Examen la analiză matematică[1]
an I, sem. I, grupele 101, 102, 103, 104, 105, 106
28.01.2020

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. **a)** Decideţi dacă funcţia $f : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos x}, & \text{dacă } x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & \text{dacă } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

este integrabilă Riemann. Justificaţi.

b) Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulţimi compacte. Demonstraţi că $A \cap B$ şi $A \cup B$ sunt mulţimi compacte.

c) Daţi exemplu de funcţie $f : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ mărginită care nu este integrabilă Riemann şi de funcţie $g : [2, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabilă Riemann care nu este derivabilă. Justificaţi alegerea făcută.

Subiectul 2. **a)** Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (n+3)!}{(2n+1)! x^n}$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

b) Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi neconstantă cu proprietatea că $f(x + 1) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că funcţia $h : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(\frac{1}{x})$ este continuă, dar nu uniform continuă.

Subiectul 3. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

i) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

ii) Demonstraţi că funcţia f este uniform continuă pe $[0, \infty)$.

iii) Studiaţi monotonia şi determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f.

Subiectul 4. Considerăm şirul de funcţii $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{2x^n}{3+x^{2n}}$ pentru orice $x \in [0, \infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$.

Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului $(f_n)_{n \geq 1}$ pe $[0, 1]$ şi $[3, \infty)$.

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate. Fiecare subiect valoreaza 9 puncte plus 1 punct din oficiu. Succes!**