Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

28 ianuarie 2021, 11:00–13:30

NUME:	....
PRENUME:	....
GRUPA:	....

INSTRUCŢIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
3. Pe prima pagină a rezolvării fiecarei probleme, vor fi scrise **cu litere de tipar** `numele şi prenumele studentului, precum şi grupa acestuia.`
4. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
5. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 11:00–13:30.**
6. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email:
   - ca fişier PDF, împreună cu fişierul cu subiectele examenului la adresa `andreea.grecu@fmi.unibuc.ro` (Drd. Andreea GRECU);
   - vor avea următoarea **linie de subiect**: `Examen AnNum - Nume si prenume student, Grupa 3XX`
7. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **joi, 28 ianuarie 2021, orele 14:00.**

Analiză Numerică
Examen – Anul III – Subiectul#6

I. Câte iteraţii, $k \in \mathbb{N}$, sunt necesare pentru a obţine o aproximare numerică cu acurateţea de 10^{-5} pentru soluţia ecuaţiei $f(x) = 0$, unde $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$, prin metoda bisecţiei?

II. Fie nodurile de interpolare $x_j = j$, $j = \overline{0, 3}$. Dacă

$$P_{0,1}(x) = x + 1\,, \qquad P_{1,2}(x) = 3x - 1\,, \qquad P_{1,2,3}(1,5) = 4\,, \tag{1}$$

să se determine $P_{0,1,2,3}(1,5)$.

III. Fie $f \in \mathrm{C}^3[a, b]$, $h > 0$ suficient de mic şi $x \in (a, b)$ fixat.

(a) Determinaţi formula de aproximare cu diferenţe finite centrale pentru $f'(x)$ şi *eroarea de trunchiere* asociată, $e_t(x)$.

(b) Estimaţi eroarea de trunchiere asociată, $e_t(x)$.

(c) Pentru orice $x \in (a, b)$, $f(x)$ se evaluează prin reprezentarea sa în calculator în virgulă mobilă, $\widetilde{f}(x)$, astfel încât această evaluare conţine o *eroare de rotunjire*, $e_r(x)$, i.e.

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + e_r(x)\,, \quad \text{unde} \quad |e_r(x)| \leq \epsilon\,,\ \forall\, x \in (a, b)\,, \tag{2}$$

unde $\epsilon > 0$ este *precizia maşinii* şi este cunoscută.

Determinaţi *eroarea totală*, i.e. $e(x) := e_t(x) + e_r(x)$, indusă ca urmare a aproximării cu diferenţe finite centrale pentru $f'(x)$ şi a reprezentării în calculator a numerelor în virgulă mobilă.

(d) Determinaţi valoarea optimă a lui $h > 0$ care minimizează eroarea totală, $e(x)$, obţinută la punctul (c).

IV. Fie funcţia pondere $w : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

(a) Folosind procedeul Gram-Schmidt, determinaţi polinoamele ortogonale în raport cu produsul scalar din $\mathrm{L}^2_w(0, \infty)$, $\left\{\widetilde{L}_0, \widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2\right\} \subset \mathbb{P}_2$ (*polinoamele Laguerre*).

(b) Determinaţi cea mai bună aproximare polinomială $p_2 \in \mathbb{P}_2$ în norma $\|\cdot\|_{2,w}$ a funcţiei

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \mathrm{e}^{x}\,.$$