GEOMETRIE
SEMINAR 10

Exc 9.1 Aflați locul geometric al punctelor exterioare elipsei din care cele 2 tangente la elipsă sunt $\perp$.

<u>Rezolvare:</u> Putem presup. că elipsa este în forma canonică

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{cu} \quad a\geq b.$$

Ecuația tangentei de pantă dată m la elipsă

$\boxed{t: y = mx+n}$ tangentă la elipsă în $(u,v)\in\mathcal{E}$ deci $v\neq 0$

Ec. tangentei la $\mathcal{E}$ în (u,v) (dedublare): $t: \frac{u\cdot x}{a^2}+\frac{vy}{b^2}=1$

$$t: b^2ux + a^2vy = a^2b^2$$

$$\boxed{t: y = -\frac{b^2u}{a^2v}x+\frac{b^2}{v}}$$

$$-\frac{b^2u}{a^2v}x+\frac{b^2}{v} = mx+n \implies m = -\frac{b^2u}{a^2v}, \quad n=\frac{b^2}{v}$$

$$m^2 = \frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{u^2}{v^2} = \frac{b^4}{a^2v^2}\cdot\frac{u^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2v^2}\left(1-\frac{v^2}{b^2}\right) = \frac{n^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{n^2}\right) =$$

$\frac{b^4}{a^2v^2} = \frac{b^2}{\left(\frac{b^2}{v}\right)^2}$

$\frac{u^2}{a^2} = 1-\frac{v^2}{b^2}$, deoarece $(u,v)\in\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$= \frac{n^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}$$

$$a^2m^2 = n^2-b^2$$

$$n^2 = a^2m^2+b^2$$

$$n = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

Ecuațiile celor 2 tangente de pantă dată: $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$

Fie $P(x_p, x_p)$ exterior elipsei, a.î. niciuna dintre tangentele din P la $\mathcal{E}$ să nu fie verticală.

$$t_1 : \ y = m_1 x \pm \sqrt{a^2m_1^2+b^2}$$
$$t_2 : \ y = m_2 x \pm \sqrt{a^2m_2^2+b^2}$$

$$\{P\} = t_1 \cap t_2 \implies y_p = m_{1,2}x_p \pm \sqrt{a^2m_{1,2}^2+b^2}$$

$$(y_p - m_{1,2}x_p)^2 = a^2m_{1,2}^2 + b^2$$

$$y_p^2 - 2m_{1,2}x_py_p + m_{1,2}^2x_p^2 = a^2m_{1,2}^2 + b^2$$

$$(a^2-x_p^2)m_{1,2}^2 + 2x_py_pm_{1,2} + b^2 - y_p^2 = 0$$ ← m_1, m_2 sunt sol. ec.

Viète: $m_1 \cdot m_2 = \dfrac{b^2-y_p^2}{a^2-x_p^2}$

Dar vrem: $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$\implies \frac{b^2-y_p^2}{a^2-x_p^2} = -1 \implies$$

$$\implies b^2 - y_p^2 = -a^2 + x_p^2 \implies x_p^2 + y_p^2 = a^2+b^2$$

$$\Updownarrow$$

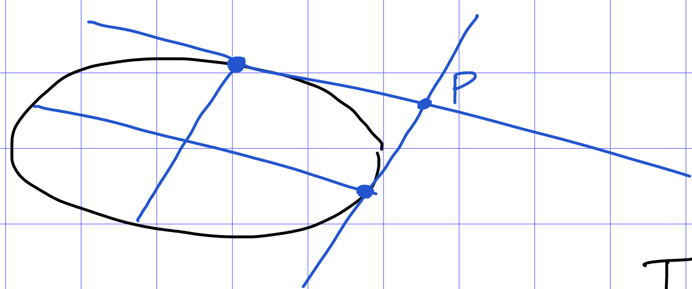
$$P(x_p, y_p) \in \mathcal{C}\left((0,0), \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

am ales P a.î. niciuna dintre tangente să nu fie verticală.

Din continuitate, aceeași cond este verificată și pentru punctele din care una dintre tangente e verticală

Concluzie: locul geometric căutat: cercul de rază $\sqrt{a^2+b^2}$, cu centrul în centrul elipsei.

Exc 9.2 Aflați locul geometric al punctelor exterioare elipsei din care tangentele la elipsă determină prin punctele de tangență, diametre conjugate.



$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

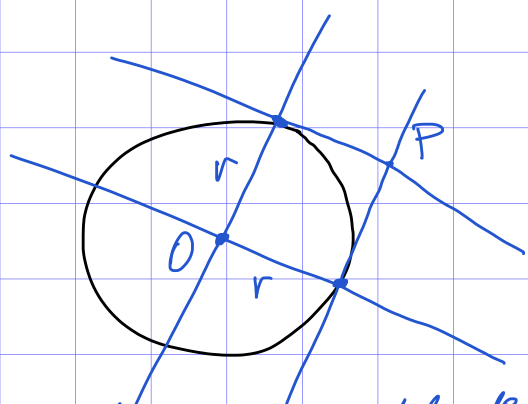
$$T(x,y)=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$$

$$(x,y)\in\mathcal{E} \iff T(x,y)\in C(0,1)$$

T este liniară $\Rightarrow$ duce drepte în drepte

duce drepte paralele în drepte paralele

duce mijloacele segm. în mijloacele segm. transformate



Pentru a obține, prin punctele de tangență, diametre conjugate pt cerc, trebuie să avem $P\in C(0,\sqrt{2}r)$

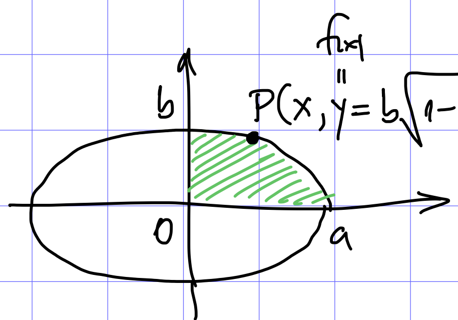
$$T^{-1}(x,y)=(ax,by)$$
$$T^{-1}(C(0,1))=\mathcal{E}$$

$$= \{(ax,by) \mid x^2+y^2=2\} = \{(x,y) \mid \left(\tfrac{x}{a}\right)^2+\left(\tfrac{y}{b}\right)^2=2\}$$

locul geometric căutat este $T^{-1}(C(0,\sqrt{2})) = \mathcal{E}: \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\right\}$

Exc 9.3 Demonstrați că aria elipsei cu semi-axa majoră a, minoră b este πab.

Demo.:



$P\left(x, y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)$

Putem presupune că elipsa e în forma canonică $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $(a \geq b)$

$\mathcal{A}$ = aria elipsei $= 4 \cdot \mathcal{A}_{\mathrm{I}}$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{I}} = \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \;\Vert\; \mathcal{A}_{\mathrm{I}}$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - \frac{b}{a}\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= ab \cdot \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a - \frac{b}{a}\int_0^a x\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= ab\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{b}{a}\int_0^a x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'dx = \frac{\pi ab}{2} + \underbrace{\frac{b}{a}\,x\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a}_{=0} - \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Am obținut: $\mathcal{A}_{\mathrm{I}} = \frac{\pi ab}{2} - \mathcal{A}_{\mathrm{I}} \Longrightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{I}} = \frac{\pi ab}{4}$

$\Downarrow$

$\mathcal{A} = 4\mathcal{A}_{\mathrm{I}} = \pi ab$ ✓

HIPERBOLA

(elipsă : $a^2 = b^2 + c^2$)

Exc 10.1 Considerăm $\mathcal{H}: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{169} = 1$ hiperbola: $c^2 = a^2 + b^2$

(a) Este $\mathcal{H}$ în forma canonică? DA

(b) Aflați lungimile semiaxelor $a=5$, $b=13$. $c=\sqrt{13^2+5^2}=\sqrt{194}$

excentricitatea $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{194}}{5}$

focarele $F_1(-\sqrt{194},0)$, $F_2(\sqrt{194},0)$

(c) ecuațiile asimptotelor: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{13}{5}x$

(d) ec. dreptelor directoare: (exact ca la elipsă): $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{\sqrt{194}}$

(e) Verificați că $P(5\sqrt{5},26)\in\mathcal{H}$ $\quad \frac{(5\sqrt{5})^2}{25}-\frac{(26)^2}{169}=5-\frac{169\cdot 4}{169}=1$ ✓

și scrieți ec. tangentei în P la $\mathcal{H}$

dedublare: $t_p: \frac{5\sqrt{5}x}{25}-\frac{26y}{169}=1$

$t_p: \frac{\sqrt{5}}{5}x-\frac{2}{13}y=1$

Exc 10.2 Fie hiperbola $\mathcal{H}$ cu lungimile semiaxelor majoră și minoră a, resp. b.

Demonstrați că produsul dist de la un punct al hiperbolei la cele 2 asimptote este $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

demo.: Considerăm $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (forma canonică)

asimptotele: $a_1: y=\frac{b}{a}x$, $\quad a_2: y=-\frac{b}{a}x$

$P(x_p,y_p)\in\mathcal{H}$.

$$\text{dist}(P,a_1)\cdot\text{dist}(P,a_2)=\frac{\left|y_p-\frac{b}{a}x_p\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}}\cdot\frac{\left|y_p+\frac{b}{a}x_p\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=\frac{\left|y_p^2-\frac{b^2}{a^2}x_p^2\right|}{1+\frac{b^2}{a^2}}=$$

$$= \frac{|a^2 y_P^2 - b^2 x_P^2|}{a^2+b^2} \overset{P \in \mathcal{H}}{=} \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{|a^2y_P^2 - b^2x_P^2|}{a^2b^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \cdot \underbrace{\left| -\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} \right|}_{=1} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Exc 10.3 Fie $P \in \mathcal{H}$

R, Q = punctele de intersecție ale tangentei în P cu asimptotele

Demonstrați că mijlocul segmentului RQ este P.

demo.: $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad a_1 : y = \frac{b}{a}x$

$a_2 : y = -\frac{b}{a}x$

$P(x_p, y_p) \in \mathcal{H}$

$t_p : \frac{x_p x}{a^2} - \frac{y_p y}{b^2} = 1$

$$\{R\} = t_p \cap a_1 : \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ \frac{x_p x}{a^2} - \frac{y_p y}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ \frac{x_p x}{a^2} - \frac{y_p}{b^2} \cdot \frac{b}{a} x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{\frac{x_p}{a} - \frac{y_p}{b}} = x_R \\ y = \dfrac{b}{\frac{x_p}{a} - \frac{y_p}{b}} = y_R \end{cases}$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{x_p}{a} - \frac{y_p}{b}\right) x = 1$$

$$\{Q\} = t_p \cap a_2 : \begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ \frac{x_p x}{a^2} - \frac{y_p y}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ \frac{x_p x}{a^2} - \frac{y_p}{b^2} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{\frac{x_p}{a} + \frac{y_p}{b}} = x_Q \\ y = \dfrac{-b}{\frac{x_p}{a} + \frac{y_p}{b}} = y_Q \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(x_R + x_Q) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\frac{x_p}{a} - \frac{y_p}{b}} + \frac{a}{\frac{x_p}{a} + \frac{y_p}{b}} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 b}{b x_p - a y_p} + \frac{a^2 b}{b x_p + a y_p} \right)$$

$$= \frac{a^2 b}{2}\left(\frac{bx_p + ay_p + bx_p - ay_p}{b^2x_p^2 - a^2y_p^2}\right) = \frac{a^2b}{2}\cdot\frac{2bx_p}{b^2x_p^2 - a^2y_p^2} = \frac{x_p}{\frac{b^2x_p^2 - a^2y_p^2}{a^2b^2}} = x_p$$

$1 =$ pentru că $P \in \mathcal{H}$

Cu calcule similare, $\frac{1}{2}(y_R + y_Q) = y_P$. ✓

Exc 10.4 Determinați locul geometric al punctelor exterioare hiperbolei din care cele 2 tangente la hiperbolă sunt $\perp$.

Rez.: Exact ca la Exc 9.1 obținem ec. tangentelor (neverticale) de pantă dată m, la $\mathcal{H}$ sunt de forma: $t: y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$$t_{1,2}: \quad y = m_{1,2}\, x \pm \sqrt{a^2 m_{1,2}^2 - b^2}$$

$P(x_p, y_p) \in t_1 \cap t_2$. $\quad y_p = m_{1,2}\, x_p \pm \sqrt{a^2 m_{1,2}^2 - b^2}$

$$(y_p - m_{1,2}x_p)^2 = a^2 m_{1,2}^2 - b^2$$

$$x_p^2 m_{1,2}^2 - 2x_py_p m_{1,2} + y_p^2 = a^2 m_{1,2}^2 - b^2$$

$$(x_p^2 - a^2)\, m_{1,2}^2 - 2x_py_p\, m_{1,2} + y_p^2 + b^2 = 0$$

Vrem $t_1 \perp t_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$

Dar din relațiile Viète: $m_1m_2 = \dfrac{y_p^2 + b^2}{x_p^2 - a^2}$

$$\Rightarrow \frac{y_p^2 + b^2}{x_p^2 - a^2} = -1,$$

adică $y_p^2 + b^2 + x_p^2 - a^2 = 0$

$$x_p^2 + y_p^2 = a^2 - b^2.$$

1. dacă $a > b$, locul geom. e un cerc cu centrul în centrul hiperbolei, de rază $\sqrt{a^2 - b^2}$
2. Dacă $a = b$, locul geom. e

centrul hiperbolei (un singur punct)

③ dacă $a<b$, nu există niciun punct din care tangentele să fie $\perp$

Exc 10.5 Demonstrați că dacă un Δ este înscris într-o hiperbolă echilateră, atunci ortocentrul aparține hiperbolei.

Demo.: ΔABC.

Deoarece hiperbola e echilateră, făcând, eventual, o schimbare de variabilă, avem: $\mathcal{H}: xy = k$, $k>0$.

Fie $A\left(a, \frac{k}{a}\right)$, $B\left(b, \frac{k}{b}\right)$, $C\left(c, \frac{k}{c}\right) \in \mathcal{H}$.

H = ortocentrul. Vrem: $x_H \cdot y_H = k$.
(x_H, y_H)

înmulțite "dau" -1

ca să îl aflăm pe α, punem cond $A \in h_A$

$$m_{BC}: \frac{\frac{k}{c}-\frac{k}{b}}{c-b} = \frac{-k}{bc} \implies h_A: y = \frac{bc}{k}\cdot x + \alpha = \frac{bc}{k}\cdot x + \frac{k}{a} - \frac{abc}{k}$$

$$m_{AC}: \frac{\frac{k}{c}-\frac{k}{a}}{c-a} = \frac{-k}{ac} \implies h_B: y = \frac{ac}{k}\cdot x + \beta = \frac{ac}{k}x + \frac{k}{b} - \frac{abc}{k}$$

$A\left(a, \frac{k}{a}\right) \in h_A$

$$\frac{k}{a} = \frac{bc}{k}\cdot a + \alpha$$

$$\alpha = \frac{k}{a} - \frac{abc}{k}$$

$B\left(b, \frac{k}{b}\right) \in h_B$

$$\frac{k}{b} = \frac{ac}{k}\cdot b + \beta$$

$$\beta = \frac{k}{b} - \frac{abc}{k}$$

$$\{H\} = h_A \cap h_B : \begin{cases} y = \frac{bc}{k} \cdot x + \frac{k}{a} - \frac{abc}{k} \\ y = \frac{ac}{k} \cdot x + \frac{k}{b} - \frac{abc}{k} \end{cases}$$

$$\left(\frac{bc}{k} - \frac{ac}{k}\right) x + \frac{k}{a} - \frac{k}{b} = 0$$

$$x = \frac{\frac{k}{b} - \frac{k}{a}}{\frac{bc}{k} - \frac{ac}{k}} = k^2 \cdot \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{c(b-a)} = \boxed{-\frac{k^2}{abc} = x_H}$$

$$y = \frac{bc}{k} \cdot \left(-\frac{k^2}{abc}\right) + \frac{k}{a} - \frac{abc}{k}$$

$$= -\frac{k}{a} + \frac{k}{a} - \frac{abc}{k} = \boxed{-\frac{abc}{k} = y_H}$$

$$x_H \cdot y_H = -\frac{k^2}{abc} \cdot \left(-\frac{abc}{k}\right) = k \quad \checkmark$$

deci $H \in \mathcal{H}$.