Milosteanu Andreea
Mihoci Valentina

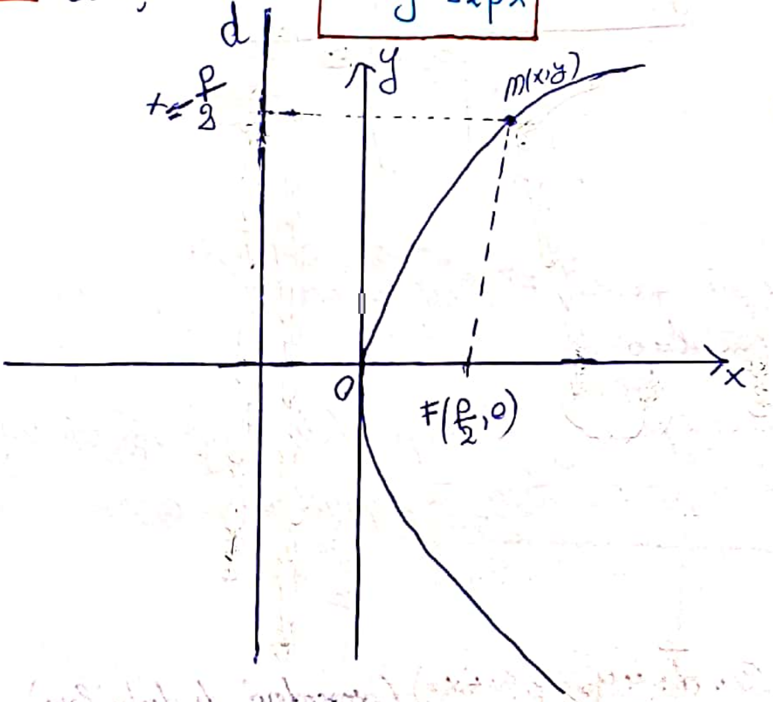
15.12.2021

Tutoriatul 9
Geometrie I

1. Parabola

Def. Parabola reprezintă locul geometric al punctelor M care verifică $\frac{MF}{dist(M,d)} = 1$, unde F este un punct fix, numit focar, iar d este o dreaptă fixă, numită directoare, $F \notin d$.

Obs. Ecuația redusă: $\boxed{\mathcal{P}: y^2 = 2px}$



Avem $p>0$ (parametrul parabolei). $F(\frac{p}{2},0)$ focarul

$x \geq 0$

$d: x = -\frac{p}{2}$ directoarea

$O(0,0)$ vârful

Ox axa transversă

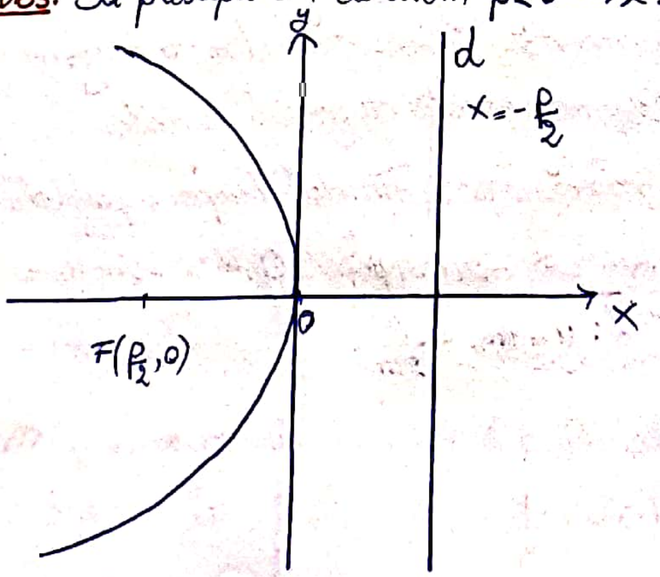
p = distanța dintre focar și dreapta directoare

1° $Int\ \mathcal{P}: y^2 < 2px$,

2° $Ext\ \mathcal{P}: y^2 > 2px$.

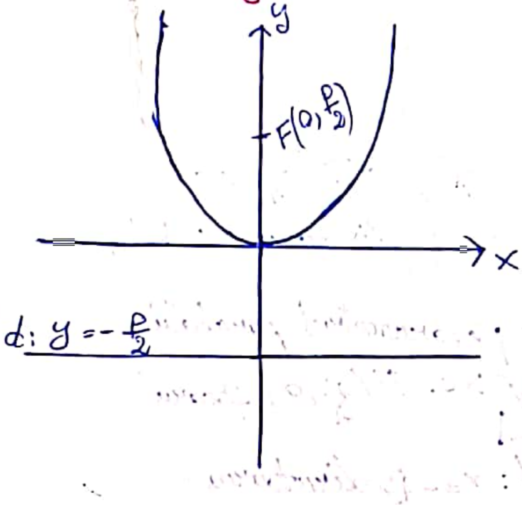
Important! 1° Parabola nu are drepte asimptote.
2° O parabolă nu are centru de simetrie.

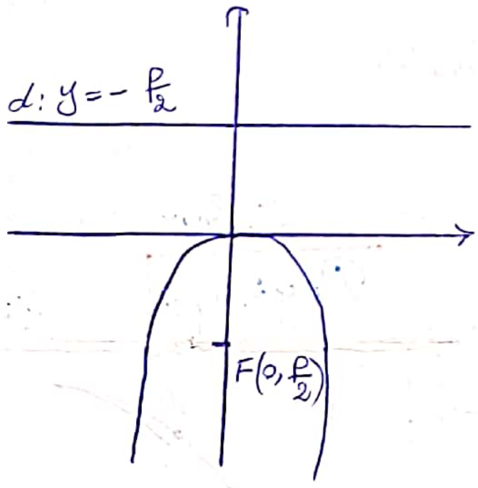
Obs. Să presupunem că avem $p<0 \rightarrow x \leq 0$.



Obs. Să presupunem că aplicăm simetria $x \longleftrightarrow y$, i.e. $\mathcal{P}: x^2 = 2py$

$\cdot\ p>0 \longrightarrow y \geq 0$ $\qquad\qquad$ $\cdot\ p<0 \longrightarrow y \leq 0$





Def. Latus rectum este coarda care trece prin focarul F și este perpendiculară pe axa transversă. Lungimea semilatus rectum este $l = p$.

Teoremă Locul geometric al proiecțiilor focarului pe tangentele la parabola $\mathcal{P}: y^2 = 2px$ este Oy.

Teoremă Locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la o parabolă este directoarea parabolei.

Probleme de tangență la parabolă

1° Tangenta într-un punct $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$: $\bar{d}: yy_0 = p(x+x_0)$ (procedeul de dedublare)

Tangenta în P_0 la G_f este $d: y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Rightarrow yy_0 - y_0^2 = px - px_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow yy_0 = p(x + x_0) + \underbrace{y_0^2 - 2p_0}_{=0,\ P_0 \in \mathcal{P}} \Rightarrow \bar{d}: yy_0 = p(x+x_0)$$

2° Tangenta de direcție dată m: $\bar{d}: y = mx + \frac{p}{2m}$ (ecuația magică)

Fie dreapta $d: y = mx + n$, m dată și n necunoscută. Intersectăm dreapta $d: y = mx+n$ cu parabola $\mathcal{P}: y^2 = 2px \Rightarrow (mx+n)^2 = 2px$. Obținem ecuația de gradul al doilea $m^2x^2 + 2(mn-p)x + n^2 = 0$, cu $\Delta_x = 4(mn-p)^2 - 4m^2n^2$. Fiindcă dreapta și parabola se intersectează, avem $\Delta x = 0 \Rightarrow (mn-p)^2 = m^2n^2 \Rightarrow -2mnp + p^2 = 0 \Rightarrow p = 2mn \Rightarrow$ $\Rightarrow n = \frac{p}{2m}$, $m \neq 0$. Avem ecuația magică $\bar{d}: y = mx + \frac{p}{2m}$.

3° Tangenta dintr-un punct $P_0(x_0, y_0) \in \text{Ext}\, P$

Luăm ecuația magică $\bar{d}: y = mx + \frac{p}{2m}$, $P_0 \in \bar{d} \Rightarrow y_0 = mx_0 + \frac{p}{2m} \Rightarrow y_0 - mx_0 = \frac{p}{2m} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2my_0 - 2m^2x_0 - p = 0$. Deci obținem ecuația de gradul al doilea $2m^2x_0 - 2my_0 + p = 0$

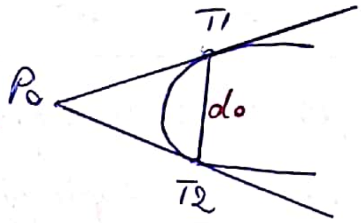
și aflăm cele două pante m_1 și m_2. Găsim tangentele în P_0: $y - y_0 = m_K(x - x_0)$, $K = \overline{1,2}$.

Obs. Polara unui punct $P_0(x_0, y_0)$.

Fie T_1 și T_2 punctele de contact cu parabola ale tangentelor din P_0.

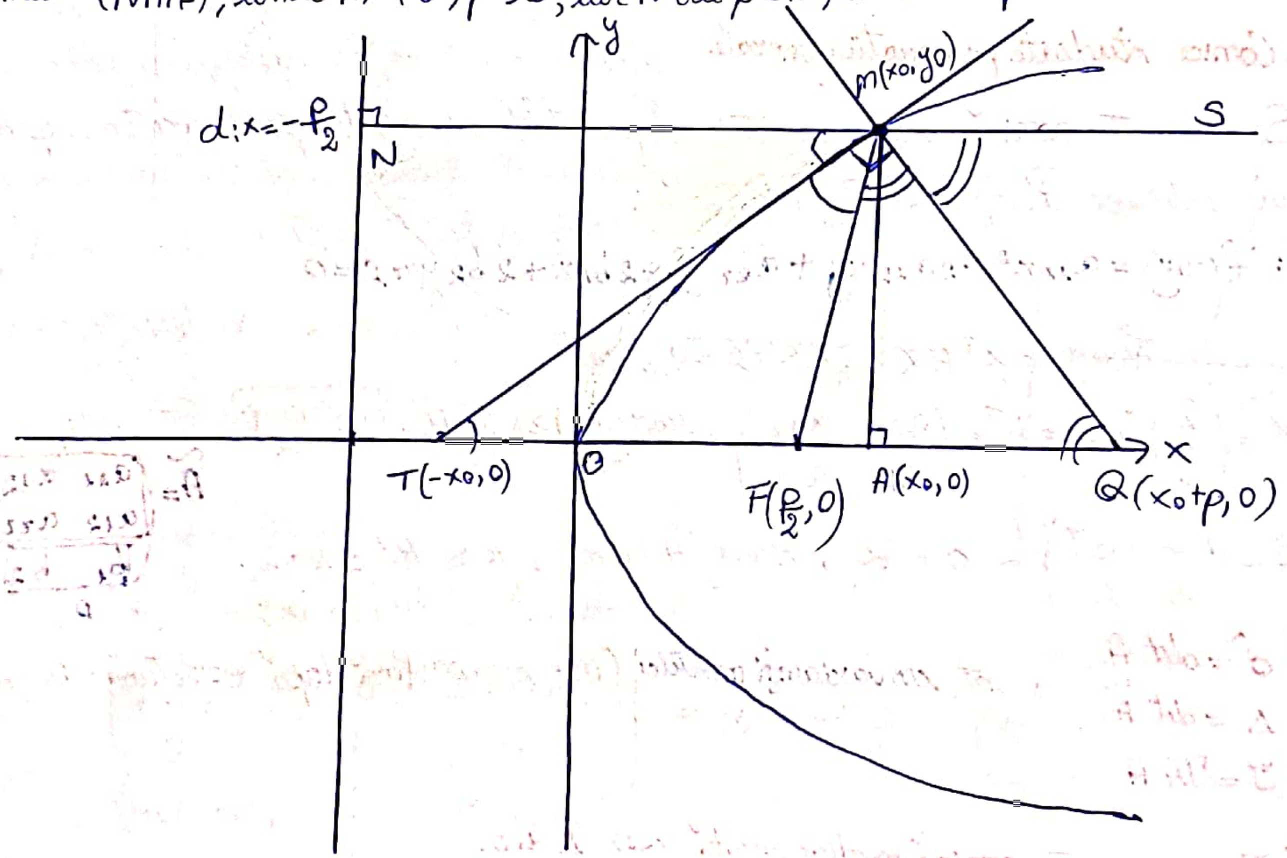
Polara lui P_0 este $d_0: yy_0 = p(x + x_0)$.

Cum $T_1, T_2 \in d_0 \Rightarrow d_0 = T_1T_2$. Deci polara lui P_0 este coarda care unește punctele de tangență T_1 și T_2.



Proprietatea optică a parabolei

Tangenta și normala în $M \in P$ reprezintă bisectoarea interioară, respectiv exterioară a unghiului $(\widehat{NMF})$, unde $M \neq 0$, $p > 0$, iar N este proiecția lui M pe directoarea d.



Fie $M(x_0, y_0) \in P: y^2 = 2px \Rightarrow y_0^2 = 2px_0$. Avem $m_{tg \text{ în } M} = \frac{p}{y_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_{\text{normalei în } M} = -\frac{y_0}{p}$. Așadar, avem $MQ \perp MT$, unde $MT = tg$. în M, $T \in Ox$ și

MQ = normala în M, unde $Q \in Ox$. Avem $MQ: y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$

$$\left.\begin{array}{l} MQ \cap Ox = \{Q\} \\ Ox: y = 0 \end{array}\right| \Rightarrow -y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0) \Rightarrow -y_0p = -y_0x + y_0x_0 \Rightarrow x = x_0 + p \Rightarrow$$

$\Rightarrow Q(x_0 + p, 0)$

Fie $MA \perp Ox$, $A \in Ox \Rightarrow A(x_0,0)$, AQ = subnormala $\rightarrow$ are lungimea p.

Ecuația lui MT este : $MT: yy_0 = p(x+x_0)$ (dedublare)

$$\left.\begin{matrix} MT \cap Ox = \{T\} \\ Ox: y=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} p(x+x_0)=0 \\ p>0 \end{matrix}\right| \Rightarrow x = -x_0 \Rightarrow T(-x_0,0).$$

• Dem. că ΔMFQ este un triunghi isoscel. Într-adevăr, $MF = FQ = \left|x_0 + \frac{p}{2}\right|$.

$\Rightarrow m(\sphericalangle FMQ) = m(\sphericalangle MQF)$, dar $m(\sphericalangle MQF) = m(\sphericalangle SMQ)$ (unghiuri alterne interne)

$\Rightarrow MQ$ = bisectoarea exterioară a lui $\sphericalangle NMF$.

• Obs. că $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ este mijlocul segmentului $[TQ]$.

ΔTMQ este un triunghi dreptunghic, MF = mediană $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta MFT$ isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle TMF) = m(\sphericalangle MTF)$, dar $m(\sphericalangle NMT) = m(\sphericalangle MTF)$ (unghiuri alterne interne)

$\Rightarrow MT$ = bisectoarea interioară a lui $\sphericalangle NMF$.

2. Conice studiate pe ecuații generale

Def. Se numește conică locul geometric al punctelor $P(x,y)$ din plan care în raport cu reperul cartezian $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ verifică:

$$\Gamma: f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

$$f(x,y) = X^T A X + 2BX + c = 0, \text{ unde}$$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $A = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $rang(A) = r \geq 1$; $B = (b_1 \ b_2)$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & c \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{R}, \ rang(\tilde{A}) = r', \ r \leq r' \leq r+2.$$

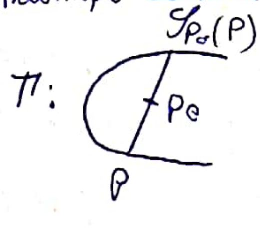
$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & B^T \\ a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \\ \multicolumn{2}{c}{B} & \mathbb{R} \end{array}\right)$$

Obs. $\begin{cases} \delta = \det A \\ \Delta = \det \tilde{A} \\ I = Tr\, A \end{cases}$ sunt invarianți metrici (nu se modifică dacă efectuăm izometrii)

Def. 1. Γ se numește conică nedegenerată $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$.

2. Γ se numește conică degenerată $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

Def. $P_0(x_0,y_0)$ se numește centru al conicei $\Gamma \Leftrightarrow (\forall)\, P \in \Gamma \Rightarrow S_{P_0}(P) \in \Gamma$.



Obs. seria 10

$P_0(x_0,y_0)$ este centru $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0=-b_1 \\ a_{12}x_0+a_{22}y_0=-b_2 \end{cases} \Leftrightarrow AX_0+B^T=0.$

seria 11

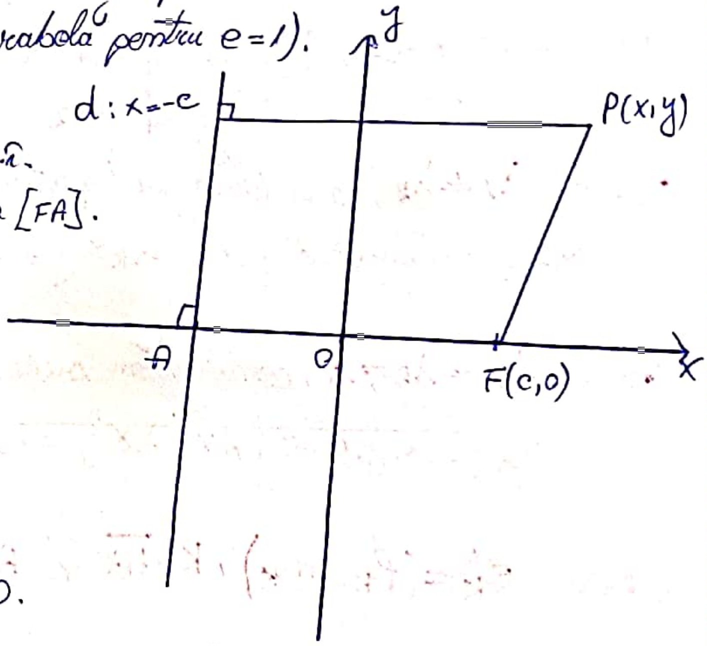
$P_0(x_0,y_0)$ este centru $\Leftrightarrow AX_0=-B^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0=-b_1 \\ a_{12}x_0+a_{22}y_0=-b_2 \end{cases}$

! Conica are centru unic $\Leftrightarrow \delta \neq 0$!

Prop. Dacă $\delta \neq 0$, atunci $f(x_0,y_0)=\frac{\Delta}{\delta}$.

Definiția unitară a conicelor nedegenerate

Locul geometric al punctelor P din plan care verifică $\frac{dist(P,F)}{dist(P,d)}=e>0$, unde F este un punct fixat (focar) și d este o dreaptă fixă (directoare), $F\notin d$ reprezintă o conică nedegenerată (elipsă pentru $e<1$, hiperbolă pentru $e>1$ și parabolă pentru $e=1$).



Alegem convenabil axele de coordonate. Fie axa Ox a.î. $F\in Ox$, $d\perp Ox$, $Ox\cap d=\{A\}$, Oy este mediatoarea $[FA]$.

Considerăm $F(c,0)$, $d: x=-c$, $c>0$.

$\frac{dist(P,F)}{dist(P,d)}=e \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=e|x+c|$

Obținem conica de ecuație:

$(1-e^2)x^2+y^2-2xc(1+e^2)+c^2(1-e^2)=0.$

$$\Delta=\det\tilde{A}=\begin{vmatrix} 1-e^2 & 0 & -c(1+e^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -c(1+e^2) & 0 & c^2(1-e^2) \end{vmatrix} = -4c^2e^2\neq 0 \quad (c>0)$$

Cum $\Delta\neq 0 \Rightarrow \Gamma$ este o conică nedegenerată.

Aducerea conicelor la forma canonică, utilizând izometrii ($\delta \neq 0$)

$\hookrightarrow$ conica are centru unic

(I) Studiem cazul când conica are centru unic, i.e. $\delta \neq 0$.

Considerăm translația $T: X = X' + X_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$

Conica devine $T(\Gamma): f(x,y) = a_{11}(x'+x_0)^2 + 2a_{12}(x'+x_0)(y'+y_0) + a_{22}(y'+y_0)^2 +$
$+ 2b_1(x'+x_0) + 2b_2(y'+y_0) + c = 0.$

$$\underline{a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2} + 2x'\underbrace{(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1)}_{=0} + 2y'\underbrace{(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2)}_{=0} +$$

$$+ \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=\frac{\Delta}{\delta}} = 0 \quad (P_0 \text{ este centru})$$

$$T(\Gamma): X'^T A X' + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

Considerăm polinomul caracteristic asociat matricei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \underbrace{Tr(A)}_{=I}\lambda + \underbrace{\det A}_{=\delta} = 0$$

- Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, considerăm subspațiile proprii
  $V_{\lambda_K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid AX = \lambda_K X\} = \langle\{e_K'\}\rangle$, $K = \overline{1,2}$, unde e_1', e_2' sunt versori (proprii) ortogonali, i.e. $e_1' \perp e_2'$.
- Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, considerăm subspațiul propriu 2-dimensional
  $V_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid AX = \lambda X\} = \langle\{e_1', e_2'\}\rangle$, unde e_1', e_2' sunt versori (proprii) ortogonali, i.e. $e_1' \perp e_2'$.

Notăm $e_K' = (l_K, m_K)$, $K = \overline{1,2}$ și $R = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \in SO(2)$

Important! Dacă $\det R = -1$, atunci inversăm coloanele.

Considerăm rotația $R: X' = RX''$; $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Conica devine $R(T(\Gamma)): \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$

Izometria efectuată este: $X = RX'' + X_0$.

Se obțin următoarele schimbări de reper cartezian:

$$\mathcal{R} = \{O, e_1, e_2\} \xrightarrow{T} \mathcal{R}' = \{P_0, e_1, e_2\} \xrightarrow{R} \mathcal{R}'' = \{P_0, e_1', e_2'\}$$

Distingem următoarele cazuri:

a) $\Delta \neq 0$ (conică nedegenerată)

1° $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \emptyset$ sau elipsă

2° $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ hiperbolă

b) $\Delta = 0$ (conică degenerată)

1° $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ punct dublu

2° $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ două drepte concurente