Restanță la analiză matematică an I, sem. I 04.06.2020

Numele şi prenumele

Grupa

Punctaj seminar

Subiectul 1. a) Fie $A = \left\{ \frac{n+\sqrt{2}}{3n+\sqrt{3}} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup (-3,0]$ o submulţime a mulţimii numerelor reale \mathbb{R} . Determinaţi interiorul, aderenţa, mulţimea punctelor de acumulare şi frontiera mulţimii A. Decideţi dacă mulţimea A este compactă sau conexă. Justificaţi!

b) Calculați:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+5} + \dots + \frac{1}{3n+(3n-1)} \right).$$

Subiectul 2. Studiați convergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{xn^2 + 7n + 8}{n^2 + 5n + 2} \right)^n$$

în funcție de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

Subiectul 3. Considerăm funcția $f:[0,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x+1) - \frac{2\sin x}{x}, & \text{dacă } x \in (0, \infty), \\ -2 + \sin 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

- i) Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției f
- ii) Studiați uniform continuitatea funcției f.

Subiectul 4. Considerăm șirul de funcții $f_n:[5,6] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{(x+n)^3}{(n+2)^4},$$

pentru orice $x \in [5, 6]$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n>1}$.

Subiectul 5. Fie $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă care verifică relația $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x f(x)dx = 1$.

- i) Dați exemplu de funcție f ca mai sus.
- ii) Demonstrați că $\int_0^1 f^2(x) dx \ge 4$.

¹Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valoreaza 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!