Incepe de la def

Def: 1) Spunem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă simplu (punctual) dacă șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ al sumelor parțiale converge simplu (punctual).

Notăm: $\lim_n s_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$

2) Spunem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă dacă șirul de funcții $(s_n)_n$ converge uniform.

Prop: Fie $f_n, f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I interval nedegenerat din $\mathbb{R}_0$.

1) Dc f continuă, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform la f, atunci $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este continuă.

2) Dc. $I = [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

$$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ integrabilă Riemann}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ converge uniform la } f \end{array}\right\}$$

Atunci i) f integrabilă Riemann pe $[a,b]$

ii) $\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_a^b \lim_n s_n = \lim_n \int_a^b s_n =$

$= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n .$$

3) I interval mărginit

$f_n : I \to \mathbb{R}$ derivabilă, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniform la $g : I \to \mathbb{R}$

$\exists x_0 \in I$ a.î. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ este convergentă

Atunci i) seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform la $f : I \to \mathbb{R}$

ii) f este derivabilă și $f' = g$.

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n' = g = f' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' & \to \text{„Derivarea comută cu suma"} \\ f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n & \to \text{„Derivarea se face termen cu termen"} \end{cases}$$

<u>Teoremă</u> - Criteriul Weierstrass -

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nedegenerat,

$f_n : I \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq [0, \infty)$ astfel ca:

1) seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

2) $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I$

Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform.

<u>Dem</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform la $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \iff$

$\iff (s_n)_{n \geq 1}$ converge uniform

$(s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n, \forall n \geq 1)$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ ~~avem~~ avem $|s_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in I$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon' \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m>n \geq n_\varepsilon$ avem $|s_m(x)-s_n(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in I$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon' \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m>n \geq n_\varepsilon$ avem

$$|f_m(x)+f_{m-1}(x)+\ldots+f_{n+1}(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in I \quad ①.$$

Dar $|f_m(x)+f_{m-1}(x)+\ldots+f_{n+1}(x)| \leq$

$$\leq \underset{a_m}{\underset{\wedge\!|}{|f_m(x)|}}+\ldots+\underset{a_{n+1}}{\underset{\wedge\!|}{|f_{n+1}(x)|}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ②.$$

Cum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergentă $\overset{\text{Crit. Cauchy}}{\Rightarrow} \exists n_\varepsilon' \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m>n \geq n_\varepsilon$

avem $|a_m+\ldots+a_{n+1}| \leq \varepsilon$

$a_m+a_{m-1}+\ldots+a_{n+1} \leq \varepsilon \Rightarrow \forall m>n \geq n_\varepsilon'$

$$|f_m(x)+f_{m-1}(x)+\ldots+f_{n+1}(x)| \overset{②}{\leq} a_m+\ldots+a_{n+1} \leq \varepsilon$$

adică ① are loc $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform.

= Serii de puteri =

Definiție: Numim serie de puteri o serie de funcții de tipul $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, unde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

($\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, $c \in \mathbb{R} \to$ serie de puteri în jurul punctului c)

• $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$, $\forall n \geq 0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

•• Deși funcțiile f_n sunt definite pe $\mathbb{R}$, în general, seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ nu este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Ex:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ ($f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n!\,x^n$, $a_n = n!$ $\forall n \geq 0$)

Notez: $x_n = n!\, x^n$, $x \in \mathbb{R}$

$x \neq 0 \Rightarrow \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\cdot|x|^n} = (n+1)|x| \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n!\cdot x^n$ este divergentă, $\forall x \neq 0$.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ convergentă, $x = 0$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$)

$\forall x \neq 0$, $\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0 < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergentă, $\forall x \in \mathbb{R}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $a_n = 1$, $\forall n \geq 0$)

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ convergentă, $\forall x \in (-1,1)$ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ divergentă, $\forall x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

Obs: Orice serie de puteri este convergentă în $x = 0$.

Def: Considerăm seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 0$)

1) Numim <u>mulțimea de convergență</u> a seriei de puteri mulțimea $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ conv}\}$.

2) Numim <u>raza de convergență</u> a seriei de puteri nr. $R = \sup \{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\cdot r^n \text{ este convergentă}\}$

Obs: 1) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie de puteri, $0 \le r_1 \le r_2$. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_2^n$ conv (i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r_2^n$ abs. conv.) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ conv. (i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ abs conv)

2) $r \geq 0$ a.î. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ abs. conv.}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-r)^n$ conv. $\Rightarrow r, -r \in C$.

3) În general, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$ conv. $\not\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-r)^n$ conv.

Teorema (Cauchy - Hadamard) HADAMARD

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ o serie de puteri și o notăm :

$= \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci raza de conv. a seriei de puteri $= R$

Obs: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ - seria derivatelor

pot avea mulțimi de conv. diferite (dar cu aceeași rază de c)

Teoremă:

Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de conv. $R > 0$

și $S : (-R, R) \to \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Atunci $\forall a, b \in (-R, R)$, $a < b$

$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n$

Teorema Bernstein $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cont.

Atunci $\exists P_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(p_n)_n$ șir de funcții polinomiale

a.î. $P_n \xrightarrow{u} f$