Examen Statistică

8 Feb 2020

(11 feb 2018, 2 iunie 2018)

Exercițiul 1: Fie o variabilă aleatoare repartizată

$$\mathbb{P}_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N} \text{ unde } \theta \in (0,1)$$

un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$. Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2 \dots X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.
2. Det. estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta}=0)$.
3. Det. estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și det. legea la limită.

Exercițiul 2: Considerăm cuplul de variabile aleatoare (X,Y) cu densitatea:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-y^2 x/2} \cdot e^{-\sqrt{x}/2}, \quad x > 0$$

1. Det. repartiția condiționată a lui Y la $X = x$.
2. Det. repartiția lui $\sqrt{X}$
3. Propuneți o metodă de simulare a unei observații din cuplul (X,Y) și scrieți un cod R care să permită acest lucru.

Scanned with CamScanner

Exercițiul 3. Fie $X_1 \dots X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde $f_\theta(x) = \frac{7}{(x-\theta)^8} \mathbb{1}_{[1+\theta, +\infty)}(x)$

a) Calculați $E_\theta[X_1]$, $Var_\theta(X_1)$ și funcția de repartiție $F_\theta(x)$ a lui X_1.

b) În cazul în care $\theta = 2$, dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0,1]$ $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$, $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

c). Determinați estimatorul $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestui estimator. Care este legea la limită?

d) Exprimați în funcție de θ mediana repartiției lui X_1 și, pornind de la aceasta, găsiți un alt estimator $\hat{\theta}_n^Q$ pt θ

e). Det. legea la limită a lui $\hat{\theta}_n^Q$ și arătați că, asimptotic acesta este mai bun decât $\hat{\theta}_n^M$

f). Det. estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n^{VM}$ a lui θ și verificați dacă este deplasat.

h) Pe care dintre cei trei estimatori îi preferați?

Ex 4 Considerăm densitatea $f(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ unde folosim convenția $f(1) = +\infty$.

① De v.a. Y are densitatea f, care este dens. v.a $X = \theta Y$, $\theta > 0$?

② $X_1 \dots X_n$ eșantion talie n din X. Det. estimatorul de verosimilitate max. $\hat{\theta}_n$ a lui θ.

③ Det. repart. limită a lui $n\sqrt{\theta - \hat{\theta}_n}$

④ Det. mediana repartiției v.a. X și deduceți un nou estimator $\overline{\theta}_n$. Pe care din cei doi estimatori îl preferați?

8 Feb 2020

Statistique Part 2

Ex 1

$$P_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}, \text{ unde } \theta \in (0,1)$$

a) Det constanta A și calc. $E[X]$ și $Var(X)$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} A P_\theta(X=k) = 1}$$ condiție ca P_θ distrib. de probab.

$$\sum_{k=0}^{\infty} A(k+1)\theta^k = \sum_{k=0}^{\infty} A(\theta^{k+1})' = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k+1}\right)'_\theta = \left(\theta \sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\right)'_\theta$$

$(\theta \in (0,1), k \in \mathbb{N})$

$$= \left(\theta \cdot \frac{1}{1-\theta}\right)' = \frac{1-\theta-\theta(-1)}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{(1-\theta)^2}$$

$$A \cdot \frac{1}{(1-\theta)^2} = 1 \Rightarrow \boxed{A = (1-\theta)^2}$$

Calculăm media (pe cazul mostru discret):

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(1-\theta)^2(k+1)\theta^k$$

$$= (1-\theta)^2 \frac{2\theta}{(1-\theta)^3}$$ din Recapitulare Statistică (pag 2, ex 2 - serii)

$$= \frac{2\theta}{1-\theta}$$

Calculăm varianța:

$$Var[X] = \underbrace{E[X^2]} - (E[X])^2$$

Formula utilizată

$$\boxed{E[g(X)] = \sum_{k=0}^{n} g(k) P_\theta(X=k)}$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2(1-\theta^2)(k+1)\theta^k$$

$$= \frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^2}$$ (din, știți voi unde)

b) Calculăm estimatorului $\tilde{\theta}$

(Teorema Met. Mom)

$E[x] = \overline{x}$

$\frac{2\theta}{1-\theta} = \overline{x} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{\overline{x}}{\overline{x}+2}}$

1

$P_\theta(\theta = 0) = P_\theta\left(\frac{\overline{x}}{\overline{x}+2} = 0\right) = P_\theta(\overline{x} = 0) = P_\theta(x_K = 0) =$

$\hookrightarrow \underbrace{P_\theta\left(\frac{1}{m}\sum_{K=1}^{m} x_K = 0\right)}_{\text{magia cojocea}}$

$= (1-\theta)^2 \cdot \theta^0$

$= (1-\theta)^2$

c) Det. estimat de verosim maximă $\hat{\theta}$ + verif bine definit.

~~$\hat{\theta}$~~ $L_{(\theta)} = \prod_{i=1}^{m} f(x_i, \theta)$

$L_{(\theta)} = \left[(1-\theta)^2\right]^m \cdot \prod (K+1)\theta^K$

$= (1-\theta)^{2m} \prod (K+1)\theta^K$

$\Rightarrow \ln(L(\theta)) = 2m \ln(1-\theta) + \sum \ln[(K+1)\theta^K]$

$\ln(L(\theta)) = 2m \ln(1-\theta) + \sum[\ln(K+1) + K\ln\theta]$

$\ln(L(\theta)) = 2m \ln(1-\theta) + \sum(\ln(K+1)) + \ln\theta \cdot \sum K$

$\ln(L(\theta)) = 2m \ln(1-\theta) + \sum(\ln(K+1)) + \ln\theta \, \frac{m(m+1)}{2}$

$\Rightarrow \ln'(L\theta) = -2m\frac{1}{1-\theta} + 0 + \frac{1}{\theta} \cdot \frac{m(m+1)}{2} = 0$ egalăm cu 0.

$\frac{-4m\theta + (1-\theta)m(m+1)}{2\theta(1-\theta)} = 0$

$(1-\theta)m(m+1) = 4m\theta$

$m(m+1) - \theta m(m+1) = 4m\theta$

$m(m+1) = \theta(4m + m(m+1))$

$\Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{m(m+1)}{4m + m(m+1)}$

$\hat{\theta} = \frac{m+1}{m+5}$

Verif dacă este bine definit:

$m+5 \neq 0 \Rightarrow m \neq -5$ Adev.

d) Studiați consist estimat $\bar{\theta}$ și det legea la limită.

Facem exercițiul pe baza $\boxed{\bar{\theta} = \tilde{\theta}}$

$\tilde{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ $\qquad \tilde{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}+2}$

$\bar{X} \xrightarrow{A.S} E(x)$

$g(x)$ cont, $g(x) = \frac{x}{x+2} \Rightarrow g(\bar{x}) \xrightarrow{AS} g(E(x))$

$\tilde{\theta} \xrightarrow{AS} g\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right) = \frac{2\theta/(1-\theta)}{\frac{2\theta}{1-\theta}+2} =$

$= \frac{2\theta}{\cancel{(1-\theta)}} \cdot \frac{\cancel{(1-\theta)}}{\cancel{2\theta}+2-\cancel{2\theta}} = \theta$

$\Rightarrow \tilde{\theta} \xrightarrow{AS} \theta \Rightarrow \tilde{\theta} \xrightarrow{P} \theta \Rightarrow \tilde{\theta}$ consistent.

Facem legea la limită:

$\tilde{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}+2}$

Prin L.N.M, $\bar{X} \xrightarrow{AS} E[X] = \frac{2\theta}{1-\theta}$

$g(x) = \frac{x}{x+2}$, g cont

$g(\bar{x}) \xrightarrow{AS} \theta$

Din TLC, $\sqrt{m}\left(\bar{X} - \underbrace{\frac{2\theta}{1-\theta}}_{E[X]}\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^2}\right)$

Aplicăm metoda delta

$\left(\frac{x}{x+2}\right)'$

$\sqrt{m}\left(g(\bar{x}) - g\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right)\right) \xrightarrow{D} N\left(0, (g'(\theta)\sigma)^2\right)$

$\sqrt{m}\left(g(\bar{x}) - g\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right)\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \left[\frac{2}{(\theta+2)^2}\right]^2 \cdot \frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^2}\right)$

$$g(\bar{x}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(g\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right), \frac{4}{m}\left(\frac{2}{(\theta+2)^2}\right)^2 \left(\frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^2}\right)\right)$$

$\overset{\shortparallel}{\hat{\theta}}$

Ex 2 Considerăm cuplul de var. (X,Y)

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-y^2 x/2} \cdot e^{-\sqrt{x}} \quad \text{densitate}$$

a) Det repart. condiționată a lui Y la $X = x$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-y^2 x/2} \cdot e^{-\sqrt{x}} \quad 1\!\!1_{x>0}$$

$$f_{y/x}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} =$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-y^2x/2} \cdot e^{-\sqrt{x}}\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 x/2} \cdot 1\!\!1_{x>0}\,dy$$

$$1\!\!1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-y^2 \frac{x}{2}}\,dy \qquad \int_{-\infty}^{\infty} A \, 1\!\!1_{x>0} = \int_0^{\infty} A$$

... aia e

b) Det. repartiția lui $\sqrt{x}$

$$F(\sqrt{x}, y) =$$

Ex3 $x_1, \dots x_n$ eșantion

$$f_\theta(x) = \frac{7}{(x-\theta)^8} \mathbb{1}_{[1+\theta, +\infty)}(x)$$

a) Calc. $E_\theta[X_1]$, $Var_\theta(X_1)$ și fct de repart $F_\theta(x)$ a lui X_1

$$E_\theta[X_1] = \int_{1+\theta}^{\infty} x \frac{7}{(x-\theta)^8} = \frac{7}{6} + \theta$$

(Rezolvări - iarnă trimis de Emi, pg 4)

$$Var(X_1) = E(X_1^2) + (E(X_1))^2 = \frac{7}{180}$$

$$F_\theta(x_1) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x \le 1+\theta \\ \int_{1+\theta}^{x} \frac{7}{(t-\theta)^8} dt \end{cases}$$

$$= 1 - \frac{1}{(x-\theta)^7} \mathbb{1}_{(1+\theta, \infty)}$$

b) $\theta = 2$, generăm 3 val. al.

$u_1 = 0.25$; $u_2 = 0,4$; $u_3 = 0,5$

$$f_2(x) = \frac{7}{(x-2)^8} \qquad F_\theta(x_1) = 1 - \frac{1}{(x-\theta)^7} \mathbb{1}_{(1+\theta, \infty)}$$

(f. repart)

$$\boxed{\cancel{y = \frac{7}{(x-2)^8} \Leftrightarrow (x-2)^8 = \frac{7}{y} \quad x = \sqrt[8]{\frac{7}{y}} + 2}}$$

$$y = 1 - \frac{1}{(x-2)^7} \Rightarrow 1 + y = \frac{1}{(x-2)^7}$$

$$x = \sqrt[7]{\frac{1}{1+y}} + 2$$

$$F^{-1}(x) = \sqrt[7]{\frac{1}{1+x}} + 2$$

$F^{-1}(u_1) = \sqrt[7]{\frac{u}{5}} + 2$

$F^{-1}(u_2) = \ldots$

$F^{-1}(u_3) = \ldots$

c) Det estimat $\hat{\theta}_m^M$ a lui θ det prin Met. Mom și calc. ~~preferata~~ pătratică ~~de~~ medie a acestui estimat care e legea la limită.

$E[(\hat{\theta} - \theta)^2] =$

$E(x) = \overline{x}$

$= E[(\overline{X}_m)^2] - 2 \cdot E(\overline{X}_m) \cdot \left(x \frac{7}{6} + \theta\right) + \left(\frac{7}{6} + \theta\right)^2$

$\frac{7}{6} + \hat{\theta} = \overline{x}$

$\hat{\theta} = \overline{x} - \frac{7}{6}$