Seminarul 1 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

1 Construcţii cu rigla şi compasul

Rigla se consideră negradată, infinită în lungime şi fără lăţime.
Compasul rigid este infinit extensibil şi îşi păstrează deschiderea când este ridicat de pe foaie.

Exercițiul 1.1: Construiţi:

a) mijlocul unui segment AB dat.

b) perpendiculara pe o dreaptă dată d într-un punct P al ei.

c) perpendiculara pe o dreaptă dată d dintr-un punct P exterior ei.

d) paralela la o dreaptă dată d printr-un punct P exterior ei.

Exercițiul 1.2:

a) Dat fiind un cerc, construiţi centrul său.

b) Dat fiind un unghi şi o dreaptă, construiţi un unghi de măsură egală având dreapta dată ca suport. În particular, date unghiurile de măsuri α şi β, construiţi un unghi de măsură $\alpha + \beta$.

c) Dat fiind un segment, construiţi un triunghi echilateral având-ul drept latură.

d) Dat fiind un segment, construiţi un pătrat având-ul drept latură.

e) Dat fiind un segment, construiţi un hexagon regulat având-ul drept latură.

f) Dat fiind un poligon regulat, construiţi un poligon regulat cu număr dublu de laturi.

g) Dat fiind un cerc şi un punct exterior, construiţi o tangentă din acel punct la cerc.

Exercițiul 1.3: Dat fiind un pătrat:

a) construiţi unul cu arie dublă.

b) şi $n \geq 1$, construiţi unul cu arie de n ori mai mare.

Exercițiul 1.4: Date fiind segmente de lungime a şi b:

a) construiţi segmente de lungime $a + b$ şi $|a - b|$.

b) şi, în plus, un segment unitate, construiţi un segment de lungime $a \cdot b$.

c) şi, în plus, un segment unitate, construiţi un segment de lungime $\frac{1}{a}$.

d) şi, în plus, un segment unitate, construiţi un segment de lungime $\sqrt{a}$.

Exercițiul 1.5: Dat fiind un segment şi $n \geq 1$, împărţiţi-l în n segmente congruente.

Exercițiul 1.6: Date fiind un segment unitate, unul de lungime k şi un poligon, construiţi un poligon asemenea, cu raport de asemănare k.

Exercițiul 1.7:

a) Construiţi bisectoarea unui unghi dat.

b) Construiţi unghiuri de 45° şi 30°.

Definiția 1.8: Un compas nerigid nu îşi păstrează deschiderea atunci când este ridicat de pe foaie.

Demonstraţi următoarea

Teorema 1.9: *Orice construcţie care poate fi făcută cu compasul rigid poate fi făcută cu compasul nerigid.*

Exercițiul 1.10: Construiţi un pentagon regulat având o latură dată. Puteţi da o construcţie care foloseşte doar compasul?

Teorema 1.11: *(Mohr-Mascheroni) Orice construcţie cu rigla şi compasul ale cărei obiecte iniţiale şi finale sunt puncte sau cercuri poate fi făcută doar cu compasul.*

Exercițiul 1.12: Date fiind punctele A şi B, construiţi folosind doar compasul un punct C coliniar cu ele astfel încât segmentul AC are lungimea dublă faţă de AB.

Teorema 1.13: *(a compasului ruginit) Orice construcţie cu rigla şi compasul ale cărei obiecte iniţiale şi finale sunt puncte sau drepte poate fi făcută doar cu rigla şi un compas imobil, de deschidere fixă.*

Teorema 1.14: *(Poncelet-Steiner) Orice construcţie cu rigla şi compasul ale cărei obiecte iniţiale şi finale sunt puncte sau drepte poate fi făcută doar cu rigla, atât timp cât in plan este desenat un cerc cu centrul marcat.*

Exercițiul 1.15: Într-un plan în care este desenat un cerc cu centrul marcat, construiţi folosind doar rigla:

a) o paralelă printr-un punct exterior dat la o dreaptă pe care este marcat un segment împărţit în jumătaţi egale.

b) un segment împărţit în jumătăţi egale pe o dreaptă dată.

c) o paralelă la o dreaptă dată printr-un punct exterior ei dat.

Seminarul 2 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

2 Exerciţii

Chiar dacă nu este explicit menţionat, toate problemele de mai jos sunt plane.

Exercițiul 2.1: Daţi o alta demonstraţie pentru inegalitatea Cauchy-Schwarz în planul euclidian.

Exercițiul 2.2: Demonstraţi că are loc inegalitatea triunghiului pentru funcţia distanţă euclidiană.

Exercițiul 2.3: Fie $ABCD$ un paralelogram şi M, N, P, Q puncte în plan astfel încât

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DQ}.$$

Demonstraţi că şi $MNPQ$ este paralelogram.

Exercițiul 2.4: Fie $\triangle ABC$, şi punctul P astfel încât $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{PC}$.

Demonstraţi că $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$.

Exercițiul 2.5: Fie $ABCD$ un paralelogram în plan. Alegem E astfel încât $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$ şi F astfel încât $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EF}$.

Demonstraţi că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{BF}$.

Exercițiul 2.6: Fie $\triangle ABD$ şi G un punct în plan.

Demonstraţi că G e centrul de greutate al $\triangle ABC$ dacă şi numai dacă pentru orice O punct în plan, avem relaţia

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Exercițiul 2.7: Fie paralelogramul $ABCD$ şi G un punct în plan.

Demonstraţi că G e intersecţia diagonalelor paralelogramului $ABCD$ dacă şi numai dacă pentru orice O punct în plan, avem relaţia

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OD}.$$

Exercițiul 2.8: Fie $\triangle ABC$ cu centrul de greutate G şi $A' \in [BC], B' \in [AC], C' \in [AB]$ astfel încât

$$\frac{BA'}{BC} = \alpha,\ \frac{CB'}{CA} = \beta,\ \frac{AC'}{AB} = \gamma.$$

a) Arătaţi că $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ şi $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$.

b) Arătaţi că centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ aparţine medianei din A a triunghiului ABC dacă şi numai dacă $2\alpha = \beta + \gamma$.

c) Arătaţi că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ coincid dacă şi numai dacă $\alpha = \beta = \gamma$.

Exerciţiul 2.9:

a) Demonstraţi că, în orice trapez, dreapta care uneşte mijloacele diagonalelor este paralelă cu bazele.

b) Arătaţi că, în orice trapez, următoarele puncte sunt coliniare: mijloacele bazelor, punctul de intersecţie a diagonalelor şi punctul de intersecţie a suporturilor laturilor neparalele.

Exerciţiul 2.10:

a) Să se arate că trei puncte A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă există $a, b, c \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}, \ \forall M \in \mathbb{R}^2.$$

b) Fie $D \in (AB), E \in (AC)$ astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EA}$. Demonstraţi că mijloacele segmentelor AB, AC şi DE sunt coliniare.

Seminarul 3 de Geometrie I
Seria 11 - 2021-2022

3 Exerciţii

Exercițiul 3.1: Fie M punctul de coordonate $(1,2)$ şi dreapta d_0 de ecuaţie:

$$d_0 : 3x - 2y + 2 = 0.$$

a) Găsiţi o ecuaţie parametrică pentru d_0.

b) Scrieţi ecuaţia dreptei d_1 ce trece prin M şi este perpendiculară pe d_0.

c) Aflaţi coordonatele punctelor P şi Q unde $P := pr_{d_0}M$ şi Q este simetricul lui M faţă de d_0 (vom nota $Q := sym_{d_0}M$).

Exercițiul 3.2: Fie dreptele

$$d_1 : mx + 2y = 8$$
$$d_2 : x + (m-1)y = 4$$

Determinaţi poziţia relativă a celor două drepte în funcţie de parametrul m.

Exercițiul 3.3: Fie dreptele

$$d_1 : 3x - 2y + 2 = 0$$
$$d_2 : x - 2y + 1 = 0$$

Determinaţi punctele $P \in d_1$ astfel încât $dist(P, d_2) = 1$.

Exercițiul 3.4: Fie punctele A şi B intersecţiile dreptei $ax + (2a+1)y + a^2 = 0, a \neq -\frac{1}{2}, a \neq 0$, cu axele de coordonate.

a) Scrieţi ecuaţia dreptei d_1 astfel încât $A \in d_1, d_1$ paralelă cu prima bisectoare.

b) Scrieţi ecuaţia dreptei d_2 astfel încât $B \in d_2, d_2$ perpendiculară pe prima bisectoare.

c) Aflaţi a astfel încât $d_1 \cap d_2 = \{M\}$ şi $M \in d : 2x + y = 1$.

Exercițiul 3.5: Fie $A = (0,-2)$, $B = (2,-3)$, $C = (3,4)$ puncte în $\mathbb{R}^2$.

a) Verificaţi că nu sunt coliniare.

b) Aflaţi coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

c) Aflaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

d) Aflaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

e) Aflaţi aria triunghiului ABC.

Exercițiul 3.6: Fie

$$\mathcal{F} = \{ \ \{d_m : (m^2 + 2m + 4)x - (2m^2 + 3m + 5)y - (m + 3) = 0\} \mid m \in \mathbb{R}\}.$$

Reprezintă $\mathcal{F}$ un fascicul de drepte?

Exercițiul 3.7: Fie M punctul de coordonate $(3, 3)$ şi d_1, d_2, d_3 următoarele drepte în $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} d_1 &: x + 2y - 4 = 0, \\ d_2 &: 3x + y - 2 = 0, \\ d_3 &: x - 3y - 4 = 0. \end{aligned}$$

Considerăm punctele A, B, C date de $\{A\} = d_1 \cap d_3$, $\{B\} = d_1 \cap d_2$ şi $\{C\} = d_2 \cap d_3$.

a) Calculaţi aria triunghiului ABC.

b) Fie $P := pr_{OA}M$, $Q := pr_{OB}M$ şi $R := pr_{AB}M$. Arătaţi că P, Q şi R sunt coliniare.

c) Să se scrie ecuaţia fasciculului de drepte determinat de AB şi PQ.

d) Care este dreapta din acest fascicul care trece prin punctul $N(0, 5)$?

Exercițiul 3.8: Verificaţi dacă punctele $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$, $C(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$, $D(2, 1+\sqrt{3})$ sunt conciclice. Dacă da, care este centrul şi raza acestui cerc?

Exercițiul 3.9: Fie d_1, d_2 drepte în plan şi mulţimea

$$M = \{P \mid P \text{ mijloc al unui segment cu capete în } d_1 \text{ respectiv } d_2\}.$$

Ce este M în funcţie de poziţia relativă a celor două drepte?

Seminarul 4 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

4 Exerciţii

Exercițiul 4.1: Punctele $M_1 = (-2, 1), M_2 = (2, 3), M_3 = (-4, -1)$ sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC. Aflaţi coordonatele vârfurilor.

Exercițiul 4.2: Un pătrat din $\mathbb{R}^2$ are două vârfuri consecutive în $(2, 3)$ şi $(6, 6)$. Aflaţi coordonatele celorlaltor vârfuri.

Exercițiul 4.3: Fie

$$\mathcal{F} = \{\ \{d_m : (m^2 + 2m + 4)x - (2m^2 + 3m + 5)y - (m + 3) = 0\} \mid m \in \mathbb{R}\}.$$

Reprezintă $\mathcal{F}$ un fascicul de drepte?

Exercițiul 4.4: Fie M punctul de coordonate $(3, 3)$ şi d_1, d_2, d_3 următoarele drepte în $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} d_1 &: x + 2y - 4 = 0, \\ d_2 &: 3x + y - 2 = 0, \\ d_3 &: x - 3y - 4 = 0. \end{aligned}$$

Considerăm punctele A, B, C date de $\{A\} = d_1 \cap d_3$, $\{B\} = d_1 \cap d_2$ şi $\{C\} = d_2 \cap d_3$.

a) Calculaţi aria triunghiului ABC.

b) Fie $P := pr_{OA}M$, $Q := pr_{OB}M$ şi $R := pr_{AB}M$. Arătaţi că P, Q şi R sunt coliniare.

c) Să se scrie ecuaţia fasciculului de drepte determinat de AB şi PQ.

d) Care este dreapta din acest fascicul care trece prin punctul $N(0, 5)$?

Exercițiul 4.5: Fie dreptele

$$d : 2x - 5y - 1 = 0$$
$$d_\alpha : \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 2}{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Este mulţimea $\{d_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ un fascicul de drepte?

b) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$, dacă există, astfel încât $d_\alpha \parallel d$.

c) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$, dacă există, astfel încât $d_\alpha \perp d$.

d) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $(1, 1) \in d_\alpha$. Pentru acest α, calculaţi $\cos \angle(d, d_\alpha)$.

Exercițiul 4.6: Verificaţi dacă punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$, $C(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$, $D(2, 1+\sqrt{3})$ sunt conciclice. Dacă da, care este centrul şi raza acestui cerc?

Exercițiul 4.7: Fie dreapta $d : x + 2y + 1 = 0$. Considerăm funcţia

$$pr_d : \mathbb{R}^2 \to d \subset \mathbb{R}^2, pr_d(A) \text{ proiecţia punctului } A \text{ pe dreapta } d.$$

Scrieţi ecuaţia în coordonate a acestei funcţii: $pr_d(x, y) =?$

Exercițiul 4.8: Triunghiurile isoscele ABC şi DEF au bazele BC şi EF pe o dreaptă d, cu $|BC| < |EF|$ şi înălţimea din A în $\triangle ABC$ mai mare decât înalţimea din D în $\triangle DEF$.

Găsiţi o dreaptă $d' \parallel d$ care determină pe cele două triunghiuri segmente egale.

Seminarul 5 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

5 Translaţii şi rotaţii. Exerciţii

Exercițiul 5.1: Fie aplicaţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}x - y + 4 - \sqrt{3}}{2}, \frac{x + \sqrt{3}y + 3 - 2\sqrt{3}}{2} \right)$$

a) Demonstraţi că f este o rotaţie; determinaţi unghiul şi centrul ei.

b) Fie $d : x + y + 3 = 0$. Determinaţi $f(d)$.

Exercițiul 5.2: Fie $P = (1, 2)$ şi $Q = (-2, 3)$. Verificaţi că $R_{P,\frac{\pi}{3}} \circ R_{Q,\frac{\pi}{6}}$ e o rotaţie şi aflaţi-i centrul.

Exercițiul 5.3: Triunghiurile isoscele ABC şi DEF au bazele BC şi EF pe o dreaptă d, cu $|BC| < |EF|$ şi înălţimea din A în $\triangle ABC$ mai mare decât înalţimea din D în $\triangle DEF$.

Găsiţi o dreaptă $d' \parallel d$ care determină pe cele două triunghiuri segmente egale. Există mereu o astfel de dreaptă dacă triunghiurile nu sunt isoscele?

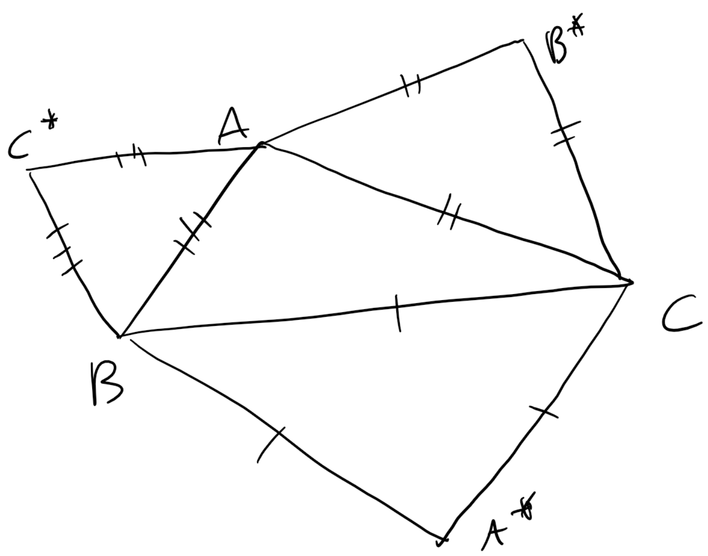
Exercițiul 5.4: Fie O, P puncte distincte în plan şi $\alpha \in (0, 2\pi)$. Ce este mulţimea

$$\mathcal{P} = \{R_{O,k\alpha}(P) \mid k \in \mathbb{Z}\}?$$

Exercițiul 5.5: Demonstraţi că o izometrie cu exact un punct fix e o rotaţie.

Exercițiul 5.6: Fiind date trei drepte distincte şi paralele în plan, arătaţi că există un triunghi echilateral cu câte un vârf pe fiecare din cele trei drepte.

Exercițiul 5.7: (punctul lui Fermat) Fie un triunghi ABC şi A^*, B^*, C^* celelalte vârfuri ale triunghiurilor echilaterale construite pe laturile acestui triunghi, ca în desenul de mai jos:



Demonstraţi, eventual folosind Teorema sinusurilor şi Teorema lui Ceva, că AA^*, BB^* şi CC^* sunt concurente. Acest punct se numeşte punctul lui Fermat.

Exercițiul 5.8: Fie un triunghi ABC. Construiţi un punct P în interiorul triunghiului astfel încât $|PA| + |PB| + |PC|$ este minim.

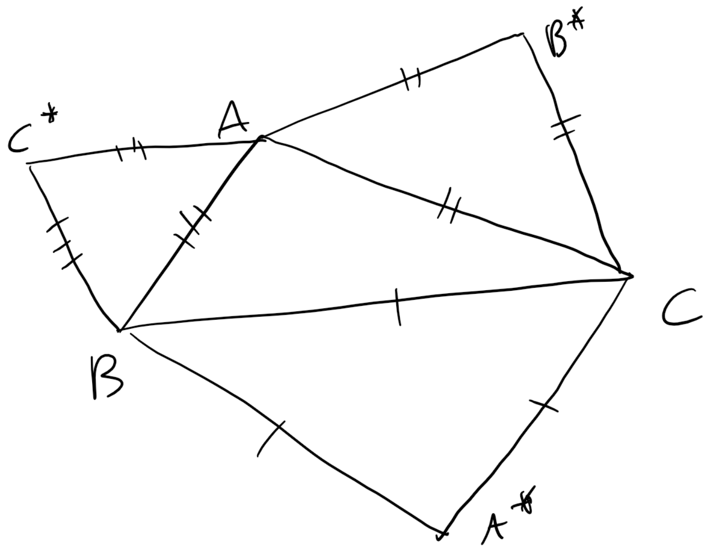
Este acest punct unic?

Seminarul 6 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

5 Translaţii şi rotaţii. Exerciţii

Exercițiul 5.1: (punctul lui Fermat) Fie un triunghi ABC şi A^*, B^*, C^* celelalte vârfuri ale triunghiurilor echilaterale construite pe laturile acestui triunghi, ca în desenul de mai jos:



Demonstraţi, eventual folosind Teorema sinusurilor şi Teorema lui Ceva, că AA^*, BB^* şi CC^* sunt concurente. Acest punct se numeşte punctul lui Fermat.

Exercițiul 5.2: Fie un triunghi ABC. Construiţi un punct P în interiorul triunghiului astfel încât $|PA| + |PB| + |PC|$ este minim.

Este acest punct unic?

6 Simetrii axiale. Exerciţii

Exercițiul 6.1: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 5\right)$.

Demonstraţi că f este izometrie. Este f o simetrie axială?

Exercițiul 6.2: Scrieţi ecuaţia simetriei faţă de dreapta $d : 2x + 3y - 6 = 0$.

Exercițiul 6.3: Fie dreptele $d_1 : x = 1,\ d_2 : x = 4,\ d_3 : x = -2,\ d_4 : x = 5$.

Calculaţi $S_{d_1} \circ S_{d_2} \circ S_{d_3} \circ S_{d_4}$. Comută cele 4 simetrii?

Exercițiul 6.4: Din teoria de curs: compunerea unei simetrii axiale cu o translaţie nu este neapărat tot simetrie axială.

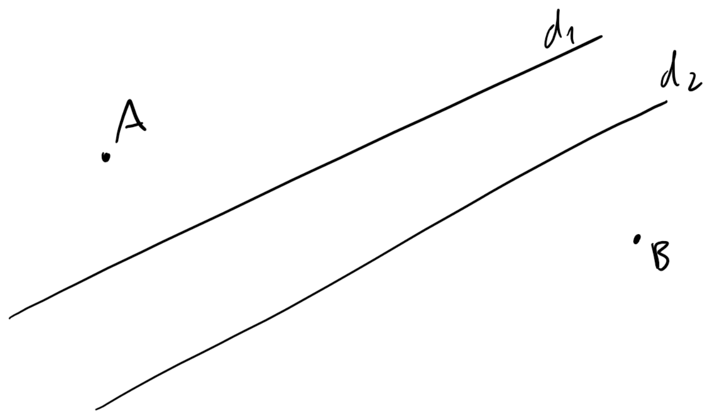
Daţi două exemple de dreaptă d şi vector $v \neq 0$, unul pentru care $T_v \circ S_d$ este totuşi simetrie axială şi unul pentru care nu este.

Exercițiul 6.5: Fie $d : 2x - y + 1 = 0$ şi $A = (-1, 3), B = (2, 9)$.

a) Arătaţi că A şi B sunt de aceeaşi parte a lui d.

b) ("Problema râului") Găsiţi punctul $P \in d$ astfel încât $|PA| + |PB|$ este minimă.

Exercițiul 6.6: ("Problema podului") Fie dreptele distincte $d_1 \parallel d_2$ şi A, B puncte aflate pe părţi opuse determinate de cele două drepte (vedeţi figura de mai jos).



Găsiţi punctele $P_1 \in d_1, P_2 \in d_2$ astfel încât $P_1P_2 \perp d_1$ şi $|AP_1| + |P_1P_2| + |P_2B|$ minimă.

Exercițiul 6.7: Fie un triunghi ascuţitunghic ABC. Construiţi punctele P, Q, R, fiecare pe câte o latură, astfel încât perimetrul $\triangle PQR$ este minim.

Seminarul 7 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

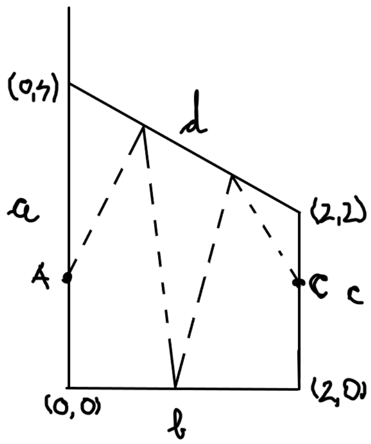
7 Izometrii ale planului. Exerciţii

Exercițiul 7.1: Fie un triunghi ascuţitunghic ABC. Construiţi punctele P, Q, R, fiecare pe câte o latură, astfel încât perimetrul $\triangle PQR$ este minim.

Exercițiul 7.2: Fie $P \neq A$ puncte în plan. Ce este mulţimea $\{S_d(A) \mid P \in d\}$?

Exercițiul 7.3: Fie d o dreaptă, O_1, O_2 puncte de aceeaşi parte a lui d şi C_1, C_2 cercurile de centru O_1 şi rază r_1, respectiv centru O_2 şi rază r_2, care nu intersectează dreapta. Aflaţi punctele $M \in C_1$, $N \in C_2$ şi $P \in d$ astfel încât $MP + PN$ să fie minim.

Exercițiul 7.4: Patrulaterul din imagine are vârfurile în punctele de coordonate $(0,0)$, $(0,4)$, $(2,2)$ şi $(2,0)$. Fie $A(0,1)$ şi $C(2,1)$. Aflaţi drumul de lungime minimă de la A la C care intersecteaza latura d într-un punct, apoi latura b într-un punct şi din nou latura d într-un punct (vedeţi drumul punctat din imagine).



Exercițiul 7.5: Dat un unghi $\widehat{AOB}$ şi un punct în interiorul lui M, găsiţi dreapta care trece prin M şi taie OA în P şi OB în N astfel încât triunghiul PON să aibă aria minimă.

Exercițiul 7.6: Dat un unghi $\widehat{AOB}$ şi un punct în interiorul lui M, găsiţi puncte X pe OA şi Y pe OB astfel încât $OX = OY$ şi $MX + MY$ să fie minim.

Exercițiul 7.7: Fie A, B, C trei puncte necoliniare în plan, l o dreaptă arbitrară ce trece prin C şi M_l punctul de pe l ce realizeaza minimul expresiei $AM_l + BM_l$. Aflaţi dreapta l care realizeaza maximul expresiei $AM_l + BM_l$.

Seminarul 8 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

8 Omotetii şi inversiuni. Exerciţii

Exercițiul 8.1: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x - 2, 3y + 4)$.

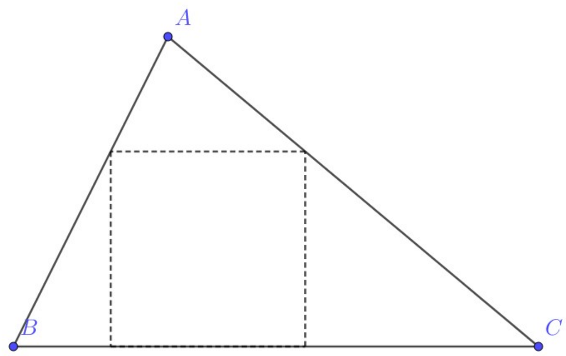
a) Arătaţi că f este o omotetie. Determinaţi centrul şi puterea ei.

b) Fie $d : 3x + y - 1 = 0$. Calculaţi $f(d)$.

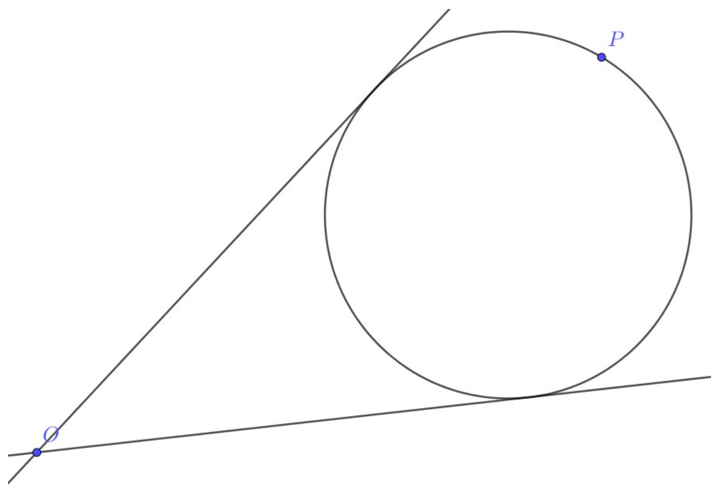
c) Fie $d' : x + 2y + 4 = 0$. Calculaţi $f(d')$.

Exercițiul 8.2: Considerăm dreptele $d_1 : 2x-3y+2 = 0$, $d_2 : 2x-3y-1 = 0$. Găsiţi o omotetie f astfel încât $f(d_1) = d_2$.

Exercițiul 8.3: Fie un triunghi ascuţitunghic ABC. Folosind omotetii, arătaţi că există un pătrat înscris în acest triunghi *i.e.* cu o latură inclusă în BC şi cu alte două vârfuri pe AB, respectiv AC. Daţi apoi o construcţie cu rigla şi compasul pentru un astfel de pătrat.



Exercițiul 8.4: Fie un unghi şi un punct P în interiorul lui. Propuneţi o construcţie cu rigla şi compasul a unui cerc ce conţine punctul P şi este tangent la dreptele unghiului.

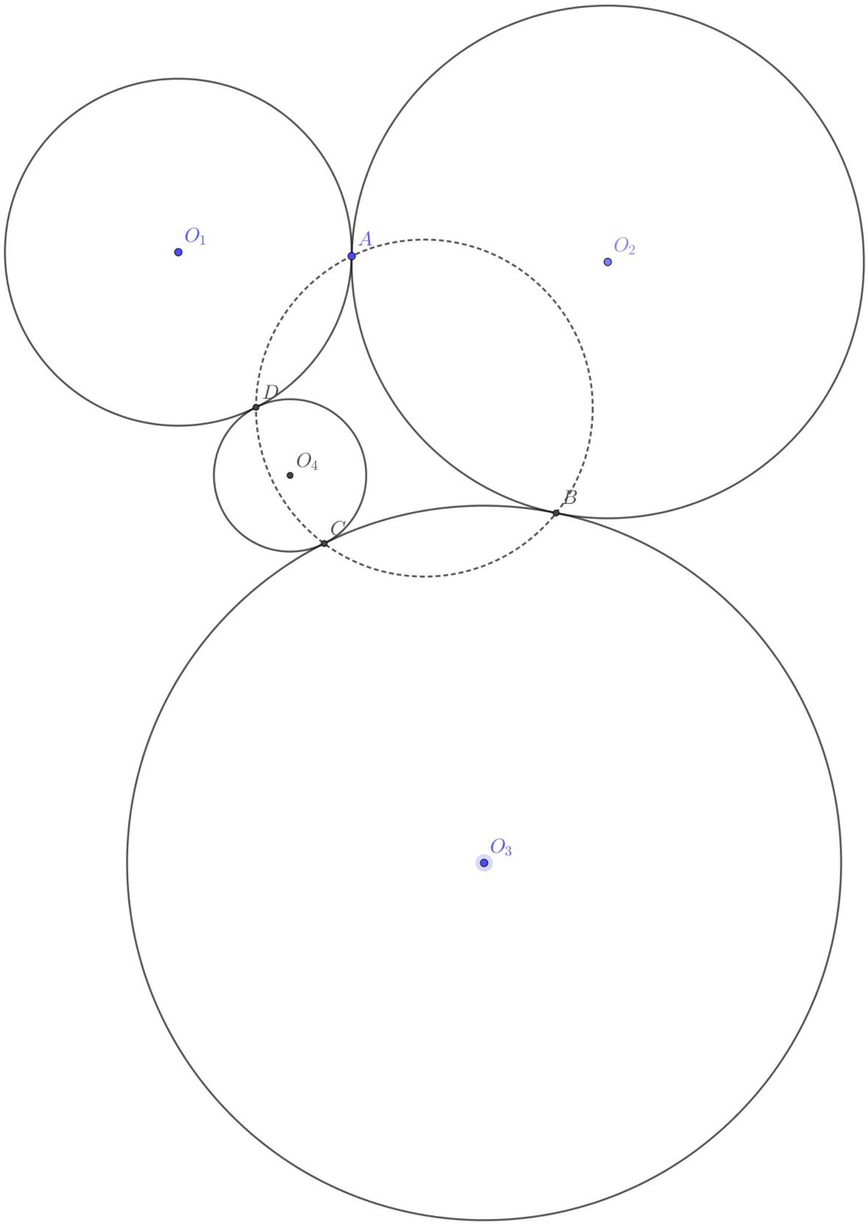


Exercițiul 8.5: Fie $\mathcal{I}_P$ inversiunea de centru P (unitară). Daţi o demonstraţie geometrică şi una algebrică pentru faptul că imaginea prin $\mathcal{I}_P$ a unui cerc care nu conţine P este tot un cerc.

Exercițiul 8.6: Fie $\mathcal{I}_{P,k}$ inversiunea de centru P şi putere $k \neq 0$. Demonstraţi că, pentru orice două puncte A, B diferite de P şi notând $A' = \mathcal{I}_{P,k}(A), B' = \mathcal{I}_{P,k}(B)$, avem

$$|A'B'| = \frac{k|AB|}{|OA| \cdot |OB|}$$

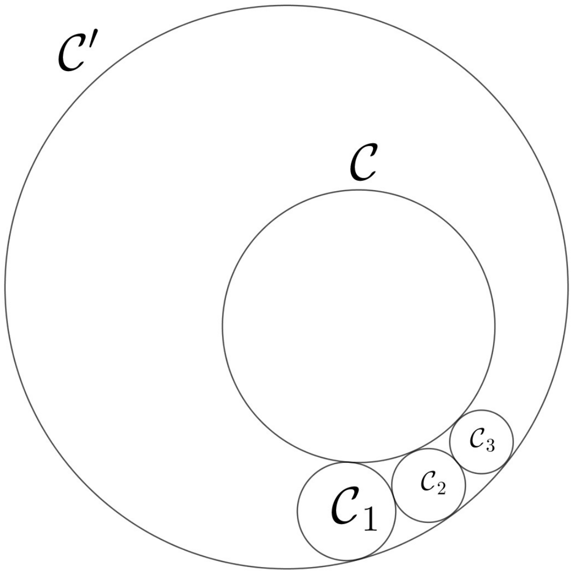
Exercițiul 8.7: Fie patru cercuri în plan, tangente două câte două. Demonstraţi că cele patru puncte de tangenţă sunt conciclice.



Exercițiul 8.8: Demonstraţi că pentru orice două cercuri **disjuncte**, există o inversiune care le transformă în cercuri concentrice.

Exercițiul 8.9: Considerăm două cercuri $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ astfel încât $\mathcal{C}$ este inclus în interiorului lui $\mathcal{C}'$, creând astfel un inel circular (nesimetric).

Alegem un cerc $\mathcal{C}_1$ în acest inel, tangent la $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$, apoi un cerc $\mathcal{C}_2$, tangent la $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ şi $\mathcal{C}_1$ şi tot aşa, ca în figura de mai jos:



Decideţi dacă există mereu un cerc $\mathcal{C}_n$ care închide acest lanţ, adică este tangent la $\mathcal{C}_1$, dacă existenţa lui depinde de poziţia cercului iniţial $\mathcal{C}_1$ şi ce determină valoarea lui n.

Seminarul 9 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

9 Cercul şi elipsa. Exerciţii

Exercițiul 9.1: Fie cercurile

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &: x^2+y^2+2x+4y+4=0\\ \mathcal{C}_2 &: x^2+y^2-2x-2y-7=0\\ \mathcal{C}_3 &: x^2+y^2+6x+5=0\end{aligned}$$

a) Determinaţi centrele şi razele lor. Demonstraţi că centrele nu sunt coliniare.

b) Determinaţi axele radicale a oricare două din cercurile de mai sus şi punctul radical al celor trei (*i.e.* punctul care are putere egală faţă de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$).

Exercițiul 9.2: Fie $\mathcal{C} : x^2+y^2+2x+2y=0$, punctele $P=(-2,-2)$, $Q=(2,2)$ şi vectorul $\overrightarrow{u}=(2,1)$.

a) Determinaţi centrul şi raza cercului $\mathcal{C}$. Arătaţi că $P\in\mathcal{C}$ şi $Q\in Ext(\mathcal{C})$.

b) Găsiţi ecuaţia tangentei în P la $\mathcal{C}$.

c) Găsiţi ecuaţile tangentelor la $\mathcal{C}$ din Q şi punctele de tangenţă.

d) Găsiţi ecuaţile tangentelor la $\mathcal{C}$ de direcţie $\overrightarrow{u}$ şi punctele de tangenţă.

Exercițiul 9.3: Demonstraţi, sintetic şi analitic, că locul geometric al punctelor exterioare unui cerc de rază r din care tangentele la cerc sunt perpendiculare este un cerc de rază $r\sqrt{2}$.

Exercițiul 9.4: Demonstraţi că dacă un patrulater convex cu laturile a, b, c, d este circumscris unui cerc (admite un cerc înscris), atunci $a+c=b+d$.

Exercițiul 9.5: Fie elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

a) Aflaţi lungimile semi-axelor majoră şi minoră, a şi b, excentricitatea e a elipsei şi focarele sale.

b) Aflaţi ecuaţiile dreptelor directoare ale elipsei.

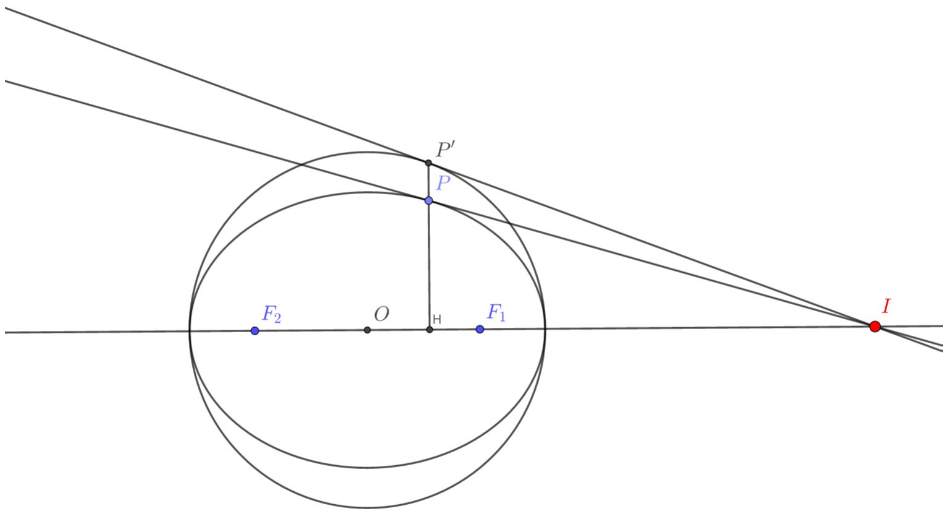
c) Verificaţi că $P=(\frac{13\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2})\in\mathcal{E}$ şi scrieţi ecuaţia tangentei în P la elipsă.

Exercițiul 9.6: Fie elipsa de ecuaţie $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Este ea în formă canonică? Aflaţi lungimile semi-axelor majoră şi minoră, a şi b, şi excentricitatea e a elipsei.

Exercițiul 9.7: Fie o elipsă $\mathcal{E}$ de focare $F_1\neq F_2$ şi cu lungimea semi-axei majore a. Considerăm $\mathcal{C}$ "cercul mare" al elipsei *i.e.* cercul cu acelaşi centru şi de rază a.

Fie $P \in \mathcal{E}$ şi P' punctul de intersecţie al dreptei perpendiculare pe F_1F_2 cu cercul $\mathcal{C}$ aflat pe aceeaşi parte a dreptei F_1F_2 cu P.

Demonstraţi că tangenta în P la $\mathcal{E}$, tangenta în P' la $\mathcal{C}$ şi dreapta F_1F_2 sunt concurente.



Seminarul 10 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

9 Elipsa. Exerciţii

Exercițiul 9.1: Aflaţi locul geometric al punctelor exterioare elipsei din care cele două tangente la elipsă sunt perpendiculare.

Exercițiul 9.2: Aflaţi locul geometric al punctelor exterioare elipsei din care cele două tangente la elipsă determină, prin punctele de tangenţă, diametre conjugate.

Exercițiul 9.3: Demonstraţi că aria elipsei cu semi-axă majoră a şi semi-axă minoră b este πab.

10 Hiperbola. Exerciţii

Exercițiul 10.1: Fie hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{169} = 1$.

a) Este $\mathcal{H}$ în formă canonică?

b) Aflaţi lungimile semi-axelor majoră şi minoră, a şi b, excentricitatea e a hiperbolei şi focarele sale.

c) Aflaţi ecuaţiile asimptotelor hiperbolei.

d) Aflaţi ecuaţiile dreptelor directoare ale hiperbolei.

e) Verificaţi că $P = (5\sqrt{5}, 26) \in \mathcal{H}$ şi scrieţi ecuaţia tangentei în P la hiperbolă.

Exercițiul 10.2: Fie hiperbola $\mathcal{H}$ cu lungimi ale semi-axelor majoră şi minoră a, respectiv b.

Demonstraţi că produsul distanţelor de la un punct al hiperbolei la cele două asimptote este $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Exercițiul 10.3: Fie P un punct pe hiperbola $\mathcal{H}$ şi R, Q punctele de intersecţie ale tangentei în P la $\mathcal{H}$ cu cele două asimptote. Demonstraţi că P este mijlocul segmentului (RQ).

Exercițiul 10.4: Determinaţi locul geometric al punctelor exterioare hiperbolei din care cele două tangente la hiperbolă sunt perpendiculare. Interpretaţi rezultatul.

Exercițiul 10.5: Demonstraţi că dacă un triunghi este înscris într-o hiperbolă echilateră, atunci ortocentrul aparţine hiperbolei.

Seminarul 11 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

11 Parabola. Exerciţii

Exercițiul 11.1: Fie parabola $\mathcal{P} : y^2 = 2x$.

a) Determinaţi focarul şi dreapta directoare ale lui $\mathcal{P}$.

b) Scrieţi ecuaţiile tangentelor la $\mathcal{P}$ în punctele $(3, -\sqrt{6}), (8, 4)$.

c) Scrieţi ecuaţiile tangentelor la $\mathcal{P}$ din punctele $(2, 5), (-2, -3), (-\alpha, 0), \alpha > 0$.

Exercițiul 11.2: Determinaţi, analitic şi sintetic, locul geometric al punctelor din care tangentele la o parabolă dată sunt perpendiculare.

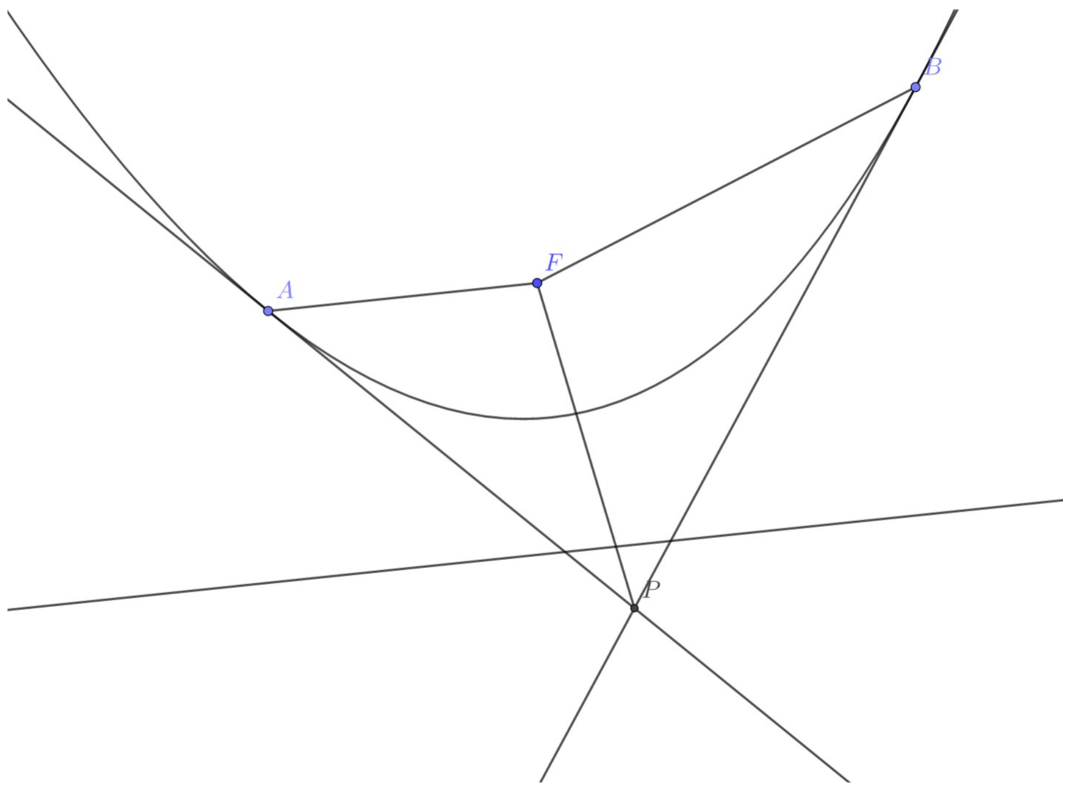
Exercițiul 11.3: Determinaţi locul geometric al proiecţiilor focarului unei parabole pe tangentele la acea parabolă.

Exercițiul 11.4: Fie $\mathcal{P}$ o parabolă în plan şi $A, B, C, D \in \mathcal{P}$ distincte astfel încât $AB \parallel CD$ (segmentele AB şi CD sunt coarde paralele).

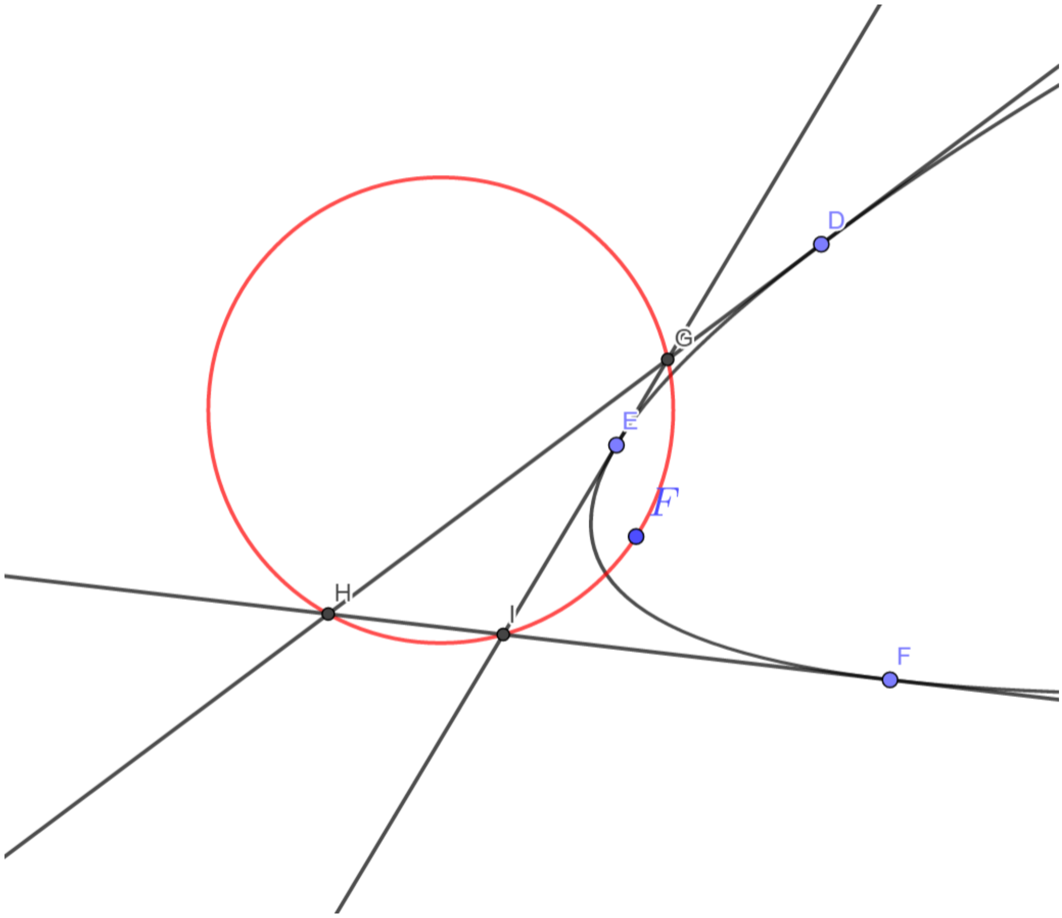
Demonstraţi că dreapta determinată de mijloacele segmentelor AB şi CD este perpendiculară pe dreapta directoare a lui $\mathcal{P}$.

Exercițiul 11.5:

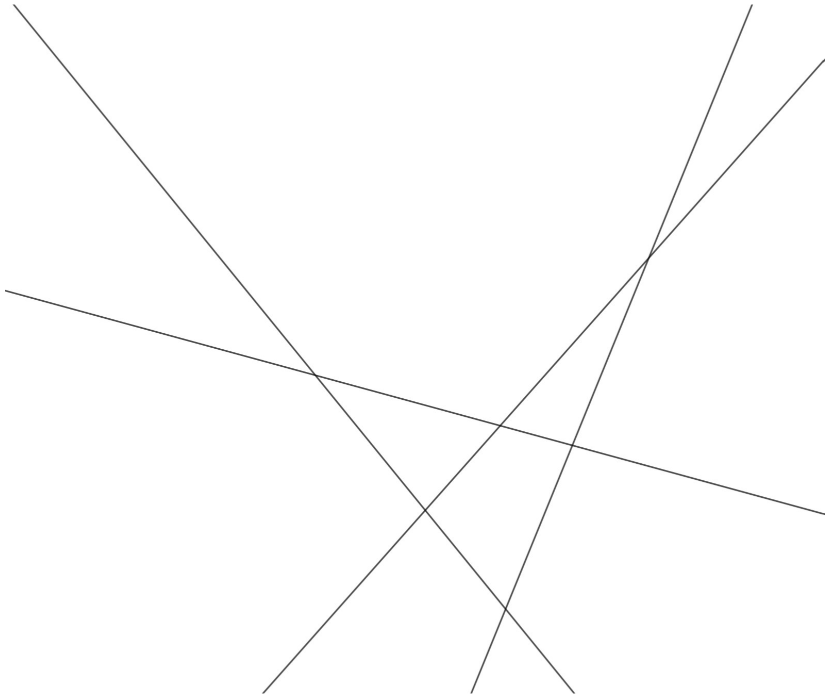
a) Demonstraţi că dacă tangentele în punctele A şi B la o parabolă de focar F se intersectează în P, atunci $\triangle AFP \sim \triangle PFB$.



b) (Teorema Lambert) Demonstraţi că cercul circumscris unui triunghi format din intersecţia a trei tangente la o parabolă dată trece prin focarul acelei parabole.



c) Descrieţi o metodă de a construi focarul şi dreapta directoare ale unei parabole, fiind date patru drepte tangente la parabolă.



Seminarul 12 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

12 Aducerea conicelor la formă canonică. Exerciţii

Pentru următoarele conice, precizaţi-le tipul şi dacă sunt nedegenerate, aduceţi-le la o formă canonică, aflaţi un reper în care au acea formă şi desenaţi-le (aproximativ):

a) $\Gamma : 7x^2 - 8xy + y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$,

b) $\Gamma : x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$,

c) $\Gamma : 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 2y + 4 = 0$,

d) $\Gamma : x^2 + 6xy + 9y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$,

e) $\Gamma : x^2 + 2\sqrt{2}xy - 4y - 2 = 0$,

f) $\Gamma : x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x - 4y - 2 = 0$,

g) $\Gamma : x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = 0$.

Demonstraţi următoarea

Propoziția 12.1: *Fie o dreaptă d, un punct $F \notin d$ şi $e > 0$. Atunci mulţimea*

$$\Gamma = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|PF|}{dist(P,d)} = e \right\}$$

este o conică nedegenerată, mai exact o elipsă de excentricitate e dacă $0 < e < 1$, o parabolă dacă $e = 1$ şi o hiperbolă de excentricitate e dacă $e > 1$.

Seminarul 14 de Geometrie I

Seria 11 - 2021-2022

14 Geometrie analitică în spaţiul euclidian tridimensional. Exerciţii

Exercițiul 14.1: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm dreapta

$$d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$$

şi planul $\pi : 4x - y - z = 1$. Atunci

a) $d \parallel \pi$; b) $d \perp \pi$; c) $d \subset \pi$; d) niciuna dintre a), b) şi c).

Exercițiul 14.2: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm dreptele

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$$

şi

$$d_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - z = 8 \end{cases}$$

Atunci

a) $d_1 = d_2$; b) $d_1 \parallel d_2$; c) $d_1 \perp d_2$; d) niciuna dintre a), b) şi c).

Exercițiul 14.3: Fie punctele $A = (3, -1, 3), B = (5, 1, -1), C = (0, 4, -3), D = (\alpha, 1, -2)$.

a) Scrieţi ecuaţiile dreptelor AB, AC (parametrice şi implicite).

b) Aflaţi $\angle(AB, AC)$.

c) Scrieţi ecuaţia planului π_1 astfel încât $C \in \pi_1, \pi \perp AB$.

d) Aflaţi locul geometric al punctelor egal depărtate de A şi B, fie acesta π_2.

e) Aflaţi distanţa dintre π_1 şi π_2.

f) Găsiţi α astfel încât A, B, C, D coplanare.

Exercițiul 14.4: Pentru

a) $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ şi $d_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$;

b) $d_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ şi $d_2 : \frac{x+1}{7} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z-3}{1}$;

studiaţi dacă dreptele sunt coplanare, iar dacă nu, aflaţi ecuaţia perpendicularei comune la ele.

Exercițiul 14.5: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, fie $\pi_1 : 2x-y-z-2=0$, $\pi_2 : x+2y+2z+1=0$, $\pi_3 : x+7y+7z+\alpha=0$ şi $A=(1,-2,5)$.

a) Aflaţi ecuaţia parametrică a dreptei $d = \pi_1 \cap \pi_2$.

b) Calculaţi simetricul punctului A faţă de planul π_2.

c) Calculaţi simetricul punctului A faţă de dreapta d.

d) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât π_1, π_2, π_3 se intersectează după o dreaptă.