

Examen¹ la Geometrie I, seria 11, 31.01.2021

Nume și prenume: ANTOHI ALEXANDRU STEFAN

Grupa: 111

I. Decideți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Dacă hiperbola \mathcal{H} are ecuația $\mathcal{H} : \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$, atunci punctul $P = (-8, 0)$ este focar al lui \mathcal{H} . (0,7p)
2. Dreptele $d_1 : \alpha x - y - 5 = 0$ și $d_2 : -4x + 2y + 10 = 0$ se intersectează pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. (0,7p)
3. Dacă $A = (2, 0)$, $B = (\alpha, -1)$ și $C = (5, 1)$, atunci aria triunghiului ABC nu depinde de numărul $\alpha \in \mathbb{R}$. (0,7p)
4. Dacă în spațiul real \mathbb{R}^3 avem $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1}$ și $\pi = \{(1+t-s, 2t+s, -1+s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$, atunci $d \perp \pi$. (0,7p)
5. O compunere de inversiuni de același centru este tot o inversiune. (0,7p)

II. Redactați rezolvările complete²:

1. În planul \mathbb{R}^2 , fie dreapta $d : x + 3y - 2 = 0$ și funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2)$.
 - a) Arătați că f este o simetrie axială și determinați axa de simetrie. (0,75p)
 - b) Aflați ecuația dreptei $d' = f(d)$ și calculați $\cos \angle(d, d')$. (0,75p)
 - c) Găsiți ecuația unei conice nedegenerate care este tangentă la d și d' . (0,5p)

2. În planul euclidian \mathbb{R}^2 , fie conica

$$\Gamma : -2x^2 - 12xy + 7y^2 + 2x + 8y - 1 = 0$$

- a) Aflați natura conicei Γ . Precizați dacă este nedegenerată și dacă are centru unic. (0,5p)
- b) Aduceți Γ la o formă canonică și precizați reperul ortonormat pozitiv orientat în care are această formă. (1p)

3. În planul euclidian \mathbb{R}^2 , fie cercurile neconcentrice

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 : f_1(x, y) &= x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ \mathcal{C}_2 : f_2(x, y) &= x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0\end{aligned}$$

și d axa lor radicală.

Considerăm mulțimea de conice

$$\mathcal{F} = \{\Gamma_{\alpha_1, \alpha_2} : \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0\}.$$

- a) Demonstrați că $d \in \mathcal{F}$ și este singura dreaptă din \mathcal{F} . (0,25p)
- b) Demonstrați că cercurile din \mathcal{F} , diferite de \mathcal{C}_1 , au axa radicală cu \mathcal{C}_1 dreapta d . (0,75p)
- c) Demonstrați că dacă $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B\}$, atunci cercurile din \mathcal{F} sunt exact cercurile ce trec prin punctele A și B . (0,25p)
- d) Demonstrați că dacă $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, atunci cercurile din \mathcal{F} sunt disjuncte două câte două. (0,25p)

4. Considerăm \mathbb{R}^2 planul euclidian.

- a) Fie $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ o conică. Demonstrați că dacă $A, B, C, D \in \Gamma$ sunt vârfurile unui paralelogram cu centru O , atunci O este și centru al conicei Γ . (1p)
- b) Demonstrați că singura conică în care nu poate fi înscris un paralelogram (eventual degenerat) este parabola. (0,5p)

¹Se acordă 1 punct din oficiu. Nota pe lucrare este minimul dintre suma punctajelor și 10. Timp de lucru: 3 ore. Succes!

²Puteți presupune un subpunct adevărat în subpunctele următoare, chiar dacă nu ați reușit să îl demonstrați.