Facultatea de Matematica-Informatica
Universitatea din Bucuresti 5 Februarie 2018

Examinare

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale
Tipul examinarii: Examen scris
Nume student: ______________________________
Grupa 311
Timp de lucru: 3 ore

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest examen contine 4 probleme (toate obligatorii).

Verificati foile cu subiecte fata-verso !

Examenul este individual. La sfarsitul examenului nu uitati sa aduceti foaia cu subiectele o data cu lucrarea scrisa pentru a le capsa impreuna. Astfel, corectura se va face mai usor.
Pentru elaborarea lucrarii scrise puteti folosi ca unic material ajutator o foaie format A4 care sa contina doar notiuni teoretice. Exercitiile rezolvate sunt excluse ca material ajutator.

Pentru redactare tineti cont de urmatoarele sugestii:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **indicati** acest lucru si explicati cum se poate aplica rezultatul respectiv.
- **Organizati-va munca** intr-un mod coerent pentru a avea toti de castigat ! Incercati ca la predarea lucrarii fiecare problema sa fie redactata in ordinea aparitiei pe foaia cu subiecte. Nu amestecati rezolvarile problemelor ! Ideal ar fi ca si subpunctele sa fie redactate in ordine. Daca nu stiti a rezolva un anumit subpunct scrieti numarul subpunctului si lasati liber.
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Barem: P1 (2.5p) + P2 (2.5p)+ P3 (1.5p) +P4 (3p) + 1p oficiu= **10.5p**.

Rezultatele le veti primi in principiu in ziua respectiva sau in ziua urmatoare. Pentru orice nelamuriri scrieti-mi la adresa cristian.cazacu@fmi.unibuc.ro.

Problema 1. *(2.5p). Fie functia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\big(|x|^2 + 1\big)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.*

1). Sa se scrie formula operatorului Laplacian Δ pentru functii cu simetrie radiala din $\mathbb{R}^4$.

2). Calculati $\Delta f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^4$.
Consideram functia $u : B_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ data de

$$u(x) = |x|^{-\frac{3}{5}}, \quad x = (x_1, \dots, x_5),$$

unde $B_1(0)$ este bila unitate din $\mathbb{R}^5$ centrata in origine.

3). Determinati $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel incat

$$\Delta(x \cdot \nabla u) = \alpha \frac{u}{|x|^2}, \quad \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

4). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ are loc $u \in L^p(\mathbb{R}^5 \setminus \overline{B_1(0)})$.

5). Aratati ca

$$\operatorname{div}\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = \frac{6}{|x|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^8 \setminus \{0\}.$$

Problema 2. *(2.5p). Consideram urmatoarea problema de tip "unde"*

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - 3u_{xx}(x,t) = \cos t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

unde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ sunt functii date. Consideram

$$v(x,t) = u(x,t) + \cos t.$$

1). Scrieti ecuatia satisfacuta de v

2). Aratati ca pentru orice functie w de clasa C^2 avem

$$w_{tt}(x,t) - 3w_{xx}(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x}\right) w.$$

3). Pentru v de mai sus notam

$$z(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \sqrt{3}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Gasiti ecuatia satisfacuta de z.

4). Gasiti forma generala a functiei z.

5). Cu z determinat anterior rezolvati ecuatia

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sqrt{3}\frac{\partial v}{\partial x} = z(x,t)$$

si scrieti forma generala a lui v.

6). Folosind conditiile asupra lui v la $t = 0$ din enunt obtineti pe v si apoi deduceti solutia u a problemei (1).

Problema 3. *(1.5p). Se considera problema la limita*

$$
(2) \qquad \begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) = u(1,y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ u(0,y) = \cos(2\pi y). & y \in (0,1), \end{cases}
$$

1). Aratati ca (2) *are cel mult o solutie de clasa* C^2.

2). Determinati solutia problemei (2) *cautand-o in variabile separate sub forma* $u(x,y) = A(x)B(y)$.

3). Calculati $\max_\Omega u$, $\min_\Omega u$ *unde* $\Omega := [0,1] \times [0,1]$.

Problema 4. *(3p) Se considera problema Dirichlet*

$$
(3) \qquad \begin{cases} -(e^{-x}u'(x))' = \cos x, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}
$$

1). Consideram aplicatia biliniara $a(\cdot,\cdot) : H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ *data de*

$$
a(u,v) := \int_0^1 e^{-x} u'(x) v'(x) dx.
$$

2). Enuntati inegalitatea Poincaré pentru functii test din $C_c^1(0,1)$.

3). Folosind faptul ca $C_c^1(0,1)$ *este (inclus) dens in* $H_0^1(0,1)$ *aratati ca inegalitatea Poincaré se poate extinde la functii test din* $H_0^1(0,1)$.

4). Aratati ca $a(\cdot,\cdot)$ *este continua si coerciva.*

5). Forma biliniara $a(\cdot,\cdot)$ *defineste un produs scalar pe* $H_0^1(0,1)$ *? Argumentati cat mai pe scurt.*

6). Definiti notiunea de solutie slaba pentru problema (3).

7). Argumentati ca daca $u \in C^2([0,1])$ *este solutie clasica pentru* (3) *atunci* u *este solutie slaba pentru* (3).

8). Aratati ca exista o unica solutie slaba $u \in H_0^1(0,1)$ *pentru* (3). *Argumentati atat cu lema Lax-Milgram cat si cu teorema lui Riesz.*

9). (bonus 0.5p) Aratati ca daca u *este solutie slaba pentru* (3) *atunci* u *este solutie clasica pentru* (3).