta}{\sin\mu'}$ (2) și $\frac{BM}{MA} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} \cdot (3)$

Înmulțesc (1), (2) și (3): $\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BM}{MA} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\mu}{\sin\alpha' \cdot \sin\beta' \cdot \sin\mu'}$

Vrem $\frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\mu}{\sin\alpha' \sin\beta' \sin\mu'} = 1.$

Th sinusurilor în ΔAC^*C: $\frac{b}{\sin\beta'} = \frac{c}{\sin\mu} \iff \frac{\sin\mu}{\sin\beta'} = \frac{c}{b}.$

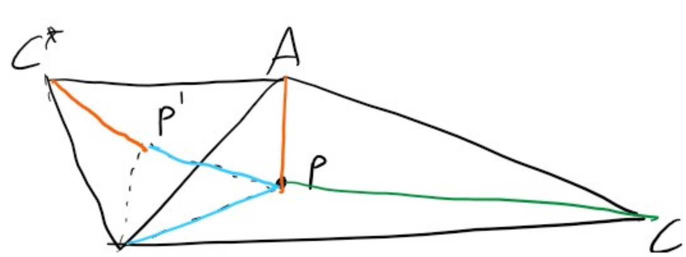
în ΔBCC^*: $\frac{c}{\sin\mu'} = \frac{a}{\sin\alpha} \iff \frac{\sin\alpha}{\sin\mu'} = \frac{a}{c}$

în ΔCBB^*: $\frac{a}{\sin\alpha'} = \frac{b}{\sin\beta} \iff \frac{\sin\beta}{\sin\alpha'} = \frac{b}{a}$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\mu}{\sin\alpha' \sin\beta' \sin\mu'} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

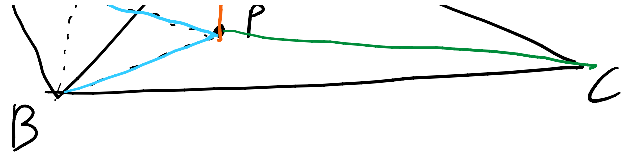
2. Fie ΔABC. Căutați P în interiorul ΔABC (inclusiv laturi) ai $|AP| + |BP| + |CP|$ minimă. Este unic?

Dem



Fie P arbitrar și $P' = R_{B,60°}(P)$

ΔAC^*B echilateral.



ΔAC^*B echilateral.

$E(P) = |PA| + |PB| + |PC| = |C^*P'| + |P'P| + |PC|$ minimă dacă C^*, P', P, C sunt coliniare (în această ordine)

$|PP'|$ pt că $\Delta BPP'$ echilateral

$|P'C^*|$ pt că $R_{B,60^\circ}(P) = P'$, $R_{B,60^\circ}(A) = C^*$ și rotația e o izometrie

Deci expresia $E(P)$ minimă dacă $P \in C^*C$!

La fel, ——— $P \in B^*B$!

——— $P \in A^*A$

$\Rightarrow$ $P = F$ de la punctul anterior (un punctul lui Fermat).

<u>Temă</u>: În demonstrația de mai sus, am presupus ceva! Aflați ce și $\boxed{\text{decideți ce se întâmplă în caz contrar!}}$

că toate unghiurile sunt $< 120^\circ$.

Simetrii axiale

1. Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 5\right)$.

Dem că f este izometrie. Este f simetrie axială?

<u>Dem</u> Curs: Th fundamentală a geometriei euclidiene + clasificare

Dem Curs: Th fundamentală a geometriei euclidiene + ...

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ izometrie $\Leftrightarrow \exists A \in O(2)$ și $b \in \mathbb{R}^2$ a.î.

$$f(x,y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$$

În plus

- $\det A = 1 \Rightarrow f$ este o rotație
- $\det A = -1 \Rightarrow f$ este o simetrie axială, compusă cu o translație

Aici, $f(x,y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 5\right)$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}}_{b}$$

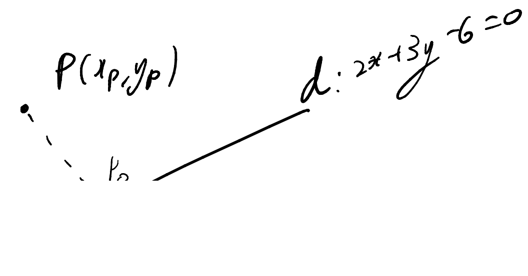
$A \in O(2) \Leftrightarrow A \cdot {}^tA = I_2$. Verificăm:

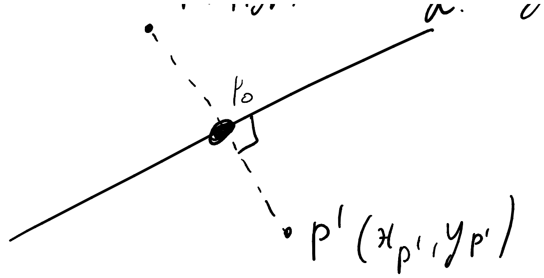
$$A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$\Rightarrow f$ este izometrie. Cum $\det A = 1 \Rightarrow f$ este o rotație.

2. Scrieți ecuația simetriei față de dreapta $d: 2x + 3y - 6 = 0$.

Dem





<u>Var I</u> Vedeți cum am făcut ecuația proiecției pe o dreaptă.

<u>Var II</u> Ecuația dreptei PP': $3x-2y+c=0$ ai $3x_p-2y_p+c=0$

$$\Rightarrow c=-3x_p+2y_p \Rightarrow PP': 3x-2y-3x_p+2y_p=0 \Leftrightarrow 3(x-x_p)-2(y-y_p)=0$$

$\{P_0\}=PP'\cap d \Rightarrow P_0$ soluția sistemului: $\begin{cases} 2x+3y-6=0 & |\cdot 2 \\ 3x-2y-(3x_p-2y_p)=0 & |\cdot 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow 13x_0 = 12+3(3x_p-2y_p) = 9x_p-6y_p+12$$

$$\Rightarrow x_0=\frac{9x_p-6y_p+12}{13} \Rightarrow 2y_0 = 3\cdot\frac{9x_p-6y_p+12}{13}-3x_p+2y_p$$

$$=\frac{27x_p-18y_p+36-39x_p+26y_p}{13}=\frac{-12x_p+8y_p+36}{13}$$

$$\Rightarrow y_0=\frac{-6x_p+4y_p+18}{13} \Rightarrow P_0=\left(\frac{9x_p-6y_p+12}{13}, \frac{-6x_p+4y_p+18}{13}\right)$$

$$\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}P'=P_0 \Rightarrow \boxed{P'=2P_0-P=\left(\frac{5x_p-12y_p+24}{13}, \frac{-12x_p-5y_p+36}{13}\right)}$$

Am făcut bine calculele?

Am făcut bine calculele?

Obs că $S(x,y) = \left(\frac{5x-12y+24}{13}, \frac{-12x-5y+36}{13}\right)$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ \frac{36}{13} \end{pmatrix}$$ ale într-adevăr

$A \cdot {}^tA = I_2$ și $\det A = -1$

Obs $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{{}^tA} \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} \|(a,b)\|^2 & \langle (a,b),(c,d)\rangle \\ \langle (a,b),(c,d)\rangle & \|(c,d)\|^2 \end{pmatrix}$, deci

$A \in O(2) \iff$ coloanele ei sunt ortogonale și au norma 1.

3. Fie dreptele $d_1: x=1$, $d_2: x=4$, $d_3: x=-2$, $d_4: x=5$.
Calculați $S_{d_1} \circ S_{d_2} \circ S_{d_3} \circ S_{d_4}$. Comută cele 4 simetrii?

Rezolvare $x \mapsto x'$ ai $\frac{x+x'}{2} = 1 \Rightarrow x' = 2\cdot 1 - x$

$S_{x=a} = (2a-x, y)$

$(S_{d_1} \circ S_{d_2} \circ S_{d_3} \circ S_{d_4})(x,y) = (2-(8-(-4-(10-x))), y)$

$$= (2-(8-(-4-10+x)), y)$$

$$= (2-(8+14-x), y) = (2-22+x, y) = (-20+x, y)$$

Chiar $(S_{d_1}\circ S_{d_2})(x,y) = (-6+x, y)$, și $(S_{d_2}\circ S_{d_1})(x,y) = (6+x, y)$

De fapt, era clar: $(S_{d_1}\circ S_{d_2})\circ(S_{d_2}\circ S_{d_1}) = S_{d_1}\circ \underbrace{S_{d_2}\circ S_{d_2}}_{Id}\circ S_{d_1}$

$$= S_{d_1}\circ S_{d_1} = Id$$

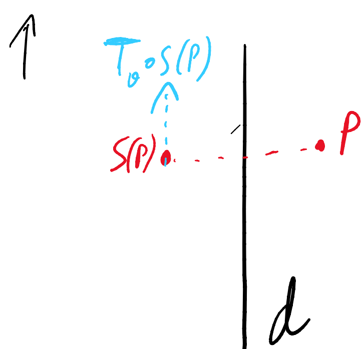
<u>Exc 4</u> Curs: (translație)$\circ$(simetrie axială) nu e mereu simetrie axială.

Dați un exemplu de dreaptă d și $v \neq 0$ vector a.î.

1) $T_v \circ S_d$ e o simetrie

2) $T_v \circ S_d$ NU e o simetrie.

<u>Rezolvare</u>



<u>nu</u> e o simetrie

(pt că nu are puncte fixe!)

Pt $(T_v\circ S)(P) = P \implies \boxed{S(P) + v = P} \implies \overrightarrow{PS(P)} = v$

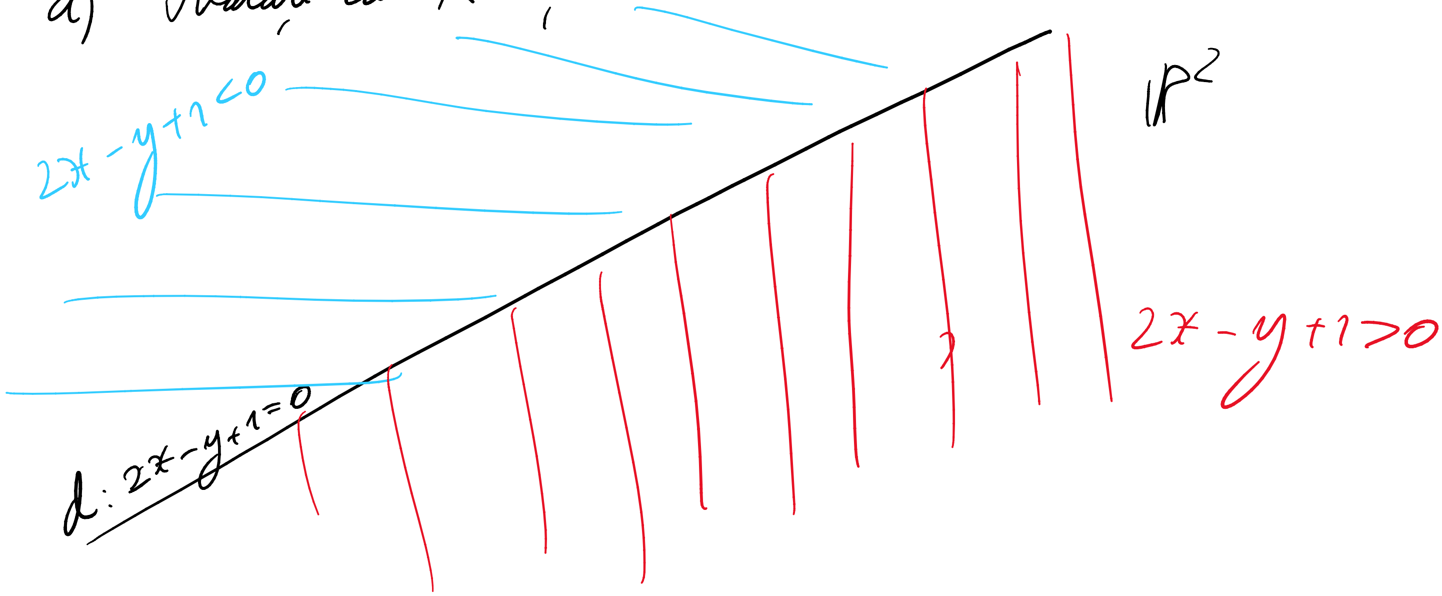
Dar $PS(P) \perp d$

(def simetriei!)

Deci $T_v\circ S$ este tot o simetrie doar dacă $\boxed{v \perp d}$

6. Fie $d: 2x - y + 1 = 0$ și $A = (-1,3)$, $B(2,10)$

a) Arătați că A și B sunt pe aceeași parte a dreptei.



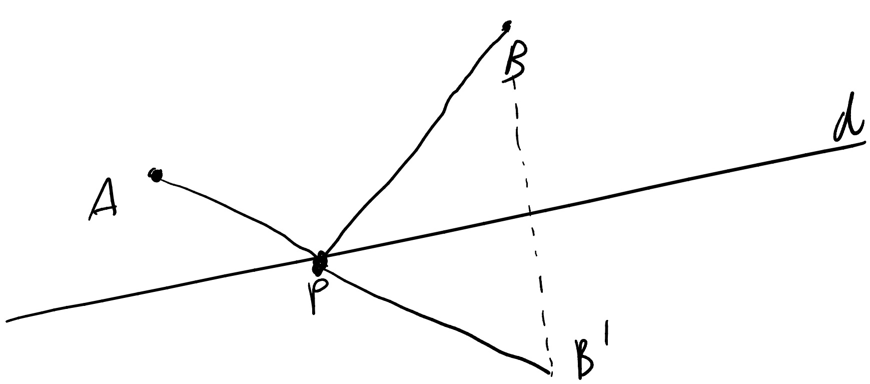
Iau $f(x,y) = 2x - y + 1$. $f(x,y) = 0 \iff (x,y) \in d$.

$$f(x_A, y_A) = 2\cdot(-1) - 3 + 1 = -4 < 0$$

$$f(x_B, y_B) = 2\cdot 2 - 10 + 1 = -5 < 0$$

b) ("Problema râului")

Caut $P \in d$ ai $|PA| + |PB|$ minim.



Notez B' simetricul lui B față de d.

$|PA| + |PB'|$ minim când A, P, B' coliniare

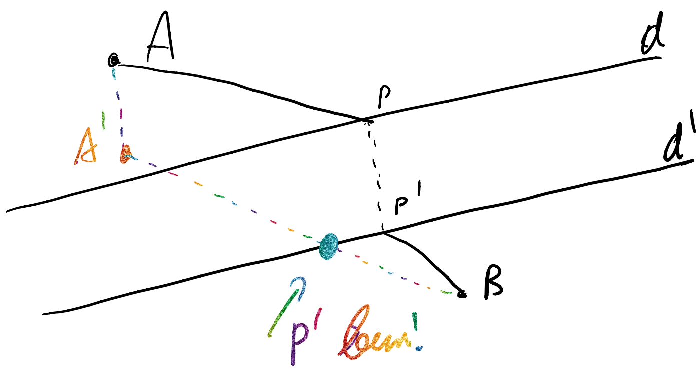
Notez B' simetricul lui B față de d

$|PA|+|PB| = |AP|+|PB'|$ minim când A, P, B' coliniare

$\Rightarrow \boxed{\{P\} = AB' \cap d}$

<u>Temă</u> Calculați P pt d, A, B date.

6. P, P' ai $|AP| + |PP'| + |P'B|$ minim?



constant

Translatez A: $A' = A + \overrightarrow{\underbrace{PP'}}$ și iau $\{P'\} = A'B \cap d'$

nu depinde de alegerea lui P și P'