SEMINAR 5
GEOMETRIE

Exc 5.1 Fie aplicația $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}x-y+4-\sqrt{3}}{2}, \frac{x+\sqrt{3}y+3-2\sqrt{3}}{2}\right)$

(a) Demonstrați că f este o rotație și calculați centrul și unghiul ei.

(b) Fie $d: x+y+3=0$. Determinați $f(d)$.

Rezolvare: (a)

$$\underbrace{R_{P(x_0,y_0),\alpha}(x,y)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}}_{*}$$

$$f(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+2-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3}{2}-\sqrt{3}\end{pmatrix}}_{**}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\sin\alpha&=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}$$

Tema

(x',y')

$f(x',y')=(x,y)$

$\in$ ec. lui d

?

Dacă $*=**$, atunci obținem:

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x_0\\ -y_0\end{pmatrix}+I_2\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3}{2}-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3}{2}-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

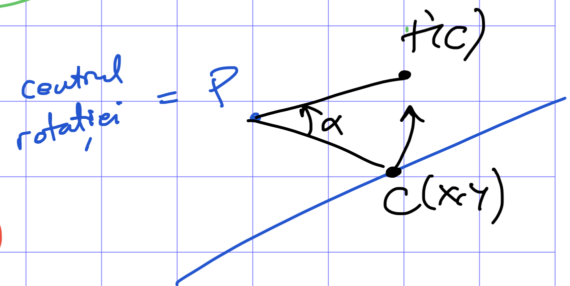
$$\det=1+\frac{3}{4}-\sqrt{3}+\frac{1}{4}=2-\sqrt{3}\neq0.$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \leftarrow P(1,2) = \text{centrul rotației}$$

$$f(x,y) = R_{P(1,2),\,\frac{\pi}{6}}(x,y).$$

(b) $d: x+y+3=0$

$f(d) = ?$



$(x,y) \in d$

coord lui $f(x,y)$

$(x,y) \in d$

?

$$f(d): \underbrace{\frac{\sqrt{3}x - y + 4 - \sqrt{3}}{2} + \frac{x + \sqrt{3}y + 3 - 2\sqrt{3}}{2} + 3 = 0}_{\text{Nu este ecuația bună :(}} \iff f(C) \in d$$

X

Metoda 1: Luăm $A, B \in d$, distincte, calculăm $f(A), f(B)$, apoi scriem ec. dreptei ce trece prin $f(A)$ și $f(B)$.

$A = (0,-3)$

$B = (-3,0)$

$$f(A) = f(0,-3) = \left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}, \frac{3-5\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f(B) = f(-3,0) = \left(-2\sqrt{3}+2, -\sqrt{3}\right)$$

$$f(d): \frac{x - \frac{7-\sqrt{3}}{2}}{-2\sqrt{3}+2 - \frac{7-\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \frac{3-5\sqrt{5}}{2}}{-\sqrt{3} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$\boxed{\text{Exc } 5.2}$ $P(1,2)$, $Q(-2,3)$.

Verificați că $R_{P,\frac{\pi}{3}} \circ R_{Q,\frac{\pi}{6}}$ este tot o rotație și aflați-i centrul.

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rez.:

$$\left(R_{P,\frac{\pi}{3}} \circ R_{Q,\frac{\pi}{6}}\right)(x,y) = R_{P,\frac{\pi}{3}}\left(R_{Q,\frac{\pi}{6}}(x,y)\right)$$

$$= R_{P,\frac{\pi}{3}}\left(A_{\frac{\pi}{6}}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$= A_{\frac{\pi}{3}}\left(A_{\frac{\pi}{6}}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$= A_{\frac{\pi}{3}}\cdot A_{\frac{\pi}{6}}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}+A_{\frac{\pi}{3}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$A_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= A_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+A_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+A_{\frac{\pi}{3}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$= A_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$= A_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$= A_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\\ 4+\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = A_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}-x_0\\-y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

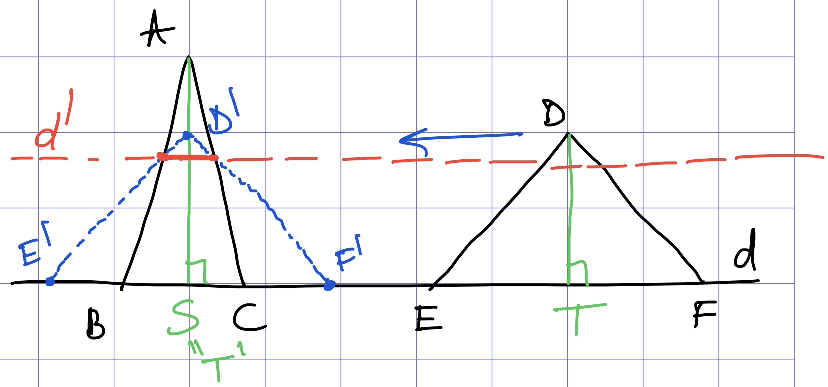
$$\begin{pmatrix}\frac{5-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{9-3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_0\\-x_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0+y_0\\-x_0+y_0\end{pmatrix}$$

adunam ec. $\Longrightarrow$ $2y_0 = \frac{14-4\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow y_0 = \frac{7-2\sqrt{3}}{2}$ $P(x_0,y_0)$ = centrul rotației

scădem ec. $\Longrightarrow$ $2x_0 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x_0 = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$

Exc 5.3 Triunghiurile isoscele ABC și DEF, cu bazele BC și EF pe dreapta d, $|BC| < |EF|$, iar înălțimea din A în ΔABC mai mare decât înălțimea din D în ΔDEF.

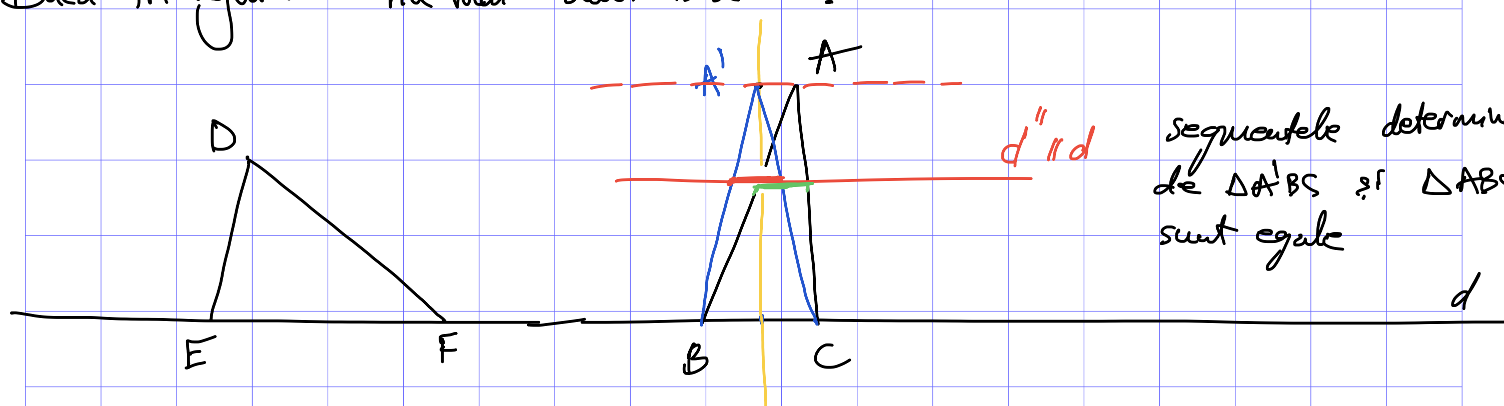
Găsiți o dreaptă $d' \parallel d$ a.i. d' determină pe cele două Δ segmente egale.



Rezolvare: Translatăm ΔDEF a.î. T să ajungă în S de-a lungul lui d

d' = dreapta care trece prin $AB \cap D'E'$ și $AC \cap D'F'$.

Dacă triunghiurile nu mai sunt isoscele?

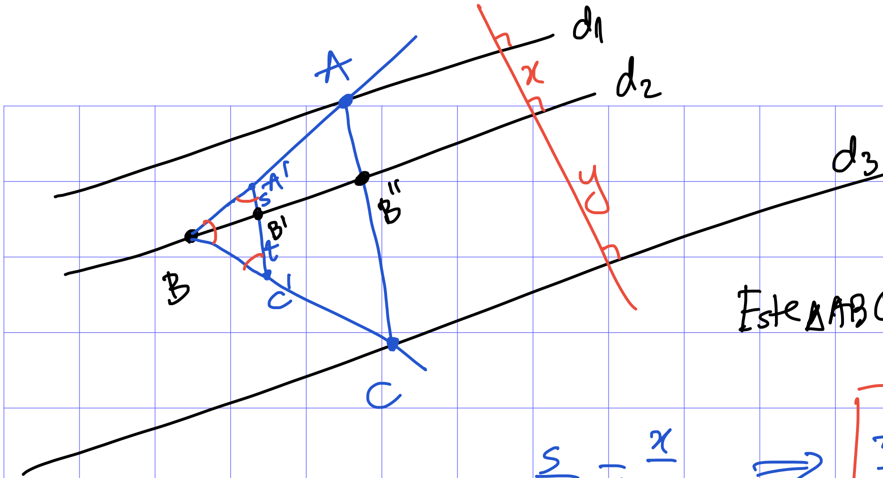


segmentele determinate de $\Delta A'BS$ și ΔABC sunt egale

Facem la fel și cu ΔDEF, obținem $\Delta D'EF$ isoscel.
Apoi, aplicăm pasul 1 din rezolvare. ✓

TEMĂ 5.5 Demonstrați că o izometrie cu un singur punct fix e o rotație.

Exc 4.6 $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$. Construiți un ΔABC echilateral cu $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in d_3$.



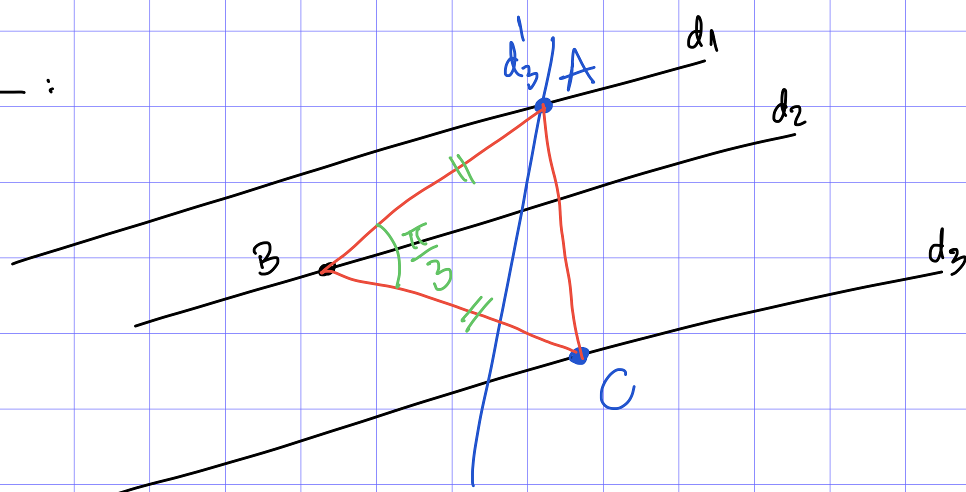
Este $\triangle ABC$ echilateral?

$$\frac{s}{t} = \frac{x}{y} \Longrightarrow \boxed{\frac{AB''}{B''C} = \frac{s}{t}}$$

$$\frac{BA'}{BC'} = \frac{s}{t}$$

Când obținem punctele de intersecție A și C, avem $AC \parallel A'C'$ datorită egalității rapoartelor de mai sus

Metoda 2:



Considerăm rotația $R_{B,\frac{\pi}{3}}$. $\quad R_{B,\frac{\pi}{3}}(d_3) = d_3'$

$$A := d_3' \cap d_1$$

În particular, $A \in d_3' = R_{B,\frac{\pi}{3}}(d_3)$

deci $\exists\, C \in d_3$ a.î. $R_{B,\frac{\pi}{3}}(C) = A$

$$\left(C = R_{B,-\frac{\pi}{3}}(A) \right)$$

Deci ΔABC este isoscel $(BA = BC)$, cu un unghi de $\frac{\pi}{3}$. $\Rightarrow$

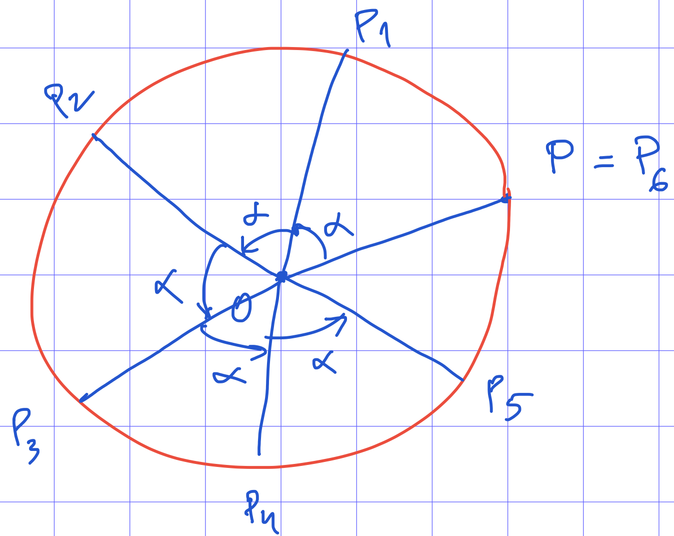
$\Rightarrow \Delta ABC$ echilateral.

$\boxed{\text{Exc 5.4}}$ O, P puncte în plan și $\alpha \in (0, 2\pi)$

Ce este mulțimea

$$\mathcal{P} = \{ R_{O, k\alpha}(P) \mid k \in \mathbb{Z} \} \quad ?$$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$



Dacă $\frac{2\pi}{\alpha} \in \mathbb{N}^*$

$\frac{2\pi}{\alpha} = n, \ n \in \mathbb{N}^*$

$\alpha = \frac{2\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

Dacă $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\mathcal{P}$ = mulțimea vârfurilor unui poligon regulat cu n laturi

$\alpha \in (0, 2\pi)$.

Întrebare: există $k \in \mathbb{N}^*$ a.î. $k \cdot \alpha = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$?

Dacă ar exista, atunci $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{k}{2n} \in \mathbb{Q}$

Deci α nu poate fi rațional (ca să existe acel k)

dacă $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $k\alpha \neq 2n\pi$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

atunci nu obținem vf. poligon regulat

În acest caz, P = mulțime infinită de puncte pe cercul de centru O și rază OP.

5.7 & 5.8 $\longrightarrow$ pentru Seminarul 6.