Davidescu-Filip Olivia-Alexandra 9.04.2022

Elemente de calcul științific

TUTORIAT 4

Factorizarea LU cu pivotare (PLU)

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversabilă. Atunci A admite o factorizare LU cu pivotare (factorizare PLU):

$\exists\, P \in M_n(\mathbb{R})$ matrice permutare

$\exists\, L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ — inferior triunghiulară; $l_{ii} = 1,\ i=\overline{1,n}$

$\exists\, U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ — superior triunghiulară; $(u_{ii} = a_{ii},\ i=\overline{1,n})$

astfel încât $A = PLU$.

Observație: Factorizarea PLU nu este unică.

Observații:

- Factorizarea LU fără pivotare este un caz particular al factorizării LU cu pivotare, cu $P \equiv I_n$.
- Pentru a se obține rezultate stabile în cazul factorizării LU cu pivotare, trebuie ca pivotarea să se facă în conformitate cu MEGPP sau cu MEGPPS (alegerea pivotului).

Matrici simetrice și pozitiv definite (SPD)

$A \in M_n(\mathbb{R})$ se numește matrice simetrică și pozitiv definită (SPD) dacă:

(i) $A^T = A$ (A simetrică)

(ii) $\underline{x}^T A \underline{x} > 0, \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ (A pozitiv definită)

Proprietăți SPD

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ SPD. Atunci:

(i) A inversabilă

(ii) $a_{ii} > 0, \ i = \overline{1,n}$

(iii) matricile $A^{(k)} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}} \in M_k(\mathbb{R}), \ k = \overline{1,n-1}$ sunt SPD

(iv) Complementul Schur asociat lui a_{11} este o matrice SPD

Factorizarea Cholesky

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice SPD. Atunci A admite o unică factorizare Cholesky $A = LL^T$, unde $L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară, cu $l_{ii} > 0, \ i = \overline{1,n}$.

Condiții necesare și suficiente

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ a.î. $A = A^T$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) A este PD

(ii) $\det A^{(k)} > 0, \ k = \overline{1,n}$, unde $A^{(k)} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}} \in M_k(\mathbb{R}), \ k = \overline{1,n}$
(Criteriul lui Sylvester)

(iii) A admite MEGFP și toți pivoții sunt strict pozitivi

(iv) A admite factorizarea LDL^T

(v) A admite factorizarea Cholesky, LL^T

Matrici speciale

Matricea $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește:

- diagonal dominantă dacă $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ \forall i=\overline{1,n}$

- strict diagonal dominantă dacă $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ \forall i=\overline{1,n}$

Teoremă Fie A o matrice strict diagonal dominantă. Atunci:

(i) A este inversabilă

(ii) A admite MEGFP

Matricea $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește matrice bandă dacă

$\exists\, 1<p,q<n$ a.î. $a_{ij}=0, \ \forall p \leq j-i, \ \forall q \leq i-j$

Mărimea benzii matricei A este dată de $w=p+q-1$.

Factorizarea Doolittle. Factorizarea Crout

Matricele de bandă cu $p=q=2$ se numesc tridiagonale și sunt de forma:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Factorizarea LU a unei matrice tridiagonale se simplifică în mod considerabil, rezultând așa-numita factorizare Doolittle.

Similar cu factorizarea Doolittle se poate realiza, tot prin factorizarea LU a unei matrice tridiagonale, dar având 1 pe diagonala principală a lui U, așa-numita factorizare Crout.