Test

ONUȚU RADU-CONSTANTIN

$A=5$

$B=19$

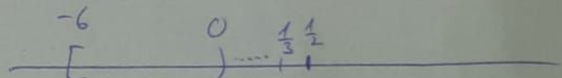
1) $M=[-6,0)\cup\left\{\frac{1}{n+1} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}, n\geq 1\right\}$

a) M - închisă $\Leftrightarrow M=\bar{M}$

$\bar{M}=M\cup M'$

$M'=[-6,0]$

pt. $\forall x\in M$, $\exists$ o vecinătate pt. fiecare x a.î. să conțină o infinitate de puncte



pt. punctele de forma $\left\{\frac{1}{n+1} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}, n\geq 1\right\}$ nu există nicio vecinătate de acest fel

pt. $\{0\}$ pot alege orice vecinătate întrucât la stânga lui se găsesc o infinitate de puncte

$\Rightarrow M'=[-6,0]$

$\bar{M}=M\cup M'=M\cup\{0\}$

$M\neq\bar{M} \Leftrightarrow M$ nu e mulțime închisă

b) $\mathring{M} = (-6,0)$

Pp. prin reducere la absurd că $\mathring{M} = \{-6\} \cup \{\frac{1}{n+1} \mid n\in\mathbb{N}, n\geq 1\}$

$\Leftrightarrow \forall x\in M, \exists r>0$ a.î. $(x-r, x+r) \subset M$

Fals pt. că un interval ~~de forma (x-r~~ nu poate fi inclus într-o mulțime de puncte.

$\Rightarrow \mathring{M} = (-6,0)$

c) $M' = [-6,0]$

Pp. prin reducere la absurd că $M' = \{\frac{1}{n+1} \mid n\in\mathbb{N}, n\geq 1\}$

$M' = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

$\Leftrightarrow \forall x\in M, \exists r>0$ a.î.

$(x-r, x+r)$ să aibă o infinitate de elem. din M

Fals pt. că $\forall x\in M'$ ~~nu are o~~ nu pot să iau vreo vecinătate care să conțină o inf. de puncte din M

d) Fie $A = \mathbb{R}$ mulț. deschisă $\Rightarrow A = \mathring{A}$

$Fr(A)$ este întotdeauna ~~dos~~ închisă

$Fr(A) = \bar{A} - \mathring{A} = A \cup A' - A = A'$

A' ~~are o~~ ~~in~~ este nemărginită

$\Rightarrow Fr(A)$ - închisă, dar nemărginită $\Rightarrow Fr(A)$ nu e compactă

2) $f:(-5,5)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\frac{1}{5} & , x\in(-5,0] \\ \frac{1}{x-5}+x & , x\in(0,5) \end{cases}$$

f cont. pe $(-5,5)\setminus\{0\}$ întrucât f e o compunere de funcții elementare.

Verific cont. în $x=0$

$f(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2-\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x-5}+x=-\frac{1}{5}$

$\Rightarrow f(0)=l_s(0)=l_d(0)$

$\Rightarrow f$ cont. în $x=0$

$\Rightarrow f$ cont. pe $(-5,5)$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & , x\in(-5,0] \\ -\frac{1}{(x-5)^2}+1 & , x\in(0,5) \end{cases}$$

f' derivabilă pe $(-5,5)\setminus\{0\}$ întrucât f' e o compunere de funcții ~~elemen~~ elementare

Verific derivabilitatea în $x=0$

$f'_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{x}=0$

$f'_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x-5}+x+\frac{1}{5}}{x}=$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1+x^2-5x}{x-5} + \frac{1}{5}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{5x^2-25x+5+x-5}{5x^2-25x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{5x^2-24x}{5x^2-25x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{5x-24}{5x-25} = \frac{24}{25}$$

$f'_s(0) \neq f'_d(0) \Rightarrow f$ derivabilă pe $(-5, 5) \setminus \{0\}$

f derivabilă pe $(-5, 0)$
$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x) \in (-10, 0)$ mărginit | f este lipschitz pe $(-5,0)$ $\Rightarrow f$ unif. cont. pe $(-5,0)$

f derivabilă pe $(0, 5)$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-5)^2} + 1$$

$$-1 \leq -\frac{1}{(x-5)^2} < 0 \quad | +1$$

$0 < f'(x) < 1$

$f'(x) \in (0,1)$ mărginită | $\Rightarrow f$ este lipschitz pe $(5,0)$
f derivabilă pe $(0,5)$ | $\Rightarrow f$ unif. cont. pe $(0,5)$

$\Rightarrow f$ e unif. cont. pe $(-5,0) \cup (0,5)$