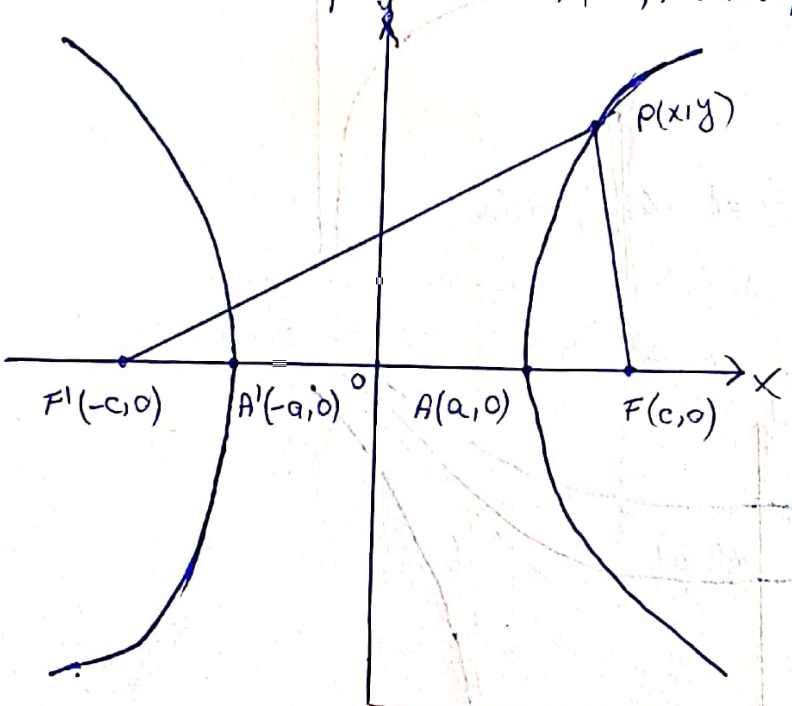
Miloşteanu Andreea
Mihoci Valentina

Tutoriatul 8
Geometrie I

8.12.2021

Hiperbola

Def. Hiperbola reprezintă locul geometric al punctelor P din plan care verifică $|PF-PF'|=2a, a>0$, unde F şi F' sunt puncte distincte, fixe, numite *focare*.



Avem relația $c^2=a^2+b^2$.
Ox = axa transversă (axa mare)
O = centrul de simetrie
$A(a,0), A'(-a,0)$ = vârfurile hiperbolei
$F(c,0), F'(-c,0)$ = focarele hiperbolei
excentricitate: $e=\frac{c}{a}$

Obs. Ecuația redusă: $\boxed{\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ ecuația unei hiperbole de centru $O(0,0)$.

$\boxed{\mathcal{H}: \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$ ecuația unei hiperbole de centru $P_0(x_0,y_0)$.

1° $\text{Int } \mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>1$

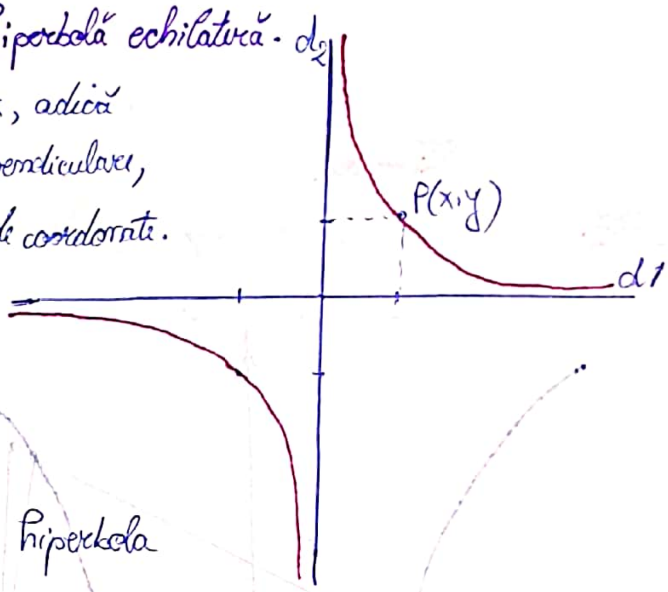
2° $\text{Ext } \mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<1$

Obs. Dacă considerăm $\mathcal{H}: \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, atunci $A(0,a), A'(0,-a)$ sunt vârfurile acestei hiperbole, focarele sunt $F(0,c), F'(0,-c)$, axa transversă este Oy, iar centrul de simetrie este $O(0,0)$.

Obs. $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. $d_1 \cup d_2: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$ → asimptotele hiperbolei

Propoziție $\text{dist}(P,d_1)\cdot\text{dist}(P,d_2)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, unde $P\in\mathcal{H}$, iar d_1 şi d_2 sunt asimptotele hiperbolei.

Def. O hiperbolă $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ se numește hiperbolă echilateră.



O hiperbolă echilateră are asimptotele $d_1 \cup d_2: y = \pm x$, adică prima și a doua bisectoare. Deoarece acestea sunt perpendiculare, putem să considerăm dreptele d_1 și d_2 ca fiind axele de coordonate.

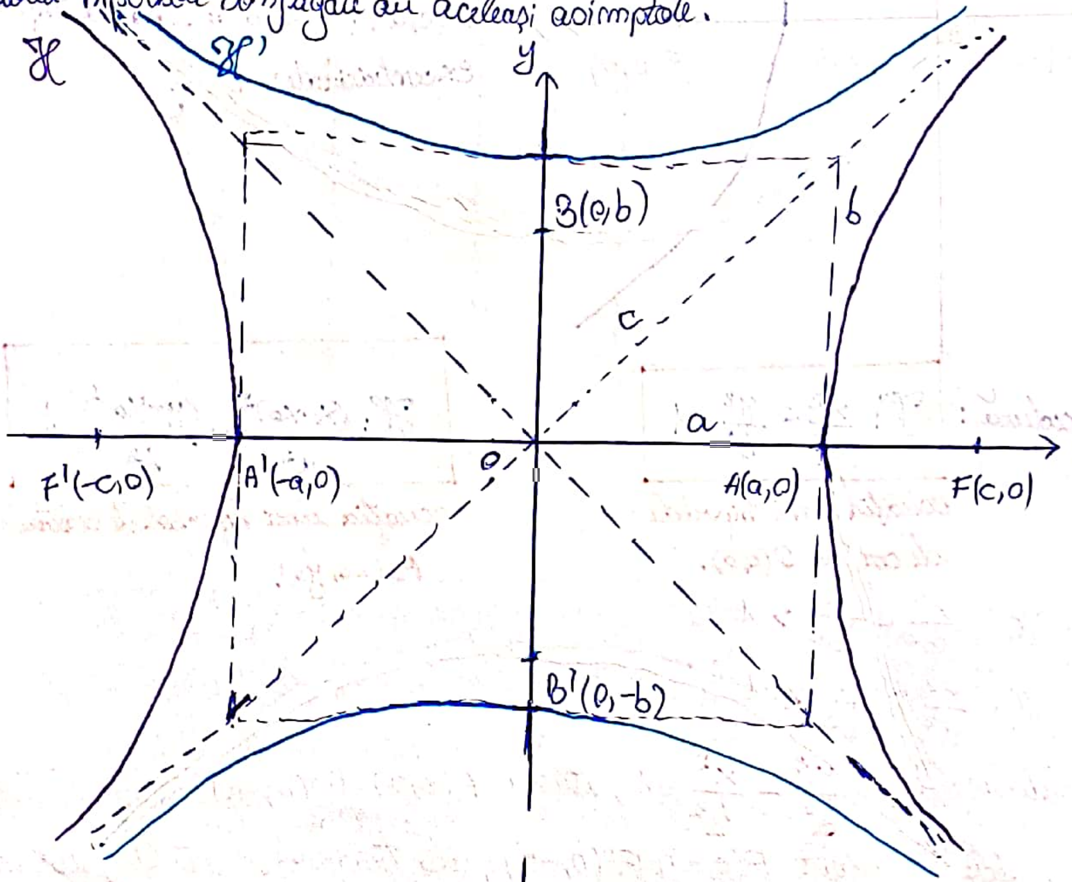
Avem $P(x,y) \in \mathcal{H}$.

$$dist(P,d_1) \cdot dist(P,d_2) = xy = \frac{a^4}{2a^2} = \frac{a^2}{2} = K > 0$$

Așadar, $\mathcal{H}: y = \frac{K}{x}, K > 0$

Def. Hiperbola conjugată lui $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ este hiperbola $\mathcal{H}': \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \iff \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Obs. Cele două hiperbole conjugate au aceleași asimptote.



$\mathcal{H}$: $A(a,0)$, $A'(-a,0)$ – vârfuri

Ox axa transversă

$e = \frac{c}{a} > 1$

$\mathcal{H}'$: $B(0,b)$, $B'(0,-b)$ – vârfuri

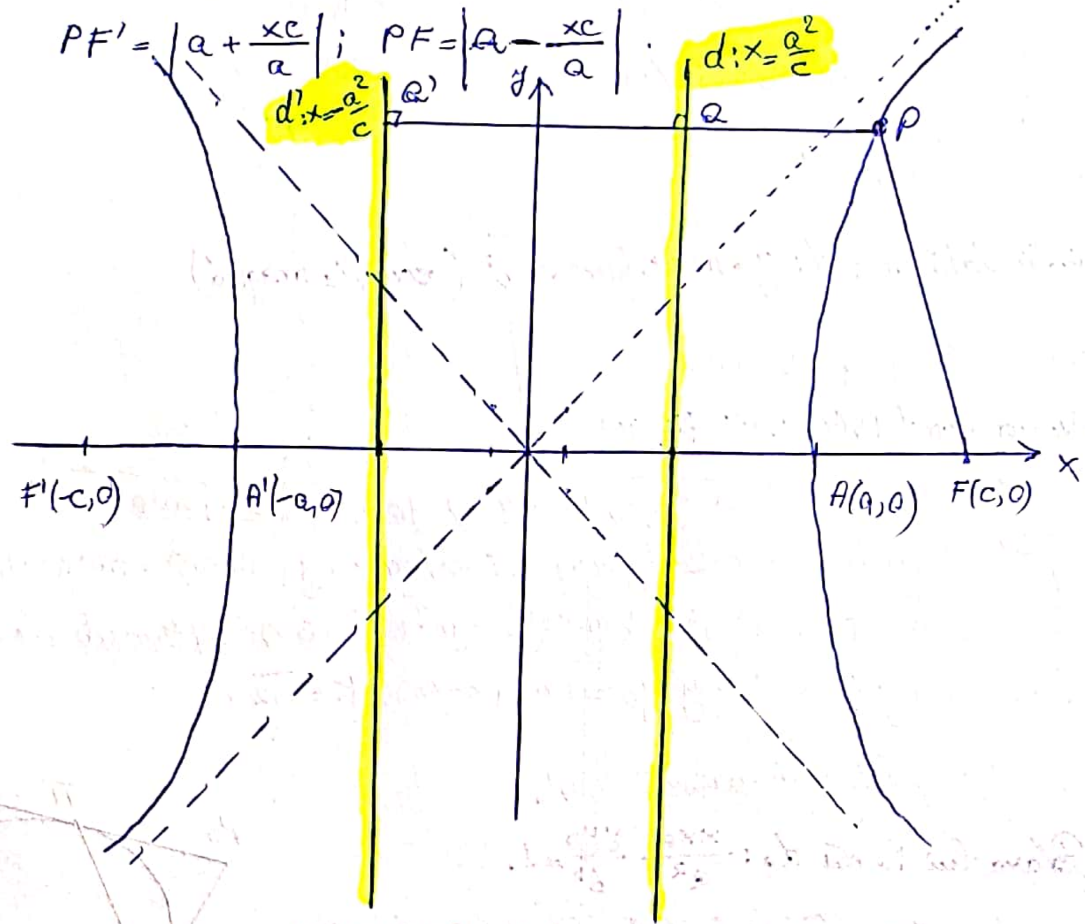
Oy axa transversă

$e' = \frac{c}{b} > 1$

Propoziție Hiperbola poate fi definită ca locul geometric al punctelor $P(x,y)$ care verifică

$\frac{PF}{dist(P,d)} = \frac{PF'}{dist(P,d')} = e$; unde $d \cup d' : x = \pm\frac{a^2}{c}$ (directoarele).

$PF' = \left|a + \frac{xc}{a}\right|$; $PF = \left|a - \frac{xc}{a}\right|$



Obs. Intersecția unei drepte cu o hiperbolă

Fie hiperbola $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ și dreapta $\tilde{d} : y = mx + n$.

$\mathcal{H} \cap \tilde{d} : x^2(b^2 - m^2a^2) - 2mna^2x - (n^2+b^2)a^2 = 0$.

Cazul I Dacă $b^2 - m^2a^2 = 0$, atunci $m = \pm\frac{b}{a}$ ($\tilde{d} \parallel$ cu asimptotele)

a) $n = 0 \Rightarrow$ intersecția este mulțimea vidă.

b) $n \neq 0 \Rightarrow$ fiecare dreaptă intersectează hiperbola într-un punct.

Cazul II Dacă $b^2 - m^2a^2 \neq 0$, atunci avem o ecuație de gradul al doilea cu

$\Delta = 4m^2n^2a^4 + 4(b^2 - m^2a^2)(n^2+b^2)a^2$.

a) $\Delta > 0$, dreapta intersectează hiperbola în două puncte.

b) $\Delta < 0$, intersecția este mulțimea vidă.

c) $\Delta = 0$, dreapta este tangentă hiperbolei.

Probleme de tangență la hiperbolă

1.° Tangenta într-un punct $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$; $d: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ (procedeul de dedublare)

Dem Tangenta într-un punct $P_0(x_0, y_0)$ este $y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 y y_0 - a^2 y_0^2 = b^2 x x_0 - b^2 x_0^2 \,/ : a^2 b^2$

$\Rightarrow \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$

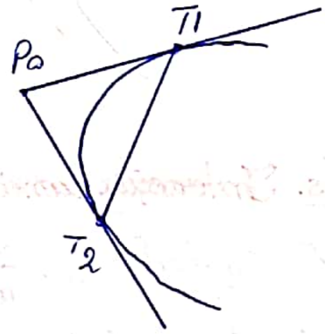
2.° Tangenta de direcție dată m: $d: y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 - b^2}$ (ecuația magică)

Dem. Avem $\Delta = 0 \Rightarrow n^2 = m^2a^2 - b^2 > 0$.

3.° Tangentele dintr-un punct $P_0(x_0, y_0) \in \text{Ext}\, \mathcal{H}$

Luăm ecuația magică $d: y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 - b^2}$, $P_0 \in d \Rightarrow y_0 = mx_0 \pm \sqrt{m^2a^2 - b^2}$.
Deducem ecuația pătratică a tangentelor dintr-un punct exterior $(y_0 - mx_0)^2 = m^2a^2 - b^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ecuația de gradul al II-lea $m^2(x_0^2 - a^2) - 2mx_0y_0 + y_0^2 + b^2 = 0$ și aflăm cele două pante m_1 și m_2. Găsim tangentele în P_0: $y - y_0 = m_K(x - x_0)$, $K = \overline{1,2}$.

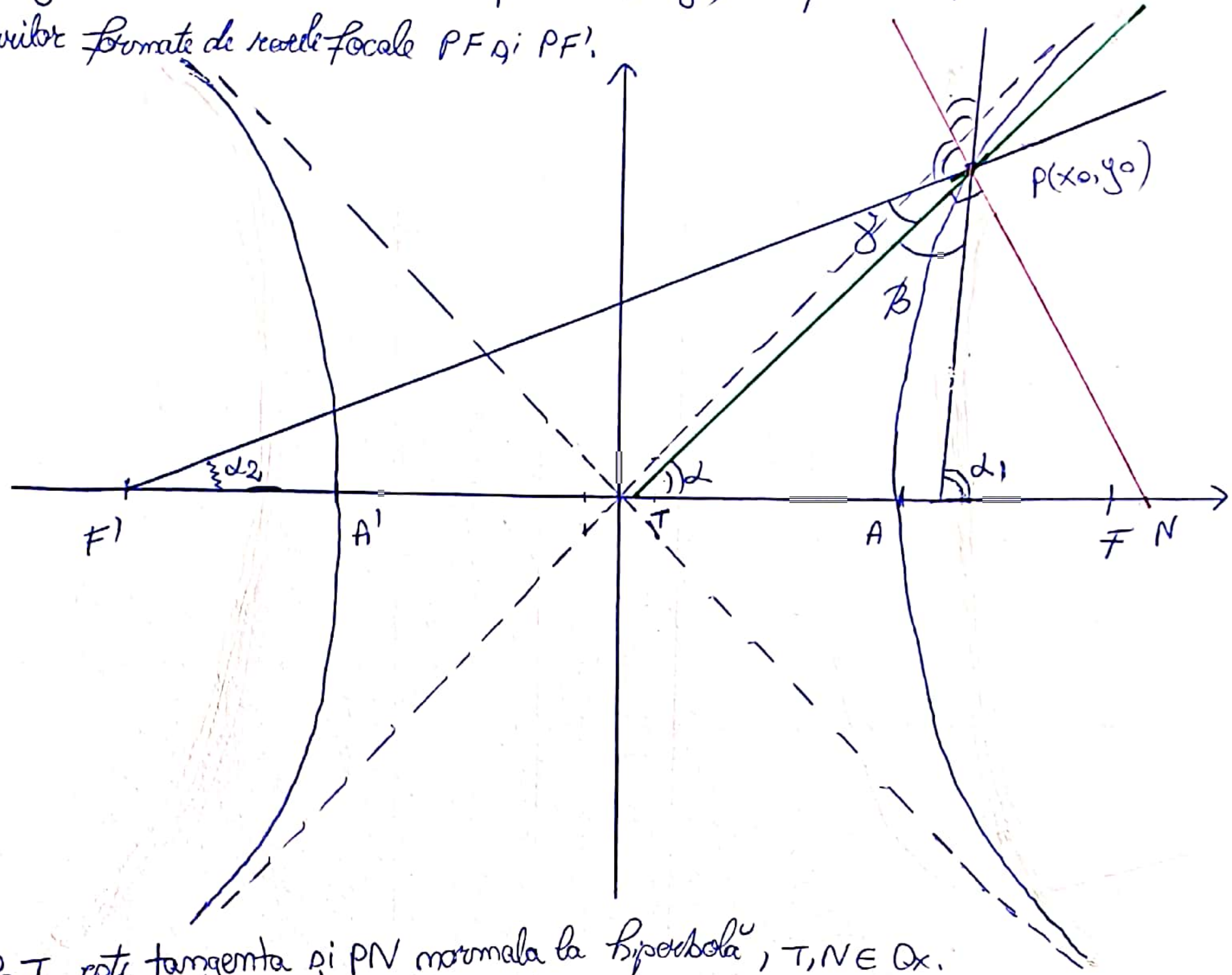
Obs. Polara unui punct P_0, diferit de vârfurile A, A',
(ca la elipsă) Polara lui P_0 este $d_0: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.
Cum $T_1, T_2 \in d_0 \Rightarrow d_0 = T_1T_2$. Deci polara lui P_0 este coarda care unește punctele de tangență T_1 și T_2.



Def. Latus rectum este coarda care trece prin focarul F, respectiv F' și este paralelă cu directoarele sau este perpendiculară pe axa transversă.
Lungimea semilatus rectum este $l = a(e^2 - 1)$.

Proprietatea optică a hiperbolei

Tangenta și normala sa într-un punct $P(x_0,y_0)$ la hiperbolă reprezintă bisectoarele unghiurilor formate de razele focale PF și PF'.



P_0T este tangenta și PN normala la hiperbolă, $T, N \in Ox$.

$m_{PF} = tg\,\alpha_1 = \dfrac{y_0}{x_0-c}$; $m_{PF'} = tg\,\alpha_2 = \dfrac{y_0}{x_0+c}$

$PT: \dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1 \Rightarrow m_{PT} = tg\,\alpha = \dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$; $m_{PN} = -\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}$

$$tg\,\beta = tg(\alpha_1-\alpha) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha}{1+tg\alpha_1 tg\alpha} = \frac{\frac{y_0}{x_0-c} - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}}{1+\frac{y_0}{x_0-c}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}} = \frac{a^2y_0^2 - b^2x_0^2 + b^2cx_0}{a^2x_0y_0 - a^2cy_0 + b^2x_0y_0} =$$

$$= \frac{-a^2b^2 + b^2cx_0}{c^2x_0y_0 - a^2cy_0}$$

$P_0(x_0,y_0) \in \mathcal{H}$; $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x_0^2b^2 - y_0^2a^2 = a^2b^2$; $c^2 = a^2+b^2$

$tg\,\beta = \dfrac{b^2(-a^2+cx_0)}{y_0c(-a^2+cx_0)} = \dfrac{b^2}{y_0c}$

$\gamma = \alpha - \alpha_2 \Rightarrow tg\,\gamma = \dfrac{b^2}{y_0c}$

$\Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow PT$ – bis. $\widehat{FPF'}$

$PN \perp PT$

$\Rightarrow PN$ – bisectoarea

Scanned with CamScanner

Hiperbola

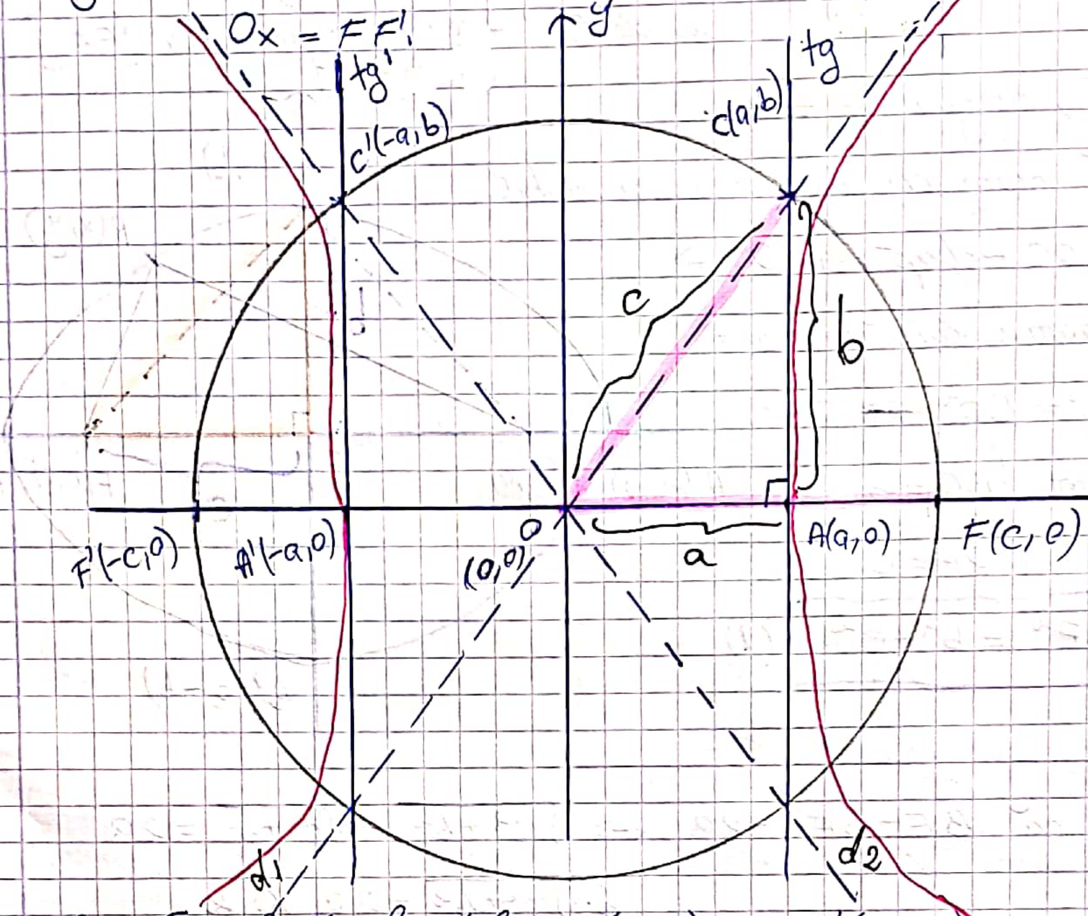
Avem relația $b^2 = c^2 - a^2$, unde $a < c$, $a > 0$.

Def. LG al punctelor P din plan care verifică

$\boxed{|PF - PF'| = 2a}$; F, F' puncte fixe

P arbitrar din plan; $P(x, y)$

Alegem convenabil axele a.î. Oy să fie mediatoarea lui $[FF']$ și $Ox = FF'$



Avem $\begin{cases} \text{vârfurile hiperbolei: } A(a,0) \text{ și } A'(-a,0) \\ \text{focarele: } F(c,0) \text{ și } F'(-c,0) \end{cases}$

Pentru a desena asimptotele, se duc în A și A' perpendiculare la Ox

$\begin{cases} tg \perp Ox, \ tg \cap Ox = \{A(a,0)\} \\ tg' \perp Ox, \ tg' \cap Ox = \{A'(-a,0)\} \end{cases}$ (tangentele în A și A' la hiperbolă)

Apoi se descrie cercul cu centrul $O(0,0)$ și raza $OF = c$ care taie cele două perpendiculare în C, respectiv C'.

Știm că $C, A \in tg \Rightarrow x_A = x_C = a$, deci avem $C(a, b)$ ales

Analog, $C'(-a, b)$

Avem $\mathscr{C}(O(0,0), OF)$. Știm că $C(a,b) \in \mathscr{C}(O(0,0), OF)$,

deci $\boxed{OC = OF = c}$

Avem ΔOAC - drept. în A $\Rightarrow$ teorema lui Pitagora $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{OC^2 = OA^2 + AC^2}$ (1)

$OC^2 = OF^2 = c^2$

$OA^2 = a^2$

$AC = \sqrt{(a-a)^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = b$, deci $AC^2 = b^2$

Relația (1) devine $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$.