Seminarul 2

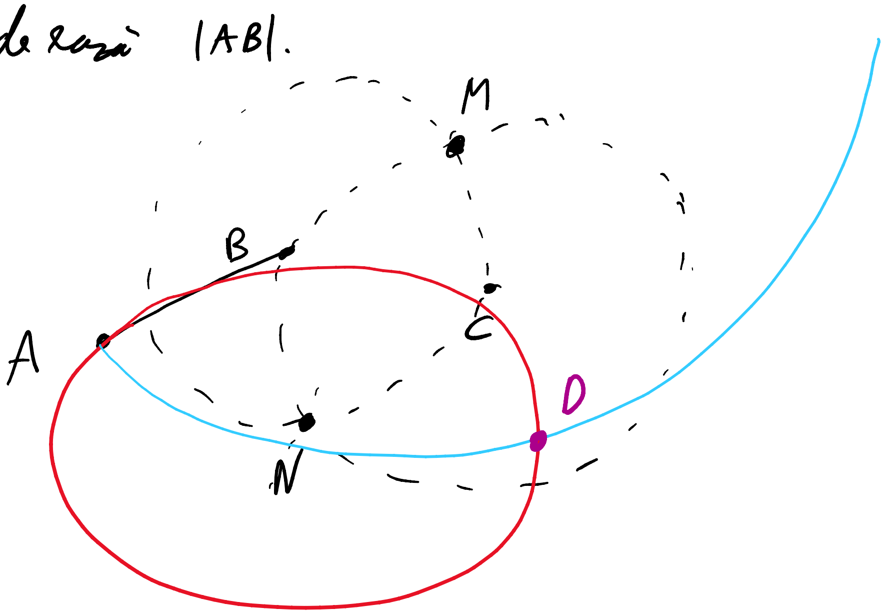
Tuesday, October 12, 2021 12:51 PM

Compas rigid $\Rightarrow$ compas nerigid

fără riglă

Adică: A B C

Vreau să fac cu compasul nerigid un cerc cu centru în C de rază $|AB|$.



$|AN| = |ND|$

$|AM| = |MD|$

$\Downarrow$ Exc!

$|AB| = |CD|$

Calcul vectorial

Exc 1 Inegalitatea Cauchy-Schwarz:

v, w vectori $\Rightarrow |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

Curs $\langle v, w\rangle = \cos(\varphi) \|v\| \cdot \|w\|$

Altfel

Fie $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$0 \le \langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle \overset{\text{biliniar}}{=} \langle v,v\rangle + \langle \lambda w, \lambda w\rangle + \langle v, \lambda w\rangle + \langle \lambda w, v\rangle = \underbrace{\|v\|^2 + \lambda^2\|w\|^2 + 2\lambda\langle v,w\rangle}_{\text{expresie de grad 2 în } \lambda}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \Delta \le 0 \Longleftrightarrow 4(\langle v,w\rangle)^2 - 4\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \le 0$$

$$\Longleftrightarrow |\langle v,w\rangle| \le \|v\| \cdot \|w\|$$

Mai mult, "=" când?

"=" când $\Delta = 0 \Longleftrightarrow$ rădăcini egale și reale

$\Updownarrow$

$\exists \lambda$ a.î. $\langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle = 0$

$\Updownarrow$

$\exists \lambda$ a.î. $v+\lambda w = 0$

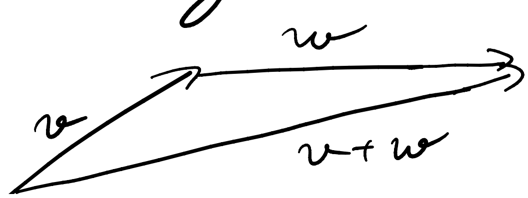
$\Updownarrow$

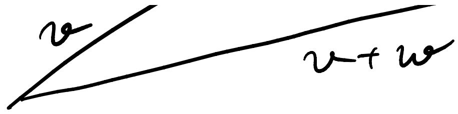
$\exists \lambda$ a.î. $v = -\lambda w$ i.e. sunt coliniari!

Deci $|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\cdot\|w\|$ și "=" $\Longleftrightarrow$ v și w sunt coliniari!

---

2. Inegalitatea triunghiului:





$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Dem $\quad \|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle + 2\langle v,w\rangle$

$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v,w\rangle \overset{C-S}{\leq} \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\|$

$= (\|v\| + \|w\|)^2$

$\Rightarrow \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ și "=" $\Leftrightarrow$ "=" în Cauchy-Schwarz

$\Leftrightarrow$ v și w coliniare

---

3. $\boxed{\text{ABCD paralelogram}}$ și M, N, P, Q puncte a.î.

$\vec{AM} + \vec{CP} = \vec{BN} + \vec{DQ}$.

Dem că și $\boxed{\text{MNPQ e paralelogram}}$.

definiția egalității de vectori

Dem

Din $\vec{AB} = \vec{DC}$ și $\vec{AM} + \vec{CP} = \vec{BN} + \vec{DQ}$

Vrem $\vec{MN} = \vec{QP}$.

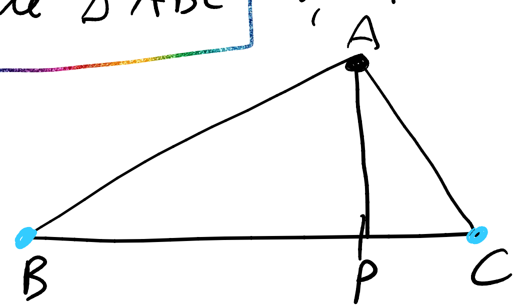
$$\left.\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AB} + \vec{BM} \\ \vec{CP} &= \vec{CQ} + \vec{QP} \\ \vec{BN} &= \vec{BM} + \vec{MN} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{\vec{AB}} + \cancel{\vec{BM}} + \cancel{\vec{CQ}} + \vec{QP} = \cancel{\vec{BM}} + \vec{MN} + \cancel{\vec{DC}} + \cancel{\vec{CQ}}$$

$\Rightarrow \vec{QP} = \vec{MN}$ $\qquad$ Q.E.D.

$\vec{BN} = \vec{BM} + \vec{MN}$ $\Rightarrow \vec{QP} = \vec{MN}$

$\vec{DQ} = \vec{DC} + \vec{CQ}$

Exc 4 $\boxed{\text{Fie } \triangle ABC}$ și P a.î. $\boxed{\vec{BP} = k\vec{PC}}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.



$$\Rightarrow \vec{AP} = \frac{1}{k+1}\vec{AB} + \frac{k}{k+1}\vec{AC}$$ suma $= 1$

Dem $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{AB} + k\vec{PC} = \vec{AB} + k(\vec{AC} - \vec{AP})$

$\Leftrightarrow (k+1)\vec{AP} = \vec{AB} + k\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AP} = \frac{1}{k+1}\vec{AB} + \frac{k}{k+1}\vec{AC}$

dacă $k = -1$

$\downarrow$

$\vec{BP} = \vec{CP} \Leftrightarrow B = C$ caz pe care îl excludem!

Întrebări 1. A poate fi și pe dreapta BC?

Știm că $\vec{AP} = \frac{1}{k+1}\vec{AB} + \frac{k}{k+1}\vec{AC}$ are loc pt orice A!

(nu am folosit că A, B, C necoliniare)

(nu am folosit că A, B, C necoliniare)

2. Dacă știm că punctele B, P, C sunt a.î.

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{AC}, \quad \boxed{\forall A \text{ în plan}}}$$

$$\Downarrow$$

B, P, C sunt coliniare

Dem Alegem $A = P \Rightarrow \vec{0} = \lambda \overrightarrow{PB} + (1-\lambda)\overrightarrow{PC}$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)\overrightarrow{PC} = \lambda \overrightarrow{PB}$

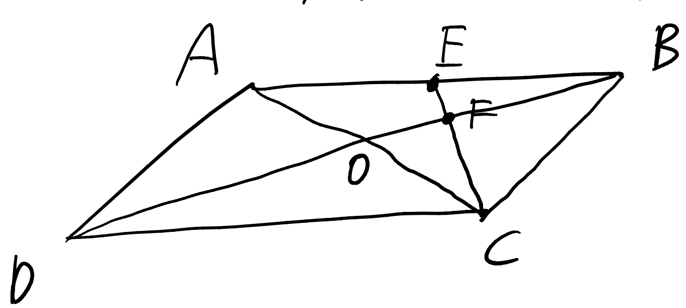
$\Rightarrow B, C, P$ coliniare

5. $ABCD$ paralelogram și: E a.î. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$ (E mijl lui AB)

F a.î. $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EF}$ (F pe $[EC]$, la o treime de E și 2 treimi de F)

Dem că $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BF}$

(B, F, D coliniare)



Dem I Vectorial $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.$

<u>II Sintetic</u> În ΔCAB, CE mediană

F centrul de greutate din ipoteză

BD mediană (în paralelogram, diag se taie în jumătăți egale)

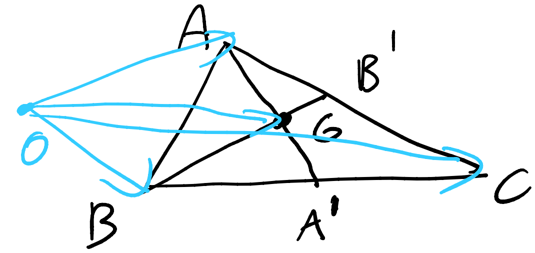
$\Downarrow$ $F \in BD$.

6. ΔABC și G un punct.

Dem că G centrul de greutate $\Leftrightarrow$ $\forall$ O în plan,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

<u>Dem</u>



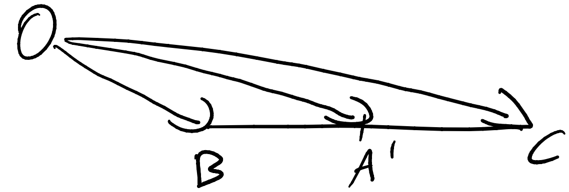
Ex 4: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA'}$ (G e la o treime de bază și 2 treimi de vârf)

$$\left(\overrightarrow{AG} = \underset{k}{\underset{\parallel}{2}}\,\overrightarrow{GA'} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA'} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA'}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA'} \overset{Exc\,4}{=\!=} \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$



"⇐" Știu că avem un pct în plan G a.î.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}, \forall O$$

Fie G' centrul de greutate al ΔABC.

Vreau $G = G'$.

am dem la „⇒"

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

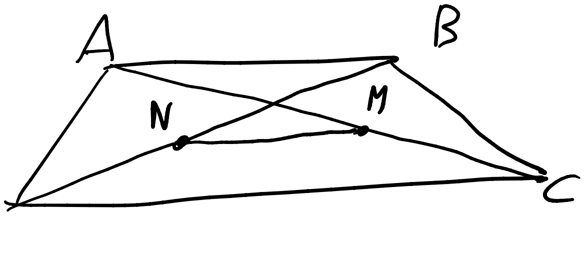
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'}, \forall O \text{ în plan} \Rightarrow G = G'$$

Temă Exe 7.

Exc 9 a) Dem că, într-un trapez, dreapta care unește

Exc 9 a) Dem că, într-un trapez, dreapta care unește mijloacele diagonalelor e paralelă cu bazele.



$MN \parallel AB$

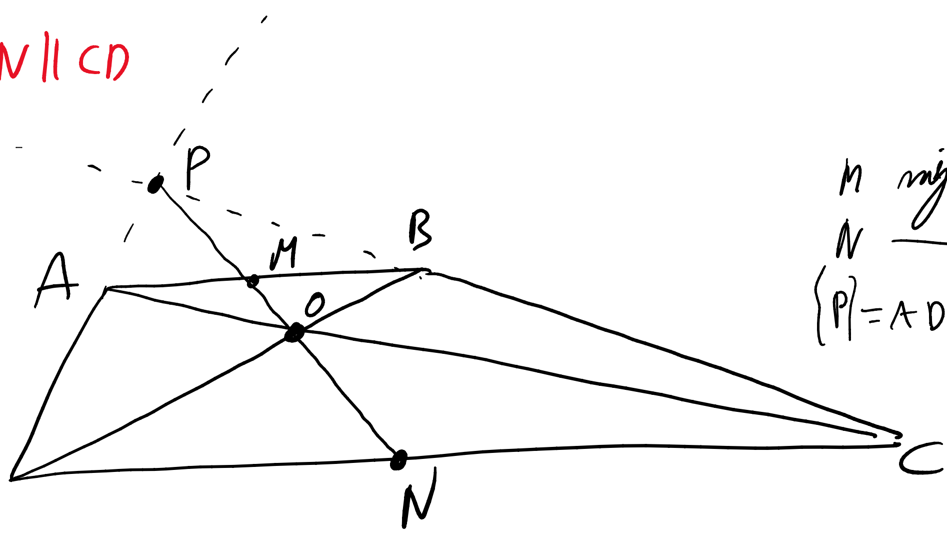
Dem $\boxed{\vec{MN}} = \vec{MC} + \vec{CN} = \vec{MC} + \vec{CD} + \vec{DN} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DB}$

$= \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DC}) + \vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DB} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD}$

$\xRightarrow[\vec{AB} = \lambda \vec{CD}]{AB \parallel CD} \frac{\lambda}{2}\vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{CD} = \boxed{\frac{\lambda+1}{2}\vec{CD}}$

$\Rightarrow MN \parallel CD$

b)



M mijlocul lui AB
N ——— DC
$\{P\} = AD \cap BC$ și $\{O\} = AC \cap BD$

P, M, O, N coliniare

• P, M, N coliniare: $\vec{PM} = \frac{1}{2}\vec{PA} + \frac{1}{2}\vec{PB}$ (Exc 4)

$\vec{PN} = \frac{1}{2}\vec{PD} + \frac{1}{2}\vec{PC}$

Th Thales

$PN = \frac{\;}{2} \ldots \frac{\;}{2} \ldots$

$AB \parallel DC \xRightarrow[\frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC}]{\text{Th Thales}} \overrightarrow{PD} = \lambda \overrightarrow{PA}$ și $\overrightarrow{PC} = \lambda \overrightarrow{PB}$

$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \quad | \cdot \lambda$

$\lambda \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PN} \Rightarrow P, M, N$ coliniare.