1.) Arătați că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

1) $f(x,y) = y\varphi(x^2-y^2)$; $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2}f$

2) $f(x,y) = e^{y}\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$, $(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} = xy\cdot f$

2) Arătați că funcția $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{x}{y}\right)$, $x \neq 0$, unde $\varphi$ și $\psi$ sunt funcții de clasă $C^2$, verifică ecuația

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - x\psi\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

3) Calculați diferențiale de ordinul I și II pt funcțiile compuse în punctul $(1,1)$.

1) $F(x,y) = f\left(x^2, \frac{x}{y}\right)$

2) $G(x,y) = g(x^2+y^2, x+2y)$.

4) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Să se arate că $f$ este continuă, are derivate parțiale de ordinul întâi și nu este diferențiabilă în origine.

5) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^3}{x^8+y^8} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Calculați derivatele parțiale ale lui $f$ și studiați diferențiabilitatea lui $f$ în $(0,0)$.

6) Determinați punctele de extrem local ale funcției $f$.

1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^{10}+5y^2-10xy+1$.

2) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=z^3+3zy^2-30z-18y+x^2-2x$

7). Să se arate că ecuația $xz+ye^z-1=0$ definește într-o vecinătate a punctului $(1,0,1)$ funcția implicită $z=z(x,y)$ și calculați $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,0)$; $d^2z(1,0)$.

8) Să se afle extremele funcției $z=z(x,y)$ definită implicit de ecuația

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0.$$

9) Arătați că sistemul

$$\begin{cases} xy+ux+vy = x-y \\ uv = yu+xv \end{cases}$$

definește implicit funcțiile $u(x,y)$ și $v(x,y)$ într-o vecinătate a punctului $(0,1,0,-1)$ și calculați $\frac{\partial u}{\partial x}(0,1)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(0,1)$; $\frac{\partial v}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(0,1)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(0,1)$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(0,1)$.

10) Să se exprime Laplacianul unei funcții de trei variabile de clasă $C^2$,

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

în coordonate sferice.

11) Fie $f:(0,\infty)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xy^2z^3$.
Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f$ condiționate de legătura $x+2y+3z=6$

Indicație: Puteți considera funcția $h=\ln f$.

12) Fie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\geq 0, \frac{x}{2}+y\leq 1\}$
și $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x-1)^3+2y$. Să se găsească $\sup\{f(x,y)\mid (x,y)\in A\}$ și $\inf\{f(x,y)\mid (x,y)\in A\}$

13) Determinați extremele globale ale funcției
$f: K\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y^2-x^2$, $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 4\}$

14). Scrieți polinomul Taylor de gradul 2 asociat funcției $f$ în punctul indicat:

1) $f(x,y)=e^{x^2+y}$, $(1,0)$,

2) $f(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2}$, $(0,1,0)$.