Cercetări operaţionale 1

Cristian Niculescu

1 Curs 1

1.1 Introducere

Studiem în principal problemele de optimizare liniară.
Bibliografie:
C. Zidăroiu - Programare liniară
A. Ştefănescu, C. Zidăroiu - Cercetări operaţionale
V. Preda, M. Bad - Culegere de probleme de cercetări operaţionale

1.2 Sisteme de ecuaţii liniare

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,m}$$

este sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute.
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ este soluţie a sistemului dacă verifică ecuaţiile.
Dacă $b_i = 0, \forall i = \overline{1,m}$, sistemul este omogen.
Un sistem omogen este compatibil, având soluţie $x_j = 0, \forall j = \overline{1,n}$.

1.2.1 Forme echivalente

Forma matriceală:

$$Ax = b \tag{1}$$

Notăm:

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, j = \overline{1,n},$$

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1,m}.$$

Forma "pe coloane":

$$\sum_{j=1}^{n} a^j x_j = b.$$

Forma "pe linii":

$$a_i^T x = b_i, i = \overline{1,m}.$$

Teorema Kronecker-Capelli (TKC). Sistemul (1) este compatibil $\Leftrightarrow$ $rangA = rang(A, b)$.

Presupunem $rangA = r \le \min\{m, n\}$.
Presupunem că minorul format cu primele r linii şi coloane este $\neq 0$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,r}$$

sunt ecuaţii principale.
Restul sunt ecuaţii secundare.
Mulţimea soluţiilor sistemului (1) este egală cu mulţimea soluţiilor sistemului format cu ecuaţiile principale. De aceea putem elimina ecuaţiile secundare.
Presupunem $rangA = m \le n$.
Dacă $m = n$, atunci sistemul (1) are soluţia unică $x = A^{-1}b$.
Presupunem $rangA = m < n$.
Fie $a^{j_1}, a^{j_2}, ..., a^{j_m}, m$ coloane liniar independente ale lui A.
$B = (a^{j_1}, a^{j_2}, ..., a^{j_m})$ se numeşte bază a sistemului (1), deoarece $\{a^{j_1}, a^{j_2}, ..., a^{j_m}\}$ este bază în $\mathbb{R}^m$.

Notăm:

$$x^B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \{j_1, j_2, ..., j_m\},\ \mathcal{R} = \{1, 2, ..., n\} \setminus \mathcal{B},$$
$$R = (a^j)_{j\in\mathcal{R}},\ x^R = (x_j)_{j\in\mathcal{R}}.$$

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx^B + Rx^R = b \overset{B^{-1}\cdot|}{\Longrightarrow}$$
$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R,$$

forma explicită a sistemului (1) în raport cu baza B.
Numărul bazelor $\leq C_n^m \Rightarrow \exists$ cel mult C_n^m forme explicite.
O soluţie a sistemului (1) este soluţie de bază $\Leftrightarrow$ componentelor nenule ale soluţiei le corespund coloane liniar independente ale lui A.
Dacă soluţia de bază are m componente nenule, ea se numeşte soluţie de bază nedegenerată; în caz contrar (dacă are mai puţin de m componente nenule), se numeşte degenerată.
Soluţia $(0, 0, ..., 0)^T$ se consideră soluţie de bază.
În forma explicită a sistemului punem $x^R = 0 \Rightarrow x^B = B^{-1}b$.
$\begin{cases} x^B = B^{-1}b \\ x^R = 0 \end{cases}$ este soluţie de bază, numită soluţia de bază asociată (corespunzătoare) lui B, deoarece componentele nenule sunt componente ale lui x^B.
La orice bază corespunde o singură soluţie de bază. Această funcţie este surjectivă, dar nu este injectivă.
Este surjectivă, deoarece coloanele liniar independente corespunzătoare componentelor nenule ale soluţiei de bază formează o bază sau se pot completa până la o bază.
Dacă soluţia este degenerată, se pot completa în mai multe feluri (neinjectivă).
Exemplu. Sistemul

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ 2x_1 + \ x_2 + \ 3x_3 = 2 \end{cases}$$

are soluţia de bază degenerată $(1, 0, 0)^T$ asociată bazelor (a^1, a^2) şi (a^1, a^3).

1.3 Sisteme de ecuaţii şi inecuaţii liniare

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m$.
Lemă. Fie $c \in \mathbb{R}^*$. Dintre sistemele

$$Ax = b \tag{1}$$

şi

$$\begin{cases} A^T u = 0 \\ b^T u = c \end{cases} \tag{2}$$

unul şi numai unul este compatibil.
Demonstraţie.

$$rang \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & c \end{pmatrix} = 1 + rangA \tag{*}$$

(Se bordează minorul $\neq 0$ din A^T care dă rangul lui A^T cu coloana $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ în dreapta şi elementele corespunzătoare ale lui b^T pe ultima linie, obţinându-se minorul $\neq 0$ care dă rangul lui $\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & c \end{pmatrix}$.)
Arătăm (1) compatibil $\Rightarrow$ (2) incompatibil:

$$\text{(1) compatibil} \overset{TKC}{\Longrightarrow} rangA = rang(A,b) \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$
$$rang \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & c \end{pmatrix} = 1 + rang \begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} \overset{TKC}{\Longrightarrow} \text{(2) incompatibil.}$$

Arătăm (1) incompatibil $\Rightarrow$ (2) compatibil:

$$\left.\begin{array}{r} \text{(1) incompatibil} \overset{TKC}{\Longrightarrow} rang(A,b) \neq rangA \\ rangA \leq rang(A,b) \leq 1 + rangA \end{array}\right\} \Rightarrow rang(A,b) = 1 + rangA \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$
$$rang \begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & c \end{pmatrix} \overset{TKC}{\Longrightarrow} \text{(2) compatibil.}$$

Lema Farkas-Minkowski. Dintre sistemele

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

şi

$$\begin{cases} A^T u \geq 0 \\ b^T u < 0 \end{cases} \tag{4}$$

unul şi numai unul este compatibil.
Demonstraţie. Dacă $b = 0$, evident: (3) are soluţia $x = 0$, (4) incompatibil: nu se verifică $b^T u < 0$.
Presupunem $b \neq 0$.
Arătăm că (3) şi (4) nu au simultan soluţie:
Reducere la absurd. Presupunem că (3) are soluţia $\overline{x}$, (4) are soluţia $\overline{u} \Rightarrow$

$$0 > b^T\overline{u} = \overline{u}^T b = \overline{u}^T A\overline{x} = (\overline{u}^T A\overline{x})^T = \underbrace{\overline{x}^T}_{\geq 0}\underbrace{A^T\overline{u}}_{\geq 0} \geq 0, \text{contradicţie.}$$

Din cele de mai sus, (3) compatibil $\Rightarrow$ (4) incompatibil.
Arătăm (3) incompatibil $\Rightarrow$ (4) compatibil:
Cazul 1) (1) incompatibil $\overset{\text{lemă}}{\Longrightarrow}$ (2) compatibil. Pentru $c < 0$, fie $\overline{u}$ soluţie în (2) $\Rightarrow$ $\overline{u}$ soluţie în (4).
Cazul 2) (1) compatibil, dar n-are soluţie ≥ 0.
Fie $A = (a^1, a^2, ..., a^n)$. Facem inducţie după n.
Verificare.
$n = 1 \Rightarrow A = a^1$.
Fie $\overline{x} \ngeq 0$ soluţie pentru

$$a^1 x = b. \tag{1_1}$$

$n = 1 \Rightarrow \overline{x} \in \mathbb{R}^*_- \Rightarrow a^1 = \frac{1}{\overline{x}} b$.
Arătăm că $\overline{u} = -b$ este soluţie pentru

$$\begin{cases} (a^1)^T u \geq 0 \\ b^T u < 0 \end{cases} \tag{4_1}$$

$$(a^1)^T\overline{u} = (a^1)^T(-b) = \tfrac{1}{\overline{x}} b^T(-b) = -\underbrace{\frac{1}{\overline{x}}}_{<0}\underbrace{b^T b}_{>0} \geq 0,$$

$b^T\overline{u} = b^T(-b) = -b^T b < 0$.
Demonstraţie.
Ipoteza de inducţie: dacă sistemul

$$\sum_{j=1}^{n-1} a^j x_j = b \tag{1_{n-1}}$$

este compatibil, dar n-are soluţie ≥ 0, atunci sistemul

$$\begin{cases} (a^j)^T u \geq 0, j = \overline{1, n-1} \\ b^T u < 0 \end{cases} \tag{4_{n-1}}$$

este compatibil.
Presupunem că sistemul

$$\sum_{j=1}^{n} a^j x_j = b \tag{1_n}$$

este compatibil, dar n-are soluţie ≥ 0.
Arătăm că sistemul

$$\begin{cases} (a^j)^T u \geq 0, j = \overline{1,n} \\ b^T u < 0 \end{cases} \tag{4_n}$$

este compatibil.
Dacă (1_{n-1}) are soluţia $\overline{x} \geq 0$, atunci $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ este soluţie ≥ 0 pentru (1_n), contradicţie.
Dacă (1_{n-1}) este incompatibil, atunci, din cazul 1), (4_{n-1}) este compatibil.
Dacă (1_{n-1}) este compatibil, dar n-are soluţie ≥ 0, atunci, din ipoteza de inducţie, (4_{n-1}) este compatibil.
Deci (4_{n-1}) este compatibil. Fie u_0 soluţie pentru (4_{n-1}).
Dacă $(a^n)^T u_0 \geq 0$, atunci u_0 este soluţie pentru (4_n), q.e.d.
Dacă $(a^n)^T u_0 < 0$, fie

$$\begin{aligned}
&\lambda_j = -\frac{(a^j)^T u_0}{(a^n)^T u_0} \geq 0, \forall j = \overline{1, n-1}, \\
&\lambda_0 = -\frac{b^T u_0}{(a^n)^T u_0} < 0, \\
&\overline{a}^j = a^j + \lambda_j a^n, j = \overline{1, n-1}, \\
&\overline{b} = b + \lambda_0 a^n.
\end{aligned}$$

Fie sistemul

$$\sum_{j=1}^{n-1} \overline{a}^j y_j = \overline{b}. \tag{S_1}$$

$(S_1) \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n-1} a^j y_j + \left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j y_j - \lambda_0 \right) a^n = b.$
Arătăm că (S_1) n-are soluţie ≥ 0:
Presupunem prin absurd că $\overline{y}_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n-1}$ este soluţie ≥ 0 pentru $(S_1) \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n-1} \underbrace{\lambda_j}_{\geq 0} \underbrace{\overline{y}_j}_{\geq 0} - \underbrace{\lambda_0}_{<0} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j \overline{y}_j - \lambda_0 \end{pmatrix}$ este soluţie ≥ 0 pentru (1_n), contradicţie.

(S_1) este de forma (1_{n-1}).
Dacă (S_1) este incompatibil, atunci, din cazul 1),

$$\begin{cases} (\overline{a}^j)^T u \geq 0, j = \overline{1, n-1} \\ \overline{b}^T u < 0 \end{cases} \tag{S_2}$$

este compatibil.
Dacă (S_1) este compatibil, dar n-are soluţie ≥ 0, atunci, din ipoteza de inducţie, (S_2) este compatibil.
Fie $\overline{u}$ soluţie pentru (S_2) şi

$$\widetilde{u} = \overline{u} - \frac{\overline{u}^T a^n}{u_0^T a^n} u_0.$$

Arătăm că $\widetilde{u}$ este soluţie pentru (4_n):
$(a^j)^T \widetilde{u} = (a^j)^T \overline{u} - \frac{\overline{u}^T a^n}{u_0^T a^n}(a^j)^T u_0 = (a^j + \lambda_j a^n)^T \overline{u} = (\overline{a}^j)^T \overline{u} \geq 0, \forall j = \overline{1, n-1}$,
$(a^n)^T \widetilde{u} = (a^n)^T \overline{u} - \frac{\overline{u}^T a^n}{u_0^T a^n}(a^n)^T u_0 = 0$,
$b^T \widetilde{u} = b^T \overline{u} - \frac{\overline{u}^T a^n}{u_0^T a^n} b^T u_0 = (b + \lambda_0 a^n)^T \overline{u} = \overline{b}^T \overline{u} < 0$, q.e.d.
Observaţie. Sistemul (4) se poate înlocui cu

$$\begin{cases} A^T u \leq 0 \\ b^T u > 0 \end{cases} \tag{4'}$$

deoarece (4) şi (4') sunt sau nu compatibile simultan: $\overline{u}$ este soluţie pentru (4) $\Leftrightarrow -\overline{u}$ este soluţie pentru (4').
Teorema Farkas-Minkowski (TFM). Dintre sistemele

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \geq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \leq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases} \tag{5}$$

şi

$$\begin{cases} -A_{11}^T u_1 - A_{21}^T u_2 - A_{31}^T u_3 \geq 0 \\ -A_{12}^T u_1 - A_{22}^T u_2 - A_{32}^T u_3 = 0 \\ -A_{13}^T u_1 - A_{23}^T u_2 - A_{33}^T u_3 \leq 0 \\ u_1 \geq 0, u_2 \text{ arbitrar}, u_3 \leq 0 \\ b_1^T u_1 + b_2^T u_2 + b_3^T u_3 > 0 \end{cases} \tag{6}$$

unul şi numai unul este compatibil.
Demonstraţie. Aducem sistemul (5) la forma sistemului (3).

$$x_2 = x_4 - x_5, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$$
$$x_3 = -x_6, x_6 \geq 0,$$
$$x_7 \geq 0, x_8 \geq 0 \text{ variabile ecart.}$$

(5)$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_4 - A_{12}x_5 - A_{13}x_6 - x_7 = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_4 - A_{22}x_5 - A_{23}x_6 = b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_4 - A_{32}x_5 - A_{33}x_6 + x_8 = b_3 \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0 \end{cases} \tag{3'}$$

(3') este de forma sistemului (3), cu

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{12} & -A_{13} & -I & 0 \\ A_{21} & A_{22} & -A_{22} & -A_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & -A_{32} & -A_{33} & 0 & I \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Scriem sistemul de forma (4') corespunzător, notând $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} A_{11}^T u_1 + A_{21}^T u_2 + A_{31}^T u_3 \leq 0 \\ A_{12}^T u_1 + A_{22}^T u_2 + A_{32}^T u_3 \leq 0 \\ -A_{12}^T u_1 - A_{22}^T u_2 - A_{32}^T u_3 \leq 0 \\ -A_{13}^T u_1 - A_{23}^T u_2 - A_{33}^T u_3 \leq 0 \\ -u_1 \leq 0, u_3 \leq 0 \\ b_1^T u_1 + b_2^T u_2 + b_3^T u_3 > 0. \end{cases} \tag{4''}$$

Din lema Farkas-Minkowski şi observaţie $\Rightarrow$ dintre sistemele (3') şi (4'') unul şi numai unul este compatibil.
Observăm că (4'') $\Leftrightarrow$ (6).
$\Rightarrow$ dintre sistemele (5) şi (6) unul şi numai unul este compatibil.

Sistemul (6) se numeşte sistemul dual al sistemului (5), numit sistem primal.

Corolarul Farkas-Minkowski. Fie $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisimetrică ($F^T = -F$). Atunci sistemul

$$\begin{cases} Fx \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

are o soluţie $\overline{x}$ astfel încât $F\overline{x} + \overline{x} > 0$.
Demonstraţie. Pentru sistemul

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

sistemul dual este

$$\begin{cases} -A^T u \geq 0 \\ u \geq 0 \\ b^T u > 0. \end{cases}$$

Fie $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pentru $A = F, b = e^i$ (vectorul cu 1 pe componenta i şi 0 în rest) $\Rightarrow$ pentru sistemul

$$\begin{cases} Fx \geq e^i \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

sistemul dual este

$$\begin{cases} Fu \geq 0 \\ u \geq 0 \\ u_i > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Cazul 1) Sistemul (7) are soluţia $x^i \Rightarrow$

$$\begin{cases} Fx^i \geq 0 \\ x^i \geq 0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} f_i^T x^i \geq 1 \\ x_i^i \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f_i^T x^i + x_i^i \geq 1 > 0$.
Cazul 2) Sistemul (7) este incompatibil $\overset{TFM}{\Longrightarrow}$ sistemul (8) are o soluţie $x^i \Rightarrow$

$$\begin{cases} Fx^i \geq 0 \\ x^i \geq 0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} f_i^T x^i \geq 0 \\ x_i^i > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f_i^T x^i + x_i^i > 0.$
Deci, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \exists x^i$ astfel încât

$$\begin{cases} Fx^i \geq 0 \\ x^i \geq 0 \end{cases}$$

şi $f_i^T x^i + x_i^i > 0.$
$\Rightarrow \overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i$ este soluţie pentru sistemul

$$\begin{cases} Fx \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

şi

$$(F\overline{x} + \overline{x})_i = \sum_{j=1}^{n} (Fx^j + x^j)_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f_i^T x^j + x_i^j}_{\geq 0} \geq f_i^T x^i + x_i^i > 0, \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \Rightarrow$$

$F\overline{x} + \overline{x} > 0$, q.e.d.

2 Seminar 1

1) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & -x_4 & -3x_5 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 5 \end{cases}$$

a) Să se scrie matricea sistemului, vectorul termenilor liberi şi matricea extinsă.

b) Să se scrie forme echivalente ale sistemului.

c) Să se discute compatibilitatea sistemului.

d) Să se scrie bazele sistemului. Pentru o bază să se scrie variabilele de bază şi variabilele secundare, forma explicită a sistemului în raport cu baza respectivă şi soluţia de bază asociată. Este aceasta degenerată?

a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Vectorul termenilor liberi este $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Matricea extinsă este $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Forma matriceală ($Ax=b$) este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Forma "pe linii" ($a_i^T x = b_i, i=\overline{1,m}$) este $\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=2 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=5 \end{cases}$.

Forma "pe coloane" ($\sum\limits_{j=1}^{n} a^j x_j = b$) este

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies rang\,(A) = rang\left(\overline{A}\right) (=2) \overset{\text{teorema Kronecker-Capelli}}{\Longrightarrow}$ sistemul este compatibil.

d) Bazele sistemului (matrice pătrate formate cu coloanele lui A, cu determinanţi nenuli):

$B_1=(a^1,a^2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$B_2=(a^1,a^5)=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$B_3=(a^2,a^3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$B_4=(a^2,a^4)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$B_5=(a^2,a^5)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$B_6=(a^3,a^5)=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$B_7 = (a^4, a^5) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pentru $B = B_1$:

Variabilele de bază sunt x_1, x_2.

Variabilele secundare sunt x_3, x_4, x_5.

Forma explicită a sistemului în raport cu baza B este

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R,$$

unde:

$x^B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$R = \left(a^3, a^4, a^5\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$x^R = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \implies$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \\ x_2 = -3 + 5x_5 \end{cases}.$$

Soluţia de bază asociată este $(2, -3, 0, 0, 0)^T$ (se fac 0 variabilele secundare) şi este nedegenerată, deoarece nu este niciun 0 printre valorile variabilelor de bază (2 şi -3).

Reguli de scriere a sistemului dual din teorema Farkas-Minkowski:

- La fiecare ecuaţie sau inegalitate din sistemul primal corespunde o variabilă în sistemul dual şi invers, la fiecare variabilă din sistemul primal corespunde o ecuaţie sau inegalitate în sistemul dual.

- La inegalităţi cu $\geq$ corespund variabile ≥ 0 şi invers.

- La ecuaţii corespund variabile arbitrare şi invers.
- La inegalităţi cu $\leq$ corespund variabile ≤ 0 şi invers.
- Matricea sistemului dual este opusa transpusei matricei sistemului primal.
- Termenii liberi din sistemul dual sunt 0.
- Sistemul dual conţine şi condiţia de ecart: produsul scalar dintre vectorul termenilor liberi din sistemul primal şi vectorul variabilelor din sistemul dual este > 0.

2) $\begin{cases} -3x_1 & +4x_2 & +8x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 8 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \geq & 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases}$

a) Scrieţi sistemul dual.
b) Care dintre cele 2 sisteme este compatibil? Aflaţi o soluţie a lui.

a) Punem în evidenţă corespondenţa dintre ecuaţiile sau inegalităţile din sistemul primal şi variabilele din sistemul dual.

$$\begin{cases} -3x_1 & +4x_2 & +8x_3 & \leq & 2 & \leftrightsquigarrow & u_1 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 8 & \leftrightsquigarrow & u_2 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \geq & 7 & \leftrightsquigarrow & u_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Scriem pe rând ecuaţiile sau inegalităţile din sistemul dual corespunzătoare variabilelor din sistemul primal. Coeficienţii din membrul stâng se citesc pe coloana variabilei respective cu semn schimbat.
Pentru x_1:
$3u_1 - u_2 - 5u_3 \geq 0$.
Semnul este $\geq$ deoarece $x_1 \geq 0$.
Pentru x_2:
$-4u_1 + 3u_3 = 0$.
Coeficientul lui u_2 este 0 deoarece x_2 nu apare în ecuaţie. Semnul este $=$ deoarece x_2 este arbitrar.
Pentru x_3: $-8u_1 - 2u_2 - 2u_3 \leq 0$.
Semnul este $\leq$ deoarece $x_3 \leq 0$.
Scriem semnele variabilelor din sistemul dual:
$u_1 \leq 0$ deoarece u_1 corespunde la o inegalitate cu $\leq$.
u_2 arbitrar deoarece u_2 corespunde la o ecuaţie.
$u_3 \geq 0$ deoarece u_3 corespunde la o inegalitate cu $\geq$.
Scriem condiţia de ecart:

$2u_1 + 8u_2 + 7u_3 > 0$.
Sistemul dual este:

$$\begin{cases} \begin{array}{rrrcl} 3u_1 & -u_2 & -5u_3 & \geq & 0 \\ -4u_1 & & +3u_3 & = & 0 \\ -8u_1 & -2u_2 & -2u_3 & \leq & 0 \end{array} \\ u_1 \leq 0, u_2 \text{ arbitrar}, u_3 \geq 0 \\ 2u_1 + 8u_2 + 7u_3 > 0 \end{cases}$$

b) Numerotăm relaţiile din sistemul dual:

$$\begin{cases} \begin{array}{rrrcll} 3u_1 & -u_2 & -5u_3 & \geq & 0 & (1) \\ -4u_1 & & +3u_3 & = & 0 & (2) \\ -8u_1 & -2u_2 & -2u_3 & \leq & 0 & (3) \end{array} \\ u_1 \leq 0 \ (4) \\ u_2 \text{ arbitrar } (5) \\ u_3 \geq 0 \ (6) \\ 2u_1 + 8u_2 + 7u_3 > 0 \ (7) \end{cases}$$

$(2) \implies 4u_1 = 3u_3 \overset{(4),\,(6)}{\implies} u_1 = u_3 = 0 \overset{(1),\,(3)}{\implies} u_2 = 0 \overset{(7)}{\implies} 0 > 0$, contradicţie $\implies$ sistemul dual este incompatibil $\overset{\text{TFM}}{\implies}$ sistemul primal este compatibil.
O soluţie a sistemului primal este $x_1 = 8, x_2 = x_3 = 0$.

3) $\begin{cases} \begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & +8x_2 & = & 4 \end{array} \\ x_1 \text{ arbitrar}, x_2 \text{ arbitrar} \end{cases}$

a) Scrieţi sistemul dual.
b) Care dintre cele 2 sisteme este compatibil? Aflaţi o soluţie a lui.

a)
$\begin{cases} \begin{array}{rrclcl} x_1 & +2x_2 & = & 3 & \leftrightsquigarrow & u_1 \\ 4x_1 & +8x_2 & = & 4 & \leftrightsquigarrow & u_2 \end{array} \\ x_1 \text{ arbitrar}, x_2 \text{ arbitrar} \end{cases}$
Sistemul dual este

$$\begin{cases} \begin{array}{rrcl} -u_1 & -4u_2 & = & 0 \\ -2u_1 & -8u_2 & = & 0 \end{array} \\ u_1 \text{ arbitrar}, u_2 \text{ arbitrar} \\ 3u_1 + 4u_2 > 0 \end{cases}$$

b) Ecuaţiile sistemului primal sunt contradictorii $\implies$ sistemul primal este incompatibil $\overset{\text{TFM}}{\implies}$ sistemul dual este compatibil.
O soluţie a sistemului dual este $u_1 = 4, u_2 = -1$.

Cercetări operaţionale 2

Cristian Niculescu

1 Curs 2

1.1 Optimizare liniară

1.1.1 Exemple de probleme de optimizare liniară

1. Folosirea optimă a resurselor
O fabrică face n produse din m resurse. Se dau:
$a_i > 0$, cantitatea disponibilă din resursa $i, i = \overline{1,m}$;
$a_{ij} \geq 0$, consumul din resursa i pentru a face o unitate din produsul j, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$;
$b_j > 0$, profitul dintr-o unitate de produs $j, j = \overline{1,n}$.
Se cere să se organizeze producţia astfel încât profitul total să fie maxim.
Fie x_j, cantitatea care trebuie fabricată din produsul $j, j = \overline{1,n}$.
În acest caz, problema de optimizare liniară este

$$\begin{cases} \sup\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j x_j\right) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_i, i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

$\sum\limits_{j=1}^{n} b_j x_j$ se numeşte funcţie obiectiv.
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_i, i = \overline{1,m}$ se numesc restricţii.
$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$ se numesc condiţii de semn.
Problema se numeşte problemă de optimizare liniară deoarece funcţia obiectiv şi membrii stângi ai restricţiilor sunt funcţii liniare.
2. Problema de transport
Sunt m depozite şi n beneficiari. Se dau:

$a_i > 0$, cantitatea de marfă din depozitul $i, i = \overline{1,m}$;
$b_j > 0$, cantitatea de marfă cerută de beneficiarul $j, j = \overline{1,n}$;
c_{ij}, costul transportului unei unităţi de marfă de la depozitul i la beneficiarul $j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.
Presupunem că problema este echilibrată, adică $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ (oferta totală = cererea totală).
Se cere să se organizeze transportul mărfii de la depozite la beneficiari astfel încât costul total să fie minim.
Fie x_{ij}, cantitatea de marfă care trebuie transportată de la depozitul i la beneficiarul $j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.
Problema de transport este

$$\begin{cases} \inf \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

1.1.2 Forme ale problemelor de optimizare liniară

Forma generală a problemei de optimizare liniară este

$$\begin{cases} \inf(\sup)(c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3) \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \geq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \leq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

În problema de infimum, restricţiile cu $\geq$ se numesc inegalităţi concordante, iar restricţiile cu $\leq$ se numesc inegalităţi neconcordante.
În problema de supremum, restricţiile cu $\leq$ se numesc inegalităţi concordante, iar restricţiile cu $\geq$ se numesc inegalităţi neconcordante.
Forma standard a problemei de optimizare liniară are toate variabilele ≥ 0

şi toate restricţiile ecuaţii:

$$\begin{cases} \inf(\sup)(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Forma canonică a problemei de optimizare liniară are toate variabilele ≥ 0 şi toate restricţiile inegalităţi concordante:

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \sup(c^T x) \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Forma mixtă a problemei de optimizare liniară are toate variabilele ≥ 0 şi toate restricţiile ecuaţii sau inegalităţi concordante. Exemplu:

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ A_1 x \geq b_1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

1.1.3 Transformări echivalente

Fie $a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$a^T x \geq \alpha \iff -a^T x \leq -\alpha$$

$$a^T x \leq \alpha \iff \begin{cases} a^T x + y = \alpha \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$a^T x \geq \alpha \iff \begin{cases} a^T x - y = \alpha \\ y \geq 0 \end{cases}$$

y se numeşte variabilă ecart.

$$a^T x = \alpha \iff \begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ a^T x \geq \alpha \end{cases}$$

$$x \leq 0 \iff \begin{cases} x = -x' \\ x' \geq 0 \end{cases}$$

$$x \text{ arbitrar} \iff \begin{cases} x = x' - x'' \\ x', x'' \geq 0 \end{cases}$$

$$X \subseteq \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset, f : X \to \mathbb{R} \implies \inf_{x\in X} f(x) = -\sup_{x\in X}(-f(x)).$$

Aceasta ne permite să trecem de la o problemă de supremum la una de infimum sau invers prin schimbarea semnului funcţiei obiectiv.

1.1.4 Definiţii

Fie problema de optimizare liniară la forma standard

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), rang A = m < n. \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ care verifică $Ax = b$ şi $x \geq 0$ se numeşte soluţie admisibilă pentru problema (1).
O soluţie admisibilă care este şi soluţie de bază pentru sistemul $Ax = b$ se numeşte soluţie admisibilă de bază pentru problema (1).
$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ se numeşte domeniul admisibil pentru problema (1).
x^* se numeşte soluţie optimă pentru problema (1) $\iff$ $x^* \in P$ şi $c^T x^* \leq c^T x, \forall x \in P$.
$P^* = \{x^* \in P | c^T x^* = \inf_{x\in P}(c^T x)\}$ se numeşte mulţimea soluţiilor optime pentru problema (1).
O soluţie optimă care este şi soluţie de bază pentru sistemul $Ax = b$ se numeşte soluţie optimă de bază pentru problema (1).
problema (1) are optim infinit $\iff$ $\inf_{x\in P}(c^T x) = -\infty$.
Dacă problema (1) are optim infinit, atunci $P^* = \emptyset$.

1.1.5 Teorema fundamentală a optimizării liniare şi metoda descrierii complete

Teorema fundamentală a optimizării liniare (TFOL). Fie problema de optimizare liniară la forma standard

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), rang A = m < n. \tag{1}$$

1) Dacă problema (1) are soluţie admisibilă, atunci are şi soluţie admisibilă de bază.
2) Dacă problema (1) are soluţie optimă, atunci are şi soluţie optimă de bază.

Demonstraţie. 1) $P \neq \emptyset$. Fie $x \in P$.
Dacă $x = 0$, atunci x este soluţie admisibilă de bază.
Dacă $x \neq 0$, atunci, renumerotând eventual variabilele, putem scrie

$$x = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^n, \text{ cu } x_i \neq 0, \forall i = \overline{1, k}.$$

Fie $A = (a^1, ..., a^n)$.
Dacă $a^1, ..., a^k$ sunt liniar independente, atunci x este soluţie admisibilă de bază.
Dacă $a^1, ..., a^k$ sunt liniar dependente, atunci $\exists \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ nu toate 0 astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a^i = 0$.
Fie $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^n \implies$
$A\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a^i = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a^i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} 0 a^i = 0 + 0 = 0$.
Fie $x(\lambda) = x + \lambda \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.
$Ax(\lambda) = Ax + \lambda A\alpha = b + \lambda \cdot 0 = b \implies$
$x(\lambda)$ este soluţie a sistemului $Ax = b, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Determinăm $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x(\lambda) \geq 0 \iff x_j + \lambda \alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, k} \iff \begin{cases} \lambda \geq -\dfrac{x_j}{\alpha_j}, \text{ dacă } \alpha_j > 0 \\ \lambda \leq -\dfrac{x_j}{\alpha_j}, \text{ dacă } \alpha_j < 0 \end{cases}$$

Fie $I_+ = \{j | \alpha_j > 0\}, I_- = \{j | \alpha_j < 0\} \implies I_+ \cap I_- = \emptyset$.
$\alpha_1, ..., \alpha_k$ nu sunt toate 0 $\implies I_+ \cup I_- \neq \emptyset$.
Fie

$$\lambda_1 = \begin{cases} \max\limits_{j \in I_+} \left(-\frac{x_j}{\alpha_j} \right), \text{ dacă } I_+ \neq \emptyset \\ -\infty, \text{ dacă } I_+ = \emptyset \end{cases} ; \ \lambda_2 = \begin{cases} \min\limits_{j \in I_-} \left(-\frac{x_j}{\alpha_j} \right), \text{ dacă } I_- \neq \emptyset \\ \infty, \text{ dacă } I_- = \emptyset. \end{cases}$$

$\implies x(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ (cu convenţia că, dacă vreunul din capete este infinit, intervalul este deschis acolo) $\implies x(\lambda) \in P, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.
$I_+ \cup I_- \neq \emptyset \implies$ cel puţin unul din λ_1, λ_2 este finit.
Presupunem λ_1 finit (dacă $\lambda_1 = -\infty$, atunci $\lambda_2 < \infty$ şi se procedează analog, înlocuind λ_1 cu λ_2) $\implies \exists j_0 \in I_+$ astfel încât $\lambda_1 = -\frac{x_{j_0}}{\alpha_{j_0}} \implies x(\lambda_1) \in P$ şi $x_{j_0}(\lambda_1) = x_{j_0} + \lambda_1 \alpha_{j_0} = 0 \implies$ numărul componentelor $\neq 0$ ale lui $x(\lambda_1)$ este cel mult $k - 1$.
Dacă $x(\lambda_1)$ nu este soluţie de bază, se repetă procedeul, obţinându-se o soluţie admisibilă cu cel mult $k-2$ componente nenule, ş.a.m.d. $\implies$ după un număr finit de paşi se obţine o soluţie admisibilă de bază.

2) Fie $x \in P^*$.
Dacă $x = 0$, atunci x este soluţie optimă de bază.
Dacă $x \neq 0$ şi x nu este soluţie de bază, repetăm procedeul de la 1) $\Longrightarrow$ $x(\lambda) \in P, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.
$x \in P^* \implies c^T x(\lambda) \geq c^T x \implies c^T x + \lambda c^T \alpha \geq c^T x \implies$
$\lambda c^T \alpha \geq 0, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \overset{\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0}{\Longrightarrow} c^T \alpha = 0$ (altfel luăm $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ de semn contrar lui $c^T \alpha \implies$ contradicţie) $\Longrightarrow c^T x(\lambda) = c^T x \overset{x(\lambda) \in P, x \in P^*}{\Longrightarrow}$
$x(\lambda) \in P^*, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.
Presupunem λ_1 finit (dacă $\lambda_1 = -\infty$, atunci $\lambda_2 < \infty$ şi se procedează analog, înlocuind λ_1 cu λ_2) $\Longrightarrow$ $x(\lambda_1) \in P^*$ şi are cel mult $k - 1$ componente $\neq 0$ (din demonstraţia de la 1)).
Dacă $x(\lambda_1)$ nu este soluţie de bază, se repetă procedeul, obţinându-se o soluţie optimă cu cel mult $k - 2$ componente nenule, ş.a.m.d. $\Longrightarrow$ după un număr finit de paşi se obţine o soluţie optimă de bază.
Observaţie. O soluţie optimă se poate căuta printre soluţiile admisibile de bază (cel mult C_n^m).
Metoda descrierii complete.

- Se demonstrează că problema (1) are soluţie optimă.
- Se determină toate soluţiile de bază ale sistemului $Ax = b$.
- Pentru soluţiile admisibile de bază se calculează valorile funcţiei obiectiv.
- O soluţie optimă este o soluţie admisibilă de bază pentru care se atinge minimul valorilor funcţiei obiectiv calculate.

Această metodă nu se poate aplica practic din cauza primelor 2 puncte.

2 Seminar 2

1) $\begin{cases} \inf (2x_2 + x_3) \\ -3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 2 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases}$.

Să se aducă la:
a) forma standard;
b) forma canonică;
c) forma mixtă.

Rezolvare.

a) $\begin{cases} x_2 = x_4 - x_5, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_3 = -x_6, x_6 \geq 0 \\ x_7, x_8 \geq 0 \text{ variabile ecart} \end{cases}.$

Forma standard:

$$\begin{cases} \inf\left(2x_4 - 2x_5 - x_6\right) \\ -3x_1 + 4x_4 - 4x_5 - 8x_6 + x_7 = 2 \\ x_1 - 2x_6 = 8 \\ 5x_1 - 3x_4 + 3x_5 - 2x_6 - x_8 = 7 \\ x_1, x_4, ..., x_8 \geq 0 \end{cases}.$$

b) $\begin{cases} x_2 = x_4 - x_5, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_3 = -x_6, x_6 \geq 0 \end{cases}.$

Înmulţim prima inegalitate cu -1 ca s-o facem concordantă, iar ecuaţia o scriem echivalent ca 2 inegalităţi contrare, înmulţind-o cu -1 pe cea neconcordantă.

Forma canonică:

$$\begin{cases} \inf\left(2x_4 - 2x_5 - x_6\right) \\ 3x_1 - 4x_4 + 4x_5 + 8x_6 \geq -2 \\ x_1 - 2x_6 \geq 8 \\ -x_1 + 2x_6 \geq -8 \\ 5x_1 - 3x_4 + 3x_5 - 2x_6 \geq 7 \\ x_1, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}.$$

c) $\begin{cases} x_2 = x_4 - x_5, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_3 = -x_6, x_6 \geq 0 \end{cases}.$

Înmulţim prima inegalitate cu -1.

Forma mixtă:

$$\begin{cases} \inf\left(2x_4 - 2x_5 - x_6\right) \\ 3x_1 - 4x_4 + 4x_5 + 8x_6 \geq -2 \\ x_1 - 2x_6 = 8 \\ 5x_1 - 3x_4 + 3x_5 - 2x_6 \geq 7 \\ x_1, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}.$$

2) $\begin{cases} \sup\left(3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4\right) \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 \leq 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq -1 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, \ x_3 \leq 0, x_4 \text{ arbitrar} \end{cases}.$

Să se aducă la:

a) forma standard;

b) forma canonică;

c) forma mixtă.

Rezolvare.

a) $\begin{cases} x_2 = x_5 - x_6, x_5, x_6 \geq 0 \\ x_3 = -x_7, x_7 \geq 0 \\ x_4 = x_8 - x_9, x_8, x_9 \geq 0 \\ x_{10}, x_{11}, x_{12} \geq 0 \text{ variabile ecart} \end{cases}$.

Forma standard:

$$\begin{cases} \sup\left(3x_1 - x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 - x_9\right) \\ x_1 + 4x_5 - 4x_6 + x_7 - 3x_8 + 3x_9 + x_{10} = 3 \\ -2x_1 + x_5 - x_6 - 2x_7 - x_8 + x_9 - x_{11} = -1 \\ 5x_1 - 3x_5 + 3x_6 - x_7 + 2x_8 - 2x_9 + x_{12} = 4 \\ x_1, x_5, ..., x_{12} \geq 0 \end{cases}.$$

b) $\begin{cases} x_2 = x_5 - x_6, x_5, x_6 \geq 0 \\ x_3 = -x_7, x_7 \geq 0 \\ x_4 = x_8 - x_9, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}$.

Înmulţim a 2-a inegalitate cu -1 ca s-o facem concordantă.

Forma canonică:

$$\begin{cases} \sup\left(3x_1 - x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 - x_9\right) \\ x_1 + 4x_5 - 4x_6 + x_7 - 3x_8 + 3x_9 \leq 3 \\ 2x_1 - x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 - x_9 \leq 1 \\ 5x_1 - 3x_5 + 3x_6 - x_7 + 2x_8 - 2x_9 \leq 4 \\ x_1, x_5, ..., x_9 \geq 0 \end{cases}.$$

c) În acest caz, forma mixtă coincide cu forma canonică.

Forma mixtă:

$$\begin{cases} \sup\left(3x_1 - x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 - x_9\right) \\ x_1 + 4x_5 - 4x_6 + x_7 - 3x_8 + 3x_9 \leq 3 \\ 2x_1 - x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 - x_9 \leq 1 \\ 5x_1 - 3x_5 + 3x_6 - x_7 + 2x_8 - 2x_9 \leq 4 \\ x_1, x_5, ..., x_9 \geq 0 \end{cases}.$$

3) Să se rezolve cu metoda descrierii complete:

$$\begin{cases} \inf\left(-5x_1 - 4x_2\right) \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}.$$

Rezolvare.

Arătăm mai întâi că problema are soluţie optimă:

Domeniul admisibil $P = \left\{x \in \mathbb{R}^4_+ | x_1 + 3x_2 + x_3 = 15, 4x_1 + x_2 + x_4 = 16\right\}$ este nevid ($(0, 0, 15, 16)^T \in P$), închis (limita oricărui şir convergent de elemente din P verifică şi ea cele 2 ecuaţii şi condiţiile de semn, deci este şi ea în P) şi mărginit ($P \subset [0, 4] \times [0, 5] \times [0, 15] \times [0, 16]$, ultima fiind mărginită în $\mathbb{R}^4$), deci compact, iar funcţia obiectiv $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f(x) = -5x_1 - 4x_2$ este continuă (fiind liniară). Din teorema lui Weierstrass (o funcţie continuă pe un compact nevid este mărginită şi îşi atinge marginile) $\implies \exists x^* \in P$ a.

î. $f\left(x^*\right)=\inf\limits_{x\in P} f\left(x\right) \implies \exists x^*$ soluţie optimă.

Apoi facem tabelul (calculăm valoarea funcţiei obiectiv numai pentru soluţiile de bază admisibile, adică având toate componentele ≥ 0).
Variabile de bază $x_1, x_2 \implies$ baza este $(a^1, a^2) \implies$ pentru a obţine soluţia de bază asociată acestei baze punem $x_3 = x_4 = 0 \implies \left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 15 \\ 4x_1 + x_2 = 16 \end{array}\right\} \implies$
$x_1 = 3, x_2 = 4 \implies$ soluţia de bază este în acest caz $(3,4,0,0)^T$.
$f((3,4,0,0)^T) = -5 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = -31$.
Analog se determină elementele de pe celelalte linii ale tabelului.

Variabile de bază	Soluţie de bază	Valoarea funcţiei obiectiv
x_1, x_2	$(3,4,0,0)^T$	-31
x_1, x_3	$(4,0,11,0)^T$	-20
x_1, x_4	$(15,0,0,-44)^T$	-
x_2, x_3	$(0,16,-33,0)^T$	-
x_2, x_4	$(0,5,0,11)^T$	-20
x_3, x_4	$(0,0,15,16)^T$	0

$\min\left(-31,-20,-20,0\right) = -31$, atins pentru $(3,4,0,0)^T \implies$ soluţie optimă $(3,4,0,0)^T$, valoarea optimă -31.

$$4)\left\{\begin{array}{l} \inf\left(-x_1\right) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{array}\right.$$

Să se completeze tabelul de la metoda descrierii complete şi să se determine soluţia admisibilă de bază pentru care se atinge minimul valorilor calculate ale funcţiei obiectiv. Să se arate că aceasta nu este soluţie optimă. Are problema soluţie optimă? Arătaţi că problema are optim infinit.
Rezolvare.
Tabelul este:

Variabile de bază	Soluţie de bază	Valoarea funcţiei obiectiv
x_1, x_2	$(-9,-6,0,0)^T$	-
x_1, x_3	$(3,0,6,0)^T$	-3
x_1, x_4	$(-3,0,0,6)^T$	-
x_2, x_3	$\left(0,-\frac{3}{2},\frac{9}{2},0\right)^T$	-
x_2, x_4	$(0,3,0,9)^T$	0
x_3, x_4	$(0,0,3,3)^T$	0

$\min(-3,0,0) = -3$ atins pentru soluţia admisibilă de bază $\overline{x} = (3,0,6,0)^T$.
Fie $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f(x) = -x_1$ şi
$P = \left\{x \in \mathbb{R}^4_+ | -x_1 + x_2 + x_3 = 3, -x_2 + x_3 + x_4 = 6\right\}$.

$f(\overline{x}) = -3$.
Pentru a arăta că $\overline{x}$ nu este soluţie optimă căutăm $\widetilde{x} \in P$ cu $f(\widetilde{x}) < -3$. Deoarece $f(\widetilde{x}) = -\widetilde{x}_1$, căutăm de exemplu $\widetilde{x}$ cu $\widetilde{x}_1 = 4$. Punem $\widetilde{x}_3 = 0 \implies \widetilde{x} = (4, 7, 0, 13)^T \in P$ şi $f(\widetilde{x}) = -4 < -3 = f(\overline{x}) \implies \overline{x}$ nu este soluţie optimă.
Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies rang A = 2 < 4$.
Presupunem prin absurd că problema are soluţie optimă $\overset{\text{TFOL}}{\implies}$ problema are soluţie optimă de bază $\implies \overline{x}$ este soluţie optimă, contradicţie. Deci problema nu are soluţie optimă.
Căutăm $x(\lambda) \in P$ cu $x_1(\lambda) = \lambda$ şi $x_3(\lambda) = 0 \implies$
$x(\lambda) = (\lambda, \lambda + 3, 0, \lambda + 9)^T \in P, \forall \lambda \geq 0$ şi $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f(x(\lambda)) = \lim\limits_{\lambda \to \infty} (-\lambda) = -\infty \implies \inf\limits_{x \in P} f(x) = -\infty \implies$ problema are optim infinit.

Cercetări operaţionale 3

Cristian Niculescu

1 Curs 3

1.1 Algoritmul simplex primal

Fie problema

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ unde } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), rangA = m < n. \quad (1)$$

Reamintim că $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ este domeniul admisibil al problemei (1).
Presupunem $P \neq \emptyset$.
Definiţie. Fie B, bază a problemei (1) (adică bază a sistemului $Ax = b$). B se numeşte bază primal admisibilă a problemei (1) $\iff B^{-1}b \geq 0$.
Observaţie. Fie B, bază a problemei (1). B este bază primal admisibilă a problemei (1) $\iff$ soluţia de bază asociată lui B, $\begin{cases} x^B = B^{-1}b \\ x^R = 0 \end{cases}$, este soluţie admisibilă a problemei (1).
Fie $B = (a^{j_1}, a^{j_2}, ..., a^{j_m})$, bază primal admisibilă a problemei (1).
Forma explicită a sistemului $Ax = b$ în raport cu baza B este
$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R$.
Notaţii. $\mathcal{B} = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$, $\mathcal{R} = \{1, 2, ..., n\} \setminus \mathcal{B}$, $\overline{x}^B = B^{-1}b$,
$y_j^B = B^{-1}a^j, j = \overline{1,n}$.
$\Longrightarrow x^B = \overline{x}^B - \sum\limits_{j\in\mathcal{R}} y_j^B x_j \Longrightarrow x_i = \overline{x}_i^B - \sum\limits_{j\in\mathcal{R}} y_{ij}^B x_j, i \in \mathcal{B}$.
Notaţii. $c_B = (c_{j_1}, c_{j_2}, ..., c_{j_m})^T$, $c_R = (c_j)_{j\in\mathcal{R}}$.
Fie $x \in P$.

$$c^T x = c_B^T x^B + c_R^T x^R = c_B^T \left(\overline{x}^B - \sum_{j\in\mathcal{R}} y_j^B x_j\right) + \sum_{j\in\mathcal{R}} c_j x_j = c_B^T \overline{x}^B - \sum_{j\in\mathcal{R}} \left(c_B^T y_j^B - c_j\right) x_j.$$

Notaţii. $\overline{z}^B = c_B^T \overline{x}^B$, $z_j^B = c_B^T y_j^B, j = \overline{1,n}$.
$\Longrightarrow c^T x = \overline{z}^B - \sum\limits_{j\in\mathcal{R}} \left(z_j^B - c_j\right) x_j$.

$\overline{z}^B$ este valoarea funcţiei obiectiv pentru soluţia de bază asociată bazei B.
$z = c^T x$ este valoarea funcţiei obiectiv pentru $x \in P$.
Testul de optim (TO). Fie B, bază primal admisibilă a problemei (1). Dacă $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$, atunci soluţia de bază asociată lui B este soluţie optimă a problemei (1).
Demonstraţie. $\left.\begin{array}{l} \forall x \in P \implies x_j \geq 0, \forall j \in \mathcal{R} \\ z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \end{array}\right\} \implies$
$c^T x = \overline{z}^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} \left(z_j^B - c_j\right) x_j \geq \overline{z}^B, \forall x \in P \overset{\text{Observaţie}}{\implies}$ soluţia de bază asociată lui B este soluţie optimă a problemei (1).
Testul de optim infinit (TOI). Fie B, bază primal admisibilă a problemei (1). Dacă $\exists k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k > 0$ şi $y_k^B \leq 0$, atunci problema (1) are optim infinit.
Demonstraţie. Fie $\alpha \in \mathbb{R}_+$ şi $x(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ definit astfel:

$$x_i(\alpha) = \begin{cases} \overline{x}_i^B - \alpha y_{ik}^B, i \in \mathcal{B} \\ \alpha, i = k \\ 0, i \in \mathcal{R} \setminus \{k\} \end{cases}$$

Arătăm că $\forall \alpha \geq 0, x(\alpha)$ este soluţie a sistemului $Ax = b$, verificând forma explicită $x_i^B = \overline{x}_i^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y_{ij}^B x_j, i \in \mathcal{B}$:
$\overline{x}_i^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y_{ij}^B x_j(\alpha) = \overline{x}_i^B - y_{ik}^B \alpha = x_i(\alpha), \forall i \in \mathcal{B}$.
Arătăm că $x_i(\alpha) \geq 0, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$:
$\forall i \in \mathcal{B}, x_i(\alpha) = \underbrace{\overline{x}_i^B}_{\geq 0} - \underbrace{\alpha}_{\geq 0} \underbrace{y_{ik}^B}_{\leq 0} \geq 0;$
$x_k(\alpha) = \alpha \geq 0;$
$\forall i \in \mathcal{R} \setminus \{k\}, x_i(\alpha) = 0 \geq 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \implies x(\alpha) \in P, \forall \alpha \geq 0 \\ c^T x(\alpha) = \overline{z}^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} (z_j^B - c_j) x_j(\alpha) = \overline{z}^B - \underbrace{(z_k^B - c_k)}_{>0} \alpha \implies \lim\limits_{\alpha \to \infty} c^T x(\alpha) = -\infty \end{array}\right\} \implies$$

$\inf\limits_{x \in P} c^T x = -\infty \implies$ problema (1) are optim infinit.
Lema substituţiei (LS). Fie $A = (a^1, a^2, ..., a^n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\widetilde{A} = (a^1, ..., a^{r-1}, b, a^{r+1}, ..., a^n)$, $c = A^{-1} b$.
1) $\widetilde{A}$ este inversabilă $\iff c_r \neq 0$.
2) Dacă $c_r \neq 0$, atunci $\widetilde{A}^{-1} = E_r(\eta) A^{-1}$, unde $E_r(\eta)$ se obţine din I_n înlocuind coloana e^r cu $\eta = \left(-\frac{c_1}{c_r}, ..., -\frac{c_{r-1}}{c_r}, \frac{1}{c_r}, -\frac{c_{r+1}}{c_r}, ..., -\frac{c_n}{c_r}\right)^T$.
Demonstraţie. $c = A^{-1} b \overset{A \cdot |}{\implies} b = Ac \implies b = \sum\limits_{j=1}^{n} a^j c_j$.

1) ($\Longrightarrow$) Reducere la absurd. Presupunem $c_r = 0 \Longrightarrow b = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} a^j c_j \Longrightarrow$ o coloană a lui $\widetilde{A}$ este combinaţie liniară de celelalte $\Longrightarrow \widetilde{A}$ neinversabilă, contradicţie.

($\Longleftarrow$) Reducere la absurd. Presupunem $\widetilde{A}$ neinversabilă

$\Longrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ nu toate 0 astfel încât $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} a^j \alpha_j + \alpha_r b = 0$.

Dacă $\alpha_r = 0$, cum $a^1, ..., a^n$ sunt liniar independente $\Longrightarrow \alpha_j = 0, \forall j = \overline{1, n}$, contradicţie. Deci $\alpha_r \neq 0$.

Înlocuim $b \Longrightarrow \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} a^j \alpha_j + \alpha_r \sum\limits_{j=1}^{n} a^j c_j = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} (\alpha_j + \alpha_r c_j) a^j + \alpha_r c_r a^r = 0$.

$a^1, ..., a^n$ sunt liniar independente $\Longrightarrow \alpha_r c_r = 0 \overset{\alpha_r \neq 0}{\Longrightarrow} c_r = 0$, contradicţie.

2) $b = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} a^j c_j + a^r c_r, c_r \neq 0 \Longrightarrow a^r = \frac{1}{c_r} b + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} \left(-\frac{c_j}{c_r} \right) a^j \Longrightarrow a^r = \widetilde{A}\eta$.

$\forall j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{r\}, a^j = \widetilde{A} e^j$, unde $e^j \in \mathbb{R}^n$ având componenta j 1 şi celelalte componente 0.

$\Longrightarrow A = \widetilde{A} E_r(\eta) \overset{\widetilde{A}^{-1} \cdot |, | \cdot A^{-1}}{\Longrightarrow} \widetilde{A}^{-1} = E_r(\eta) A^{-1}$.

Teorema de schimbare a bazei (TSB). Fie B, bază primal admisibilă pentru problema (1), $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k > 0$ şi $y_k^B \nleq 0$. Fie $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}$. Atunci:

a) matricea $\widetilde{B}$ obţinută din B înlocuind coloana a^r cu a^k este bază primal admisibilă pentru problema (1);

b) $\overline{z}^{\widetilde{B}} \leq \overline{z}^B$.

Demonstraţie. a) Din lema substituţiei,

$\widetilde{B}$ inversabilă $\Longleftrightarrow \left(B^{-1} a^k \right)_r \neq 0 \Longleftrightarrow y_{rk}^B \neq 0$.

Dar $y_{rk}^B > 0 \Longrightarrow \widetilde{B}$ inversabilă $\Longrightarrow \widetilde{B}$ bază a problemei (1).

Arătăm că baza $\widetilde{B}$ este primal admisibilă pentru problema (1):

Fie $\alpha \in \mathbb{R}_+$ şi $x(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ definit astfel:

$$x_i(\alpha) = \begin{cases} \overline{x}_i^B - \alpha y_{ik}^B, i \in \mathcal{B} \\ \alpha, i = k \\ 0, i \in \mathcal{R} \setminus \{k\} \end{cases}$$

În demonstraţia testului de optim infinit am arătat că $Ax(\alpha) = b, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$.

Fie $\alpha_0 = \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B}$.

Arătăm că $x(\alpha) \in P, \forall \alpha \in [0, \alpha_0]$:

Este suficient de demonstrat că $x(\alpha) \geq 0, \forall \alpha \in [0, \alpha_0]$.
Fie $i \in \mathcal{B}$.
Dacă $y_{ik}^B \leq 0$, atunci $x_i(\alpha) = \underbrace{\overline{x}_i^B}_{\geq 0} - \underbrace{\alpha}_{\geq 0} \underbrace{y_{ik}^B}_{\leq 0} \geq 0$.
Dacă $y_{ik}^B > 0$, atunci
$x_i(\alpha) \geq 0 \iff \overline{x}_i^B - \alpha y_{ik}^B \geq 0 \iff \alpha \leq \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}$.
Dar $\alpha \in [0, \alpha_0]$ şi $\alpha_0 = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} \implies \alpha \leq \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} \implies x_i(\alpha) \geq 0$.
$x_k(\alpha) = \alpha \geq 0$.
$\forall i \in \mathcal{R} \setminus \{k\}, x_i(\alpha) = 0 \geq 0$.
Deci $x(\alpha) \in P, \forall \alpha \in [0, \alpha_0] \implies x(\alpha_0) \in P$.
$x_r(\alpha_0) = \overline{x}_r^B - \alpha_0 y_{rk}^B = 0 \implies x_i(\alpha_0) = 0, \forall i \in (\mathcal{R} \cup \{r\}) \setminus \{k\} \implies$ componentele nenule ale lui $x(\alpha_0)$ corespund coloanelor lui $\widetilde{B} \implies x(\alpha_0)$ este soluţia de bază asociată lui $\widetilde{B} \overset{x(\alpha_0) \in P}{\implies} \widetilde{B}$ este bază primal admisibilă pentru problema (1).
b) $\overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} (z_j^B - c_j) x_j(\alpha_0) = \overline{z}^B - \underbrace{\left(z_k^B - c_k\right)}_{>0} \underbrace{\alpha_0}_{\geq 0} \leq \overline{z}^B$.

Comentariu. $\widetilde{B}$ este cel puţin la fel de bună ca B din punctul de vedere al valorii funcţiei obiectiv.

Algoritmul simplex

Pasul iniţial 0. Se determină o bază primal admisibilă B, se calculează $\overline{x}^B = B^{-1}b$, $\overline{z}^B = c_B^T \overline{x}^B$, $y_j^B = B^{-1}a^j, j = \overline{1,n}$, $z_j^B - c_j = c_B^T y_j^B - c_j, j = \overline{1,n}$ şi se trece la pasul 1.

Pasul 1 (testul de optim). Dacă $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$, atunci $x^B = \overline{x}^B$, $x^R = 0$ este soluţie optimă şi $\overline{z}^B$ este valoarea optimă, STOP. Altfel se trece la pasul 2.

Pasul 2 (testul de optim infinit). Dacă $\exists k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k > 0$ şi $y_k^B \leq 0$, atunci problema are optim infinit, STOP. Altfel se trece la pasul 3.

Pasul 3 (schimbarea bazei). Se alege $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k > 0$.
Se alege $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}$.

Se consideră baza $\widetilde{B}$ obţinută din B înlocuind coloana a^r cu a^k, se calculează $\overline{x}^{\widetilde{B}}$, $\overline{z}^{\widetilde{B}}$, $y_j^{\widetilde{B}}, j = \overline{1,n}$, $z_j^{\widetilde{B}} - c_j, j = \overline{1,n}$ şi se trece la pasul 1, înlocuind B cu $\widetilde{B}$.

Alegerea lui k. Ar trebui ales k astfel încât $\overline{z}^B - \overline{z}^{\widetilde{B}}$ să fie cât mai mare. Dacă alegem $j \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_j^B - c_j > 0$ şi apoi $i_j \in \mathcal{B}$ astfel încât $\frac{\overline{x}_{i_j}^B}{y_{i_j j}^B} = \min\limits_{y_{ij}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ij}^B}$, avem $\overline{z}^B - \overline{z}^{\widetilde{B}} = \left(z_j^B - c_j\right) \frac{\overline{x}_{i_j}^B}{y_{i_j j}^B}$, deci ar trebui să alegem $k \in \mathcal{R}$

astfel încât $\left(z_k^B - c_k\right) \frac{\overline{x}_{i_k}^B}{y_{i_k k}^B} = \max \left\{ \left(z_j^B - c_j\right) \frac{\overline{x}_{i_j}^B}{y_{i_j j}^B} | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0 \right\}$ şi apoi $r = i_k$. Pentru simplitate se renunţă la rapoarte $\Longrightarrow$
Criteriul de intrare în bază. $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k = \max \left\{ z_j^B - c_j | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0 \right\}$ (arată indicele coloanei care intră în bază).
Criteriul de ieşire din bază. $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}$ (arată indicele coloanei care iese din bază).

1.2 Formule de schimbare a bazei (FSB)

Fie $\widetilde{B}$, baza obţinută din B înlocuind a^r cu a^k. ($\widetilde{B}$ este bază conform lemei substituţiei deoarece $y_{rk}^B \neq 0$.)
Fie

$$\widetilde{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \cup \{k\}) \setminus \{r\}, \tag{2}$$

$$\widetilde{\mathcal{R}} = (\mathcal{R} \cup \{r\}) \setminus \{k\}. \tag{3}$$

Pentru B:

$$x_i = \overline{x}_i^B - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{ij}^B x_j, \forall i \in \mathcal{B}, \tag{4}$$

$$z = \overline{z}^B - \sum_{j \in \mathcal{R}} \left(z_j^B - c_j\right) x_j. \tag{5}$$

Pentru $\widetilde{B}$:

$$x_i = \overline{x}_i^{\widetilde{B}} - \sum_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} y_{ij}^{\widetilde{B}} x_j, \forall i \in \widetilde{\mathcal{B}}, \tag{6}$$

$$z = \overline{z}^{\widetilde{B}} - \sum_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} \left(z_j^{\widetilde{B}} - c_j\right) x_j. \tag{7}$$

Avem:

$$y_j^B = B^{-1} a^j, \forall j \in \overline{1, n}. \tag{8}$$

Dacă $j \in \mathcal{B} \Longrightarrow a^j$ este coloană a lui $B \Longrightarrow B^{-1} a^j$ este vector unitar $\Longrightarrow$

$$y_{jj}^B = 1, \forall j \in \mathcal{B}, \tag{9}$$

$$y_{ij}^B = 0, \forall j \in \mathcal{B}, i \in \mathcal{B} \setminus \{j\}. \tag{10}$$

$j \in \mathcal{B} \implies z_j^B - c_j = c_B^T y_j^B - c_j = \sum\limits_{i \in \mathcal{B}} c_i y_{ij}^B - c_j \overset{(9),\,(10)}{=} c_j - c_j = 0 \implies$

$$z_j^B - c_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}. \tag{11}$$

$r \in \mathcal{B} \overset{(9)}{\implies}$

$$y_{rr}^B = 1. \tag{12}$$

$r \in \mathcal{B} \overset{(10)}{\implies}$

$$y_{ir}^B = 0, \forall i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}. \tag{13}$$

$r \in \mathcal{B} \overset{(4)}{\implies} x_r = \overline{x}_r^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y_{rj}^B x_j = \overline{x}_r^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}} y_{rj}^B x_j - y_{rk}^B x_k \overset{y_{rk}^B \neq 0}{\implies}$

$x_k = \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} - \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}} \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B} x_j - \frac{1}{y_{rk}^B} x_r \overset{(12)}{=} \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} - \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}} \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B} x_j - \frac{y_{rr}^B}{y_{rk}^B} x_r \overset{(3)}{\implies}$

$$x_k = \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} - \sum_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B} x_j. \tag{14}$$

$k \in \widetilde{\mathcal{B}} \overset{(6)}{\implies} x_k = \overline{x}_k^{\widetilde{B}} - \sum\limits_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} y_{kj}^{\widetilde{B}} x_j \overset{(14)}{\implies}$

$$\overline{x}_k^{\widetilde{B}} = \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B}, \tag{15}$$

$$y_{kj}^{\widetilde{B}} = \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B}, \forall j = \overline{1,n}. \tag{16}$$

(15) şi (16) sunt formulele de schimbare a bazei corezpunzătoare regulii ”linia pivotului se împarte la pivot”.

Fie $i \in \widetilde{\mathcal{B}} \setminus \{k\} \overset{(2)}{\implies} i \in \mathcal{B} \setminus \{r\} \overset{(4)}{\implies}$

$x_i = \overline{x}_i^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}} y_{ij}^B x_j - y_{ik}^B x_k \overset{(14)}{=} \overline{x}_i^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}} y_{ij}^B x_j - y_{ik}^B \left(\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} - \sum\limits_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B} x_j \right) \overset{(3),\,(13)}{\implies}$

$x_i = \left(\overline{x}_i^B - \frac{y_{ik}^B \overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} \right) - \sum\limits_{j \in \widetilde{\mathcal{R}}} \left(y_{ij}^B - \frac{y_{ik}^B y_{rj}^B}{y_{rk}^B} \right) x_j \overset{(6)}{\implies}$

$$\overline{x}_i^{\widetilde{B}} = \overline{x}_i^B - \frac{\overline{x}_r^B y_{ik}^B}{y_{rk}^B}, \forall i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}, \tag{17}$$

$$y_{ij}^{\widetilde{B}} = y_{ij}^B - \frac{y_{ik}^B y_{rj}^B}{y_{rk}^B}, \forall i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}, j \in \overline{1,n}. \tag{18}$$

$$(5),(14) \Longrightarrow z = \overline{z}^B - \sum_{j\in\mathcal{R}\setminus\{k\}} \left(z_j^B - c_j\right) x_j - \left(z_k^B - c_k\right) \left(\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} - \sum_{j\in\widetilde{\mathcal{R}}} \frac{y_{rj}^B}{y_{rk}^B} x_j \right) \overset{r\in\mathcal{B},(11)}{\Longrightarrow}$$

$$z = \left(\overline{z}^B - \frac{\overline{x}_r^B\left(z_k^B - c_k\right)}{y_{rk}^B} \right) - \sum_{j\in\widetilde{\mathcal{R}}} \left(\left(z_j^B - c_j\right) - \frac{y_{rj}^B\left(z_k^B - c_k\right)}{y_{rk}^B} \right) x_j \overset{(7)}{\Longrightarrow}$$

$$\overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B - \frac{\overline{x}_r^B\left(z_k^B - c_k\right)}{y_{rk}^B}, \tag{19}$$

$$z_j^{\widetilde{B}} - c_j = \left(z_j^B - c_j\right) - \frac{y_{rj}^B\left(z_k^B - c_k\right)}{y_{rk}^B}, \forall j \in \overline{1,n}. \tag{20}$$

(17), (18), (19) şi (20) sunt formulele de schimbare a bazei corespunzătoare regulii dreptunghiului.

1.3 Tabelul simplex

Primul tabel:

			c_1	...	c_j	...	c_n
	VB	VVB	x_1	...	x_j	...	x_n
c_B	x^B	$\overline{x}^B$	y_1^B	...	y_j^B	...	y_n^B
	z	$\overline{z}^B$	$z_1^B - c_1$	...	$z_j^B - c_j$	...	$z_n^B - c_n$

"VB" este prescurtare de la "variabile de bază".
"VVB" este prescurtare de la "valorile variabilelor de bază".
Coloanele variabilelor de bază sunt vectori unitari cu 1 pe linia variabilei respective şi 0 în rest.
$z_j^B - c_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$.
$\overline{x}^B = B^{-1}b$ (îl ştim de când am verificat că B este primal admisibilă).
$y_j^B = B^{-1}a_j, \forall j \in \mathcal{R}$.
$\overline{z}^B = c_B^T\overline{x}^B$ (produs scalar).
$z_j^B - c_j = c_B^T y_j^B - c_j, \forall j \in \mathcal{R}$.
Tabelul pentru baza B:

VB	VVB	...	x_j	...	x_k	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
x_i	$\overline{x}_i^B$	...	y_{ij}^B	...	y_{ik}^B	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
x_r	$\overline{x}_r^B$	...	y_{rj}^B	...	$\boxed{y_{rk}^B}$	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
z	$\overline{z}^B$	...	$z_j^B - c_j$	...	$z_k^B - c_k$	...

y_{rk}^B se numeşte pivot.

Linia lui x_r se numeşte linia pivotului.
Coloana lui x_k se numeşte coloana pivotului.
Pentru baza $\widetilde{B}$, obţinută din B înlocuind a^r cu a^k, pe coloana VB, în locul lui x_r apare x_k:

VB	VVB	...	x_j	...	x_k	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
x_i	$\overline{x}_i^{\widetilde{B}}$	...	$y_{ij}^{\widetilde{B}}$	...	0	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
x_k	$\overline{x}_k^{\widetilde{B}}$	...	$y_{kj}^{\widetilde{B}}$	...	1	...
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...
z	$\overline{z}^{\widetilde{B}}$	...	$z_j^{\widetilde{B}} - c_j$	...	0	...

Coloana pivotului devine vector unitar.
Coloanele celorlalte variabile de bază rămân vectori unitari.
Linia pivotului se împarte la pivot.
Pentru celelalte elemente:
Regula dreptunghiului:
Se formează un dreptunghi având în vârfurile unei diagonale valoarea de calculat şi pivotul.
noua valoare $=$ vechea valoare $- \frac{\text{produsul elementelor din vârfurile celeilalte diagonale}}{\text{pivot}}$.

2 Seminar 3

1) Să se rezolve cu algoritmul simplex primal:

$$\begin{cases} \inf\left(-x_1 - 2x_2\right) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}.$$

Rezolvare.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = (a^3, a^4) = I_2$ (matricea unitate de ordinul 2) $\Longrightarrow$
$B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \geq 0 \Longrightarrow B$ primal admisibilă.

$\mathcal{B} = \{3,4\}\,; \mathcal{R} = \{1,2\}\,.$

Pe coloana VB (variabile de bază) sunt variabilele corespunzătoare coloanelor bazei, în ordinea în care acestea sunt în bază, apoi z.

Coloanele variabilelor de bază (aici x_3 şi x_4) sunt vectori unitari, cu 1 pe linia variabilei respective şi 0 în rest.

Pe coloana VVB (valorile variabilelor de bază) sunt:

$\overline{x}^B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ (a fost calculat când am verificat că B este primal admisibilă);

$\overline{z}^B = c_B^T \overline{x}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 0.$

Pe coloanele variabilelor secundare sunt:

pe coloana lui x_1 :

$y_1^B = B^{-1}a^1 = I_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

$z_1^B - c_1 = c_B^T y_1^B - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1) = 1;$

pe coloana lui x_2 :

$y_2^B = B^{-1}a^2 = I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

$z_2^B - c_2 = c_B^T y_2^B - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-2) = 2.$

Deoarece $B = I_2$, elementele din tabelul simplex, exceptând linia z sunt coeficienţii problemei: pe coloana VVB sunt termenii liberi, iar pe coloana lui x_j sunt coeficienţii lui $x_j, \forall j \in \mathcal{R}$.

Pentru a calcula mai uşor $\overline{z}^B$ şi $z_j^B - c_j, j \in \mathcal{R}$, la primul tabel simplex se scrie în stânga c_B şi deasupra lui x_j, c_j. Se face produsul scalar dintre c_B şi vectorul de pe coloana respectivă şi se scade ce este deasupra.

			-1	-2		
c_B	VB	VVB	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4
0	$\leftarrow x_3$	4	-1	$\boxed{1}$	1	0
0	x_4	8	1	1	0	1
	z	0	1	2	0	0

Testul de optim: $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$ nu e îndeplinit deoarece, de exemplu $z_1^B - c_1 = 1 \nleq 0$.

Testul de optim infinit: $\exists k \in \mathcal{R}$ a. î. $z_k^B - c_k > 0$ şi $y_k^B \leq 0$, nu e îndeplinit deoarece $y_1^B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0$ şi $y_2^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0$.

Criteriul de intrare în bază: $k \in \mathcal{R}$ a. î.

$z_k^B - c_k = \max \left\{ z_j^B - c_j | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0 \right\} \Longrightarrow x_k$ intră în bază.

$\max \left\{ z_j^B - c_j | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0 \right\} = \max \left(z_1^B - c_1, z_2^B - c_2 \right) = \max(1, 2) = 2 = z_2^B - c_2$ (atins pe coloana lui x_2) $\Longrightarrow x_2$ intră în bază. Se face semn că x_2 intră în bază (o săgeată deasupra lui x_2).

Criteriul de ieşire din bază: $r \in \mathcal{B}$ a. î. $\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} \Longrightarrow x_r$ iese din bază.

$\min\limits_{y_{i2}^B>0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{i2}^B} = \min\left(\frac{\overline{x}_3^B}{y_{32}^B}, \frac{\overline{x}_4^B}{y_{42}^B}\right) = \min\left(\frac{4}{1}, \frac{8}{1}\right) = 4 = \frac{\overline{x}_3^B}{y_{32}^B}$ (atins pe linia lui x_3) $\Longrightarrow$ x_3 iese din bază. Se face semn că x_3 iese din bază (o săgeată în stânga lui x_3 din coloana VVB).

Pivot: $y_{rk}^B = y_{32}^B = 1$. Se încercuieşte pivotul.

În noul tabel simplex:

Coloanele variabilelor de bază (x_2 şi x_4) sunt vectori unitari, cu 1 pe linia variabilei respective şi 0 în rest.

Linia pivotului se împarte la pivot.

Regula dreptunghiului: se formează un dreptunghi care are în vârfurile unei diagonale valoarea de calculat şi pivotul;

noua valoare = vechea valoare $-\frac{\text{produsul elementelor din vârfurile celeilalte diagonale}}{\text{pivot}}$.

Pe coloana VVB: $8 - \frac{4\cdot 1}{1}; 0 - \frac{4\cdot 2}{1}$; pe coloana lui $x_1 : 1 - \frac{(-1)\cdot 1}{1}; 1 - \frac{(-1)\cdot 2}{1}$; pe coloana lui $x_3 : 0 - \frac{1\cdot 1}{1}; 0 - \frac{1\cdot 2}{1}$.

VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
x_2	4	-1	1	1	0
$\leftarrow x_4$	4	$\boxed{2}$	0	-1	1
z	-8	3	0	-2	0

$z_1^B - c_1 = 3 \nleq 0 \Longrightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit.

$y_1^B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \nleq 0, z_3^B - c_3 = -2 \ngtr 0 \Longrightarrow$ testul de optim infinit nu este îndeplinit.

$\max(3) = 3$ pe coloana lui $x_1 \Longrightarrow x_1$ intră în bază.

$\min\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{4}{2}$ atins pe linia lui $x_4 \Longrightarrow x_4$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	6	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	-14	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

$z_3^B - c_3 = -\frac{1}{2} \leq 0, z_4^B - c_4 = -\frac{3}{2} \leq 0 \Longrightarrow$ soluţie optimă este $x_1^* = 2, x_2^* = 6, x_3^* = 0, x_4^* = 0$, valoarea optimă este -14.

Metode de verificare:

1) baza este mereu primal admisibilă, adică valorile de pe coloana VVB, exceptând linia z sunt totdeauna ≥ 0:

$4, 8; 4, 4; 6, 2 \geq 0$;

2) valoarea funcţiei obiectiv $\overline{z}^B$ nu creşte de la un tabel la altul:

$0 \geq -8 \geq -14$;

3) soluţia de bază din orice tabel verifică ecuaţiile problemei:

$-0 + 0 + 4 = 4$;

$0 + 0 + 8 = 8$;

$-0+4+0=4;$
$0+4+4=8;$

$-2+6+0=4;$
$2+6+0=8;$
4) totdeauna pivotul este >0: $1,2>0$;
5) calculând funcţia obiectiv pentru soluţia de bază din orice tabel, obţinem valoarea $\overline{z}^B$ corespunzătoare:
$-0-2\cdot 0=0;$
$-0-2\cdot 4=-8;$
$-2-2\cdot 6=-14.$

2) Să se rezolve cu algoritmul simplex primal:

$$\begin{cases} \inf(-x_1) \\ -x_1+x_2+x_3=3 \\ -x_2+x_3+x_4=6 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,4} \end{cases}$$

Rezolvare.
Căutăm o bază primal admisibilă.
Fie $B=(a^3,a^4)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.
$det(B)=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1.$
$B^T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.
$B^*=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$.
$B^{-1}=\frac{1}{det(B)}B^*=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$.
$B^{-1}b=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\geq 0\implies B$ primal admisibilă.
$\overline{x}^B=B^{-1}b=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.
$y_1^B=B^{-1}a^1=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
$y_2^B=B^{-1}a^2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

			-1	0		
c_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
0	x_3	3	-1	1	1	0
0	$\leftarrow x_4$	3	$\boxed{1}$	-2	0	1
	z	0	1	0	0	0

$z_1^B - c_1 = 1 \not\leq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$y_1^B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq 0$, $z_2^B - c_2 = 0 \not> 0 \implies$ testul de optim infinit nu este îndeplinit.

$\max(1) = 1$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{3}{1}$ atins pe linia lui $x_4 \implies x_4$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	6	0	-1	1	1
x_1	3	1	-2	0	1
z	-3	0	2	0	-1

$z_2^B - c_2 = 2 \not\leq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$\exists 2 \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_2^B - c_2 = 2 > 0$ şi $y_2^B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \leq 0 \implies$ testul de optim infinit este îndeplinit $\implies$ problema are optim infinit.

Cercetări operaţionale 4

Cristian Niculescu

1 Curs 4

1.1 Determinarea unei baze primal admisibile. Metoda celor 2 faze (bazei artificiale)

Problema

$$\begin{cases} \inf\left(c^T x\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ b \geq 0 \tag{1}$$

are soluţie admisibilă? Dacă da, să se determine o bază primal admisibilă.
Observaţie. Ipoteza $b \geq 0$ nu este restrictivă. Dacă nu este îndeplinită, se înmulţesc cu -1 ecuaţiile cu termeni liberi negativi.
Fie problema

$$\begin{cases} \inf\left(x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+m}\right) \\ Ax + x^a = b \\ x \geq 0,\ x^a \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

unde $x^a = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$.
$x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ se numesc variabile artificiale.
Matricea problemei (2) este
$(A, I_m) \in \mathcal{M}_{m,m+n}(\mathbb{R}),\ rang(A, I_m) = m < m + n \implies$ problema (2) îndeplineşte condiţiile de la algoritmul simplex primal.
$\begin{cases} x = 0 \\ x^a = b \geq 0 \end{cases}$ este soluţie admisibilă pentru problema (2) şi este chiar soluţia de bază asociată bazei I_m, deoarece componentele ei nenule sunt asociate cu coloane ale lui $I_m \implies I_m$ este bază primal admisibilă pentru problema (2).
$x^a \geq 0 \implies x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+m} \geq 0 \implies$ funcţia obiectiv a problemei (2) este mărginită inferior de 0 pe domeniul admisibil

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow \text{ problema (2) nu are optim infinit}\\ \text{problema (2) are soluţie admisibilă}\\ \text{problema (2) este de optimizare liniară}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ problema (2) are soluţie}$$
optimă.

Aplicăm algoritmul simplex primal pentru problema (2) plecând cu baza I_m şi presupunem că este convergent într-un număr finit de paşi $\Longrightarrow$ se obţine o soluţie optimă de bază $\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{x}^a\end{pmatrix}$ pentru problema (2), asociată unei baze B.

Propoziţia 1. Dacă $\overline{x}_{n+1}+\overline{x}_{n+2}+...+\overline{x}_{n+m}>0$, atunci problema (1) nu are soluţie admisibilă.

Demonstraţie. Reducere la absurd. Presupunem că problema (1) are soluţia admisibilă $\widetilde{x} \Longrightarrow \begin{cases} A\widetilde{x}=b \\ \widetilde{x}\geq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\widetilde{x} \\ x^a=0\end{cases}$ este soluţie admisibilă pentru problema (2), pentru care funcţia obiectiv este $0<\overline{x}_{n+1}+\overline{x}_{n+2}+...+\overline{x}_{n+m}$, contradicţie cu $\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{x}^a\end{pmatrix}$ soluţie optimă pentru problema (2).

Propoziţia 2. Dacă $\overline{x}_{n+1}+\overline{x}_{n+2}+...+\overline{x}_{n+m}=0$ şi
$\mathcal{B}\cap\{n+1,n+2,...,n+m\}=\emptyset$ (adică nu sunt variabile artificiale în bază), atunci B este bază primal admisibilă pentru problema (1).

Demonstraţie. $\overline{x}_{n+i}\geq 0, \forall i=\overline{1,m},\ \sum\limits_{i=1}^{m}\overline{x}_{n+i}=0 \Longrightarrow \overline{x}_{n+i}=0, \forall i=\overline{1,m}$

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow \overline{x} \text{ este soluţie admisibilă pentru problema (1)}\\ \mathcal{B}\cap\{n+1,n+2,...,n+m\}=\emptyset\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{x} \text{ este soluţie}$$
de bază pentru problema (1) asociată lui $B \Longrightarrow B$ este bază primal admisibilă pentru problema (1).

Propoziţia 3. Dacă $\overline{x}_{n+1}+\overline{x}_{n+2}+...+\overline{x}_{n+m}=0$ şi
$\exists i_0\in\mathcal{B}\cap\{n+1,n+2,...,n+m\}$ astfel încât $y^B_{i_0j}=0, \forall j=\overline{1,n}$, atunci

a) $rangA\leq m-1$;

b) ecuaţia i_0-n din sistemul $Ax=b$ este consecinţa celorlalte ecuaţii.

Demonstraţie.

a) $y^B_j=B^{-1}a^j \Longrightarrow a^j=By^B_j=\sum\limits_{i\in\mathcal{B}}a^iy^B_{ij} \overset{y^B_{i_0j}=0}{=} \sum\limits_{i\in\mathcal{B}\setminus\{i_0\}}a^iy^B_{ij}, \forall j=\overline{1,n} \Longrightarrow$ toate coloanele lui A sunt combinaţii liniare de aceiaşi $m-1$ vectori $\Longrightarrow$ $rangA\leq m-1$.

b) $\overline{x}_{n+i}\geq 0, \forall i=\overline{1,m},\ \sum\limits_{i=1}^{m}\overline{x}_{n+i}=0 \Longrightarrow \overline{x}_{n+i}=0, \forall i=\overline{1,m} \Longrightarrow \overline{x}^B_{i_0}=0$.

$x_i=\overline{x}^B_i-\sum\limits_{j\in\mathcal{R}}y^B_{ij}x_j, \forall i\in\mathcal{B} \overset{i_0\in\mathcal{B}}{\Longrightarrow} x_{i_0}=\underbrace{\overline{x}^B_{i_0}}_{=0}-\sum\limits_{j\in\mathcal{R}}y^B_{i_0j}x_j$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{y^B_{i_0j}=0,\forall j=\overline{1,n}}{\Longrightarrow} \quad x_{i_0}=-\displaystyle\sum_{j\in\mathcal{R}\cap\{n+1,n+2,...,n+m\}} y^B_{i_0j}x_j \\ \text{ecuaţia } i_0-n \text{ din problema (2) este } a^T_{i_0-n}x+x_{i_0}=b_{i_0-n} \implies x_{i_0}=b_{i_0-n}-a^T_{i_0-n}x \\ \text{analog } x_j=b_{j-n}-a^T_{j-n}x, \forall j\in\{n+1,n+2,...,n+m\}\end{array}\right\}\implies$$

$b_{i_0-n}-a^T_{i_0-n}x=\displaystyle\sum_{j\in\mathcal{R}\cap\{n+1,n+2,...,n+m\}} y^B_{i_0j}\left(b_{j-n}-a^T_{j-n}x\right) \implies$ ecuaţia i_0-n din sistemul $Ax=b$ este consecinţă a celorlalte ecuaţii.

Metoda celor 2 faze sau a bazei artificiale

Faza I. Se rezolvă problema (2) cu algoritmul simplex primal, plecând cu baza I_m, obţinându-se soluţia optimă $\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{x}^a\end{pmatrix}$ asociată bazei B.

1) $\overline{x}_{n+1}+\overline{x}_{n+2}+...+\overline{x}_{n+m}>0 \implies$ problema (1) nu are soluţie admisibilă.

2) $\overline{x}_{n+1}+\overline{x}_{n+2}+...+\overline{x}_{n+m}=0, \mathcal{B}\cap\{n+1,n+2,...,n+m\}=\emptyset \implies B$ este bază primal admisibilă pentru problema (1).

3) $\overline{x}_{n+1}+\overline{x}_{n+2}+...+\overline{x}_{n+m}=0,\ \mathcal{B}\cap\{n+1,n+2,...,n+m\}\neq\emptyset$.

Dacă $\exists i\in\mathcal{B}\cap\{n+1,n+2,...,n+m\}, j\in\{1,2,...,n\}$ astfel încât $y^B_{ij}\neq 0$, se înlocuieşte în bază coloana a^i cu coloana a^j, obţinându-se o nouă bază B' şi soluţia de bază asociată este tot optimă pentru problema (2) (rezultă din formulele de schimbare a bazei, deoarece $\overline{x}^B_i=0$, deci coloana VVB din tabelul simplex rămâne aceeaşi).

Se repetă aceste eliminări ale variabilelor artificiale din bază.

Fie B_1, baza obţinută la sfârşitul acestor eliminări.

Dacă $\mathcal{B}_1\cap\{n+1,n+2,...,n+m\}=\emptyset$, atunci B_1 este bază primal admisibilă pentru problema (1).

Dacă $\mathcal{B}_1\cap\{n+1,n+2,...,n+m\}=\{i_1,i_2,...,i_p\}$, atunci $rangA=m-p$ şi ecuaţiile $i_1-n,i_2-n,...,i_p-n$ sunt consecinţe ale celorlalte ecuaţii ale problemei (1). Se elimină liniile lui $x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_p}$ din tabelul simplex. Fie B_2, matricea obţinută din B_1 eliminând liniile şi coloanele $i_1-n,i_2-n,...,i_p-n \implies B_2$ este matrice pătrată de ordin $m-p$ şi bază primal admisibilă pentru problema (1).

Faza a II-a. Se rezolvă problema (1) cu algoritmul simplex primal plecând cu baza primal admisibilă determinată la faza I.

Observaţii. 1) În practică se introduc variabile artificiale doar în ecuaţiile care nu conţin variabile care au coloane vectori unitari.

2) Primul tabel simplex de la faza a II-a se obţine din ultimul tabel simplex de la faza I eliminând coloanele variabilelor artificiale şi recalculând linia z în conformitate cu funcţia obiectiv a problemei (1).

2 Seminar 4

Să se rezolve cu metoda celor 2 faze (bazei artificiale):

$$1)\ \begin{cases} \inf\,(2x_1+3x_2) \\ x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_5=1 \\ -2x_1-x_3+x_4=-2 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,5} \end{cases}$$

Rezolvare.

Trebuie ca $b\geq 0$. Înmulţim ultima ecuaţie cu -1.

$$\begin{cases} \inf\left(\overbrace{2x_1+3x_2}^{z}\right) \\ x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_5=1 \\ 2x_1+x_3-x_4=2 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,5} \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Faza I

Introducem câte o variabilă artificială în fiecare ecuaţie care nu conţine o variabilă a cărei coloană în A e vector unitar.

Singura coloană vector unitar din A este a^5. Doar în ecuaţia în care apare x_5 nu introducem variabilă artificială. Funcţia obiectiv este suma variabilelor artificiale.

$$\begin{cases} \inf\left(\overbrace{x_6+x_7+x_8}^{z'}\right) \\ x_1-x_2+x_3+x_6=1 \\ x_1+x_2-x_4+x_7=1 \\ x_1-2x_2+x_5=1 \\ 2x_1+x_3-x_4+x_8=2 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,8} \end{cases}$$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = I_4 = (a^6, a^7, a^5, a^8) \implies B^{-1}b = I_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$$

primal admisibilă.

Se rezolvă cu algoritmul simplex primal.

			0	0	0	0				
c'_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	$\leftarrow x_6$	1	$\boxed{1}$	-1	1	0	0	1	0	0
1	x_7	1	1	1	0	-1	0	0	1	0
0	x_5	1	1	-2	0	0	1	0	0	0
1	x_8	2	2	0	1	-1	0	0	0	1
	z'	4	4	0	2	-2	0	0	0	0

$z_1'^B - c_1' = 4 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

Problema de la faza I nu poate avea optim infinit, deoarece valoarea minimă a funcţiei obiectiv pe domeniul admisibil e 0 ($x_{6,7,8} \geq 0$). La faza I nu mai facem testul de optim infinit.

$\max\{4, 2\} = 4$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right\} = 1 \implies$ oricare din x_5, x_6, x_7, x_8 poate ieşi din bază, dar:

- nu putem trece la faza a II-a dacă nu au fost eliminate din bază toate variabilele artificiale; de aceea, alegerea lui x_5 să iasă din bază nu este economică;

- preferăm calcule cât mai uşoare; de aceea, preferăm să iasă x_6 sau x_7, cu pivotul 1, decât x_8, cu pivotul 2.

Alegem pe x_6 să iasă din bază.

Dacă avem 0 pe linia (respectiv coloana) pivotului, coloana (respectiv linia) corespunzătoare se copiază. Aici, coloana lui x_4 se copiază.

VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1	1	-1	1	0	0	1	0	0
$\leftarrow x_7$	0	0	$\boxed{2}$	-1	-1	0	-1	1	0
x_5	0	0	-1	-1	0	1	-1	0	0
x_8	0	0	2	-1	-1	0	-2	0	1
z'	0	0	4	-2	-2	0	-4	0	0

$z_2'^B - c_2' = 4 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

Acest tabel arată că testul de optim este doar o condiţie suficientă de optim, dar nu şi necesară, deoarece valoarea funcţiei obiectiv este 0, minimul posibil.

$\max\{4\} = 4$ atins pe coloana lui $x_2 \implies x_2$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{0}{2},\frac{0}{2}\right\}=0 \implies$ oricare din x_7 şi x_8 poate ieşi din bază; alegem pe x_7.

Coloana VVB se copiază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_5	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_8	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1
z'	0	0	0	0	0	0	-2	-2	0

$z'^B_j - c'_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.

$\overline{z}'^B = 0 \implies$ problema iniţială are soluţie admisibilă.

Variabila artificială x_8 este de bază şi nu se poate înlocui cu o variabilă iniţială deoarece $y^B_{8j}=0, j=\overline{1,5} \implies$ ecuaţia în care a fost introdus x_8 este consecinţă a celorlalte (într-adevăr, ecuaţia 4 este suma primelor 2 ecuaţii). O eliminăm din problemă şi eliminăm linia lui x_8 din tabel.

Faza a II-a

Primul tabel simplex de la faza a II-a se obţine din ultimul tabel simplex de la faza I eliminând coloanele variabilelor artificiale şi recalculând linia z în conformitate cu funcţia obiectiv iniţială.

					0	0	
c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
3	x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
0	x_5	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
	z	2	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0

$z^B_j - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ soluţie optimă $x_1^*=1, x_2^*=x_3^*=x_4^*=x_5^*=0$, valoarea optimă 2.

$$2)\ \begin{cases} \inf\,(2x_1+3x_2) \\ x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_5=1 \\ -2x_1-x_3+x_4=-1 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,5} \end{cases}.$$

Rezolvare.

Trebuie ca $b \geq 0$. Înmulţim ultima ecuaţie cu -1.

$$\begin{cases} \inf\left(\overbrace{2x_1+3x_2}^{z}\right) \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Faza I

$$\begin{cases} \inf\left(\overbrace{x_6+x_7+x_8}^{z'}\right) \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + x_8 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,8} \end{cases}$$

$$B = I_4 = (a^6, a^7, a^5, a^8) \implies B^{-1}b = I_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$$

primal admisibilă.

			0	0	0	0				
c'_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	x_6	1	1	-1	1	0	0	1	0	0
1	x_7	1	1	1	0	-1	0	0	1	0
0	x_5	1	1	-2	0	0	1	0	0	0
1	$\leftarrow x_8$	1	$\boxed{2}$	0	1	-1	0	0	0	1
	z'	3	4	0	2	-2	0	0	0	0

$z_1'^B - c_1' = 4 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.
$\max\{4, 2\} = 4$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$ atins pe linia lui $x_8 \implies x_8$ iese din bază.
Coloana lui x_2 se copiază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_6	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
x_7	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{1}{2}$	0	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
z'	1	0	0	0	0	0	0	0	-2

$z_j'^B - c_j' \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.
$\overline{z}'^B = 1 > 0 \implies$ problema iniţială nu are soluţie admisibilă.

3) $\begin{cases} \inf(-x_1 - x_2) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$

Rezolvare.

$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$

Faza I

Deoarece $a^3 = e^1$, vector unitar, introducem o variabilă artificială doar în ecuaţia a 2-a.

$$\begin{cases} \inf\left(\overbrace{x_4}^{z'}\right) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$B = I_2 = (a^3, a^4) \implies B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

			0	0		
c'_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
0	x_3	4	1	-2	1	0
1	$\leftarrow x_4$	0	$\boxed{1}$	-1	0	1
	z'	0	1	-1	0	0

$z_1'^B - c_1' = 1 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

La faza I nu facem testul de optim infinit.

$\max\{1\} = 1$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{0}{1}\right\} = 0$ atins pe linia lui $x_4 \implies x_4$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	4	0	-1	1	-1
x_1	0	1	-1	0	1
z'	0	0	0	0	-1

$z_j'^B - c_j' \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.

$\overline{z}'^B = 0.$

Nu mai sunt variabile artificiale în bază.

Faza a II-a

				-1	
c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3
0	x_3	4	0	-1	1
-1	x_1	0	1	-1	0
	z	0	0	2	0

$z_2^B - c_2 = 2 \not\leq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$\exists 2 \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_2^B - c_2 = 2 > 0$ şi $y_2^B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0 \implies$ problema are optim infinit.

Cercetări operaţionale 5

Cristian Niculescu

1 Curs 5

1.1 Degenerare şi ciclare

Fie problema:

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \ rangA = m < n, \ P \neq \emptyset. \tag{1}$$

$B \to \widetilde{B}$ înlocuind a^r cu $a^k \implies$
$\overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B - \frac{(z_k^B - c_k)\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B}$ cu $z_k^B - c_k > 0, \overline{x}_r^B \geq 0, y_{rk}^B > 0$.
Situaţii:
1) $\overline{x}_r^B = 0 \implies \overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B$.
2) $\overline{x}_r^B > 0 \implies \overline{z}^{\widetilde{B}} < \overline{z}^B$.
Probleme:
nedegenerate - au toate soluţiile de bază nedegenerate;
degenerate - au cel puţin o soluţie de bază degenerată.
Pentru problemele nedegenerate avem numai situaţia 2) (funcţia obiectiv descreşte strict). Deoarece sunt cel mult C_n^m baze, algoritmul simplex primal este convergent într-un număr finit de paşi.
Pentru problemele degenerate este posibilă situaţia 1).
Este posibil $B_1 \to B_2 \to ... \to B_q$ şi $\overline{z}^{B_1} = \overline{z}^{B_2} = ... = \overline{z}^{B_q}$. Dacă $B_q \to B_1$, atunci $\{B_1, B_2, ..., B_q\}$ este parcursă în mod ciclic (apare fenomenul de ciclare în algoritmul simplex).

1.1.1 Metoda perturbării

Pentru a evita ciclarea se poate modifica (perturba) problema degenerată în termenul liber, transformând-o în una nedegenerată.

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b(\varepsilon) \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

$b(\varepsilon) = b + \sum\limits_{j=1}^{n} a^j \varepsilon^j, \ \varepsilon > 0.$

Propoziţia 1. $B_0 = (a^1, a^2, ..., a^m)$ bază primal admisibilă pentru problema (1) $\Longrightarrow$ $\exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât soluţia de bază în problema (2) asociată lui B_0 este nedegenerată, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Demonstraţie. $\overline{x}^{B_0}(\varepsilon) := B_0^{-1} b(\varepsilon)$.

$\overline{x}^{B_0} = B_0^{-1} b$.

$\Longrightarrow \ \overline{x}^{B_0}(\varepsilon) = B_0^{-1} \left(b + \sum\limits_{j=1}^{n} a^j \varepsilon^j \right) = \overline{x}^{B_0} + \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^{B_0} \varepsilon^j.$

Dacă $j \in \{1, 2, ..., m\} \ \Longrightarrow \ y_j^{B_0}$ vector unitar (cu 1 pe locul j şi 0 în rest)

$\Longrightarrow \ \overline{x}_i^{B_0}(\varepsilon) = \overline{x}_i^{B_0} + \varepsilon^i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} y_{ij}^{B_0} \varepsilon^j = \overline{x}_i^{B_0} + \varepsilon^i \left(1 + \sum\limits_{j=m+1}^{n} y_{ij}^{B_0} \varepsilon^{j-i} \right).$

B_0 bază primal admisibilă pentru problema (1) $\Longrightarrow \ \overline{x}_i^{B_0} \geq 0$.

$\varepsilon^i > 0$.

$1 + \sum\limits_{j=m+1}^{n} y_{ij}^{B_0} \varepsilon^{j-i} > 0$ pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic (rezultă din continuitatea în 0 a membrului stâng, considerat ca funcţie de ε).

$\Longrightarrow \ \forall i \in \{1, 2, ..., m\}, \exists \varepsilon_i > 0$ suficient de mic astfel încât $\overline{x}_i^{B_0}(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_i)$.

Fie $\varepsilon_0 = \min\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i \ \Longrightarrow \ \overline{x}^{B_0}(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, q.e.d.

Propoziţia 2. Fie B bază primal admisibilă pentru problema (1) şi $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $y_k^B \nleq 0$. Dacă $\exists \varepsilon_B > 0$ astfel încât soluţia de bază în problema (2) asociată lui B este nedegenerată $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_B)$, atunci $\exists \varepsilon' > 0$ astfel încât $\min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B(\varepsilon)}{y_{ik}^B} = \frac{\overline{x}_r^B(\varepsilon)}{y_{rk}^B}$, cu r unic, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon')$.

Demonstraţie. r este unic $\Longleftarrow \frac{\overline{x}_i^B(\varepsilon)}{y_{ik}^B} \neq \frac{\overline{x}_j^B(\varepsilon)}{y_{jk}^B}, \forall i \neq j$ astfel încât $y_{ik}^B, y_{jk}^B > 0$.

Fie $i \neq j$ astfel încât $y_{ik}^B, y_{jk}^B > 0$.

$\overline{x}^B(\varepsilon) = \overline{x}^B + \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^B \varepsilon^j.$

$\frac{\overline{x}_i^B(\varepsilon)}{y_{ik}^B} \neq \frac{\overline{x}_j^B(\varepsilon)}{y_{jk}^B} \ \Longleftrightarrow$

$$\frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} - \frac{\overline{x}_j^B}{y_{jk}^B} + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{y_{is}^B}{y_{ik}^B} - \frac{y_{js}^B}{y_{jk}^B} \right) \varepsilon^s \neq 0. \tag{3}$$

Dacă $\frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} - \frac{\overline{x}_j^B}{y_{jk}^B} \neq 0$, alegând $\varepsilon > 0$ suficient de mic $\Longrightarrow$ (3) îndeplinită.

Dacă $\frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} - \frac{\overline{x}_j^B}{y_{jk}^B} = 0$ şi $\exists t$ astfel încât $\frac{y_{is}^B}{y_{ik}^B} - \frac{y_{js}^B}{y_{jk}^B} = 0, \forall s = \overline{1, t-1}$ şi $\frac{y_{it}^B}{y_{ik}^B} - \frac{y_{jt}^B}{y_{jk}^B} \neq 0$, atunci (3) $\iff$

$$\sum_{s=t}^{n}\left(\frac{y_{is}^B}{y_{ik}^B}-\frac{y_{js}^B}{y_{jk}^B}\right)\varepsilon^{s-t}\neq 0. \qquad (4)$$

Alegând $\varepsilon > 0$ suficient de mic $\implies$ (4) îndeplinită.
Dacă $\frac{y_{is}^B}{y_{ik}^B}-\frac{y_{js}^B}{y_{jk}^B}=0, \forall s=\overline{1,n} \implies \frac{y_{is}^B}{y_{ik}^B}-\frac{y_{js}^B}{y_{jk}^B}=0, \forall s=\overline{1,m} \implies B^{-1}B_0$ are liniile i şi j proporţionale, contradicţie cu $B^{-1}B_0$ inversabilă.
$\implies \forall i\neq j$ cu $y_{ik}^B, y_{jk}^B>0, \exists \varepsilon_{ij}>0$ astfel încât (3) are loc, $\forall \varepsilon\in(0,\varepsilon_{ij})$.
$\varepsilon' := \min\left\{\varepsilon_{ij} | i\neq j \text{ cu } y_{ik}^B, y_{jk}^B>0\right\} \implies r$ unic, $\forall \varepsilon\in(0,\varepsilon')$.
Observaţie. $\widetilde{B}$ obţinută din B înlocuind a^r cu a^k este primal admisibilă şi soluţia de bază asociată din problema (2) este nedegenerată, $\forall \varepsilon\in(0,\varepsilon')$.
$\mathcal{B}_0=\left\{i \,\middle|\, \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}=\min\limits_{y_{jk}^B>0}\frac{\overline{x}_j^B}{y_{jk}^B}\right\}$.
$card\,(\mathcal{B}_0)=1 \implies \mathcal{B}_0=\{r\}$.
$card\,(\mathcal{B}_0)\geq 2 \implies \mathcal{B}_1=\left\{i\in\mathcal{B}_0 \,\middle|\, \frac{y_{i1}^B}{y_{ik}^B}=\min\limits_{j\in\mathcal{B}_0}\frac{y_{j1}^B}{y_{jk}^B}\right\}$.
$card\,(\mathcal{B}_1)=1 \implies \mathcal{B}_1=\{r\}$.
$card\,(\mathcal{B}_1)\geq 2 \implies \mathcal{B}_2=...$
$\mathcal{B}_t=\left\{i\in\mathcal{B}_{t-1} \,\middle|\, \frac{y_{it}^B}{y_{ik}^B}=\min\limits_{j\in\mathcal{B}_{t-1}}\frac{y_{jt}^B}{y_{jk}^B}\right\}$.
$\mathcal{B}_0\supseteq\mathcal{B}_1\supseteq...\supseteq\mathcal{B}_t\supseteq...$
Din demonstraţia propoziţiei 2 $\implies$ şirul se termină cu o mulţime cu un singur element $\implies \{r\}$.
Modificarea algoritmului simplex primal în caz de ciclare
Pasul 0. Se determină o bază primal admisibilă iniţială formată cu primele m coloane din A (renumerotând eventual variabilele).
Pasul 3. Criteriul de ieşire din bază: $r\in\mathcal{B}$ astfel încât
$\mathcal{B}_0\supseteq\mathcal{B}_1\supseteq...\supseteq\mathcal{B}_t=\{r\}$.

1.1.2 Regula lui Bland

În algoritmul simplex primal:
a) Criteriul de intrare în bază:
$k\in\mathcal{R}$ astfel încât $k=\min\{j\in\mathcal{R} | z_j^B-c_j>0\} \implies a^k$ intră în bază.
b) Criteriul de ieşire din bază:
$r_0\in\mathcal{B}$ astfel încât $r_0=\min\left\{r\in\mathcal{B} \,\middle|\, \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B}=\min\limits_{y_{ik}^B>0}\frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}\right\} \implies a^{r_0}$ iese din bază.
Aplicarea regulii lui Bland evită ciclarea.
Demonstraţie. Reducere la absurd. Presupunem că apare ciclarea. În timpul ciclării, un număr finit de variabile intră şi ies din bază. Fiecare

din aceste variabile intră în bază cu valoarea 0 şi valoarea funcţiei obiectiv nu se schimbă. Eliminând toate liniile şi coloanele care nu conţin pivoţi în timpul unui ciclu, obţinem o nouă problemă de optimizare liniară, care de asemenea ciclează. Presupunem că matricea acestei probleme reduse de optimizare liniară are m linii şi n coloane. Considerăm iteraţia în care coloana a^n iese din bază, fiind înlocuită de coloana a^p. Fără a pierde din generalitate, putem presupune că baza este formată din ultimele m coloane ale matricei A. Tabelul simplex corespunzător este

VB	VVB	x_1	...	x_p	...	x_{n-m+1}	...	x_n
x_{n-m+1}	0			≤ 0		1		0
x_{n-m+2}	0			≤ 0		0		0
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_n	0			> 0		0		1
z	0			> 0		0		0

Putem defini problema redusă de optimizare liniară în termenii acestui tabel, adică $B = (a^{n-m+1}, a^{n-m+2}, ..., a^n) = I_m,\ A = (a^1, a^2, ..., a^n)$ cu
$a^j = y_j^B, \forall j = \overline{1,n},\ b = \overline{x}^B = 0,\ \ -c_j = z_j^B - c_j, \forall j = \overline{1,n}$. În acest tabel pivotul este $a_{mp} > 0$. Din b), a^n iese din bază numai dacă nu sunt egalităţi la testul rapoartelor şi deoarece $b = 0$ (pentru că toate liniile sunt în ciclu) $\Longrightarrow\ a_{ip} \leq 0, \forall i \neq m$.
Mai avem $a^{n-m+i} = e^i, \forall i = \overline{1,m},\ c_{n-m+i} = 0, \forall i = \overline{1,m},\ c_p < 0$.
Acum considerăm iteraţia când a^n reintră în bază.
Din a) $\Longrightarrow\ z_n^{\overline{B}} - c_n > 0$ şi $z_j^{\overline{B}} - c_j \leq 0, \forall j \neq n$.
Fie $u_{\overline{B}}^T = c_{\overline{B}}^T \overline{B}^{-1} \Longrightarrow z_j^{\overline{B}} - c_j = u_{\overline{B}}^T a^j - c_j, \forall j = \overline{1,n}$.
$i \in \{1, 2, ..., m-1\},\ j = n-m+i \Longrightarrow 0 \geq z_j^{\overline{B}} - \underbrace{c_j}_{=0} = u_{\overline{B}}^T a^j = u_{\overline{B}}^T e^i = (u_{\overline{B}})_i$

$\Longrightarrow\ (u_{\overline{B}})_i \leq 0, \forall i = \overline{1, m-1}$.
$0 < z_n^{\overline{B}} - \underbrace{c_n}_{=0} = u_{\overline{B}}^T a^n = u_{\overline{B}}^T e^m = (u_{\overline{B}})_m \Longrightarrow (u_{\overline{B}})_m > 0$.

$z_p^{\overline{B}} - c_p = u_{\overline{B}}^T a^p - c_p = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \underbrace{(u_{\overline{B}})_i}_{\leq 0} \underbrace{a_{ip}}_{\leq 0} + \underbrace{(u_{\overline{B}})_m}_{>0} \underbrace{a_{mp}}_{>0} - \underbrace{c_p}_{<0} > 0$, contradicţie cu $z_j^{\overline{B}} - c_j \leq 0, \forall j \neq n$.

2 Seminar 5

Să se rezolve:

$$\begin{cases} \inf\left(-\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7\right) \\ x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\ x_3 + x_6 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Rezolvare.

$B = (a^1, a^2, a^3) = I_3$.

$$B^{-1}b = I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B \text{ primal admisibilă.}$$

I)

						$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6
c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	$\overset{\downarrow}{x_4}$	x_5	x_6	x_7
0	$\leftarrow x_1$	0	1	0	0	$\boxed{\frac{1}{4}}$	-8	-1	9
0	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
0	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
	z	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6

$z_4^B - c_4 = \frac{3}{4} \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} y_4^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ z_5^B - c_5 = -20 \ngtr 0 \\ y_6^B = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ z_7^B - c_7 = -6 \ngtr 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{3}{4}$ atins pe coloana lui $x_4 \implies x_4$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{0}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$ atins pe liniile lui x_1 şi $x_2 \implies$ oricare din x_1 şi x_2 pot ieşi din bază. Alegem x_1 să iasă din bază.

II)

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overset{\downarrow}{x_5}$	x_6	x_7
x_4	0	4	0	0	1	-32	-4	36
$\leftarrow x_2$	0	-2	1	0	0	$\boxed{4}$	$\frac{3}{2}$	-15
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
z	0	-3	0	0	0	4	$\frac{7}{2}$	-33

$z_5^B - c_5 = 4 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} z_1^B - c_1 = -3 \not> 0 \\ y_5^B = \begin{pmatrix} -32 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ y_6^B = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ z_7^B - c_7 = -33 \not> 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{4, \frac{7}{2}\right\} = 4$ atins pe coloana lui $x_5 \implies x_5$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{4}\right\} = 0$ atins pe linia lui $x_2 \implies x_2$ iese din bază.

III)

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\downarrow$ x_6	x_7
$\leftarrow x_4$	0	-12	8	0	1	0	$\boxed{8}$	-84
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
z	0	-1	-1	0	0	0	2	-18

$z_6^B - c_6 = 2 \not\leq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} z_1^B - c_1 = -1 \not> 0 \\ z_2^B - c_2 = -1 \not> 0 \\ y_6^B = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{3}{8} \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ z_7^B - c_7 = -18 \not> 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\{2\} = 2$ atins pe coloana lui $x_6 \implies x_6$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{8}, \frac{0}{\frac{3}{8}}, \frac{1}{1}\right\} = 0$ atins pe liniile lui x_4 şi $x_5 \implies$ oricare dintre x_4 şi x_5 poate ieşi din bază. Alegem x_4 să iasă din bază.

IV)

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\downarrow$ x_7
x_6	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$
$\leftarrow x_5$	0	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\boxed{\frac{3}{16}}$
x_3	1	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$
z	0	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3

$z_1^B - c_1 = 2 \not\leq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} y_1^B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ z_2^B - c_2 = -3 \not> 0 \\ z_4^B - c_4 = -\frac{1}{4} \not> 0 \\ y_7^B = \begin{pmatrix} -\frac{21}{2} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{21}{2} \end{pmatrix} \not\leq 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\{2,3\} = 3$ atins pe coloana lui $x_7 \implies x_7$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{\frac{3}{16}}, \frac{1}{\frac{21}{2}}\right\} = 0$ atins pe linia lui $x_5 \implies x_5$ iese din bază.

V)

VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\leftarrow x_6$	0	$\boxed{2}$	-6	0	$-\frac{5}{2}$	56	1	0
x_7	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1
x_3	1	-2	6	1	$\frac{5}{2}$	-56	0	0
z	0	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	-16	0	0

$z_1^B - c_1 = 1 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} y_1^B = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ -2 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ z_2^B - c_2 = -1 \ngtr 0 \\ y_4^B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \nleq 0 \\ z_5^B - c_5 = -16 \ngtr 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = 1$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{2}, \frac{1}{\frac{1}{3}}\right\} = 0$ atins pe liniile lui x_6 şi $x_7 \implies$ oricare dintre x_6 şi x_7 poate ieşi din bază. Alegem x_6 să iasă din bază.

VI)

VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	-3	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0
$\leftarrow x_7$	0	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	$\frac{1}{6}$	-1	$-\frac{1}{6}$	1
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
z	0	0	2	0	$\frac{7}{4}$	-14	$-\frac{1}{2}$	0

$z_2^B - c_2 = 2 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} y_2^B = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ y_4^B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ z_5^B - c_5 = -14 \ngtr 0 \\ z_6^B - c_6 = -\frac{1}{2} \ngtr 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{2, \frac{7}{4}\right\} = 2$ atins pe coloana lui $x_2 \implies x_2$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{\frac{1}{3}}\right\} = 0$ atins pe linia lui $x_7 \implies x_7$ iese din bază.
$\implies B = (a^1, a^2, a^3) \implies$ obţinem din nou tabelul I). Algoritmul ciclează. Evităm ciclarea folosind metoda perturbării sau regula lui Bland.

Cu metoda perturbării:
Pasul 0. Rezolvarea a început cu $B = (a^1, a^2, a^3)$, bază primal admisibilă.
La tabelul I), $\min\left\{\frac{0}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$ atins pe liniie lui x_1 şi x_2 $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}_0 = \{1, 2\}$
$\min\left\{\frac{1}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$ atins pe linia lui x_2 $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}_1 = \{2\}$ $\Longrightarrow$ x_2 iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	$\overset{\downarrow}{x_4}$	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9
$\leftarrow x_2$	0	0	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
z	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overset{\downarrow}{x_6}$	x_7
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{15}{2}$
x_4	0	0	2	0	1	-24	-1	6
$\leftarrow x_3$	1	0	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0
z	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{21}{2}$

$z_6^B - c_6 = \frac{5}{4} \not\leq 0$ $\Longrightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} z_2^B - c_2 = -\frac{3}{2} \not> 0 \\ z_5^B - c_5 = -2 \not> 0 \\ y_6^B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ z_7^B - c_7 = -\frac{21}{2} \not> 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{\frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4}$ atins pe coloana lui x_6 $\Longrightarrow$ x_6 intră în bază.
$\min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1$ atins pe linia lui x_3 $\Longrightarrow$ x_3 iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$
x_4	1	0	2	1	1	-24	0	6
x_6	1	0	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0
z	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$ $\Longrightarrow$
soluţie optimă $x_1^* = \frac{3}{4},\ x_4^* = 1,\ x_6^* = 1,\ x_2^* = x_3^* = x_5^* = x_7^* = 0$,
valoarea optimă $= -\frac{5}{4}$.

Cu regula lui Bland:
La tabelul I)
$\min\{4, 6\} = 4$ $\Longrightarrow$ x_4 intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$ atins pe liniile lui x_1 şi x_2; $\min\{1, 2\} = 1$ $\Longrightarrow$ x_1 iese din bază $\Longrightarrow$ tabelul II).

La tabelul II)
$\min\{5,6\} = 5 \implies x_5$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{4}\right\} = 0$ atins pe linia lui $x_2 \implies x_2$ iese din bază $\implies$ tabelul III).
La tabelul III)
$\min\{6\} = 6 \implies x_6$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{8}, \frac{0}{\frac{3}{8}}, \frac{1}{1}\right\} = 0$ atins pe liniile lui x_4 şi x_5; $\min\{4,5\} = 4 \implies x_4$ iese din bază $\implies$ tabelul IV).
La tabelul IV)
$\min\{1,7\} = 1 \implies x_1$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{0}{\frac{1}{16}}, \frac{1}{\frac{3}{2}}\right\} = 0$, atins pe linia lui $x_5 \implies x_5$ iese din bază.

VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$
$\leftarrow x_5$	0	$\boxed{\frac{1}{16}}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$
x_3	1	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$
z	0	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3

VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	0	0	-2	0	-1	24	1	-6
x_1	0	1	-2	0	$-\frac{3}{4}$	16	0	3
$\leftarrow x_3$	1	0	$\boxed{2}$	1	1	-24	0	6
z	0	0	1	0	$\frac{5}{4}$	-32	0	-3

$z_2^B - c_2 = 1 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} y_2^B = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ y_4^B = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0 \\ z_5^B - c_5 = -32 \ngtr 0 \\ z_7^B - c_7 = -3 \ngtr 0 \end{array}\right\} \implies \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\min\{2,4\} = 2 \implies x_2$ intră în bază.
$\min\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$ atins pe linia lui $x_3 \implies x_3$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	$\overset{\downarrow}{x_4}$	x_5	x_6	x_7
x_6	1	0	0	1	0	0	1	0
x_1	1	1	0	1	$\frac{1}{4}$	-8	0	9
$\leftarrow x_2$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	-12	0	3
z	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-20	0	-6

$z_4^B - c_4 = \frac{3}{4} \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} z_3^B - c_3 = -\frac{1}{2} \not> 0 \\ y_4^B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \not\leq 0 \\ z_5^B - c_5 = -20 \not> 0 \\ z_7^B - c_7 = -6 \not> 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\min\{4\} = 4 \implies x_4$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{1}{\frac{1}{4}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = 1$ atins pe linia lui $x_2 \implies x_2$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	1	0	0	1	0	0	1	0
x_1	$\frac{3}{4}$	1			0		0	
x_4	1	0	2	1	1	-24	0	6
z	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	-6

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$
soluţie optimă $x_1^* = \frac{3}{4},\ x_4^* = 1,\ x_6^* = 1,\ x_2^* = x_3^* = x_5^* = x_7^* = 0$,
valoarea optimă $= -\frac{5}{4}$.

Cercetări operaţionale 6

Cristian Niculescu

1 Curs 6

1.1 Mulţimea soluţiilor optime

Fie problema

$$\begin{cases} \inf\left(c^T x\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ rangA = m < n. \tag{1}$$

Reamintim:
$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ este domeniul admisibil.
$P^* = \{x^* \in P | c^T x^* = \inf\limits_{x \in P} c^T x\}$ este mulţimea soluţiilor optime.
Situaţii posibile:
1) $P = \emptyset \implies P^* = \emptyset$.
2) $P \neq \emptyset,\ \inf\limits_{x \in P} c^T x = -\infty \implies P^* = \emptyset$
3) $P^* \neq \emptyset$; algoritmul simplex primal dă o soluţie optimă de bază.
Propoziţia 1. Fie B bază primal admisibilă pentru problema (1) astfel încât $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
Atunci $x \in P^* \iff x \in P$ şi $x_j\left(z_j^B - c_j\right) = 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
Demonstraţie. B primal admisibilă, $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \overset{\text{TO}}{\implies} \overline{z}^B$ este valoarea optimă.
$(\implies)$ $x \in P^* \implies x \in P$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in P^* \implies c^T x = \overline{z}^B \\ c^T x = \overline{z}^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} x_j\left(z_j^B - c_j\right) \end{array}\right\} \implies \sum_{j \in \mathcal{R}} \underbrace{x_j}_{\geq 0} \underbrace{\left(z_j^B - c_j\right)}_{\leq 0} = 0 \implies$$

$x_j\left(z_j^B - c_j\right) = 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
$(\impliedby) x_j\left(z_j^B - c_j\right) = 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies c^T x = \overline{z}^B \overset{x \in P}{\implies} x \in P^*$.
Testul de unicitate. Fie B bază primal admisibilă pentru problema (1). Condiţia necesară şi suficientă pentru ca soluţia de bază asociată lui B să fie unica soluţie optimă este $z_j^B - c_j < 0, \forall j \in \mathcal{R}$. Pentru necesitate se presupune

în plus că soluţia de bază este nedegenerată.
Demonstraţie. Necesitatea.
1) Arătăm că $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
Reducere la absurd. Presupunem $\exists k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k > 0$.
Dacă $y_k^B \leq 0 \implies$ problema (1) are optim infinit $\implies P^* = \emptyset$, contradicţie.
Dacă $y_k^B \nleq 0 \implies B \to \widetilde{B}$ înlocuind o coloană a^r cu a^k. Noua valoare a funcţiei obiectiv este $\overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B - \dfrac{\overbrace{(z_k^B - c_k)}^{>0}\overbrace{\overline{x}_r^B}^{>0}}{\underbrace{y_{rk}^B}_{>0}} < \overline{z}^B$, contradicţie cu $\overline{z}^B$ valoare optimă.
2) Arătăm că $z_j^B - c_j < 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
Reducere la absurd. Presupunem $\exists k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k = 0$.
Fie $\alpha \in \mathbb{R}_+$ şi $x(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ definit astfel:

$$x_i(\alpha) = \begin{cases} \overline{x}_i^B - \alpha y_{ik}^B, i \in \mathcal{B} \\ \alpha, i = k \\ 0, i \in \mathcal{R} \setminus \{k\} \end{cases}$$

a) Dacă $y_k^B \leq 0 \implies x(\alpha) \in P, \forall \alpha \geq 0$ (din demonstraţia testului de optim infinit).
$x(\alpha)$ este distinctă de soluţia de bază asociată lui $B, \forall \alpha > 0$.
$c^T x(\alpha) = \overline{z}^B - \underbrace{(z_k^B - c_k)}_{=0} \alpha = \overline{z}^B \implies x(\alpha)$ este o altă soluţie optimă, contradicţie cu unicitatea soluţiei optime.
b) Dacă $y_k^B \nleq 0 \implies \alpha_0 = \min\limits_{i | y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} > 0$ (deoarece soluţia este nedegenerată) $\implies x(\alpha_0)$ este soluţie optimă distinctă de soluţia de bază asociată lui B, contradicţie cu unicitatea soluţiei optime. (Admisibilitatea lui $x(\alpha_0)$ s-a demonstrat la teorema de schimbare a bazei.)
Suficienţa.
$z_j^B - c_j < 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \overset{\text{TO}}{\implies}$ soluţia de bază asociată lui B este soluţie optimă.
Fie x^* soluţie optimă $\overset{\text{propoziţia 1}}{\implies}$
$x_j^* \underbrace{(z_j^B - c_j)}_{<0} = 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies x_j^* = 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ componentelor nenule ale lui x^* le corespund coloane ale lui $B \implies x^*$ este soluţia de bază asociată bazei $B \implies$ această soluţie de bază este unica soluţie optimă.

2 Seminar 6

1) Să se afle mulţimea soluţiilor optime:

$$\begin{cases} \inf(x_1 + x_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$B = (a^3, a^4) = I_2 \implies B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

			1	1		
c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	6	2	1	1	0
0	x_4	3	3	1	0	1
	z	0	-1	-1	0	0

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.
$z_j^B - c_j < 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ soluţia optimă este unică $\implies$ mulţimea soluţiilor optime este $P^* = \{(0, 0, 6, 3)^T\}$, iar valoarea optimă este 0.

2) Să se afle mulţimea soluţiilor optime:

$$\begin{cases} \inf(-3x_1 - x_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$B = (a^3, a^4) = I_2 \implies B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

			-3	-1		
c_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
0	x_3	6	2	1	1	0
0	$\leftarrow x_4$	3	$\boxed{3}$	1	0	1
	z	0	3	1	0	0

$z_1^B - c_1 = 3 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$y_1^B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \nleq 0, y_2^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0 \implies$ testul de optim infinit nu este îndeplinit.

$\max(3,1) = 3 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left(\frac{6}{2}, \frac{3}{3}\right) = 1 \implies x_4$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	4	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
x_1	1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
z	-3	0	0	0	-1

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.

Testul de unicitate: $z_j^B - c_j < 0, \forall j \in \mathcal{R}$.

$z_2^B - c_2 = 0, 2 \in \mathcal{R} \implies$ soluţia optimă nu este unică.

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ primal admisibilă} \\ z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \end{array}\right\} \implies$$

x soluţie optimă

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x \text{ soluţie admisibilă} \iff \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{array}\right. \\ x_j\left(z_j^B - c_j\right) = 0, \forall j \in \mathcal{R} \iff \left\{\begin{array}{l} x_2 \cdot 0 = 0 \\ x_4 \cdot (-1) = 0 \end{array}\right\} \iff x_4 = 0 \end{array}\right\} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \\ x_4 = 0 \end{array}\right.$$

$$x_1 = \lambda \geq 0 \implies \left\{\begin{array}{l} x_2 = 3 - 3\lambda \geq 0 \implies \lambda \leq 1 \\ x_3 = 6 - 2\lambda - (3 - 3\lambda) = \lambda + 3 \geq 0 \implies \lambda \geq -3 \end{array}\right\} \implies$$

mulţimea soluţiilor optime este $P^* = \left\{(\lambda, 3-3\lambda, \lambda+3, 0)^T \,|\lambda \in [0,1]\right\}$, valoarea optimă este -3.

Această metodă se poate folosi mereu, spre deosebire de cea în care se determină toate soluţiile optime de bază şi se scrie mulţimea soluţiilor optime ca acoperirea convexă a mulţimii soluţiilor optime de bază, care se poate folosi numai când mulţimea soluţiilor optime e mărginită.

3) Să se afle mulţimea soluţiilor optime:

$$\left\{\begin{array}{l} \inf(x_1 - x_2 - x_3) \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,5} \end{array}\right.$$

$B = (a^3, a^5) = I_2 \implies B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

			1	-1		0	
c^B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_3	1	-1	1	1	1	0
0	x_5	1	-1	-1	0	0	1
	z	-1	0	0	0	-1	0

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.
$1 \in \mathcal{R}$ şi $z_1^B - c_1 = 0 \implies$ soluţia optimă nu este unică.
$x \in P^* \iff x \in P$ şi $x_j \left(z_j^B - c_j\right) = 0, \forall j \in \mathcal{R} \iff$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,5} \end{cases} \text{şi} \begin{cases} x_1 \cdot 0 = 0 \\ x_2 \cdot 0 = 0 \\ x_4 \cdot (-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ x_4 = 0 \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,2,3,5\} \end{cases}$$

$x_1 = \alpha \geq 0,\ x_2 = \beta \geq 0 \implies x_3 = \alpha - \beta + 1 \geq 0,\ x_5 = \alpha + \beta + 1 \geq 0$
$\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \implies \alpha + \beta + 1 \geq 0.$
$\implies$ mulţimea soluţiilor optime este
$P^* = \left\{(\alpha, \beta, \alpha - \beta + 1, 0, \alpha + \beta + 1)^T | \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha - \beta + 1 \geq 0\right\}$, iar valoarea optimă este -1.

Cercetări operaţionale 7

Cristian Niculescu

1 Curs 7

1.1 Algoritmul simplex revizuit

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ unde } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), rangA = m < n. \tag{1}$$

Pasul 0. Determină o bază primal admisibilă B, calculează
$B^{-1},\ u_B^T = c_B^T B^{-1},\ \overline{x}^B = B^{-1}b,\ \overline{z}^B = c_B^T \overline{x}^B$.
Pasul 1. Calculează $z_j^B - c_j = u_B^T a^j - c_j, \forall j \in \mathcal{R}$.
Testul de optim: $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ este soluţie optimă, iar $\overline{z}^B$ este valoarea optimă, STOP.
Altfel, mergi la pasul 2.
Pasul 2. Criteriul de intrare în bază: $k \in \mathcal{R}$ astfel încât
$z_k^B - c_k = \max\left\{z_j^B - c_j | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0\right\} \implies a^k$ intră în bază.
Calculează $y_k^B = B^{-1}a^k$.
Testul de optim infinit: $y_k^B \leq 0 \implies$ problema are optim infinit, STOP.
Altfel, mergi la pasul 3.
Pasul 3. Criteriul de ieşire din bază: $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} \implies$ a^r iese din bază.
Fie $\widetilde{B}$, baza obţinută înlocuind a^r cu a^k.
Calculează $\widetilde{B}^{-1},\ u_{\widetilde{B}},\ \overline{x}^{\widetilde{B}},\ \overline{z}^{\widetilde{B}}$.
Mergi la pasul 1 înlocuind B cu $\widetilde{B}$.

Forma completată a problemei este:

$$\begin{cases} \inf(x_0) \\ x_0 - c^T x = 0 \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -c^T \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$\overline{a}^j = \begin{pmatrix} -c_j \\ a^j \end{pmatrix}, j = \overline{1, n}$$

$$\overline{a}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

B bază în problema (1) $\implies \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -c_B^T \\ 0 & B \end{pmatrix}$ bază în problema (2).

$$\overline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & c_B^T B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$j \neq 0 \implies \overline{B}^{-1} \overline{a}^j = \begin{pmatrix} 1 & c_B^T B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_j \\ a^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_j^B - c_j \\ y_j^B \end{pmatrix}$$

$$\overline{B}^{-1} \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 & c_B^T B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z}^B \\ \overline{x}^B \end{pmatrix}$$

Tabelul simplex revizuit asociat bazei B este:

VB	$\overline{B}^{-1}$		$\overline{B}^{-1}\overline{b}$	$\overline{B}^{-1}\overline{a}^k$
x_0	1	u_B^T	$\overline{z}^B$	$z_k^B - c_k$
x^B	0	B^{-1}	$\overline{x}^B$	y_k^B

2 Seminar 7

1) Să se rezolve cu algoritmul simplex revizuit:

$$\begin{cases} \inf(-2x_1 - x_2) \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma standard:

$$\begin{cases} \inf(-2x_1 - x_2) \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, rang A = 3.$$

$B = (a^3, a^4, a^5) = I_3 \implies B^{-1}b = I_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

Forma completată:

$$\begin{cases} \inf(x_0) \\ x_0 + 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{B} = (\overline{a}^0, \overline{a}^3, \overline{a}^4, \overline{a}^5) = I_4 \implies \overline{B}^{-1} = I_4$

Tabelul simplex revizuit:

VB	$\overline{B}^{-1}$				$\overline{B}^{-1}\overline{b}$	$\overline{B}^{-1}\overline{a}^1$
x_0	1	0	0	0	0	2
$\leftarrow x_3$	0	1	0	0	4	$\boxed{1}$
x_4	0	0	1	0	18	3
x_5	0	0	0	1	6	-1

$\overline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & u_B^T \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}; \overline{B}^{-1}\overline{b} = \begin{pmatrix} \overline{z}^B \\ \overline{x}^B \end{pmatrix}; \overline{B}^{-1}\overline{a}^k = \begin{pmatrix} z_k^B - c_k \\ y_k^B \end{pmatrix}.$

$$z_1^B - c_1 = \begin{pmatrix} 1 & u_B^T \end{pmatrix} \overline{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$z_2^B - c_2 = \begin{pmatrix} 1 & u_B^T \end{pmatrix} \overline{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.$$

Testul de optim: $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$ nu e îndeplinit, deoarece, de exemplu $z_1^B - c_1 = 2 \nleq 0$.

Criteriul de intrare în bază: $k \in \mathcal{R}$ a. î. $z_k^B - c_k = \max\left\{z_j^B - c_j | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0\right\} \implies$ x_k intră în bază.

$\max\left(z_1^B - c_1, z_2^B - c_2\right) = \max(2, 1) = 2 = z_1^B - c_1 \implies k = 1.$

În acest moment completăm ultima coloană a tabelului de mai sus.

Testul de optim infinit: $y_k^B \leq 0$ nu e îndeplinit, deoarece
$y_1^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \nleq 0.$

Criteriul de ieşire din bază: $r \in \mathcal{B}$ a. î. $\frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} \implies x_r$ iese din bază.

$\min\limits_{y_{i1}^B > 0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{i1}^B} = \min\left(\frac{4}{1}, \frac{18}{3}\right) = 4 = \frac{\overline{x}_3^B}{y_{31}^B}$ (s-a atins pe linia lui x_3) $\implies x_3$ iese din bază. Se face semn că x_3 iese din bază.

$y_{31}^B = 1$ pivot. Se încercuieşte pivotul.

În noul tabel, exceptând ultima coloană, care e completată mai târziu, calculele se fac după regulile obişnuite (linia pivotului se împarte la pivot şi regula dreptunghiului). Prima coloană a lui $\overline{B}^{-1}$ e totdeauna 1 urmat de zerouri. Coloanele 3 şi 4 ale lui $\overline{B}^{-1}$ se copiază.

VB	$\overline{B}^{-1}$				$\overline{B}^{-1}\overline{b}$	$\overline{B}^{-1}\overline{a}^2$
x_0	1	-2	0	0	-8	3
x_1	0	1	0	0	4	-1
$\leftarrow x_4$	0	-3	1	0	6	$\boxed{2}$
x_5	0	1	0	1	10	1

$$z_2^B - c_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \nleq 0 \implies$$

testul de optim nu e îndeplinit.

$$z_3^B - c_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{a}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2.$$

$\max(3) = 3 \implies k = 2$. Completăm ultima coloană: $\overline{B}^{-1}\overline{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$y_2^B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0 \implies$ testul de optim infinit nu e îndeplinit.

$\min\left(\frac{6}{2}, \frac{10}{1}\right) = 3 \implies x_4$ iese din bază.

Coloana 4 a lui $\overline{B}^{-1}$ se copiază.

VB	$\overline{B}^{-1}$				$\overline{B}^{-1}\overline{b}$	$\overline{B}^{-1}\overline{a}^3$
x_0	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	-17	$\frac{5}{2}$
x_1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	7	$-\frac{1}{2}$
x_2	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{3}{2}$
$\leftarrow x_5$	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	7	$\boxed{\frac{5}{2}}$

$$z_3^B - c_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \overline{a}^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \nleq 0 \implies$$

testul de optim nu e îndeplinit.

$$z_4^B - c_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \overline{a}^4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}.$$

$\max\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \implies k = 3$

$$\overline{B}^{-1}\overline{a}^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

$y_3^B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \nleq 0 \implies$ testul de optim infinit nu este îndeplinit.

$\min\left(\frac{7}{\frac{5}{2}}\right) = \frac{14}{5} \implies x_5$ iese din bază.

VB	$\overline{B}^{-1}$				$\overline{B}^{-1}\overline{b}$	$\overline{B}^{-1}\overline{a}^k$
x_0	1	0	-1	-1	-24	
x_1	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{42}{5}$	
x_2	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{36}{5}$	
x_3	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{14}{5}$	

$$\left.\begin{array}{l} z_4^B - c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overline{a}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \leq 0 \\ z_5^B - c_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overline{a}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \leq 0 \end{array}\right\} \implies$$

soluţia optimă $\left(\frac{42}{5}, \frac{36}{5}, \frac{14}{5}, 0, 0\right)$, valoarea optimă $-24 \implies$

pentru problema iniţială soluţia optimă $\left(\frac{42}{5}, \frac{36}{5}\right)$, valoarea optimă -24.

2) Să se rezolve cu algoritmul simplex revizuit:

$$\begin{cases} \inf(-2x_1 - x_2) \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 18 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $rangA = 2$.

$B = (a^3, a^4) = I_2 \implies B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

Forma completată:

$$\begin{cases} \inf(x_0) \\ x_0 + 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 18 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\overline{B} = (\overline{a}^0, \overline{a}^3, \overline{a}^4) = I_3 \implies \overline{B}^{-1} = I_3$

Tabelul simplex revizuit:

VB	$\overline{B}^{-1}$			$\overline{B}^{-1}\overline{b}$	$\overline{B}^{-1}\overline{a}^1$
x_0	1	0	0	0	2
$\leftarrow x_3$	0	1	0	4	$\boxed{1}$
x_4	0	0	1	18	3

$$z_1^B - c_1 = \begin{pmatrix} 1 & u_B^T \end{pmatrix} \overline{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2.$$

$$z_2^B - c_2 = \begin{pmatrix} 1 & u_B^T \end{pmatrix} \overline{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.$$

$z_1^B - c_1 = 2 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$\max(2, 1) = 2$ atins pentru $k = 1$

În acest moment completăm ultima coloană a tabelului de mai sus.

$y_1^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \nleq 0 \implies$ testul de optim infinit nu este îndeplinit.

$\min\left(\frac{4}{1}, \frac{18}{3}\right) = 4$ atins pe linia lui $x_3 \implies x_3$ iese din bază.

Se face semn că x_3 iese din bază.

$y_{31}^B = 1$ pivot. Se încercuieşte pivotul.

VB	$\overline{B}^{-1}$			$\overline{B}^{-1}\overline{b}$	$\overline{B}^{-1}\overline{a}^2$
x_0	1	-2	0	-8	3
x_1	0	1	0	4	-1
$\leftarrow x_4$	0	-3	1	6	$\boxed{2}$

$z_2^B - c_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overline{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

$$z_3^B - c_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overline{a}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2.$$

$\max(3) = 3 \implies k = 2.$

Completăm ultima coloană:

$$\overline{B}^{-1}\overline{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$y_2^B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \nleq 0 \implies$ testul de optim infinit nu e îndeplinit.

$\min\left(\frac{6}{2}\right) = 3$ atins pe linia lui $x_4 \implies x_4$ iese din bază.

VB	$\overline{B}^{-1}$			$\overline{B}^{-1}\overline{b}$	$\overline{B}^{-1}\overline{a}^3$
x_0	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-17	$\frac{5}{2}$
x_1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	7	$-\frac{1}{2}$
x_2	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3	$-\frac{3}{2}$

$z_3^B - c_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \overline{a}^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

$$z_4^B - c_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \overline{a}^4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}.$$

$\max\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \implies k = 3$

$$\overline{B}^{-1}\overline{a}^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$y_3^B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \leq 0 \implies$ testul de optim infinit este îndeplinit $\implies$ problema are optim infinit.

Cercetări operaţionale 8

Cristian Niculescu

1 Curs 8

1.1 Dualitatea în optimizarea liniară

Problema primală:

$$\begin{cases} \inf(c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3) \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \geq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \leq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Problema duală a ei este:

$$\begin{cases} \sup(b_1^T u_1 + b_2^T u_2 + b_3^T u_3) \\ A_{11}^T u_1 + A_{21}^T u_2 + A_{31}^T u_3 \leq c_1 \\ A_{12}^T u_1 + A_{22}^T u_2 + A_{32}^T u_3 = c_2 \\ A_{13}^T u_1 + A_{23}^T u_2 + A_{33}^T u_3 \geq c_3 \\ u_1 \geq 0, u_2 \text{ arbitrar}, u_3 \leq 0 \end{cases}$$

Reguli de scriere a problemei duale:
La fiecare restricţie din problema primală corespunde o variabilă în problema duală şi invers, la fiecare variabilă din problema primală corespunde o restricţie în problema duală.
La inegalităţi concordante corespund variabile ≥ 0 şi invers.
La ecuaţii corespund variabile arbitrare şi invers.
La inegalităţi neconcordante corespund variabile ≤ 0 şi invers.
Matricea problemei duale este transpusa matricei problemei primale.
Coeficienţii funcţiei obiectiv din problema duală sunt termenii liberi din problema primală şi invers, termenii liberi din problema duală sunt coeficienţii funcţiei obiectiv din problema primală.

Dacă problema primală este de infimum, atunci problema duală este de supremum şi invers, dacă problema primală este de supremum, atunci problema duală este de infimum.
Observaţii. 1) Problema duală a problemei duale este problema primală.
2) A nu se confunda problema duală cu sistemul dual din teorema Farkaş-Minkowski!
Aplicaţii. 1) Dacă problema primală este în forma standard

$$\begin{cases} \inf\left(c^T x\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

atunci problema duală este

$$\begin{cases} \sup\left(b^T u\right) \\ A^T u \leq c \\ u \text{ arbitrar} \end{cases}$$

şi nu este în forma standard.
2) Dacă problema primală este în forma canonică

$$\begin{cases} \inf\left(c^T x\right) \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

atunci problema duală este

$$\begin{cases} \sup\left(b^T u\right) \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

şi este tot în forma canonică.
De aceea spunem că problemele (1) şi (2) formează un cuplu de probleme duale simetrice.
Fie
$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b, x \geq 0\}$ - domeniul admisibil al problemei (1)
şi
$D = \{u \in \mathbb{R}^m | A^T u \leq c, u \geq 0\}$ - domeniul admisibil al problemei (2).
Teorema slabă de dualitate (TSD). $x \in P, u \in D \implies c^T x \geq b^T u.$
Demonstraţie.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq u \cdot | Ax \geq b \implies u^T Ax \geq u^T b \\ 0 \leq x \cdot | A^T u \leq c \implies x^T A^T u \leq x^T c \\ x^T A^T u = (Ax)^T u = u^T Ax \text{ (scalar)} \end{array}\right\} \implies x^T c \geq u^T b, \text{ q.e.d.}$$

Teorema tare de dualitate (TTD). $x^* \in P, u^* \in D$ astfel încât $c^T x^* = b^T u^* \implies x^*$ este soluţie optimă pentru problema (1), u^* este soluţie optimă pentru problema (2).

Demonstraţie. $\forall x \in P, c^T x \overset{\text{TSD}}{\geq} b^T u^* = c^T x^* \overset{x^* \in P}{\implies} x^*$ este soluţie optimă pentru problema (1).

$\forall u \in D, b^T u \overset{\text{TSD}}{\leq} c^T x^* = b^T u^* \overset{u^* \in D}{\implies} u^*$ este soluţie optimă pentru problema (2).

Teorema fundamentală a dualităţii (TFD). Date fiind problemele (1) şi (2), una şi numai una din situaţiile următoare are loc:

1) $P \neq \emptyset, D \neq \emptyset \implies$ problemele (1) şi (2) au soluţii optime, iar valorile optime sunt egale.

2) $(P \neq \emptyset, D = \emptyset)$ sau $(P = \emptyset, D \neq \emptyset)$. În această situaţie problema care are soluţii admisibile are optim infinit.

3) $P = \emptyset, D = \emptyset$.

Demonstraţie. Folosim corolarul teoremei Farkaş-Minkowski:

F matrice antisimetrică $\implies \begin{cases} Fv \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$ are o soluţie $\overline{v}$ astfel încât $F\overline{v} + \overline{v} > 0$.

Fie $F = \begin{pmatrix} 0 & -A^T & c \\ A & 0 & -b \\ -c^T & b^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m+1}(\mathbb{R})$ antisimetrică.

$\overline{v} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{u} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \implies \exists \overline{x} \in \mathbb{R}^n, \overline{u} \in \mathbb{R}^m, \overline{y} \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} -A^T\overline{u} + c\overline{y} \geq 0 \ (\alpha_1) \\ A\overline{x} - b\overline{y} \geq 0 \ (\alpha_2) \\ -c^T\overline{x} + b^T\overline{u} \geq 0 \ (\alpha_3) \\ \overline{x} \geq 0 \ (\alpha_4) \\ \overline{u} \geq 0 \ (\alpha_5) \\ \overline{y} \geq 0 \ (\alpha_6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A^T\overline{u} + c\overline{y} + \overline{x} > 0 \ (\beta_1) \\ A\overline{x} - b\overline{y} + \overline{u} > 0 \ (\beta_2) \\ -c^T\overline{x} + b^T\overline{u} + \overline{y} > 0 \ (\beta_3) \end{cases}$$

$(\alpha_6) \implies \overline{y} \in \mathbb{R}_+$.

Cazul I) $\overline{y} > 0$.

Fie $x^* = \frac{1}{\overline{y}}\overline{x}, u^* = \frac{1}{\overline{y}}\overline{u}$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}(\alpha_1) \implies A^T u^* \le c \\ (\alpha_5) \implies u^* \ge 0\end{array}\right\} \implies u^* \in D \\ \left.\begin{array}{r}(\alpha_2) \implies Ax^* \ge b \\ (\alpha_4) \implies x^* \ge 0\end{array}\right\} \implies x^* \in P\end{array}\right\} \overset{\text{TSD}}{\implies} c^T x^* \ge b^T u^* \\ (\alpha_3) \implies c^T x^* \le b^T u^*\end{array}\right\} \implies$$

$c^T x^* = b^T u^* \overset{\text{TTD}}{\implies} x^*$ soluţie optimă în problema (1), u^* soluţie optimă în problema (2) $\overset{c^T x^* = b^T u^*}{\implies}$ valorile optime sunt egale.
Acest caz corespunde situaţiei 1).
Cazul II) $\overline{y} = 0$.
$(\alpha_1) \implies A^T \overline{u} \le 0$ (α_1')
$(\alpha_2) \implies A\overline{x} \ge 0$ (α_2')
$(\beta_1) \implies -A^T \overline{u} + \overline{x} > 0$ (β_1')
$(\beta_2) \implies A\overline{x} + \overline{u} > 0$ (β_2')
$(\beta_3) \implies c^T \overline{x} < b^T \overline{u}$ (β_3').
Arătăm că, în acest caz, nu putem avea simultan $P \ne \emptyset$ şi $D \ne \emptyset$.
Presupunem prin absurd $P \ne \emptyset, D \ne \emptyset$.
Fie $x_0 \in P, u_0 \in D$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x_0 \in P \implies Ax_0 \ge b \overset{(\alpha_5)}{\implies} \overline{u}^T A x_0 \ge \overline{u}^T b \\ \underbrace{\overline{u}^T A x_0}_{\in \mathbb{R}} = \left(\overline{u}^T A x_0\right)^T = \underbrace{x_0^T}_{\ge 0} \underbrace{A^T \overline{u}}_{\le 0\ (\alpha_1')} \le 0\end{array}\right\} \implies b^T \overline{u} \le 0 \\ \left.\begin{array}{l}u_0 \in D \implies A^T u_0 \le c \overset{(\alpha_4)}{\implies} \overline{x}^T A^T u_0 \le \overline{x}^T c \\ \underbrace{\overline{x}^T A^T u_0}_{\in \mathbb{R}} = \left(\overline{x}^T A^T u_0\right)^T = \underbrace{u_0^T}_{\ge 0} \underbrace{A\overline{x}}_{\ge 0\ (\alpha_2')} \ge 0\end{array}\right\} \implies c^T \overline{x} \ge 0\end{array}\right\} \implies$$

$c^T \overline{x} \ge b^T \overline{u}$, contradicţie cu (β_3').
Deci, cazul II) corespunde situaţiilor 2) şi 3).
Arătăm că, în situaţia 2), problema care are soluţii admisibile are optim infinit.
$P \ne \emptyset \implies \exists x_0 \in P \implies b^T \overline{u} \le 0 \overset{(\beta_3')}{\implies} c^T \overline{x} < 0$.
Fie $x(\alpha) = x_0 + \alpha \overline{x},\ \alpha \in \mathbb{R}_+$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}Ax(\alpha) = \underbrace{Ax_0}_{\ge b} + \underbrace{\alpha}_{\ge 0} \underbrace{A\overline{x}}_{\ge 0} \ge b, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ x(\alpha) = \underbrace{x_0}_{\ge 0} + \underbrace{\alpha}_{\ge 0} \underbrace{\overline{x}}_{\ge 0} \ge 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+\end{array}\right\} \implies x(\alpha) \in P, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ c^T x(\alpha) = c^T x_0 + \alpha \underbrace{c^T \overline{x}}_{<0} \implies \lim\limits_{\alpha \to \infty} c^T x(\alpha) = -\infty\end{array}\right\} \implies$$

$\inf\limits_{x \in P} c^T x = -\infty \implies$ problema (1) are optim infinit.
$D \ne \emptyset \implies \exists u_0 \in D \implies c^T \overline{x} \ge 0 \overset{(\beta_3')}{\implies} b^T \overline{u} > 0$.
Fie $u(\alpha) = u_0 + \alpha \overline{u},\ \alpha \in \mathbb{R}_+$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A^T u(\alpha) = \underbrace{A^T u_0}_{\le c} + \underbrace{\alpha}_{\ge 0}\underbrace{A^T \overline{u}}_{\le 0} \le c, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ u(\alpha) = \underbrace{u_0}_{\ge 0} + \underbrace{\alpha}_{\ge 0}\underbrace{\overline{u}}_{\ge 0} \ge 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+\end{array}\right\} \implies u(\alpha) \in D, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ b^T u(\alpha) = b^T u_0 + \alpha \underbrace{b^T \overline{u}}_{>0} \implies \lim_{\alpha \to \infty} b^T u(\alpha) = \infty\end{array}\right\} \implies$$

$\sup_{u \in D} b^T u = \infty \implies$ problema (2) are optim infinit.

Teorema tare a ecarturilor complementare (TTEC).

$P \neq \emptyset, D \neq \emptyset \implies \exists x^*$ soluţie optimă pentru problema (1), u^* soluţie optimă pentru problema (2) astfel încât

$$\begin{cases} \left(c - A^T u^*\right) + x^* > 0 \\ (Ax^* - b) + u^* > 0. \end{cases}$$

Demonstraţie. Suntem în situaţia 1) din TFD, adică în cazul I) din demonstraţia TFD.

$x^* = \frac{1}{\overline{y}}\overline{x}, u^* = \frac{1}{\overline{y}}\overline{u} \implies x^*$ soluţie optimă în problema (1), u^* soluţie optimă în problema (2).

Împărţind cu $\overline{y} > 0$ în (β_1) şi (β_2) se obţin relaţiile de demonstrat.

Teorema slabă a ecarturilor complementare (TSEC).

Fie $x^* \in P, u^* \in D$.

x^* soluţie optimă în problema (1), u^* soluţie optimă în problema (2) $\iff$
$$\begin{cases} (x^*)^T \left(c - A^T u^*\right) = 0 \\ (u^*)^T (Ax^* - b) = 0. \end{cases}$$

Demonstraţie. $(\implies)$ TFD $\implies c^T x^* = b^T u^* \implies$

$$\underbrace{\underbrace{(x^*)^T}_{\ge 0}\underbrace{\left(c - A^T u^*\right)}_{\ge 0}}_{\ge 0} + \underbrace{\underbrace{(u^*)^T}_{\ge 0}\underbrace{(Ax^* - b)}_{\ge 0}}_{\ge 0} =$$

$$c^T x^* - (x^*)^T A^T u^* + (u^*)^T Ax^* - b^T u^* = 0 \implies \begin{cases} (x^*)^T \left(c - A^T u^*\right) = 0 \\ (u^*)^T (Ax^* - b) = 0. \end{cases}$$

$(\impliedby) \implies (x^*)^T \left(c - A^T u^*\right) + (u^*)^T (Ax^* - b) = 0 \implies c^T x^* = b^T u^* \overset{\text{TTD}}{\implies}$
x^* soluţie optimă în problema (1), u^* soluţie optimă în problema (2).

Observaţie. Datorită transformărilor echivalente, rezultatele de dualitate rămân valabile pentru orice pereche de probleme duale.

1.2 Rezolvarea simultană a unei perechi de probleme duale

Fie problema

$$\begin{cases} \inf\left(c^T x\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ rangA = m < n. \tag{3}$$

Problema duală a problemei (3) este

$$\begin{cases} \sup\left(b^T u\right) \\ A^T u \leq c \\ u \text{ arbitrar} \end{cases}. \tag{4}$$

Definiţie. Fie B bază pentru problema (3). B se numeşte bază dual admisibilă pentru problema (3) $\iff z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}$.
Observaţie. Fie B bază pentru problema (3). B este bază dual admisibilă pentru problema (3) $\iff z_j^B - c_j \leq 0, \forall j = \overline{1,n}$.
Demonstraţie. ($\Longrightarrow$) Rezultă din $z_j^B - c_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$.
($\Longleftarrow$) Evident.
Propoziţia 1. B bază dual admisibilă pentru problema (3)
$\Longrightarrow u_B = \left(c_B^T B^{-1}\right)^T$ soluţie admisibilă pentru problema (4).
Demonstraţie.
$\left(a^j\right)^T u_B = u_B^T a^j = c_B^T B^{-1} a^j = c_B^T y_j^B = z_j^B \overset{\text{Obs.}}{\leq} c_j, \forall j = \overline{1,n} \Longrightarrow$
$A^T u_B \leq c \Longrightarrow u_B$ soluţie admisibilă pentru problema (4).
Propoziţia 2. B bază primal şi dual admisibilă pentru problema (3)
$\Longrightarrow x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ soluţie optimă pentru problema (3), u_B soluţie optimă pentru problema (4).
Demonstraţie.

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ primal admisibilă} \Longrightarrow x^B = \overline{x}^B, x^R = 0 \text{ soluţie admisibilă în problema (3)} \\ B \text{ dual admisibilă} \Longrightarrow u_B \text{ soluţie admisibilă în problema (4)} \\ b^T u_B = u_B^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T \overline{x}^B \end{array}\right\} \overset{\text{TTD}}{\Longrightarrow}$$

$x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ soluţie optimă pentru problema (3), u_B soluţie optimă pentru problema (4).
(Faptul că $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ este soluţie optimă pentru problema (3) rezultă şi din testul de optim.)
Observaţie. $a^j = e^i \Longrightarrow (u_B)_i = \left(z_j^B - c_j\right) + c_j$.
Demonstraţie. $(u_B)_i = u_B^T e^i = u_B^T a^j = z_j^B = \left(z_j^B - c_j\right) + c_j$.

2 Seminar 8

$$1)\ \begin{cases} \inf\,(2x_2 + x_3) \\ -3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 2 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arb.}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Să se scrie problema duală.

Rezolvare.

Punem în evidenţă corespondenţa dintre restricţiile din problema primală şi variabilele din problema duală.

$$\begin{cases} \inf\,(2x_2 + x_3) & \\ -3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 2 & \leftrightsquigarrow u_1 \\ x_1 + 2x_3 = 8 & \leftrightsquigarrow u_2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 7 & \leftrightsquigarrow u_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arb.}, x_3 \leq 0 & \end{cases}$$

Deoarece problema primală este de infimum, problema duală este de supremum. Scriem funcţia obiectiv din problema duală. Coeficienţii ei sunt termenii liberi din problema primală.

$\sup\,(2u_1 + 8u_2 + 7u_3)$

Scriem pe rând restricţiile din problema duală corespunzătoare variabilelor din problema primală. Coeficienţii din membrul stâng se citesc pe coloana variabilei respective. Termenii liberi sunt coeficienţii variabilelor respective din funcţia obiectiv a problemei primale.

Pentru x_1:

$-3u_1 + u_2 + 5u_3 \leq 0$

Semnul este $\leq$ deoarece $x_1 \geq 0$, deci avem o inegalitate concordantă, care pentru supremum este $\leq$.

Pentru x_2:

$4u_1 - 3u_3 = 2$

Coeficientul lui u_2 este 0 deoarece x_2 nu apare în ecuaţie. Semnul este $=$ deoarece x_2 este arbitrar, deci avem o ecuaţie.

Pentru x_3:

$8u_1 + 2u_2 + 2u_3 \geq 1$

Semnul este $\geq$ deoarece $x_3 \leq 0$, deci avem o inegalitate neconcordantă, care pentru supremum este $\geq$.

Scriem semnele variabilelor din problema duală:

$u_1 \leq 0$ deoarece u_1 corespunde la o inegalitate neconcordantă.

u_2 arbitrar deoarece u_2 corespunde la o ecuaţie.

$u_3 \geq 0$ deoarece u_3 corespunde la o inegalitate concordantă.

Problema duală este:

$$\begin{cases} \sup\,(2u_1 + 8u_2 + 7u_3) \\ -3u_1 + u_2 + 5u_3 \leq 0 \\ 4u_1 - 3u_3 = 2 \\ 8u_1 + 2u_2 + 2u_3 \geq 1 \\ u_1 \leq 0, u_2 \text{ arb.}, \ u_3 \geq 0 \end{cases} .$$

2) $\begin{cases} \sup\,(3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5) \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geq -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 5 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ arb.}, x_4 \leq 0, x_5 \text{ arb.} \end{cases}$

Să se scrie problema duală.

Rezolvare.

$$\begin{cases} \sup\,(3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5) & \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 \leq 2 & \leftrightsquigarrow u_1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geq -1 & \leftrightsquigarrow u_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 5 & \leftrightsquigarrow u_3 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ arb.}, x_4 \leq 0, x_5 \text{ arb.} & \end{cases}$$

Problema duală este:

$$\begin{cases} \inf\,(2u_1 - u_2 + 5u_3) \\ 2u_1 - 2u_2 + u_3 \leq 3 \\ 3u_1 + u_2 + 2u_3 \geq -1 \\ -4u_1 + 2u_2 - u_3 = -1 \\ u_1 - u_2 + 3u_3 \leq 1 \\ -2u_1 + u_2 + u_3 = 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \leq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

3) $\begin{cases} \inf\,(-2x_1 - x_2) \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$

a) Să se scrie problema duală.

b) Să se rezolve ambele probleme.

Rezolvare.

a) $\begin{cases} \inf\,(-2x_1 - x_2) & \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 & \leftrightsquigarrow u_1 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 18 & \leftrightsquigarrow u_2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 & \leftrightsquigarrow u_3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} & \end{cases}$

Problema duală este

$$\begin{cases} \sup(4u_1 + 18u_2 + 6u_3) \\ u_1 + 3u_2 - u_3 \le -2 \\ -u_1 - u_2 + 2u_3 \le -1 \\ u_1 \le 0 \\ u_2 \le 0 \\ u_3 \le 0 \\ (u_1, u_2, u_3 \text{ arb.}) \end{cases}$$

b) Rezolvăm problema primală cu algoritmul simplex primal.

$B = (a^3, a^4, a^5) = I_3 \implies B^{-1}b = I_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} \ge 0 \implies B$ primal admisibilă.

			-2	-1			
c_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\leftarrow x_3$	4	$\boxed{1}$	-1	1	0	0
0	x_4	18	3	-1	0	1	0
0	x_5	6	-1	2	0	0	1
	z	0	2	1	0	0	0

$z_1^B - c_1 = 2 \not\le 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

$y_1^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \not\le 0, y_2^B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \not\le 0 \implies$ testul de optim infinit nu e îndeplinit.

$\max(2, 1) = 2 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left(\frac{4}{1}, \frac{18}{3}\right) = 4 \implies x_3$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4	x_5
x_1	4	1	-1	1	0	0
$\leftarrow x_4$	6	0	$\boxed{2}$	-3	1	0
x_5	10	0	1	1	0	1
z	-8	0	3	-2	0	0

$z_2^B - c_2 = 3 \not\le 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

$y_2^B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \not\le 0, z_3^B - c_3 = -2 \not> 0 \implies$ testul de optim infinit nu e îndeplinit.

$\max(3) = 3 \implies x_2$ intră în bază.

$\min\left(\frac{6}{2}, \frac{10}{1}\right) = 3 \implies x_4$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	$\overset{\downarrow}{x_3}$	x_4	x_5
x_1	7	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_2	3	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\leftarrow x_5$	7	0	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	1
z	-17	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0

$z_3^B - c_3 = \frac{5}{2} \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

$y_3^B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \nleq 0, z_4^B - c_4 = -\frac{3}{2} \ngtr 0 \implies$ testul de optim infinit nu e îndeplinit.

$\max\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \implies x_3$ intră în bază.

$\min\left(\frac{7}{\frac{5}{2}}\right) = \frac{14}{5} \implies x_5$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\frac{42}{5}$	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_2	$\frac{36}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_3	$\frac{14}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
z	-24	0	0	0	-1	-1

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ soluţia optimă pentru problema primală $\left(\frac{42}{5}, \frac{36}{5}, \frac{14}{5}, 0, 0\right)$, valoarea optimă -24.

B bază primal şi dual admisibilă $\implies u_B^T = c_B^T B^{-1}$ soluţie optimă pentru problema duală.

$a^j = e^i \implies (u_B)_i = c_B^T B^{-1} e^i = c_B^T B^{-1} a^j = c_B^T y_j^B = z_j^B = \left(z_j^B - c_j\right) + c_j.$

$\left.\begin{array}{l} a^3 = e^1 \\ a^4 = e^2 \\ a^5 = e^3 \end{array}\right\} \implies$ soluţie optimă pentru problema duală este

$(u_B)_1 = \left(z_3^B - c_3\right) + c_3 = 0 + 0 = 0$
$(u_B)_2 = \left(z_4^B - c_4\right) + c_4 = -1 + 0 = -1$
$(u_B)_3 = \left(z_5^B - c_5\right) + c_5 = -1 + 0 = -1$
valoarea optimă este -24 (egală cu valoarea optimă a problemei primale).

Altă metodă este rezolvarea problemei primale cu algoritmul simplex revizuit, ca la seminarul 7, iar soluţia optimă pentru problema duală este $u_B = (0, -1, -1)^T$, de pe prima linie a lui $\overline{B}^{-1}$ (lăsând la o parte prima componentă) din tabelul optim.

Metode de verificare:

1) Valoarea funcţiei obiectiv din problema duală pentru soluţia optimă din problema duală este egală cu valoarea optimă din problema primală:
$4 \cdot 0 + 18(-1) + 6(-1) = -24.$

2) Soluţia optimă pentru problema duală verifică restricţiile şi condiţiile de

semn din problema duală:
$0+3(-1)-(-1)=-2\leq -2;$
$-0-(-1)+2(-1)=-1\leq -1;$
$0\leq 0;$
$-1\leq 0;$
$-1\leq 0.$

$$4)\ \begin{cases} \inf\left(2x_1-x_2+x_3-2x_4\right) \\ 3x_1+x_2-2x_3-x_4=0 \\ -x_1+x_2+3x_3+2x_4=5 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,4} \end{cases}$$

a) Să se scrie problema duală.

b) Să se rezolve ambele probleme.

Rezolvare.

$$a)\ \begin{cases} \inf\left(2x_1-x_2+x_3-2x_4\right) & \\ 3x_1+x_2-2x_3-x_4=0 & \leftrightsquigarrow u_1 \\ -x_1+x_2+3x_3+2x_4=5 & \leftrightsquigarrow u_2 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,4} & \end{cases}$$

Problema duală este

$$\begin{cases} \sup\left(5u_2\right) \\ 3u_1-u_2\leq 2 \\ u_1+u_2\leq -1 \\ -2u_1+3u_2\leq 1 \\ -u_1+2u_2\leq -2 \\ u_1,u_2 \text{ arb.} \end{cases}$$

b) Rezolvăm problema primală cu metoda celor 2 faze.

Faza I

$$\begin{cases} \inf\left(x_5+x_6\right) \\ 3x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=0 \\ -x_1+x_2+3x_3+2x_4+x_6=5 \\ x_j\geq 0, j=\overline{1,6} \end{cases}$$

$B=(a^5,a^6)=I_2.$

$B^{-1}b=I_2\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\geq 0\implies B$ primal admisibilă.

			0	0	0	0		
	VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6
1	$\leftarrow x_5$	0	3	$\boxed{1}$	-2	-1	1	0
1	x_6	5	-1	1	3	2	0	1
	z'	5	2	2	1	1	0	0

$z_1'^B-c_1'=2\not\leq 0\implies$ testul de optim nu este îndeplinit.
La faza I nu facem testul de optim infinit.

$\max\{2,2,1,1\} = 2$ atins pe coloanele lui x_1 şi x_2 $\Longrightarrow$ oricare dintre x_1 şi x_2 poate intra în bază. Dacă alegem x_1, avem pivotul $y_{51}^B = 3$. Dacă alegem x_2, avem pivotul $y_{52}^B = 1$. Pentru uşurinţa calculului alegem x_2 să intre în bază.
$\min\left\{\frac{0}{1}, \frac{5}{1}\right\} = 0$, atins pe linia lui x_5 $\Longrightarrow$ x_5 iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	$\overset{\downarrow}{x_3}$	x_4	x_5	x_6
x_2	0	3	1	-2	-1	1	0
$\leftarrow x_6$	5	-4	0	$\boxed{5}$	3	-1	1
z'	5	-4	0	5	3	-2	0

$z_3'^B - c_3' = 5 \not\leq 0 \Longrightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit.
$\max\{5,3\} = 5$ atins pe coloana lui x_3 $\Longrightarrow$ x_3 intră în bază.
$\min\left\{\frac{5}{5}\right\} = 1$, atins pe linia lui x_6 $\Longrightarrow$ x_6 iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	2	$\frac{7}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$		
x_3	1	$-\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
z'	0	0	0	0	0	-1	-1

$z_j'^B - c_j' \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \Longrightarrow$ testul de optim este îndeplinit.
$\overline{z}'^B = 0$.
Nu mai sunt variabile artificiale în bază.
Faza a II-a

			2			-2
	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	$\overset{\downarrow}{x_4}$
-1	x_2	2	$\frac{7}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$
1	$\leftarrow x_3$	1	$-\frac{4}{5}$	0	1	$\boxed{\frac{3}{5}}$
	z	-1	$-\frac{21}{5}$	0	0	$\frac{12}{5}$

$z_4^B - c_4 = \frac{12}{5} \not\leq 0 \Longrightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit.

$$\left.\begin{array}{l} z_1^B - c_1 = -\frac{21}{5} \not> 0 \\ y_4^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \not\leq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{testul de optim infinit nu este îndeplinit.}$$

$\max\left\{\frac{12}{5}\right\} = \frac{12}{5}$ atins pe coloana lui x_4 $\Longrightarrow$ x_4 intră în bază.
$\min\left\{\frac{2}{\frac{1}{5}}, \frac{1}{\frac{3}{5}}\right\} = \min\left\{10, \frac{5}{3}\right\} = \frac{5}{3}$ atins pe linia lui x_3 $\Longrightarrow$ x_3 iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0
x_4	$\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1
z	-5	-1	0	-4	0

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \Longrightarrow$ testul de optim este îndeplinit $\Longrightarrow$ soluţia optimă pentru problema primală este $x_2^* = x_4^* = \frac{5}{3}, x_1^* = x_3^* = 0$, iar valoarea optimă este -5.
$B = (a^2, a^4)$ este bază primal şi dual admisibilă pentru problema primală

$\Longrightarrow u_B = \left(c_B^T B^{-1}\right)^T$ este soluţie optimă pentru problema duală.
$B = (a^2, a^4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
$\det(B) = 2 + 1 = 3$.
$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
$B^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} B^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
$u_B^T = c_B^T B^{-1} = (-1, -2) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0, -1)$.
Soluţie optimă pentru problema duală este $(u_B)_1 = 0, (u_B)_2 = -1$, iar valoarea optimă este -5.

5) $\begin{cases} \inf\,(2x_1 + 3x_2) \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 1 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$.

a) Să se scrie problema duală.
b) Să se rezolve ambele probleme.
Rezolvare.

a) $\begin{cases} \inf\,(2x_1 + 3x_2) & \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 & \leftrightsquigarrow u_1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 & \leftrightsquigarrow u_2 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 1 & \leftrightsquigarrow u_3 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = -1 & \leftrightsquigarrow u_4 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} & \end{cases}$.

Problema duală este
$\begin{cases} \sup(u_1 + u_2 + u_3 - u_4) \\ u_1 + u_2 + u_3 - 2u_4 \leq 2 \\ -u_1 + u_2 - 2u_3 \leq 3 \\ u_1 - u_4 \leq 0 \\ -u_2 + u_4 \leq 0 \\ u_3 \leq 0 \\ u_j \text{ arb.}, \forall j = \overline{1,4} \end{cases}$

b) Se rezolvă problema primală cu metoda celor 2 faze ca la seminarul 4, obţinându-se că problema primală nu are soluţie admisibilă $\overset{\text{TFD}}{\Longrightarrow}$ problema duală are optim infinit sau nu are soluţie admisibilă.

$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ este soluţie admisibilă pentru problema duală $\Longrightarrow$ problema duală are optim infinit.

6) $\begin{cases} \inf\,(-x_1 - x_2) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$

a) Să se scrie problema duală.
b) Să se rezolve ambele probleme.
Rezolvare.

a) $\begin{cases} \inf\,(-x_1 - x_2) & \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 & \leftrightsquigarrow u_1 \\ x_1 - x_2 = 0 & \leftrightsquigarrow u_2 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} & \end{cases}$

Problema duală este

$\begin{cases} \sup(4u_1) \\ u_1 + u_2 \leq -1 \\ -2u_1 - u_2 \leq -1 \\ u_1 \leq 0 \\ u_1, u_2 \text{ arb.} \end{cases}$

b) Se rezolvă problema primală cu metoda celor 2 faze ca în seminarul 4, obţinându-se că problema primală are optim infinit $\overset{\text{TFD}}{\Longrightarrow}$ problema duală nu are soluţie admisibilă.

Cercetări operaţionale 9

Cristian Niculescu

1 Curs 9

1.1 Algoritmul simplex dual

Fie problema

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ unde } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), rangA = m < n. \tag{1}$$

Problema duală a problemei (1) este

$$\begin{cases} \sup\left(b^T u\right) \\ A^T u \leq c \\ u \text{ arbitrar} \end{cases}. \tag{2}$$

Testul de optim (TO). Fie B bază dual admisibilă pentru problema (1). Dacă $\overline{x}^B \geq 0$, atunci soluţia de bază asociată bazei B, $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ este soluţie optimă pentru problema (1).
Demonstraţie. $\overline{x}^B \geq 0 \implies$ B este bază primal admisibilă pentru problema (1) $\overset{B \text{ dual admisibilă}}{\Longrightarrow}$ testul de optim de la algoritmul simplex primal este îndeplinit $\implies x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ este soluţie optimă pentru problema (1).
Testul de incompatibilitate (TI). Fie B bază dual admisibilă pentru problema (1). Dacă $\exists r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\overline{x}_r^B < 0$ şi $y_{rj}^B \geq 0, \forall j = \overline{1,n}$, atunci problema (1) nu are soluţie admisibilă.
Demonstraţie. Fie β_r^T linia din B^{-1} aflată pe locul pe care r este în $\mathcal{B}$ şi $u(\alpha) = u_B - \alpha\beta_r, \alpha \in \mathbb{R}_+$.
$u(\alpha)^T a^j = (u_B - \alpha\beta_r)^T a^j = u_B^T a^j - \alpha\beta_r^T a^j = z_j^B - \underbrace{\alpha}_{\geq 0} \underbrace{y_{rj}^B}_{\geq 0} \leq z_j^B \overset{B \text{ dual admisibilă}}{\leq}$
$c_j, \forall j = \overline{1,n} \implies u(\alpha)$ soluţie admisibilă pentru problema (2), $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ (3).
$b^T u(\alpha) = u(\alpha)^T b = (u_B - \alpha\beta_r)^T b = u_B^T b - \alpha\beta_r^T b = \overline{z}^B - \alpha \underbrace{\overline{x}_r^B}_{<0} \implies$

$\lim\limits_{\alpha\to\infty} b^T u(\alpha) = \infty \overset{(3)}{\Longrightarrow} \sup\{b^T u | A^T u \le c\} = \infty \Longrightarrow$ problema (2) are optim infinit $\overset{\text{TFD}}{\Longrightarrow}$ problema (1) nu are soluţie admisibilă.

Teorema de schimbare a bazei (TSBASD). Fie B bază dual admisibilă pentru problema (1), $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\overline{x}_r^B < 0$ şi $\exists j \in \mathcal{R}$ astfel încât $y_{rj}^B < 0$. Fie $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $\frac{z_k^B - c_k}{y_{rk}^B} = \min\limits_{j | y_{rj}^B < 0} \frac{z_j^B - c_j}{y_{rj}^B}$. Atunci:

a) matricea $\widetilde{B}$ obţinută din B înlocuind coloana a^r cu a^k este bază dual admisibilă pentru problema (1);
b) $\overline{z}^{\widetilde{B}} \ge \overline{z}^B$.

Demonstraţie. a) Din lema substituţiei,
$\widetilde{B}$ inversabilă $\Longleftrightarrow \left(B^{-1}a^k\right)_r \neq 0 \Longleftrightarrow y_{rk}^B \neq 0$.
Dar $y_{rk}^B < 0 \Longrightarrow \widetilde{B}$ inversabilă $\Longrightarrow \widetilde{B}$ bază a problemei (1).

$$z_j^{\widetilde{B}} - c_j = z_j^B - c_j - \frac{\overbrace{\left(z_k^B - c_k\right)}^{\le 0} y_{rj}^B}{\underbrace{y_{rk}^B}_{<0}} \ (4).$$

B dual admisibilă $\Longrightarrow z_j^B - c_j \le 0, \forall j = \overline{1,n}$.
$y_{rj}^B \ge 0 \Longrightarrow z_j^{\widetilde{B}} - c_j \overset{(4)}{\le} z_j^B - c_j \le 0$.
$y_{rj}^B < 0 \Longrightarrow \frac{z_j^B - c_j}{y_{rj}^B} \ge \frac{z_k^B - c_k}{y_{rk}^B} | \cdot y_{rj}^B < 0 \Longrightarrow z_j^B - c_j \le \frac{(z_k^B - c_k) y_{rj}^B}{y_{rk}^B} \overset{(4)}{\Longrightarrow} z_j^{\widetilde{B}} - c_j \le 0$.
Deci $z_j^{\widetilde{B}} - c_j \le 0, \forall j = \overline{1,n} \Longrightarrow \widetilde{B}$ dual admisibilă.

b) $$\overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B - \frac{\overbrace{\overline{x}_r^B}^{<0} \overbrace{\left(z_k^B - c_k\right)}^{\le 0}}{\underbrace{y_{rk}^B}_{<0}} \ge \overline{z}^B.$$

Algoritmul simplex dual

Pasul 0. Se determină o bază dual admisibilă B şi se calculează $\overline{x}^B$, $\overline{z}^B$, y_j^B, $z_j^B - c_j, \forall j = \overline{1,n}$ şi se trece la pasul 1.

Pasul 1 (testul de optim). Dacă $\overline{x}^B \ge 0$, atunci $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ este soluţie optimă pentru problema (1), iar $\overline{z}^B$ este valoarea optimă, STOP. Altfel se trece la pasul 2.

Pasul 2 (testul de incompatibilitate). Dacă $\exists r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\overline{x}_r^B < 0$ şi $y_{rj}^B \ge 0, \forall j = \overline{1,n}$, atunci problema (1) nu are soluţie admisibilă, STOP. Altfel se merge la pasul 3.

Pasul 3 (schimbarea bazei). Criteriul de ieşire din bază: se alege $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\overline{x}_r^B = \min\{\overline{x}_i^B | \overline{x}_i^B < 0\}$.

Criteriul de intrare în bază: se alege $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $\frac{z_k^B - c_k}{y_{rk}^B} = \min\limits_{j|y_{rj}^B<0} \frac{z_j^B - c_j}{y_{rj}^B}$.

Se consideră baza $\widetilde{B}$ obţinută din B înlocuind coloana a^r cu a^k, se calculează $\overline{x}^{\widetilde{B}}$, $\overline{z}^{\widetilde{B}}$, $y_j^{\widetilde{B}}$, $z_j^{\widetilde{B}} - c_j, \forall j = \overline{1,n}$ şi se trece la pasul 1, înlocuind B cu $\widetilde{B}$.

Alegerea lui r.

$i \in \mathcal{B}$ astfel încât $\overline{x}_i^B < 0 \implies j_i$ astfel încât $\frac{z_{j_i}^B - c_{j_i}}{y_{ij_i}^B} = \min\limits_{j|y_{ij}^B<0} \frac{z_j^B - c_j}{y_{ij}^B}$.

$\overline{z}^{\widetilde{B}} = \overline{z}^B - \frac{\overline{x}_i^B\left(z_{j_i}^B - c_{j_i}\right)}{y_{ij_i}^B}$.

Ar trebui să alegem $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\frac{\overline{x}_r^B\left(z_{j_r}^B - c_{j_r}\right)}{y_{rj_r}^B} = \min\limits_{i|\overline{x}_i^B<0} \frac{\overline{x}_i^B\left(z_{j_i}^B - c_{j_i}\right)}{y_{ij_i}^B}$, apoi $k = j_r$.

Pentru simplitate alegem $r \in \mathcal{B}$ astfel încât $\overline{x}_r^B = \min\limits_{i|\overline{x}_i^B<0} \overline{x}_i^B$.

Algoritmul simplex dual se aplică atunci când cunoaştem deja o bază dual admisibilă.

Observaţie. B bază astfel încât $c_B = 0, c \geq 0 \implies B$ dual admisibilă.

Demonstraţie. $z_j^B - c_j = \underbrace{c_B^T y_j^B}_{=0} - c_j = -c_j \leq 0, \forall j = \overline{1,n}$.

2 Seminar 9

Să se rezolve cu algoritmul simplex dual:

$$\text{a)} \begin{cases} \inf\left(x_1 + 6x_2\right) \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 4 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} \inf\left(x_1 + 6x_2\right) \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = -1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}.$$

a) $B = (a^3, a^4) = -I_2 \implies B^{-1} = -I_2$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{R} = \{1,2\} \\ z_1^B - c_1 = c_B^T y_1^B - c_1 = (0,0)\, y_1^B - 1 = -1 \leq 0 \\ z_2^B - c_2 = c_B^T y_2^B - c_2 = (0,0)\, y_2^B - 6 = -6 \leq 0 \end{array}\right\} \implies B \text{ dual admisibilă.}$$

$$\overline{x}^B = B^{-1}b = -I_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$y_1^B = B^{-1}a^1 = -I_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$y_2^B = B^{-1}a^2 = -I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-3	-2	-1	1	0
0	$\leftarrow x_4$	-4	$\boxed{-1}$	-3	0	1
	z	0	-1	-6	0	0

Testul de optim: $\overline{x}^B \geq 0$ nu e îndeplinit, deoarece $\overline{x}^B = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \not\geq 0$.

Testul de incompatibilitate: $\exists r \in \mathcal{B}$ a. î. $\overline{x}_r^B < 0$ şi $y_{rj}^B \geq 0, j = \overline{1,n}$ nu e îndeplinit, deoarece, de exemplu, $y_{31}^B = -2 \not\geq 0, y_{41}^B = -1 \not\geq 0$.

Criteriul de ieşire din bază: $r \in \mathcal{B}$ a. î. $\overline{x}_r^B = \min\limits_{i|\overline{x}_i^B<0} \overline{x}_i^B \implies x_r$ iese din bază.

$\min\limits_{i|\overline{x}_i^B<0} \overline{x}_i^B = \min\left(\overline{x}_3^B, \overline{x}_4^B\right) = \min(-3,-4) = -4 = \overline{x}_4^B \implies x_4$ iese din bază.

Criteriul de intrare în bază: $k \in \mathcal{R}$ a. î. $\frac{z_k^B - c_k}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{rj}^B<0} \frac{z_j^B - c_j}{y_{rj}^B} \implies x_k$ intră în bază.

$\min\limits_{y_{4j}^B<0} \frac{z_j^B - c_j}{y_{4j}^B} = \min\left(\frac{z_1^B - c_1}{y_{41}^B}, \frac{z_2^B - c_2}{y_{42}^B}\right) = \min\left(\frac{-1}{-1}, \frac{-6}{-3}\right) = 1 = \frac{z_1^B - c_1}{y_{41}^B} \implies x_1$ intră în bază.

$y_{41}^B = -1$ pivot.

Regulile de calcul sunt ca la algoritmul simplex primal.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	5	0	5	1	-2
x_1	4	1	3	0	-1
z	4	0	-3	0	-1

Metode de verificare:

- baza rămâne mereu dual admisibilă;
- valoarea funcţiei obiectiv nu scade de la un tabel la altul ($4 \geq 0$);
- soluţia de bază ($x_1 = 4, x_3 = 5, x_2 = x_4 = 0$) verifică ecuaţiile problemei;
- totdeauna pivotul este < 0: $-1 < 0$;
- calculând funcţia obiectiv pentru soluţia de bază din orice tabel, obţinem valoarea $\overline{z}^B$ corespunzătoare.

$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \geq 0 \implies$ soluţie optimă $(4,0,5,0)$, valoarea optimă 4.

b) $B = (a^3, a^4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{R} = \{1,2\} \\ z_1^B - c_1 = c_B^T y_1^B - c_1 = (0,0)\, y_1^B - 1 = -1 \leq 0 \\ z_2^B - c_2 = c_B^T y_2^B - c_2 = (0,0)\, y_2^B - 6 = -6 \leq 0 \end{array}\right\} \implies B \text{ dual admisi-}$$

bilă.

$\overline{x}^B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$y_1^B = B^{-1}a^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$y_2^B = B^{-1}a^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-3	-2	-1	1	0
0	x_4	-1	1	3	0	1
	z	0	-1	-6	0	0

$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \ngeq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

$\left. \begin{array}{l} \overline{x}_4^B = -1 < 0 \\ y_{4j}^B \geq 0, j = \overline{1,4} \end{array} \right\} \implies$ problema nu are soluţie admisibilă.

Cercetări operaţionale 10

Cristian Niculescu

1 Curs 10

1.1 Postoptimizare

1) Reoptimizare. Cum se modifică soluţia optimă dacă se modifică datele problemei?
2) Parametrizare. Datele depind de un parametru. Studiul soluţiei optime după parametru.
3) Analiza sensibilităţii. Cât de sensibilă este soluţia optimă la modificările datelor problemei?
1) Fie problema:

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ unde } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), rangA = m < n. \tag{1}$$

Fie B bază $\begin{cases} \text{primal admisibilă} \iff B^{-1}b \geq 0 \\ \text{dual admisibilă} \iff z_j^B - c_j \leq 0, \forall j = \overline{1,n} \iff c_B^T B^{-1} a^j - c_j \leq 0, \forall j = \overline{1,n}. \end{cases}$

Dacă se modifică numai c, B rămâne primal admisibilă.
Dacă se modifică numai b, B rămâne dual admisibilă.
a) Modificarea lui c.

$$\begin{cases} \inf(c_1^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Se recalculează linia z şi se aplică algoritmul simplex primal.
b) Modificarea lui b.

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b_1 \\ x \geq 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Se recalculează coloana VVB şi se aplică algoritmul simplex dual.
2) Similar se procedează la parametrizarea lui c sau b.

2 Seminar 10

$$\begin{cases} \inf\left(-3x_1+2x_2-4x_3\right) \\ x_1+3x_2+2x_3=3 \\ 3x_1+3x_2+x_3=4 \\ x_j \geq 0, j=\overline{1,3} \end{cases}$$

a) Să se rezolve.

b) Să se reoptimizeze pentru $b=(1,4)^T$.

c) Să se reoptimizeze problema iniţială pentru $c=(1,2,3)^T$.

d) Să se rezolve problema obţinută înlocuind în problema iniţială b cu $b\left(\lambda\right)=\begin{pmatrix} 3+\lambda \\ 4-\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

e) Să se rezolve problema obţinută înlocuind în problema iniţială c cu $c\left(\lambda\right)=\left(-3-\lambda, 2+\lambda, -4+2\lambda\right)^T, \lambda \in \mathbb{R}$.

a) Deoarece nu avem ca bază iniţială matricea unitate, folosim metoda celor 2 faze.

Faza I

$$\begin{cases} \inf\left(x_4+x_5\right) \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=3 \\ 3x_1+3x_2+x_3+x_5=4 \\ x_j \geq 0, j=\overline{1,5} \end{cases}$$

$B=\left(a^4,a^5\right)=I_2 \implies B^{-1}b=I_2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

			0	0	0		
c'_B	VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4	x_5
1	$\leftarrow x_4$	3	1	$\boxed{3}$	2	1	0
1	x_5	4	3	3	1	0	1
	z'	7	4	6	3	0	0

$z_1'^B-c_1'=4 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

La faza I testul de optim infinit nu poate fi îndeplinit.

$\max\left(4,6,3\right)=6 \implies x_2$ intră în bază.

$\min\left(\frac{3}{3},\frac{4}{3}\right)=1 \implies x_4$ iese din bază.

VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\leftarrow x_5$	1	$\boxed{2}$	0	-1	-1	1
z'	1	2	0	-1	-2	0

$z_1'^B-c_1'=2 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

$\max\left(2\right)=2 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left(\frac{1}{\frac{1}{3}},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \implies x_5$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	$\frac{5}{6}$	0	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z'	0	0	0	0	-1	-1

$z'^B_j - c'_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim e îndeplinit.
$\overline{z}'^B = 0$; nu mai sunt variabile artificiale în bază $\implies$
Faza a II-a

Păstrăm în tabel şi coloanele variabilelor artificiale, pentru a citi mai uşor inversa bazei, necesară la b).

					-4		
c_B	VB	VVB	x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	x_4	x_5
2	$\leftarrow x_2$	$\frac{5}{6}$	0	1	$\boxed{\frac{5}{6}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
-3	x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	z	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{43}{6}$	$-$	$-$

$z^B_3 - c_3 = \frac{43}{6} \not\leq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.
$y^B_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \not\leq 0 \implies$ testul de optim infinit nu e îndeplinit.
$\max\left(\frac{43}{6}\right) = \frac{43}{6} \implies x_3$ intră în bază.
$\min\left(\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}\right) = 1 \implies x_2$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	1	0	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	1	1	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
z	-7	0	$-\frac{43}{5}$	0	$-$	$-$

$z^B_2 - c_2 = -\frac{43}{5} \leq 0 \implies$ soluţie optimă $(1, 0, 1)$, valoarea optimă -7.
b) Se modifică coloana VVB din ultimul tabel simplex.
$a^j = e^i \implies (B^{-1})^i = B^{-1}e^i = B^{-1}a^j = y^B_j$.
$\left.\begin{array}{l} a^4 = e^1 \\ a^5 = e^2 \end{array}\right\} \implies B^{-1} = \left(y^B_4, y^B_5\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.
$\overline{x}^B = B^{-1}b = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$.
Baza rămâne dual admisibilă. Continuăm cu algoritmul simplex dual.

c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3
-4	x_3	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	1
-3	x_1	$\frac{7}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	0
	z	$-\frac{17}{5}$	0	$-\frac{43}{5}$	0

$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} \not\geq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.
$\overline{x}^B_3 = -\frac{1}{5} < 0, y^B_{31} = 0 \geq 0, y^B_{32} = \frac{6}{5} \geq 0, y^B_{33} = 1 \geq 0 \implies$ testul de

incompatibilitate este îndeplinit $\Longrightarrow$ problema nu are soluţie admisibilă.

c) Se modifică linia z din ultimul tabel simplex de la punctul a).

c_B	VB	VVB	x_1	2 $\downarrow$ x_2	x_3
3	$\leftarrow x_3$	1	0	$\boxed{\frac{6}{5}}$	1
1	x_1	1	1	$\frac{3}{5}$	0
	z	4	0	$\frac{11}{5}$	0

Baza rămâne primal admisibilă. Continuăm cu algoritmul simplex primal.

$z_2^B - c_2 = \frac{11}{5} \nleq 0 \Longrightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit.

$y_2^B = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \nleq 0 \Longrightarrow$ testul de optim infinit nu este îndeplinit.

$\max\left\{\frac{11}{5}\right\} = \frac{11}{5}$ atins pe coloana lui $x_2 \Longrightarrow x_2$ intră în bază.

$\min\left\{\frac{1}{\frac{6}{5}}, \frac{1}{\frac{3}{5}}\right\} = \min\left\{\frac{5}{6}, \frac{5}{3}\right\} = \frac{5}{6}$ atins pe linia lui $x_3 \Longrightarrow x_3$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3
x_2	$\frac{5}{6}$	0	1	$\frac{5}{6}$
x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
z	$\frac{13}{6}$	0	0	$-\frac{11}{6}$

$z_3^B - c_3 = -\frac{11}{6} \leq 0 \Longrightarrow$ testul de optim este îndeplinit $\Longrightarrow$ soluţie optimă este $x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = \frac{5}{6}, x_3^* = 0$, valoarea optimă este $\frac{13}{6}$.

d) Se modifică coloana VVB din ultimul tabel simplex de la a).

$$\overline{x}^B = B^{-1}b(\lambda) = B^{-1}\begin{pmatrix} 3+\lambda \\ 4-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3+\lambda \\ 4-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{4}{5}\lambda \\ 1-\frac{3}{5}\lambda \end{pmatrix}$$

c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3
-4	x_3	$1+\frac{4}{5}\lambda$	0	$\frac{6}{5}$	1
-3	x_1	$1-\frac{3}{5}\lambda$	1	$\frac{3}{5}$	0
	z	$-7-\frac{7}{5}\lambda$	0	$-\frac{43}{5}$	0

Baza rămâne dual admisibilă. Continuăm cu algoritmul simplex dual.

Determinăm valorile lui λ pentru care testul de optim e îndeplinit:

$\overline{x}^B \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1+\frac{4}{5}\lambda \\ 1-\frac{3}{5}\lambda \end{pmatrix} \geq 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+\frac{4}{5}\lambda \geq 0 \Longleftrightarrow \lambda \geq -\frac{5}{4} \\ 1-\frac{3}{5}\lambda \geq 0 \Longleftrightarrow \lambda \leq \frac{5}{3} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$ $\lambda \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{5}{3}\right]$.

Pentru $\lambda \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{5}{3}\right] \Longrightarrow$ soluţie optimă $\left(1-\frac{3}{5}\lambda, 0, 1+\frac{4}{5}\lambda\right)$, valoarea optimă $-7-\frac{7}{5}\lambda$.

Pentru $\lambda < -\frac{5}{4} \Longrightarrow \overline{x}_3^B = 1+\frac{4}{5}\lambda < 0 \Longrightarrow \overline{x}^B \ngeq 0 \Longrightarrow$ testul de optim nu e îndeplinit.

$\left.\begin{array}{l} \overline{x}_3^B = 1+\frac{4}{5}\lambda < 0 \\ y_{3j}^B \geq 0, j = \overline{1,3} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ problema nu are soluţie admisibilă.

Pentru $\lambda > \frac{5}{3} \Longrightarrow \overline{x}_1^B = 1-\frac{3}{5}\lambda < 0 \Longrightarrow \overline{x}^B \ngeq 0 \Longrightarrow$ testul de optim nu e îndeplinit.

$\left.\begin{array}{l}\overline{x}_1^B = 1 - \frac{3}{5}\lambda < 0 \\ y_{1j}^B \geq 0, j = \overline{1,3}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ problema nu are soluţie admisibilă.

e) Se modifică linia z din ultimul tabel simplex de la punctul a).

				$2+\lambda$	
c_B	VB	VVB	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3
$-4+2\lambda$	$\leftarrow x_3$	1	0	$\boxed{\frac{6}{5}}$	1
$-3-\lambda$	x_1	1	1	$\frac{3}{5}$	0
	z	$-7+\lambda$	0	$-\frac{43}{5}+\frac{4}{5}\lambda$	0

Baza rămâne primal admisibilă. Continuăm cu algoritmul simplex primal.

Determinăm valorile lui λ pentru care testul de optim e îndeplinit:

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \iff -\frac{43}{5} + \frac{4}{5}\lambda \leq 0 \iff \lambda \leq \frac{43}{4}$.

Pentru $\lambda \in \left(-\infty, \frac{43}{4}\right] \Longrightarrow$ soluţie optimă $(1,0,1)$, valoarea optimă $-7+\lambda$.

Pentru $\lambda > \frac{43}{4}$:

$z_2^B - c_2 = -\frac{43}{5} + \frac{4}{5}\lambda > 0 \Longrightarrow$ testul de optim nu e îndeplinit.

$y_2^B = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \not\leq 0 \Longrightarrow$ testul de optim infinit nu e îndeplinit.

$\max\left(-\frac{43}{5} + \frac{4}{5}\lambda\right) = -\frac{43}{5} + \frac{4}{5}\lambda \Longrightarrow x_2$ intră în bază.

$\min\left(\frac{1}{\frac{6}{5}}, \frac{1}{\frac{3}{5}}\right) = \frac{5}{6} \Longrightarrow x_3$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3
x_2	$\frac{5}{6}$	0	1	$\frac{5}{6}$
x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
z	$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\lambda$	0	0	$\frac{43}{6}-\frac{2}{3}\lambda$

$\lambda > \frac{43}{4} \Longrightarrow z_3^B - c_3 = \frac{43}{6} - \frac{2}{3}\lambda < 0 \Longrightarrow z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \Longrightarrow$ soluţie optimă $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 0\right)$, valoarea optimă $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\lambda$.

Cercetări operaţionale 11

Cristian Niculescu

1 Curs 11

1.1 Problema de transport

1.1.1 Introducere

Sunt m depozite şi n beneficiari. Se dau:
a_i, cantitatea de marfă din depozitul $i, i = \overline{1, m}$;
b_j, cantitatea de marfă cerută de beneficiarul $j, j = \overline{1, n}$;
c_{ij}, costul transportului unei unităţi de marfă de la depozitul i la beneficiarul $j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.
Se cere să se organizeze transportul mărfii de la depozite la beneficiari astfel încât costul total să fie minim.
Fie x_{ij}, cantitatea de marfă care trebuie transportată de la depozitul i la beneficiarul $j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.
Problema de transport este

$$\begin{cases} \inf\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Propoziţie. Condiţia necesară şi suficientă ca problema de transport să aibă soluţie admisibilă este:

$$\begin{cases} a_i \geq 0, i = \overline{1,m} \\ b_j \geq 0, j = \overline{1,n} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \end{cases}$$

Demonstraţie. ($\Rightarrow$) Fie $(\overline{x}_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$ soluţie admisibilă în problema de transport $\Rightarrow a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{x}_{ij} \geq 0, \forall i = \overline{1,m}$,

$b_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{x}_{ij} \geq 0, \forall j = \overline{1,n}$,

$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{x}_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{x}_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$

($\Leftarrow$)Dacă $S := \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = 0 \implies a_i = 0, \forall i = \overline{1,m}, b_j = 0, \forall j = \overline{1,n} \implies$
$x_{ij} = 0, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ este soluţie admisibilă pentru problema de transport.
Dacă $S > 0 \implies \widetilde{x}_{ij} = \frac{a_i b_j}{S}, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ este soluţie admisibilă pentru problema de transport.
În continuare, presupunem că problema este echilibrată, adică $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ (oferta totală = cererea totală), $a_i \geq 0, i = \overline{1,m}$ şi $b_j \geq 0, j = \overline{1,n}$.

Observaţii

1) $(x_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$ soluţie admisibilă în problema de transport $\implies 0 \leq x_{ij} \leq min(a_i, b_j), \forall i, j \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor admisibile a problemei de transport este mărginită. Cum este şi închisă $\implies$ este compactă. Deoarece funcţia obiectiv este continuă, din teorema lui Weierstrass $\implies$ problema de transport are soluţie optimă.

2)$c'_{ij} = c_{ij} + k_i + k'_j, \forall i, j, k_i, k'_j$ constante arbitrare $\implies$ Problema de transport obţinută cu c'_{ij} în loc de c_{ij} are aceleaşi soluţii optime.

Demonstraţie. $(x_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$ soluţie admisibilă $\implies \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c'_{ij} x_{ij} =$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k'_j x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} k_i a_i + \sum_{j=1}^{n} k'_j b_j}_{\text{constantă}}.$$

1.1.2 Notaţii

$a^{ij} = e^i + e^{m+j} \in \mathbb{R}^{m+n}$ este coloana din sistem corespunzătoare lui x_{ij}.
$A = (a^{11}, a^{12}, ..., a^{1n}, a^{21}, ..., a^{2n}, ..., a^{m1}, ..., a^{mn}) \in \mathcal{M}_{m+n,mn}(\mathbb{R})$
$c = (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n}, c_{21}, ..., c_{2n}, ..., c_{m1}, ..., c_{mn})^T \in \mathbb{R}^{mn}$
$x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, ..., x_{mn})^T \in \mathbb{R}^{mn}$
$b = (a_1, .., a_m, b_1, ..., b_n)^T \in \mathbb{R}^{m+n}$
Problema de transport se scrie:

$$\begin{cases} \inf \left(c^T x\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

1.1.3 Proprietăţile matricei A

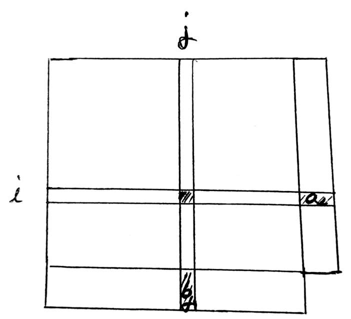
Propoziţia 1. $rang(A) = m + n - 1$.
Demonstraţie. $A \in \mathcal{M}_{m+n,mn}(\mathbb{R}) \implies rang(A) \leq m + n$
Suma primelor m linii are toate componentele 1 şi este egală cu suma ultimelor n linii $\implies$ liniile lui A sunt vectori liniar dependenţi $\implies rang(A) \neq m + n \implies rang(A) \leq m + n - 1$
Fie $\widetilde{a}^{ij}$, vectorul obţinut din a^{ij} eliminând componenta m+1.
$\widetilde{a}^{ij} \in \mathbb{R}^{m+n-1}$.

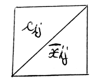
$\widetilde{A} = (\widetilde{a}^{11}, \widetilde{a}^{12}, ..., \widetilde{a}^{m1}, \widetilde{a}^{m2}, ..., \widetilde{a}^{mn}) = \begin{pmatrix} 1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+n-1}(\mathbb{R}) \implies \det(\widetilde{A}) = 1 \neq 0 \implies rang(A) = m + n - 1$.
Propoziţia 2. Orice minor al lui A are valoarea 1, -1 sau 0 (se spune că A este total unimodulară).
Demonstraţie. Fie A_k, submatrice de ordinul k, având elemente din A. Inducţie după k.
$k = 1 \implies A_1 = 0$ sau $1 \implies \det(A_1) = 0$ sau 1.
Presupunem adevărat pentru $k - 1$.
a) Fiecare coloană din A_k are 2 elemente =1 $\implies$ suma liniilor lui A_k provenite din primele m linii ale lui A = suma liniilor lui A_k provenite din ultimele n linii ale lui $A = (1, ..., 1) \implies$ liniile lui A_k sunt liniar dependente $\implies \det(A_k) = 0$.
b) $\exists$ o coloană a lui A_k având un singur 1 $\implies \det(A_k) = \pm$ un determinant de ordin $k - 1 = 0, 1$ sau -1 (ipoteza de inducţie)
c) $\nexists$ o coloană din A_k având un singur 1 şi a) nu e îndeplinită $\implies \exists$ o coloană din A_k egală cu 0 $\implies det(A_k) = 0$.

Fie B, o matrice cu $m+n-1$ coloane liniar independende din A.
B are $m+n$ linii şi $m+n-1$ coloane.
Eliminând o linie din B $\Longrightarrow$ matrice de ordin $m+n-1$, bază. Asociem fiecare bază cu $m+n-1$ coloane liniar independende din A. Soluţia de bază se obţine rezolvând un sistem de $m+n-1$ ecuaţii şi $m+n-1$ necunoscute (variabilele secundare se anulează).
Corolar. $a_i, b_j \in \mathbb{Z}, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \Longrightarrow$
1)Toate soluţiile de bază ale problemei de transport au componente întregi.
2)$\exists$ o soluţie optimă cu componente întregi.
Demonstraţie. 1) $\Delta = \pm 1$ în regula lui Cramer. Determinanţii de la numărător sunt întregi $\Longrightarrow$ soluţia de bază are componente întregi.
2)Teorema fundamentală a optimizării liniare, $\exists$ soluţie optimă $\Longrightarrow$ $\exists$ soluţie optimă de bază $\overset{1)}{\Longrightarrow}$ are toate componentele întregi.
Definiţii. $(i,j) \in \{1,2,...,m\} \times \{1,2,...,n\}$ se numeşte celulă.
$(i_1,j_1),(i_1,j_2),...,(i_k,j_k),(i_k,j_1)$ se numeşte ciclu $\Longleftrightarrow$ $1 \le i_1, i_2, ..., i_k \le m$ distincte, $1 \le j_1, j_2, ..., j_k \le n$ distincte.
Observaţie. Numărul de celule este par în ciclu.
Propoziţia 3. O condiţie suficientă ca o mulţime de coloane din A să fie liniar dependentă este ca celulele corespunzătoare să formeze un ciclu. În plus, dacă ciclul este cel de mai sus, atunci:
$a^{i_1j_1} - a^{i_1j_2} + a^{i_2j_2} - ... + a^{i_kj_k} - a^{i_kj_1} = 0$
Demonstraţie. $a^{i_1j_1} - a^{i_1j_2} + a^{i_2j_2} - ... + a^{i_kj_k} - a^{i_kj_1} = (e^{i_1} + e^{m+j_1}) - (e^{i_1} + e^{m+j_2}) + (e^{i_2} + e^{m+j_2}) - ... + (e^{i_k} + e^{m+j_k}) - (e^{i_k} + e^{m+j_1}) = 0.$
Consecinţă. În mulţimea celulelor corespunzătoare unei baze $\nexists$ cicli.

1.1.4 Adaptarea algoritmului simplex primal pentru rezolvarea problemei de transport

Tabelul de transport





celula (i,j) pentru o variabilă de bază
Fie B, o matrice cu $m+n-1$ coloane liniar independente din A astfel încât soluţia de bază asociată ei este admisibilă.
$\mathcal{B} := \left\{(i,j)|a^{ij} \text{ coloană în } B\right\}$ este mulţimea celulelor de bază.
$\mathcal{R} := \{1,2,...,m\} \times \{1,2,...,n\} \setminus \mathcal{B}$ este mulţimea celulelor secundare.
Teoremă. $\forall (s,k) \in \mathcal{R}, \exists!$ ciclu determinat de (s,k) şi o parte din celulele lui $\mathcal{B}$.

La simplex: $y_j^B = B^{-1}a^j \Rightarrow a^j = By_j^B = \sum\limits_{i\in B} y_{ij}^B a^i$.
La transport: $(s,k) \in \mathcal{R} \implies \exists!$ ciclu $(s,k),(s,j_1),(i_1,j_1),...,(i_\nu,j_\nu),(i_\nu,k)$ astfel încât $(s,j_1),(i_1,j_1),...,(i_\nu,j_\nu),(i_\nu,k) \in \mathcal{B}$ şi
$a^{sk} - a^{sj_1} + a^{i_1j_1} - ... + a^{i_\nu j_\nu} - a^{i_\nu k} = 0 \implies a^{sk} = a^{sj_1} - a^{i_1j_1} + ... - a^{i_\nu j_\nu} + a^{i_\nu k}$.
În membrul drept sunt coloanele din B, ale căror coeficienţi sunt chiar componentele lui $y^{sk} \implies$

$$y_{ij}^{sk} = \begin{cases} 1, \text{dacă}(i,j) \text{ are rang par în ciclu} \\ -1, \text{dacă}(i,j) \text{ are rang impar în ciclu} \\ 0, \text{dacă}(i,j) \notin \text{ciclului} \end{cases}$$

La simplex: $z_j^B - c_j = c_B^T y_j^B - c_j = \sum\limits_{i\in\mathcal{B}} c_i y_{ij}^B - c_j$
La transport: $(s,k) \in \mathcal{R} \implies z_{sk} - c_{sk} = \sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{B}} c_{ij} y_{ij}^{sk} - c_{sk} = c_{sj_1} - c_{i_1j_1} + ... - c_{i_\nu j_\nu} + c_{i_\nu k} - c_{sk}$
$|\mathcal{B}| = m+n-1$. Sunt mn celule $\implies$ sunt $mn - m - n + 1 = (m-1)(n-1)$ celule secundare.
Criteriul de intrare în bază:
La simplex: $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k^B - c_k = \max\left\{z_j^B - c_j | j \in \mathcal{R}, z_j^B - c_j > 0\right\} \implies$ a^k intră în bază.
La transport: $(s,k) \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_{sk} - c_{sk} = \max\{z_{ij} - c_{ij} | (i,j) \in \mathcal{R}, z_{ij} - c_{ij} > 0\} \implies$ (s,k) intră în bază.
Criteriul de ieşire din bază:
La algoritmul simplex: $\min\limits_{i|y_{ik}^B>0} \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} = \frac{\overline{x}_r^B}{y_{rk}^B} \implies a^r$ iese din bază.
La transport: $\left(\min\limits_{(i,j)|y_{ij}^{sk}>0} \frac{\overline{x}_{ij}}{y_{ij}^{sk}} = \frac{\overline{x}_{rt}}{y_{rt}^{sk}} \implies (r,t) \text{ iese din bază}\right)$
$\iff ((r,t)$ de rang par în ciclu astfel încât $\overline{x}_{rt} = \min\limits_{(i,j) \text{ de rang par în ciclu}} \overline{x}_{ij} \implies$ (r,t) iese din bază$)$
La algoritmul simplex: $\overline{x}_i^{\widetilde{B}} = \overline{x}_i^B - \frac{y_{ik}^B \overline{x}_r^B}{y_{rk}^B}$.

La transport:
Fie $\widetilde{B}$, obţinută înlocuind a^{rt} cu a^{sk} în B.
Fie $\overline{x}_{ij}$, valorile soluţiei de bază pentru B şi $\widetilde{x}_{ij}$, valorile soluţiei de bază pentru $\widetilde{B}$.
$\widetilde{x}_{ij} = \overline{x}_{ij} - \frac{y_{ij}^{sk}\overline{x}_{rt}}{y_{rt}^{sk}} \implies$

$$\widetilde{x}_{ij} = \begin{cases} \overline{x}_{ij} - \overline{x}_{rt}, \text{dacă (i,j) are rang par în ciclu} \\ \overline{x}_{ij} + \overline{x}_{rt}, \text{dacă (i,j) are rang impar în ciclu} \\ \overline{x}_{ij}, \text{dacă } (i,j) \notin \text{ciclului} \end{cases}$$

1.1.5 Utilizarea rezultatelor de dualitate

$$\begin{cases} \inf\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \leftrightsquigarrow u_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} \leftrightsquigarrow v_j \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{1}$$

are duala

$$\begin{cases} \sup\left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) \\ u_i + v_j \leq c_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \\ u_i \text{ arbitrar}, i = \overline{1,m}, v_j \text{ arbitrar}, j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{2}$$

Teorema slabă a ecarturilor complementare $\implies$
$(\overline{x}_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$ soluţie admisibilă pentru (1) şi $(\overline{u}_i, \overline{v}_j)_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$ soluţie admisibilă pentru (2) sunt optime $\iff$

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{x}_{ij} - a_i\right)\overline{u}_i = 0, \forall i = \overline{1,m} \text{ (este îndeplinită)} \\ \left(\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_{ij} - b_j\right)\overline{v}_j = 0, \forall j = \overline{1,n} \text{ (este îndeplinită)} \\ (c_{ij} - \overline{u}_i - \overline{v}_j)\overline{x}_{ij} = 0, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Fie $(\overline{x}_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$ soluţie admisibilă de bază pentru (1), corespunzătoare lui B.

$(i,j) \in \mathcal{R} \implies \overline{x}_{ij} = 0$
Pentru ca $(c_{ij} - \overline{u}_i - \overline{v}_j)\overline{x}_{ij} = 0, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ este suficent ca $c_{ij} - \overline{u}_i - \overline{v}_j = 0, \forall (i,j) \in \mathcal{B}$.
$u_i + v_j = c_{ij}, (i,j) \in \mathcal{B}$ are soluţie? Dacă da şi soluţia este admisibilă pentru (2), atunci este optimă pentru (2) şi $(\overline{x}_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ este optimă pentru (1).
Sistemul are $m+n-1$ ecuaţii şi $m+n$ necunoscute.
$\{u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i,j) \in \mathcal{B}$
Sistemul are întotdeauna soluţie.
Dacă $(\overline{u}_i, \overline{v}_j)_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ e soluţie particulară a sistemului, atunci $z_{sk} - c_{sk} = \overline{u}_s + \overline{v}_k - c_{sk}, \forall (s,k) \in \mathcal{R}$.
Demonstraţie. $\forall (s,k) \in \mathcal{R}, \exists!$ ciclu $(s,k), (s,j_1), (i_1,j_1), ..., (i_\nu, j_\nu), (i_\nu, k)$ astfel încât $(s,j_1), (i_1,j_1), ..., (i_\nu, j_\nu), (i_\nu, k) \in \mathcal{B}$.
$\overline{u}_i + \overline{v}_j = c_{ij}, \forall (i,j) \in \mathcal{B}$
$z_{sk} - c_{sk} = c_{sj_1} - c_{i_1 j_1} + ... - c_{i_\nu j_\nu} + c_{i_\nu k} - c_{sk} = (\overline{u}_s + \overline{v}_{j_1}) - (\overline{u}_{i_1} + \overline{v}_{j_1}) + ... - (\overline{u}_{i_\nu} + \overline{v}_{j_\nu}) + (\overline{u}_{i_\nu} + \overline{v}_k) - c_{sk} = \overline{u}_s + \overline{v}_k - c_{sk}$ (restul se reduc).

1.1.6 Algoritmul de transport

Pasul 0. Se determină o soluţie admisibilă de bază $(\overline{x}_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ şi $\mathcal{B}$, mulţimea celulelor de bază.
Pasul 1 (testul de optim). Se obţine o soluţie $(\overline{u}_i, \overline{v}_j)_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ a sistemului $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i,j) \in \mathcal{B}$ şi se calculează $z_{ij} - c_{ij} = \overline{u}_i + \overline{v}_j - c_{ij} \forall (i,j) \in \mathcal{R}$. Dacă $z_{ij} - c_{ij} \leq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{R}$ atunci $(\overline{x}_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ este soluţie optimă; se calculează valoarea optimă $\sum\limits_{(i,j) \in \mathcal{B}} c_{ij}\overline{x}_{ij}$, STOP.
Pasul 2 (schimbarea bazei). Se determină $(s,k) \in \mathcal{R}$ astfel încât
$z_{sk} - c_{sk} = \max\limits_{(i,j) \in \mathcal{R}} (z_{ij} - c_{ij})$.
Se determină ciclul corespunzător celulei (s,k) cu celule din $\mathcal{B}$, plecând mai întâi pe linie sau pe coloană şi mergând alternativ, o dată pe linie şi o dată pe coloană, până ne putem întoarce în celula (s,k).
Se determină $(r,t) \in \mathcal{B}$, de rang par în ciclu astfel încât
$\overline{x}_{rt} = \min\{\overline{x}_{ij} | (i,j)$ are rang par în ciclu$\}$
Fie $\widetilde{B}$, obţinută din B înlocuind a^{rt} cu a^{sk}

$$\widetilde{x}_{ij} = \begin{cases} \overline{x}_{ij} - \overline{x}_{rt}, \text{dacă } (i,j) \text{ are rang par în ciclu} \\ \overline{x}_{ij} + \overline{x}_{rt}, \text{dacă } (i,j) \text{ are rang impar în ciclu} \\ \overline{x}_{ij}, \text{dacă } (i,j) \notin \text{ciclului} \end{cases}$$

$\widetilde{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \setminus \{(r,t)\}) \cup \{(s,k)\})$.

Ne întoarcem la pasul 1.

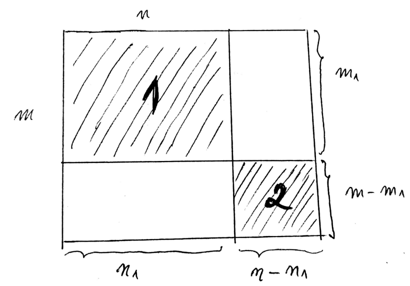
1.1.7 Determinarea unei soluţii de bază iniţiale

(i, j) se alege în $\mathcal{B}$.
$\overline{x}_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$.
Dacă $\overline{x}_{ij} = a_i$, atunci se înlocuieşte b_j cu $b'_j = b_j - \overline{x}_{ij}$ şi se elimină linia i din tabelul de transport.
Dacă $\overline{x}_{ij} = b_j$, atunci se înlocuieşte a_i cu $a'_i = a_i - \overline{x}_{ij}$ şi se elimină coloana j din tabelul de transport.
Se repetă procedeul pentru noul tabel de transport.
Soluţia care se obţine este de bază.
Metode particulare
Metoda colţului de nord-vest: se alege celula din stânga sus.
Metoda costului minim: se alege celula cu cel mai mic cost din tabel.

1.1.8 Convergenţa într-un număr finit de paşi

Este asigurată, dacă problema este nedegenerată.
Propoziţie. O condiţie suficientă ca problema de transport să fie degenerată este ca să existe $\emptyset \neq M \subsetneqq \{1, ..., m\}$ şi $\emptyset \neq N \subsetneqq \{1, ..., n\}$ astfel încât $\sum\limits_{j \in M} a_i = \sum\limits_{j \in N} b_j$.
Demonstraţie.
Renumerotând, $M = \{1, ..., m_1\}, m_1 < m, N = \{1, ..., n_1\}, n_1 < n$.

$$\sum_{i=1}^{m_1} a_i = \sum_{j=1}^{n_1} b_j ; \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \implies \sum_{i=m_1+1}^{m} a_i = \sum_{j=n_1+1}^{n} b_j$$



Pentru tabelele haşurate este valabil $\sum a_i = \sum b_j \implies \exists$ o soluţie de bază a problemelor de transport corespunzătoare celor 2 tabele haşurate.

Reunind soluţiile de bază ale celor 2 tabele haşurate se obţine o soluţie de bază pentru toată problema.
Pentru tabelul 1, numărul celulelor de bază e $m_1 + n_1 - 1$, deci soluţia din el are cel mult $m_1 + n_1 - 1$ componente nenule. Pentru tabelul 2, soluţia are cel mult $(m - m_1) + (n - n_1) - 1$ componente nenule.
Deci soluţia obţinută prin reunirea celor două soluţii are cel mult
$m_1 + n_1 - 1 + (m - m_1) + (n - n_1) - 1 = m + n - 2$ componente nenule; dar în bază sunt $m + n - 1$ celule $\Longrightarrow$ o variabila din bază este 0 $\Longrightarrow$ soluţia e degenerată, q.e.d.
Pentru evitarea ciclării se perturbă a_i şi b_j astfel încât orice $\sum\limits_{\text{parţială}} a_i \neq$ orice $\sum\limits_{\text{parţială}} b_j$.
$a'_i = a_i + \varepsilon, i = \overline{1, m}$.
$b'_j = b_j, j = \overline{1, n-1}$.
$b'_n = b_n + m\varepsilon \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} a'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b'_j$.
$\varepsilon > 0$ astfel încât $2m\varepsilon < 10^{-p}$, unde p este ordinul ultimei cifre semnificative din a_i, b_j.

2 Seminar 11

Să se rezolve problema de transport

8	3	5	2	10
4	1	6	7	15
1	9	4	3	25
5	10	20	15	

,

determinând o soluţie de bază iniţială cu:
a) metoda colţului de nord-vest;
b) metoda costului minim.

a)

8	/	3	/	5		2		
/	5	/	5					$10 \to 5$
4		1	/	6	/	7		
		/	5	/	10			$15 \to 10$
1		9		4	/	3	/	
				/	10	/	15	$25 \to 15$
5		$10 \to 5$		$20 \to 10$		15		

Se alege în bază celula din nord-vestul (stânga sus) tabelului rămas.

$$(1,1)\in\mathcal{B} \implies \begin{cases} \overline{x}_{11}=\min(a_1,b_1)=\min(10,5)=5 \text{ (se scrie sub diagonală în celula } (1,1)\text{)} \\ \min(a_1,b_1)=\min(10,5)=5=b_1 \implies \begin{cases} \text{se elimină coloana 1} \\ a_1 \leftarrow a_1-b_1=10-5=5 \end{cases} \end{cases}$$

$$(1,2)\in\mathcal{B} \implies \begin{cases} \overline{x}_{12}=\min(a_1,b_2)=\min(5,10)=5 \\ \min(a_1,b_2)=\min(5,10)=5=a_1 \implies \begin{cases} \text{se elimină linia 1} \\ b_2 \leftarrow b_2-a_1=10-5=5 \end{cases} \end{cases}$$

$$(2,2)\in\mathcal{B} \implies \begin{cases} \overline{x}_{22}=\min(a_2,b_2)=\min(15,5)=5 \\ \min(a_2,b_2)=\min(15,5)=5=b_2 \implies \begin{cases} \text{se elimină coloana 2} \\ a_2 \leftarrow a_2-b_2=15-5=10 \end{cases} \end{cases}$$

$$(2,3)\in\mathcal{B} \implies \begin{cases} \overline{x}_{23}=\min(a_2,b_3)=\min(10,20)=10 \\ \min(a_2,b_3)=\min(10,20)=10=a_2 \implies \begin{cases} \text{se elimină linia 2} \\ b_3 \leftarrow b_3-a_2=20-10=10 \end{cases} \end{cases}$$

$$(3,3)\in\mathcal{B} \implies \begin{cases} \overline{x}_{33}=\min(a_3,b_3)=\min(25,10)=10 \\ \min(a_3,b_3)=\min(25,10)=10=b_3 \implies \begin{cases} \text{se elimină coloana 3} \\ a_3 \leftarrow a_3-b_3=25-10=15 \end{cases} \end{cases}$$

$(3,4)\in\mathcal{B} \implies \overline{x}_{34}=\min(a_3,b_4)=\min(15,15)=15.$

$\mathcal{B}=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4)\}.$

La ultima celulă din bază a_i-ul rămas $=$ b_j-ul rămas($=15$ la noi), deoarece problema e echilibrată $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$.

	$v_1=8$		$v_2=3$		$v_3=8$		$v_4=7$		
$u_1=0$	8	/	3∗	/	5	3	2	5	
	/	5	/	5					10
$u_2=-2$	4	2	1	/	6∗	/	7	-2	
			/	5	/	10			15
$u_3=-4$	1	3	9	-10	4	/	3∗	/	
					/	10	/	15	25
	5		10		20		15		

Metode de verificare:

- $|\mathcal{B}|=m+n-1\,(=3+4-1=6)$;

- suma valorilor celulelor de pe fiecare linie trebuie sa fie egală cu a_i-ul corespunzător $(5+5=10, 5+10=15, 10+15=25)$, iar de pe fiecare coloană trebuie să fie egală cu b_j-ul corespunzător $(5=5, 5+5=10, 10+10=20, 15=15)$;

- valorile celulelor sunt ≥ 0.

Determinăm variabilele din problema duală u_i şi v_j, care verifică sistemul

$u_i + v_j = c_{ij}, (i,j) \in \mathcal{B} \iff \begin{cases} u_1 + v_1 = 8 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_2 = 1 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_3 = 4 \\ u_3 + v_4 = 3 \end{cases}$. Punem $u_1 = 0 \implies v_1 = 8, v_2 = 3, u_2 = -2, v_3 = 8, u_3 = -4, v_4 = 7$. Aceste valori se trec în jurul tabelului de transport.

Determinăm $z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \forall (i,j) \in \mathcal{R}$:
$z_{13} - c_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 8 - 5 = 3$;
$z_{14} - c_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 7 - 2 = 5$;
$z_{21} - c_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 8 - 4 = 2$;
$z_{24} - c_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -2 + 7 - 7 = -2$;
$z_{31} - c_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -4 + 8 - 1 = 3$;
$z_{32} - c_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -4 + 3 - 9 = -10$.

Aceste valori se trec în colţurile din dreapta sus ale celulelor respective.

Testul de optim $z_{ij} - c_{ij} \le 0, \forall (i,j) \in \mathcal{R}$ nu e îndeplinit, deoarece, de exemplu, $z_{13} - c_{13} = 3 \nleq 0$.

Criteriul de intrare în bază: $(s,k) \in \mathcal{R}$ a. î. $z_{sk} - c_{sk} = \max\limits_{(i,j)\in\mathcal{R}} (z_{ij} - c_{ij}) \implies (s,k)$ intră în bază.

$\max\limits_{(i,j)\in\mathcal{R}} (z_{ij} - c_{ij}) = \max(z_{13} - c_{13}, z_{14} - c_{14}, z_{21} - c_{21}, z_{24} - c_{24}, z_{31} - c_{31}, z_{32} - c_{32}) = \max(3, 5, 2, -2, 3, -10) = 5 = z_{14} - c_{14} \implies (1,4)$ intră în bază.

Construim ciclul format de celula care intră în bază cu celulele bazei. Se pleacă din celula care intră în bază şi se merge o dată pe coloană şi o dată pe linie, prin celule de bază, până ne întoarcem de unde am plecat. Ciclul se desenează în tabel.

ciclu:	$(1,4)$	$(3,4)$	$(3,3)$	$(2,3)$	$(2,2)$	$(1,2)$
rang:	1	2	3	4	5	6

Notăm celulele de rang par în ciclu cu * în tabel.

Criteriul de ieşire din bază: (r,t) de rang par în ciclu a. î. $\overline{x}_{rt} = \min\{\overline{x}_{ij} | (i,j)$ are rang par în ciclu$\} \implies (r,t)$ iese din bază.

$\min\{\overline{x}_{ij} | (i,j)$ de rang par în ciclu$\} = \min(\overline{x}_{34}, \overline{x}_{23}, \overline{x}_{12}) = \min(15, 10, 5) = 5 = \overline{x}_{12} \implies (1,2)$ iese din bază.

$$\widetilde{x}_{ij} = \begin{cases} \overline{x}_{ij} - \overline{x}_{rt}, \text{ dacă } (i,j) \text{ are rang par în ciclu;} \\ \overline{x}_{ij} + \overline{x}_{rt}, \text{ dacă } (i,j) \text{ are rang impar în ciclu;} \\ \overline{x}_{ij}, \text{ dacă } (i,j) \text{ nu e în ciclu.} \end{cases}$$

$\widetilde{x}_{14} = \overline{x}_{14} + \overline{x}_{12} = 0 + 5 = 5$;
$\widetilde{x}_{34} = \overline{x}_{34} - \overline{x}_{12} = 15 - 5 = 10$;
$\widetilde{x}_{33} = \overline{x}_{33} + \overline{x}_{12} = 10 + 5 = 15$;
$\widetilde{x}_{23} = \overline{x}_{23} - \overline{x}_{12} = 10 - 5 = 5$;

$\widetilde{x}_{22} = \overline{x}_{22} + \overline{x}_{12} = 5 + 5 = 10;$
$\widetilde{x}_{11} = \overline{x}_{11} = 5.$

	$v_1 = 8$		$v_2 = -2$		$v_3 = 3$		$v_4 = 2$		
$u_1 = 0$	8∗	$\diagup$	3	-5	5	-2	2	$\diagup$	
	$\diagup$	5					$\diagup$	5	10
$u_2 = 3$	4	7	1	$\diagup$	6	$\diagup$	7	-2	
			$\diagup$	10	$\diagup$	5			15
$u_3 = 1$	1	8	9	-10	4	$\diagup$	3∗	$\diagup$	
					$\diagup$	15	$\diagup$	10	25
	5		10		20		15		

$z_{21} - c_{21} = 7 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.
$\max(-5, -2, 7, -2, 8, -10) = 8 \implies (3, 1)$ intră în bază.
ciclu: $(3, 1), (1, 1), (1, 4), (3, 4)$.
$\min(5, 10) = 5 \implies (1, 1)$ iese din bază.
$(r, t) = (1, 1); \overline{x}_{rt} = 5.$

	$v_1 = 0$		$v_2 = -2$		$v_3 = 3$		$v_4 = 2$		
$u_1 = 0$	8	-8	3	-5	5	-2	2	$\diagup$	
							$\diagup$	10	10
$u_2 = 3$	4	-1	1	$\diagup$	6	$\diagup$	7	-2	
			$\diagup$	10	$\diagup$	5			15
$u_3 = 1$	1	$\diagup$	9	-10	4	$\diagup$	3	$\diagup$	
	$\diagup$	5			$\diagup$	15	$\diagup$	5	25
	5		10		20		15		

$z_{ij} - c_{ij} \leq 0, \forall (i, j) \in \mathcal{R} \implies$ soluţie optimă $x^*_{14} = 10, x^*_{22} = 10, x^*_{23} = 5, x^*_{31} = 5, x^*_{33} = 15, x^*_{34} = 5, x^*_{11} = x^*_{12} = x^*_{13} = x^*_{21} = x^*_{24} = x^*_{32} = 0$, valoarea optimă $2 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 5 = 140$.

b)

8		3		5		2	$\diagup$	
						$\diagup$	10	10
4		1	$\diagup$	6	$\diagup$	7		
		$\diagup$	10	$\diagup$	5			$15 \to 5$
1	$\diagup$	9		4	$\diagup$	3	$\diagup$	
$\diagup$	5			$\diagup$	15	$\diagup$	5	$25 \to 20 \to 15$
5		10		$20 \to 5$		$15 \to 5$		

Se alege în bază celula de cost minim din tabelul rămas.

$$(2,2) \in \mathcal{B} \implies \begin{cases} \overline{x}_{22} = \min(a_2, b_2) = \min(15, 10) = 10 \\ \min(a_2, b_2) = \min(15, 10) = 10 = b_2 \implies \begin{cases} \text{se elimină coloana 2} \\ a_2 \leftarrow a_2 - b_2 = 15 - 10 = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$(3,1) \in \mathcal{B} \implies \begin{cases} \overline{x}_{31} = \min(a_3, b_1) = \min(25, 5) = 5 \\ \min(a_3, b_1) = \min(25, 5) = 5 = b_1 \implies \begin{cases} \text{se elimină coloana 1} \\ a_3 \leftarrow a_3 - b_1 = 25 - 5 = 20 \end{cases} \end{cases}$$

$$(1,4) \in \mathcal{B} \implies \begin{cases} \overline{x}_{14} = \min(a_1, b_4) = \min(10, 15) = 10 \\ \min(a_1, b_4) = \min(10, 15) = 10 = a_1 \implies \begin{cases} \text{se elimină linia } 1 \\ b_4 \leftarrow b_4 - a_1 = 15 - 10 = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$(3,4) \in \mathcal{B} \implies \begin{cases} \overline{x}_{34} = \min(a_3, b_4) = \min(20, 5) = 5 \\ \min(a_3, b_4) = \min(20, 5) = 5 = b_4 \implies \begin{cases} \text{se elimină coloana } 4 \\ a_3 \leftarrow a_3 - b_4 = 20 - 5 = 15 \end{cases} \end{cases}$$

$$(3,3) \in \mathcal{B} \implies \begin{cases} \overline{x}_{33} = \min(a_3, b_3) = \min(15, 20) = 15 \\ \min(a_3, b_3) = \min(15, 20) = 15 = a_3 \implies \begin{cases} \text{se elimină linia } 3 \\ b_3 \leftarrow b_3 - a_3 = 20 - 15 = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$(2,3) \in \mathcal{B} \implies \overline{x}_{23} = \min(a_2, b_3) = \min(5, 5) = 5.$

$\mathcal{B} = \{(2,2), (3,1), (1,4), (3,4), (3,3), (2,3)\}.$

	$v_1 = 0$	$v_2 = -2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$	
$u_1 = 0$	8 $\boxed{-8}$	3 $\boxed{-5}$	5 $\boxed{-2}$	2 / 10	10
$u_2 = 3$	4 $\boxed{-1}$	1 / 10	6 / 5	7 $\boxed{-2}$	15
$u_3 = 1$	1 / 5	9 $\boxed{-10}$	4 / 15	3 / 5	25
	5	10	20	15	

$z_{ij} - c_{ij} \le 0, \forall (i,j) \in \mathcal{R} \implies$ soluţie optimă $x^*_{14} = 10, x^*_{22} = 10, x^*_{23} = 5, x^*_{31} = 5, x^*_{33} = 15, x^*_{34} = 5, x^*_{11} = x^*_{12} = x^*_{13} = x^*_{21} = x^*_{24} = x^*_{32} = 0$, valoarea optimă $2 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 5 = 140.$

Cercetări operaţionale 12

Cristian Niculescu

1 Curs 12

1.1 Optimizare liniară în numere întregi

Fie problema de optimizare:

$$\begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x_j \in S_j, \forall j \in J, \end{cases} \quad \text{unde } \emptyset \neq J \subseteq \{1, \ldots, n\} \text{ și } S_j \subseteq \mathbb{Z}, \forall j \in J.$$

Dacă $J = \{1, \ldots, n\}$, problema este total în numere întregi. Dacă $J \subsetneqq \{1, \ldots, n\}$, problema este parțial în numere întregi (mixtă). În cazul în care $S_j = \{0, 1\}, \forall j \in J$ atunci avem variabile bivalente.

Problema se poate scrie echivalent:

$$(1) \begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in J \end{cases}$$

Exemplu: $S_j = \{0, 1\}$

$$x_j \in S_j \iff \begin{cases} x_j \in \mathbb{Z} \\ x_j \leq 1 \\ x_j \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_j \in \mathbb{Z} \\ x_j + y_j = 1 \\ x_j, y_j \geq 0 \end{cases}$$

Fie problema:

$$(2) \begin{cases} \inf(c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Fie

$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$
$P_1 = \{x \in P | x_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in J\}$
Atunci
(1) $\inf\limits_{x \in P_1} c^T x$,

(2) $\inf\limits_{x \in P} c^T x$.

Lemă. x^* soluție optimă în (2) și $x^* \in P_1 \implies x^*$ soluție optimă în (1).
Demonstrație. $P_1 \subset P \implies \inf\limits_{x \in P_1} c^T x \geq \inf\limits_{x \in P} c^T x$.
x^* soluție optimă în (2) $\implies c^T x^* = \inf\limits_{x \in P} c^T x$.
$x^* \in P_1 \implies c^T x^* \geq \inf\limits_{x \in P_1} c^T x$.
Din toate cele trei $\implies c^T x^* \geq \inf\limits_{x \in P_1} c^T x \geq c^T x^* \implies c^T x^* = \inf\limits_{x \in P_1} c^T x \overset{x^* \in P_1}{\implies}$
x^* soluție optimă în (1).

Se rezolvă problema (2).
Dacă $P = \emptyset$, atunci $P_1 = \emptyset$ deci problema (1) nu are soluţie admisibilă, STOP.
Dacă problema (2) are optim infinit, atunci problema (1) are optim infinit, soluţie optimă sau nu are soluţie admisibilă, STOP.
Dacă $P \neq \emptyset$ şi problema (2) are soluție optimă x^*:
Cazul I: Dacă $x^* \in P_1$, atunci x^* este soluție optimă pentru problema (1), STOP.
Cazul II: Dacă $x^* \notin P_1$ atunci determinăm un tronson P_3 astfel încât
$P_1 \subseteq P_3 \subsetneqq P$, eliminând din P soluții admisibile ale problemei (2) care nu pot fi soluții admisibile pentru problema (1). Apoi se repetă procedeul, înlocuind P cu P_3, deci se rezolvă problema

(3) $\inf\limits_{x \in P_3} c^T x$,
etc.

1.2 Algoritmul ciclic al lui Gomory

Fie problema (1) cu $J = \{1, \ldots, n\}$.

Considerăm problema (2) în care se presupune $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și rang $A = m$.
Se rezolvă problema (2) cu algoritmul simplex.
Dacă $P = \emptyset$ atunci $P_1 = \emptyset$, deci problema (1) nu are soluţie admisibilă, STOP.

Dacă problema (2) are optim infinit, atunci problema (1) are optim infinit, soluţie optimă sau nu are soluţie admisibilă, STOP.
Dacă se găsește pentru problema (2) o soluție optimă $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$, asociată unei baze B primal și dual admisibilă:
Dacă $\overline{x}_i^B \in \mathbb{Z}, \forall i \in \mathcal{B}$ atunci $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ este soluție optimă și pentru problema (1), iar $\overline{z}^B$ este valoarea optimă, STOP.
Dacă există $u \in \mathcal{B}$ astfel încat $\overline{x}_u^B \notin \mathbb{Z}$ atunci soluția optimă găsită pentru problema (2) nu este și soluție optimă a problemei (1).
$Ax = b$ se scrie în forma explicită $x_i = \overline{x}_i^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y_{ij}^B x_j,\ i \in \mathcal{B}$

$$x_u = \overline{x}_u^B - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{uj}^B x_j$$

$$\overline{x}_u^B = [\overline{x}_u^B] + f_{u0}, 0 < f_{u0} < 1$$

$$y_{uj}^B = [y_{uj}^B] + f_{uj}, 0 \leq f_{uj} < 1$$

$$\Longrightarrow\ x_u = [\overline{x}_u^B] + f_{u0} - \sum_{j \in \mathcal{R}} [y_{uj}^B] x_j - \sum_{j \in \mathcal{R}} f_{uj} x_j$$

$$\Longleftrightarrow\ x_u - [\overline{x}_u^B] + \sum_{j \in \mathcal{R}} [y_{uj}^B] x_j = f_{u0} - \sum_{j \in \mathcal{R}} f_{uj} x_j$$

$$\forall x \in P_1 \implies x_u - [\overline{x}_u^B] + \sum_{j \in \mathcal{R}} [y_{uj}^B] x_j \in \mathbb{Z} \implies f_{u0} - \sum_{j \in \mathcal{R}} f_{uj} x_j \in \mathbb{Z}$$

$$0 < f_{u0} < 1$$

$$\sum_{j \in \mathcal{R}} f_{uj} x_j \geq 0$$

Din ultimele trei relații rezultă că

$$f_{u0} - \sum_{j \in \mathcal{R}} f_{uj} x_j \leq 0 \iff$$

$$\sum_{j \in \mathcal{R}} (-f_{uj}) x_j \leq -f_{u0},$$

restricția de secționare în algoritmul ciclic. Este verificată de orice $x \in P_1$, dar nu este verificată de soluția optimă $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ a problemei (2).

$$P_3 = \left\{ x \in P \middle| \sum_{j \in \mathcal{R}} (-f_{uj}) x_j \leq -f_{u0} \right\}$$

P_3 este un nou tronson astfel încât $P_1 \subseteq P_3 \subset P$.
Se reia problema înlocuind P cu P_3, deci, după aducerea la forma standard, se rezolvă problema

$$(3)\begin{cases} \inf\,(c^T x) \\ Ax = b \\ \sum\limits_{j\in\mathcal{R}} (-f_{uj})x_j + x_{n+1} = -f_{u0} \\ x \geq 0, x_{n+1} \geq 0 \end{cases}$$

Dacă B a fost baza primal și dual admisibilă pentru care s-a obținut soluția optimă de bază în problema (2), atunci $B_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este bază pentru problema (3). Mai mult, soluția de bază asociată lui B_1 este $\begin{cases} x^B = \bar{x}^B \\ x^R = 0 \\ x_{n+1} = -f_{u0} < 0 \implies \end{cases}$

$\implies$ baza B_1 nu este primal admisibilă pentru problema (3).

$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$y_j^{B_1} = B_1^{-1}\begin{pmatrix} a^j \\ -f_{uj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}a^j \\ -f_{uj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_j^B \\ -f_{uj} \end{pmatrix}, \forall j \in \mathcal{R}_1.$$

$$z_j^{B_1} - c_j = c_{B_1}^T \begin{pmatrix} y_j^B \\ -f_{uj} \end{pmatrix} - c_j = \left(c_B^T, 0\right) \begin{pmatrix} y_j^B \\ -f_{uj} \end{pmatrix} - c_j = z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R}_1$$

$z_j^{B_1} - c_j = 0 \leq 0, \forall j \in \mathcal{B}_1$
$\implies$ B_1 dual admisibilă.
Tabelul simplex pentru problema (3) este ($j \in \mathcal{R}$):

VB	VVB	...	x_j	...	x_{n+1}
x^B	$\overline{x}^B$	...	y_j^B	...	0
x_{n+1}	$-f_{u0}$	...	$-f_{uj}$	...	1
z	$\overline{z}^B$	...	$z_j^B - c_j$	...	0

Se aplică algoritmul simplex dual $\implies$ soluție optimă pentru (3) (sau se arată că (3) nu are soluție admisibilă $\implies$ $P_3 = \emptyset$ $\implies$ $P_1 = \emptyset$ $\implies$ problema (1) nu are soluţie admisibilă). Se repetă procedeul. În anumite condiții, algoritmul este convergent într-un număr finit de pași.

2 Seminar 12

1) Să se rezolve:

$$\begin{cases} \sup(9x_1+5x_2) \\ 6x_1+4x_2 \le 75 \\ 7x_1+3x_2 \le 68 \\ x_1,x_2 \ge 0, x_1,x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Rezolvare. $x_3, x_4 \ge 0$ variabile ecart.

$$x_1,x_2 \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} x_3 = 75-6x_1-4x_2 \in \mathbb{Z} \\ x_4 = 68-7x_1-3x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \inf(-9x_1-5x_2) \\ 6x_1+4x_2+x_3 = 75 \\ 7x_1+3x_2+x_4 = 68 \\ x_j \ge 0, x_j \in \mathbb{Z}, j=\overline{1,4} \end{cases}$$

Deoarece toate variabilele trebuie să fie întregi, folosim algoritmul ciclic al lui Gomory.

Rezolvăm mai întâi problema fără a ţine cont de restricţiile de integritate, cu algoritmul simplex primal.

$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, rang(A) = 2,$

$B = (a^3, a^4) = I_2 \implies B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} 75 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 68 \end{pmatrix} \ge 0 \implies B$ primal admisibilă.

			-9	-5		
c_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
0	x_3	75	6	4	1	0
0	$\leftarrow x_4$	68	$\boxed{7}$	3	0	1
	z	0	9	5	0	0

$z_1^B - c_1 = 9 \not\le 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

$y_1^B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \not\le 0, y_2^B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \not\le 0 \implies$ testul de optim infinit nu e îndeplinit.

$\max(9,5) = 9 \implies x_1$ intră în bază.

$\min\left(\frac{75}{6}, \frac{68}{7}\right) = \frac{68}{7} \implies x_4$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4
$\leftarrow x_3$	$\frac{117}{7}$	0	$\boxed{\frac{10}{7}}$	1	$-\frac{6}{7}$
x_1	$\frac{68}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$
z	$-\frac{612}{7}$	0	$\frac{8}{7}$	0	$-\frac{9}{7}$

$z_2^B - c_2 = \frac{8}{7} \not\le 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.

$y_2^B = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} \not\le 0, z_4^B - c_4 = -\frac{9}{7} \not> 0 \implies$ testul de optim infinit nu e îndeplinit.

$\max\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{8}{7} \implies x_2$ intră în bază.

$\min\left(\frac{\frac{117}{7}}{\frac{10}{7}}, \frac{\frac{68}{7}}{\frac{3}{7}}\right) = \frac{117}{10} \implies x_3$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	$\frac{117}{10}$	0	1	$\frac{7}{10}$	$-\frac{3}{5}$
x_1	$\frac{47}{10}$	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$
z	$-\frac{504}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim e îndeplinit.
$\overline{x}_1^B = \frac{47}{10} \notin \mathbb{Z}$.

Introducem restricţia $\sum\limits_{j\in\mathcal{R}} (-f_{uj})\, x_j \leq -f_{u0}$, unde: $u \in \mathcal{B}$ a. î. $\overline{x}_u^B \notin \mathbb{Z}, f_{uj} = \left\{y_{uj}^B\right\}, f_{u0} = \left\{\overline{x}_u^B\right\}$.

$\overline{x}_1^B = \frac{47}{10} \notin \mathbb{Z} \implies u = 1$.
$-f_{13}x_3 - f_{14}x_4 \leq -f_{10}$.
$f_{13} = \left\{y_{13}^B\right\} = \left\{-\frac{3}{10}\right\} = \frac{7}{10}$.
$f_{14} = \left\{y_{14}^B\right\} = \left\{\frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{5}$.
$f_{10} = \left\{\overline{x}_1^B\right\} = \left\{\frac{47}{10}\right\} = \frac{7}{10}$.

$$-\frac{7}{10}x_3 - \frac{2}{5}x_4 \leq -\frac{7}{10} \iff \begin{cases} -\frac{7}{10}x_3 - \frac{2}{5}x_4 + x_5 = -\frac{7}{10} \\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

În tabelul simplex apar în plus coloana lui x_5 (vector unitar) şi linia lui x_5 (pe care apar coeficienţii din restricţia introdusă: pe coloana VVB termenul liber, pe coloana lui x_j coeficientul lui x_j); restul tabelului se copiază.

VB	VVB	x_1	x_2	$\downarrow x_3$	x_4	x_5
x_2	$\frac{117}{10}$	0	1	$\frac{7}{10}$	$-\frac{3}{5}$	0
x_1	$\frac{47}{10}$	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0
$\leftarrow x_5$	$-\frac{7}{10}$	0	0	$\boxed{-\frac{7}{10}}$	$-\frac{2}{5}$	1
z	$-\frac{504}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0

Baza rămâne dual admisibilă. Continuăm cu algoritmul simplex dual.

$$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} \frac{117}{10} \\ \frac{47}{10} \\ -\frac{7}{10} \end{pmatrix} \ngeq 0 \implies \text{testul de optim nu este îndeplinit.}$$

$\overline{x}_2^B = \frac{117}{10} \nless 0, \overline{x}_1^B = \frac{47}{10} \nless 0, y_{53}^B = -\frac{7}{10} \ngeq 0 \implies$ testul de incompatibilitate nu este îndeplinit.

$\min\left(-\frac{7}{10}\right) = -\frac{7}{10} \implies x_5$ iese din bază.
$\min\left(\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{7}{10}}, \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{2}{5}}\right) = \frac{8}{7} \implies x_3$ intră în bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	11	0	1	0		
x_1	5	1	0	0		
x_3	1	0	0	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{10}{7}$
z	-100	0	0	0		

N-are rost să mai calculăm restul tabelului, deoarece:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x}^B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \\ \overline{x}_i^B \in \mathbb{Z}, \forall i \in \mathcal{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{soluţie optimă } (5, 11, 1, 0), \text{ valoarea optimă}$$

$-100 \Longrightarrow$ pentru problema iniţială soluţie optimă $(5, 11)$, valoarea optimă 100.

Cercetări operaţionale 13

Cristian Niculescu

1 Curs 13

1.1 Algoritmul mixt al lui Gomory

Fie $\emptyset \neq J \subsetneq \{1, ..., n\}$ şi problemele de optimizare liniară

$$(1)\begin{cases} \inf\left(c^T x\right) \\ Ax = b \qquad \text{-problema mixtă} \\ x \geq 0 \\ x_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in J \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \inf\left(c^T x\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Fie P_1 domeniul admisibil al problemei (1).
Fie $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ o soluţie optimă de bază a problemei (2) asociată unei baze B primal şi dual admisibilă.
Dacă $\mathcal{B} \cap J = \emptyset$, atunci $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ este soluţie optimă şi în problema (1), iar $\overline{z}^B$ este valoarea optimă, STOP.
Dacă $\mathcal{B} \cap J \neq \emptyset$ şi $\overline{x}_i^B \in \mathbb{Z}, \forall i \in \mathcal{B} \cap J$, atunci $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ este soluţie optimă şi în problema (1), iar $\overline{z}^B$ este valoarea optimă, STOP.
Dacă $\mathcal{B} \cap J \neq \emptyset$ şi $\exists u \in \mathcal{B} \cap J$ astfel încât $\overline{x}_u^B \notin \mathbb{Z}$, atunci $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ nu mai este soluţie optimă şi pentru problema (1).

$x_u = \overline{x}_u^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}} y_{uj}^B x_j$

$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \setminus J$

$\Longrightarrow \ x_u = \overline{x}_u^B - \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \cap J} y_{uj}^B x_j - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}^*} y_{uj}^B x_j.$

$\overline{x}_u^B = [\overline{x}_u^B] + f_{u0}, 0 < f_{u0} < 1.$

$y_{uj}^B = [y_{uj}^B] + f_{uj}, 0 \leq f_{uj} < 1, j \in \mathcal{R} \cap J.$

$\Longrightarrow \ x_u - [\overline{x}_u^B] + \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \cap J} [y_{uj}^B] x_j = f_{u0} - \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \cap J} f_{uj} x_j - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}^*} y_{uj}^B x_j$

$x \in P_1 \implies x_u - [\overline{x}_u^B] + \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \cap J} [y_{uj}^B] x_j \in \mathbb{Z} \implies$

$\Longrightarrow f_{u0} - \sum\limits_{j \in \mathcal{R} \cap J} f_{uj} x_j - \sum\limits_{j \in \mathcal{R}^*} y_{uj}^B x_j \in \mathbb{Z} \qquad (i)$

$\mathcal{R}_+^* = \{j \in \mathcal{R}^* | y_{uj}^B > 0\}, \mathcal{R}_-^* = \{j \in \mathcal{R}^* | y_{uj}^B < 0\}$

$$\left.\begin{array}{l} a) \sum\limits_{j\in\mathcal{R}\cap J} f_{uj}x_j + \sum\limits_{j\in\mathcal{R}^*} y_{uj}^B x_j \geq 0 \\ 0 < f_{u0} < 1 \end{array}\right\} \overset{i)}{\Longrightarrow} f_{u0} - \sum\limits_{j\in\mathcal{R}\cap J} f_{uj}x_j - \sum\limits_{j\in\mathcal{R}^*} y_{uj}^B x_j \leq 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{j\in\mathcal{R}\cap J} f_{uj}x_j + \sum_{j\in\mathcal{R}^*} y_{uj}^B x_j \geq f_{u0} \Longrightarrow \sum_{j\in\mathcal{R}\cap J} f_{uj}x_j + \sum_{j\in\mathcal{R}^*_+} y_{uj}^B x_j \geq f_{u0}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{R}^*_-} \tfrac{f_{u0}}{1-f_{u0}} |y_{uj}^B| x_j \geq 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{j\in\mathcal{R}\cap J} f_{uj}x_j + \sum_{j\in\mathcal{R}^*_+} y_{uj}^B x_j + \sum_{j\in\mathcal{R}^*_-} \tfrac{f_{u0}}{1-f_{u0}} |y_{uj}^B| x_j \geq f_{u0}$$

$$\left.\begin{array}{l} b) \sum\limits_{j\in\mathcal{R}\cap J} f_{uj}x_j + \sum\limits_{j\in\mathcal{R}^*} y_{uj}^B x_j < 0 \\ 0 < f_{u0} < 1 \end{array}\right\} \overset{i)}{\Longrightarrow} f_{u0} - \sum\limits_{j\in\mathcal{R}\cap J} f_{uj}x_j - \sum\limits_{j\in\mathcal{R}^*} y_{uj}^B x_j \geq 1$$

$$\Longrightarrow - \sum_{j\in\mathcal{R}\cap J} f_{uj}x_j - \sum_{j\in\mathcal{R}^*} y_{uj}^B x_j \geq 1 - f_{u0} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow - \sum_{j\in\mathcal{R}^*_-} y_{uj}^B x_j \geq 1 - f_{u0} \,\Big|\, \cdot \tfrac{f_{u0}}{1-f_{u0}} > 0 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \sum\limits_{j\in\mathcal{R}^*_-} \tfrac{f_{u0}}{1-f_{u0}} |y_{uj}^B| x_j \geq f_{u0} \\ \sum\limits_{j\in\mathcal{R}\cap J} f_{uj}x_j + \sum\limits_{j\in\mathcal{R}^*_+} y_{uj}^B x_j \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{j\in\mathcal{R}\cap J} f_{uj}x_j + \sum_{j\in\mathcal{R}^*_+} y_{uj}^B x_j + \sum_{j\in\mathcal{R}^*_-} \tfrac{f_{u0}}{1-f_{u0}} |y_{uj}^B| x_j \geq f_{u0}$$

Soluţia optimă $x^B = \overline{x}^B, x^R = 0$ a problemei (2) nu satisface această condiţie, care poate fi luată restricţie de secţionare $\Longrightarrow$ forma restricţiei de secţionare în algoritmul mixt al lui Gomory este
$\sum\limits_{j\in\mathcal{R}} (-d_{uj})x_j \leq -d_{u0}$, unde $d_{u0} = f_{u0}$ şi

$$d_{uj} = \begin{cases} f_{uj}, j \in \mathcal{R} \cap J \\ y_{uj}^B, j \in \mathcal{R}^*_+ \\ \dfrac{f_{u0}}{1-f_{u0}} |y_{uj}^B|, j \in \mathcal{R}^*_- \\ 0, \text{altfel.} \end{cases}$$

Se introduce o variabilă ecart şi se continuă cu algoritmul simplex dual. Se repetă procedeul pentru problema obţinută. În anumite condiţii, algoritmul se termină într-un număr finit de paşi.

2 Seminar 13

Să se rezolve problema

$$\begin{cases} \inf(-4x_1 - x_2) \\ x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + x_3 = \dfrac{7}{4} \\ \dfrac{3}{10}x_1 + x_2 + x_4 = \dfrac{3}{2} \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,4} \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Rezolvare. Deoarece doar o parte din variabile sunt întregi, folosim algoritmul mixt al lui Gomory.
$J = \{1, 2\}$ (mulţimea indicilor variabilelor întregi).
Rezolvăm mai întâi problema cu algoritmul simplex primal, fără a ţine cont de restricţiile de integritate.
$B = (a^3, a^4) = I_2 \implies B^{-1}b = I_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \geq 0 \implies B$ primal admisibilă.

			-4	-1		
c_B	VB	VVB	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	x_3	x_4
0	$\leftarrow x_3$	$\frac{7}{4}$	$\boxed{1}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	x_4	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{10}$	1	0	1
	z	0	4	1	0	0

$z_1^B - c_1 = 4 \nleq 0 \implies$ testul de optim nu e îndeplinit.
$y_1^B = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix} \nleq 0, y_2^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0 \implies$ testul de optim infinit nu e îndeplinit.
$\max(4, 1) = 4$ atins pe coloana lui $x_1 \implies x_1$ intră în bază.
$\min\left(\frac{\frac{7}{4}}{1}, \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{10}}\right) = \min\left(\frac{7}{4}, 5\right) = \frac{7}{4}$ atins pe linia lui $x_3 \implies x_3$ iese din bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\frac{7}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0
x_4	$\frac{39}{40}$	0	$\frac{17}{20}$	$-\frac{3}{10}$	1
z	-7	0	-1	-4	0

$z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{R} \implies$ testul de optim este îndeplinit.
$\mathcal{B} = \{1, 4\}$.
$\mathcal{B} \cap J = \{1, 4\} \cap \{1, 2\} = \{1\}, \overline{x}_1^B = \frac{7}{4} \notin \mathbb{Z} \implies u = 1$.
Introducem restricţia $\sum\limits_{j \in \mathcal{R}} (-d_{uj})x_j \leq -d_{u0}$, unde $d_{u0} = f_{u0}$,

$$d_{uj} = \begin{cases} f_{uj}, j \in \mathcal{R} \cap J \\ y^B_{uj}, j \in \mathcal{R}^*_+ \\ \dfrac{f_{u0}}{1-f_{u0}} |y^B_{uj}|, j \in \mathcal{R}^*_- \\ 0, \text{altfel}, \end{cases}$$

$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \setminus J, \mathcal{R}^*_+ = \{j \in \mathcal{R}^* | y^B_{uj} > 0\}, \mathcal{R}^*_- = \{j \in \mathcal{R}^* | y^B_{uj} < 0\}$.
$\mathcal{R} = \{2, 3\}$.
Înlocuind indicii, restricţia devine
$-d_{12}x_2 - d_{13}x_3 \leq -d_{10}$.
$\mathcal{R} \cap J = \{2, 3\} \cap \{1, 2\} = \{2\}$.
$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \setminus J = \{2, 3\} \setminus \{1, 2\} = \{3\}, y^B_{13} = 1 > 0 \implies \mathcal{R}^*_+ = \{3\}, \mathcal{R}^*_- = \emptyset$.
$2 \in \mathcal{R} \cap J \implies d_{12} = f_{12} = \{y^B_{12}\} = \{\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$.
$3 \in \mathcal{R}^*_+ \implies d_{13} = y^B_{13} = 1$.
$d_{10} = f_{10} = \{\overline{x}^B_1\} = \{\frac{7}{4}\} = \frac{3}{4}$.
Restricţia devine
$-\frac{1}{2}x_2 - x_3 \leq -\frac{3}{4} \iff -\frac{1}{2}x_2 - x_3 + x_5 = -\frac{3}{4}, x_5 \geq 0$.
Mai departe se procedează ca la algoritmul ciclic al lui Gomory.

VB	VVB	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	x_3	x_4	x_5
x_1	$\frac{7}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0
x_4	$\frac{39}{40}$	0	$\frac{17}{20}$	$-\frac{3}{10}$	1	0
$\leftarrow x_5$	$-\frac{3}{4}$	0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	-1	0	1
z	-7	0	-1	-4	0	0

Continuăm cu algoritmul simplex dual.

$$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{39}{40} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \ngeq 0 \implies \text{testul de optim nu este îndeplinit.}$$

$\overline{x}^B_1 = \frac{7}{4} \nless 0, \overline{x}^B_4 = \frac{39}{40} \nless 0, y^B_{52} = -\frac{1}{2} \ngeq 0 \implies$ testul de incompatibilitate nu este îndeplinit.
$\min\{-\frac{3}{4}\} = -\frac{3}{4}$, atins pe linia lui $x_5 \implies x_5$ iese din bază.
$\min\left\{\frac{-1}{-\frac{1}{2}}, \frac{-4}{-1}\right\} = \min\{2, 4\} = 2$, atins pe coloana lui $x_2 \implies x_2$ intră în bază.

VB	VVB	x_1	x_2	$\overset{\downarrow}{x_3}$	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	0	1
$\leftarrow x_4$	$-\frac{3}{10}$	0	0	$\boxed{-2}$	1	$\frac{17}{10}$
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	2	0	-2
z	$-\frac{11}{2}$	0	0	-2	0	-2

$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \ngeq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$\overline{x}_1^B = 1 \nless 0, y_{43}^B = -2 \ngeq 0, \overline{x}_2^B = \frac{3}{2} \nless 0 \implies$ testul de incompatibilitate nu este îndeplinit.

$\min\{-\frac{3}{10}\} = -\frac{3}{10}$, atins pe linia lui $x_4 \implies x_4$ iese din bază.

$\min\left\{\frac{-2}{-2}\right\} = 1$, atins pe coloana lui $x_3 \implies x_3$ intră în bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	0	1
x_3	$\frac{3}{20}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{17}{20}$
x_2	$\frac{6}{5}$	0	1	0	1	$-\frac{3}{10}$
z	$-\frac{26}{5}$	0	0	0	-1	$-\frac{37}{10}$

$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{20} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \geq 0 \implies$ testul de optim este îndeplinit.

$\mathcal{B} \cap J = \{1,2,3\} \cap \{1,2\} = \{1,2\}, \overline{x}_2^B = \frac{6}{5} \notin \mathbb{Z} \implies u = 2.$

Introducem restricţia

$-d_{24}x_4 - d_{25}x_5 \leq -d_{20}.$

$\mathcal{R} \cap J = \{4,5\} \cap \{1,2\} = \emptyset;$

$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \setminus J = \{4,5\} \setminus \{1,2\} = \{4,5\}.$

$y_{24}^B = 1 > 0, y_{25}^B = -\frac{3}{10} < 0 \implies \mathcal{R}_+^* = \{4\}, \mathcal{R}_-^* = \{5\}.$

$4 \in \mathcal{R}_+^* \implies d_{24} = y_{24}^B = 1.$

$5 \in \mathcal{R}_-^* \implies d_{25} = \frac{f_{20}}{1-f_{20}}|y_{25}^B|.$

$f_{20} = \{\overline{x}_2^B\} = \left\{\frac{6}{5}\right\} = \frac{1}{5}.$

$d_{25} = \frac{f_{20}}{1-f_{20}}|y_{25}^B| = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\left|-\frac{3}{10}\right| = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{40}.$

$d_{20} = f_{20} = \frac{1}{5}.$

Restricţia devine

$-x_4 - \frac{3}{40}x_5 \leq -\frac{1}{5} \iff -x_4 - \frac{3}{40}x_5 + x_6 = -\frac{1}{5}, x_6 \geq 0.$

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	$\overset{\downarrow}{x_4}$	x_5	x_6
x_1	1	1	0	0	0	1	0
x_3	$\frac{3}{20}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{17}{20}$	0
x_2	$\frac{6}{5}$	0	1	0	1	$-\frac{3}{10}$	0
$\leftarrow x_6$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	$\boxed{-1}$	$-\frac{3}{40}$	1
z	$-\frac{26}{5}$	0	0	0	-1	$-\frac{37}{10}$	0

Continuăm cu algoritmul simplex dual.

$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{20} \\ \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \ngeq 0 \implies$ testul de optim nu este îndeplinit.

$\overline{x}_1^B = 1 \not< 0, \overline{x}_3^B = \frac{3}{20} \not< 0, \overline{x}_2^B = \frac{6}{5} \not< 0, y_{64}^B = -1 \not\geq 0 \implies$ testul de incompatibilitate nu este îndeplinit.
$\min\{-\frac{1}{5}\} = -\frac{1}{5}$ atins pe linia lui $x_6 \implies x_6$ iese din bază.
$\min\left\{\frac{-1}{-1}, \frac{-\frac{37}{10}}{-\frac{3}{40}}\right\} = \min\left\{1, \frac{37\cdot 4}{3}\right\} = 1$, atins pe coloana lui $x_4 \implies x_4$ intră în bază.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	0	0	0	1	0
x_3	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0		
x_2	1	0	1	0	0		
x_4	$\frac{1}{5}$	0	0	0	1	$\frac{3}{40}$	-1
z	-5	0	0	0	0		

$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \geq 0 \implies$ testul de optim este îndeplinit;
$\overline{x}_1^B = \overline{x}_2^B = 1 \in \mathbb{Z} \implies \overline{x}_i^B \in \mathbb{Z}, \forall i \in \mathcal{B} \cap J$
$\implies$ soluţie optimă este $x_1^* = x_2^* = 1, x_3^* = \frac{1}{4}, x_4^* = \frac{1}{5}$, valoarea optimă este -5.