SEMINAR ALGEBRA III, 2022-2023

TIBERIU DUMITRESCU

1. Arătaţi că $4 - i$ divide $22 + 3i$ în domeniul $\mathbb{Z}[i]$.

2. Arătaţi că $13 + 4i$ nu se divide cu $6 + i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

3. Verificaţi dacă $3 + \sqrt{2}$ divide numerele $13 \pm 2\sqrt{2}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

4. Arătaţi că elementele inversabile (aka unităţile) inelului $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ sunt 1, -1, i, $-i$.

5. Găsiţi unităţile inelului $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ pentru $d < -1$.

6. Găsiţi unităţile inelului $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-3})/2]$.

7. Verificaţi dacă $24 + 5\sqrt{23}$ este element inversabil în inelul
$$\mathbb{Z}[\sqrt{23}] = \{a + b\sqrt{23} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

8. Arătaţi că unităţile inelului $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sunt $\pm(1 + \sqrt{2})^m$ cu m întreg.

9. Arătaţi că unităţile inelului $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ sunt $\pm(2 - \sqrt{3})^m$ cu m întreg.

10. Arătaţi că unităţile inelului $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ sunt $\pm(15 - 4\sqrt{14})^m$ cu m întreg.

11. Verificaţi dacă $2 + 5i$ divide numerele $7 + 3i$, $7 - 3i$, $7 + i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

12. Verificaţi dacă $1 + \sqrt{5}$ divide $1 - \sqrt{5}$
   (i) în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$,
   (ii) în inelul $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{5})/2]$.

13. Verificaţi dacă numerele următoare sunt asociate în divizibilitate:
   (i) $9 + 7i$ şi $7 + 9i$ în inelul $\mathbb{Z}[i]$,
   (ii) $7 + 2\sqrt{2}$ şi $5 + \sqrt{2}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$,
   (iii) $23 + 13\sqrt{3}$ şi $5 - \sqrt{3}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

14. Găsiţi divizorii lui 21 în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

15. Arătaţi că: $2 + 3i$ divide $a + bi$ în $\mathbb{Z}[i] \Leftrightarrow 13$ divide $2a + 3b$ în $\mathbb{Z}$.

16. Arătaţi că: $1 + i$ divide $a + bi$ în $\mathbb{Z}[i] \Leftrightarrow 2$ divide $a + b$ în $\mathbb{Z}$.

17. Verificaţi dacă
   $3 + \sqrt{-2}$ divide $a + b\sqrt{-2}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \Leftrightarrow 11$ divide $a^2 + 2b^2$ în $\mathbb{Z}$.

18. Determinaţi divizorii lui $13 - 4i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

19. Arătaţi că $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4};\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{C}$.

20. Arătaţi că $3 - \sqrt[3]{4}$ este un divizor al lui 23 în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

21. Verificaţi dacă $8 + 3\sqrt{7}$ divide toate numerele din $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

22. Fie A un domeniu şi a un element nenul al lui A. Spunem că $b, c \in A$ sunt *congruente modulo* a (notaţie $b \equiv_a c$) dacă a divide $b - c$. Arătaţi că $\equiv_a$ este o relaţie de echivalenţă pe A.

23. Găsiţi un număr natural n astfel încât $5 + 2\sqrt{3} \equiv_{2-3\sqrt{3}} n$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ (cf. ex. precedent).

24. Determinaţi numerele $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ pentru care $a + bi$ divide $a - bi$.

25. Scrieţi asociaţii lui $2 + \sqrt{-3}$ în inelul $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-3})/2]$.

26. Arătaţi că $5 - 4i$ divide $a + bi$ în $\mathbb{Z}[i] \Leftrightarrow a \equiv_{41} 9b$.

27. Determinaţi divizorii lui $9 + 14\sqrt{-2}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

28. Determinaţi un număr din $\mathbb{Z}[\sqrt{33}] - \{\pm 1\}$ care divide numerele $2 + 5\sqrt{33}$ şi $1 + \sqrt{33}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{33}]$.

29. Arătaţi că numărul $170 + 39\sqrt{19}$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{19}]$.

30. Fie $a + b\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$. Arătaţi că a, b au aceeaşi paritate $\Leftrightarrow$ $a + b\sqrt{-3}$ se divide cu 2, $1 + \sqrt{-3}$ sau $1 - \sqrt{-3}$.

31. Fie $n \geq 2$ un număr întreg şi $A = \{a/(1 + bn);\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(i) Arătaţi că A este un subinel al lui $\mathbb{Q}$.
(ii) Determinaţi unităţile lui A.
(iii) Arătaţi că n este putere de număr prim $\Leftrightarrow$ pentru orice $x, y \in A$ rezultă x divide y sau y divide x.

32. Verificaţi dacă numărul $4 + 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{7}]$.

33. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ coprime. Arătaţi că există $c \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea: $a + b\sqrt{d}$ divide $x + y\sqrt{d}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \Leftrightarrow a^2 - b^2 d$ divide $x + cy$.

34. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ numerele 13 şi $3 + 2\sqrt{-5}$ sunt elemente prime.

35. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:
(i) $3 + \sqrt{-5}$ este atom neprim,
(ii) $7 - \sqrt{-5}$ este element reductibil.

36. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ numerele 7 şi $5 - \sqrt{6}$ sunt elemente prime.

37. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ numerele 2, 3, 5, 25 şi $\sqrt{6}$ sunt elemente reductibile.

38. Este $2 + \sqrt{5}$ element ireductibil (resp. prim) în $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$?

39. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$:
(i) 2 şi $1 + \sqrt{-3}$ sunt atomi neprimi,
(ii) 5 şi $2 + \sqrt{-3}$ sunt atomi primi,
(iii) 7 este element reductibil.

40. Verificaţi dacă numerele $2, 7, 31$ sunt elemente prime, atomi neprimi sau elemente reductibile în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

41. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^2 + b^2$ se divide cu 19. Arătaţi că 19 divide numerele a şi b.

42. Fie A un domeniu şi $a, b \in A$ două elemente asociate. Arătaţi că a este element prim (resp. atom) dacă şi numai dacă b este element prim (resp. atom).

43. Verificaţi dacă în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ numerele 2, 3, 7, $21-7\sqrt{10}$, $3-2\sqrt{10}$ sunt elemente ireductibile sau prime.

44. Arătaţi că numerele 3 şi $5+2\sqrt{-14}$ din inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ sunt atomi neprimi.

45. Investigaţi dacă numerele 17, $465+124\sqrt{14}$, $1+\sqrt{14}$ din inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ sunt elemente prime, atomi neprimi sau elemente reductibile.

46. Arătaţi că 2 este ireductibil în $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ dar reductibil în $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{-7})/2.]$

47. Folosind inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$, arătaţi că ecuaţia $y^2 = 14x^2 + 23$ nu are soluţii în numere întregi.

48. Folosind inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, rezolvaţi ecuaţia $13x^2 = y^2 + 2z^2$ în numere întregi.

49. Arătaţi că $11+\sqrt{-7}$ este un atom neprim al inelului $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

50. Arătaţi că

$$67+20\sqrt{2} = (3+\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})(7-3\sqrt{2})$$

este o factorizare atomică a lui $67+20\sqrt{2}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

51. Găsiţi o factorizarea atomică a lui $633+135i$ în inelul $\mathbb{Z}[i]$.
(Ind. $211^2+45^2 = 46546 = 2\times 17\times 37^2$.)

52. Găsiţi toate factorizările atomice ale lui $29-5\sqrt{-5}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

53. Găsiţi o factorizare atomică a lui 91 în inelul $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{-3})/2]$.

54. Găsiţi o factorizare atomică a lui $5+2\sqrt{-6}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.

55. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$

$$3^4 = (5+2\sqrt{-14})(5-2\sqrt{-14})$$

sunt factorizări atomice ale lui 81.

56. Rezolvaţi în numere întregi sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} xz+2yv = 3 \\ xv+yz = 2. \end{cases}$$

folosind inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

57. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[X]$ este inel CLD.

58. Găsiţi o factorizarea atomică a lui $-15+23i$ în inelul $\mathbb{Z}[i]$.

59. Găsiţi toate factorizările atomice ale lui $30+13\sqrt{-6}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.

60. Sunt $14 = \sqrt{14}^2 = 2\cdot 7$ factorizări atomice ale lui 14 în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$?

61. Rezolvaţi în numere întregi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} xz-5yv = -19 \\ xv+yz = 17. \end{cases}$$

(Ind. Folosiţi inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$).

62. Considerăm subinelul

$$A = \{a+2f \mid a\in\mathbb{Z},\ f\in\mathbb{Z}[X]\}$$

al lui $\mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că A este inel CLD dar nu este noetherian. (Ind. Utilizaţi idealul $I = \{f\in A \mid f(0)=0\}$.)

63. Este inelul $\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$ noetherian ?

64. Este inelul $\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}[X]$ noetherian ?

65. Este inelul $\mathbb{R} + X\mathbb{C}[X]$ noetherian ?

66. Arătaţi că inelul $\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X]$ este atomic.

67. Listaţi divizorii lui $62 + 34i$ în $\mathbb{Z}[i]$. Presupunem cunoscut faptul că $\mathbb{Z}[i]$ este inel factorial.

68. Descompuneţi numărul $20538 - 110334i$ în produs de factori primi în $\mathbb{Z}[i]$.

69. In $\mathbb{Z}[i]$, descompuneţi toate numerele de normă 24375 în produs de factori primi.

70. Descompuneţi numărul $140770 - 91910\sqrt{2}$ în produs de factori primi în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

71. Descompuneţi numărul $1170570 - 150780\sqrt{3}$ în produs de factori primi în $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

72. Listaţi divizorii lui $95 - 27\sqrt{2}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Presupunem cunoscut faptul că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este inel factorial.

73. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-26}]$ este nefactorial folosind egalitatea

$$109^2 + 12^2 \cdot 26 = 5^6.$$

74. Folosind atomul 2, arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ este nefactorial dacă $d < -2$.

75. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ este nefactorial.

76. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{26}]$ este nefactorial.

77. Găsiţi un număr $a + b\sqrt{-10} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ cu $a > 71$ care nu are factorizare unică în acest inel.

78. Rezultă din egalitatea $\sqrt{6}^2 = 2 \cdot 3$ că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ este nefactorial ?

79. Arătaţi că 32 se scrie ca produs de doi atomi în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$. Deduceţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ nu este factorial.

80. Fie p un număr prim diferit de 5. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{5p}]$ nu este factorial. (Ind. 2 este atom neprim.)

81. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{10}]$ nu este factorial.
(Ind. Găsiţi un polinom unitar din $\mathbb{Z}[X]$ cu rădăcina $1 + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100})/3$).

82. Fie A un inel factorial şi $a, b \in A - \{0\}$ astfel încât $a^{2n-1} | b^{2n} | a^{2n+1}$ pentru orice $n \geq 1$. Arătaţi că a este asociat cu b.

83. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{82}]$ nu este factorial.

84. Găsiţi un număr din $\mathbb{Z}[\sqrt{-4}]$ cu factorizare atomică neunică.

85. Arătaţi că $8 + \sqrt{-17}$ este un atom neprim al inelului $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$.

86. Arătaţi că 81 nu se poate scrie ca produs de elemente prime în $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$.

87. Calculaţi cmmdc al numerelor $2 - 9i$, $6 - 7i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

88. Pentru numerele $a = 779 - 247i$, $b = 817 + 19i$, calculaţi (a, b) şi $[a, b]$ în $\mathbb{Z}[i]$.

89. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$:
 (i) $2+\sqrt{-17}$ şi 7 sunt relativ prime,
 (ii) $6+3\sqrt{-17}$ şi 21 nu au cmmdc.

90. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ numerele $13-7\sqrt{-5}$ şi $29-5\sqrt{-5}$ nu au CMMDC. Observaţi că numerele se divid cu $1-\sqrt{-5}$.

91. Arătaţi că în domeniul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:
 (i) idealul generat de 29 şi $13+\sqrt{-5}$ este principal,
 (ii) 29 şi $13+\sqrt{-5}$ au cmmdc,
 (iii) 29 şi $13+\sqrt{-5}$ au cmmmc.

92. Arătaţi că în domeniul $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$:
 (i) 2 şi $1+\sqrt{13}$ sunt coprime,
 (ii) idealul generat de 2 şi $1+\sqrt{13}$ nu este principal.

93. Arătaţi că în domeniul $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$:
 (a) 2 şi $1+\sqrt{-3}$ sunt coprime (i.e. au cmmdc $=1$),
 (b) 2^3 şi $(1+\sqrt{-3})^3$ nu sunt coprime.

94. Arătaţi că în domeniul $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{-15})/2]$ idealul generat de 19 şi $9-(1+\sqrt{-15})/2$ este principal.

95. Fie $a,b,c\in\mathbb{Z}[i]-\{0\}$ cu $(a,b)=(a,c)=(b,c)=1$. Arătaţi că:
 $(N(a),N(b),N(c))=1$.

96. Fie $x,\pi\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]-\{0\}$ cu π element prim. Arătaţi că π divide $x^{N(\pi)}-x$.

97. Arătaţi că 5 divide $z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)$ pentru orice $z\in\mathbb{Z}[i]$.

98. E adevărat că 3 divide $z(z+1)(z+2)$ pentru orice $z\in\mathbb{Z}[i]$?

99. Fie n un număr natural nenul care se scrie în două moduri ca sumă de două pătrate. Arătaţi că n este neprim.

100. Presupunem cunoscut faptul că orice număr prim p de forma $8k+1$ sau $8k+3$ se poate scrie sub forma $p=a^2+2b^2$ cu a,b numere naturale.Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ este factorial.

101. Fie a,b două numere întregi cu $(a,b)=d$. Calculaţi $(a+bi,\, a-bi)$ în $\mathbb{Z}[i]$.

102. Arătaţi că $x,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sunt coprime dacă au normele coprime în $\mathbb{Z}$. Este reciproca adevărată ?

103. Fie A un domeniu şi $x\in A$ care este un produs de elemente prime. Arătaţi că există $[x,y]$ pentru orice $y\in A$.

104. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ numerele $3+2\sqrt{-5}$ şi $3-2\sqrt{-5}$ au CMMMC.

105. Fie $a,b,c\in\mathbb{Z}[i]-\{0\}$. Arătaţi că

$$(a,b,c)=1\Leftrightarrow(a+b+c,ab+bc+ac,abc)=1.$$

106. Descrieţi perechile de numere din $\mathbb{Z}[i]$ cu $(a,b)=3-i$ şi $[a,b]=20+10i$.

107. Fie $a,b,c\in\mathbb{Z}[i]-\{0\}$. Arătaţi că

$$(a,[b,c])(a,b,c)=(a,b)(a,c).$$

Notaţiile (...), [...] însemnă cmmdc, respectiv cmmmc.

108. Fie A un inel factorial şi $a, b, c \in A - \{0\}$. Arătaţi că

$$[a, b, c](a, b)(a, c)(b, c) = abc(a, b, c).$$

109. Fie d un număr întreg de forma $4k + 1$ care nu este pătrat perfect. Arătaţi că numerele $2(1 + \sqrt{d})$ şi $(1 + \sqrt{d})^2$ nu au cmmdc în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

110. Arătaţi că idealul $< 2, \sqrt{6} >$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ este principal.

111. Arătaţi că idealul $< 2, \sqrt{-6} >$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ nu este principal.

112. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ numerele $2 - \sqrt{7}$ şi $3 + 4\sqrt{7}$ sunt comaximale (adică idealul generat de ele este tot inelul).

113. Găsiţi un generator pentru idealul $< -1 + 5i, 1 + 3i >$ din $\mathbb{Z}[i]$.

114. Arătaţi că în $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ avem $< 2 > \cap < 1 + \sqrt{-3} >=< 4, 2 + 2\sqrt{-3} >$ şi că acest ideal nu este principal.

115. Fie A un domeniu. Arătaţi că $A[X]$ este inel principal dacă şi numai dacă A este corp.

116. Arătaţi că idealul $< 23, 11 - \sqrt{6} >$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ este principal.

117. Găsiţi $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ astfel încât idealul $< 11, z >$ nu este principal.

118. In inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$, găsiţi un exemplu de factorizare atomică neunică.

119. Verificaţi dacă în $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ avem egalitatea

$$< 2 > \cap < 1 + \sqrt{-5} >=< 6, 2 + 2\sqrt{-5} > .$$

120. Arătaţi că oricare două numere din şirul

$$(1 + i) + 1,\ (1 + i)^2 + 1,\ (1 + i)^4 + 1,\ (1 + i)^8 + 1,\ ..., (1 + i)^{2^n} + 1, ...$$

sunt relativ prime în $\mathbb{Z}[i]$.

121. Fie A un inel comutativ şi unitar, iar $a, b, c \in A$ cu proprietatea $< a, b >=< a, c >=< b, c >= A$. Arătaţi că $< ab, ac, bc >= A$.

122. Determinaţi valorile lui n pentru care $(2 + i)^n + 1$ şi $2 + 3i$ sunt relativ prime în $\mathbb{Z}[i]$.

123. Considerăm subinelul lui $\mathbb{C}$

$$A = \{(a + b\sqrt{-5})/(2c + 1) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Verificaţi dacă idealul generat în A de 2 şi $1 + \sqrt{-5}$ este principal.

124. Calculaţi $(43 - 81i, 33 - 19i)$ în $\mathbb{Z}[i]$ folosind algoritmul lui Euclid.

125. $a = 33 - 8\sqrt{-11}$, $22 + \sqrt{-11}$ în $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-11})/2]$ folosind algoritmul lui Euclid.

126. Calculaţi un generator al idealului $(65 + 55i)\mathbb{Z}[i] \cap (29 + 3i)\mathbb{Z}[i]$.

127. Există $q \in \mathbb{Z}[i]$ astfel încât $N((7 + 3i) - (2 + 4i)q) < N(2 + 4i)$?

128. Fie A un domeniu şi $a, a', b, b', c \in A - \{0\}$ cu proprietatea $aa' + bb' = 1$. Rezolvaţi ecuaţia $ax + by = c$.

129. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}[i]$ ecuaţia $(3 + i)x + (5 - i)y = 7 + i$.

130. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}[i]$ ecuaţia $(3+i)x+(5-i)y=8+i$.

131. Arătaţi că $N(\sqrt{10}-2q)\geq 4$ pentru orice $q\in\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$. Deduceţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ nu este norm-euclidian.

132. Arătaţi că inelul $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ este euclidian.

133. Arătaţi că subinelul $\{(a+b\sqrt{-5})/(2c+1);\ a,b,c\in\mathbb{Z}\}$ al lui $\mathbb{C}$ este euclidian.

134. Rezolvaţi ecuaţia $y^3=x^2+2$ în $\mathbb{Z}$ folosind inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

135. Rezolvaţi ecuaţia $y^3=x^2+4$ în $\mathbb{Z}$ folosind inelul $\mathbb{Z}[i]$.

136. Completaţi tabelul următor cu întregi Gauss astfel încât produsele pe orizontală/verticală să fie numerele indicate

	$-1+7i$	$8+19i$
$2+11i$		
$1+13i$		

137. Găsiţi un tabel ca în ex. precedent cu numere din $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ care nu poate fi completat.

138. Completaţi tabelul următor cu (nouă) numere din $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ astfel încât produsele pe orizontală/verticală să fie numerele indicate

	$29-5\sqrt{-2}$	$6+15\sqrt{-2}$	$-4+17\sqrt{-2}$
$-9+9\sqrt{-2}$			
$47+23\sqrt{-2}$			
18			

139. Fie A un inel factorial şi $a,b,c,d\in A-\{0\}$ cu $ab=cd$. Arătaţi că există $x,y,u,v\in A-\{0\}$ cu: $xy=a, uv=b, xu=c, yv=d$.

140. Calculaţi $(11+15\sqrt{2}, 3+13\sqrt{2})$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ cu Algoritmul lui Euclid.

141. Rezolvaţi ex. precedent prin factorizare.

142. In $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, rezolvaţi ecuaţia

$$(11+15\sqrt{2})x+(3+13\sqrt{2})y=5+3\sqrt{2}.$$

143. In $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, rezolvaţi ecuaţia

$$(1+\sqrt{-3})x+(1-\sqrt{-3})y=2.$$

144. Determinaţi mulţimea $\{x\in\mathbb{Z}[i]\mid (3x+2)/(2x+3)\in\mathbb{Z}[i]\}$.

145. Fie $\omega=(1+\sqrt{-7})/2$. Arătaţi că $2\omega^n$ este atom al lui $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ pentru orice $n\geq 1$. (Ind. Factorizaţi în $\mathbb{Z}[1+\sqrt{-7})/2]$.)

146. Fie p un număr natural prim de forma $4k+3$ şi fie $a,b\in\mathbb{Z}$. Arătaţi că dacă p divide a^2+b^2, atunci p divide a.

147. Fie $z\in\mathbb{Z}[i]$ nenul şi neinversabil. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente.

(i) $t\in\mathbb{Z}[i]$ şi $N(z)|N(t)$ implică $z|t$.

(ii) z e asociat cu $(1+i)^m a$ unde $m\geq 0$ şi a este un număr întreg impar cu toţi factorii primi de forma $4k+3$.

148. Verificaţi dacă următoarele ideale din $\mathbb{Z}[\sqrt{79}]$ sunt prime:
$$< 11 >,\ < 2 >,\ < 3+\sqrt{79} >,\ < 6+\sqrt{79} >,\ < 80+9\sqrt{79} > .$$

149. Verificaţi dacă următoarele ideale din $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ sunt prime:
$$< 7, 2-\sqrt{-10} >,\ < 11, 2+13\sqrt{-10} >,\ < 3, 1-\sqrt{-10} > .$$

150. Verificaţi dacă idealul $< 5, 12-i >$ este prim în $\mathbb{Z}[i]$.

151. Verificaţi dacă idealul $< 23+3\sqrt{-5}, 13+2\sqrt{-5} >$ este prim în $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

152. Găsiţi două numere întregi nenule a, b astfel încât idealul
$$< a+b\sqrt{10}, 9+\sqrt{10} >$$
al inelului $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ este ideal prim.

153. Verificaţi dacă idealul $< 3+i, 3-i >$ este prim în $\mathbb{Z}[i]$.

154. Arătaţi că idealul $< 3+\sqrt{-5}, 3-\sqrt{-5} >$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ este prim.

155. Arătaţi că idealul $P =< 7, 3+\sqrt{-5} >$ al lui $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ este egal cu
$$\{a+b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv_7 3b\}.$$
Conchideţi că P este ideal prim.

156. Arătaţi că idealul $P =< X^2+1, 2-3X >$ al lui $\mathbb{Z}[X]$ este egal cu
$$\{f(X) \in \mathbb{Z}[X] \mid f(5) \in 13\mathbb{Z}\}.$$
Conchideţi că P este ideal prim.

157. Fie $a+b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]- < 23 >$. Arătaţi că $< 23, a+b\sqrt{-5} >$ este ideal prim în $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dacă şi numai dacă a^2+5b^2 se divide cu 23.

158. Fie P un ideal prim nenul al inelului $\mathbb{Z}[i]$. Arătaţi că $P \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, unde p este un număr prim.

159. Arătaţi că în $\mathbb{Z}[X]$ idealul $< 5, X+1 >$ este prim iar idealul $< 5, X^2+1 >$ nu este prim.

160. Arătaţi că idealele prime ale inelului $A = \{a/(1+6b) |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ sunt $< 0 >$, $< 2 >$ şi $< 3 >$.

161. Fie A un domeniu cu proprietatea: $a|b$ sau $b|a$ pentru orice $a, b \in A$. Arătaţi că $\cap_{n\geq 1} x^n A$ este ideal prim pentru orice element neinversabil $x \in A$.

162. Arătaţi că în $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ idealul $< 11 >$ nu este prim dar este produs de două ideale prime. Intr-un inel A, produsul idealelor $< a, b >$ şi $< c, d >$ este prin definiţie idealul $< ac, ad, bc, bd >$.

163. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ cu $(a, b) = 1$. Arătaţi că idealul $M =< a+b\sqrt{-5}, c+d\sqrt{-5} >$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ este prim dacă şi numai dacă $(a^2+5b^2, ac-bd)$ este număr prim.

164. Arătaţi că idealul $H =< X^2+1, Y^2+1 >$ din $\mathbb{Q}[X, Y]$ nu este prim. (Ind. $X^2-Y^2 \in H$.)

165. Arătaţi că idealul $P =< X^2+X+1, Y^2-Y+2 >$ din $\mathbb{R}[X, Y]$ nu este prim.

166. Arătaţi că $(3, 1-\sqrt{-5})$ este ideal prim în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

167. Determinaţi spectrul inelului $\mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]$.

168. Este idealul generat de $x^3 - 2$ şi $x^2 - 2x - 1$ în $\mathbb{Z}[x]$ prim ?

169. Este idealul generat de 2 şi $7x^5 - 3x - 1$ în $\mathbb{Z}[x]$ prim ?

170. Arătaţi că $X\mathbb{Q}[X]$ este un ideal prim nemaximal al inelului $\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$.

171. Arătaţi că în $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ idealul $H =< 2 >$ nu este o intersecţie de două ideale prime. (Ind. $(1 + \sqrt{-5})^2 \in H$.)

172. Arătaţi că idealul $< 2 + 4i >$ din $\mathbb{Z}[i]$ nu este o intersecţie de ideale prime.

173. Factorizaţi 2, 3, 5, 7 şi 31 în $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

174. Arătaţi că $(2, 1 + \sqrt{-5})$ este ideal maximal în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

175. Arătaţi că inelul factor $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{21})/2]/(1+\sqrt{21})\mathbb{Z}[(1+\sqrt{21})/2]$ nu este izomorf cu $\mathbb{Z}_{20}$.

176. Arătaţi că inelul factor $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{17})/2]/(1+\sqrt{17})\mathbb{Z}[(1+\sqrt{17})/2]$ nu este izomorf cu $\mathbb{Z}_{16}$.

177. Arătaţi că inelul factor $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(a + b\sqrt{d})$ are grupul subiacent izomorf cu $\mathbb{Z}_c \times \mathbb{Z}_{n/c}$ unde n este norma lui $a + b\sqrt{d}$ iar $c = gcd(a, b)$.

178. Fie funcţia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]/(4 + i)\mathbb{Z}[i]$ dată prin $g(n) = \widehat{n}$. Arătaţi că:
(i) g este morfism de inele,
(ii) g este surjecţie,
(iii) $17\mathbb{Z} = ker(g)$,
(iv) $\mathbb{Z}_{17}$ este izomorf cu inelul factor $\mathbb{Z}[i]/(4 + i)\mathbb{Z}[i]$.

179. Fie funcţia $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_2[X]/X^2\mathbb{Z}_2[X]$ dată prin $f(a + bi) = \widehat{\bar{a} + \bar{b} + \bar{b}X}$.
Arătaţi că:
(i) f este morfism de inele,
(ii) f este surjecţie,
(iii) $ker(f) = 2\mathbb{Z}[i]$,
(iv) inelele factor $\mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$ şi $\mathbb{Z}_2[X]/X^2\mathbb{Z}_2[X]$ sunt izomorfe.

180. Fie funcţia $g : \mathbb{Z}_2[X] \to \mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$ dată prin $g(P(X)) = \widehat{P(1 + i)}$. Arătaţi că:
(i) g este bine-definită,
(ii) g este morfism de inele,
(iii) g este surjecţie,
(iv) $ker(g) = X^2\mathbb{Z}_2[X]$,
(v) inelele factor $\mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$ şi $\mathbb{Z}_2[X]/X^2\mathbb{Z}_2[X]$ sunt izomorfe.

181. Fie $\theta = (1 + \sqrt{5})/2$. Arătaţi că inelul factor $\mathbb{Z}[\theta]/11\mathbb{Z}[\theta]$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$.

182. Fie $\theta = (1 + \sqrt{5})/2$. Arătaţi că inelele factor $\mathbb{Z}[\theta]/5\mathbb{Z}[\theta]$ şi $\mathbb{Z}_5[X]/X^2\mathbb{Z}_5[X]$ sunt izomorfe.

183. Fie $\theta = (1+\sqrt{21})/2$. Arătaţi că inelul factor $\mathbb{Z}[\theta]\sqrt{21}\mathbb{Z}[\theta]$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_{21}$.

184. Fie $\theta = (1 + \sqrt{-15})/2$. Arătaţi că inelul factor $\mathbb{Z}[\theta]/\theta\mathbb{Z}[\theta]$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_4$.

185. Fie A un inel comutativ şi $x, y \in A$. Arătaţi că inelele factor $A/(xA + yA)$ şi $(A/xA)/\hat{y}(A/xA)$ sunt izomorfe.

186. Arătaţi că $A = \{a + b\sqrt[3]{12} + c\sqrt[3]{18};\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{R}$.

187. Fie $\theta = (1 + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100})/3$.
 (i) Găsiţi $m, n, p \in \mathbb{Z}$ aşa ca $\theta^3 = m\theta^2 + n\theta + p$.
 (ii) Arătaţi că $\mathbb{Z}[\theta] = \{a + b\theta + c\theta^2;\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{R}$.

188. Arătaţi că $\mathbb{Z}[\sqrt[4]{2}] = \{a + b\sqrt[4]{2} + c\sqrt[4]{4} + d\sqrt[4]{8};\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{R}$.

189. Arătaţi că $\{a+b\sqrt[4]{5}+c(1+\sqrt{5})/2+d\sqrt[4]{5}(1+\sqrt{5})/2;\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{C}$.

190. Este idealul $< 3, 1 + \sqrt{-5} > \cap < 3, 1 - \sqrt{-5} >$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ principal ?

191. Scrieţi polinomul $(3 + i)X^3 + (7 + i)X - 10 \in \mathbb{Z}[i][X]$ ca produs dintre o constantă şi un polinom primitiv.

192. Factorizaţi polinomul $15015X^4 + 60060$ în $\mathbb{Z}[X]$.

193. Fie polinoamele $f = 2X + 1 + \sqrt{-3}$ şi $g = 2X + 1 - \sqrt{-3}$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}][X]$.
 Arătaţi că:
 (i) f şi g sunt primitive dar fg este neprimitiv.
 (ii) f şi g sunt atomi, iar fg este produs de 3 atomi în $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}][X]$.

194. Factorizaţi polinoamele $(3 + i)X^4 - (3 + i)$ şi $(5 - i)X^6 - (5 - i)$ în $\mathbb{Z}[i][X]$ şi calculaţi cmmdc al lor.

195. Verificaţi dacă $X^4 - X^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[i][X]$ sau $\mathbb{Z}[\sqrt{3}][X]$.

196. Factorizaţi polinomul $X^4 - 10X^2 + 1$ în inelul
 (i) $\mathbb{Z}[X]$
 (ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}][X]$
 (iii) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}][X]$
 (iv) $\mathbb{Z}[\sqrt{6}][X]$
 (v) $\mathbb{Z}_2[X]$
 (vi) $\mathbb{Z}_3[X]$.

197. Găsiţi un polinom 2-Eisenstein de grad 4 din $\mathbb{Z}[X]$ care este reductibil în $\mathbb{Q}(i)[X]$.

198. Pentru $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, arătaţi că $f(X + 1)$ este 5-Eisenstein în $\mathbb{Z}[X]$. Mai general, arătaţi că polinomul $(X^p - 1)/(X - 1)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ pentru orice număr prim p

199. Arătaţi că $X^4 + 3X^3 + 6X^2 - \sqrt{3}X + \sqrt{3}$ este ireductibil în $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[X]$.

200. Factorizaţi polinomul $X^3 + 7 + 5\sqrt{2}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}][X]$.

201. Fie A un domeniu astfel încât $A[X]$ este inel factorial. Arătaţi că A este inel factorial.

202. Arătaţi că $11X^6 + 84X^5 - 91X^3 + 49X^2 + 56$ ireductibil in $\mathbb{Q}[X]$.

203. Arătaţi că

$$f = 3X^7 + 1067X^6 + 1261X^5 + 1358X^4 + 1455X^3 + 1649X^2 + 1843X + 2037.$$

este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ folosind Criteriul lui Eisenstein.

204. Arătaţi că polinomul f din ex. precedent este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ reducându-l mod 2.

205. Este polinomul f din ex. precedent ireductibil peste $\mathbb{Q}(i)$?

206. Fie p un număr prim şi $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom p-Eisenstein de grad ≥ 2. Arătaţi că $f(X+p)$ este polinom p-Eisenstein.

207. Factorizaţi polinomul $f = 3X^5 - 7X^4 + 2X^3 + 12X^2 + 2X - 2$ în $\mathbb{Z}[X]$ ştiind că f are o rădăcină pozitivă $\alpha \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

208. Arătaţi că $Y^3 + XY^2 + X^3Y + X$ este ireductibil în $\mathbb{C}[X,Y]$.

209. Arătaţi că $33X^6 + 84X^5 - 546X^3 + 294X^2 + 168$ ireductibil in $\mathbb{Q}[X]$.

210. Arătaţi că $3X^6+11X^4-5X^3-4X^2+X+7$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ reducându-l mod 2.

211. Arătaţi că $\sqrt{-2}X^5 + (7-6\sqrt{-2})X^3 + 22X^2 + 1 + 7\sqrt{-2}$ este ireductibil în $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})[X]$.

212. Arătaţi că $X^3Y + XY^2 + Y^3 + X$ este ireductibil în $\mathbb{C}[X,Y]$.

213. Arătaţi că polinomul $f = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ folosind teorema lui Murty. (Ind. $13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 - 547 \cdot 177 = -242$.)

214. Putem proba afirmaţia din ex. precedent reducându-l pe f mod 2 ?

215. Fie $p \in \{2,3,5\}$ şi $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom p-Eisenstein. Rezultă că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}(i)$?

216. Fie p un număr prim cu scrierea zecimală

$$p = 10^n \cdot 2 + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0, \quad 0 \leq a_i \leq 9.$$

Deduceţi din teorema lui Murty că polinomul

$$f = 2X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

este ireductibil.

217. Calculaţi conţinutul polinomului $420X^5 + 1170X^3 + 1650X^2 + 900 \in \mathbb{Z}[X]$.

218. Arătaţi că polinomul $f = 2X^5 - 4X^4 - 7X^3 + 25X^2 - 14X - 17$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. [Ind. $X \mapsto X+1$.]

219. Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ cu $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ si $n \geq 2$. Arătaţi că f este ireductibil dacă şi numai dacă $g = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ este ireductibil.

220. Arătaţi că polinomul $f = (1+4\omega)X^4 + 3\omega X^3 + (1+\omega)X^2 - 6X + 2 + \omega$ este ireductibil în $\mathbb{Q}(\omega)[X]$, unde $\omega = (1+\sqrt{-3})/2$.

221. Arătaţi că polinomul $f = (6-7i)X^4 + (15+8i)X^3 + (11-10i)X^2 - 17X + 2i$ este ireductibil în $\mathbb{Q}(i)[X]$.

222. Factorizaţi $X^5 + i$ în $\mathbb{Q}(i)[X]$. [Ind. $\mathbb{Z}[i]/(1+i) \simeq \mathbb{Z}_2$.]

223. Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ două polinoame unitare cu $fg \in \mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că $f, g \in \mathbb{Z}[X]$.

224. Arătaţi că nu există un subinel propriu D al lui $\mathbb{R}$ astfel încât D este factorial şi are corpul de fracţii $\mathbb{R}$.

225. Arătaţi că $f = X^2 - X + 3$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}][X]$ dar este reductibil în $\mathbb{Q}[\sqrt{-11}][X]$.

226. Arătaţi că în $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}][X]$ polinoamele $2X + 1 + \sqrt{-3}$ si $2X + 1 - \sqrt{-3}$ sunt primitive dar produsul lor nu este primitiv.

227. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom primitiv de grad ≥ 1. Arătaţi că f este primitiv în $\mathbb{Z}[i][X]$.

228. Daţi exemplu de extindere de inele factoriale $A \subseteq B$ astfel încât nu orice polinom primitiv din $A[x]$ este primitiv in $B[x]$.

229. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom de grad $n \geq 1$. Arătaţi că f se poate scrie ca suma a două polinoame ireductibile de grad n din $\mathbb{Z}[X]$.

230. Arătaţi că $x^{2^n} + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

231. Fie K un corp şi $f \in K[X]$ un polinom de grad ≥ 1. Arătaţi că f este ireductibil dacă şi numai dacă $f(X + 1)$ este ireductibil.

232. Arătaţi că polinomul $X^8 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

233. Descompuneţi polinomul $X^8 + 1$ în $\mathbb{C}[X]$ şi $\mathbb{R}[X]$.

234. Factorizaţi 541 in $\mathbb{Z}$ şi apoi $x^9 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ în $\mathbb{Z}[X]$ şi $\mathbb{Z}_2[X]$.

235. Factorizaţi $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - x - 2$ în $\mathbb{Z}[X]$.

236. Factorizaţi $x^4 + 6x^3 + 11x^2 - 8x + 1$ în $\mathbb{Z}_2[X]$, $\mathbb{Z}_3[X]$ şi $\mathbb{Z}[X]$.

237. Fie $x, y \in \mathbb{Z}$ cu $y^3 = x^2 + 49$. Arătaţi că x este par şi nu se divide cu 7.

238. Fie $x \in 2\mathbb{Z} - 7\mathbb{Z}$. Arătaţi că numerele $x + 7i$, $x - 7i$ sunt coprime în $\mathbb{Z}[i]$.

239. Rezolvaţi ecuaţia diofantică $y^3 = x^2 + 49$.

240. Sunt polinoamele $3x + 1$, $5x + 1$ coprime în $\mathbb{Z}[x]$? Dar comaximale?

241. In inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ considerăm numerele $a = -2 + 3\sqrt{-5}$ şi $b = 22 + 3\sqrt{-5}$. Arătaţi că $(a, b) = 1$ şi ab este un pătrat perfect dar a nu este asociat cu un pătrat perfect.

242. Arătaţi că $\mathbb{Z}_{13}$ este $\mathbb{Z}[i]$-modul faţă de înmulţirea cu scalari

$$(a + bi)\widehat{x} := (\widehat{a + 5b})x, \ a, b \in \mathbb{Z}, \ \widehat{x} \in \mathbb{Z}_{13}.$$

243. Arătaţi că $\mathbb{Z}_{17}$ este $\mathbb{Z}[i]$-modul faţă de înmulţirea cu scalari:
$(a + bi)x := (a + 4b)x$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}_{17}$.

244. Găsiţi o structură de $\mathbb{Z}[i]$-modul pe grupul $\mathbb{Z}_{289}$.

245. Arătaţi că $\mathbb{Z}_7$ nu are structuri de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$-modul.

246. Arătaţi că $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ este $\mathbb{Z}[i]$-modul faţă de înmulţirea cu scalari

$$(a + bi)(x, y) := (ax - by, ay + bx), \ a, b \in \mathbb{Z}, \ x, y \in \mathbb{Z}_3.$$

Calculaţi submodulele sale.

247. Pe grupul $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ considerăm structura de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$-modul dată de
$(a + b\sqrt{3})(x, y) := (ax + by, ay + bx)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}_2$.
Determinaţi submodulele acestui modul.

248. Fie $n \geq 2$ un întreg. Arătaţi că $\mathbb{Z}_n$ posedă o structură de $\mathbb{Z}[i]$-modul dacă şi numai dacă 4 nu divide n şi factorii primi impari ai lui n sunt de forma $4k+1$.

249. Determinaţi valorile lui d din mulţimea $\{2, 3, 5, 7\}$ pentru care există $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$-module de ordin 10.

250. Verificaţi dacă $\mathbb{Z}_{27}$ este $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$-modul faţă de înmulţirea cu scalari

$$(a + b\sqrt{7})\widehat{x} := (\widehat{a + 13b})x, \ a, b \in \mathbb{Z}, \ \widehat{x} \in \mathbb{Z}_{27}.$$

251. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul factor $\mathbb{Z}^2 / < (2, 1), (1, -2) >$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_5$.

252. Fie $\mathbb{Z}[i]$-modulul factor $M := \mathbb{Z}[i]^2 / < (3 + i, 3 - i) >$. Arătaţi că există $\alpha \in Z[i] - \{0\}$ şi $m \in M - \{0\}$ astfel încât $\alpha m = 0$. Deduceţi că M nu este izomorf cu $\mathbb{Z}[i]$.

253. Arătaţi că în $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}^2$ avem

$$< (3, 1), (5, -3)) > \ \cap \ < (7, 0), (0, 7) > = < (14, 0), (7, 7) > .$$

254. Fie M idealul lui $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ generat de 9 si $5 + 2\sqrt{7}$. Arătaţi că M privit ca $\mathbb{Z}$-modul este generat de $5 + 2\sqrt{7}$ şi $9 + 3\sqrt{7}$. Aparţine $11 - \sqrt{7}$ lui M ?

255. Este $\mathbb{Z}[i]$ un $\mathbb{Z}[3i]$-modul finit generat? Dar ciclic ?

256. Pe $M = \mathbb{Z}[i][X]$ considerăm structura de $\mathbb{Z}[X]$-modul dată de morfismul de inele $f(X) \mapsto f(X^2) : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[i][X]$. Este M finit generat?

257. Fie P, Q_1, Q_2 cu $Q_1 \subseteq P$, submodule ale unui modul M. Arătaţi că
$P \cap (Q_1 + Q_2) = Q_1 + (P \cap Q_2)$.

258. Este conjugarea complexă un endomorfism al $\mathbb{Z}[i]$-modulului $\mathbb{C}$? Este conjugarea complexă un endomorfism al $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-modulului $\mathbb{C}$?

259. Pe grupul $\mathbb{Z}_{97}$ definim două structuri de $\mathbb{Z}[i]$-modul (notate cu M şi N) prin înmulţirile cu scalari
$(a+bi)x := (a+22b)x$ şi respectiv $(a+bi)x := (a+75b)x$ unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}_{97}$.
Determinaţi aplicaţiile liniare de la M la N.

260. Pe grupul aditiv $G = \{(a + b\sqrt{2})/2^n | \ a, b, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ considerăm structura de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-modul dată de înmulţirea de numere reale. Este acest modul finit generat?

261. Arătaţi că orice $\mathbb{Z}[i]$-submodul finit generat al lui $\mathbb{Q}[i]$ este ciclic.

262. Găsiţi o structură de $\mathbb{Z}[i]$-modul pe grupul abelian $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{13}$. Listaţi submodulele acestui modul.

263. Pe grupul abelian $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ considerăm structura de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$-modul dată de înmulţirea cu scalari

$$(a + b\sqrt{-3})(x, y) := ((a + b)x, (a - b)y), \ a, b \in \mathbb{Z}, \ x, y \in \mathbb{Z}_4.$$

Calculaţi elementele submodulului generat de $(\hat{1}, \hat{1})$.

264. Arătaţi că în $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}^2$ avem

$$< (3, 0), (1, 1)) > \ \cap \ < (3, 0), (1, -1) > = < (3, 0), (0, 3) > .$$

265. Deduceţi din ex. precedent că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ intersecţia idealelor $< 3, 1 + \sqrt{-5} >$ şi $< 3, 1 - \sqrt{-5} >$ este un ideal principal.

266. Fie A un inel principal cu corpul de fracţii K astfel încât $A \neq K$. Pe K considerăm structura canonică de A-modul. Arătaţi că:
(i) orice A-submodul finit generat al lui K este ciclic,
(ii) K nu este A-modul finit generat.

267. Fie funcţia
$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10},\ f(x, y) = (\bar{x}, \widehat{2x - y}).$$
Arătaţi că :
(i) f este aplicaţie $\mathbb{Z}$-liniară.
(ii) f este surjectivă.
(iii) Nucleul lui f este egal cu $< (4, -2), (2, 4) >$.
(iv) Modulul factor $\mathbb{Z}^2/ < (4, -2), (2, 4) >$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$.

268. Folosind teorema fundamentală de izomorfism, arătaţi că $\mathbb{Z}[i]$-modulul factor
$$\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]/ < (1 + i, 1 - i) >$$
este izomorf cu $\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}_2$. Structura de $\mathbb{Z}[i]$-modul a lui $\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}_2$ este dată de
$$(a + bi)(c + di, x) = ((a + bi)(c + di), (a + b)x), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}_2.$$
(Ind. Incercaţi cu funcţia $(x, y) \mapsto (x - iy, y \cdot \widehat{1})$.)

269. Este $\mathbb{Z}[i]$-modulul $\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]/ < (1 + i, 1 - i) >$ din ex. precedent ciclic ?

270. Descrieţi submodulul M generat de 1 şi $\sqrt{2}$ în $\mathbb{Z}[i]$-modulul $\mathbb{C}$. Este M un subinel al lui $\mathbb{C}$?

271. Verificaţi dacă $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}_{7854}$ este suma directă internă
$$< \widehat{1309} > \dot{+} < \widehat{1122} > \dot{+} < \widehat{714} > \dot{+} < \widehat{462} > .$$

272. In inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ considerăm idealul I generat de 3 şi $1 + \sqrt{10}$. Arătaţi că I este $\mathbb{Z}$-modul liber cu baza $\{3, 1 + \sqrt{10}\}$.

273. Arătaţi că $\mathbb{Z}[i]$-modulul factor
$$\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]/ < (2 - i, 2 + i) >$$
este izomorf cu $\mathbb{Z}[i]$ cu structura canonică de $\mathbb{Z}[i]$-modul.
(Ind. Incercaţi cu funcţia $(x, y) \mapsto (2 + i)x - (2 - i)y$.)

274. Arătaţi că $\mathbb{Z}[i]$-modulul $\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]$ este generat de vectorii $(2 - i, 2 + i)$ şi $(1, 1 + i)$. (Ind. $1 = (1 + i)(2 - i) - (2 + i)$.)

275. Fie A un inel comutativ şi fie $a, b, a', b' \in A$ cu $aa' + bb' = 1$. Arătaţi că A-modulul factor $A^2/ < (a, b) >$ este izomorf cu A.

276. Arătaţi că
$$\mathbb{Z}_{144} =< \widehat{9} > \dot{+} < \widehat{16} >$$
ca $\mathbb{Z}$-module.

277. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}[i]$ este suma directă submodulelor generate $1 + 2i$ şi respectiv $2 + 3i$.

278. Găsiţi o bază pentru $\mathbb{Z}$-submodulul lui $\mathbb{Z}^3$
$$< (1, 2, 1), (2, -3, -1) > \ \cap \ < (3, 1, 1), (1, 1, 1) > .$$

279. Spunem că un modul este *indecompozabil* dacă singura sa descompunere în sumă directă internă $M = M_1 \dot{+} M_2$ este cea trivială, adică $M = M \dot{+} \{0\}$. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulele $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Z}_8$ sunt indecompozabile.

280. Verificaţi dacă

$$B = \{1 + 2i, 2 + 3i\},\ C = \{1 + 2i, 4 + 5i\},\ D = \{1, 1 + i, 1 + 3i\}$$

sunt baze ale $\mathbb{Z}$-modulul liber $\mathbb{Z}[i]$.

281. Arătaţi că $\mathbb{Z}_4$ nu este $\mathbb{Z}_8$-modulul liber. Generalizare.

282. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul factor $\mathbb{Z}^2/ < (2, 8) >$ nu este liber.

283. Număraţi aplicaţiile $\mathbb{Z}$-liniare de la $\mathbb{Z}[i]$ la $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

284. Daţi că un exemplu de două module nelibere M, N cu produsul direct $M \times N$ liber.

285. Arătaţi că suma directă externă a două module libere este un modul liber.

286. Fie A un domeniu cu toate idealele A-module libere. Arătaţi că A este inel principal.

287. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}^3$ este liber cu baza $\{(1, 2, 1), (2, -3, -1), (3, 1, 1)\}$.

288. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul factor $\mathbb{Z}^2/ < (2, 1), (1, -2) >$ nu este liber.

289. Fie R un inel comutativ, M un R-modul, $x, y \in M$ şi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R)$ o matrice inversabilă. Arătaţi că $\{ax + by, cx + dy\}$ este bază a lui M dacă şi numai dacă $\{x, y\}$ este bază.

290. Posedă grupurile $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ structuri de $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{3}]$-modul ?

291. Este $\mathbb{Z}[X^2, X^3]$ un $\mathbb{Z}[X^2]$-modul liber ?

292. Găsiţi o bază de $\mathbb{Z}$-modul liber pentru inelul $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

293. Găsiţi o bază de $\mathbb{Z}$-modul liber pentru inelul $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{12}, \sqrt[3]{18}]$.

294. Fie B un domeniu şi A un subinel al lui B. Arătaţi că dacă B este A-modul ciclic, atunci $A = B$.

295. Arătaţi că orice submodul neciclic al $\mathbb{Z}[i]$-modulului $\mathbb{Z}[i]^2$ este generat de două elemente.

296. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul factor $\mathbb{Z}^3/ < (1, 2, 3) >$ nu este ciclic.

297. Arătaţi că $3 + 5i$, $4 + 7i$ este o bază a lui $\mathbb{Z}[i]$ privit ca $\mathbb{Z}$-modul.

298. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}^3$ este liber cu baza $(1, 2, 1)$, $(2, -3, -1)$, $(3, 1, 1)$.

299. Arătaţi că idealul $I =< 2, 1 + 5\sqrt{-3} >$ al lui $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ nu este $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$-modul liber. Este I un $\mathbb{Z}$-modul liber ?

300. Pe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ considerăm structura de $\mathbb{Z}_4$-modul dată prin $\hat{a}(\bar{x}, \bar{y}) = (\overline{ax}, \overline{ay})$ unde $a, x, y \in \mathbb{Z}$. Este acest modul liber ?

301. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}_{105}$ este suma directă a submodulelor $< \widehat{15} >$, $< \widehat{21} >$, $< \widehat{35} >$. Deduceţi că $\mathbb{Z}_{105}$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$.

302. Arătaţi că $\mathbb{Z}[i]$-modulul $\mathbb{Z}[i]/ < 2 >$ nu este suma directă a două submodule nenule ale sale.

303. Arătaţi că un $\mathbb{Z}$-modul liber nu are elemente de ordin finit.

304. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul factor $\mathbb{Z}^3/ < (3,1,1) >$ este liber cu baza $\overline{(1,2,1)}$, $\overline{(2,-3,-1)}$.

305. Arătaţi că produsul direct a două module libere este modul liber.

306. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ nu este liber.

307. Fie $A = \mathbb{Z}[X,Y]$. Privim pe A ca modul peste el însuşi. Arătaţi că $M = \{f \in A \mid f(0,0) = 0\}$ este un submodul al lui A şi că M nu este liber.

308. Fie H un $\mathbb{Z}$-submodul al lui $\mathbb{Z}^3$. Presupunem că există $(a,b,c), (0,d,e), (0,0,f) \in H$ astfel încât
$a = min\{x \mid (x,y,z) \in H, x > 0\}$,
$d = min\{y \mid (0,y,z) \in H, y > 0\}$,
$f = min\{z > 0 \mid (0,0,z) \in H\}$.
Arătaţi că $(a,b,c), (0,d,e), (0,0,f)$ este o bază a lui H.

309. Arătaţi că în $\mathbb{Z}$-modulul factor $\mathbb{Z}^3/ < (2,3,4) >$ clasele vectorilor (1,1,1), (0,0,1) formeaza o bază.

310. Fie M un $\mathbb{Z}$-modul liber. Arătaţi că M nu are elemente nenule de ordin finit. Deduceţi că $\mathbb{Z}$-modulul factor $\mathbb{Z}^3/ < (2,4,-6) >$ nu este liber.

311. Fie M idealul inelului $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{11}]$ generat de 2 şi $3 + \sqrt[3]{11}$. Arătaţi că M privit ca $\mathbb{Z}$-modul are baza, $\{2,\ 1 + \sqrt[3]{11},\ 1 + \sqrt[3]{121}\}$ deci M este liber.

312. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Arătaţi că operaţia externă

$$(f(X), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \mapsto f(A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

defineşte pe $\mathbb{Q}^3$ o structură de $\mathbb{Q}[X]$-modul. Arătaţi că M este suma directă internă $\mathbb{Q}[X]g_1 \oplus \mathbb{Q}[X]g_2 \oplus \mathbb{Q}[X]g_3$, unde $g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

313. Fie E inelul endomorfismelor $\mathbb{Q}$-spaţiului vectorial $\mathbb{Q}[X]$. Considerăm elementele $a,b,c,d \in E$ definite prin relaţiile $a(X^n) = X^{2n}$, $b(X^n) = X^{2n+1}$, $c(X^{2n}) = X^n$, $c(X^{2n+1}) = 0$, $d(X^{2n+1}) = X^n$, $d(X^{2n}) = 0$, $n \geq 0$. Arătaţi că $\{c,d\}$ este o bază a lui E privit ca E-module stâng. [Ind. $ac + bd = 1$, $ca = 1$, $cb = 0$.]

314. Determinaţi imaginea şi nucleul aplicaţiei liniare $\phi : A \times A \to A$, $\phi(x,y) = (11 - 15\sqrt{2})x + (3 - 13\sqrt{2})y$, unde $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Bibliografie.

I.D. Ion, N. Radu, C. Nita, D. Popescu, Probleme de Algebra, EUB.
C. Baetica, S. Dascalescu, C. Boboc, G. Mincu, Probleme de Algebra, EUB.
J. Esmonde, M. Ram Murty, Problems in Algebraic Number Theory, Springer.