Examen la Cercetări operaţionale seria 22

Cristian Niculescu

18 ianuarie 2021

$$1)\ \begin{cases} \inf\,(2x_1 + x_2) \\ x_1 + x_2 - x_3 = i \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 52 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

a) Rezolvaţi problema cu algoritmul simplex dual.
b) Reoptimizaţi pentru $c = (-2, -1, 0, 0)^T$.
2) Să se rezolve problema de transport

i	6	12	3
18	24	30	5
36	42	48	8
1	6	9	

Înlocuiţi i cu numărul corespunzător din următoarea listă:
CHIVA C ALEXANDRU-ION 1
CRETU M. TEODOR-DANIEL 2
FAGARASI T. IULIA-MARIA 3
FILIP A. CRISTIAN 4
GHENU E.D. ANDREEA DANIELA 5
GHINEA D. ANDREEA-CRISTINA 6
GUSTER F. ALEXANDRU-FLORIN 7
HALIP S. ALEXANDRU 8
HIRJANU G. GIANINA-GABRIELA 9
IOAN B.G. MIHAI-GEORGE 10
JERCAN V. MĂDĂLIN-IONUȚ 11
MANTU C. PHILLIPE-CRISTOPHER 12
NĂSTASE A.G. VLAD-ȘTEFAN 13
NEACSU V. MIHAI-ALIN 14
NEGESCU D. M. EDUARD-MIHAI 15

NUME: ARON ALEXANDRA ANA MARIA
GRUPA: 222
$i=28$

EXAMEN LA CERCETĂRI OPERAȚIONALE - SERIA 22
18 ianuarie 2021

1) $\begin{cases} \inf(2x_1+x_2) \\ x_1+x_2-x_3=28 \\ x_1+2x_2+x_4=52 \\ x_j \geq 0, j=\overline{1,4} \end{cases}$

a) Rezolvați problema cu algoritmul simplex dual.
b) Reoptimizați pentru $c=(-2,-1,0,0)^T$

REZOLVARE:

a) $\begin{cases} \inf(2x_1+x_2) \\ x_1+x_2-x_3=28 \\ x_1+2x_2+x_4=52 \\ x_j \geq 0, j=\overline{1,4} \end{cases}$

$c^T=(2,1,0,0)$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 28 \\ 52 \end{pmatrix}$

$B=(a^3,a^4)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}=\{3,4\}, \mathcal{R}=\{1,2\}, \quad c_B^T=(0,0)$

$\left.\begin{array}{l} z_1^B-c_1=c_B^T y_1^B-c_1=(0,0)y_1^B-c_1=0-2=-2\leq 0 \\ z_2^B-c_2=c_B^T y_2^B-c_2=(0,0)y_2^B-c_2=0-1=-1\leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B$ este dual admisibilă

$\overline{x}^B=B^{-1}b=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 \\ 52 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -28 \\ 52 \end{pmatrix}, \quad \overline{z}^B=c^T\overline{x}^B=(0,0)\begin{pmatrix} -28 \\ 52 \end{pmatrix}=0.$

$y_1^B=B^{-1}a^1=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y_2^B=B^{-1}a^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

			2	1			
C_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	-28	-1	-1	1	0	
0	x_4	52	1	2	0	1	
	z	0	-2	-1	0	0	

Testul de optim: $\overline{x}^B \geq 0$

$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} -28 \\ 52 \end{pmatrix} \not\geq 0 \Rightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit

Testul de incompatibilitate: $\exists r \in B$ aî $\overline{x_r}^B < 0$ şi $y_{rj}^B \geq 0$, $j = \overline{1,m}$

$\left.\begin{array}{l} \overline{x_3}^B = -28 < 0 \\ y_{3i}^B = -1 \not\geq 0 \\ \overline{x_4}^B = 52 \not< 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ testul de incompatibilitate nu este îndeplinit

Criteriul de ieşire din bază: $r \in B$ aî $\overline{x_r}^B = \min\limits_{i | \overline{x_i}^B < 0} \overline{x_i}^B \Rightarrow x_r$ iese din bază

$\min\limits_{i | \overline{x_i}^B < 0} \overline{x_i}^B = \min(\overline{x_3}) = \min(-28) = -28 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow x_3$ iese din bază

Criteriul de intrare în bază: $k \in R$ aî $\dfrac{z_k^B - c_k}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{rk}^B < 0} \dfrac{z_j^B - c_j}{y_{rj}^B} \Rightarrow$
x_k iese din bază.

$\min\limits_{y^B_k < 0} \dfrac{z_j^B - c_j}{y^B} = \min\left(\dfrac{z_1^B - c_1}{y_{31}^B}, \dfrac{z_2^B - c_2}{y^B}\right) = \min\left(\dfrac{-2}{-1}, \dfrac{-1}{-1}\right) = \min(2,1) = 1 \Rightarrow$
$k = 2 \Rightarrow x_2$ intră în bază.

Pivot: $y_{rk}^B = y_{42}^B = -1$.

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	28	1	1	-1	0	
x_4	-4	-1	0	2	1	
z	28	-1	0	-1	0	

Testul de optim: $\overline{x}^B \geq 0$.

$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} 28 \\ -4 \end{pmatrix} \not\geq 0 \Rightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit

Testul de incompatibilitate: $\exists r \in B$ a.î. $\overline{x}_r^B < 0$ și $y_{rj}^B \geq 0, j = \overline{1,m}$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x}_4 = -4 < 0 \\ y_{41}^B = -1 \not\geq 0 \\ \overline{x}_2 = 28 \not< 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{testul de incompatibilitate nu este îndeplinit.}$$

Criteriul de ieșire din bază: $r \in B$ a.î. $\overline{x}_r^B = \min\limits_{i|\overline{x}_i^B<0} \overline{x}_i^B \Rightarrow x_r$ iese din bază

$\min\limits_{i|\overline{x}_i^B<0} \overline{x}_i^B = \min(\overline{x}_4) = \min(-4) = -4 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow x_4$ iese din bază

Criteriul de intrare în bază: $k \in R$ a.î. $\dfrac{z_k^B - c_k}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{rk}^B<0} \dfrac{z_j^B - c_j}{y_{rj}^B} \Rightarrow$ x_k iese din bază

$\min\limits_{y_{4k}^B<0} \dfrac{z_j^B - c_j}{y_{4j}^B} = \min\left(\dfrac{z_1^B - c_1}{y_{41}}\right) = \min\left(\dfrac{-2}{-1}\right) = 2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x_1$ intră în bază

Pivot $y_{rk}^B = y_{41}^B = -1.$

	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
	x_2	24	0	1	1	1
	x_1	4	1	0	-2	-1
	z	32	0	0	-3	-1

Testul de optim $\overline{x}^B \geq 0$

$\overline{x}^B = \begin{pmatrix} 24 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ testul de optim este îndeplinit.

Deci soluția optimă este: $x_1^* = 4, x_2^* = 24, x_3^* = x_4^* = 0$, iar valoarea optimă este 32.

b) Dacă se modifică c, B rămâne primal admisibilă

Dacă se modifică c, se modifică linia z din ultimul tabel simplex de la punctul a).

$c=(-2,-1,0,0)^T$

					0	0
C_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
-1	x_2	24	0	1	1	1
-2	x_1	4	1	0	-2	-1
	z	-32	0	0	3	1

$(-1,-2)\begin{pmatrix}24\\4\end{pmatrix}=-24-8=-32$

$(-1\ -2)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}-0=-1+4-0=3$

$(-1\ -2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-1+2=1$

Baza rămâne dual admisibilă

Continuăm cu algoritmul simplex primal.

Testul optim $z_j^B-c_j\le 0, \forall j\in R$, $R=\{3,4\}$

$\left.\begin{array}{l} z_3^B-c_3=3\not\le 0 \\ z_4^B-c_4=4\not\le 0\end{array}\right\}\Rightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit

Testul de optim infinit: $\exists k\in R$ a.î. $z_k^B-c_k>0$ și $y_k^B\le 0$:

$\left.\begin{array}{l} z_3^B-c_3=3>0\ ,\ y_3^B=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\not\le 0 \\ z_4^B-c_4=4>0\ ,\ y_4^B=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\not\le 0.\end{array}\right\}\Rightarrow$ testul de optim infinit nu este îndeplinit.

Criteriul de intrare în bază:

$k\in R$ a.î. $z_k^B-c_k=\max\{z_j^B-c_j \mid j\in R, z_j^B-c_j>0\}\Rightarrow x_k$ intră în bază

$\max(3,1)=3$ obținut pe coloana lui $x_3\Rightarrow x_3$ intră în bază

Criteriul de ieșire din bază:

$k=3:\ \min\limits_{y_{i3}^B>0}\dfrac{\overline{x_i}^B}{y_{i3}^B}=\min\left(\dfrac{24}{1}\right)=24$ obținut pe linia lui $x_2\Rightarrow x_2$ iese din bază

Pivot $y_{rk}^B=y_{23}^B=1$.

Ultimul tabel simplex:

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	24	0	1	1	1	
x_1	52	1		0		
z	-104	0	-3	0	-2	

Testul de optim: $z_j^B - c_j \le 0, \forall j \in R$; $R=\{2,4\}$

$$\left.\begin{array}{l} z_2^B - c_2 = -3 \le 0 \\ z_4^B - c_4 = -2 \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{testul de optim este îndeplinit}$$

Deci soluția optimă este: $x_1^* = 52$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 24$, $x_4^* = 0$, iar valoarea optimă -104.

2) Să se rezolve problema de transport.

28	6	12	3
18	24	30	5
36	42	48	8
1	6→5	9	

$m=3$, $n=3$.

REZOLVARE:

Folosesc metoda colțului de nord-vest.

$$(1,1)\in B \Rightarrow \begin{cases} \overline{x_{11}} = \min(a_1, b_1) = \min(3,1) = 1 \\ \min(a_1,b_1) = \min(3,1) = 1 = b_1 \Rightarrow \begin{cases} \text{se elimină coloana 1} \\ a_1 \leftarrow a_1 - b_1 = 3-1 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$(1,2)\in B \Rightarrow \begin{cases} \overline{x_{12}} = \min(a_1, b_2) = \min(2,6) = 2 \\ \min(a_1,b_2) = \min(2,6) = 2 = a_1 \Rightarrow \begin{cases} \text{se elimină linia 1} \\ b_2 \leftarrow b_2 - a_1 = 6-2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$(2,2)\in B \Rightarrow \begin{cases} \overline{x_{22}} = \min(a_2, b_2) = \min(5,4) = 4 \\ \min(a_2,b_2) = \min(5,4) = 4 = b_2 \Rightarrow \begin{cases} \text{elimin coloana 2} \\ a_2 \leftarrow a_2 - b_2 = 5-4 = 1 \end{cases} \end{cases}$$

28 / 1	6 / 2	12	3→2
18	24 / 5	30 / 1	5→1
36	42	48 / 8	8
1	6→4	9→8	

$(2,3)\in B \Rightarrow \begin{cases} \overline{x_{23}} = \min(a_2, b_3) = \min(1,9) = 1, \\ \min(a_2,b_3) = \min(1,9) = 1 = a_2 \Rightarrow \begin{cases} \text{eliminăm linia 2} \\ b_3 \leftarrow b_3 - a_2 = 9 - 1 = 8 \end{cases} \end{cases}$

$(3,3)\in B \Rightarrow \overline{x_{33}} = \min(a_3, b_3) = \min(8,8) = 8$

$B = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

	$v_1=28$	$v_2=6$	$v_3=12$	
$u_1=0$	*28 / 1	6 / 2	12 [0]	3
$u_2=18$	18 [28]	24 * / 4	30 / 1	5
$u_3=36$	36 [28]	42 [0]	48 * / 8	8
	1	6	9	

Determinăm variabilele din problemă u_i și v_j, care verifică sistemul:

$u_i + v_j = c_{ij}, (i,j)\in B \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + v_1 = 28 \\ u_1 + v_2 = 6 \\ u_2 + v_2 = 24 \\ u_2 + v_3 = 30 \\ u_3 + v_3 = 48 \end{cases}$

Punem $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 28,\ v_2 = 6,\ u_2 = 18,\ v_3 = 12,\ u_3 = 36$

Determinăm: $z_{ij} - c_{ij}, (i,j)\in R$:

$(1,3): z_{13} - c_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 12 - 12 = 0$

$(2,1): z_{21} - c_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = \cancel{18} + 28 - \cancel{18} = 28$

$(3,1): z_{31} - c_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = \cancel{36} + 28 - \cancel{36} = 28$

$(3,2): z_{32}-c_{32}=u_3+v_2-c_{32}=36+6-42=0$

Testul de optim: $z_{ij}-c_{ij}\le 0, \forall (i,j)\in R$.

$z_{21}-c_{21}=28 \not\le 0 \Rightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit

Criteriul de intrare în bază

$(s,k)\in R$ a.î. $z_{sk}-c_{sk}=\max\limits_{(i,j)\in R}(z_{ij}-c_{ij}) \Rightarrow (s,k)$ intră în bază

$\max(0,28,28,0)=28 \Rightarrow (2,1)$ sau $(3,1)$ intră în bază $\Rightarrow$ aleg $(3,1)$ să intre în bază

Ciclu: $(3,1), (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)$

Rang: 1 2 3 4 5 6

Criteriul de ieșire din bază:

(r,t) de rang par în ciclu a.î. $\overline{x}_{rt}=\min\{\overline{x}_{ij} \mid (i,j)$ de rang par în ciclu$\} \Rightarrow (r,t)$ iese din bază

$\min(\overline{x}_{11}, \overline{x}_{22}, \overline{x}_{33})=(1,4,8)=1 \Rightarrow (1,1)$ iese din bază.

$$\overline{x}'_{ij}=\begin{cases}\overline{x}_{ij}-\overline{x}_{rt}, & (i,j) \text{ are rang par în ciclu}\\ \overline{x}_{ij}+\overline{x}_{rt}, & (i,j) \text{ are rang impar în ciclu}\\ \overline{x}_{ij}, & (i,j) \text{ nu e în ciclu}\end{cases}$$

$\overline{x}_{31}=\cancel{\overline{x}_{31}+\overline{x}_{11}=0+1=1}=\overline{x}_{31}+\overline{x}_{11}=0+1=1$

$\overline{x}_{11}=\overline{x}_{11}-\overline{x}_{11}=0$

$\overline{x}_{12}=\overline{x}_{12}+\overline{x}_{11}=2+1=3$

$\overline{x}_{22}=\overline{x}_{22}-\overline{x}_{11}=4-1=3$

$\overline{x}_{23}=\overline{x}_{23}+\overline{x}_{11}=1+1=2$

$\overline{x}_{33}=\overline{x}_{33}-\overline{x}_{11}=8-1=7.$

$B=\{(3,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

	$v_1=0$	$v_2=6$	$v_3=12$	
$u_1=0$	28 -28	6 3	12 0	3
$u_2=18$	18 0	24 3	30 2	5
$u_3=36$	36 1	42 0	48 7	8
	1	6	9	

Determin variabilele din prob duală u_i și v_j, care verifică sistemul $u_i+v_j=c_{ij}$, $(i,j)\in B$

$$\begin{cases} u_1+v_2=6 \\ u_2+v_2=24 \\ u_2+v_3=30 \\ u_3+v_1=36 \\ u_3+v_3=48 \end{cases}$$

$u_1=0 \Rightarrow v_2=6 \Rightarrow u_2=18,\ v_3=12,\ u_3=36,\ v_1=0$

Testul de optim: $z_j-c_{ij}\le 0,\ \forall j\in R \Rightarrow$ testul de optim este îndeplinit.

$\Rightarrow$ soluția optimă:

$x_{12}^*=3$

$x_{22}^*=3$

$x_{23}^*=2$

$x_{31}^*=1$

$x_{33}^*=7$

$x_{11}^*=x_{13}^*=x_{21}^*=x_{32}^*=0.$

valoarea optimă: $6\cdot 3+24\cdot 3+30\cdot 2+36\cdot 1+48\cdot 7=522.$