Examen la analiză matematică[1]
an I, sem. I - seria 10
22.01.2021

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. a) Fie $A = \left\{ \frac{2^{n+4}}{2^n+1} : \; n \in \mathbb{N} \right\} \cup ([-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q})$ o submulţime a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Determinaţi interiorul, aderenţa, mulţimea punctelor de acumulare şi frontiera mulţimii A. Decideţi dacă mulţimea A este compactă sau conexă. Justificaţi!

b) Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(e^{\frac{\pi}{n}} + 2e^{\frac{2\pi}{n}} + 2e^{\frac{3\pi}{n}} + ... + ne^{\frac{n\pi}{n}} \right).$$

Subiectul 2. a) Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{[(n+2)!]^2 x^{3n}}$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

b) Studiaţi convergenţa şirului $\left(\frac{5^n (2n)!}{[(n+2)!]^2} \right)_{n>0}$ şi calculaţi limita sa (în caz că aceasta există).

Subiectul 3. Considerăm funcţia $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} + \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}, & \text{dacă } \; x \in [0,1) \cup (1, \infty), \\ \frac{1}{3}, & \text{dacă } \; x = 1. \end{cases}$$

i) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

ii) Studiaţi uniform continuitatea funcţiei f.

Subiectul 4. Considerăm şirul de funcţii $f_n : [4, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{n \sin(2x)}{nx + 1},$$

pentru orice $x \in [4, 6]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului $(f_n)_{n \geq 1}$.

Subiectul 5. Fie $f_n, g_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii definite prin

$$f_n(x) = \int_0^1 |x^n - t^n| \, dt, \text{pentru orice } x \in [0, 1], \; n \in \mathbb{N} \;\; \text{şi}$$

,

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valoreaza 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!**

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{dacă } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x - x^2, & \text{dacă } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i) Determinaţi

$$\inf_{x \in [0,1]} f_n(x) \text{ şi } \sup_{x \in [0,1]} f_n(x).$$

ii) Determinaţi numărul $n \in \mathbb{N}$ pentru care funcţia g_n are cel puţin un punct în care este derivabilă.