Tutoriat 5

SEMANTICA LP.

Definim următoarele operații pe $\{0,1\}$, folosind tabele de adevăr:

$\neg : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$

Avem $\neg p = 1 \Leftrightarrow p = 0$

p	$\neg p$
0	1
1	0

$\rightarrow : \{0,1\} \times \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$

Avem $p \rightarrow q = 1 \Leftrightarrow p \leq q$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\vee, \wedge, \leftrightarrow : \{0,1\} \times \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1) $(\forall)\ p, q \in \{0,1\}$ avem:

a) $p \vee q = \neg p \rightarrow q$

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1

b) $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$

c) $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Def: O evaluare este o funcție $e: V \longrightarrow \{0,1\}$

Teoremă: $(\forall)$ $e: V \longrightarrow \{0,1\}$ o evaluare $(\exists!)$ $e^+ : Form \longrightarrow \{0,1\}$ cu prop.:

- $e^+(v) = e(v)$ $(\forall)$ $v \in V$
- $e^+(\neg \varphi) = \neg e^+(\varphi)$ $(\forall)$ $\varphi \in Form$
- $e^+(\varphi \longrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \longrightarrow e^+(\psi)$ $(\forall)$ $\varphi, \psi \in Form$.

Prop: $(\forall)$ $e: V \longrightarrow \{0,1\}$ o evaluare și $(\forall)$ $\varphi, \psi \in Form$ avem:

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$$
$$e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$$
$$e^+(\varphi \longleftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \longleftrightarrow e^+(\psi)$$

Prop: $(\forall)$ $e_1, e_2 : V \longrightarrow \{0,1\}$ avem:

$$e_1(v) = e_2(v) \quad (\forall)\ v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$$

Def:
- O evaluare $e: V \longrightarrow \{0,1\}$ este model al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$ (not. $e \vDash \varphi$)
- φ admite un model $\Rightarrow$ φ satisfiabilă
- $(\forall)$ e evaluare e model al lui φ $\Rightarrow$ φ tautologie (not. $\vDash \varphi$)
- $Mod(\varphi) = \{$ modelele lui $\varphi \}$

Prop:
i) φ tautologie $\Leftrightarrow$ $\neg \varphi$ nesatisfiabilă
ii) φ nesatisfiabilă $\Leftrightarrow$ $\neg \varphi$ tautologie

! Există o mulțime $V = \{\varphi_n = v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset Form$ numărabilă a.î. φ și $\neg\varphi$ satisfiabile.

Metoda tabelului: Dacă vrem că $\vDash \varphi$, atunci arătăm că

$$e_i'^+(\varphi) = 1 \quad (\forall)\ i = \overline{1, 2^k}, \quad k = |Var(\varphi)|$$

și $e' = e|_{Var(\varphi)}$, $e'(x_i) = e(x_i)$

Def: Fie $\varphi, \psi \in Form$:

- φ e consecință semantică a lui ψ dacă:
  $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$ Not. $\psi \vDash \varphi$
- φ și ψ sunt logic echivalente dacă:
  $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$ Not. $\varphi \sim \psi$

Obs: $\sim$ - rel. de echivalență pe Form

Prop: Fie $\varphi, \psi \in Form$:

- $\psi \vDash \varphi \iff \vDash \psi \rightarrow \varphi$
- $\psi \sim \varphi \iff \psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi \iff \vDash \psi \leftrightarrow \varphi$