Criteriul lui Cauchy

Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$

Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă

Atunci f este integrabilă în sens generalizat $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists c_\varepsilon \in (a,b)$ astfel ca pentru orice $c', c'' \in (c_\varepsilon, b)$, $c' < c''$

$$\left| \int_a^{c''} f(x)\,dx - \int_a^{c'} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{c'}^{c''} f(x)\,dx \right| \leq \varepsilon.$$

Demonstrație:

$\boxed{\Rightarrow}$ Presupunem că f este integrabilă în sens generalizat $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{c \to b \\ c < b}} \int_a^c f(x)\,dx$

Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar, fixat. Atunci:

$\Rightarrow \exists c_\varepsilon \in (a,b)$ astfel ca $\left| \int_a^c f(x)\,dx - \mathcal{L} \right| \leq \varepsilon$, $\forall c \in (c_\varepsilon, b)$

unde $\mathcal{L} := \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall c', c'' \in (c_\varepsilon, b)$ avem: $c' < c''$

$$\left| \int_a^{c''} f(x)\,dx - \int_a^{c'} f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^{c'} f(x)\,dx - \mathcal{L} \right|$$

Așadar, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c_\varepsilon \in (a,b)$ astfel încât $\forall c', c'' \in (c_\varepsilon, b)$,

$$\left| \int_a^{c''} f(x)\,dx - \int_a^{c'} f(x)\,dx \right| \leq \varepsilon$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Presupunem că: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c_\varepsilon \in (a,b)$ a.î. $\forall c', c'' \in (c_\varepsilon, b)$ avem:

$$\left| \int_a^{c''} f(x)\,dx - \int_a^{c'} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{c'}^{c''} f(x)\,dx \right| \leq \varepsilon \quad (1).$$

Vrem să demonstrăm că $\exists \lim\limits_{\substack{c \to b \\ c < b}} \int_a^c f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

Fie $(c_n)_{n \geq 1} \subseteq (a,b)$, $c_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b$ (arbitrar)

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\int_a^{c_n} f(x)\,dx \right)_{n \geq 1}$ este șir Cauchy

Într-adevăr. Fie $\varepsilon > 0$

Cum $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $c_n \in (c_\varepsilon, b)$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow \forall m, n \geq n_\varepsilon$ avem:

$$\left| \int_a^{c_n} f(x)\,dx - \int_a^{c_m} f(x)\,dx \right| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow \left(\int_a^{c_n} f(x)\,dx \right)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy

Cum $\left(\int_a^{c_n} f(x)\,dx \right)_{n\geq 1}$ este Cauchy $\Rightarrow \left(\int_a^{c_n} f(x)\,dx \right)_{n\geq 1}$ este convergent

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $\int_a^{c_n} f(x)\,dx \xrightarrow[n]{} \alpha$

Deci $\forall (c_n)_{n\geq 1} \subseteq (a,b)$, $\int_a^{c_n} f(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$

Obs: Pt. orice şir $(c_n)_{n\geq 1} \subseteq (a,b)$, $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, şirul $\left(\int_a^{c_n} f(x)\,dx \right)_{n\geq 1}$ are aceaşi limită α.)

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^{c} f(x)\,dx = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ integrabilă în sens generalizat

(Am folosit caracterizarea cu şiruri pentru limita unei funcţii într-un punct)

Teoremă: (Abel - Dirichlet).

Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabile astfel încât,

i) $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = 0$ şi $f \downarrow$

ii) $\exists M > 0$ astfel ca $\left| \int_a^{c} g(x)\,dx \right| \leq M$, $\forall c \in (a,b)$

Atunci fg este integrabilă în sens generalizat.

Obs:
$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ este convergentă

$f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$ $\Big\}$ • f este strict descrescătoare și $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

• $\left|\int_1^c g(x)\,dx\right| = \left|\int_1^c \sin x\,dx\right| = \left|-\cos x \Big|_1^c\right| =$
$= |\cos 1 - \cos c| \le 2 \quad \forall c \in (1, \infty)$

• f, g continue $\Rightarrow f, g$ local integrabile $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f g$ integrabilă în sens generalizat
($\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ este convergentă)

Obs [În general, f, g integrabilă în sens generalizat $\not\Rightarrow$ fg integrab. în sens gen

Obs: [$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ este convergentă și $\underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}_{\text{semi an}}$

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ convergentă
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Demonstrație (Criteriul lui Abel - Dirichlet)
Cum $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists c_\varepsilon \in (a,b)$ a.i. $\forall x \in (c_\varepsilon, b), |f(x)| < \varepsilon$

Obs: f este descrescătoare, $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) > 0 \ \forall$

Atunci, fie $c', c'' \in (c_\varepsilon, b)$, $c' < c''$

Pe $[c', c'']$, $f \downarrow$, f, g integrabile Riemann $\Rightarrow \exists\, \xi \in (c', c'')$ a.î.
$\int_{c'}^{c''} f(x) g(x)\,dx = f(c') \int_{c'}^{\xi} g(x)\,dx + f(c'') \cdot \int_{\xi}^{c''} g(x)\,dx$ A doua teoremă de medie

$$\Rightarrow \left| \int_{c'}^{c''} f(x) g(x)\, dx \right| = \left| f(c'') \int_a^{\xi} g(x)\, dx - f(c') \cdot \int_a^{c'} g(x)\, dx \right.$$

$$\left. + f(c') \int_a^{c'} g(x) dx - f(c'') \int_a^{\xi} g(x) dx \right| \leq$$

$$\leq |f(c'')| \cdot \left| \int_a^{\xi} g(x)\, dx \right| + |f(c')| \cdot \left| \int_a^{c'} g(x)\, dx \right| + |f(c')| \cdot$$

$$\cdot \left| \int_a^{c'} g(x) dx \right| + |f(c'')| \cdot \left| \int_a^{\xi} \underbrace{g(x)\, dx}_{M} \right| \leq$$

$$\leq M \left(2 \underset{\frac{\varepsilon}{4M}}{\underset{\wedge}{|f(c')|}} + 2 \underset{\frac{\varepsilon}{4M}}{\underset{\wedge}{|f(c'')|}} \right) \leq \cancel{4M} \cdot \frac{\cancel{2}\varepsilon}{\cancel{4M}/\cancel{2}} = \varepsilon$$

Deci $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, c_\varepsilon \in (a, b)$ a.î. $\forall\, c', c'' \in (c_\varepsilon, b)$, $c' < c''$

$$\left| \int_a^{c''} fg - \int_a^{c'} fg \right| = \left| \int_{c'}^{c''} fg \right| \leq \varepsilon . \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_a^b fg$ este convergentă

Obs: f, g local integrabile $\Rightarrow$ fg local integrabilă

Exemplu:

- $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ este conv. (mai sus)
- $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ este conv? NU $\Rightarrow +\infty$.
  este divergentă

Obs: În general, f integr. în S.G.
$\not\Rightarrow$ $|f|$ integr. în S.G.

Funcții local integrabile pozitive

Fie $a \in \mathbb{R}$, $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă
$f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b)$.

Considerăm funcția $F : [a,b) \to \mathbb{R}$, $F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$

Obs: 1) F este bine definită (f este local integrabilă)

2) F este crescătoare $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{c \to b \\ c<b}} F(c)$

3) f integrabilă în sens generalizat $\Leftrightarrow (\exists) \lim\limits_{\substack{c \to b \\ c<b}} F(c) \in \mathbb{R}$

$$\exists \lim_{\substack{c \to b \\ c<b}} \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{F(c)} \in \mathbb{R}$$

° [f integr. în sens generalizat $\Rightarrow F$ mărginită

Propoz 3: (Criteriul comparației)

Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, $g, f : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabile astfel încât $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b)$

Atunci i) g integrabilă în sens generalizat $\Rightarrow f$ integrab. în s.g.

ii) $\int_a^b f(x)\,dx$ divergentă $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ divergentă

Dem i) $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b)$; f, g local integrabile $\Big\} \Rightarrow$

$\forall\, c \in (a,b)$, $0 \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx$

$f, g \geq 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{c \to b \\ c<b}} \int_a^c f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{c \to b \\ c<b}} F(c)$ (F crescătoare)

g integrabilă în s.g $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{c \to b \\ c<b}} \int_a^c g(x)\,dx \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{\substack{c \to b \\ c<b}} \int_a^c f(x)\,dx \leq \lim_{\substack{c \to b \\ c<b}} \int_a^c g(x)\,dx < \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx < \infty. \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ este convergentă

Obs: Dc. $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ local integrabilă și $f\geq 0$, atunci:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ \underline{există} } !$$

Prop. 4: (Criteriul comparației II)

Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabile, $f(x)\geq 0$, $g(x)>0$ $\forall x\in [a,b)$

Dc. există $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in (0,\infty)$, atunci integralele

$\int_a^b f(x)\,dx$ și $\int_a^b g(x)\,dx$ au aceeași natură (ambele conv sau ambele div.)

$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon >0$ a.i. $\forall x\in (b-\delta_\varepsilon, b)$

avem: $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - l < \varepsilon \quad | +l$$

$$l-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l+\varepsilon$$

Aleg ε a.î. $l-\varepsilon>0$ $\quad (l-\varepsilon)g(x) < f(x) < (l+\varepsilon)g(x)$

și apl. P_3.

Ex: ①. $\int^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx = \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ divergentă

Presupunem (prin reducere la absurd) că $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$

$\sin^2 x \leq |\sin x|, \forall x\in [1,\infty)$

$$\left.\begin{aligned} &0\leq \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x}, \forall x\in [1,\infty) \\ &\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx \text{ convergentă} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{P_3}$$

$\int \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ conv. (1) $\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{2}}$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \int_1^\infty \left[\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}\right] dx$

Dar $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$ convergentă (Abel-Dirichlet) converg.

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx$ este convergentă, CONTRADICȚIE!!

$\left[\lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{2x}\,dx = \lim_{c\to\infty} \left(\frac{1}{2}\ln x\Big|_1^c\right) = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{\ln c}{2} - \frac{\ln 1}{2}\right) = +\infty \right.$

$\left. \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx = +\infty,\ \text{adică } \int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx \text{ divergentă} \right]$

Deci $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ divergentă

<u>Obs:</u> $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ convergentă, dar $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ divergentă

Obs: 1) f absolut integrabilă în sens generalizat $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ integr. în sens generalizat (Reciproc, în gen, nu este adev.)

Exemplu $\to$ mai sus!

<u>Prop. 5</u> Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ abs. int. în sens gen.
și $h : [a,b) \to \mathbb{R}$ local int. și mărginită

Atunci $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$ și $\int_a^b f(x)\,h(x)$ sunt abs. conv.

<u>Prop. 6</u> Fie $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, f descrescătoare, $a \geq 0$, $f \geq 0$

Atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergentă $\Leftrightarrow \sum_{n\geq[a]+1} f(x)$ conv.

<u>Demonstrație</u>

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq [a]+1$

f este descrescătoare pe $[n, n+1] \to f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$
$\forall x \in [n, n+1]$

$\Rightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$

$$\Rightarrow \sum_{k=[a]+1}^{n} \underbrace{\int_{k}^{k+1} f(x)\,dx}_{=\int_{[a]+1}^{n} f(x)\,dx} \le \sum_{k=[a]+1}^{n} f(k)$$

$$\vee\!\!\mid$$

$$\sum_{k=[a]+1}^{n} f(k+1) = \sum_{k=[a]+2}^{n+1} f(k)$$

$$\underbrace{\int_{[a]+1}^{n} f(x)\,dx}_{\infty}$$

Cum $f \geq 0 \Rightarrow \exists \int_a^\infty f(x)\,dx$ (i.e. $\exists \lim\limits_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx$) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ este conv $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=[a]+1}^{\infty} f(n)$ convergentă

Teorema 7 (Leibniz - Newton)

Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă care admite o primitivă F pe $[a,b)$. Atunci $\exists$ integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ dacă și numai dacă există $\lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} F(c)$.

În acest caz, $\int_a^b f(x)\,dx = \left(\lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} F(c)\right) - F(a)$

Dem

F primitivă a lui f pe $[a,c]$ $\forall\, c \in (a,b)$

f integrabilă Riemann pe $[a,c]$ (f local integrabilă) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a)$ (din T. L-N pt. funcțiile int. Riemann)

$\Rightarrow \left(\exists \lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} F(c)\right)$ ~~$-F(a)$ avem~~

$\Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} F(c)$ și avem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} F(c)\right) - F(a)$$

ma 8 (Formula de integrare prin părți)

Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile, f', g' local integrabile

Presupunem că $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)\, g(x)$

Atunci, dc. $f'g$ este integrabilă în sens generalizat și
fg' este integrabilă în sens generalizat

avem:

$$\int_a^b fg' + \int_a^b f'g = \Big[\lim_{\substack{c \to b \\ c < b}} (fg)(c)\Big] - fg(a)$$

Dem: Folosim form. de int. prin părți pt. funcțiile int R

Teorema 9 (Formula de schimbare de variabilă)

Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă și $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a,b)$ bij.
astfel ca φ, φ^{-1} derivabile, $\varphi', (\varphi^{-1})'$ local integrab.

Atunci $\left[\exists \int_a^b f(x)\,dx \iff \exists \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\, \varphi'(t)\, dt\right]$

În plus, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\, \varphi'(t)\, dt$.

Obs: $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ bijecție derivabilă
$\Rightarrow \varphi$ strict crescătoare $(\varphi(\alpha) = a)$

Funcțiile Gama și Beta

Funcția Gamma (a lui Euler)

Def: $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \forall \alpha > 0.$$

Γ s.n. funcția Gamma (a lui Euler)

Obs: 1) Γ este bine definită

Prop: 1) $\Gamma(1) = 1$ $\left(\int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{c \to \infty} \int_0^c e^{-t} dt \right)$

2) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

3) $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ $\forall a > 0$

4) $\Gamma(n) = (n-1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

5) $\forall \alpha \in (0,1)$, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$

Funcția Beta

$B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ $\quad B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt \; \forall a,b \in (0,\infty)$

Obs: 1) B este bine definită

2) Dc. $a \geq 1$ și $b \geq 1$ $\int_0^1 t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1} dt$ este integrală proprie

Prop: 1) $B(a,b) = B(b,a)$, $\forall a, b \in (0,\infty)$

2) $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $\forall a,b > 0$.

$$B(1/2, 1/2) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\Gamma(1)}}} = (\Gamma(1/2))^2$$

$$B(1/2, 1/2) = \int_0^1 t^{1/2-1} \cdot (1-t)^{1/2-1} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-t^2}} dt$$