

Examen Mărire

Mai 2019



Timp de lucru 1h30. Toate documentele, calculatoarele electronice de mână, computerele personale sau telefoanele mobile (doar în mod avion) sunt autorizate. Aveți 1 subiect valorând 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Considerăm densitatea f_θ în raport cu măsura Lebesgue pe \mathbb{R} definită prin

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} (\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x) + \mathbf{1}_{[2\theta,3\theta]}(x))$$

cu $\theta > 0$ un parametru necunoscut și fie X_1, \dots, X_n un eșantion de talie n din populația f_θ .

- a) Scrieți o funcție în \mathbb{R} care să permită trasarea graficului densității f pentru diferite valori ale lui θ și construiți un grafic în care să apară ilustrată densitatea pentru $\theta \in \{0.5, 1, 3, 5\}$ împreună cu legenda corespunzătoare. 1p
- b) Determinați estimatorul $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și precizați care este repartiția limită a acestuia. 1p
- c) Calculați cuartila de ordin 1, $Q_1 = x_{\frac{1}{4}}$ și plecând de la aceasta găsiți un estimator $\hat{\theta}_n^{Q_1}$ consistent pentru θ . Specificați repartiția limită a acestuia. 1p
- d) Aceeași întrebare pentru cuartila de ordin 3 (notați estimatorul cu $\hat{\theta}_n^{Q_3}$). 1p
- e) Pe care dintre cei trei estimatori $\hat{\theta}_n^M$, $\hat{\theta}_n^{Q_1}$ și $\hat{\theta}_n^{Q_3}$ îl preferați ? 1p
- f). Pentru $0 < x < \theta$ calculați $\mathbb{P}(X_{(n)} \leq 3\theta - x)$, unde $X_{(n)}$ este statistica de ordine de rang n . Găsiți un estimator $\hat{\theta}_n^S$ consistent pentru θ . 1p
- g) Determinați repartiția limită a lui $n(\theta - \hat{\theta}_n^S)$. 1p
- h) Pe care dintre cei patru estimatori îi preferați ? 1p
- i) Propuneți o metodă de determinare a unui interval de încredere ne asimptotic de nivel de încredere $1 - \alpha$ pentru θ . 1p