Data: 17 iunie 2022
Timp de lucru: 2h 30m
Punctaj total: 90p + 10p oficiu **Nume:** ______________________________

Examen **Analiză complexă**[1]

Subiecte:

1. (a) (5 p) Determinaţi soluţiile $z \in \mathbb{C}$ ale ecuaţiei $z^2 = 3 + 4\,\mathrm{i}$.

   (b) (5 p) Considerăm $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin

   $$f(x + \mathrm{i}\,y) = (x \cos y - y \sin y) + \mathrm{i}(y \cos y + x \sin y),$$

   pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Este f olomorfă pe $\mathbb{C}$? Justificaţi răspunsul!

   (c) (5 p) Pentru $f(z) = \dfrac{z}{z^3 - z^2 - z + 1}$, calculaţi $\mathrm{res}(f, 1)$.

   (d) (5 p) Decideţi dacă pentru o funcţie olomorfă f, cu singularitate izolată în 0, putem avea $\mathrm{res}(f^2, 0) = [\mathrm{res}(f, 0)]^2 \neq 0$. Justificaţi răspunsul dat.

   (e) (5 p) Demonstraţi că dacă f este olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ şi $f(-z) = -f(z)$ pentru orice $z \neq 0$, atunci toţi termenii pari din seria Laurent a lui f în $z_0 = 0$ sunt nuli. Daţi toate justificările necesare.

2. (a) (10 p) Determinaţi polii şi ordinele lor pentru funcţia $f(z) = \frac{1}{z^4+z^2}$. Calculaţi apoi seria Laurent a funcţiei f pe coroana circulară $\mathcal{A} = \{0 < |z| < 1\}$.

   (b) (10 p) Calculaţi, folosind eventual principiul argumentului,

   $$\int_{|z-1|=2} \frac{2z + 1}{z^2 + z + 1} dz,$$

   unde cercul $|z - 1| = 2$ este pozitiv orientat.

3. (a) (5 p) Pentru $a, b > 0$, considerăm funcţia olomorfă $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definită prin

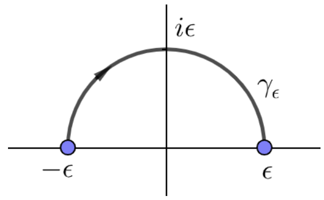
   $$f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}\,az} - e^{\mathrm{i}\,bz}}{z^2}.$$

   Folosind seria Taylor a funcţiei e^z in jurul lui 0, arătaţi că $f(z) = \frac{\mathrm{i}(a-b)}{z} + g(z)$, unde g este olomorfă în 0.

   (b) (5 p) Folosind, eventual, rezultatul de la punctul anterior, demonstraţi că

   $$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \pi(a - b),$$

   unde γ_ϵ este semicercul din desenul următor:

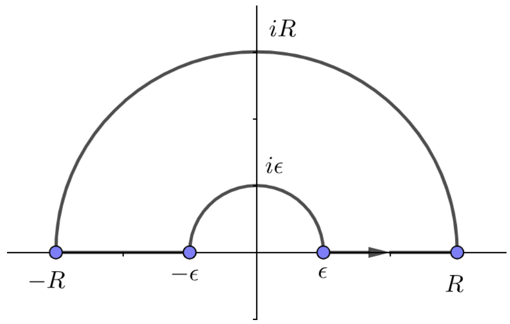


[1] Subiectele continuă pe verso!

(c) (15 p) Calculaţi

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx,$$

unde $a, b > 0$, folosind funcţia $f(z)$ şi conturul de integrare din desenul următor:



şi rezultatele de la punctele anterioare, chiar dacă nu le-ati demonstrat.

4. (10 p) Descrieţi cum putem obţine o aplicaţie biolomorfă între Ω_1 şi Ω_2, unde

$$\Omega_1 = \left\{ z = re^{\mathrm{i}\,t} \mid r > 0, t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \text{ şi } \Omega_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1 \}.$$

5. (a) (5 p) Demonstraţi că dacă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este olomorfă şi injectivă, atunci f nu poate avea singularitate esenţială la infinit.

   (b) (5 p) Demonstraţi că dacă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este biolomorfă, atunci $f(z) = az + b$, unde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Rezolvare examen 2022

$z^{(n)} = x+iy$

① a) Determinați soluțiile $z \in \mathbb{C}$ ale ecuației $z^2 = 3+4i$

$z_0 = 3+4i$

Vrem $z_0 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\boxed{r=5}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow tg\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{3}{\cancel{5}}} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\theta = arctg\left(\frac{4}{3}\right)}$

Scriem rădăcinile:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=\overline{0,n-1}$$

$$z_k = \sqrt[2]{5}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right),\ k=\overline{0,1}.$$

b) Considerăm $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definită prin:

$f(x+iy) = (x\cos y + y\sin y) + i(y\cos y + x\sin y)$

Fie $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $u(x,y) = x\cos y + y\sin y = Re(f)$

$v(x,y) = y\cos y + x\sin y = Im(f)$

Cauchy Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$$

funcția nu este olomorfă

nu verifică C-R

c) $f(z) = \dfrac{z}{z^3 - z^2 - z + 1}$, $\operatorname{res}(f, 1)$

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z-1)} = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-1)} = \frac{z}{(z-1)^2(z+1)}$$

$\Rightarrow 1 =$ pol de ord. 2

$$\Rightarrow \operatorname{res}(f, 1) = \frac{1}{1!} \cdot \lim_{z \to 1} \left[\cancel{(z-1)^2} \cdot \frac{z}{\cancel{(z-1)^2}(z+1)} \right]'$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(\frac{z}{z+1} \right)'$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{z'(z+1) - z \cdot (z+1)'}{(z+1)^2}$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{z + 1 - z}{(z+1)^2} = \frac{1 + \cancel{1} - \cancel{1}}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

d) Decideți dacă pentru o funcție olomorfă f, cu singularitate izolată în 0, putem avea $\operatorname{res}(f^2, 0) = [\operatorname{res}(f, 0)]^2 \neq 0$. Justificați.

$\operatorname{res}(f^2, 0)$.

$\frac{1}{z} + a = f(z)$, $\operatorname{res}(f, 0) = 1$

$f^2 = \frac{1}{z^2} + 2a \cdot \frac{1}{z} + a^2 = f^2(z)$

$[\operatorname{res}(f, 0)]^2 = 1$

$\operatorname{res}(f^2, 0) = 2a$. Alegem $a = \frac{1}{2}$

Dem. că dacă f este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ și $f(-z) = -f(z)$ pt. orice $z \neq 0$, atunci toți termenii pari din seria Laurent a lui f în $z_0 = 0$ sunt nuli. Dați toate justificările necesare.

$$f(-z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (-z)^n$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} -a_n (-z)^n$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} -a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n z^n$$

$$-a_n = (-1)^n a_n, \forall n \in \mathbb{R}$$

$$a_n[(-1) - (-1)^n] = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$= \begin{cases} 0 - \text{dacă } n = \text{impar} \\ -2 - \text{dacă } n = \text{par} \end{cases}$$

$$a_n = 0 \ \forall n \text{ par}$$

② Determinați polii și ordinele lor pentru funcția $f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2}$. Calculați apoi seria Laurent a funcției f pe coroana circulară $A = \{0 < |z| < 1\}$

$$z^4 + z^2 = 0$$

$$z^2(z^2+1) = 0$$

$$z^2 = 0, \quad z^2 + 1 = 0$$

$z_1 = 0$ pol ord 2. , $z^2 = -1$, $z = \pm i$ poli de ord 1

$= \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-(-z)^2} \overset{|z|^2<1}{=} \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \frac{1}{z^2}(1-z^2+z^4$

$= \frac{1}{z^2} - 1 + z^2 - z^4 + z^6 - \dots$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot z^{2n-2}$

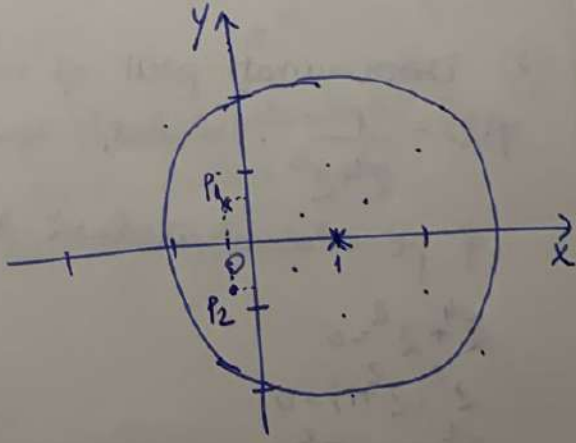
③ $\int_{|z-1|=2} \frac{2z+1}{z^2+z+1}\,dz$, cercul $|z-1|=2$ poz. orientat

~~$= \int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i$ (nr zero lui f din int C - nr poli)~~

~~$f(z)=0 \Rightarrow z^3-1=0 \quad z^3=1$~~

$|z-(a+bi)|=r$, $|z-1|=2$

Cercul de centru $(1,0)$ și raza 2.



$z^2+z+1=0$

$\Delta = 1-4\cdot1\cdot1 = 1-4 = -3$

$z_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Observăm că polii sunt în interiorul cercului

deci calc. reziduurile

$$Res\left(f, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \frac{2z+1}{\cancel{\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)}\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}\cdot\cancel{\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \lim_{z\to\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \frac{2z+1}{z-\frac{(-1-i\sqrt{3})}{2}} = \lim_{z\to\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \frac{2z+1}{z+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{-1}+i\sqrt{3}}{\cancel{2}}+\cancel{1}}{\frac{\cancel{-1}+i\sqrt{3}}{2}+\frac{\cancel{1}+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{i\sqrt{3}}{\frac{\cancel{2}i\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = 1.$$

$$Res\left(f, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}} \cancel{\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}\cdot\frac{2z+1}{\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\cancel{\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot\frac{(\cancel{-1}-i\sqrt{3})}{\cancel{2}}+\cancel{1}}{\frac{\cancel{-1}-i\sqrt{3}}{2}+\frac{\cancel{1}-i\sqrt{3}}{2}} = \frac{-i\sqrt{3}}{\frac{-\cancel{2}i\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = +1.$$

Aplicăm th. reziduurilor:

$$\int_{|z-1|=2} \frac{2z+1}{z^2+z+1}\,dz = 2\pi i\left[Res\left[f, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right] + Res\, f\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right]\cdot \underset{1}{\mathrm{ind}\,\mathcal{C}}$$

$$= 2\pi i\cdot\overset{2}{\cancel{(1+1)}} = \cancel{0}\ 4\pi i$$