* Sinteza cu repartiții + mediile lor. (de pe wikipedia)

* de lucrat exercițiile din lista „transformări de v.a"!

28.04.2023

* MIERCURI → întâlnire fizică (18:00)

Consultații Statistică 2

- Transformări de variabile aleatoare -

I. Cazul discret:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad Y = g(X)$$

$$Y: \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \dots & g(x_n) \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$$

→ dacă g este injectivă, Y va avea tot atâtea valori ca X.

ex: $X: \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad Y = X^2 \Rightarrow g(x) = x^2$

$$X^2: \begin{pmatrix} 25 & 1 & 25 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow X^2: \begin{pmatrix} 1 & 25 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow X^2: \begin{pmatrix} 1 & 25 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

II. Cazul continuu:

1) $\underbrace{g \text{ o funcție continuă și monotonă}}^{\text{bijectivă}}$: a) crescătoare → inversa tot crescătoare; b) descrescătoare

$X \sim f_X$ și vrem $Y = g(X)$.

Există 2 abordări: 1) f de repartiție 2) densități

I. Abordarea cu funcția de repartiție:

a) $\boxed{F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y)} = \mathbb{P}(g(X) \le y) \underset{g^{-1}\uparrow}{=} \mathbb{P}(X \le g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'$

b) $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(g(X) \le y) \overset{g^{-1}\downarrow}{=} \mathbb{P}(X \ge g^{-1}(y)) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(X \le g^{-1}(y))}_{F_X(g^{-1}(y))} =$

$= 1 - F_X(g^{-1}(y))$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = [1 - F_X(g^{-1}(y))]' = -f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'$

II. Abordarea cu densitatea de probabilitate:

g continuă și monotonă, atunci:

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} \right|}$$

Aplicații:

• $X \sim f$; $f_X(x) = 7 \cdot e^{-7x} \cdot \mathbb{1}_{(0;\infty)}(x)$; $Y = 4X + 3$.

→ mulțimea valorilor pe care le ia x.

$g(x) = 4x+3$ => Calculez inversa.

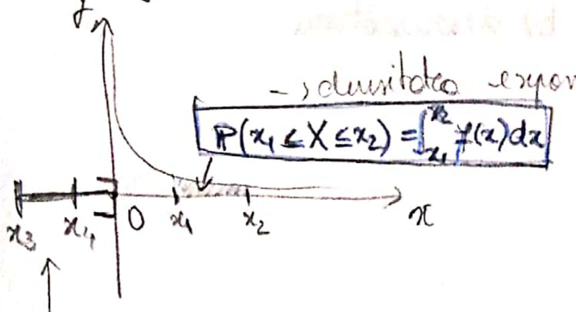
$g^{-1}(y) = \frac{y-3}{4}$ $\left(4x+3 = y \Rightarrow x = \frac{y-3}{4}\right)$

$(g^{-1}(y))' = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-3}{4}\right) \cdot \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} \cdot 7 \cdot e^{-\frac{7(y-3)}{4}}$ NU e gata acum! Țeapă!

Trebuie să mai facem ceva!

Ce legătură există între densitate și mulțimea valorilor?



* Densitatea mă ajută să calculez prob. ca x să fie sub grafic.

$P(x_3 \le X \le x_4) = 0.$

Concluzie: Acolo unde densitatea este nenulă => variabila X ia valori.

Ce trebuia să mai facem: $\boxed{g((0;\infty)) = (3;\infty)}$ (Imaginea funcției g)
(facem ca la s v la integrale)

Pas major!

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-3}{4}\right) \cdot \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} \cdot 7 \cdot e^{-\frac{7(y-3)}{4}} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{(3;\infty)}}_{\text{completarea care trebuie făcută}}$$

2. Exercițiu examen (2023) $\theta > -1$

$X \sim f;\quad f(x) = a \cdot x^{\theta} \cdot 1\!\!1_{(0;1)}(x)$

$Y = -\ln(X) \Rightarrow g(x) = -\ln x \Rightarrow$ monotonă

Calculăm inversa:

$-\ln x = y \Leftrightarrow \ln x = -y \Leftrightarrow x = e^{-y}$

$g^{-1}(y) = e^{-y}$

Transformăm suportul densității: $g((0;1)) = (0;\infty)$

$[g^{-1}(y)]' = -e^{-y}$

$f_Y(y) = f_X(e^{-y}) \cdot |-e^{-y}| \cdot 1\!\!1_{(0;\infty)}(y) = a \cdot (e^{-y})^{\theta} \cdot e^{-y} \cdot 1\!\!1_{(0;\infty)}$

Determinăm constanta a:

f densitate de probabilitate $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0;\ \forall x \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot x^{\theta} \geq 0;\ \forall x \in (0;1) \Rightarrow \boxed{a > 0} \\ \int_0^1 a \cdot x^{\theta}\,dx = a \int_0^1 x^{\theta}\,dx = a \cdot \left.\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right|_0^1 = a\left(\frac{1}{\theta+1} - 0\right) = \frac{a}{\theta+1} = 1. \end{cases}$

$\boxed{a = \theta+1} > 1.$

$\Rightarrow f_Y(y) = (\theta+1)\, e^{-\theta y - y} \cdot 1\!\!1_{(0;\infty)}(y) = (\theta+1) \cdot e^{-(\theta+1)y} \cdot 1\!\!1_{(0;\infty)}(y) \Rightarrow \boxed{Y \sim Exp(\theta+1)}$

- Varianta ș[i] mecheroasă de a calcula media lui Y: $E(Y) = \frac{1}{\theta+1}$.

- Varianta muncitorească: (cu def. mediei)

$\boxed{E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy} = \int_0^{\infty} y \cdot (\theta+1) \cdot e^{-(\theta+1)y}\,dy$

$\boxed{\Gamma(1) = 1}$

$\boxed{\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x}\,dx}$

$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!;\ n \in \mathbb{N}}$

S.V.: $(\theta+1)y = t$ $\quad y = 0 \Rightarrow t = 0$

$(\theta+1)dy = dt$ $\quad y \to \infty \Rightarrow t \xrightarrow{\theta > -1} \infty$

$y = \frac{t}{\theta+1}$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{t}{\theta+1} \cdot e^{-t}\,dt = \frac{1}{\theta+1}\int_0^{\infty} t \cdot e^{-t}\,dt = \frac{1}{\theta+1} \cdot \Gamma(2) = \frac{1}{\theta+1}$

$\Rightarrow E(Y) = \frac{1}{\theta+1}$