Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Examen

2 Iunie 2018

Timp de lucru 2h30. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Mult succes !

Exercițiul 1 10p

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \,|\, X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 2 10p

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$ unde $\theta \in (0,1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2, \dots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

Exercițiul 3 10p

Calculați marginea Rao-Cramer pentru familia $\mathcal{N}(\mu, 1)$ unde μ este necunoscut. Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor și verificați dacă este eficient.

Exercițiul 4 10p

Considerăm următorul eșantion de talie 20 dintr-o populație Bernoulli de parametru $\theta \in (0,1)$:

`0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0`

a) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și determinați informația lui Fisher $I(\theta)$.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{V}_\theta[X_1]$. Este acesta nedeplasat? Dar consistent? Justificați răspunsul.

c) Construiți un interval de încredere pentru $\hat{\theta}$ de nivel 95%.

2 IUNIE 2018

① Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $P_\theta(X_1 = 1 | X_1 > 0)$. Este acesta consistent?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la pct b) este sau nu nedeplasat

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim P(\theta)$

$f_\theta(k) = P(X = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$, $k \in N$

$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = e^{-n\theta} \frac{\theta^{x_1 + \dots + x_n}}{(x_1 + \dots + x_n)!}$

$\ell(\theta; x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \log(\theta) - n\theta - \ln(x_1 + \dots + x_n)!$

$\frac{d\ell}{d\theta}(\theta; x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n) \cdot \frac{1}{\theta} - n$

θ		0		$\bar{X}_n$	
$\ell(\theta; x_1, \dots, x_n)$			$\nearrow$		$\searrow$

Deci $\ell(\theta; x_1, \dots, x_n) = \bar{X}_n$

$\hat{\theta} = \bar{X}_n$

Deplasarea:

$E[X_1] = \sum_{k \geq 0} k \cdot e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!}$

$\sum_{k \geq 0} e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} = 1$

$\sum_{k \geq 0} \frac{\theta^k}{k!} = e^\theta \,\Big|\, \frac{d}{d\theta}$

$\sum_{k \geq 0} k \cdot \frac{\theta^{k-1}}{k!} = e^\theta \,\Big|\, \cdot \theta$

$\sum_{k \geq 0} k \cdot e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} = \theta$

Deci $E[X_1] = \theta = E(\bar{X}_n) = E(\hat{\theta})$

Deci $\hat{\theta}$ este nedeplasat.

$\hat{\theta} = \bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} E[X_1] = \theta$ (L. N. M) $\Rightarrow$ $\hat{\theta}$ e consistent

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_1) = \frac{1}{n} Var(X_1)$$

$$Var(X_1) = \sum_{k \geq 0}^{n} k^2 e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} - \theta^2$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{\theta^k}{k!} = e^{\theta} \cdot \theta \Big| \frac{d}{d\theta}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{\theta^{k-1}}{k!} = e^{\theta} \cdot \theta + e^{\theta} \Big| \cdot \theta$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{\theta^k}{k!} = e^{\theta}(1+\theta) \cdot \theta$$

$$Var(X_1) = (1+\theta) \cdot \theta - \theta^2 = \theta$$

$$Var(\hat{\theta}) = Var(\bar{X}_n) = \frac{\theta}{n}$$

$$I_1 = E_\theta \left[\left(\frac{d}{d\theta} \log f_\theta(X_1) \right)^2 \right] = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{d}{d\theta} \log f_\theta(k) \right)^2 \cdot f_\theta(k) =$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{(f_\theta'(k))^2}{(f_\theta(k))^2} \cdot f_\theta(k)$$

$$f_\theta(k) = e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!}$$

$$f_\theta'(k) = -e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} + e^{-\theta} \cdot k \cdot \frac{\theta^{k-1}}{k!} = -e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} + e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} \left(-1 + \frac{k}{\theta} \right)$$

$$I_1 = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{k}{\theta} - 1 \right)^2 \cdot e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} = \frac{1}{\theta^2} \sum_{k \geq 1} k^2 \cdot e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} - \frac{2}{\theta} \sum_{k \geq 0} k e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} +$$

$$+ \sum_{k \geq 0} e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} = \frac{1}{\theta^2} \cdot \theta(\theta+1) - \frac{2}{\theta} \cdot \theta + 1 = \frac{1}{\theta}$$

Ineg Rao Cramer:

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I_n} = \frac{1}{n \cdot I_1}$$

$$\frac{\theta}{n} \geq \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\theta}}$$ Avem egalitate $\Rightarrow$ $\hat{\theta}$ e eficient

b) $P_\theta(X_1=1 \mid X_1>0) = \dfrac{P_\theta(X_1=1)}{P_\theta(X_1\geq 0)} = \dfrac{e^{-\theta}\cdot\frac{\theta}{1!}}{1-e^{-\theta}\cdot\frac{1}{0!}} = \dfrac{e^{-\theta}\cdot\theta}{1-e^{-\theta}}$

$g:(0,\infty)\to(0,\infty)$

$g(\theta) = \dfrac{e^{-\theta}\cdot\theta}{1-e^{-\theta}}$

$\hat{X}_n$ e estimatorul de verosimilitate maximă pt $\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow g(\overline{X}_n)$ e estim de ver maximă pt $P_\theta(X_1=1\mid X_1>0)$

Consistența: g continuă

L.N.M.: $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \theta$

$\Big/ \xRightarrow{\text{T apl cont.}} g(\overline{X}_n) \xrightarrow{P} g(\theta) = P_\theta(X_1=1\mid X_1>0)$

Deci g este consistent

c) $g(\overline{X}_n) = \dfrac{e^{-\overline{X}_n}\cdot\overline{X}_n}{1-e^{-\overline{X}_n}} = \dfrac{\overline{X}_n}{e^{\overline{X}_n}-1} = \dfrac{X_1+\ldots+X_n}{n\cdot\left(e^{\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}}-1\right)}$

$P(X_1+\ldots+X_n=e) = \sum_{i=0}^{e} P(X_1+\ldots+X_n=i)\cdot P(X_n=e-i)$

$P(X_1+X_2=e) = \sum_{i=0}^{e} e^{-2\theta}\dfrac{\theta^i}{i!}\cdot\dfrac{\theta^{e-i}}{(e-i)!} = \sum_{i=0}^{e} e^{-2\theta}\cdot\dfrac{\theta^e}{i!\,(e-i)!} =$

$= \dfrac{e^{-2\theta}}{e!}\cdot\theta^e\cdot\sum_{i=0}^{e}\binom{e}{i} = e^{-2\theta}\cdot\dfrac{2\theta}{e!}$

$P(X_1+X_2+X_3=e) = \sum_{i=0}^{e} e^{-3\theta}\cdot\dfrac{(2\theta)^i}{i!}\cdot\dfrac{\theta^{e-i}}{(e-i)!} =$

$= e^{-3\theta}\cdot\dfrac{\theta^e}{e!}\cdot\sum_{i=0}^{e} 2^i\cdot\binom{e}{i} = e^{-3\theta}\cdot\dfrac{(3\theta)^e}{e!}$

Prin inducție:

$P(X_1+\ldots+X_n=k) = e^{-n\theta}\dfrac{(n\theta)^k}{k!}$

$E[g(\overline{X}_n)] = \sum_{k\geq 0}\dfrac{k}{n\cdot(e^{\frac{k}{n}}-1)}\cdot P(X_1+\ldots+X_n=k) =$

$= \sum_{k\geq 0}\dfrac{k}{n(e^{\frac{k}{n}}-1)}\cdot e^{-n\theta}\cdot\dfrac{(n\theta)^k}{k!}$

① Calculați marginea Rao - Cramer pentru familia $N(\mu, 1)$ unde μ este necunoscut. Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor și verificați dacă e eficient

$N(\mu, 1)$

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, 1)$

$f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$

$\frac{d}{d\mu} \log f_\mu(x) = \frac{d}{d\mu}\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right) = x-\mu$

$I_1 = E[(\frac{d}{d\mu} \log f_\mu(x))^2] = E[(x-\mu)^2] = Var(X) = 1$

$I_n = n \Rightarrow MIRC = \frac{1}{n}$

$E[X_1] = \mu \Rightarrow \tilde{\mu} = \bar{X}_n \Rightarrow$ metoda momentelor

$Var(\tilde{\mu}) = Var\, \bar{X}_n = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X_1)$

$Var(\tilde{\mu}) = MIRC$, deci $\tilde{\mu}$ e eficient

① Considerăm următorul eșantion de talie 20 dintr-o populație Bernoulli pe parametru $\theta \in (0,1)$:

0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0

a) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și determinați informația lui Fisher $I(\theta)$

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pt $V_\theta[X_1]$. Este acesta nedeplasat? Dar consistent?

c) Construiți un interval de încredere pt $\hat{\theta}$ de nivel 95%.

$$f_\theta(x) = P(X=x) = \theta^{x}(1-\theta)^{1-x}$$

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \theta^{\sum x_i} \cdot (1-\theta)^{n-\sum x_i}$$

$$\ell(\theta; x_1, \dots, x_n) = (\sum x_i) \ln\theta + (n - \sum x_i)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{d\ell}{d\theta} = (\sum x_i)\cdot\frac{1}{\theta} - (n-\sum x_i)\frac{1}{1-\theta}$$

$$\frac{d\ell}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{n-\sum x_i}{\sum x_i} \Leftrightarrow \sum x_i - \theta\cdot\sum x_i = n\theta - \theta\sum x_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta_n = \frac{\sum x_i}{n}$$

pt $\theta < \overline{x_n} \Rightarrow \ell \nearrow$; $\theta > \overline{x_n} \Rightarrow \ell \searrow$ $\Big| \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{x_n}$ (verosim maximă)

$$\log f_\theta = x\cdot\ln\theta + (1-x)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{d}{d\theta}\log f_\theta = \frac{x}{\theta} - \frac{1-x}{1-\theta}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\log f_\theta = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{1-x}{(1-\theta)^2}$$

$$I_1 = -E_\theta\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\log f_\theta(X)\right] = -E_\theta\left[-\frac{X}{\theta^2} - \frac{1-X}{1-\theta^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\theta^2}E_\theta[X] + \frac{1}{(1-\theta)^2}\cdot E[1-X] = \frac{1}{\theta^2}\cdot\theta + \frac{1}{(1-\theta)^2}\cdot(1-\theta) =$$

$$= \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)} \Rightarrow I_n = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$$

$V_\theta[X_1] = \theta(1-\theta)$

$\hat{\theta} = \bar{X}_n \Rightarrow T_n$ enr de veros max pt $V_\theta[X_1]$

$$T_n = \bar{X}_n(1-\bar{X}_n)$$

Nedeplasarea : $E[T_n] = E[\bar{X}_n] - E[(\bar{X}_n)^2] =$

$= \theta - (\mathrm{var}(\bar{X}_n) + (E[X_n])^2)$

$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{n}{n^2}\mathrm{var}(X_1) = \frac{1}{n}\theta(1-\theta)$

$E[T_n] = \theta - (\frac{1}{n}\theta(1-\theta) + \theta^2) = \theta(1-\theta) - \frac{1}{n}\theta(1-\theta) = \frac{n-1}{n}\theta(1-\theta)$

Deci $E[T_n] \neq \theta(1-\theta) \Rightarrow T_n$ nu e nedeplasat

Consecință:

$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$

Fie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$g(\theta) = \theta(1-\theta)$ continuă

Din T. apl. cont. $\Rightarrow g(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(\theta)$

$T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta(1-\theta) \Rightarrow T_n$ e consistent.