T1 Spațiu vectorial. Subspațiu vectorial. (I)

1.1. $(K,+,\cdot)$ corp comutativ, V o mult. nevidă. Spunem că V este SPAȚIU VECTORIAL peste corpul K dacă verifică:

a) $(V,+)$ grup abelian
b) $a(b\cdot x) = (ab)\cdot x$
c) $a(x+y) = ax + ay$
d) $(a+b)x = ax + bx$
e) $1_K \cdot x = x$

$\boxed{\forall a,b \in K \quad \forall x,y \in V}$

1.2. $(V',+,\cdot)/K$ este SUBSPAȚIU VECTORIAL dacă și numai dacă: $\forall x,y \in V$, $\forall a,b \in K$ a.î. $x+y \in V'$ și $\forall a \in K$ și $x \in V'$ avem $ax \in V'$

T2 Sistem liniar independent. Sistem liniar dependent

2.1. $(V,+,\cdot)/K$ spațiu vect., $S \subset V$

S s.m. SLI $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, \dots x_m \in S$, $\forall a_1, \dots, a_m \in K$ a.î. $a_1x_1 + \dots + a_mx_m = 0$ $\Rightarrow$ $a_1 = \dots = a_m = 0_K$

2.2. S s.m. SLD $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, \dots, x_m \in S$, $\forall a_1 \dots a_m \in K$ a.î. $a_1x_1 + \dots + a_mx_m = 0$ $\boxed{\text{nu toți nuli}}$

! Un sistem de k vectori este liniar independent $\Leftrightarrow$ rangul matricii componentelor vectorilor în raport cu orice reper este maxim (este k).

T3 Sistem de generatori

$<S> = \{x \in V \mid x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i,\ x_i \in S,\ a_i \in K\}$ combinații liniare finite de vectori din S cu scalari din K.

S este SISTEM DE GENERATORI $\Leftrightarrow$ $<S> = V$.

T4 Bază / Reper.

S s.m BAZĂ $\Leftrightarrow$ 1. S este SLI
2. S este sistem de generatori.

S s.m REPER $\Leftrightarrow$ S este o bază ordonată.

$\boxed{T5}$ Operații cu subspații vectoriale

V_1, V_2 subsp. vect. atunci: 1. $V_1 \cap V_2$: subspațiu vectorial

2. $V_1 \cup V_2$: în general nu este subsp. vectorial.

$\boxed{T6}$. Suma directă

$V_1, V_2 \subset V$ subsp. vect, $V_1 + V_2$ este SUMĂ DIRECTĂ $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow$
$V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

T1 Aplicații liniare

1.1. $(V_1,+,\cdot)/K$, $(V_2,+,\cdot)/K$ spații vectoriale; fie $f: V_1 \to V_2$ s.n. APLICAȚIE LINIARĂ dacă sunt satisfăcute următoarele:

i) $f(x+y) = f(x)+f(y)$; $\forall x, y \in V_1$
ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in V_1$; $\forall \alpha \in K$.

T2 Propoziție de caracterizare a aplicațiilor liniare:

Fie $(V_1,+,\cdot)/K$, $(V_2,+,\cdot)/K$ spații vectoriale:

$f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară $\Leftrightarrow$

$$f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall x, y \in V_1$$

T3 Imaginea și nucleul unei aplicații liniare:

Fie $f: V_1 \to V_2$, o aplicație liniară

$Ker f = \{ x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2} \}$ (Nucleul funcției f)
$Im f = \{ y \in V_2 \mid \exists x \in V_1$ a.î. $f(x)=y \}$ (Imaginea fcț. f)

❗ f injectivă $\Leftrightarrow Ker f = \{0_{V_1}\}$
f surjectivă $\Leftrightarrow \dim Im f = \dim V_2$

T4 Teorema dimensiunii și aplicații liniare.

$$\boxed{\dim V_1 = \dim Ker f + \dim Im f}$$

T5 Operații cu aplicații liniare.

Fie $f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară, atunci:

5.1. $f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$ (o apl. liniară duce vector nul în vector nul)
5.2. $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in V_1$
5.3. Dacă W este subsp. vectorial al lui V_1, atunci $f(W)$ este subspațiu al lui V_2.
5.4. Dacă $x_1, \dots, x_m$ sunt LD $\Rightarrow f(x_1), \dots, f(x_m)$ sunt LD.
5.5. Dacă $f(x_1), \dots, f(x_m)$ sunt LI $\Rightarrow x_1, \dots, x_m$ sunt LI (adică f transformă orice mulț. de vectori LI într-o mulț. de vectori LI)

T1 Valoare proprie

Fie V un K sp. vect. și $f \in End_K(V)$ un endomorfism al sp. V. Un scalar α s.m VALOARE PROPRIE a endomorfismului $f \in End_K(V)$ dacă există un vector nenul $v \in V \setminus \{0\}$ a.î.

$$\boxed{f(v) = \alpha v}$$

T2 Spectrul unui endomorfism.

Mulțimea tuturor valorilor proprii asociate unui endomorfism f se not. cu $\nabla(f)$ și s.m. SPECTRUL endo. f.

T3 Subspațiu propriu.

$$V_\alpha \stackrel{def}{=} \{v \in V \mid f(v) = \alpha v\}.$$

Mulț. V_α s.m. SUBSPAȚIU PROPRIU coresp. valorii proprii $\alpha \in \nabla(f)$

T4 Polinomul caracteristic

$$P_\alpha \stackrel{def}{=} \det(A - \alpha I_n)$$

Polinomul P_α s.m POLINOMUL CARACTERISTIC al endomorfismului f, unde A = matricea asociată lui f.

T5 f este diagonalizabil

Endomorfismul f este diagonalizabil $\Leftrightarrow$ sunt adevărate afirmațiile:

1. Toate rădăcinile polinomului caracteristic $P(\lambda)$ se află în corpul K;
2. Dimensiunea fiecărui subsp. propriu asociat unei valori proprii este egală cu multiplicitatea algebrică a val proprii care îi corespunde.

(K)

1. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$
2. $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$, $i = \overline{1, n}$.

T1 Forme biliniare

Fie $(V,+,\cdot)/K$ sp. vect; o FORMĂ BILINIARĂ pe V este o aplicație $g: V\times V \to K$ care satisface proprietățile:

1.1. $g(ax+by,z) = a\cdot g(x,z) + b\cdot g(y,z)$

1.2. $g(x, ay+bz) = a\, g(x,y) + b\, g(x,z)$.

T2 Matricea asociată unei forme biliniare:

Fie $g: V\times V \to K$ o formă biliniară. at. avem. urm. rel:

$$\boxed{g(X,Y) = X^T\cdot G\cdot Y.}$$

T3 Forme simetrice & antisimetrice:

- Aplicația $g: V\times V\to K$ s.n. FORMĂ SIMETRICĂ dacă
  $g(x,y) = g(y,x),\ \forall x,y\in V.$
- Aplicația $g: V\times V\to K$ s.n. FORMĂ ANTISIMETRICĂ dacă:
  $g(x,y) = -g(y,x)\quad \forall x,y\in V.$

! Cu alte cuvinte, g simetrică dc: $G = G^T$; g antisimetrică dc: $G = -G^T$. G matricea asoc. lui g.

T4. Formă biliniară simetrică nedegenerată.

Fie g o formă biliniară simetrică; g s.n. <u>nedegenerată</u> $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\}$

$\operatorname{Ker} g = \{x\in V \mid g(x,y) = 0,\ \forall y\in V\}$ ie $\boxed{\det G \neq 0}$

T5 Forme pătratice și pozitiv definite.

$Q: V\to K$ s.n. FORMĂ PĂTRATICĂ $\Leftrightarrow \exists g: V\times V\to K$ formă biliniară simetrică a.î. $Q(x) = g(x,x) = X^T G X$

Q s.n. POZITIV DEFINITĂ $\Leftrightarrow$ 1. $Q(X) > 0,\ \forall X\in V\setminus\{0_V\}$

2. $Q(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_V$

! $g: V\times V \to K$ formă biliniară reală simetrică.
g s.n. pozitiv definită dacă forma pătratică asoc lui Q este poz. def.

T6 Formă normală

Fie $Q: V \to K$ formă pătratică reală. Spunem că Q are formă normală dacă $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$

T7 Polara formei pătratice Q.

$$\boxed{g(x,y) = \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)]}$$

polara formei pătratice Q.

T8 Teorema Gauss.

O formă pătratică s.n. redusă la forma canonică dacă există o bază în care matricea asociată are formă diagonală (adică $Q(x)$ este sumă de pătrate).