Tutoriat 3

Factorizările LU fără pivotare, LDU și LDL^T.

Când o matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite LU fără pivotare?

UASE:

1. $\forall$ orice minor principal de ordin de la 1 la n e $\neq 0$.
2. A admite MEGFP
3. A admite factorizarea LU fără pivotare.

Vrem $A = L \cdot U$, cu L = inferior triunghiulară și U = superior triunghiulară.

Scopul:

$$Ax = b \xrightarrow{A=LU} (LU)x = b \Rightarrow L(\underbrace{Ux}_{y \in \mathbb{R}^n}) = b.$$

① $Ly = b$, L inferior triunghiulară $\xrightarrow[\text{substituției ascendente}]{\text{metoda}}$ se determină $y \in \mathbb{R}^n$.

② $Ux = y$, U superior triunghiulară $\xrightarrow[\text{substituției descendente}]{\text{metoda}}$ se determină $x \in \mathbb{R}^n$.

Cum se procedează?

1. Partiționăm matricele A, L, U astfel:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & \overbrace{a_{12} & \cdots & a_{1n}}^{A_{12}} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \underbrace{a_{n2} & \cdots & a_{nn}}_{A_{22}} \end{array}\right]$$

where the first column below a_{11} ($a_{21}, \ldots, a_{n1}$) is A_{21}.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0_{1,n-1} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}.$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0_{n-1,1} & U_{22} \end{bmatrix}$$

2. Cu aceste partiționări, calculăm $A = L \cdot U$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}U_{12} \\ L_{21}u_{11} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_{11}u_{11} = a_{11}. \\ l_{11}U_{12} = A_{12}. \\ L_{21}u_{11} = A_{21}. \\ L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} = A_{22}. \end{cases}$$

3. Luăm $l_{11} = 1$ și aflăm restul de necunoscute.

4. Repetăm acest procedeu până găsim L și U.

Observație: La fiecare pas, aflăm din L câte o coloană, iar din U câte o linie.

Factorizarea LDU

Când o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admite factorizarea LDU?

→ când A admite LU fără pivotare.

Algoritm:

1. Dacă se poate, scrie $A = L \cdot \tilde{U}$.
2. Vreau $DU = \tilde{U} \Rightarrow U = D^{-1}\tilde{U}$, unde:

   → $D = diag(\tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{22}, \dots, \tilde{u}_{nn}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă;

   → $D^{-1} = diag\left(\frac{1}{\tilde{u}_{11}}, \frac{1}{\tilde{u}_{22}}, \dots, \frac{1}{\tilde{u}_{nn}}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Observație: Factorizarea LDL^T este un caz particular al factorizării LDU, în sensul următor:

→ dacă $A = A^T \Rightarrow A = LDL^T$ (luăm $U = L^T$), unde $D = diag(\tilde{u}_{11}, \dots, \tilde{u}_{nn}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Condiții ca o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ să admită LDL^T:

1. A admite LU FP
2. $A = A^T$.

Exercițiu: Să se determine, dacă există, factorizările LU fără pivotare, LDU și LDL^T pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

$$A_{21}\left\{\right. A=\begin{bmatrix} 25 & \overbrace{15 \quad -5}^{A_{12}} \\ 15 & 18 \quad\ \ 0 \\ -5 & \underbrace{0 \quad\ \ 11}_{A_{22}} \end{bmatrix} ; \quad L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} ; \quad U=\begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}.$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} ; \quad LU=\begin{bmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}U_{12} \\ L_{21}u_{11} & L_{21}U_{12}+L_{22}U_{22} \end{bmatrix}.$$ Obținem:

$$\begin{cases} l_{11}u_{11}=25 \xRightarrow{l_{11}=1} u_{11}=25. \\ l_{11}U_{12}=A_{12} \xRightarrow{l_{11}=1} U_{12}=\begin{bmatrix} 15 & -5 \end{bmatrix} \\ L_{21}u_{11}=A_{21} \xRightarrow{u_{11}=25} L_{21}=\dfrac{A_{21}}{u_{11}}=\begin{bmatrix} \frac{15}{25} \\ \frac{-5}{25} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \\ L_{21}U_{12}+L_{22}U_{22}=A_{22} \end{cases}$$

$$L_{22}U_{22}=A_{22}-L_{21}U_{12}=\begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 & -5 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$ $\rightarrow$ noua matrice de factorizat LU.

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{22} & 0 \\ l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} l_{22}u_{22}=9 \xRightarrow{l_{22}=1} u_{22}=9 \\ l_{22}u_{23}=3 \xRightarrow{l_{22}=1} u_{23}=3 \\ l_{32}u_{22}=3 \Rightarrow l_{32}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \\ l_{32}u_{23}+l_{33}u_{33}=10 \end{cases}$$

$$l_{32}u_{23}+l_{33}u_{33}=10 \Rightarrow l_{33}u_{33}=10-\frac{1}{3}\cdot 3=9 \xRightarrow{l_{33}=1} u_{33}=9.$$

Am obținut: $$L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Am uitat să verificăm că A admite LU FP. Avem:

$\Delta_1 = |25| = 25 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 18 \end{vmatrix} = 25\cdot 18 - 15\cdot 15 = 450 - 225 = 225 \neq 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2025. \neq 0$

$\Rightarrow$ A admite LU FP.

Pentru LDU:

$\rightarrow$ În primul rând, A admite LDU (A admite LU FP);

$D\tilde{U} = \tilde{U}$, unde $D = diag(25, 9, 9) \Rightarrow D^{-1} = diag\left(\frac{1}{25}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$.

$$U = D^{-1}\cdot\tilde{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{15}{25} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru LDL^T:

$$\rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix} = A \xRightarrow[\text{LU FP}]{\text{A admite}} \text{A admite } LDL^T\text{, așadar:}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = diag(25, 9, 9).$$