Analiză complexă

— Note de curs —

Seriile 20, 21, 22; anul univ. 2022-2023

Titular: lect. dr. Ovidiu Preda

Facultatea de Matematică şi Informatică
UB

Cuprins

Capitolul 1

Preliminarii de analiză complexă

Acest capitol este dedicat expunerii noţiunilor de bază ce vor fi folosite pe parcursul întregului curs. Vom incepe cu o scurta recapitulare a proprietăţilor algebrice şi analitice ale numerelor complexe, urmată de câteva noţiuni topologice despre mulţimi în planul complex. În continuare, vom defini noţiunea de funcţie olomorfă, care este versiunea complexă a diferenţiabilităţii. Aceasta va conduce la ecuaţiile Cauchy-Riemann şi serii de puteri. În final, vom defini notiunea de integrală a unei funcţii de-a lungul unei curbe. În particular, vom demonstra un rezultat important, care enunţat neriguros, arată astfel: dacă o funcţie f admite primitive, adică dacă există o funcţie olomorfă F a cărei derivată este f, atunci pentru orice curbă închisă γ are loc egalitatea $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Acesta este primul pas spre demonstrarea Teoremei Cauchy, care are un rol central în analiza complexă.

1.1 Numere complexe şi planul complex

1.1.1 Proprietăţi de bază

Un număr complex are forma $z = x + iy$, unde x şi y sunt reale, iar i este un număr imaginar ce satisface $i^2 = -1$. Numim x şi y partea reală, respectiv partea imaginară a lui z, şi notăm

$$x = \mathrm{Re}(z) \text{ şi } \ y = \mathrm{Im}(z).$$

Numerele reale sunt cele cu partea imaginară zero. Numerele cu partea reală zero se numesc pur imaginare. Mulţimea numerelor complexe se notează $\mathbb{C}$.

Numerele complexe pot fi vizulizate ca puncte în planul Euclidian, prin identificarea

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Regulile de adunare si înmulţire pentru numere complexe se obţin tratând toate numerele ca şi când ar fi reale, si ţinând cont că $i^2 = -1$. Dacă $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$, atunci

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

şi

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

Dacă luăm cele două expresii de mai sus ca definiţii pentru adunare şi înmulţire, atunci o simplă verificare va arăta că următoarele proprietăţi sunt verificate:

- **Comutativitate**: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ şi $z_1 z_2 = z_2 z_1$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- **Asociativitate**: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ şi $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
- **Distributivitate**: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_3 + z_2 z_3$, pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Adunarea numerelor complexe corespunde adunării vectorilor în planul $\mathbb{R}^2$, iar înmulţirea corespunde unei rotaţii compuse cu o omotetie, iar acest lucru se va vedea mai bine dacă introducem forma trigonometrică a numerelor complexe.

Modulul unui număr complex $z = x + iy$ este definit prin

$$|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

aşadar $|z|$ este distanţa de la origine la punctul (x, y). În particular, este valabilă inegalitatea triunghiului:

$$|z + w| \leq |z| + |w| \text{ pentru orice } \ z, w \in \mathbb{C}.$$

De asemenea, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, vom avea şi inegalităţile $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$; în plus, folosind inegalitatea triunghiului, deducem că pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$, avem

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Conjugatul complex al numărului $z = x + iy$ este

$$\overline{z} = x - iy,$$

care este obţinut prin simetria în planul complex faţă de axa reală. Un număr complex z este real dacă şi numai dacă $z = \overline{z}$, şi pur imaginar dacă $z = -\overline{z}$. Prin calcul direct, obţinem egalităţile

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ şi } \ \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

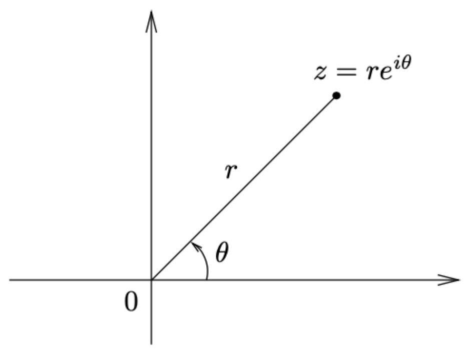
De asemenea, avem şi

$$|z|^2 = z\overline{z}, \text{ de unde obţinem } \ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \text{ pentru orice } z \neq 0.$$

Orice număr complex nenul z poate fi scris sub forma trigonometrică (numita şi forma polară) în forma

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}.}$$

Cum $|e^{i\theta}| = 1$, observăm că $r = |z|$, iar θ este unghiul (cu orientarea pozitivă) dintre axa reală şi semidreapta ce pleacă din origine si trece prin z.



Forma trigonometrică a unui număr complex

Se observă uşor că dacă avem două numere scrise in forma trigonometrică, $z = re^{i\theta}$ şi $w = se^{i\varphi}$, atunci $zw = rse^{i(\theta+\varphi)}$.

1.1.2 Convergenţă

Trecem acum de la proprietăţile aritmetice şi geometrice ale numerelor complexe, la notiunile de convergenţă şi limită.

Un şir $(z_n)_{n\geq 1}$ de numere complexe se numeşte **convergent** la $w \in \mathbb{C}$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - w| = 0, \text{ şi scriem } w = \lim_{n\to\infty} z_n \text{ sau } z_n \to w.$$

Această noţiune de convergenţă nu este nouă. Cum modulul în $\mathbb{C}$ este acelaşi lucru cu distanţa Euclidiană în planul $\mathbb{R}^2$, observăm că $z_n \to w$ dacă şi numai dacă punctele corespunzătoare lui z_n din plan converg la punctul ce îi corespunde lui w în plan. Aşadar, $z_n \to w$ dacă şi numai dacă $\text{Re}(z_n) \to \text{Re}(w)$ şi $\text{Im}(z_n) \to \text{Im}(w)$.

Deoarece nu întotdeauna putem identifica limita unui şir convergent, este convenabil să avem o condiţie ce depinde numai de termenii şirului, echivalentă cu convergenţa.

Un şir $(z_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **şir Cauchy** dacă pentru orice $\epsilon > 0$, există $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n, m \geq n_\epsilon$, avem $|z_n - z_m| \leq \epsilon$.

O proprietate esenţială a spaţiului metric $\mathbb{R}$ este completitudinea: orice şir Cauchy de numere reale este convergent. Cum un şir de numere complexe $(z_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy dacă şi numai dacă atât partea reală, cât şi partea imaginară a lui z_n sunt şiruri Cauchy, deducem că orice şir Cauchy din $\mathbb{C}$ este convergent la un punct din $\mathbb{C}$. Prin urmare, avem următorul rezultat.

Teorema 1.1.1: *Spaţiul metric $\mathbb{C}$ al numerelor complexe este complet.*

1.1.3 Mulţimi în planul complex

În continuare, vom reaminti câteva rezultate simple de topologie, necesare în studiul funcţiilor. Aceste noţiuni nu sunt noi, ele se gasesc în orice curs de analiza reală.

Pentru $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$, definim **discul deschis** $D_r(z_0)$ **de rază** r **şi centru** z_0 ca fiind mulţimea

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Discul închis $\overline{D}_r(z_0)$ de rază r şi centru z_0 este mulţimea

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\},$$

iar frontiera oricăruia dintre cele două discuri (deschis sau închis) este cercul

$$C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}.$$

Deoarece discul unitate (i.e. discul deschis de rază 1, centrat în 0) joacă un rol important în capitolele ce urmează, îl vom nota cu $\mathbb{D}$,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Având dată o mulţime $\Omega \subset \mathbb{C}$, un punct z_0 este punct interior al lui Ω dacă există $r > 0$ pentru care $D_r(z_0) \subset \Omega$. Interiorul mulţimii Ω, notat $\mathring{\Omega}$, este mulţimea punctelor sale interioare. O mulţime este deschisă dacă orice punct al său este interior.

Mulţimea Ω este închisă dacă $\mathbb{C} \setminus \Omega$ este deschisă. Această proprietate poate fi reformulată folosind şiruri. O mulţime Ω este închisă dacă pentru orice şir convergent $(z_n)_{n\geq 1} \subset \Omega$, $z_n \to z$, avem $z \in \Omega$. Închiderea (sau aderenţa) unei mulţimi Ω este mulţimea punctelor $z \in \mathbb{C}$ care sunt limite de şiruri convergente din Ω. Închiderea mulţimii Ω va fi notată $\overline{\Omega}$.

Frontiera mulţimii Ω este egală cu $\overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}$ şi va fi notată $\partial\Omega$.

O mulţime Ω este mărginită dacă există $M > 0$ pentru care $|z| \leq M$ pentru orice $z \in \Omega$. Altfel spus, Ω este conţinută într-un disc (cu raza suficient de mare). Dacă Ω este mărginită, atunci definim diametrul prin

$$\operatorname{diam}(\Omega) = \sup_{z,w\in\Omega} |z - w|.$$

O acoperire deschisă a mulţimii Ω este o familie de mulţimi deschise $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ (nu neapărat numărabilă) pentru care

$$\Omega \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha.$$

O mulţime Ω se numeşte compactă dacă din orice acoperire deschisă a sa, se poate extrage o subacoperire finită.

Teorema 1.1.2: [Heine-Borel] *O mulţime $\Omega \subset \mathbb{C}$ este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.*

Teorema 1.1.3: *O mulţime $\Omega \subset \mathbb{C}$ este compactă dacă şi numai dacă orice şir $(z_n)_{n\geq 1} \subset \Omega$ are un subşir convergent la un punct din Ω.*

Propoziția 1.1.4: *Dacă $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \supset \Omega_n \supset \ldots$ este un şir de mulţimi compacte nevide din $\mathbb{C}$ cu proprietatea că $\operatorname{diam}(\Omega_n) \to 0$, atunci există un unic punct $w \in \mathbb{C}$ astfel încât $w \in \Omega_n$ pentru orice $n \geq 1$.*

Demonstraţie. Alegem câte un punct z_n în fiecare Ω_n. Condiţia $\operatorname{diam}(\Omega_n) \to 0$ ne asigură că $(z_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy, prin urmare, este convergent la o limită pe care o notăm w. Cum fiecare Ω_n este compact, $w \in \Omega_n$ pentru orice $n \geq 1$. Prin urmare, w satisface proprietatea din enunţ. w este şi unic cu această proprietate, deoarece dacă ar mai exista un alt w' cu aceeaşi proprietate, am avea $|w - w'| > 0$, care ar contrazice ipoteza $\operatorname{diam}(\Omega_n) \to 0$. ■

Ultima noţiune topologică despre care discutăm în acest capitol este conexitatea. O mulţime $\Omega \subset \mathbb{C}$ se numeşte **conexă** dacă nu există U_1 şi U_2 deschise pentru care

- $\Omega \subset U_1 \cup U_2$,
- $\Omega \cap U_1 \neq \emptyset$ şi $\Omega \cap U_2 \neq \emptyset$,
- $\Omega \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Dacă o mulţime $\Omega \subset \mathbb{C}$ are proprietatea că orice două puncte ale sale pot fi unite printr-o curbă conţinută în intregime în Ω, atunci Ω este conexă.

O mulţime care este deschisă şi conexă se va numi **regiune** sau **domeniu**.

1.2 Funcţii definite pe planul complex

1.2.1 Funcţii continue

Considerăm $\Omega \subset \mathbb{C}$ şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Spunem că f este **continuă** în punctul $z_0 \in \Omega$ dacă pentru orice $\epsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $z \in \Omega$ pentru care $|z - z_0| < \delta$, avem $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. O definiţie echivalentă este următoarea: f este continuă în z_0 dacă pentru orice şir $(z_n)_{n\geq 1} \in \Omega$ pentru care $z_n \to z_0$, avem $f(z_n) \to f(z_0)$. Funcţia f se numeşte continuă pe Ω dacă este continuă în orice punct din Ω. Sumele şi produsele de funcţii continue sunt, de asemenea, continue.

Deoarece noţiunile de convergenţă pe $\mathbb{R}^2$ şi pe $\mathbb{C}$ coincid, o funcţie f de argument complex $z = x + iy$ este continuă dacă şi numai dacă este continuă atunci când privită ca funcţie de cele două variabile reale x şi y.

Folosind inegalitatea triunghiului, se observă imediat că dacă f este continuă, atunci funcţia reală $z \mapsto |f(z)|$ este de asemenea continuă. Spunem că f îşi atinge **maximumul** în punctul $z_0 \in \Omega$, dacă

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \text{ pentru orice } \; z \in \Omega,$$

iar pentru inegalitatea în sens invers obţinem definiţia **minimumului**.

Teorema 1.2.1: *O funcţie continuă pe o mulţime compactă $K \subset \mathbb{C}$ este mărginită şi îşi atinge maximumul şi minimimul pe K.*

1.2.2 Funcţii olomorfe

Prezentăm în continuare o noţiune centrală în analiza complexă, care, spre deosebire de cele anterioare, este în mod esenţial nouă şi specifică analizei complexe.

Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ o submulţime deschisă şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Funcţia f se numeşte **olomorfă în punctul** $z_0 \in \Omega$ dacă

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \tag{1.2.1}$$

converge la o limită din $\mathbb{C}$ când $h \to 0$. Atunci când $h \in \mathbb{C}$ şi $h \neq 0$, $z_0 + h \in \Omega$, prin urmare raportul este bine definit. Limita raportului, atunci când există, se notează $f'(z_0)$ şi se numeşte derivata lui f în z_0:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{1.2.2}$$

Este important să observăm că în limita de mai sus, h este un număr complex ce se poate apropia de zero din orice direcţie.

Funcţia f se numeşte **olomorfă pe** Ω dacă f este olomorfă în orice punct din Ω. Dacă C este o submulţime închisă a lui $\mathbb{C}$, spunem că f este olomorfă pe C dacă este olomorfă pe o mulţime deschisă ce conţine C. Dacă f este o funcţie olomorfă pe întreg planul complex $\mathbb{C}$, atunci f se numeşte funcţie **întreagă**.

Uneori, termenul de funcţie complex diferenţiabilă se foloseşte în loc de funcţie olomorfă. Acest lucru este natural, deoarece definiţia este similară cu cea de la diferenţiabilitatea funcţiilor de o variabilă reală. Totuşi, în ciuda acestei asemănări, o funcţie olomorfă satisface proprietăţi mult mai tari decât o functie diferenţiabilă de o variabilă reală. Spre exemplu, o funcţie olomorfă este indefinit derivabilă, adică existenţa primei derivate asigură existenţa derivatelor de orice ordin. De fapt, chiar o proprietate mai tare este asigurată: orice funcţie olomorfă este analitică, adică se poate scrie ca serie de puteri în jurul oricărui punct (seriile de puteri vor fi discutate în secţiunea următoare), şi din acest motiv vom folosi uneori termenul de funcţie **analitică** în loc de funcţie olomorfă.

Exemplul 1.2.2: Funcţia $f(z) = z$ este olomorfă pe orice mulţime deschisă din $\mathbb{C}$, şi $f'(z) = 1$. De fapt, orice funcçtie polinomială

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

este olomorfă pe întreg planul complex şi

$$p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + a_1.$$

Exemplul 1.2.3: Funcţia $1/z$ este olomorfă pe orice mulţime deschisă din $\mathbb{C}$ care nu conţine punctul zero, şi $f'(z) = -1/z^2$.

Exemplul 1.2.4: Funcţia $f(z) = \overline{z}$ nu este olomorfă. Într-adevăr,

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{h}}{h},$$

care nu are limită când $h \to 0$, după cum putem observa dacă mai întâi luăm h real, iar apoi pur imaginar.

O familie de exemple de funcţii olomorfe, pe care le vom discuta mai târziu, sunt seriile de puteri. Astfel de funcţii sunt, de exemplu, e^z, $\sin z$, şi $\cos z$.

Este clar din definiţia 1.2.2 că funcţia f este olomorfă în punctul z_0 dacă şi numai dacă există un număr $a \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - ah = h\psi(h), \tag{1.2.3}$$

unde ψ este o funcţie definită pentru h suficient de mic, şi $\lim_{h\to 0} \psi(h) = 0$. Bineînţeles, $a = f'(z_0)$.

Din această formulare, e clar că dacă f este olomorfă, atunci este şi continuă. Cu aceleaşi demonstraţii ca în cazul funcţiilor reale, avem următoarele proprietăţi pentru funcţii olomorfe.

Propoziția 1.2.5: *Dacă f şi g sunt olomorfe pe Ω, atunci*

1. *$f + g$ este olomorfă pe Ω şi $(f + g)' = f' + g'$.*

2. *fg este olomorfă pe Ω şi $(fg)' = f'g + fg'$.*

3. *Dacă $g(z_0) \neq 0$, atunci f/g este olomorfă în z_0 şi*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

În plus, dacă $f : \Omega \to U$ şi $g : U \to \mathbb{C}$ sunt olomorfe, atunci pentru derivata compunerii se aplica regula lanţului

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \text{ pentru orice } z \in \Omega.$$

1.2.3 Ecuaţiile Cauchy-Riemann

În această secţiune, vom clarifica relaţia dintre derivata complexă şi cea reală. Exemplul 1.2.4 ne arată că noţiunea de diferenţiabilitate complexă nu se obţine din diferenţiabilitatea reală într-un număr dublu de variabile. În termeni de variabile reale, funcţia $f(z) = \overline{z}$ corespunde funcţiei $F : (x, y) \mapsto (x, -y)$, care este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$. În orice punct din $\mathbb{R}^2$, diferenţiala lui F este dată de matricea Jacobiană 2×2 a derivatelor parţiale:

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

De fapt, F este liniară, aşadar este egală cu diferenţiala sa în orice punct. Prin urmare, F este indefinit diferenţiabilă. În particular, observăm că existenţa diferenţialei reale nu asigură olomorfia.

Motivaţi de acest exemplu, vom studia în continuare ce se întâmplă în cazul general. Considerăm $f = u + iv$ şi funcţia reală asociată $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

Reamintim că o funcţie $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ se numeşte diferenţiabilă în punctul $P_0(x_0, y_0)$ dacă există o aplicaţie liniară $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât

$$\frac{|F(P_0 + H) - F(P_0) - J(H)|}{|H|} \to 0 \text{ pentru } \ |H| \to 0, H \in \mathbb{R}^2. \tag{1.2.4}$$

Echivalent, putem scrie

$$F(P_0 + H) - F(P_0) - J(H) = J(H) + |H|\Psi(H),$$

unde $|\Psi(H)| \to 0$ pentru $|H| \to 0$. Aplicaţia liniară J este unică şi se numeşte diferenţiala lui F în punctul P_0. Dacă F este diferenţiabilă, atunci derivatele parţiale ale lui u şi v există, şi aplicaţia liniară J este descrisă în baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$ de matricea Jacobiană a lui F

$$J = J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

În cazul derivatei complexe, derivata este un număr complex $f'(z_0)$, iar în cazul diferenţialei reale, diferenţiala este o aplicaţie liniară (identificată cu o matrice). Există, totuşi, o legătură între cele două, dată de nişte relaţii între intrările matricei Jacobiene $J_F(x_0, y_0)$. Pentru a găsi aceste relaţii, mai întâi considerăm h real în limita 1.2.2, adică $h = h_1 + ih_2$ cu $h_2 = 0$. Atunci, dacă scriem $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, şi $f(z) = f(x, y)$, vom avea:

$$f'(z_0) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \tag{1.2.5}$$

unde $\partial/\partial x$ este derivata parţială a lui f în raport cu variabila x (adică fixăm y_0 şi gândim f ca o funcţie cu valori complexe, de o singură variabilă reală x).

Apoi, luăm h pur imaginar, $h = ih_2$, şi, cu un argument similar, obţinem

$$f'(z_0) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{ih_2} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0), \tag{1.2.6}$$

unde $\partial/\partial y$ este derivata parţială în raport cu variabila y. Prin urmare, dacă f este olomorfă, am arătat că

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Acum, dacă scriem $f = u + iv$, şi separăm partea reală de partea imaginară şi înlocuim $1/i$ cu $-i$, obţinem că derivatele parţiale ale lui u şi v există, şi satisfac relaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.2.7}$$

Acestea se numesc **ecuaţiile Cauchy-Riemann**, care fac legătura între analiza reală şi cea complexă.

Vom introduce, pentru cele ce urmează, doi operatori diferenţiali:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ şi } \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1.2.8}$$

Propoziţia 1.2.6: *Dacă f este olomorfă în z_0, atunci*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \text{ şi } f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z}(z_0).$$

De asemenea, dacă scriem $F(x, y) = f(z)$, atunci F este real diferenţiabilă şi

$$\det J_F(x_0, y_0) = |f'(z_0)|.$$

Demonstraţie. Scriind $f = u + iv$, este uşor de verificat că ecuaţiile Cauchy-Riemann sunt echivalente cu $\partial f/\partial \overline{z} = 0$. Mai mult, din 1.2.5 şi 1.2.6, avem

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0), \end{aligned}$$

iar ecuaţiile Cauchy-Riemann dau $\partial f/\partial z = 2\partial u/\partial z$. Pentru a demonstra că F este diferenţiabilă, este suficient să observăm că dacă $H = (h_1, h_2)$ şi $h = h_1 + ih_2$, atunci ecuaţiile Cauchy-Riemann implică

$$J_F(x_0, y_0)(H) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(h_1 + ih_2) = f'(z_0)h,$$

unde am identificat numărul complex cu perechea formată din partea reală şi partea imaginară. Aplicând din nou ecuaţiile Cauchy-Riemann, vom obţine

$$\det J_F(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left|2\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 = |f'(z_0)|^2.$$

■

Până acum, am presupus f olomorfă şi am dedus relaţii ce sunt satisfăcute de partea reală şi partea imaginară a funcţiei. Următoarea teoremă este o reciprocă importantă, care completează discuţia de până acum.

Teorema 1.2.7: *Fie $f = u + iv$ o funcţie cu valori complexe, definită pe o mulţime deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dacă u şi v sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ şi satisfac ecuaţiile Cauchy-Riemann pe Ω, atunci f este olomorfă pe Ω, şi $f'(z) = \partial f/\partial z$.*

Demonstraţie. Cum u şi v sunt diferenţiabile, putem scrie

$$u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2 + |h|\psi_1(h)$$

şi

$$v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 + |h|\psi_2(h),$$

unde $\psi_j \to 0$ (pentru $j = 1, 2$), când $|h| \to 0$, $h = h_1 + ih_2$. Folosind ecuaţiile Cauchy-Riemann, deducem că

$$f(z + h) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(h_1 + ih_2) + |h|\psi(h),$$

unde $\psi(h) = \psi_1(h) + \psi_2(h) \to 0$ pentru $h \to 0$. Prin urmare, f este olomorfă şi

$$f'(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

■

1.2.4 Serii de puteri

Forma generală a unei serii de puteri este

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.2.9}$$

unde $a_n \in \mathbb{C}$. Pentru a testa convergenţa absolută a acestei serii, trebuie să studiem seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||z|^n, \tag{1.2.10}$$

şi să observăm că dacă seria 1.2.9 este convergentă pentru un $z_0 \in \mathbb{C}$, atunci ea este absolut convergentă pentru orice z în discul $|z| \leq |z_0|$. În continuare, demonstrăm că întotdeauna există un disc deschis (posibil vid) pe care seria de puteri este absolut convergentă.

Teorema 1.2.8: **[Hadamard]** *Dată o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, există $0 \leq R \leq \infty$ astfel încât:*

1. *Dacă $|z| < R$, atunci seria este absolut convergentă.*

2. *Dacă $|z| > R$, atunci seria este divergentă.*

În plus, dacă facem convenţia $\frac{1}{0} = \infty$ *şi* $\frac{1}{\infty} = 0$*, atunci* R *este dată de formula lui Hadamard*

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Numărul R *se numeşte* ***raza de convergenţă*** *a seriei de puteri, iar regiunea* $|z| < R$ *se numeşte* ***discul de convergenţă****.*

Demonstraţie. Notăm $L = \frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$, şi presupunem că $L \neq 0, \infty$ (aceste două cazuri vor fi studiate separat, la final).

Dacă $|z| < R$, alegem $\epsilon > 0$ suficient de mic, astfel încât

$$(L + \epsilon)|z| = r < 1.$$

Din definiţia lui L, există n_ϵ astfel încât pentru orice $n \geq n_\epsilon$ avem $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq L + \epsilon$. Prin urmare,

$$|a_n||z|^n \leq [(L + \epsilon)|z|]^n = r^n.$$

Prin comparare cu seria geometrică $\sum r^n$, deducem că $\sum a_n z^n$ este convergentă.

Dacă $|z| > R$, alegem $\epsilon > 0$ suficient de mic, astfel încât

$$(L - \epsilon)|z| = r > 1.$$

Cum $L - \epsilon < \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$, există un subşir $(a_{k_n})_{n \geq 0}$ pentru care $|a_{k_n}|^{\frac{1}{k_n}} > L - \epsilon$ pentru orice $n \geq 0$. Aşadar, $|a_{k_n}||z|^{k_n} > [(L - \epsilon)|z|]^{k_n} = r^{k_n}$ pentru orice $n \geq 0$. Dar $r > 1$, deci $r^{k_n} \to \infty$ pentru $n \to \infty$, deci seria are un subşir care, în valoare absoluta, tinde la infinit, în consecinţă nu poate fi convergentă.

Revenim acum la cazurile $L = 0$ şi $L = \infty$.

- Dacă $L = 0$, atunci prin exact aceeaşi metodă ca în prima parte a demonstraţiei, obţinem că seria $\sum a_n z^n$ este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$.
- Dacă $L = \infty$, atunci argumente similare cu cele din a 2-a parte a demonstraţiei, arată că seria conţine un subşir care în valoare absoluta tinde la infinit, deci în acest caz, seria este divergentă pentru orice $|z| > 0$.

■

Observația 1.2.9: Pe frontiera discului de convergenţă, adică pentru $|z| = R$, situaţia este mai complicată. Seria poate fi convergentă pentru unele puncte z, şi divergentă pentru altele.

Un exemplu esenţial de serie de puteri este **funcţia complexă exponenţială**, care este definită pentru orice $z \in \mathbb{C}$, prin

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Atunci când z este real, definiţia coincide cu cea obişnuită a funcţiei reale exponenţiale. De fapt, seria scrisă mai sus este absolut convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Pentru a justifica acest lucru, este suficient să observăm că pentru orice $z \in \mathbb{C}$,

$$\limsup \left| \frac{z^n}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = \limsup \frac{|z|}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = 0,$$

deoarece $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$, şi să aplicăm Teorema 1.2.8.

Spre deosebire de seria exponenţială, seria geometrică $\sum z^n$ este absolut convergentă numai în discul $|z| < 1$, iar suma seriei este funcţia $\frac{1}{1-z}$, care este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Această egalitate se demonstrează exact ca în cazul real: mai întâi scriem

$$\sum_{n=1}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z},$$

şi apoi observăm că pentru $|z| < 1$, $\lim_{N\to\infty} z^{N+1} = 0$.

Alte exemple de serii de puteri care converg pe tot planul complex sunt **funcţiile trigonometrice** standard. Acestea sunt definite prin

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{şi} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

şi coincid cu funcţiile cos şi sin reale pentru $z \in \mathbb{R}$. Un calcul simplu arată că

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \text{ şi } \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Acestea se numesc **formulele Euler** pentru funcţiile cos şi sin.

Seriile de puteri sunt o clasă foarte importantă de funcţii olomorfe, cu care este foarte convenabil să lucrăm.

Teorema 1.2.10: *Seria de puteri $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ defineşte o funcţie olomorfă în discul său de convergenţă. Derivata lui f este, de asemenea, o serie de puteri, obţinută derivând termen cu termen seria lui f, adică*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Mai mult, f' are aceeaşi rază de convergenţă ca şi f.

Demonstraţie. Afirmaţia privind raza de convergenţă a lui f' rezultă imediat din formula lui Hadamard. Într-adevăr, $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, deci

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |na_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |na_n|^{\frac{1}{n-1}},$$

deci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ au aceeaşi rază de convergenţă. Pentru a demonstra teorema, avem de arătat că seria

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

este derivata lui f. Pentru aceasta, fie R raza de convergenţă a lui f, şi presupunem că $|z_0| < r < R$. Scriem

$$f(z) = S_N(z) + E_N(z),$$

unde

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \quad \text{şi} \quad E_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n.$$

Atunci, dacă h este ales astfel încât $|z_0 + h| < r$, avem

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - g(z_0) = \left(\frac{S_N(z_0+h)-S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0)\right) + \\ (S_N'(z_0) - g(z_0)) + \left(\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}\right).$$

Cum $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, vom avea

$$\left|\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left|\frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1},$$

unde am folosit că $|z_0| < r$ şi $|z_0 + h| < r$. Expresia din dreapta este "coada" unei serii convergente, deoarece seria lui g converge abosolut pe $|z| < R$. Prin urmare, dat un $\epsilon > 0$, putem găsi N_1 astfel încât pentru orice $N > N_1$ să avem

$$\left|\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}\right| < \epsilon.$$

De asemenea, cum $\lim_{N\to\infty} S_N'(z_0)$, există N_2 astfel încât pentru orice $N > N_2$, avem

$$|S_N'(z_0) - g(z_0)| < \epsilon.$$

Dacă fixăm N astfel încât $N \ge \max\{N_1, N_2\}$, atunci există $\delta > 0$ astfel încât pentru $|h| < \delta$, vom avea

$$\left|\frac{S_N(z_0+h)-S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0)\right| < \epsilon,$$

deoarece derivata unui polinom este obţinuta derivând termen cu termen. În consecinţă,

$$\left|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - g(z_0)\right| < 3\epsilon$$

pentru orice $|h| < \delta$, şi astfel teorema este demonstrată. ■

O aplicare succesivă a acestei teoreme conduce la

Corolarul 1.2.11: *O serie de puteri este indefinit derivabilă în discul său de convergenţă, iar derivatele de ordin superior sunt de asemenea serii de puteri, obţinute derivând termen cu termen.*

Până acum am avut de-a face numai cu serii de puteri centrate in zero. Mai general, o serie de puteri centrată în $z_0 \in \mathbb{C}$ are forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Discul de convergenţă al seriei este de această dată centrat în z_0, iar raza se calculează tot cu formula lui Hadamard. De fapt, dacă

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

atunci f este obţinută din g compusă cu o translaţie, mai exact $f(z) = g(w(z))$, unde $w(z) = z - z_0$. În consecinţă, tot ce este adevărat pentru g, va rămâne adevărat şi pentru f, dupa ce facem translaţia corespunzătoare. În particular, conform regulii lanţului la derivare,

$$f'(z) = g'(w)w' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}.$$

O funcţie definită pe o mulţime deschisă $\Omega \subset \mathbb{C}$ se numeşte **analitică în punctul** $z_0 \in \Omega$ dacă există o serie de puteri $\sum a_n(z - z_0)^n$ centrată în z_0, cu rază de convergenţă $R > 0$, astfel încât

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{pentru orice } z \text{ într-o vecinătate a lui } z_0.$$

Dacă f se poate scrie ca serie de puteri în jurul oricărui punct din Ω, spunem că f este **analitică pe** Ω.

Din Teorema 1.2.10, o funcţie analitică pe Ω este şi olomorfă. O teoremă pe care o vom demonstra în capitolul următor arată că şi implicaţia inversă este adevărată: orice funcţie olomorfă este analitică. Din acest motiv, termenii "olomorf" şi "analitic" vor fi folosiţi în funcţie de cum va fi mai convenabil în contextul în care ne vom afla.

1.3 Integrarea de-a lungul unei curbe

În definiţia unei curbe, vom face diferenţa între obiectul geometric 1-dimensional (înzestrat cu o orientare), şi o parametrizare a sa, care este o funcţie de la un interval închis, în $\mathbb{C}$, şi care nu este unic determinată.

O **curbă parametrizată** este o funcţie $z : [a, b] \to \mathbb{C}$, unde $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Vom spune că z este **netedă** dacă $z'(t)$ există, este continuă pe $[a, b]$, şi $z'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in [a, b]$. $z'(a)$ şi $z'(b)$ sunt interpretate ca derivata la dreapta, respectiv la stânga.

Spunem că o curbă parametrizată $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ este **netedă pe porţiuni** dacă z este continuă şi există $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$, astfel încât z este netedă pe $[a_k, a_{k+1}]$ pentru orice $0 \le k \le n - 1$.

Două parametrizări

$$z : [a, b] \to \mathbb{C} \quad \text{şi} \quad \widetilde{z} : [c, d] \to \mathbb{C}$$

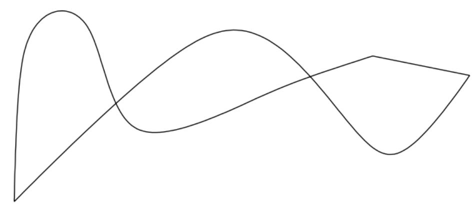
se numesc echivalente dacă există $t : [c, d] \to [a, b]$ difeomorfism astfel încât $t'(s) > 0$ şi $\widetilde{z}(s) = z(t(s))$ pentru orice $s \in [c, d]$. Condiţia $t'(s) > 0$ ne asigură că orientarea se păstrează: atunci când s parcurge intervalul de la c la d, $t(s)$ parcurge intervalul de la a la b.

Familia tuturor parametrizărilor care sunt echivalente cu $z(t)$ determină o curbă netedă $\gamma \subset \mathbb{C}$, care este imaginea lui $[a, b]$ prin z, cu orientarea dată de z atunci când t parcurge intervalul de la a la b.

Având curba γ cu parametrizarea $z(t), t \in [a, b]$, putem defini curba γ^-, obţinută din γ prin inversarea orientării (astfel încât γ şi γ^- au aceeaşi imagine în plan). O parametrizare pentru γ^- este $z^- : [a, b] \to \mathbb{R}$, definită prin $z^-(t) = z(b + a - t)$.

Este de asemenea clar cum putem defini o curbă netedă pe porţiuni. Punctele $z(a)$ şi $z(b)$ se numesc capetele curbei γ şi sunt independente de parametrizare. Cum γ are o orientare, este natural să spunem că γ începe în $z(a)$ şi se termină în $z(b)$.

O curbă netedă sau netedă pe porţiuni este **închisă** dacă $z(a) = z(b)$ (pentru orice parametrizare). O curbă netedă sau netedă pe porţiuni se numeşte **simplă** dacă nu se autointersectează, adică $z(t) = z(s)$ numai pentru $s = t$, sau $t = a, s = b$.



Curbă netedă pe porţiuni (închisă, care nu este simplă)

Un exemplu de bază este reprezentat de cercuri. Considerăm cercul $C_r(z_0)$ de rază r centrat în z_0.

$$C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Orientarea pozitivă (trigonometrică) este cea dată de parametrizarea standard

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \text{unde} t \in [0, 2\pi],$$

iar **orientarea negativă** (anti-trigonometrica) este dată de

$$z(t) = z_0 + re^{-it}, \text{unde} t \in [0, 2\pi].$$

În cele ce urmează, cu C vom nota un cerc generic, pozitiv orientat.

O metodă importantă în studiul funcţiilor olomorfe este reprezentată de integrarea funcţiilor complexe de-a lungul curbelor. Dată o curbă netedă γ în $\mathbb{C}$, parametrizată de $z : [a, b] \to \mathbb{C}$, iar f continuă pe γ, definim **integrala lui f de-a lungul lui** γ prin

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Pentru ca această definiţie să fie corectă, trebuie să arătăm că integrala din membrul drept nu depinde de alegerea parametrizării curbei γ. Considerăm, aşadar, o altă parametrizare $\widetilde{z} : [c, d] \to \mathbb{C}$, echivalentă cu z. Atunci, formula de schimbare de variabilă în integrală implică

$$\int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_c^d f(z(t(s)))z'(t(s))t'(s)ds = \int_a^b f(\widetilde{z}(s))\widetilde{z}'(s)ds,$$

deci definiţia integralei lui f pe γ este corectă.

Dacă γ este netedă pe porţiuni, atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z(t))z'(t)dt,$$

unde $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, iar z este o parametrizare netedă pe $[a_k, a_{k+1}]$ pentru orice k.

Prin definiţie, **lungimea** curbei netede γ este

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|dt.$$

Cu acelaşi argument ca înainte, această definiţie nu depinde de alegerea parametrizării. Dacă γ este netedă pe porţiuni, atunci lungimea lui γ este suma lungimilor pe porţiunile netede.

Propoziția 1.3.1: *Integrala funcţiilor continue de-a lungul curbelor satisface următoarele proprietăţi:*

1. *Este liniară, adică dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, atunci*

$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz.$$

2. *Dacă γ^- este γ cu orientarea inversă, atunci*

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz.$$

3. *Are loc inegalitatea*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \sup_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \ell(\gamma).$$

Demonstraţie. Prima proprietate rezultă din liniaritatea integralei Riemann. A doua se obţine printr-o schimbare de variabilă în integrală. Pentru a treia, avem

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(z(t))| \int_a^b |z'(t)|dt = \sup_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \ell(\gamma).$$

■

Considerăm Ω o mulţime deschisă şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$. O **primitivă** pentru f este o funcţie olomorfă $F : \Omega \to \mathbb{C}$, pentru care $F'(z) = f(z)$ pentru orice $z \in \Omega$.

Teorema 1.3.2: *Dacă f este o funcţie continuă care are o primitivă F în Ω, iar γ este o curbă din Ω care începe în w_1 şi se termină în w_2, atunci*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(w_2) - F(w_1).$$

Demonstraţie. Demonstraţia este o simplă aplicare a regulii de derivare a funcţiilor compuse (regula lanţului) şi a teoremei fundamentale a analizei. Considerăm $z(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ o parametrizare pentru γ. Atunci, $z(a) = w_1$, $z(b) = w_2$, şi avem

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)). \end{aligned}$$

Dacă γ este numai netedă pe porţiuni, metoda este aceeaşi, obţinem o sumă telescopica şi ajungem la acelaşi rezultat final. ■

Corolarul 1.3.3: *Dacă γ este o curbă închisă în mulţime deschisă Ω şi f este continuă şi admite primitive pe Ω, atunci*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Demonstraţie. Este o consecinţă imediată a Teorema 1.3.2. ■

De exemplu, funcţia $f(z) = \frac{1}{z}$ nu admite primitive pe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, deoarece o parametrizare a cercului unitate C este $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, iar

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i \neq 0.$$

Vom vedea în capitolele ce urmează că acest exemplu, aparent nesemnificativ, stă la baza teoriei pe care o vom prezenta.

Corolarul 1.3.4: *Dacă f este olomorfă într-o regiune Ω şi $f' = 0$, atunci f este constantă.*

Demonstraţie. Fixăm $w_0 \in \Omega$. Cum Ω este conexă, pentru orice $w \in \Omega$, există o curbă γ ce uneşte w_0 cu w. Dar f este o primitivă a lui f', aşadar

$$\int_\gamma f'(z) dz = f(w) - f(w_0).$$

Dar ipoteza $f' = 0$ ne asigură că integrala din membrul stâng este 0, deci $f(w) = f(w_0)$ pentru orice $w \in \Omega$. ■

Capitolul 2

Teorema lui Cauchy

2.1 Teorema lui Goursat

Corolarul 1.3.4 din capitolul precedent ne asigură că dacă f are o primitivă pe o mulţime deschisă Ω, atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

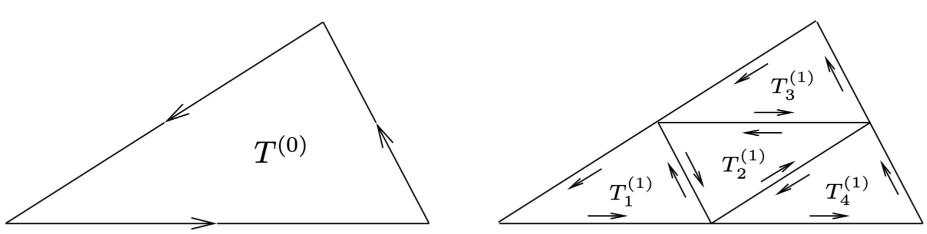
pentru orice curbă închisă din Ω. Reciproc, dacă reuşim să arătăm că relaţia de mai sus are loc pentru un anumit tip de curbe γ, atunci va exista o primitivă. Punctul de plecare pentru a demonstra acest rezultat este

Teorema 2.1.1: [Goursat] *Dacă $\Omega \subset \mathbb{C}$ este deschisă, iar $T \subset \Omega$ este un triunghi al cărui interior este de asemenea conţinut în Ω, atunci*

$$\int_T f(z)dz = 0$$

pentru orice funcţie f olomorfă pe Ω.

Demonstraţie. Notăm cu $T^{(0)}$ triunghiul iniţial, cu o orientare fixată, care va fi cea pozitivă. Notăm cu $d^{(0)}$ şi $p^{(0)}$ diametrul, respectiv perimetrul triunghiului $T^{(0)}$. Primul pas al construcţiei noastre este să împărţim fiecare latură a triunghiului in două şi să desenăm segmentele ce unesc mijloacele laturilor. Obţinem patru triunghiuri mai mici, notate $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $T_3^{(1)}$, şi $T_4^{(1)}$, care sunt asemenea cu triunghiul iniţial. Construcţia şi orientările triunghiurilor mai mici sunt ilustrate in desenul urmator.



Împărţirea lui $T^{(0)}$ în patru triunghiuri mai mici

Orientările au fost alese astfel încât pe laturile triunghiului $T^{(0)}$ coincid cu orientarea fixată la început, aşadar dupa ce reducem integralele pe aceeaşi latură, in sensuri opuse, vom avea

$$\int_{T^{(0)}} f(z)dz = \int_{T_1^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_2^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_3^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_4^{(1)}} f(z)dz. \tag{2.1.1}$$

Prin urmare, există un $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, pentru care

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\int_{T_j^{(1)}} f(z)dz\right|, \tag{2.1.2}$$

altfel 2.1.1 şi inegalitatea triunghiului ar conduce la contradicţie. Alegem un triunghi ce satisface inegalitatea 2.1.2 şi îl notăm $T^{(1)}$. Dacă $d^{(1)}$ şi $p^{(1)}$ sunt diametrul, respectiv perimetrul lui $T^{(1)}$, atunci

$$d^{(1)} = \frac{1}{2}d^{(0)} \quad \text{şi} \quad p^{(1)} = \frac{1}{2}p^{(0)}.$$

Repetăm acum acest proces pentru triunghiul $T^{(1)}$, împărţind-ul în 4 triunghiuri mai mici. Continuând acet proces, obţinem şirul de triunghiuri

$$T^{(0)}, T^{(1)}, \ldots, T^{(n)}, \ldots$$

cu proprietatea că

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{T_j^{(n)}} f(z)dz\right|, \tag{2.1.3}$$

şi

$$d^{(n)} = 2^{-n}d^{(0)} \quad \text{şi} \quad p^{(n)} = 2^{-n}p^{(0)},$$

unde $d^{(n)}$ şi $p^{(n)}$ sunt diametrul, respectiv perimetrul lui $T^{(n)}$. Vom nota cu $\mathcal{T}^{(n)}$ triunghiul reprezentat mulţimea închisă şi mărginită din plan cu frontiera $T^{(n)}$. Construcţia noastră conduce la un şir descrescător de mulţimi compacte

$$\mathcal{T}^{(0)} \supset \mathcal{T}^{(1)} \supset \ldots \supset \mathcal{T}^{(n)} \supset \ldots$$

cu diametru care tinde la zero. Prin urmare, există un unic punct z_0 care se află în toate triunghiurile $\mathcal{T}^{(n)}$. Cum f este olomorfă în z_0, putem scrie

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0),$$

unde $\psi(z) \to 0$ când $z \to z_0$. Cum constanta $f(z_0)$ şi funcţia liniară $f'(z_0)(z - z_0)$ au primitive, putem integra egalitatea de mai sus şi obţinem

$$\int_{T^{(n)}} f(z)dz = \int_{T^{(n)}} \psi(z)(z - z_0)dz. \tag{2.1.4}$$

Dar z_0 se află în triunghiul închis $\mathcal{T}^{(n)}$, iar z pe frontiera sa, deci $|z - z_0| \leq d^{(n)}$, şi folosind 2.1.4 şi (3) din Propoziția 1.3.1, obţinem

$$\left|\int_{T^{(n)}} f(z)dz\right| \leq \epsilon_n d^{(n)} p^{(n)},$$

unde $\epsilon_n = \sup_{z \in T^{(n)}} |\psi(z)| \to 0$ când $n \to \infty$. De aici, deducem că

$$\left|\int_{T^{(n)}} f(z)dz\right| \leq \epsilon_n 4^{-n} d^{(0)} p^{(0)},$$

de unde obţinem, inegalitatea

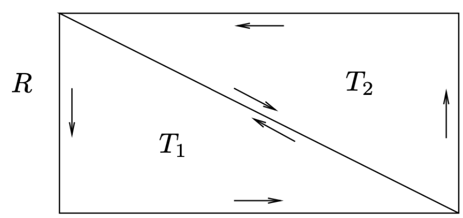
$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{T^{(n)}} f(z)dz\right| \leq \epsilon_n d^{(0)} p^{(0)}.$$

În final, dacă facem $n \to \infty$, obţinem concluzia. ∎

Corolarul 2.1.2: *Dacă f este olomorfă pe o mulţime deschisă Ω ce conţine un dreptunghi R şi interiorul său, atunci*

$$\int_R f(z)dz = 0.$$

Demonstraţie. Acest rezultat se obţine imediat din teorema lui Goursat dacă alegem orientările ca în desenul următor



şi scriem

$$\int_R f(z)dz = \int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz.$$

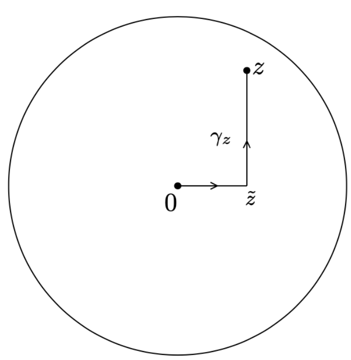
∎

2.2 Existenţa locală a primitivelor şi Teorema lui Cauchy pentru disc

O primă consecinţă a teoremei lui Goursat este existenţa primitivelor pentru funcţii olomorfe în disc.

Teorema 2.2.1: *Orice funcţie olomorfă pe un disc deschis are o primitivă în acel disc.*

Demonstraţie. După o translaţie, putem presupune că discul D este centrat în 0. Dat un punct $z \in D$, consideră, curba netedă pe porţiuni ce se obţine mergând mai întâi pe orizontală de la 0 la $\mathrm{Re}(z)$, iar apoi pe verticală de la $\mathrm{Re}(z)$ la z. Alegem orientarea de la 0 spre z şi notăm această linie poligonală cu γ_z, ca in figura urmatoare



Definim

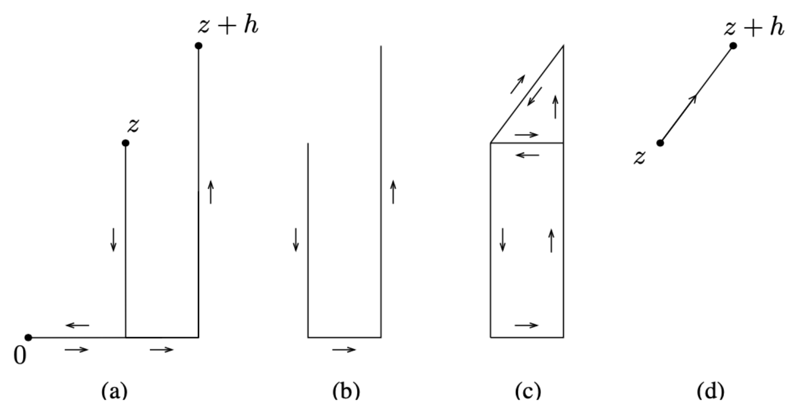
$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(z)dz.$$

Alegerea pe care am facut-o pentru γ_z ne asigură că F este corect definită. Afirmăm că F este olomorfă pe D şi $F'(z) = f(z)$ pentru orice $z \in D$.

Pentru a demonstra acest lucru, fixăm $z \in D$ şi considerăm $h \in \mathbb{C}$ suficient de mic astfel încât $z + h \in D$. Vom avea

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw.$$

Funcţia f este mai întâi integrată de-a lungul lui γ_{z+h} cu orientarea originală, apoi de-a lungul lui γ_z cu orientarea inversă (din cauza minusului din faţa integralei a doua). Aceasta corespunde figurii (a) de mai jos. Deoarece integrăm f pe acelaşi segment în sensuri diferite, acestea se reduc, rămânând figura (b). Completând apoi dreptunghiul şi triunghiul ca in figura (c), dupa ce aplicăm Teorema lui Goursat pentru triunghi şi dreptunghi, rămânem cu segmentul din figura (d).



Relaţia dintre curbele γ_{z+h} şi γ_z

Deci

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(w)dw,$$

unde η este segmentul de la z la $z + h$. Cum f este continuă, putem scrie

$$f(w) = f(z) + \psi(w)$$

unde $\psi(w) \to 0$ când $w \to z$. Aşadar,

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(z)dw + \int_{\eta} \psi(w)dw = f(z)\int_{\eta} dw + \int_{\eta} \psi(w)dw. \tag{2.2.1}$$

Pe de o parte, constanta 1 are primitiva w, deci aplicând Teorema 1.3.2, prima integrală este egală cu h. Pe de altă parte, avem inegalitatea

$$\left| \int_{\eta} \psi(w)dw \right| \leq \sup_{w \in \eta} |\psi(w)||h|.$$

Cum $\sup_{w\in\eta}|\psi(w)| \to 0$ când $h \to 0$, deducem din 2.2.1 că

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z),$$

adică $F' = f$ pe discul D. ■

Această teoremă spune că local, orice funcţie olomorfă admite primitive. Este important să observăm că aceeaşi demonstraţie funcţionează nu numai pentru discuri, dar si pentru alte tipuri de mulţimi. Vom reveni la această observaţie mai târziu.

Teorema 2.2.2: [Teorema Cauchy pentru disc] *Fie f olomorfă pe un disc şi γ o curbă închisă în acel disc. Atunci,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Demonstraţie. Din Teorema 2.2.1 ştim că f admite primitive pe disc, iar Corolarul 1.3.3 încheie demonstraţia. ■

Corolarul 2.2.3: *Fie f olomorfă pe o mulţime deschisă ce conţine cercul C şi interiorul său. Atunci,*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Demonstraţie. Fie D discul cu frontiera C. Atunci, există un disc puţin mai mare, D', astfel încât $D \subset D' \subset \Omega$. Cum f este olomorfă pe D', putem aplica Teorema 2.2.2 pentru D' şi obţinem $\int_C f(z)dz = 0$. ■

2.3 Omotopie şi domenii simplu conexe

Cheia generalizării Teoremei lui Cauchy la domenii mai complicate decât discul este să ştim pentru ce domenii există primitive pentru orice funcţie olomorfă. Pentru aceasta, vom introduce noţiunea de omotopie, din care va decurge noţiunea de simplu conexitate.

Considerăm γ_0 şi γ_1 două curbe într-o mulţime deschisă Ω care au aceleaşi capete. Aşadar, dacă $\gamma_0(t)$ şi $\gamma_1(t)$ sunt parametrizări definite pe $[a,b]$, atunci avem

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a) \text{ şi } \gamma_0(b) = \gamma_1(b).$$

Aceste două curbe se numesc **omotope în** Ω dacă există o funcţie **continuă** $F : [0,1]\times[a,b] \to \Omega$ astfel încât $F(0,t) = \gamma_0(t)$ şi $F(1,t) = \gamma_1(t)$ pentru orice $t \in [a,b]$. Funcţia F cu aceste proprietăţi se numeşte omotopie între cele două curbe.

Intuitiv, două curbe sunt omotope dacă una dintre ele poate fi deformată în cealaltă printr-o transformare continuă,care nu iese în niciun moment din Ω.

Teorema 2.3.1: *Dacă f este olomorfă pe Ω şi γ_0, γ_1 sunt două curbe omotope în Ω, atunci*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Demonstraţie. Vom demonstră mai întâi că dacă două curbe sunt apropiate una de alta şi au aceleaşi capete, atunci integralele funcţiei pe aceste două curbe sunt egale.

Fie F o omotopie între curbele γ_0 şi γ_1. Cum $F([0,1]\times[a,b])$ este compactă şi este inclusă în mulţimea deschisă Ω, există $\epsilon > 0$ pentru care $d(F([0,1]\times[a,b]), \mathbb{C}\setminus\Omega) > 3\epsilon$. Fixăm $\epsilon > 0$ cu această proprietate.

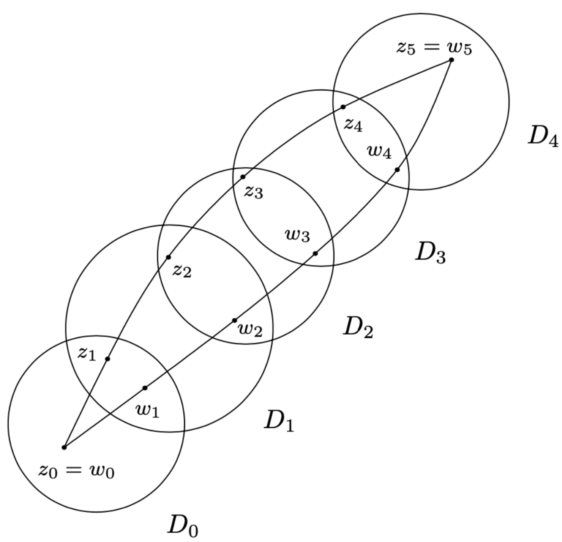
Cum F este continuă pe o mulţime compactă, ea este uniform continuă, deci există $\delta > 0$ astfel încât

$$\sup_{t\in[a,b]} |\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| < \epsilon \quad \text{pentru orice} \quad |s_1 - s_2| < \delta.$$

Fixăm s_1 şi s_2 cu $|s_1 - s_2| < \delta$. Apoi alegem discurile $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ de rază 2ϵ şi punctele consecutive $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}\}$ pe γ_{s_1} şi $\{w_0, w_1, \ldots, w_{n+1}\}$ pe γ_{s_2} astfel încât reuniunea acestor discuri acoperă ambele curbe şi

$$z_i, z_{i+1}, w_i, w_{i+1} \in D_i.$$

Construcţia este cea din desenul urmator



Acoperirea a 2 curbe apropiate cu discuri

De asemenea, alegem $z_0 = w_0$ punctul de plecare şi $z_{n+1} = w_{n+1}$ punctul de final al curbelor. Pe discul D_i, notăm cu F_i o primitivă a lui f, existenţa fiind asigurată de Teorema 2.2.1. Pe intersecţia $D_i \cap D_{i+1}$, F_i şi F_{i+1} sunt primitivele aceleiaşi funcţii, deci

$$F_{i+1}(z_{i+1}) - F_i(z_{i+1}) = F_{i+1}(w_{i+1}) - F_i(w_{i+1}),$$

de unde deducem

$$F_{i+1}(z_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1}) = F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1}).$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{s_1}} f(z)dz - \int_{\gamma_{s_2}} f(z)dz &= \sum_{i=0}^{n}[F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i)] - \sum_{i=0}^{n}[F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i)] \\ &= \sum_{i=0}^{n}[F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i) - F_i(w_{i+1}) + F_i(w_i)] \\ &= \sum_{i=0}^{n}[(F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})) - (F_i(z_i) - F_i(w_i))] \\ &= (F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1})) - (F_0(z_0) - F_0(w_0)).\end{aligned}$$

Cum $z_0 = w_0$ şi $z_{n+1} = w_{n+1}$, obţinem

$$\int_{\gamma_{s_1}} f(z)dz = \int_{\gamma_{s_2}} f(z)dz.$$

În final, împărţind intervalul $[0, 1]$ în subintervale $[s_i, s_{i+1}]$ de lungimi mai mici decât δ, putem merge de la γ_0 la γ_1 aplicând metoda de mai sus de un număr finit de ori. Astfel, teorema este demonstrată. ■

Definiția 2.3.2: Un deschis Ω se numeşte **simplu conex** (sau 1-conex) dacă orice două curbe care au aceleaşi capete sunt omotope.

Teorema 2.3.3: *Orice funcţie olomorfă f pe un domeniu simplu conex Ω admite primitive.*

Demonstraţie. Fixăm un punct $z_0 \in \Omega$ şi definim

$$F(z) = \int_{\gamma} f(z)dz,$$

unde γ este o curbă ce uneşte z_0 cu z. Cum Ω este simplu conex, Teorema 2.3.1 arată această definiţie nu depinde de curba γ aleasă. Prin urmare, putem scrie

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(z)dz,$$

unde η este segmentul ce uneşte z cu $z + h$. Cu acelaşi argument ca în Teorema 2.2.1, se arată că

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

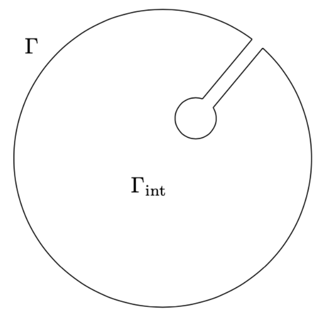
■

O consecinţă imediată este următoarea generalizare pentru Teorema 2.2.2

Teorema 2.3.4: **[Teorema Cauchy]** *Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplu conex, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfă, si γ o curbă închisă în Ω. Atunci,*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Un exemplu de domeniu simplu conex este urmatorul



Exemplu de contur **gaură de cheie**

Acesta va fi important pentru demonstrarea următorului rezultat important al analizei complexe. Orientarea pozitiva este, ca şi în cazul cercului, cea care are interiorul la stânga atunci când parcurgem curba.

2.4 Formula lui Cauchy şi aplicaţii

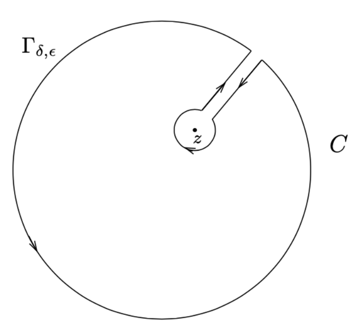
2.4.1 Formulele integrale şi inegalităţile Cauchy

Formulele de reprezentare, în special cele integrale, au un rol important în matematică, deoarece ne ajută să recuperăm funcţia pe o mulţime mai mare, atunci când cunoaştem valorile ei doar pe o mulţime mică. Următorul rezultat este o astfel de formulă integrală, care va sta la baza tuturor rezultatelor importante ale analizei complexe.

Teorema 2.4.1: [**Formula Cauchy**] *Fie f o funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă ce conţine o vecinătate a discului închis $\overline{D}$. Notăm cu C frontiera discului D, pe care luăm orientarea pozitivă. Atunci,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad \textit{pentru orice} \quad z \in D.$$

Demonstraţie. Fie $z \in D$. Considerăm conturul gaură de cheie $\Gamma_{\delta,\epsilon}$ care omite punctul z, ilustrat în desenul următor



Conturul $\Gamma_{\delta,\epsilon}$

δ este lăţimea coridorului de acces spre z, iar ϵ este raza cercului mic, centrat în z. Cum funcţia

$$F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

este olomorfă peste tot în afara lui $\zeta = z$, avem

$$\int_{\Gamma_{\delta,\epsilon}} F(\zeta) d\zeta = 0$$

din teorema lui Cauchy (deoarece conturul $\Gamma_{\delta,\epsilon}$ poate fi inclus într-un domeniu puţin mai mare, simplu conex). Mai departe, facem coridorul mai îngust lăsând $\delta \to 0$, şi folosim continuitatea lui F pentru a vedea că la limită, cele două integrale pe segmentele coridorului se anulează reciproc, având orientări opuse. Partea care rămâne este formată din două curbe: cercul mare C cu orientarea pozitivă, şi cercul mic C_ϵ, cu orientarea negativă. Pentru a vedea ce se întâmplă cu integrala pe cercul mic, scriem

$$F(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \frac{f(z)}{\zeta - z}$$

şi observăm că datorită olomorfiei funcţiei f, primul termen din membrul drept este mărginit în jurul lui z, aşadar integrala sa pe C_ϵ tinde la zero când $\epsilon \to 0$. Pentru a încheia demonstraţia, este suficient să vedem că

$$\begin{aligned}
\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= f(z) \int_{C_\epsilon} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \\
&= f(z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon e^{-it}} (-i\epsilon e^{-it}) dt \\
&= -f(z) \int_0^{2\pi} i dt \\
&= -f(z) \cdot 2\pi i
\end{aligned}$$

de unde deducem

$$0 = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z),$$

adică exact ce trebuia demonstrat. ∎

Un corolar al formulei integrale Cauchy este următoarea formulă integrală pentru derivate

Teorema 2.4.2: [**Formula Cauchy pentru derivate**] *Fie f o funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă Ω. Atunci, f este indefinit complex derivabilă pe Ω. În plus, dacă Ω conţine o vecinătate a discului închis $\overline{D}$ şi notăm cu C frontiera discului D, pe care luăm orientarea pozitivă, derivatele lui f sunt date de formula*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \textit{pentru orice} \quad z \in D.$$

Demonstraţie. Demonstraţia se face prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$. Cazul $n = 0$ este exact formula Cauchy, adică Teorema 2.4.1. Pentru pasul de inducţie, presupunem că f este de $(n-1)$ ori derivabilă, şi

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

Pentru h suficient de mic, vom avea

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z)}{h}=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(\zeta-z-h)^n}-\frac{1}{(\zeta-z)^n}\right]d\zeta. \tag{2.4.1}$$

Folosind formula

$$A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\ldots+AB^{n-2}+B^{n-1}),$$

pentru $A=\frac{1}{\zeta-z-h}$ şi $B=\frac{1}{z-h}$, obţinem

$$\frac{1}{(\zeta-z-h)^n}-\frac{1}{(\zeta-z)^n}=\frac{h}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}[A^{n-1}+A^{n-2}B+\ldots+AB^{n-2}+B^{n-1}].$$

Dar dacă h este mic, atunci $z+h$ şi z stau la distanţă cel putin $c>0$ de cercul C, deci luând limita pentru $h\to 0$, găsim că membrul stâng din 2.4.1 converge la

$$\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta-z)^2}\right]\left[\frac{n}{(\zeta-z)^{n-1}}\right]d\zeta,$$

lucru care încheie demonstraţia pasului de inducţie. ■

Formulele Cauchy ne permit să calculăm şi estimări pentru modulul derivatelor.

Corolarul 2.4.3: [**Inegalităţile Cauchy**] *Dacă f este olomorfă pe o mulţime deschisă ce conţine discul închis $\overline{D}$ centrat în z_0, de rază R, atunci*

$$|f^{(n)}(z_0)|\leq\frac{n!\|f\|_C}{R^n},$$

unde $\|f\|_C=\sup_{z\in C}|f(z)|$.

Demonstraţie. Aplicăm formula Cauchy pentru derivate. Vom avea

$$|f^{(n)}(z_0)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|=\frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}}Rie^{it}dt\right|\leq\frac{n!}{2\pi}\frac{\|f\|_C}{R^n}2\pi=\frac{n!\|f\|_C}{R^n}.$$

■

2.4.2 Aplicaţii ale formulei Cauchy

O altă consecinţă remarcabilă a formulelor Cauchy este legătura acestora cu seriile de puteri. În Capitolul 1, am demonstrat că seriile de puteri sunt olomorfe în discul de convergenţă şi am promis o reciprocă, care este următoarea

Teorema 2.4.4: *Presupunem că f este olomorfă pe un deschis Ω. Dacă $\overline{D}_r(z_0)\subset\Omega$, atunci f se poate scrie ca serie de puteri*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

pentru orice $z\in D_r(z_0)$ şi coeficienţii seriei sunt daţi de formula

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\quad \textit{pentru orice}\quad n\geq 0.$$

Demonstraţie. Fixăm $z \in D = D_r(Z_0)$. Din formula integrală Cauchy, avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{2.4.2}$$

unde C este frontiera discului D şi $z \in D$. Ideea demonstraţiei este să scriem

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}, \tag{2.4.3}$$

şi să folosim seria de puteri geometrică. Cum $\zeta \in C$ şi $z \in D$, există $r \in (0, 1)$ astfel încât să avem $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < r$, aşadar

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n, \tag{2.4.4}$$

unde seria converge uniform pentru $\zeta \in C$. Prin urmare, putem comuta integrala cu suma şi din 2.4.2, 2.4.3, şi 2.4.4, deducem că

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta\right) (z - z_0)^n.$$

În final, folosind formula Cauchy pentru derivate, deducem că

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

■

Această teoremă arată că orice funcţie olomorfă este analitică. Dar teorema spune chiar mai mult: dezvoltarea în serie de puteri a lui f în jurul lui z_0 converge în orice disc centrat în z_0, atât timp cât închiderea discului rămâne în Ω. În particular, orice funcţie întreagă (adică olomorfă pe $\mathbb{C}$) se poate scrie ca serie de puteri în jurul lui zero, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, care converge peste tot pe $\mathbb{C}$.

Corolarul 2.4.5: [Liouville] *Orice funcţie întreagă şi mărginită este constantă.*

Demonstraţie. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ întreagă, astfel încât $|f(z)| \leq M$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Cum $\mathbb{C}$ este conex, este suficient să demonstrăm că $f' = 0$. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $R > 0$. Din inegalităţile Cauchy pentru f', avem

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

Dar inegalitatea este adevărată pentru orice $R > 0$. Facem $R \to \infty$ şi obţinem $f'(z_0) = 0$. Cum $z_0 \in \mathbb{C}$ a fost ales arbitrar, deducem că $f' = 0$ pe $\mathbb{C}$, adică f este constantă. ■

Corolarul 2.4.6: [Teorema fundamentală a algebrei] *Orice polinom neconstant* $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ *are cel puţin o rădăcină complexă.*

Demonstraţie. Dacă presupunem prin reducere la absurd că $P(z)$ este neconstantă şi nu ar avea nicio rădăcină, atunci $\frac{1}{P(z)}$ ar fi o funcţie întreagă şi mărginită. Pentru a vedea asta, putem, bineînţeles, să presupunem $a_n \neq 0$ şi scriem

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right)$$

pentru orice $z \neq 0$. Cum fiecare termen din paranteză tinde la 0 când $z \to \infty$, există $R > 0$, astfel încât dacă $c = \frac{|a_n|}{2}$, avem

$$|P(z)| \geq c|z|^n \quad \text{pentru orice} \quad |z| > R.$$

În particular, P este mărginită inferior pe $|z| > R$. Dar P este continuă şi nu are rădăcini în discul $|z| \leq R$, deci este mărginită inferior şi în acest disc, prin urmare afirmaţia pe care am făcut-o la început este adevărată.

Aplicăm Teorema lui Liouville şi obţinem că $\frac{1}{P(z)}$ este constantă, adică $P(z)$ este constantă, care este o contradicţie cu presupunerea făcută. Astfel, demonstraţia este închieiată. ■

Corolarul 2.4.7: *Orice polinom $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ de grad $n \geq 1$ are exact n rădăcini în $\mathbb{C}$. Dacă rădăcinile sunt notate $w_1, \ldots, w_n$, atunci P se factorizează sub forma*

$$P(z) = a_n(z - w_1)\ldots(z - w_n).$$

Demonstraţie. Ştim că P are cel puţin o rădăcină, pe care o notăm w. Atunci, înlocuind z cu $(z - w) + w$ în formula lui P, obţinem

$$0 = P(w) = b_n(z - w)^n + \ldots + b_1(z - w) + b_0,$$

deci $b_0 = 0$ şi $P(z) = (z - w)\left(b_n(z - w)^{n-1} + \ldots + b_1\right) = (z - w)Q(z)$, unde Q este polinom de grad $n - 1$. Prin inducţie după gradul polinomului, obţinem concluzia. ■

Teorema 2.4.8: [**Teorema de identitate pentru funcţii olomorfe**] *Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ conex şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfă. Dacă $\{w_k\}_{k\geq 1} \subset \Omega$ este un şir ce are cel puţin un punct de acumulare în Ω şi $f(w_k) = 0$ pentru orice $k \geq 1$, atunci $f \equiv 0$.*

Altfel spus, dacă mulţimea zerourilor lui f are cel puţin un punct de acumulare în Ω, atunci f este identic nulă.

Demonstraţie. Presupunem că z_0 este punct de acumulare al mulţimii $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ şi $f(w_k) = 0$ pentru orice $k \geq 1$. Mai întâi, arătăm că f este identic nulă pe un disc mic ce îl conţine pe z_0. Pentru asta, alegem un disc D centrat în z_0 ce este conţinut în Ω şi considerăm seria de puteri a lui f pe acest disc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Dacă f nu este identic zero pe D, există cel mai mic întreg m pentru care $a_m \neq 0$. Atunci, putem scrie

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m(1 + g(z - z_0)),$$

unde $g(z - z_0) \to 0$ când $z \to z_0$. Luând $z = w_k \neq z_0$ pentru un şir de puncte ce tinde la z_0, obţinem o contradicţie, deoarece $a_m(w_k - z_0)^m \neq 0$ şi $(1 + g(w_k - z_0)) \neq 0$, dar $f(w_k) = 0$. Aşadar, $f \equiv 0$ pe D.

Pentru a finaliza demonstraţia, notăm cu U interiorul mulţimii punctelor z unde $f(z) = 0$. U este deschisă şi nevidă datorită argumentului anterior. Dar mulţimea U este şi închisă: dacă $z_n \in U$, $z_n \to z$ şi $f(z_n) = 0$ pentru orice $n \geq 1$, atunci $f(z) = 0$ din continuitatea lui f, şi cu argumentul din prima parte a demonstraţiei, obţinem $f = 0$ pe o vecinătate a lui z, adică $z \in U$. Notăm $V = \Omega \setminus U$. V este de asemenea deschisă, şi

$$U \cup V = \Omega,$$

iar din conexitatea lui Ω deducem că $v = \emptyset$. ■

Corolarul 2.4.9: *Fie f şi g olomorfe pe un deschis conex Ω. Dacă $f(z) = g(z)$ pe o mulţime ce are cel puţin un punct de acumulare în Ω, atunci $f = g$.*

Să presupunem că avem date funcţiile f şi F pe domeniile Ω, respectiv Ω', astfel încât $\Omega \subset \Omega'$. Dacă f şi F coincid pe mulţimea mai mică Ω, atunci spunem că F este o **continuare analitică** a lui f în Ω'. Corolarul anterior ne asigură că nu există decât o continuare analitică F, din moment ce F e unic determinat de f.

O aplicaţie directă a rezultatelor demonstrate până acum este următoarea teoremă, care completează Teorema lui Goursat

Teorema 2.4.10: [**Morera**] *Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ o funţie continuă pe discul D şi pentru orice triunghi $T \subset D$, avem*

$$\int_T f(z)dz = 0,$$

atunci, f este olomorfă.

Demonstraţie. Cu aceeaşi demonstraţie ca pentru Teorema 2.2.1, se arată că f admite primitiva F, care este funcţie olomorfă (conform definiţiei primitivei). Cum funcţiile olomorfe sunt indefinit derivabile, $F' = f$ este şi ea olomorfă. ■

2.4.3 Şiruri de funcţii olomorfe

Teorema 2.4.11: *Dacă $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ este un şir de funcţii olomorfe pe un deschis $\Omega \subset \mathbb{C}$ care converge uniform la funcţia f pe orice compact $K \subset \Omega$, atunci f este olomorfă. În plus, pentru orice $p \geq 1$, şirul derivatelor de ordin p, $\{f_n^{(p)}\}_{n=1}^{\infty}$, converge uniform pe orice compact la $f^{(p)}$.*

Demonstraţie. Fie D orice disc ce are închiderea inclusă în Ω şi T orice triunghi din acel disc. Cum f_n este olomorfă pentru orice n, Teorema 2.1.1 ne asigură că

$$\int_T f_n(z)dz = 0 \quad \text{pentru orice} \quad n \geq 1.$$

Ipoteza de convergenţă uniformă a lui $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la f pe $\overline{D}$ asigură convergenţa

$$\int_T f_n(z)dz \to \int_T f(z)dz \quad \text{când} \quad n \to \infty.$$

Prin urmare, avem $\int_T f(z)dz = 0$ pentru orice triunghi $T \subset D$. Aplicăm Teorema 2.4.10 şi deducem că f este olomorfă pe orice disc cu închiderea inclusă în Ω, aşadar f este olomorfă pe Ω.

Pentru a demonstra a doua parte a concluziei, putem presupune fără a reduce generalitatea că $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniform la f pe tot Ω. Va fi suficient să demonstrăm afirmaţia din concluzie pentru $p = 1$, deoarece apoi, inductiv, ea va fi adevărată pentru orice $p \geq 1$.

Pentru $\delta > 0$, notăm

$$\Omega_\delta = \{z \in \Omega : \overline{D_\delta}(z) \subset \Omega\}.$$

Altfel spus, Ω_δ este mulţimea punctelor din Ω aflate la distanţă cel puţin δ de frontiera $\partial\Omega$. Pentru a demonstra convergenţa uniformă a lui $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ la f' pe orice compact din Ω, este suficient să demonstrăm convergenţa uniformă pe Ω_δ pentru orice $\delta > 0$. Vom demonstra acest lucru, arătând că dacă F este olomorfă pe Ω, atunci

$$\sup_{z \in \Omega_\delta} |F'(z)| \leq \frac{1}{\delta} \sup_{\zeta \in \Omega} |F(\zeta)|. \tag{2.4.5}$$

Într-adevăr, această inegalitate este suficientă, pentru că luăm $F = f_n - f$ şi obţinem concluzia. Pentru a demonstra 2.4.5, aplicăm formula Cauchy pentru F'

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(z)} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

De aici, deducem

$$\begin{aligned} |F'(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_\delta(z)} \frac{|F(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\zeta \\ &\leq \sup_{\zeta \in \Omega} |F(\zeta)| \frac{1}{\delta^2} 2\pi\delta \\ &= \frac{1}{\delta} |F(\zeta)|, \end{aligned}$$

care este exact inegalitatea pe care voiam să o demonstrăm, lucru care încheie demonstraţia. ■

Observația 2.4.12: Acest rezultat este departe de a fi adevărat în cazul funcţiilor reale: limita uniformă a unui şir de funcţii diferenţiabile, chiar de clasă $\mathcal{C}^{\infty}$, nu este neapărat diferenţiabilă. De exemplu, din teorema lui Weierstrass, ştim că orice funcţie continuă pe $[0, 1]$ poate fi aproximată uniform cu polinoame, şi există funcţii continue care nu sunt diferenţiabile.

Observația 2.4.13: Importanţa acestei teoreme este aceea că ne permite să construim funcţii olomorfe (cu anumite proprietăţi prescrise) sub forma unor serii

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

unde f_n este olomorfă pe un domeniu Ω şi seria converge uniform pe orice compact din Ω.

2.4.4 Funcţii olomorfe definite prin integrale

Uneori, funcţiile olomorfe de care avem nevoie sunt definite prin integrale, sub forma

$$f(z) = \int_a^b F(z, s) ds,$$

sau ca limită de astfel de integrale. Următoarea teoremă ne va da condiţii suficiente puse asupra lui F, care asigură că f este olomorfă.

Teorema 2.4.14: *Fie* $F : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{C}$, *unde* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *este un deschis. Presupunem, în plus, că* F *satisface următoarele condiţii*

1. $F(z, s)$ *este olomorfă în* z *pentru orice* s *fixat.*
2. F *este continuă pe* $\Omega \times [a, b]$.

Atunci, funcţia $f(z) = \int_a^b F(z, s)ds$ *este olomorfă pe* Ω.

Demonstraţie. Fără a reduce generalitatea, pentru a simplifica redactarea demonstraţiei, vom presupune $[a, b] = [0, 1]$. Pentru $n \geq 1$, notăm

$$f_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F\left(z, \frac{k}{n}\right).$$

f_n este olomorfă pe Ω, datorită proprietăţii (1) din ipoteză. Vom arăta că pe orice disc D cu închiderea în Ω, şirul $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniform la f. F este continuă pe mulţimea compactă $\overline{D} \times [0, 1]$, deci este uniform continuă. Aşadar, avem

$$\sup_{z \in D} |F(z, s_1) - F(z, s_2)| < \epsilon \quad \text{pentru orice} \quad |s_1 - s_2| < \delta.$$

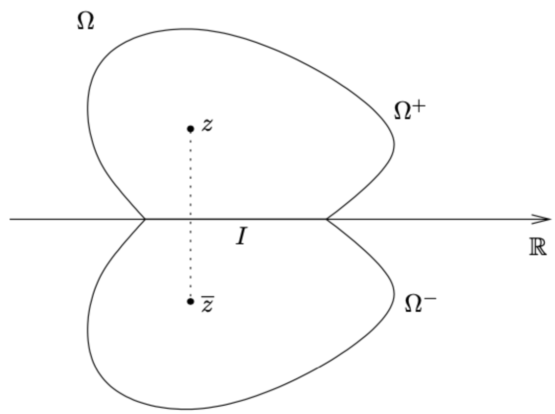
Dacă $n > \frac{1}{\delta}$, şi $z \in D$, atunci avem

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z, s) \right) ds \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z, s) \right| ds \\ &< \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aplicând Teorema 2.4.11, obţinem că f este olomorfă pe D. Cum D a fost ales arbitrar în Ω, f este olomorfă pe Ω. ∎

2.4.5 Principiul reflexiei al lui Schwarz

Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ simetrică faţă de axa reală, adică pentru orice $z \in \Omega$, avem $\overline{z} \in \Omega$. Notăm cu Ω^+ partea de deasupra axei reale, cu Ω^- cea de sub axa reală, iar $I = \Omega \cap \mathbb{R}$.



Mulţime deschisă simetrică faţă de dreapta reală

Avem $\Omega^+ \cup I \cup \Omega^- = \Omega$. Singurul caz care ne va interesa va fi cel în care $I \neq \emptyset$.

Teorema 2.4.15: [Principiul simetriei] *Dacă f^+ este olomorfă pe Ω^+, f^- este olomorfă pe Ω^-, ambele se extind continuu pe I, şi $f^+(x) = f^-(x)$ pentru orice $x \in I$, atunci funcţia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definită prin*

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z) & \text{dacă } z \in \Omega^+ \\ f^+(z) = f^-(z) & \text{dacă } z \in I \\ f^-(z) & \text{dacă } z \in \Omega^- \end{cases}$$

este olomorfă pe Ω.

Demonstraţie. Observăm mai întâi că f astfel definită este continuă pe Ω. Pentru a demonstra olomorfia, folosim teorema lui Morera. Fie D un disc din Ω centruat într-un punct din I, şi $T \subset D$ un triunghi.

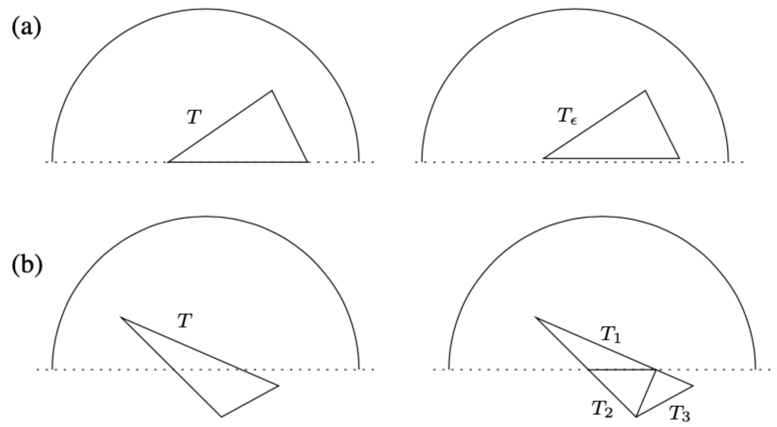
Dacă $T \cap I = \emptyset$, atunci $\int_T f(z)dz = 0$, deoarece f este olomorfă atât pe semidiscul superior, cât şi pe cel inferior.

Presupunem acum că o latură a triunghiului este conţinută în I, iar celelalte sunt în semidiscul superior (la fel ar fi pentru cel inferior). Dacă T_ϵ este triunghiul obţinut din T, ridicând cu ϵ latura de pe axa reală, atunci cu teorema Morera, avem $\int_{T_\epsilon} f(z)dz = 0$. Facem $\epsilon \to 0$, folosim continuitatea lui f, şi obţinem $\int_T f(z)dz = 0$.

În cazul general, în care interiorul triunghiului intersectează I, împarţim triunghiul in 3 triunghiuri mai mici ca in desenul de mai jos, aplicăm iar teorema Morera, şi obţinem

$$0 = \int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz + \int_{T_3} f(z)dz = \int_T f(z)dz.$$

Aceste 2 cazuri sunt ilustrate in desenul urmator



(a) Ridicarea unei laturi; (b) Împarţirea în 3 triunghiuri mai mici

În concluzie, f este olomorfă pe Ω. ∎

Teorema 2.4.16: [Principiul reflexiei al lui Schwarz] *Presupunem că f este o funcţie olomorfă pe Ω^+ care se extinde continuu la I, şi $f(z) \in \mathbb{R}$ pentru orice $z \in I$. Atunci, există o funcţie F olomorfă pe Ω, astfel încât $F_{|\Omega^+} = f$.*

Demonstraţie. Definim $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ pe Ω^-. Pentru a demonstra că F este olomorfă pe Ω^-, este suficient să vedem că dacă seria de puteri a lui f în jurul lui $z_0 \in \Omega^+$ este

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

atunci seria de puteri a lui F în jurul lui $\overline{z_0}$ este

$$F(z) = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\overline{z} - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} (z - \overline{z_0})^n,$$

adică F este olomorfă pe Ω^-. Cum f este reală pe I, avem $\overline{f(z)} = f(z)$ pentru orice $z \in I$, deci F se extinde continuu la I. Aplicând principiul simetriei, obţinem concluzia dorită. ∎

2.4.6 Teorema de aproximare Runge

Ştim din teorema lui Weierstrass că orice funcţie continuă pe un interval compact se poate aproxima uniform cu polinoame. Ne putem întreba ce rezultate similare de aproximare exista în analiza complexa. Mai precis, punem următaorea întrebare: în ce condiţii un compact $K \subset \mathbb{C}$ are proprietatea că orice funcţie olomorfă pe o vecinătate a lui K se poate aproxima uniform cu polinoame pe K? În general, trebuie să impunem nişte restricţii: funcţia $\frac{1}{z}$ definită pe cercul unitate $C_1(0) = K$ nu poate fi aproximată cu funcţii polinomiale, deoarece $\int_{C_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$, iar dacă p este polinomială, atunci cu teorema Cauchy avem $\int_{C_1(0)} p(z) dz = 0$.

Teorema 2.4.17: [Runge] *Orice funcţie olomorfă definită pe o vecinătate Ω a compactului $K \subset \mathbb{C}$ poate fi aproximată uniform pe K cu funcţii raţionale (rapoarte de polinoame) ale căror singularităţi (punctele unde numitorul se anulează) sunt conţinute în $\Omega \setminus K$. Mai mult, dacă $\Omega \setminus K$ este conexă, atunci orice funcţie olomorfă pe Ω se poate aproxima uniform pe K cu funcţii polinomiale.*

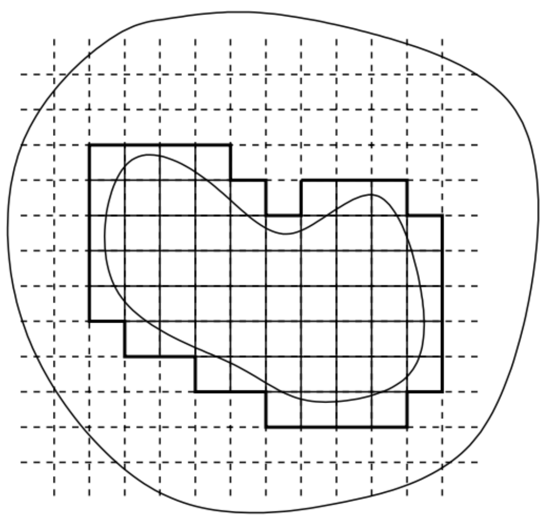
Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe câteva leme, pe care le prezentăm în cele ce urmează.

Lema 2.4.18: *Fie f olomorfă pe un deschis Ω şi $K \subset \Omega$ compact. Atunci, există un număr finit de segmente $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ în $\Omega \setminus K$, astfel încât*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{pentru orice} \quad z \in K. \tag{2.4.6}$$

Demonstraţie. Fie $d = c \cdot d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, unde $0 < c < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Considerăm grid-ul format din pătratele (pline) cu laturile paralele cu axele, de latură d.

Fie $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_M\}$ mulţimea finită de pătrate care intersectează K, cu frontiera fiecărui pătrat cu orientarea pozitivă. Notăm $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ laturile pătratelor din $\mathcal{Q}$ care nu se află în două pătrate alăturate din $\mathcal{Q}$. Alegerea lui d garantează că pentru orice n, γ_n nu intersectează K; daca ar intersecta K, atunci γ_n s-ar găsi şi în alt pătrat din $\mathcal{Q}$, lucru care ar contrazice alegerea laturilor γ_n.



Reuniunea segmentelor γ_n este îngroşată

Cum pentru orice $z \in K$ ce nu se găseşte pe frontiera unui pătrat din $\mathcal{Q}$, există j astfel încât $j \in Q_j$, teorema lui Cauchy implică

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{dacă } m = j \\ 0 & \text{dacă } m \neq j \end{cases}$$

Aşadar, pentru orice $z \in K$, avem

$$f(z) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dar dacă Q_m şi $Q_{m'}$ sunt adiacente, atunci integralele pe segmentul comun sunt parcurse în sensuri opuse, deci se reduc, şi vom avea

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{2.4.7}$$

Cum $\gamma_n \cap K = \emptyset$, continuitatea garantează că formula 2.4.7 este adevărată şi pentru celelalte puncte din K. ∎

Prima parte din Teorema 2.4.17 rezultă din următoarea

Lema 2.4.19: *Pentru orice segment γ conţinut în $\Omega \setminus K$, există un şir de funcţii raţionale cu singularităţi pe γ care aproximează integrala $\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ uniform pe K.*

Demonstraţie. Dacă $\gamma(t) : [0,1] \to \mathbb{C}$ este o parametrizare a lui γ, atunci

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt.$$

Cum $\gamma \cap K = \emptyset$, integrandul $F(z,t) = \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$ din ultima integrală este continuu pe $[0,1] \times K$, şi cum K e compact, dat $\epsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât

$$\sup_{z \in K} |F(z,t_1) - F(z,t_2)| < \epsilon \quad \text{pentru} \quad |t_1 - t_2| < \delta.$$

Procedând ca în Teorema 2.4.14, vedem că sumele Riemann asociate integralei $\int_0^1 F(z,t) dt$ aproximează uniform funcţia f pe K. Cum fiecare dintre aceste sume Riemann este o funcţie raţională cu singularităţi pe γ, lema este demonstrată. ∎

Lema 2.4.20: *Dacă $\Omega \setminus K$ este conexă şi $z_0 \notin K$, atunci funcţia $\frac{1}{z - z_0}$ poate fi aproximată uniform pe K cu polinoame.*

Demonstraţie. Mai întâi, alegem un punct z_1 în afara unui disc mare cu centrul in origine, care conţine K. Atunci,

$$\frac{1}{z - z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}},$$

unde seria converge uniform pentru $z \in K$. Sumele parţiale ale acestei serii sunt polinoame, şi dau o aproximare uniformă a lui $\frac{1}{z - z_1}$ pe K. În particular, asta înseamnă că orice putere $\frac{1}{(z - z_1)^k}$ poate fi aproximată uniform pe K cu polinoame.

Este suficient acum să demonstrăm că $\frac{1}{z - z_0}$ poate fi aproximată uniform pe K cu polinoame în $\frac{1}{z - z_1}$. Pentru a face asta, folosim conexitatea lui $\Omega \setminus K$ pentru a merge de la z_0 la z_1. Fie γ o curbă în $\Omega \setminus K$ parametrizată de $\gamma(t)$ pe $[0,1]$, pentru care $\gamma(0) = z_0$ şi $\gamma(1) = z_1$. Punem $\rho = \frac{1}{2} d(K, \gamma)$. Avem $\rho > 0$, deoarece γ şi K sunt compacte. Alegem un şir de puncte $\{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ pe γ astfel încât $w_0 = z_0$, $w_l = z_1$ şi $|w_j - w_{j+1}| < \rho$ pentru orice $0 \leq j < l$.

Afirmăm că dacă w, w' sunt două puncte pe γ astfel încât $|w - w'| < \rho$, atunci $\frac{1}{z-w}$ poate fi aproximat uniform pe K cu polinoame în $\frac{1}{z-w'}$. Pentru a justifica acest lucru, scriem

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w'} \frac{1}{1 - \frac{w-w'}{z-w'}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-w')^n}{(z-w')^{n+1}},$$

şi cum suma converge uniform pentru $z \in K$, aproximarea prin sumele parţiale demonstrează afirmaţia făcută.

Acest rezultat ne permite să "călătorim" de la z_0 la z_1 cu ajutorul şirului finit $\{w_j\}_{j=1}^{l}$, pentru a găşi o aproximare uniformă pe K cu polinoame în $\frac{1}{z-z_1}$. Cu aceasta, demonstraţia lemei şi a părţii a doua din Teorema 2.4.17 sunt complete. ∎

Capitolul 3

Funcţii meromorfe şi funcţia logaritm

3.1 Singularităţi pentru funcţii olomorfe

Funcţiile

$$\frac{\sin z}{z},\ \frac{1}{z}\ \text{şi}\ \exp\frac{1}{z}$$

nu sunt definite în zero, dar sunt olomorfe pe discul fără un punct $\dot{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \setminus 0$. Totuşi, comportamentul celor trei funcţii în jurul lui zero nu este acelaşi. Vom vedea în cele ce urmează că aceste exemple sunt relevante pentru cazurile care pot apărea în general.

Definiția 3.1.1: Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ un deschis şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfă. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ pentru care există $r > 0$ astfel încât $\dot{D}_r(z_0) = D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ se numeşte **singularitate (izolată)** pentru f.

Mulţimea $\Omega \cup \{z_0\} = \Omega \cup D_r(z_0)$ este tot deschisă.

Definiția 3.1.2: Fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi $z_0 \in \mathbb{C}$ o singularitate. Dacă f se extinde olomorf la funcţia $\widetilde{f} : \Omega \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$, atunci z_0 se numeşte **singularitate eliminabilă** pentru f.

În general, pentru simplitatea scrierii, vom nota prelungirea $\widetilde{f}$ tot cu f. Bineînţeles, dacă z_0 este singularitate eliminabilă pentru f, atunci putem prelungi f la $\Omega \cup \{z_0\}$ punând

$$f(z_0) := \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Revenind la exemplele date la începutul acestei secţiuni, punctul 0 este singularitate eliminabilă pentru funcţia

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},\ \text{ pentru că putem pune }\ f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Teorema 3.1.3: [**Teorema lui Riemann de eliminare a singularităţilor**]
O singularitate z_0 a unei funcţii olomorfe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ este eliminabilă dacă şi numai dacă există $r > 0$ astfel încât f este mărginită pe $\dot{D}_r(z_0)$.

Demonstraţie. Fie $r > 0$ astfel încât $\dot{D}_r(z_0) \subset \Omega$. Considerăm funcţia $h : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$,

$$h(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{dacă } z \neq z_0 \\ 0 & \text{dacă } z = z_0 \end{cases}$$

h este olomorfă pe $\dot{D}_r(z_0)$, dar este olomorfă şi în z_0, deoarece

$$h'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

Aşadar h este olomorfă, deci analitică, şi putem scrie

$$h(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

Cum $h(z_0) = h'(z_0) = 0$, avem $a_0 = a_1 = 0$, adică $h(z) = (z - z_0)^2(a_2 + a_3(z - z_0) + \ldots)$, de unde deducem

$$f(z) = a_2 + a_3(z - z_0) + a_4(z - z_0)^2 \ldots$$

pe $\dot{D}_r(z_0)$. Dar această serie de puteri se prelungeşte olomorf şi în z_0, şi astfel am demonstrat una dintre implicaţii. Cealaltă implicaţie este evidentă din definiţii. ∎

Definiția 3.1.4: Fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi $z_0 \in \mathbb{C}$ o singularitate. Dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ are singularitate eliminabilă în z_0, atunci z_0 se numeşte **singularitate non-esenţială**.
Singularităţile eliminabile sunt non-esenţiale. O singularitate non-esenţială care nu este eliminabilă se numeşte **pol**.

Dacă f are singularitate non-esenţială în z_0, atunci funcţia

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) \quad (\text{pentru un anumit } m \in \mathbb{Z})$$

poate fi scrisă ca serie de puteri în jurul lui z_0,

$$g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots .$$

Dacă această serie de puteri nu se anulează identic, atunci există un întreg minimal $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $a_n \neq 0$ şi avem

$$g(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots .$$

Evident, funcţia

$$h(z) = (z - z_0)^k f(z), \quad k = m - n,$$

are o singularitate eliminabilă în $z = z_0$. Acest întreg k este cel mai mic cu această proprietate, pentru că altfel, funcţia

$$z \mapsto \frac{a_n}{z - z_0} + a_{n+1} + a_{n+2}(z - z_0) + \ldots$$

ar avea singularitate eliminabilă în z_0, adică $z \mapsto \frac{a_n}{z - z_0}$ ar avea singularitate eliminabilă în z_0, dar aceasta este o contradicţie.

Observația 3.1.5: Fie z_0 o singularitate non-esenţială pentru funcţia olomorfă $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dacă f nu se anulează identic într-o vecinătate a lui z_0, atunci există un întreg minimal $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât

$$z \mapsto (z - z_0)^k f(z)$$

are singularitate eliminabilă în z_0.

Observația 3.1.6: Putem caracteriza numărul k prin următoarele două proprietăţi:

1. $h(z) = (z - z_0)^k f(z)$ are singularitate eliminabilă în $z = z_0$.
2. $h(z_0) \neq 0$.

Definiția 3.1.7: Numărul $-k$, opusul numărului k din Observația 3.1.5, se numeşte ordinul lui f în z_0. Vom nota $\operatorname{ord}(f, z_0) := -k$.

1. Dacă $\operatorname{ord}(f, z_0) = -k > 0$, z_0 se numeşte **zero de ordin** $-k$.
2. Dacă $\operatorname{ord}(f, z_0) = -k < 0$, z_0 se numeşte **pol de ordin** k. Un pol de ordin 1 se mai numeşte şi pol simplu.

Observația 3.1.8: Fie z_0 o singularitate non-esenţială pentru funcţiile olomorfe $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, $f, g \not\equiv 0$. Atunci, z_0 este singularitate non-esenţială şi pentru funcţiile

$$f \pm g, \quad f \cdot g \quad \text{şi} \quad \frac{f}{g} \text{ dacă } g(z) \neq 0 \text{ pentru orice } z \in \dot{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega.$$

şi avem

$$\operatorname{ord}(f \pm g, z_0) \geq \min\{\operatorname{ord}(f, z_0), \operatorname{ord}(g, z_0)\},$$
$$\operatorname{ord}(fg, z_0) = \operatorname{ord}(f, z_0) + \operatorname{ord}(g, z_0),$$
$$\operatorname{ord}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \operatorname{ord}(f, z_0) - \operatorname{ord}(g, z_0).$$

Aici am folosit convenţiile obişnuite $x + \infty = \infty + x = \infty$, $\infty + \infty = \infty$ şi $x < \infty$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$, şi $\operatorname{ord}(h, z_0) = \infty$ dacă $h \equiv 0$, necesare în cazul în care $f \pm g \equiv 0$.

Observația 3.1.9: Fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă care are un pol în z_0. Atunci,

$$\lim_{z \in \Omega, z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Demonstraţie. Fie $k \in \mathbb{N}$ ordinul polului z_0. Atunci, $h(z) = (z - z_0)^k f(z)$ are singularitate eliminabilă în z_0 şi $h(z_0) \neq 0$. Dacă punem $M = \frac{|h(z_0)|}{2}$, atunci $|h(z)| > M > 0$ pe o vecinătate a lui z_0. De aici, deducem

$$|f(z)| \geq \frac{M}{|z - z_0|^k}$$

pentru orice z în acea vecinătate, exceptând z_0. Cum $k > 0$, obţinem conlcuzia dorită. ∎

Reamintindu-ne cele trei exemple de la inceputul acestui capoitol, funcţia $z \mapsto \frac{1}{z}$ are in $z = 0$ pol simplu.

Definiția 3.1.10: O singularitate care nu este non-esenţială se numeşte **singularitate esenţială**.

Funcţiile olomorfe au o comportare foarte complet diferită în jurul singularităţilor esenţiale, comparativ cu cele non-esenţiale. Acest lucru este evidenţiat în următoarea

Teorema 3.1.11: [Casorati-Weierstrass] *Fie z_0 o singularitate esenţială pentru funcţia $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Atunci, pentru orice $\dot{D}_r(z_0) \subset \Omega$, avem $f(\dot{D}_r(z_0))$ este densă în $\mathbb{C}$.*

Demonstraţie. Presupunem, prin absurd, că există $r > 0$ astfel încât $\dot{D}_r(z_0) \subset \Omega$ şi $f(\dot{D}_r(z_0))$ nu este densă în $\mathbb{C}$. Atunci, există $a \in \mathbb{C}$ şi $\epsilon > 0$ astfel încât pentru orice $z \in \dot{D}_r(z_0)$, avem $|f(z) - a| \geq \epsilon$. Deducem că

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - a}$$

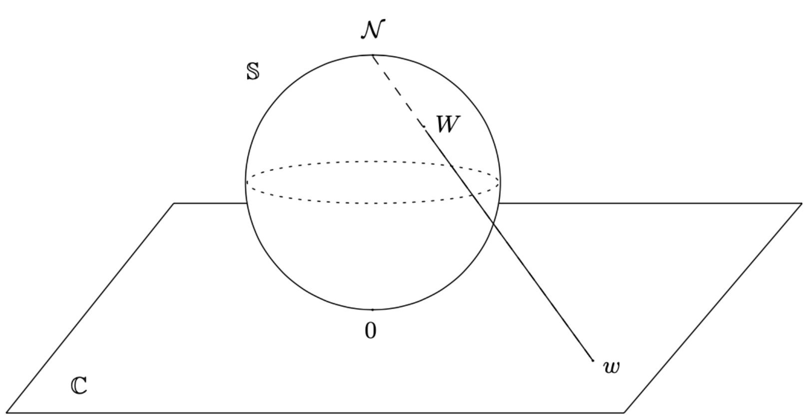
este mărginită pe o vecinătate a lui z_0. Cu teorema lui Riemann de eliminare a singularităţilor (Teorema 3.1.3), deducem că z_0 este singularitate eliminabilă pentru g. Cu Observația 3.1.8, obţinem că f are singularitate non-esenţială în z_0, care este o contradicţie cu ipoteza. ∎

Următoarea teoremă reuneşte toate rezultatele pe care le-am obţinut până acum în clasificarea singularităţilor.

Teorema 3.1.12: [Clasificarea singularităţilor prin comportamentul local]
Fie z_0 o singularitate pentru funcţia $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Atunci, z_0 este

1. ***singularitate eliminabilă*** $\iff$ *f este mărginită într-o vecinătate a lui z_0,*
2. ***pol*** $\iff \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$,
3. ***singularitate esenţială*** $\iff$ *pentru orice număr $a \in \mathbb{C}$ fixat, există un şir $z_n \to z_0$ astfel încât $f(z_n) \to a$.*

Putem compactifica planul complex $\mathbb{C}$ adăugând un singur punct, notat ∞. Astfel obţinem **planul complex extins** $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, în care mulţimile deschise sunt toate mulţimile deschise din $\mathbb{C}$, dar şi toate complementarele de mulţimi compacte în $\mathbb{C}$ reunite cu $\{\infty\}$. O interpretare geometrică a planului complex extins este **sfera lui Riemann**.



Sfera lui Riemann şi proiecţia stereografică

Ne îndreptăm acum atenţia asupra acelor funcţii care au numai singularităţi izolate care sunt poli.

Definiția 3.1.13: Considerăm $\Omega \subset \mathbb{C}$ deschis şi $\{z_1, z_2, z_3, \ldots\} \subset \Omega$ un şir care nu are puncte de acumulare în Ω. O funcţie f se numeşte **meromorfă** pe Ω dacă

1. f este olomorfă pe $\Omega \setminus \{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$
2. f are poli în punctele $\{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$.

Este util să studiem şi funcţiile meromorfe în planul complex extins. Dacă o funcţie f este olomorfă pentru toate valorile suficient de mari $z \in \mathbb{C}$, putem descrie comportamentul funcţiei f la infinit considerând $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, care este are o singularitate izolată în 0.

Definiția 3.1.14:

1. Spunem că f are **singularitate eliminabilă la infinit** (sau că f este **olomorfă la infinit**) dacă $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ are singularitate eliminabilă în 0.
2. Spunem că f are **pol la infinit** dacă $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ are pol în 0.
3. Spunem că f are **singularitate esenţială la infinit** dacă $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ are singularitate esenţială în 0.

O funcţie meromorfă în $\mathbb{C}$ care este ori olomorfă la infinit, ori are pol la infinit, se numeşte **meromorfă în planul extins**.

Teorema 3.1.15: *Funcţiile meromorfe în planul extins sunt funcţiile raţionale.*

Demonstraţie. Fie f meromorfă în planul extins. Atunci, $f\left(\frac{1}{z}\right)$ are ori pol, ori singularitate eliminabilă în 0. Prin urmare, f are cel mult un număr finit de poli în $\mathbb{C}$, pe care îi notăm $z_1, \ldots, z_n$. în jurul fiecărui pol, putem scrie

$$f(z) = f_k(z) + g_k(z),$$

unde f_k este un polinom în $\frac{1}{z-z_k}$, iar g_k este olomorfă. Similar, putem scrie

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \widetilde{f}_\infty(z) + \widetilde{g}_\infty(z)$$

pe o vecinătate a lui 0, unde $\widetilde{f}_\infty$ este polinom în $\frac{1}{z}$, iar $\widetilde{g}_\infty$ este olomorfă. Punem $f_\infty(z) = \widetilde{f}_\infty\left(\frac{1}{z}\right)$.

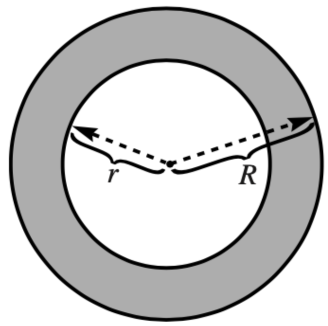
Considerăm funcţia $H = f - f_\infty - \sum_{k=1}^n f_k$. În punctul z_k, H are singularitate eliminabilă. În plus, $H(\frac{1}{z})$ este mărginită în jurul lui 0. Deducem că H este întreagă şi mărginită. Teorema Liouville ne asigură că H este constantă, adică $f = c + f_\infty + \sum_{k=1}^n f_k$ cu $c \in \mathbb{C}$, care este funcţie raţională. ∎

3.2 Serii Laurent

Fixăm numerele r, R astfel încât

$$0 \le r < R \le \infty$$

($r = 0$ şi $R = \infty$ sunt admise). Vrem să studiem funcţiile olomorfe în coroana circulară



$$\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}.$$

Exemple de astfel de funcţii sunt uşor de construit: pornim cu două funcţii olomorfe $g : D_R(0) \to \mathbb{C}$ şi $h : D_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$. Atunci, funcţia $z \mapsto h\left(\frac{1}{z}\right)$ este olomorfă pe $|z| < r$, şi putem defini

$$f(z) := g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \text{ pentru } r < |z| < R.$$

Următoarea teoremă ne asigură că orice funcţie olomorfă pe o coroană ciruculară se poate descompune astfel.

Teorema 3.2.1: [Descompunerea Laurent] *Orice funţie olomorfă f pe coroana circulară $\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ admite o descompunere de forma*

$$f(z) := g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right),$$

unde $g : D_R(0) \to \mathbb{C}$ şi $h : D_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ sunt olomorfe.
Dacă punem condiţia suplimentară $h(0) \neq 0$, descompunerea este unică. După ce normalizăm h prin $h(0) = 0$, numim h ***partea principală*** *a descompunerii Laurent a lui f.*

Demonstraţie.

1. *Unicitatea descompunerii Laurent.* Vom începe cu o remarcă preliminară: dacă avem două funcţii olomorfe $f_j : D_j \to \mathbb{C}$, $D_j \subset \mathbb{C}$ deschisă, $j = 1, 2$, care coincid pe $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, atunci acestea pot fi "lipite" la o funcţie $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{C}$.

   Cum diferenţa a două serii Laurent pentru aceeaşi funcţie este o serie Laurent pentru funcţia identic nulă, este suficient să demonstrăm unicitatea pentru funcţia identic nulă. Din ecuaţia
   $$g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$
   deducem că funcţiile $z \mapsto g(z)$ şi $z \mapsto -h\left(\frac{1}{z}\right)$ pot fi lipite la o funcţie olomorfă $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ipoteza privind g şi h ne asigură că H este mărginită, iar cu teorema Liouville obţinem H constantă. Cum $\lim_{z\to\infty} H(z) = h(0) = 0$, avem $H \equiv 0$.

2. *Existenţa descompunerii Laurent.* Alegem P, ρ cu proprietatea
   $$r < \rho < P < R$$

şi construim descompunerea Laurent în coroana circulară mai mică $\rho < |z| < P$. Dacă reuşim acest lucru, datorită unicităţii descompunerii Laurent şi datorită faptului că aceste coroane circulare mai mici acoperă $\mathcal{A}$, obţinem existenţa descompunerii Laurent. Construcţia de care avem nevoie reiese din următorul rezultat auxiliar

Teorema 3.2.2: *Fie*

$$\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}, \text{ unde } 0 \leq r < R \leq \infty,$$

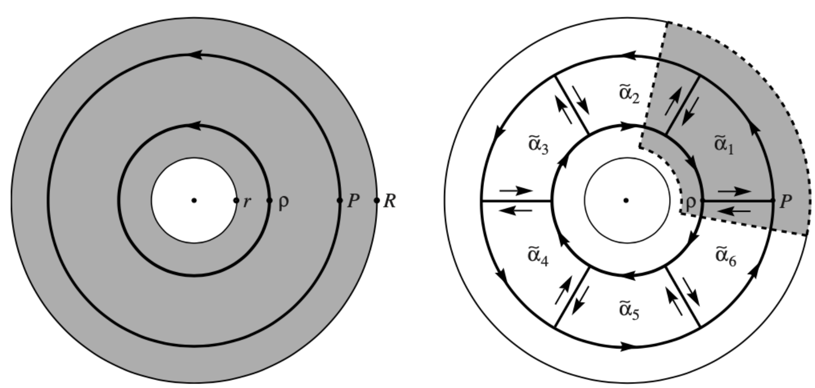
o coroană circulară şi $G : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Dacă P şi ρ sunt alese astfel încât

$$r < \rho < P < R,$$

atunci

$$\int_{|\zeta|=\rho} G(\zeta)d\zeta = \int_{|\zeta|=P} G(\zeta)d\zeta.$$

Demonstraţie. Pentru demonstraţie folosim teorema Cauchy. Considerăm contururile $\widetilde{\alpha}_j$, $j = 1, \ldots, n$, din desenul următor



Teorema Cauchy ne asigură că integrala lui G pe fiecare contur $\widetilde{\alpha}_j$ este 0. Dar

$$\int_{|\zeta|=P} G(\zeta)d\zeta - \int_{|\zeta|=\rho} G(\zeta)d\zeta = \sum_{j=1}^{n} \int_{\widetilde{\alpha}_j} G(\zeta)d\zeta = 0,$$

şi de aici obţinem concluzia. ∎

Revenim la demonstraţia existenţei descompunerii Laurent. Fie $z \in \mathcal{A}$ fixat. Funcţia $G : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$,

$$G(z) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \text{pentru } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{pentru } \ \zeta = z \end{cases}$$

este continuă pe $\mathcal{A}$ şi olomorfă pe $\mathcal{A} \setminus \{z\}$. Cu teorema Riemann de eliminare a singularităţilor, obţinem că G este olomorfă pe $\mathcal{A}$. Folosind Teorema 3.2.2, deducem că

$$\int_{|\zeta|=\rho} G(\zeta)d\zeta = \int_{|\zeta|=P} G(\zeta)d\zeta,$$

de unde, mai departe, obţinem

$$\int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{|\zeta|=\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{|\zeta|=P} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

Dacă $z \in \mathcal{A}$ astfel încât $\rho < |z| < P$, atunci

$$\int_{|\zeta|=\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

pentru că $|z| > \rho$ şi funcţia $\frac{1}{\zeta - z}$ este olomorfă pe o vecinătate a discului închis $\overline{D}_\rho(0)$ şi putem aplica teorema Cauchy, şi, în plus, avem şi

$$\int_{|\zeta|=P} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$$

din formula Cauchy pentru aplicată pentru funcţia $u \equiv 1$ şi cercul $C_P(0)$, pentru că $|z| < P$. Obţinem

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{g(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{-h\left(\frac{1}{z}\right)} = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right),$$

care este descompunerea Laurent pe care o voiam, cu funcţiile g şi h definite prin

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ pentru } \ |z| < P$$

şi

$$h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{z f(\zeta)}{1 - \zeta z} d\zeta, \text{ pentru } \ |z| < \frac{1}{\rho},$$

şi folosind Teorema 2.4.14 deducem că g şi h sunt olomorfe. Mai mult, $h(0) = 0$.

■

Dacă scriem g şi h ca serii de puteri, vom avea

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ pentru } \ |z| < R, \quad h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \text{ pentru } \ |z| < \frac{1}{r}.$$

Punând $a_{-n} := b_n$, obţinem **seria Laurent** a lui f

$$\boxed{f(z) := g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.}$$

Convenţie: O serie de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \qquad a_n \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{Z}$$

se numeşte convergentă dacă seriile

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$$

sunt ambele convergente.

În cazul unei serii Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, *convergenţa absolută* va însemna convergenţa absolută atât pentru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, cât şi pentru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$. În acelaşi spirit se defineşte *convergenţa uniformă* pe o mulţime K a unei serii Laurent.

Corolarul 3.2.3: [Seria Laurent] *Fie f olomorfă pe coroana circulară*

$$\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}, \text{ unde } 0 \leq r < R \leq \infty.$$

Atunci, f se poate scrie ca serie Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{pentru} \quad z \in \mathcal{A}$$

care converge uniform pe orice compact din $\mathcal{A}$.
Mai mult, seria Laurent este unică, iar coeficienţii ei sunt daţi de

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r < \rho < R.$$

În plus, dacă punem $M_\rho(f) := \sup\{|f(\zeta)| : |\zeta - z_0| = \rho\}$, atunci avem inegalităţile Cauchy

$$|a_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Seriile Laurent pot fi folosite pentru a clasifica singularităţile izolate ale unei funcţii olomorfe. Dacă z_0 este o singularitate izolată pentru funcţia f, atunci f este olomorfă în coroana circulară $\dot{D}_r(z_0) = \{z : 0 < |z| < r\}$ pentru $r > 0$ suficient de mic, aşadar putem scrie dezvoltarea in serie Laurent a lui f în jurul lui z_0,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Teorema 3.2.4: [Clasificarea singularităţilor prin forma seriei Laurent]
O singularitate izolată z_0 pentru funcţia $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ este

1. ***eliminabilă*** $\iff a_n = 0$ *pentru orice* $n < 0$,
2. ***pol*** *(de ordin $k \in \mathbb{N}$)* $\iff a_{-k} \neq 0$ *şi* $a_n = 0$ *pentru orice* $n < -k$,
3. ***esenţială*** $\iff a_n \neq 0$ *pentru o infinitate de* $n < 0$.

Demonstraţia este simplă şi foloseşte numai definiţiile tipurilor de singularităţi, aşa că va fi lăsată pentru cititor.

3.3 Teorema reziduurilor

Definiția 3.3.1: Fie z_0 o singularitate izolată pentru funcţia $f(z)$. Atunci, dacă seria Laurent a lui f în z_0 este

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

numărul a_{-1} se numeşte **reziduul lui f în z_0** şi se notează $\operatorname{res}(f, z_0)$.

Definiția 3.3.2: Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ o curbă închisă şi $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Definim funcţia $\operatorname{ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ prin

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Numărul $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ se numeşte **indexul lui z în raport cu γ**.

Propoziția 3.3.3: *Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ o curbă închisă şi $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Atunci, funcţia $\operatorname{ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ ia numai valori întregi, este constantă pe fiecare componentă conexă a lui Ω şi este nulă pe componenta nemărginită a lui Ω.*

Demonstraţie. Considerăm $\varphi(t) = \exp \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds$, $t \in [a, b]$. Cum $\varphi(b) = \exp(2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z))$, a arăta că $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ este echivalent cu a demonstra că $\varphi(b) = 1$.

Cum γ este de de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni, cu excepţia unui număr finit de puncte $t \in [a, b]$, avem

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \varphi(t),$$

de unde rezultă că

$$\varphi'(t)(\gamma(t) - z) = \varphi(t)\gamma'(t),$$

deci derivata funcţiei $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ este nulă pe $[a, b]$, aşadar este constantă. Cum $\varphi(a) = 1$, avem

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z}$$

şi cum $\gamma(b) = \gamma(a)$ obţinem, într-adevăr, $\varphi(b) = 1$, adică $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Prin Definiția 3.3.2, funcţia $\operatorname{ind}_\gamma$ este continuă pe Ω şi ia valori în mulţimea discretă $\mathbb{Z}$, deci este constantă pe fiecare componentă conexă a lui Ω. Pentru $|z|$ suficient de mare, din Definiția 3.3.2 rezultă că $|\operatorname{ind}_\gamma(z)| < 1$, deci $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$, şi prin urmare $\operatorname{ind}_\gamma$ se anulează pe componenta conexă nemărginită a lui Ω. ■

> Numărul $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ are o interpretare geometrică foarte clară: este numărul de rotaţii ale lui γ în jurul lui z.

Având definită funcţia *index*, putem acum defini riguros noţinuile de interior şi exterior pentru o curbă închisă din plan, în modul următor

$$\text{interiorul lui } \gamma \;=\; \operatorname{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$$

şi

$$\text{exteriorul lui } \gamma \;=\; \mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{ind}_\gamma(z) = 0\}.$$

Teorema 3.3.4: [**Teorema reziduurilor**] *Fie Ω un domeniu simplu conex şi punctele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ în Ω, diferite două câte două. Fie $f : \Omega \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ olomorfă, şi $\gamma : [a, b] \to \Omega \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ o curbă închisă. Atunci,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ind}_\gamma(z_k)\,\mathrm{res}(f, z_k).$$

Demonstraţie. În jurul fiecărei singularităţi z_j, putem scrie seria Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(j)}(z - z_j)^n,\;\; 1 \le j \le n.$$

Prin definiţie, $a_{-1}^{(j)} = \mathrm{res}(f, z_j)$, $1 \le j \le n$. Cum fiecare parte principală

$$h_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) := \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n^{(j)}(z - z_j)^n$$

defineşte o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$, funcţia

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} h_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right)$$

are în toate punctele z_j, $1 \le j \le n$, singularităţi eliminabile. Prin urmare, se poate prelungi olomorf la tot Ω. Cum Ω este simplu conex, cu teorema Cauchy, avem

$$\begin{aligned}
0 = \int_\gamma g(z)dz &= \int_\gamma \left(f(z) - \sum_{j=1}^{n} h_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right)\right) dz \\
&= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma h_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) dz \\
&= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n^{(j)}(z - z_j)^n dz \\
&= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n^{(j)} \int_\gamma (z - z_j)^n dz \\
&= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} a_{-1}^{(j)} \int_\gamma \frac{1}{z - z_j} dz \\
&= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}(f, z_j) 2\pi i\, \mathrm{ind}_\gamma(z_j),
\end{aligned}$$

ultima egalitate obţinându-se din definiţia lui ind_γ. Aşadar,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ind}_\gamma(z_k)\,\mathrm{res}(f, z_k).$$

■

Observația 3.3.5: Teorema reziduurilor (Teorema 3.3.4) este o generalizare a formulei Cauchy: dacă f este olomorfă pe domeniul simplu conex Ω şi $\overline{D}_r(z) \subset \Omega$, atunci z are indexul 1 în raport cu cercul $C_r(z)$, şi funcţia $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ are pol simplu în z, cu reziduul egal cu $f(z)$ în punctul z. Aplicând teorema reziduurilor, obţinem exact formula Cauchy.

3.4 Principiul argumentului

Pregătim studiul logaritmului complex cu câteva comentarii. În general, funcţia $\log f(z)$ nu poate fi definită bine pe mulţimea unde $f(z) \neq 0$. Totuşi, dacă ar fi să o definim, ar trebui sa fie $\log f(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z)$, unde $\arg f(z)$ este o determinare a argumentului (bine definită până la adunarea cu un multiplu întreg al lui 2π). Cu toate acestea, derivata lui $\log f(z)$, care este $\frac{f'(z)}{f(z)}$ este bine definită, iar integrala

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

poate fi interpretată ca schimbarea argumentului lui $f(z)$ atunci când z parcurge curba γ. Mai mult, presupunând curba γ închisă, această schimbare a argumentului este determinată în întregime de zerourile şi polii lui f în interiorul lui γ. Obiectivul nostru este să folosim aceste observaţii pentru a formula o teoremă.

Începem prin a remarca că deşi formula

$$\log(f_1 f_2) = \log f_1 + \log f_2$$

nu este valabilă în general, aditivitatea este valabilă pentru derivate:

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2},$$

care se generalizează la

$$\frac{\left(\prod_{k=1}^{N} f_k\right)'}{\prod_{k=1}^{N} f_k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{f_k'}{f_k}.$$

Aplicăm această formulă în modul următor: dacă f este olomorfă şi are un zero de ordin n în z_0, atunci local în jurul lui z_0 putem scrie $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, unde $g(z) \neq 0$ pe o vecinătate a lui z_0, şi atunci

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + G(z),$$

unde $G(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$. Aşadar, dacă f are zero de ordin n în z_0, atunci $\frac{f'}{f}$ are pol de ordin 1 în z_0, cu reziduul egal cu n. Un rezultat asemănător este valabil şi pentru cazul în care f are pol de ordin n în z_0. Dacă $f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z)$, cu $h(z) \neq 0$ pe o vecinătate a lui z_0, atunci

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z - z_0} + H(z),$$

unde $H(z) = \frac{h'(z)}{h(z)}$.

Prin urmare, dacă funcţia f este meromorfă, atunci $\frac{f'}{f}$ are poli simpli în zerourile şi polii lui f, iar reziduul va fi ordinul funcţiei f în acel punct, adică numărul pe care l-am notat $\mathrm{ord}(f, z_0)$. Aplicând teorema reziduurilor (Teorema 3.3.4), obţinem

Teorema 3.4.1: [Principiul argumentului] *Fie Ω un domeniu simplu conex, f o funcţie meromorfă pe Ω, şi C o curbă închisă simplă în Ω care nu trece prin zerourile şi nici prin polii lui f. Atunci,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = (\textit{nr. zerourilor lui } f \textit{ din } \mathrm{Int}(C)) - (\textit{nr. polilor lui } f \textit{ din } \mathrm{Int}(C))\,.$$

Ca aplicaţii la Principiul argumentului, vom demonstra trei rezultate importante în teoria funcţiilor complexe. Primul, teorema lui Rouché, este într-un anume sens un rezultat de continuitate. Aceasta spune că o funcţie olomorfă poate fi modificată puţin fără a schimba numărul zerourilor sale. Apoi demonstrăm teorema aplicaţiei deschise, care spune că imaginea unei mulţimi deschise printr-o funcţie olomorfă este tot mulţime deschisă, o proprietate importantă care arată din nou natura specială a funcţiilor olomorfe. În final, principiul maximului modulului, spune că o funcţie olomorfă nu poate atinge maximumul modulului său în interiorul domeniului de definiţie.

3.5 Teorema Rouché

Teorema 3.5.1: [Teorema Rouché] *Fie f şi g olomorfe pe Ω=simplu conex şi C o curbă închisă simplă în Ω. Dacă*

$$|f(z)| > |g(z)| \textit{ pentru orice } z \in C,$$

atunci f şi $f+g$ au acelaşi număr de zerouri în interiorul lui C.

Demonstraţie. Pentru $t \in [0,1]$ definim

$$f_t(z) = f(z) + tg(z),$$

aşadar $f_0 = f$ şi $f_1 = f + g$. Fie n_t numărul zerourilor lui f_t în interiorul lui C, numărate cu multiplicităţi. În particular, n_t este întreg. Condiţia $|f(z)| > |g(z)|$ pentru orice $z \in C$ arată că f_t nu are zerouri pe C. Principiul argumentului (Teorema 3.4.1) implică

$$n_t = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz.$$

Pentru a demonstra că n_t este constantă, este suficient să arătăm că este o funcţie continuă în t. Pentru aceasta, observăm că $\frac{f_t'(z)}{f_t(z)}$ este continuă atât în $t \in [0,1]$, cât şi în $z \in C$. Această dublă continuitate este asigurată de continuitatea în t şi z atât pentru f_t', cât şi pentru f_t, împreună cu neanularea lui f_t pe C. Cum n_t este definită ca integrala pe curba C din $\frac{f_t'(z)}{f_t(z)}$, care este continuă în ambele variabile, obţinem n_t continuă în t. ∎

3.6 Teorema aplicaţiei deschise

O aplicaţie se numeşte deschisă dacă duce mulţimi deschise în mulţimi deschise.

Teorema 3.6.1: [Teorema aplicaţiei deschise] *Dacă $\Omega \subset \mathbb{C}$ este un deschis conex şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$ este olomorfă şi neconstantă, atunci f este aplicaţie deschisă.*

Demonstraţie. Fie w_0 un punct din imaginea lui f, să zicem $f(z_0) = w_0$. Vrem să demonstrăm că pentru $\epsilon > 0$ suficient de mic, $D_\epsilon(w_0) \subset f(\Omega)$.

Definim $g(z) = f(z) - w$ şi atunci putem scrie

$$g(z) = \underbrace{(f(z) - w_0)}_{F(z)} + \underbrace{(w_0 - w)}_{G(z)}.$$

Alegem $\delta > 0$ astfel încât discul $|z-z_0| < \delta$ să fie inclus în Ω şi $f(z) \neq w_0$ pe cercul $|z-z_0| = \delta$. Putem găsi un astfel de δ datorită teoremei de identitate pentru funcţii olomorfe (Teorema 2.4.8). Mai departe, alegem $\epsilon > 0$ astfel încât să avem $|f(z) - w_0| \geq \epsilon$ pe cercul $|z - z_0| = \delta$. Acum, dacă $|w - w_0| < \epsilon$, avem $|F(z)| > |G(z)|$ pe cercul $|z - z_0| = \delta$, şi cu teorema Rouché (Teorema 3.5.1) obţinem că $g = F + G$ are un zero în interiorul cercului $|z - z_0| = \delta$, deoarece F are un zero în acest cerc. Dar $g(z) = f(z) - w$, aşadar pentru orice w din discul $f(z) = w$ are soluţie z în discul $|w - w_0| < \epsilon$, găsim un z în discul $|z - z_0| < \delta$ pentru care $f(z) = w$. Altfel spus, $D_\epsilon(w_0) \subset f(\Omega)$. ■

3.7 Principiul maximului modulului

Următoarea teoremă se referă la mărimea valorilor pe care le poate lua o funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă. Când vom scrie *maximumul unei funcţii olomorfe f pe o mulţime deschisă* Ω, ne vom referi de fapt la maximumul funcţiei $|f|$ pe Ω.

Teorema 3.7.1: [Principiul maximului modulului] *Dacă f este o funcţie olomorfă neconstantă pe o mulţime deschisă conexă Ω, atunci f nu îşi poate atinge maximumul în Ω.*

Demonstraţie. Presupunem că f îşi atinge maximumul în z_0. Cum f este olomorfă, este aplicaţie deschisă, aşadar dacă $D \subset \Omega$ este un disc centrat în z_0, atunci $f(D)$ este deschis şi conţine $f(z_0)$. Prin urmare, există puncte $z \in D$ pentru care $|f(z)| > |f(z_0)|$, care este o contradicţie. ■

Corolarul 3.7.2: *Fie Ω un deschis conex cu închiderea $\overline{\Omega}$ compactă. Dacă f este olomorfă pe Ω şi continuă pe $\overline{\Omega}$, atunci*

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| = \sup_{\partial\Omega} |f(z)|.$$

Demonstraţie. Cum $f(z)$ este continuă pe compactul $\overline{\Omega}$, $|f(z)|$ îşi atinge maximumul pe $\overline{\Omega}$. Dar acest maximum nu poate fi în interiorul lui Ω dacă f este neconstantă, deoarece f este olomorfă (conform principiului maximumui modulului (Teorema 3.7.1)). Aşadar, $\sup_{z\in\Omega} |f(z)| \leq \sup_{\partial\Omega} |f(z)|$, iar continuitatea lui f pe $\overline{\Omega}$ ne asigură că de fapt avem chiar egalitate. Dacă f este constantă, concluzia este trivială. ■

3.8 Logaritmul complex

În această secţiune vom vedea cum putem defini logaritmul pentru numere complexe nenule. Dacă $z = re^{i\theta}$, si dacă vrem ca logaritmul să fie inversa funcţiei exponenţiale, este natural să punem

$$\log z = \ln r + i\theta.$$

Problema cu această definiţie este că θ este definit unic doar modulo 2π. Cu toate acestea, dacă pentru un număr z dat, fixăm o alegere pentru θ, şi dacă z variază numai puţin, atunci vom avea o alegere unică pentru θ (presupunând că punem condiţia ca θ să varieze continuu în funcţie de z). Aşadar, "local", această definiţie este bună, dar "global" această metodă nu va funcţiona. De exemplu, dacă pornim din punctul 1 şi facem o rotaţie completă în jurul originii, logaritmul nu va ajunge la valoarea de la care am plecat, ci va fi valoarea iniţială plus un multiplu de $2\pi i$. Pentru a avea funcţia logaritm bine definită, trebuie să restrângem domeniul pe care o definim. Aceasta este aşa-numita *ramură* a logaritmului.

Discuţia din capitolul anterior despre domenii simplu conexe conduce la următoarea definiţie globală a unei ramuri a funcţiei logaritm.

Teorema 3.8.1: *Fie Ω un domeniu simplu conex cu $1 \in \Omega$, şi $0 \notin \Omega$. Atunci, în Ω există o ramură a logaritmului $F(z) = \log_\Omega(z)$ astfel încât*

1. *F este olomorfă pe Ω,*
2. *$e^{F(z)} = z$ pentru orice $z \in \Omega$,*
3. *$F(r) = \ln r$ pentru orice r real dintr-o vecinătate a lui 1.*

Altfel spus, fiecare ramură $\log_\Omega(z)$ este o extensie a logaritmului standard definit pentru numere reale pozitive.

Demonstraţie. Vom construi F ca o primitivă a funcţiei $\frac{1}{z}$. Cum $0 \notin \Omega$, funcţia $f(z) = \frac{1}{z}$ este olomorfă pe Ω. Definim

$$\log_\Omega(z) = F(z) = \int_\gamma f(w)dw,$$

unde γ este orice curbă ce uneşte 1 cu z. Cum Ω este simplu conex, definiţia aceasta nu depinde de alegerea curbei γ. Procedând ca în Teorema 2.3.3, obţinem F olomorfă şi $F'(z) = f(z) = \frac{1}{z}$ pentru orice $z \in \Omega$. Am demonstrat astfel afirmaţia 1.

Pentru a demonstra afirmaţia 2, este suficient să arătăm că $ze^{-F(z)}$ este constantă. Pentru aceasta, derivăm şi obţinem

$$\frac{d}{dz}\left(ze^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)} - zF'(z)e^{-F(z)} = \left(1 - zF'(z)\right)e^{-F(z)} = 0.$$

Cum Ω este conex, deducem că $ze^{-F(z)}$ este constantă. Evaluând expresia în $z = 1$ şi ştiind că $F(1) = 0$, obţinem că acea constantă este 1.

În final, pentru a demonstra afirmaţia 3, dacă r este un număr real aproape de 1, alegem curba de integrare un segment de la 1 la r pe axa reală, şi vom avea

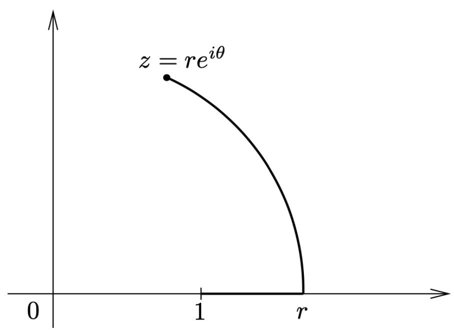
$$F(r) = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \ln r,$$

încheind astfel demonstraţia. ∎

De exemplu, pe domeniul $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ avem **ramura principală** a logaritmului

$$\log z = \ln r + i\theta,$$

unde $z = re^{i\theta}$, cu $-\pi < \theta < \pi$ (în acest caz, nu vom mai pune indicele Ω la $\log_\Omega(z)$ şi vom scrie simplu $\log(z)$). Pentru a demonstra asta, folosim curba de integrare γ din desenul alăturat.



Curba de integrare pentru ramura principală a logaritmului

Pentru $z = re^{i\theta}$ cu $-\pi < \theta < \pi$, curba constă într-un segment de la 1 la r şi apoi un arc de cerc η de la r la z. Aşadar, avem

$$\begin{aligned}\log z &= \int_1^r \frac{1}{x}dx + \int_\eta \frac{1}{w}dw \\ &= \ln r + \int_0^\theta \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt \\ &= \ln r + i\theta.\end{aligned}$$

O observaţie importantă este că, în general,

$$\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2.$$

De exemplu, dacă $z_1 = z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, atunci pentru ramura principală a logaritmului avem

$$\log z_1 = \log z_2 = \frac{2\pi i}{3}$$

şi cum $z_1 z_2 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$, avem

$$-\frac{2\pi i}{3} = \log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2.$$

Pentru ramura principală a logaritmului, avem seria Taylor

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n} \text{ pentru } |z| < 1. \tag{3.8.1}$$

Într-adevăr, cum derivatele ambilor membri ai egalităţii sunt $\frac{1}{1-z}$, ei diferă printr-o constantă. Cum ambii membri iau valoarea 0 în $z = 0$, acea constantă este 0.

Având definit logaritmul pentru domenii simplu conexe, putem acum să definim puterile z^α, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$. Dacă Ω este un domeniu simplu conex cu $1 \in \Omega$, şi $0 \notin \Omega$, avem ramura principală a logaritmului $\log z$ şi definim

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

Observăm că $1^\alpha = 1$ şi dacă $\alpha = \frac{1}{n}$, atunci

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^n = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{n}{n}\log z} = e^{\log z} = z.$$

Ştim că orice număr complex nenul w poate fi scris sub forma $w = e^z$. O generalizare a acestei observaţii este următoarea teoremă, care ne spune în ce condiţii există $\log f(z)$ atunci când f nu se anulează.

Teorema 3.8.2: *Fie Ω un domeniu simplu conex şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie care nu se anulează în niciun punct. Atunci, există o funcţie olomorfă $g : \Omega \to \mathbb{C}$ astfel încât*

$$f(z) = e^{g(z)}.$$

Această funcţie $g(z)$ se notează $\log f(z)$ şi determină o ramură a acelui logaritm.

Demonstraţie. Fixăm un punct $z_0 \in \Omega$ şi definim funcţia

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)} dw + c_0,$$

unde γ este orice curbă din Ω ce uneşte z_0 cu z, iar c_0 este un număr complex pentru care $e^{c_0} = f(z_0)$. Definiţia este independentă de alegerea curbei γ, deoarece Ω este simplu conex. Procedând ca în Teorema 2.3.3, găsim că g este olomorfă şi

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

şi un calcul simplu arată că

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)e^{-g(z)}\right) = 0,$$

deci $f(z)e^{-g(z)}$ este constantă. Evaluând expresia în z_0, obţinem $f(z_0)e^{-c_0} = 1$, deci $f(z) = e^{g(z)}$ pentru orice $z \in \Omega$, şi demonstraţia este completă. ■

3.9 Produse infinite

Dat un şir $\{a_n\}_{n\geq 1}^\infty$ de numere complexe, spunem că produsul $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ este convergent dacă limita $\lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{N}(1+a_n)$ există şi este un număr complex. O condiţie necesară care garantează convergenţa unui produs este conţinută în următorul enunţ.

Propoziția 3.9.1: *Dacă $\sum |a_n| < \infty$, atunci $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ este convergent. Mai mult, produsul converge la 0 dacă şi numai dacă unul dintre factori este 0.*

Demonstraţie. Dacă $\sum |a_n| < \infty$ converge, atunci pentru orice n suficient de mare, avem $|a_n| < \frac{1}{2}$. Ignorând, daca este cazul, un număr finit de termeni, putem presupune că $|a_n| < \frac{1}{2}$ are loc pentru orice n. În particular, putem defini $\log(1+a_n)$ prin seria de puteri 3.8.1, şi acest logaritm satisface proprietatea $1+z = e^{\log(1+z)}$ pentru orice $|z| < 1$. Prin urmare, putem scrie

$$\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) = \prod_{n=1}^{N} e^{\log(1+a_n)} = e^{B_N},$$

unde $B_N = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n$, cu $b_n = \log(1+a_n)$. Cu dezvoltarea în serie Taylor, vedem că

$$|\log(1+z)| \leq 2|z|, \text{ dacă } |z| < \frac{1}{2}.$$

Aşadar, $|b_n| \leq 2|a_n|$, deci $B_N \to B \in \mathbb{C}$ pentru $N \to \infty$. Cum funcţia exp este continuă, deducem că $e^{B_N} \to e^B$, care încheie demonstraţia primei părţi a propoziţiei. Mai observăm că dacă $1 + a_n \neq 0$ pentru toţi n, atunci produsul converge la o limită nenulă, din moment ce se poate scrie sub forma e^B. ∎

Mai general, putem considera produse infinite de funcţii olomorfe.

Propoziția 3.9.2: *Presupunem că $\{F_n\}_{n\geq 1}$ este un şir de funcţii olomorfe pe o mulţime deschisă Ω. Dacă există constantele $c_n > 0$ astfel încât*

$$\sum c_n < \infty \text{ şi } |F_n(z) - 1| < c_n \text{ pentru toţi } z \in \Omega,$$

atunci:

1. *produsul $\prod\limits_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converge uniform pe Ω la o funcţie $F(z)$;*

2. *dacă $F_n(z)$ nu se anulează pentru niciun n, atunci*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n'(z)}{F_n(z)}.$$

Demonstraţie. Pentru a demonstra prima afirmaţie, observăm că pentru orice z putem argumenta la fel ca în Propoziția 3.9.1, dacă scrie $F_n(z) = 1 + a_n(z)$, cu $|a_n(z)| \leq c_n$. Apoi, observăm că estimările sunt uniforme în z pentru că c_n-urile sunt constante. Deducem că produsul converge uniform la o funcţie olomorfă, pe care o notăm $F(z)$.

Pentru a justifica a doua parte a propoziţiei, considerăm $K \subset \Omega$ compact şi punem

$$G_N(z) = \prod_{n=1}^{N} F_n(z).$$

Tocmai am demonstrat că $G_N \to F$ uniform pe Ω, deci din Teorema 2.4.11 rezultă că $\{G_N'\}$ converge uniform la F' pe K. Cum G_N este uniform mărginită inferior pe K, obţinem

$$\frac{G_N'}{G_N} \to \frac{F'}{F}$$

uniform pe K, şi deoarece K este un compact arbitrar din Ω, limita este valabilă pentru orice punct din Ω. Mai mult, după cum am văzut la începutul secţiunii 3.4,

$$\frac{G'_N}{G_N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{F'_n}{F_n},$$

observaţie care încheie demonstraţia. ■

Continuăm cu construcţia lui Weierstrass a unei funcţii întregi cu zerouri prescrise.

Teorema 3.9.3: [Weierstrass] *Dat un şir $\{a_n\}$ de numere complexe cu $|a_n| \to \infty$ pentru $n \to \infty$, există o funcţie întreagă f care se anulează exact în punctele $z = a_n$, şi în niciun alt punct. Orice altă astfel de funcţie este de forma $f(z)e^{g(z)}$, unde g este funcţie întreagă.*

Demonstraţie. Ne reamintim că dacă o funcţie f se anulează în $z = a$, atunci multiplicitatea (sau ordinul) zeroului a este numărul natural m pentru care $f(z) = (z - a)^m g(z)$, unde g este o funcţie olomorfă care nu se anulează pe o vecinătate a lui a. Alternativ, putem defini m ca fiind prima putere cu coeficient nenul din seria Taylor a lui f în jurul lui a. Cum permitem repetiţii în şirul $\{a_n\}$, teorema de fapt garantează că există funcţii întregi cu zerouri prescrise, de multiplicităţi prescrise.

Pentru început, observăm că dacă f_1 şi f_2 sunt două funcţii întregi care se anulează în toate punctele $z = a_n$ şi în niciun alt punct, atunci $\frac{f_1}{f_2}$ are singularitate eliminabilă în toate punctele $z = a_n$. Aşadar, $\frac{f_1}{f_2}$ este întreagă şi nu se anulează în niciun punct, deci folosind Teorema 3.8.2, putem scrie

$$\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = e^{g(z)},$$

lucru care justifică a doua parte a concluziei.

Ne rămâne acum să construim o funcţie f cu proprietăţile din enunţ. Pentru fiecare $k \geq 0$, definim **factorii canonici** E_k prin

$$E_0(z) = 1 - z \text{ şi } E_k(z) = (1 - z)e^{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^k}{k}}, \text{ pentru } k \geq 1.$$

Acest întreg k este numit **gradul** factorului canonic.

Întrerupem pentru moment demonstraţia pentru a justifica următoarea

Lema 3.9.4: *Dacă $|z| \leq \frac{1}{2}$, atunci $|1 - E_k(z)| \leq c|z|^{k+1}$ pentru un $c > 0$.*

Demonstraţie. Dacă $|z| \leq \frac{1}{2}$, atunci cu logaritmul definit ca serie de puteri, avem $1-z = e^{\log(1-z)}$, şi deci

$$E_k(z) = e^{\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^k}{k}} = e^w,$$

unde $w = -\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Observăm că deoarece $|z| \leq \frac{1}{2}$, vom avea

$$w \leq |z|^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|z|^{n-k-1}}{n} \leq |z|^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \leq 2|z|^{k+1}.$$

În particular, avem $|w| \leq 1$, iar acest lucru implică

$$|1 - E_k(z)| = |1 - e^w| \leq c'|w| \leq c|z|^{k+1}.$$

∎

Observația 3.9.5: Un lucru tehnic important este că această constantă $c > 0$ poate fi aleasă independentă de k. De fapt, dacă analizăm mai atent demonstraţia, observăm că putem alege $c' = e$ şi $c = 2e$.

Revenim la demonstraţia teoremei. Presupunem că avem dat un zero de ordin m în origine, şi că $a_1, a_2, \ldots$ sunt toate nenule. Atunci, definim produsul Weierstrass prin

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Afirmăm că această funcţie are toate proprietăţile dorite, adică $f(z)$ este o funcţie întreagă cu un zero de ordin m în origine, are zerouri în fiecare punct al şirului $\{a_n\}$, şi nu se mai anulează în niciun alt punct.

Pentru a justifica afirmaţia, fixăm $R > 0$ şi considerăm $|z| < R$. Vom arăta că f are proprietăţile dorite în disc, iar cum R este arbitrar, demonstraţia va fi gata.

Considerăm două tipuri de factori în formula care defineşte f, cu alegerea depinzând de cazurile $|a_n| \leq 2R$ şi $|a_n| > 2R$. Există numai un număr finit de termeni de primul tip, deoarece $|a_n| \to \infty$, şi vedem că produsul finit se anulează în toate punctele $z = a_n$ pentru $|a_n| < R$. Dacă $|a_n| > 2R$, atunci $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}$, iar Lema 3.9.4 implică

$$\left|1 - E\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq c\left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1} \leq \frac{c}{2^{n+1}}.$$

Din Observația 3.9.5, c nu depinde de n. Prin urmare, produsul

$$\prod_{|a_n|>2R} E\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

defineşte o funcţie olomorfă pentru $|z| < R$, şi din Propoziția 3.9.1 rezultă că nu se anulează în acel disc. Cu aceasta, demonstraţia este completă. ∎

Capitolul 4

Funcţiile Gamma şi Zeta

4.1 Funcţia Gamma

Pentru $s > 0$, **funcţia gamma** este definită prin

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt. \tag{4.1.1}$$

Integrala converge pentru orice $s > 0$ deoarece în vecinătatea lui $t = 0$, funcţia t^{s-1} este integrabilă, şi pentru t mare, convergenţa este garantată de descreşterea exponenţială a integrandului. Aceste observaţii ne permit să extindem domeniul de definiţie al funcţiei Γ.

Propoziția 4.1.1: *Funcţia Γ se extinde la o funcţie analitică în semiplanul drept $\mathrm{Re}(s) > 0$ cu formula 4.1.1.*

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că integrala 4.1.1 defineşte o funcţie olomorfă în fiecare bandă

$$S_{\delta,M} = \{\delta < \mathrm{Re}(s) < M\},$$

unde $0 < \delta < M < \infty$. Remarcăm că dacă $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, atunci $|e^{-t} t^{s-1}| = e^{-t} t^{\sigma-1}$, deci integrala

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt,$$

care este definită prin limita $\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} e^{-t} t^{s-1} dt$, converge pentru orice $s \in S_{\delta,M}$. Pentru $\epsilon > 0$, definim

$$F_\epsilon(s) = \int_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Teorema 2.4.14 ne arată că funcţia F_ϵ este olomorfă pe banda $S_{\delta,M}$. Cu Teorema 2.4.11, va fi suficient să demonstrăm că F_ϵ converge uniform la Γ pe banda $S_{\delta,M}$. Pentru a vedea acest lucru, observăm mai întâi că

$$|\Gamma(s) - F_\epsilon(s)| \leq \int_0^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt.$$

Pentru prima integrală avem

$$0 \leq \int_0^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt \leq \int_0^\epsilon t^{\delta-1} dt = \frac{\epsilon^\delta}{\delta} \to 0$$

când $\epsilon \to 0$.

Pentru a doua integrală, avem

$$\left|\int_{\frac{1}{\epsilon}}^{\infty} e^{-t}t^{\sigma-1}dt\right| \leq \int_{\frac{1}{\epsilon}}^{\infty} e^{-t}t^{M-1}dt \leq C\int_{\frac{1}{\epsilon}}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt \to 0,$$

pentru $\epsilon \to 0$, şi cu aceasta demonstraţia este gata. ∎

În ciuda faptului că integrala ce defineşte Γ nu este absolut convergentă pentru alte valori ale lui s, putem demonstra că există o funcţie meromorfă pe $\mathbb{C}$, egală cu Γ pe $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$. Această funcţie meromorfă va fi notată tot cu Γ.

Pentru a demonstra afirmaţia de mai sus, avem nevoie de o lemă, care arată o proprietate importantă a funcţiei Γ.

Lema 4.1.2: *Dacă* $\mathrm{Re}(s) > 0$, *atunci*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{4.1.2}$$

În particular, obţinem $\Gamma(n+1) = n!$.

Demonstraţie. Integrând prin părţi, obţinem

$$\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{d}{dt}(e^{-t}t^{s})dt = -\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} e^{-t}t^{s}dt + s\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} e^{-t}t^{s-1}dt,$$

şi acum 4.1.2 se deduce făcând $\epsilon \to 0$ şi observând că membrul stâng se anulează, deoarece $e^{-t}t^{s} \to 0$ când $t \to 0$ sau $t \to \infty$.

Acum, mai rămâne de verificat

$$\Gamma(1) = \int_{0}^{\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_{0}^{\infty} = 1,$$

şi apoi aplicăm 4.1.2 succesiv pentru a obţine $\Gamma(n+1) = n!$. ∎

Formula 4.1.2 este tot ce avem nevoie pentru a demonstra următoarea

Teorema 4.1.3: *Funcţia* $\Gamma(s)$, *iniţial definită pentru* $\mathrm{Re}(s) > 0$, *are o continuare analitică la o funcţie meromorfă* Γ *pe* $\mathbb{C}$, *cu singularităţi în numerele întregi negative* $s = 0, -1, \ldots$, *care sunt toate poli simpli.*

În plus, $\mathrm{res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Demonstraţie. Este suficient să extindem Γ la fiecare semi-spaţiu $\mathrm{Re}(s) > -m$, unde $m \geq 1$ este un număr întreg. Pentru $\mathrm{Re}(s) > -1$, definim

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Cum $\Gamma(s+1)$ este olomorfă pe $\mathrm{Re}(s) > -1$, vedem că F_1 este meromorfă în $\mathrm{Re}(s) > -1$, cu singura posibilă singularitate pol simplu în $s = 0$. Cum $\Gamma(1) = 1$, F_1 chiar are pol simplu în $s = 0$, cu reziduul egal cu 1. Mai mult, dacă $\mathrm{Re}(s) > 0$, atunci

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \Gamma(s),$$

din Lema 4.1.2. Deci F_1 extinde Γ la o funcţie meromorfă pe $\mathrm{Re}(s) > -1$. Putem continua acum aces procedeu. Definim funcţia F_m pe $\mathrm{Re}(s) > -m$ prin

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots s}.$$

F_m este meromorfă pe $\mathrm{Re}(s) > -m$, are poli simpli în punctele $s = 0, -1, -2, \ldots, -m+1$, şi coincide cu Γ pe $\mathrm{Re}(s) > 0$. În plus, pentru $0 \leq n \leq m-1$, avem

$$\begin{aligned}\mathrm{res}(F_m(s), s=-n) &= \frac{\Gamma(-n+m)}{(m-1-n)!(-1)(-2)\cdots(-n)} \\ &= \frac{(m-n-1)!}{(m-1-n)!(-1)(-2)\cdots(-n)} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Aşadar, $F_m(s) = \Gamma(s)$ pe $\mathrm{Re}(s) > 0$, pentru orice $m \geq 1$. Datorită unicităţii (teorema de identitate pentru funcţii olomorfe), $F_m = F_k$ pentru orice $1 \leq k \leq m$, pe domeniul de definiţie al lui F_k. Avem astfel construită, inductiv, continuarea analitică a lui Γ. ■

Observația 4.1.4: Am demonstrat deja că $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pentru orice $\mathrm{Re}(s) > 0$. De fapt, prin continuare analitică, folosind teorema de indentitate pentru funcţii olomorfe, formula rămâne adevărată pentru orice $s \neq 0, -1, -2, \ldots$, adică pentru orice punct care nu este singularitate pentru Γ.

Putem merge mai departe şi să observăm că pentru $s = -n$ întreg negativ, $n \geq 1$, ambii membri ai inegalităţii au poli simpli şi

$$\mathrm{res}(\Gamma(s+1), s=-n) = -n\,\mathrm{res}(\Gamma(s), s=-n).$$

Următorul rezultat pe care îl demonstrăm arată "simetria" funcţiei Γ faţă de dreapta $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Teorema 4.1.5: *Pentru orice $s \in \mathbb{C}$,*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \tag{4.1.3}$$

Demonstraţie. Observăm că $\Gamma(1-s)$ are poli simpli în $s = 1, 2, \ldots$, deci $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ este meromorfă pe $\mathbb{C}$, cu poli simpli în toate numerele întregi, o proprietate pe care o are şi $\frac{\pi}{\sin \pi s}$. Pentru a demonstra egalitatea din enunţ, este suficient să o demonstrăm pentru $0 < s < 1$, pentru că apoi ea va fi valabilă peste tot, datorită teoremei de identitate. Pentru a continua demonstraţia, avem nevoie de următaorea

Lema 4.1.6: *Pentru* $0 < a < 1$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{v^{a-1}}{1+v}dv = \frac{\pi}{\sin \pi a}$.

Demonstraţie. Observăm mai întâi că

$$\int_0^\infty \frac{v^{a-1}}{1+v}dv = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx,$$

care se obţine prin schimbarea de variabilă $v = e^x$. Pentru integrala din membrul drept, folosim teorema reziduurilor pentru funcţia $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ pe curba închisă care este un dreptunghi cu vârfurile $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$, apoi facem $R \to \infty$ şi obţinem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

■

Revenim la demonstraţia teoremei. Pentru $0 < s < 1$, putem scrie

$$\Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-u} u^{-s} du = t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-s} dv,$$

unde pentru $t > 0$ am făcut schimbarea de variabilă $vt = u$. Cu acest “trick”, vom avea

$$\begin{aligned} \Gamma(1-s)\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \Gamma(1-s) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \left(t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-s} dv \right) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{-s} dv dt \\ &= \int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v} dv \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi(1-s)} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi s}, \end{aligned}$$

şi teorema este demonstrată. ■

Observația 4.1.7: În particular, pentru $s = \frac{1}{2}$, ţinând cont de faptul că $\Gamma(s) > 0$ pentru orice $s > 0$, obţinem $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. În general, avem

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right), \text{ pentru } n \in \mathbb{N}.$$

Propoziția 4.1.8: *Fie D un domeniu care conţine banda verticală $V \subset \mathbb{C}$*

$$V := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 2\}.$$

Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă cu proprietăţile:

1. *f este mărginită pe banda verticală V.*

2. *Următoarea ecuaţie funcţională este verificată:*

$$f(z+1) = zf(z) \text{ pentru orice } z \in D.$$

Atunci, $f(z) = f(1)\Gamma(z)$ pentru orice $z \in D$.

Demonstraţie. Exact prin aceeaşi metodă pe care am folosit-o pentru a construi prelungirea analitică a fucţiei Γ pe $\mathbb{C} \setminus S$, unde $S = \{0, -1, -2, \ldots\}$, prelungim analitic f la $\mathbb{C} \setminus S$ şi obţinem că f are în punctele lui S poli simpli, şi

$$\operatorname{res}(f; -n) = \frac{(-1)^n}{n!} f(1).$$

Atunci, funcţia $h(z) := f(z) - f(1)\Gamma(z)$ are în punctele lui S singularităţi eliminabile, deci este o funcţie întreagă. h este mărginită pe banda verticală V. Putem folosi ecuaţia funcţională pentru a extinde banda mai la stânga, la o bandă de forma

$$a \leq z \leq b < 2,$$

mai întâi cu condiţia $|\operatorname{Im}(z)| \geq 1$. Dar mulţimea $\operatorname{Im}(z)| \leq 1$, $a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b$ este compactă, aşadar obţinem mărginirea pe întreaga bandă $a \leq z \leq b < 2$.

Totuşi, încă nu putem aplica teorema Liouville. Dar putem folosi un “trick”: din ecuaţia funcţională

$$h(z + 1) = zh(z),$$

pe care o verifică funcţia $h(z) := f(z) - f(1)\Gamma(z)$, obţinem o funcţie întreagă $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$H(z) := h(z)h(1 - z)$$

este periodica modulo semnul:

$$H(z + 1) = -H(z).$$

Funcţia H este aşadar mărginită în banda $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) < 1\}$, deoarece banda este invariată de $z \mapsto 1 - z$. Prin urmare, H este mărginită pe $\mathbb{C}$. Aplicând teorema Liouville, H este constantă. Cum $h(1) = 0$, obţinem $H = 0$, de unde deducem $h = 0$. ∎

Propoziția 4.1.9: *Pentru orice $z \in \mathbb{C}$,*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = G(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-z}}{n!} z(z + 1) \cdots (z + n).$$

Corolarul 4.1.10: *Funcţia gamma nu are zerouri.*

Demonstraţie. Verificăm proprietăţile de caracterizare a funcţiei Γ din Propoziția 4.1.8, pentru funcţia $\frac{1}{G}$. Notăm

$$\begin{aligned} G_n(z) &= \frac{n^{-z}}{n!} z(z + 1) \cdots (z + n) \\ &= ze^{-z \ln n} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) \\ &= ze^{z(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n)} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}}. \end{aligned}$$

1. $\frac{1}{G(z)}$ *este mărginită pe banda verticală* $V = \{1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\}$.

   Această proprietate este verificată, deoarece

$$|n^{-z}| = n^{-x} \text{ şi } |z + \nu| \geq x + \nu.$$

2. *Ecuaţia funcţională.*

   Un calcul simplu arată că $zG_n(z+1) = \frac{z+n+1}{n} G_n(z)$ şi facem apoi $n \to \infty$.

3. *Normalizare.*

$$G_n(1) = 1 + \frac{1}{n} \text{ pentru orice } n, \text{ şi facem } n \to \infty.$$

■

4.2 Funcţia Zeta

Funcţia zeta a lui Riemann este iniţial definită pentru $s > 1$ prin seria convergentă

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ca şi în cazul funcţiei gamma, ζ poate fi prelungită analitic pe un domeniu mai mare din planul complex. În următoarea secţiune, vom prezenta o demonstraţie a acestui lucru, care se bazează pe legătura funcţiei zeta cu funcţia gamma.

Lema 4.2.1: *Pentru* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *are loc egalitatea* $\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$

Demonstraţie. Cu schimbarea de varibilă $t = nx$, obţinem

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = n^s \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} dx.$$

Cu această egalitate, putem scrie

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

■

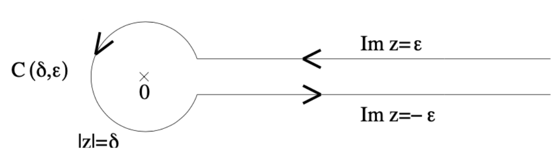
Dacă reuşim să arătăm că membrul drept al egalităţii este o funcţie meromorfă în variabila s pe tot planul complex, atunci

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} (\text{membrul drept})$$

poate fi folosită pentru a extinde definiţia lui ζ pe tot planul. Din nefericire, în forma aceasta, integrala improprie din membrul drept este divergentă pentru $\mathrm{Re}(s) \leq 1$, deoarece integrandul “se comportă rău” în punctul $x = 0$:

$$\left| \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \right| \sim x^{\mathrm{Re}(s)-2}.$$

Aşadar, ideea aceasta nu va funcţiona direct. Riemann a depăşit această dificultate prin următorul “trick”: înlocuim integrarea pe drumul $(0, \infty)$ cu conturul care evită punctul singular $x = 0$:



unde $0 < \epsilon < \delta < 2\pi$ sunt constante (mici) fixate.

Definiția 4.2.2: Pentru $s \in \mathbb{C}$, definim

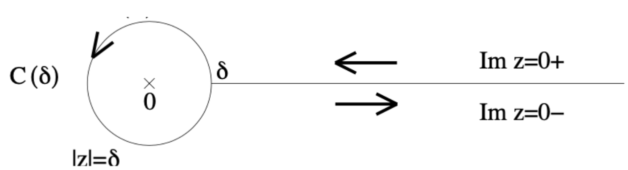
$$H(s) = \int_{C(\delta,\epsilon)} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz.$$

Trebuie să arătăm că integrala care defineşte H "se comportă bine" şi defineşte o funcţie întreagă. Planul este să justificăm următoarele afirmaţii:

1. $H(s)$ este o funcţie întreagă.
2. $H(s)$ este independentă de alegerile pentru δ şi ϵ.
3. Pentru orice $0 < \delta < 2\pi$ fixat şi orice $x \in \mathbb{C}$,

$$H(s) = \int_{C(\delta)} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz = \int_{|z|=\delta} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz + (e^{2\pi i s} - 1) \int_{\delta}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

unde integrarea pe conturul $C(\delta)$ este



4. Pentru $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$H(s) = (e^{2\pi i s} - 1) \int_{\delta}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = (e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)\zeta(s).$$

Dacă reuşim acest lucru, atunci putem defini ζ pe tot planul, prin

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{H(s)}{(e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)}.}$$

Afirmaţia 4 arată că această noă definiţie pentru ζ este coerentă cu cea iniţială, dată prin seria convergentă, pentru $\mathrm{Re}(s) > 1$. Mai mult, cu această definiţie, vedem imediat că $\zeta(s)$ este o funcţie meromorfă pe $\mathbb{C}$.

În continuare, vom demonstra, pe rând, cele 4 afirmaţii.

Demonstraţia afirmaţiei 1: Tăind "coada" conturului $C(\delta, \epsilon)$, îl putem aproxima cu un şir de conturuti C_n de lungime finită, cu limita lui C_n pentru $n \to \infty$ egală cu $C(\delta, \epsilon)$.

Integrandul

$$h(s,z) = \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}$$

este o funcţie continuă de $(s, z) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus [0, \infty)])$. Pentru fiecare $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ fixat, $h(s, z)$ este o funcţie întreagă de s. Prin urmare, pentru orice n, $\int_{C_n} g(s, z) dz$ este o funcţie întreagă de s. Avem

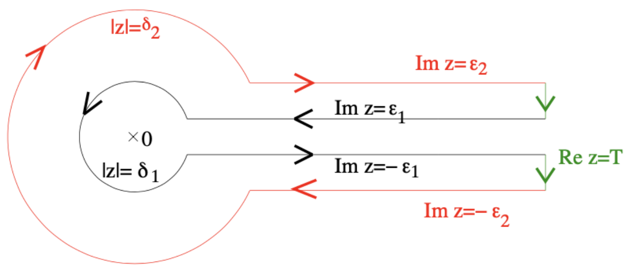
$$\int_{C_n} h(s,z)dz \to \int_{C(\delta,\epsilon)} h(s,z)dz.$$

Cum limita uniformă de funcţii olomorfe este tot olomorfă, obţinem că $H(s)$ este o funcţie întreagă de s.

Demonstraţia afirmaţiei 2: Fie $0 < \epsilon_1 < \delta_1 < 2\pi$ şi $0 < \epsilon_2 < \delta_2 < 2\pi$ fixate. Vrem să demonstrăm că

$$\int_{C(\delta_1,\epsilon_1)} h(s,z)dz = \int_{C(\delta_2,\epsilon_2)} h(s,z)dz.$$

Luăm un $T > 0$ mare şi considerăm conturul $\gamma(T)$, din umrătorul desen:



care constă în 3 părţi: verde, roşu, şi negru. Cum conturul $\gamma(T)$ este închis şi este inclus în domeniul simplu conex $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$, unde $h(s,z)$ este olomorfă în z, avem

$$\int_{\gamma(T)} h(s,z)dz = 0.$$

Facem acum $T \to \infty$ şi obţinem

$$\int_{\text{negru}} h(s,z)dz \to \int_{C(\delta_1,\epsilon_1)} h(s,z)dz,$$

$$\int_{\text{roşu}} h(s,z)dz \to -\int_{C(\delta_2,\epsilon_2)} h(s,z)dz,$$

şi

$$\int_{\text{verde}} h(s,z)dz \to 0.$$

Demonstraţia afirmaţiei 3: Luăm limita când $\epsilon \to 0$. Observăm că pentru $x > 0$, avem următoarele limite când $\epsilon \to 0$:

$$(x+i\epsilon)^{s-1} \to x^{s-1} \quad \text{şi} \quad (x-i\epsilon)^{s-1} \to x^{s-1}e^{2\pi i(s-1)} = x^{s-1}e^{2\pi i s}.$$

Prin urmare, pentru $\epsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}\int_{C(\delta,\epsilon)} \frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz &\to \int_\infty^\delta \frac{x^{s-1}}{e^x-1} + \int_{|z|=\delta} \frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz + \int_\delta^\infty \frac{x^{s-1}e^{2\pi i s}}{e^x-1}dx \\ &= \int_{|z|=\delta} \frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz + \int_\delta^\infty \frac{x^{s-1}(e^{2\pi i s}-1)}{e^x-1}dx.\end{aligned}$$

Demonstraţia afirmaţiei 4: Folosim afirmaţia 3 şi facem $\delta \to 0$. Avem de arătat numai că

$$\int_{|z|=\delta} \frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz \to 0.$$

Avem următoarea inegalitate:

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=\delta}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz\right| &\le \int_0^{2\pi}\delta^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-\theta\,\mathrm{Im}(s)}\left|e^{\delta e^{i\theta}}-1\right|\delta d\theta\\ &= \delta^{\mathrm{Re}(s)-1}\int_0^{2\pi}e^{-\theta\,\mathrm{Im}(s)}\left|\frac{e^{\delta e^{i\theta}}-1}{\delta}\right|.\end{aligned}$$

Acum, dacă facem $\delta\to 0$, avem

$$\frac{e^{\delta e^{i\theta}}-1}{\delta}\to e^{i\theta}$$

şi de aici deducem că

$$\int_0^{2\pi}e^{-\theta\,\mathrm{Im}(s)}\left|\frac{e^{\delta e^{i\theta}}-1}{\delta}\right|^{-1}d\theta\to\int_0^{2\pi}e^{-\theta\,\mathrm{Im}(s)}d\theta<\infty.$$

Acest lucru arată că pentru $\delta\to 0$, integrala

$$\int_{|z|=\delta}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz$$

este de ordinul $O(\delta^{\mathrm{Re}(s)-1})$, deci tinde la 0 dacă $\mathrm{Re}(s)>1$.

Propoziția 4.2.3: *Singurul pol al funcţiei ζ este $s=1$, iar $\mathrm{res}(\zeta,1)=1$.*

Demonstraţie. Vom folosi funcţia H din Definiția 4.2.2. Pentru $s=n$, avem

$$H(n)=\int_{C(\delta)}\frac{z^{n-1}}{e^z-1}dz=2\pi i\,\mathrm{res}\left(\frac{z^{n-1}}{e^z-1},0\right)$$

Aşadar, $H(1)=2\pi i$ şi $H(n)=0$ pentru orice $n\ge 2$. Din formula

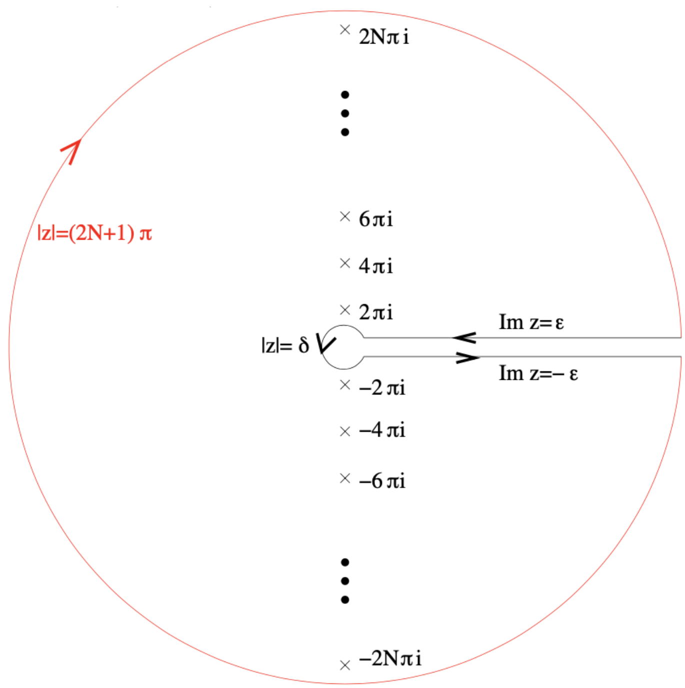
$$\zeta(s)=\frac{H(s)}{(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)},$$

ştiind că Γ nu se anulează în niciun punct, deducem că singurele posibile singularităţi ale funcţiei ζ sunt zerourile lui $e^{2\pi is}-1$, adică s este număr întreg. Toate aceste zerouri pentru $e^{2\pi is}-1$ sunt de ordin 1. Dar Γ are poli de ordin 1 în toţi întregii $n\le 0$, iar H are zerouri în întregii $n\ge 2$. Cum $H(1)=2\pi i$, deducem că singurul pol al funcţiei ζ este $s=1$, şi $\mathrm{res}(\zeta,1)=1$. ∎

Propoziția 4.2.4: *Funcţia Zeta verifică **ecuaţia funcţională a lui Riemann***

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Demonstraţie. Este suficient să facem demonstraţia pentru $\mathrm{Re}(s)<0$. Luăm $0<\epsilon<\delta<2\pi$ şi un întreg pozitiv N. Integrăm funcţia $h(s,z)=\frac{z^{s-1}}{e^z-1}$ pe conturul $C(\delta,\epsilon,N)$ din desenul alăturat:



Polii funcţiei $z \mapsto h(s,z)$ din interiorul conturului $C(\delta,\epsilon,N)$ sunt $2n\pi i$, cu $n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$. Cu teorema reziduurilor, avem

$$\begin{aligned}
\int_{C(\delta,\epsilon,N)} g(s,z)dz &= -2\pi i \sum_{-N\leq n\leq N, n\neq 0} \text{res}\left(\frac{e^{(s-1)\log z}}{e^z-1}, z = 2n\pi i\right) \\
&= -2\pi i \left[\sum_{n=1}^{N} e^{(s-1)\left[ln(2n\pi)+\frac{i\pi}{2}\right]} + \sum_{n=1}^{N} e^{(s-1)\left[\ln(2n\pi)+\frac{i3\pi}{2}\right]}\right] \\
&= -2\pi i \sum_{n=1}^{N}\left[(2n\pi)^{s-1}e^{i(s-1)\frac{\pi}{2}} + (2n\pi)^{s-1}e^{i3(s-1)\frac{\pi}{2}}\right] \\
&= -i(2\pi)^s\left[e^{i(s-1)\frac{\pi}{2}} + e^{i3(s-1)\frac{\pi}{2}}\right]\sum_{n=1}^{N} n^{s-1} \\
&\to 2i(2\pi)^s e^{i\pi s}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s)\right),
\end{aligned}$$

pentru $N \to \infty$.

Pe de altă parte, dacă facem $N \to \infty$, avem

$$\begin{aligned}
\int_{\text{negru}} h(s,z)dz &\to \int_{C(\delta,\epsilon)} h(s,z)dz = H(s) = (e^{2\pi i s}-1)\Gamma(s)\zeta(s) \\
\int_{\text{roşu}} h(s,z)dz &\to 0
\end{aligned}$$

Justificarea pentru convergenţa la 0 pe conturul roşu este bazată pe inegalitatea

$$\max_{|z|=(2N+1)\pi} \frac{1}{|e^z-1|} \leq M,$$

unde $M > 0$ este o constantă pozitivă independentă de N. Cu această inegalitate, deducem că

$$\left|\int_{\text{roşu}} h(s,z)dz\right| \leq [(2N+1)\pi]^{\mathrm{Re}(s)} M \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{Im}(s\theta)} d\theta.$$

Pentru $\mathrm{Re}(s) < 0$, membrul drept tinde la 0 când $N \to \infty$. Trecând la limită, obţinem

$$(e^{2\pi is} - 1)\Gamma(s)\zeta(s) = 2i(2\pi)^s e^{i\pi s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

iar de aici deducem că

$$\zeta(s) = \frac{2i(2\pi)^s e^{i\pi s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)}{(e^{2\pi is} - 1)\Gamma(s)} = (2\pi)^s \zeta(1-s) \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\sin(\pi s)\Gamma(s)}.$$

Folosind identitatea

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

obţinem, în final,

$$\zeta(s) = (2\pi)^s \zeta(1-s) \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)}{\pi}.$$

■

Observația 4.2.5: Folosind ecuaţia din Propoziția 4.2.4, se arată uşor că $-2, -4, -6, \ldots$ sunt zerouri pentru funcţia ζ. Acestea se numesc zerourile triviale ale funcţiei ζ. Este de asemenea cunoscut faptul că ζ nu are alte zerouri în afara benzii deschise $\{0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$.

Ipoteza lui Riemann (care este o problema deschisă), afirmă că toate zerourile netriviale s ale funcţiei ζ au partea reală $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Capitolul 5

Aplicaţii conforme

Problemele pe care le vom studia în acest capitol sunt mai geometrice decât cele de până acum. Rezultatele pe care vrem să le demonstrăm sunt *globale*, spre deosebire de rezultatele pe care le-am obţinut până acum despre funcţii olomorfe, care sunt în cea mai mare parte *locale*. Motivaţia pentru ce urmează să facem provine din următoarea întrebare: *Dacă avem date două mulţimi deschise U şi V, există o funcţie olomorfă şi bijectivă $f : U \to V$?*

5.1 Echivalenţa conformă

Mai întâi, stabilim terminologia pe care o vom folosi în acest capitol.

- O aplicaţie $f : U \to V$ olomorfă, bijectivă, cu inversa olomorfă se numeşte **biolomorfism**.
- O aplicaţie $f : U \to V$ de clasă $\mathcal{C}^1$ care păstrează unghiurile orientate dintre curbe se numeşte **aplicaţie conformă**.

Definiția 5.1.1: Condiţia ca $f : U \to V$ să fie aplicaţie conformă, este următoarea: dacă

$$\gamma, \eta : (-a, a) \to U$$

sunt două curbe netede pentru care $\gamma(0) = \eta(0)$, atunci

$$\arg\left(\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{(f \circ \eta)'(0)}\right) = \arg\left(\frac{\gamma'(0)}{\eta'(0)}\right).$$

Echivalent, putem exprima acest lucru astfel: dacă $z_0 \in U$ şi $\gamma : (-a, a) \to U$ este o curbă netedă pentru care $\gamma(0) = z_0$, atunci

$$\arg\left(\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{\gamma'(0)}\right)$$

nu depinde de γ.

Propoziția 5.1.2: *Dacă $f : U \to V$ este olomorfă şi injectivă, atunci $f'(z) \neq 0$, pentru orice $z \in U$. În particular, inversa lui f definită pe $f(U)$ este tot olomorfă.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că $f'(z_0) = 0$ pentru un $z_0 \in U$. Atunci,

$$f(z) - f(z-0) = a(z - z_0)^k + G(z)$$

pentru toate punctele z aproape de z_0, cu $a \neq 0$, $k \geq 2$, şi G funcţie olomorfă cu ordinul de anulare cel puţin $k+1$ în z_0. Pentru w suficient de mic, putem scrie

$$f(z) - f(z_0) - w = F(z) + G(z), \text{ unde } F(z) = a(z - z_0)^k - w.$$

Cum $|G(z)| < |F(z)|$ pe un cerc mic centrat în z_0, iar F are cel puţin două zerouri în interiorul acelui cerc, cu Teorema 3.5.1 Rouché deducem că $f(z) - f(z_0) - w$ are cel puţin două zerouri în disc. Cum $f'(z_0) \neq 0$ pentru toate punctele $z \neq z_0$, dar suficient de aproape de z_0, deducem că rădăcinile lui $f(z) - f(z_0) - w$ sunt distincte, deci f nu este injectivă, lucru care contrazice ipoteza.

Mai departe, notăm $g = f^{-1}$ inversa pe imaginea funcţiei f, pe care, pentru a nu introduce notatii suplimentare fără rost, o putem presupune V. Luăm $w_0 \in V$ şi w aproape de w_0. Avem $w = f(z)$ şi $w_0 = f(z_0)$. Dacă $w \neq w_0$, atunci

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}.$$

Cum $f'(z_0) \neq 0$, putem face $z \to z_0$ şi deducem că g este olomorfă în w_0 şi $g'(w_0) = \frac{1}{f'(g(w_0))}$. ■

Propoziția 5.1.3: *Orice aplicaţie olomorfă $f : \Omega \to \mathbb{C}$ care satisface condiţia $f'(z) \neq 0$ pentru orice $z \in \Omega$, este o transformare conformă.*

Demonstraţie. Nu trebuie decât să aplicăm regula lanţului la derivare. Considerăm $z_0 \in U$ şi $\gamma : (-a, a) \to U$ o curbă netedă pentru care $z_0 = \gamma(0)$. Avem

$$\arg\left(\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{\gamma'(0)}\right) = \arg\left(\frac{f'(z_0)\gamma'(0)}{\gamma'(0)}\right) = \arg(f(z_0)),$$

care nu depinde de curba γ aleasă. ■

Propoziția 5.1.4: *Orice aplicaţie conformă şi bijectivă $f : U \to V$ este biolomorfism.*

Demonstraţie. Folosind Propoziția 5.1.2, rămâne de demonstrat numai că f este olomorfă. Considerăm $\gamma : (-a, a) \to U$ o curbă netedă, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Atunci,

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\gamma'(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{\gamma'(t)}.\end{aligned}$$

Cum f este conformă, deducem că

$$\arg\left(\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{\gamma'(0)}\right) = \arg\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\overline{\gamma'(t)}}{\gamma'(t)}\right]$$

nu depinde de γ. Aşadar,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0,$$

care se poate scrie $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, adică f este olomorfă. ■

Observația 5.1.5: Propoziția 5.1.3 şi Propoziția 5.1.4 arată că o aplicaţie $f : U \to V$ este biolomorfism dacă şi numai dacă este conformă şi bijectivă.

Definiția 5.1.6: Două mulţimi deschise U şi V se numesc **biolomorfe** sau **conform echivalente** dacă există $f : U \to V$ biolomorfism.

5.2 Lema lui Schwarz

Atât enunţul, cât şi demonstraţia lemei lui Schwarz sunt simple, dar aplicaţiile sunt foarte numeroase şi importante.

Lema 5.2.1: [Schwarz] *Fie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ o funcţie olomorfă cu $f(0) = 0$. Atunci,*

1. $|f(z)| \leq |z|$ *pentru orice* $z \in \mathbb{D}$.
2. *Dacă pentru un* $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$, *avem* $|f(z_0)| = |z_0|$, *atunci* f *este o rotaţie.*
3. $|f'(0)| \leq 1$, *iar dacă are loc egalitatea, atunci* f *este o rotaţie.*

Demonstraţie. Mai întâi, dezvoltăm f în serie de puteri centrată în 0 şi convergentă pe tot $\mathbb{D}$

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots.$$

Cum $f(0) = 0$, avem $a_0 = 0$, deci $\frac{f(z)}{z}$ este olomorfă pe $\mathbb{D}$ (deoarece are singularitate eliminabilă în 0). Dacă $|z| = r < 1$, cum $|f(z)| \leq 1$, avem

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r},$$

iar din principiul maximului modulului deducem că această inegalitate este adevărată pentru orice $|z| \leq r$. Facem $r \to 1$ şi astfel se încheie demonstraţia pentru punctul 1.

Pentru punctul 2, observăm că $\frac{f(z)}{z}$ îşi atinge maximul în interiorul lui $\mathbb{D}$, deci trebuie să fie constantă, aşadar $f(z) = cz$. Evaluând expresia în z_0 şi luând modulul, obţinem $|c| = 1$, adică $c = e^{i\theta}$, şi $f(z) = e^{i\theta} z$ este o rotaţie.

Pentru punctul 3, dacă notăm $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, avem $|g(z)| \leq 1$ pe $\mathbb{D}$ şi, în plus,

$$g(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(0).$$

Prin urmare, dacă $|f'(0)| = 1$, atunci $|g(0)| = 1$, iar din principiul maximului modulului g este constantă, de unde deducem $f(z) = cz$, cu $|c| = 1$, adică f este o rotaţie. ■

Automorfismele discului

O aplicaţie biolomorfă de la o mulţime deschisă Ω la ea însăşi se numeşte **automorfism**. Mulţimea tuturor automorfismelor se notează $\mathrm{Aut}(\Omega)$ şi, impreuna cu operaţia de compunere a funcţiilor, are structură de grup. Două exemple de automorfisme ale discului unitate $\mathbb{D}$ sunt:

1. $r_\theta(z) = e^{i\theta} z$, unde $\theta \in \mathbb{R}$. Aceste transformări sunt rotaţii cu unghiul θ în jurul originii.

2. $\psi_\alpha(z) = \dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$ cu $|\alpha| < 1$. Dacă $|z| = 1$, atunci $z = e^{i\theta}$ şi avem

$$\psi_\alpha(e^{i\theta}) = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \overline{\alpha})} = e^{-i\theta} \frac{w}{\overline{w}},$$

unde $w = \alpha - e^{i\theta}$, deci $|\psi_\alpha(z)| = 1$. Cu principiul maximului modulului, deducem că $|\psi_\alpha(z)| < 1$ pe $\mathbb{D}$. În plus, un calcul direct arată că $\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. O altă proprietate importantă a transformării ψ_α este că interschimbă 0 cu α, adică $\psi_\alpha(0) = \alpha$, şi $\psi_\alpha(\alpha) = 0$.

Teorema 5.2.2: *Dacă $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, atunci există $\theta \in \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{D}$ astfel încât*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \alpha z}.$$

Demonstraţie. Dacă $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, atunci există un unic $\alpha \in \mathbb{D}$ pentru care $f(\alpha) = 0$. Considerăm acum automorfismul $g = f \circ \psi_\alpha$. Avem $g(0) = 0$, iar lema lui Schwarz (Lema 5.2.1) implică

$$|g(z)| \leq |z| \text{ pentru orice } z \in \mathbb{D}. \tag{5.2.1}$$

Mai mult, $g^{-1}(0) = 0$, şi aplicând lema lui Schwarz si pentru g^{-1}, găsim că

$$|g^{-1}(w)| \leq |w| \text{ pentru orice } w \in \mathbb{D}.$$

Folosind această ultimă inegalitate cu $w = g(z)$, pentru toate $z \in \mathbb{D}$, obţinem

$$|z| \leq |g(z)| \text{ pentru orice } z \in \mathbb{D}. \tag{5.2.2}$$

Din 5.2.1 şi 5.2.2, deducem că $|g(z)| = |z|$ pentru orice $z \in \mathbb{D}$, şi o nouă aplicare a lemei Schwarz conduce la $g(z) = e^{i\theta}(z)$ pentru un $\theta \in \mathbb{R}$. Înlocuind z cu $\psi_\alpha(z)$ şi folosind $\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$, deducem că $f(z) = e^{i\theta}\psi_\alpha(z)$. ∎

Corolarul 5.2.3: *Singurele automorfisme ale discului unitate pentru care 0 este punct fix sunt rotaţiile.*

O observaţie importantă pe care o mai putem face în legătură cu transformările ψ_α este că grupul automorfismelor discului acţionează **tranzitiv**, adică pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, există $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ pentru care $\psi(\alpha) = \beta$. Un astfel de exemplu este $\psi = \psi_\beta \circ \psi_\alpha$.

Automorfismele semiplanului superior

Semiplanul superior, pe care îl notăm $\mathbb{H}$, constă în punctele cu partea imaginară pozitivă:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Un lucru remarcabil, care la prima vedere este surprinzător, este că $\mathbb{H}$ este conform echivalent cu discul unitate $\mathbb{D}$. Mai mult, aplicaţia conformă care dă această echivalenţă poate fi dată explicit. Considerăm

$$F(z) = \frac{i-z}{i+z} \text{ şi } G(w) = i\frac{1-w}{1+w}.$$

Teorema 5.2.4: *Aplicaţia $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ este conformă şi bijectivă, cu inversa $G : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$.*

Demonstraţie. Mai întâi observăm că ambele aplicaţii sunt olomorfe pe domeniile lor de definiţie. Mai remarcăm că fiecare punct din $\mathbb{H}$ este mai aproape de i decât de $-i$, deci $|F(z)| < 1$ şi $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$. Pentru a demonstra că $G(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$, scriem $w = u + iv$ şi vom avea

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(G(w)) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-u-iv}{1+u+iv}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{(1-u-iv)(1+u-iv)}{(1+u)^2+v^2}\right) \\
&= \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2} > 0,
\end{aligned}$$

deoarece $|w| < 1$. Aşadar, $G(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$. În final, nişte calcule simple arată că

$$F \circ G = \mathrm{id}_{\mathbb{D}} \text{ şi } G \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}.$$

■

Cunoştinţele despre $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ împreună cu aplicaţia biolomorfă $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ din Teorema 5.2.4, ne permit să determinăm $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Considerăm aplicaţia

$$\Lambda : \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

definită prin "conjugarea cu F":

$$\Lambda(\varphi) = F^{-1} \circ \varphi \circ F.$$

Este clar că Λ este corect definită şi inversabilă, cu inversa $\Lambda^{-1}(\psi) = F \circ \psi \circ F^{-1}$. De fapt, Λ este chiar un izomorfism între grupurile $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ şi $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, pentru că avem

$$\begin{aligned}
\Lambda(\varphi_1 \circ \varphi_2) &= F^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ F \\
&= F^{-1} \circ \varphi_1 \circ F \circ F^{-1} \circ \varphi_2 \circ F \\
&= \Lambda(\varphi_1) \circ \Lambda(\varphi_2).
\end{aligned}$$

Prin urmare, nu ne rămâne decât să dăm o descriere a elementelor lui $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Un şir de calcule ce constau în pull-back-ul automorfismelor discului în semiplanul superior $\mathbb{H}$ prin F arată că $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ constă în toate aplicaţiile de forma

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

unde a, b, c, d sunt numere reale pentru care $ad - bc = 1$. După cum putem observa, o matrice stă "ascunsă" în umbră. Considerăm grupul de matrice

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \det(M) = ad - bc = 1 \right\}.$$

Acest grup se numeşte **grupul special liniar**. Dată o matrice

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

definim aplicaţia f_M prin

$$f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Teorema 5.2.5: *Orice automorfism al lui $\mathbb{H}$ este de forma f_M, pentru o matrice $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Reciproc, orice $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ este de această formă.*

Demonstraţie. Vom face demonstraţia în mai mulţi paşi.

Pasul 1. Dacă $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, atunci

$$\mathrm{Im}(f_M(z)) = \frac{(ad-bc)\,\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0 \text{ pentru orice } z \in \mathbb{H}, \tag{5.2.3}$$

deci $f_M(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$.

Pasul 2. Dacă M şi M' sunt două matrice din $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, atunci $f_M \circ f_{M'} = f_{MM'}$. Acest lucru rezultă prin calcul direct, pe care nu îl vom mai face. Aşadar, f_M este inversabilă şi $(f_M)^{-1} = f_{M^{-1}}$.

Pasul 3. Date două puncte $z, w \in \mathbb{H}$, există $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ pentru care $f_M(z) = w$. Pentru a demonstra acest lucru, este suficient să arătăm că putem duce orice punct $z \in \mathbb{H}$ în i. Punem $d = 0$ în ecuaţia 5.2.3 şi vom avea

$$\mathrm{Im}(f_M(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz|^2}$$

şi putem alege un număr real c astfel încât $\mathrm{Im}(f_M(z)) = 1$. Mai departe, alegem matricea

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

astfel încât $\mathrm{Im}(f_{M_1}(z)) = 1$. Apoi, translatăm cu o matrice de forma

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ cu } b \in \mathbb{R},$$

pentru a aduce $f_{M_1}(z)$ în i. În final, aplicaţia f_M cu $M = M_2 M_1$ duce z în i.

Pasul 4. Dacă $\theta \in \mathbb{R}$, atunci matricea

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

este din $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, iar dacă $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ este aplicaţia conformă standard, atunci $F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}$ corespunde unei rotaţii cu unghiul -2θ în disc. Acest lucru rezultă din $F \circ f_{M_\theta} = e^{-2i\theta} F(z)$, care este uşor de verificat.

Pasul 5. Presupunem că $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ astfel încât $f(\beta) = i$, şi considerăm matricea $N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ pentru care $f_N(i) = \beta$. Atunci, $g = f \circ f_N$ satisface $g(i) = i$, deci $F \circ g \circ F^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ şi $F \circ g \circ F^{-1}(0) = 0$, aşadar cu lema lui Schwarz obţinem că $F \circ g \circ F^{-1}$ este o rotaţie. Cu *Pasul 4*, deducem că există $\theta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F \circ g \circ F^{-1} = F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}.$$

Prin urmare, $g = f_{M_\theta}$, şi deducem în final că $f = f_{M_\theta N^{-1}}$, adică f are forma dorită. ∎

Observația 5.2.6: O observaţie finală este că $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ nu este izomorf cu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Motivul este că matricele M şi $-M$ induc aceeaşi funcţie $f_M = f_{-M}$. De aceea, dacă identificăm M cu $-M$, obţinem un nou grup, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, numit **grupul special liniar proiectiv**, care este izomorf cu $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

5.3 Teorema lui Riemann de reprezentare conformă

În această secţiune vom demonstra rezultatul principal al acestui capitol. Problema de bază este să determinăm ce condiţii trebuie să îndeplinească un deschis Ω pentru a fi conform echivalent prin $F : \Omega \to \mathbb{D}$ cu discul unitate.

O serie de observaţii simple ne ajută să găsim mai întâi niste condiţii necesare. Mai întâi, pentru $\Omega = \mathbb{C}$ nu putem avea biolomorfisme $F : \Omega \to \mathbb{D}$, deoarece în acest caz, teorema Liouville implică F constantă. Prin urmare, este necesar să avem $\Omega \neq \mathbb{C}$. Apoi, cum $\mathbb{D}$ este conex, trebuie să impunem de asemenea ca Ω să fie conex. Mai mult, dacă Ω nu este simplu conex, atunci putem alege o curbă închisă $\gamma \subset \Omega$ şi un punct $z_0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$ şi $z_0 \notin \Omega$, astfel încât $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0} dz \neq 0$, deci Ω nu poate fi biolomorf cu $\mathbb{D}$. Este remarcabil că aceste condiţii necesare sunt şi suficiente pentru a avea asigurată existenţa unui biolomorfism de la Ω în $\mathbb{D}$.

Pentru a simplifica enunţul, vom numi o submulţime $\Omega \subset \mathbb{C}$ **proprie** dacă este nevidă şi nu este tot $\mathbb{C}$-ul.

Teorema 5.3.1: [Teorema Riemann de reprezentare conformă] *Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ o sublulţime proprie, conexă şi simplu conexă. Atunci, dat $z_0 \in \Omega$, există o unică aplicaţie conformă şi bijectivă $F : \Omega \to \mathbb{D}$ astfel încât*

$$F(z_0) = 0 \quad \text{şi} \quad F'(z_0) > 0.$$

Corolarul 5.3.2: *Orice două submulţimi proprii, conexe, simplu conexe ale lui $\mathbb{C}$ sunt conform echivalente.*

Evident, corolarul rezultă imediat din teoremă, folosind discul unitate ca pas intermediar. De asemenea, unicitatea din teoremă este uşor de justificat: dacă F şi G sunt două aplicaţii conforme şi bijective de la Ω în $\mathbb{D}$ care satisfac condiţiile din enunţ, atunci $H = F \circ G^{-1}$ este un automorfism al discului unitate care fixează originea. Aşadar, $H(z) = e^{i\theta} z$, şi cum $H'(0) > 0$, trebuie să avem $e^{i\theta} = 1$, de unde deducem $F = G$.

Restul demonstraţiei este dedicat justificării existenţei aplicaţiei conforme si bijective F. Ideea este următoarea: considerăm toate funcţiile olomorfe şi bijective $f : \Omega \to \mathbb{D}$ cu $f(z_0) = 0$. Dintre acestea, vream să alegem un f care "umple" tot $\mathbb{D}$-ul, iar acest lucru se poate realiza făcând $f'(z_0)$ cât de mare posibil. Prin această metodă, vom putea alege f ca limită a unui şir de funcţii olomorfe. Pentru toate acestea, avem nevoie de mai multe rezultate pregătitoare.

Teorema lui Montel

Definiția 5.3.3: Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ deschis. O familie $\mathcal{F}$ de funcţii olomorfe pe Ω se numeşte **normală** dacă orice şir din $\mathcal{F}$ are un subşir care converge uniform pe fiecare compact al lui Ω (limita nu trebuie neapărat să fie în $\mathcal{F}$).

Demonstraţia faptului că o familie este normală este, în practică, consecinţa a două proprietăţi corelate, *mărginirea uniformă* şi *echicontinuitatea*.

Definiția 5.3.4: Familia $\mathcal{F}$ se numeşte **uniform mărginită pe submulţimile compacte ale lui** Ω dacă pentru orice compact $K \subset \Omega$, există $B > 0$ astfel încât

$$|f(z)| \leq B \quad \text{pentru orice} \quad z \in K \text{ şi } f \in \mathcal{F}.$$

Definiția 5.3.5: Familia $\mathcal{F}$ se numeşte **echicontinuă** pe o mulţime compactă K, dacă pentru orice $\epsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $z, w \in K$ cu $|z - w| < \delta$, avem

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon \quad \text{pentru orice} \quad f \in \mathcal{F}.$$

Echicontinuitatea este o condiţie tare, pentru care este necesară continuitatea uniformă, în mod uniform în toată familia de funcţii. De exemplu, orice familie de funcţii derivabile pe $[0, 1]$ cu derivatele uniform mărginite, este echicontinuă. Pe de altă parte, familia $\{f_n\}_{n\geq 0}$ pe $[0, 1]$ definita prin $f_n(x) = x^n$ nu este echicontinuă, deoarece pentru orice $0 < x_0 < 1$ fixat, avem $|f_n(1) - f_n(x_0)| \to 1$ pentru $n \to \infty$.

Teorema 5.3.6: [**Montel**] *Fie $\mathcal{F}$ o familie de funcţii olomorfe pe Ω, care este uniform mărginită pe submulţimile compacte ale lui Ω. Atunci,*

1. *$\mathcal{F}$ este echicontinuă pe orice submulţime compactă $K \subset \Omega$.*
2. *$\mathcal{F}$ este o familie normală.*

Demonstraţie. Teorema are de fapt două părţi. Prima parte spune că $\mathcal{F}$ este echicontinuă, în ipoteza că $\mathcal{F}$ este o familie de funcţii *olomorfe* care este uniform mărginită pe submulţimile compacte ale lui Ω. Demonstraţia constă în aplicarea formulei Cauchy, deci este esenţial că funcţiile sunt olomorfe. Concluzia este în contrast cu situaţia din cazul funcţiior reale, pentru care avem contraexemplul $f_n(x) = \sin(nx)$ pe $(0, 1)$, care este o familie uniform mărginită. Cu toate acestea, această familie nu este echicontinuă şi nu are niciun subşir convergent uniform pe niciun subinterval compact al lui $(0, 1)$.

A doua parte a teoremei nu este de fapt de analiză complexă, în esenţă. Într-adevăr, faptul că $\mathcal{F}$ este familie normală rezultă numai din uniform mărginirea şi echicontinuitatea pe compacţi a lui $\mathcal{F}$. Acest rezultat este cunoscut ca *teorema Arzela-Ascoli* şi demonstraţia este, în esenţă un argument diagonal.

Avem de demonstrat convergenţa pe o submulţime compactă arbitrară a lui Ω, aşa că este util să introducem următoarea noţiune: un şir de compacţi $\{K_l\}_{l=1}^{\infty}$ se numeşte **exhaustiune** a lui Ω dacă

1. K_l este conţinut în interiorul lui K_{l+1} pentru fiecare $l \geq 1$.

2. Orice compact $K \subset \Omega$ este conţinut într-un K_l pentru un $l \geq 1$. În particular, $\Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$.

Lema 5.3.7: *Orice deschis $\Omega \subset \mathbb{C}$ are o exhaustiune.*

Demonstraţie. Dacă Ω este mărginit, punem K_l să fie mulţimea punctelor din Ω care sunt la distanţă cel puţin $\frac{1}{l}$ de $\partial\Omega$. Dacă Ω nu este mărginit, definim K_l în acelaşi mod, dar punem şi condiţia suplimentară $|z| \leq l$ pentru orice $z \in K_l$. ■

Putem începe acum demonstraţia teoremei Montel. Fie $K \subset \Omega$ un compact şi alegem $r > 0$ suficient de mic astfel încât $D_{3r}(z) \subset \Omega$ pentru orice $z \in K$. Este suficient să alegem r astfel încât $3r$ este mai mic decât distanţa de la K la $\partial\Omega$. Fie $z, w \in K$ cu $|z - w| < r$ şi fie γ conturul reprezentat de cercul $\partial D_{2r}(w)$. Atunci, cu formula Cauchy, vom avea

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right] d\zeta.$$

Observăm că

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| = \frac{|z - w}{|\zeta - z||\zeta - w|} \leq \frac{|z - w|}{r^2}$$

deoarece $\zeta \in \gamma$ şi $|z - w| < r$. Aşadar,

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi r}{r^2} B|z - w|,$$

unde B este marginea uniformă a familiei $\mathcal{F}$ pe compactul ce constă în punctele din Ω la distanţă $\leq 2r$ de K. Prin urmare, $|f(z) - f(w)| < C|z - w|$, iar această inegalitate este adevărată pentru orice $z, w \in K$ cu $|z - w| < r$ şi $f \in \mathcal{F}$, deci $\mathcal{F}$ este echicontinuă.

Pentru a demonstra a doua parte a teoremei, alegem $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ un şir din $\mathcal{F}$ şi K compact în Ω. Alegem un şir de puncte $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ care este dens în Ω. Cum $\{f_n\}$ este uniform mărginită, există un subşir $\{f_{n,1}\} = \{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{3,1}, \ldots\}$ al lui $\{f_n\}$ pentru care $f_{n,1}(w_1)$ converge. Din $\{f_{n,1}\}$ extragem un subşir $\{f_{n,2}\} = \{f_{1,2}, f_{2,2}, f_{3,2}, \ldots\}$ al lui $\{f_{n,1}\}$ pentru care $f_{n,2}(w_2)$ converge. Continuăm acest procedeu, şi extragem un subşir $\{f_{n,j}\}$ al lui $\{f_{n,j-1}\}$ pentru care $f_{n,j}(w_j)$ converge. În final, considerăm şirul diagonal $g_n = f_{n,n}$. Din construcţie, $\{g_n(w_j)\}_{n\geq 1}$ converge pentru orice $j \geq 1$, şi afirmăm că echicontinuitatea asigură că g_n converge uniform pe K. Dat $\epsilon > 0$, alegem $\delta > 0$ ca în definiţia echicontinuităţii, şi observăm că pentru un J suficient de mare, mulţimea K este inclusă în reuniunea discurilor $D_\delta(w_1), D_\delta(w_2), \ldots, d_\delta(w_J)$. Alegem N suficent de mare astfel încât pentru $n, m > N$ să avem

$$|g_m(w_j) - g_n(w_j)| \leq \epsilon \quad \text{pentru toţi} \quad j = 1, \ldots, J.$$

Aşadar, pentru $z \in K$, avem $z \in D_\delta(w_j)$ pentru un $1 \leq j \leq J$, şi atunci

$$|g_n(z) - g_m(z)| \leq |g_n(z) - g_n(w_j)| + |g_n(w_j) - g_m(w_j)| + |g_m(w_j) - g_m(z)| < 3\epsilon$$

pentru orice $n, m > N$. Deci $\{g_n\}$ converge uniform pe K.

În final, avem nevoie de încă o un argument de diagonalizare pentru a obţine subşirul care converge uniform pe *orice* compact din Ω. Fie $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_l \subset \ldots$ o exhaustiune a lui Ω, şi presupunem că $\{g_{n,1}\}$ este subşirul din şirul iniţial $\{f_n\}$ care converge uniform pe K_1. Extragem din $\{g_{n,1}\}$ un subşir $\{g_{n,2}\}$ care converge uniform pe K_2. Continuăm apoi acest procedeu. Apoi, $\{g_{n,n}\}$ este un subşir al lui $\{f_n\}$ care converge uniform pe fiecare K_l, şi cum $\{K_l\}_{l\geq 1}$ formează o exhaustiune a lui Ω, şirul $\{g_{n,n}\}$ converge uniform pe orice compact din Ω. ■

Mai avem nevoie de încă un rezultat pentru a putea demonstra Teorema 5.3.1.

Propoziția 5.3.8: *Dacă $\Omega \subset \mathbb{C}$ este conexă şi $\{f_n\}$ este un şir de funcţii olomorfe şi injective pe Ω care converge uniform pe orice submulţime compactă a lui Ω la o funcţie olomorfă f, atunci f este ori injectivă, ori constantă.*

Demonstraţie. Facem demonstraţia prin reducere la absurd. Presupunem că f nu este nici constantă şi nici injectivă. Atunci, există $z_1, z_2 \in \Omega$, $z_1 \neq z_2$, astfel încât $f(z_1) = f(z_2)$. Definim un nou şir prin $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$, aşadar g_n nu are niciun alt zero în afară de z_1, şi şirul $\{g_n\}$ converge uniform pe submulţimile compacte din Ω la $g(z) = f(z) - f(z_1)$. Cum f nu este constantă, g nu este identic nulă, iar z_2 este un zero izolat pentru g (deoarece Ω este conex). Deducem că

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}d\zeta,$$

unde γ este un cerc mic centrat în z_2, ales astfel încât g nu se anulează pe $\gamma \cup \mathrm{Int}(\gamma) \setminus \{z_2\}$. Mai departe, $\frac{1}{g_n}$ converge uniform la $\frac{1}{g}$ pe γ, şi cum $g_n' \to g'$ uniform pe γ, avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(\zeta)}{g_n(\zeta)}d\zeta \to \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}d\zeta.$$

Dar f_n este injectivă, deci g_n nu are zerouri în interiorul lui γ, aşadar

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(\zeta)}{g_n(\zeta)}d\zeta = 0,$$

şi astfel am obţinut o contradicţie. ∎

Demonstraţia teoremei Riemann de reprezentare conformă

Având toate rezultatele tehnice din secţiunile anterioare la dispoziţie, demonstraţia teoremei de reprezentare conformă este foarte elegantă. Vom împărţi demonstraţia în trei paşi.

Pasul 1. Presupunem că Ω este un domeniu simplu conex propriu al lui $\mathbb{C}$. Vrem să demonstrăm că Ω este conform echivalent cu un deschis din discul unitate $\mathbb{D}$ care conţine originea.

Alegem un $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ (există un astfel de α, deoarece Ω este submulţime proprie), şi observăm că putem defini funcţia olomorfă

$$f(z) = \log(z - \alpha).$$

Prin urmare, $e^{f(z)} = z - \alpha$, de unde vedem, în particular, că f este injectivă. Alegem un $w \in \Omega$, şi observăm că

$$f(z) \neq f(w) + 2\pi i \qquad \text{pentru orice} \qquad z \in \Omega,$$

pentru că altfel, compunând cu funcţia exp, obţinem $z = w$, deci $f(z) = f(w)$, care este o contradicţie. De fapt, $f(z)$ stă la distanţă strict pozitivă de $f(w) + 2\pi i$, în sensul că există un disc centrat în $f(w) + 2\pi i$ care nu conţine niciun punct din $f(\Omega)$. Altfel, ar exista un şir $\{z_n\}$ în Ω pentru care $f(z_0) \to f(w) + 2\pi i$. Compunem cu exp şi, cum exp e continuă, obţinem $z_n \to w$, şi de aici $f(z_n) \to f(w)$, care este o contradicţie. În final, considerăm aplicaţia

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - (f(w) + 2\pi i)}.$$

Cum f este injectivă, la fel este şi F, deci $F : \Omega \to F(\Omega)$ este o aplicaţie conformă. Mai mult, din argumentele anterioare, avem $F(\Omega)$ mărginită. Prin urmare, putem translata şi rescala F pentru a obţine o aplicaţie conformă de la Ω într-o submulţime deschisă a lui $\mathbb{D}$ ce conţine 0.

Pasul 2. Folosind *Pasul 1*, putem presupune că $0 \in \Omega \subset \mathbb{D}$. Considerăm familia de funcţii

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \to \mathbb{D} : f \text{ olomorfă, injectivă, şi } f(0) = 0\}.$$

Mai întâi, observăm că $\mathcal{F}$ este nevidă, deoarece conţine funcţia $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. De asemenea, $\mathcal{F}$ este uniform mărginită prin construcţie, pentru că toate funcţiile iau valori numai în $\mathbb{D}$.

Mai departe, vrem să găsim o funcţie $f \in \mathcal{F}$ care maximizează $|f'(0)|$. Mai întâi, observăm că $|f'(0)|$ sunt uniform mărginite în raport cu $f \in \mathcal{F}$. Acest lucru rezultă din inegalitatea Cauchy aplicată pentru f' pe un disc mic centrat în 0. Apoi, notăm

$$s = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|,$$

şi alegem un şir $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ pentru care $|f_n'(0)| \to s$ pentru $n \to \infty$. Cu teorema lui Montel (Teorema 5.3.6), acest şir are un subşir care converge uniform pe compacţii din Ω la o funcţie olomorfă f pe Ω. Cum $\mathrm{id}_{\mathbb{D}} \in \mathcal{F}$, avem $s \geq 1$, deci f este neconstantă, aşadar cu Propoziția 5.3.8 deducem că f este injectivă. De asemenea, din continuitate, avem $|f(z)| \leq 1$ pentru orice $z \in \Omega$, iar principiul maximului modulului ne asigură că $|f(z)| < 1$ pe Ω. În plus, avem şi $f(0) = 0$. În concluzie, $f \in \mathbb{F}$ şi $|f'(0)| = s$.

Pasul 3. În acest ultim pas, demonstrăm că f este o aplicaţie bijectivă de la Ω în $\mathbb{D}$. Cum f este deja injectivă, este suficient să arătăm că f este şi surjectivă. Daca acest lucru nu ar fi adevărat, atunci putem construi $f \in \mathcal{F}$ cu $|f'(0)| > s$. Pentru a justifica acest lucru, să presupunem că există $\alpha \in \mathbb{D}$ pentru care $f(z) \neq \alpha$, pentru orice $z \in \Omega$, şi să considerăm automorfismul $\psi_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ care interschimbă α cu 0,

$$\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

Cum Ω este simplu conexă, la fel este şi $U = (\psi_\alpha \circ f)(\Omega)$, şi, mai mult, U nu conţine 0. Deci este posibil să definim funcţia radical pe U, prin

$$g(w) = e^{\frac{1}{2} \log w}.$$

Apoi, considerăm funcţia

$$F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f.$$

Afirmăm că $F \in \mathcal{F}$. Evident, F este olomorfă şi $F(0) = 0$. De asemenea, valorile lui F sunt toate în $\mathbb{D}$, deoarece acest lucru se întâmplă pentru toate funcţiile ce o compun pe F. În final, F este injectivă, pentru că $\psi_{g(\alpha)}$ şi ψ_α sunt injective, fiind automorfisme, g este injectivă pentru că este funcţia radical, iar f este injectivă din ipoteza *Pasului 3*. Dacă h este funcţia $h(w) = w^2$, atunci avem

$$f = \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1} \circ F = \Psi \circ F.$$

Dar $\Psi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\Psi(0) = 0$, şi nu este injectivă, deoarece ψ_α^{-1} şi $\psi_{g(\alpha)}^{-1}$ sunt, iar h nu este. Din lema lui Schwarz, deducem că $|\Psi'(0)| < 1$. Aşadar, deoarece

$$f'(0) = \Psi'(0) F'(0),$$

deducem că

$$|f'(0)| < |F'(0)|,$$

inegalitate ce contrazice maximalitatea lui $|f'(0)|$ în $\mathcal{F}$. În final, pentru a încheia demonstraţia, înmulţim f cu un număr complex de modul 1, astfel încât $f'(0) > 0$.