27-01-2021 [redacted] GRUPA 112

EXAMEN LA ANALIZA MATEMATICA I

I. Fie

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x,y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Determinati interiorul, aderenta si multimea punctelor de acumulare ale multimii A. Decideti daca A este inchisa, deschisa sau compacta. Decideti daca aderenta multimii A este compacta. Justificati raspunsurile!

II. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{daca } x \le 0 \\ \frac{\ln(1+2x)}{x}, & \text{daca } x > 0 \end{cases}$$

1) Studiati continuitatea si derivabilitatea lui f.

2) Studiati uniform continuitatea functiei f pe $\mathbb{R}$ si pe $(0, \infty)$.

III. Pentru $n \ge 1$, fie $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{4 + nx + n^3x^3}{4 + n^3x^3}$$

Sa se studieze convergenta simpla si convergenta uniforma a sirului $(f_n)_{n\ge 1}$ pe $[0, 1]$ si $[1, \infty)$.

IV. Cu ajutorul sumelor Darboux si criteriului de integrabilitate al lui Darboux aratati ca functia

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \to \mathbb{R}, \; f(x) = \cos x$$

este integrabila Riemann si calculati

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx.$$

Atentie: Este obligatoriu sa folositi sume Darboux si criteriul lui Darboux! Mentionez ca rezolvarea **nu se puncteaza** in cazul in care folositi alte teoreme precum: orice functie monotona sau continua este integrabila Riemann, formula Leibniz-Newton sau Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue.

V. Studiati convergenta seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{\sqrt{n^3+n}}\right)$$

Nota. Timpul de lucru este de 2 ore. Fiecare subiect se noteaza cu note de la 1 la 10. Nota obtinuta la aceasta lucrare este media aritmetica a celor 5 note. Toate raspunsurile trebuie justificate!

Rezolvarile trebuie scanate si trimise impreuna cu lista de subiecte sub forma unui **singur** fisier pdf la adresele radu-bogdan.munteanu@g.unibuc.ro si radu.munteanu@unibuc.ro.

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ, SPECIALIZAREA MATEMATICĂ,
SERIA 11, GRUPA 112

27.01.2021

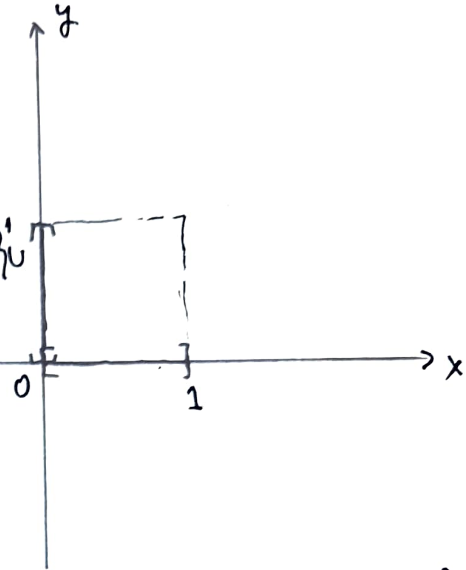
EXAMEN ANALIZĂ MATEMATICĂ

BĂLAȘA ANDREA-BIANCA

I. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x,y\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{R}^2$

$\mathring{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0<x<1,\ 0<y<1,\ x,y\in\mathbb{Q}\}$

(orice vecinătate (exista un disculeț) care e din A în jurul unui punct din A rămâne tot în A)



$\bar{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x,y\in\mathbb{Q}\}\cup$
$\cup\{(1,1),(0,0)\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=1,\ 0\le y\le 1,\ x,y\in\mathbb{Q}\}\cup$

(oricare ar fi o vecinătate a unui punct din $\bar{A}$ aceasta intersectată cu mulțimea A este $\neq\emptyset$)

$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=1,\ 0\le x\le 1,\ x,y\in\mathbb{Q}\}$

$\mathrm{Fr}\,A=\bar{A}\setminus\mathring{A}=\{(0,1),(1,0),(1,1),(0,0)\}$

$A'=\bar{A}$ (Fie $(x,y)\in A$
$z_m=(x+\frac{1}{m};\ y+\frac{1}{m})\to(x,y)$
$z_m\in A$) (orice punct din $\bar{A}$ aș lua, oricare ar fi o vecinătate a sa aceasta intersectată cu $A\setminus\{x\}$ e diferită de mulțimea $\emptyset$)

A-închisă $\Leftrightarrow A=\bar{A}$. Și la noi $A=\bar{A}\Rightarrow$ A e închisă

A-deschisă $\Leftrightarrow A=\mathring{A}$. La noi $A\neq\mathring{A}\Rightarrow$ A nu e deschisă

A-compactă $\Leftrightarrow$ A închisă și A mărginită

$\left.\begin{array}{l}\text{A-închisă}\\ \text{A-mărginită} \Rightarrow A\in B_{100}((0,0))\end{array}\right\}\Rightarrow$ A este compactă

Deci A este compactă

$\bar{A}$-compactă $\Leftrightarrow \bar{A}=\overline{(\bar{A})}$ (adică dacă este închisă) + dacă e mărginită

Dar cum știm că întotdeauna $\bar{A}$ este închisă, iar $\bar{A}$ este mărginită: $A\in B_{100}((0,0))\Rightarrow\bar{A}$ este compactă

II. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\in(-\infty,0] \\ \frac{\ln(1+2x)}{x}, & x\in(0,\infty) \end{cases}$$

1) Studiați continuitate + derivabilitate.

Știm că f este continuă pe $(-\infty,0)$ căci reprezintă o compunere de funcții elementare. (1)

Știm că f este continuă pe $(0,\infty)$ deoarece repreze. o compunere de funcții elementare (2)

Trebuie să studiem continuitatea în $x_0=0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x+2 = 0+2=2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\underbrace{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}_{\to 1}\cdot\frac{2x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=$$

$\nearrow 1$ (este limita remarcabilă) $\Rightarrow$

$$=2 \quad ; \quad f(0)=0+2=2$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)=2 \quad (3)$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ f este continuă pe $\mathbb{R}$.

f este derivabilă pe $(-\infty,0]$ (repreze. o compunere de funcții elementare)

$$f'(x)=(x+2)'=1$$

f este derivabilă pe $(0,\infty)$ (repreze. o compunere de funcții elementare)

$$f'(x)=\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)'=\frac{[\ln(1+2x)]'\cdot x-\ln(1+2x)\cdot x'}{x^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{1+2x}\cdot 2\cdot x-\ln(1+2x)}{x^2}=\frac{2x}{x^2(1+2x)}-\frac{\ln(1+2x)}{x^2}$$

$f(0)=0+2=2$

Trebuie studiată derivabilitatea pt $x_0=0$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+2x)}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{2x}{x}-2}{x}$$

$$\overset{0/0}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+2x}-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2-4x}{2x(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x-2}{2x+4x^2}=\frac{0-2}{0}=$$

$$=\frac{-2}{0}=-\infty$$

$\Rightarrow f$ nu e derivabilă pe $\mathbb{R}$

III. $m \geq 1$, $f_m : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f_m(x) = \frac{4+mx+m^3x^3}{4+m^3x^3}$$

conv. simplă + conv. unif pe $[0,1]$

Fie $x \in [0,1]$ - fixat

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{4+mx+m^3x^3}{4+m^3x^3} = \lim_{m\to\infty} \frac{\cancel{m^3}\left(\overset{\to 0}{\frac{4}{m^3}} + \overset{\to 0}{\frac{x}{m^2}} + x^3\right)}{\cancel{m^3}\left(\underset{\to 0}{\frac{4}{m^3}} + x^3\right)} = \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$\Rightarrow f_m \xrightarrow{s} f$ (dacă $x \in (0,1]$)

dacă $x = 0$ $\Rightarrow f_m \not\xrightarrow{s} f$. $\Rightarrow f_m \not\xrightarrow{u} f$ ~~pt~~ $x=0$.

$x \in (0,1]$ - fixat

$f(x) : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$

$$\cancel{\lim_{m\to\infty}} \sup_{x\in(0,1]} |f_m(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1]} \left| \frac{4+mx+m^3x^3}{4+m^3x^3} - 1 \right| =$$

$$= \sup_{x\in(0,1]} \left| \frac{\cancel{4}+mx+\cancel{m^3x^3}-\cancel{4}-\cancel{m^3x^3}}{4+m^3x^3} \right| = \sup_{x\in(0,1]} \left| \frac{mx}{4+m^3x^3} \right| =$$

$$= \sup_{x\in(0,1]} \frac{mx}{4+m^3x^3} < \frac{x}{4+mx} \xrightarrow{m\to\infty} 0 \text{. Deci } f_m \xrightarrow{u} f \text{ pt}$$

$x \in [0,1]$ - fixat

Fie $x \in [1,\infty)$ - fixat

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{4+mx+m^3x^3}{4+m^3x^3} = \lim_{m\to\infty} \frac{\cancel{m^3}\left(\overset{\to 0}{\frac{4}{m^3}} + \overset{\to 0}{\frac{x}{m^2}} + x^3\right)}{\cancel{m^3}\left(\underset{\to 0}{\frac{4}{m^3}} + x^3\right)} = \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$\Rightarrow f_m \xrightarrow{s} f$ pt. $x \in [1,\infty)$ - fixat

$f(x) = 1$, $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\cancel{\lim_{m\to\infty}} \sup_{x\in[1,\infty)} \left| \frac{4+mx+m^3x^3}{4+m^3x^3} - 1 \right| = \cancel{\lim_{m\to\infty}} \sup_{x\in[1,\infty)} \left| \frac{mx}{4+m^3x^3} \right| =$$

$$= \sup_{x\in[1,\infty)} \frac{mx}{4+m^3x^3} < \frac{\cancel{mx}}{m^{\cancel{3}2}x^{\cancel{3}2}} = \frac{1}{m^2x^2} \xrightarrow{m\to\infty} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_m \xrightarrow{u} f$ pt $x \in [1,\infty)$ - fixat

II. 2) unif. continuitatea pe $\mathbb{R}$ și $(0,\infty)$

pe $(0,\infty)$: $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2(1+2x)} - \frac{\ln(1+2x)}{x^2} < 0 \text{. Verif dacă } f'(x) < 0$$

$$\frac{2x}{x^2(1+2x)} < \frac{\ln(1+2x)}{x^2} \Rightarrow 2x^3 < \underbrace{x^2(1+2x)}_{\in(0,\infty)} \cdot \underbrace{\ln(1+2x)}_{\in(1,\infty)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ - adev.

Derivata e mărginită $\Rightarrow f$ unif cont pe $(0,\infty)$

f-unif continuă pe $\mathbb{R}$?

Știm f - unif cont pe $(0,\infty)$. Trebuie f - unif cont pe $(-\infty,0]$

pt $x \in (-\infty,0)$: $f'(x) = (x+2)' = 1$ - mărginită

$\Rightarrow$ f - nu e unif cont pe $\mathbb{R}$

IV. $f: [-\frac{\pi}{2}, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$

Fie $\varepsilon > 0$. Din criteriul lui Darboux $\Rightarrow (\exists) \eta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall) \Delta$-div cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le \varepsilon$. Atunci $0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le \varepsilon$

Cum ε a fost ales arbitrar $\Rightarrow \overline{I} = \underline{I}$

Fie $I := \overline{I} = \underline{I}$

Fie $\varepsilon > 0$. Fie Δ o diviziune cu $\|\Delta\| < \eta$. Atunci $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le \varepsilon$

Pt $(\forall) \xi \in \xi(\Delta)$ avem

$$\left.\begin{array}{l} s_\Delta(f) \le \sigma(f, \xi) \le S_\Delta(f) \\ s_\Delta(f) \le \underline{I} = I \le \overline{I} \le S_\Delta(f) \end{array}\right\} \Rightarrow |\sigma_\Delta(f, \xi) - I| \le \varepsilon$$

Deci f e integrabilă Riemann

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = (\sin(0) - \sin(-\tfrac{\pi}{2})) =$$

$$= 0 - (-\sin\tfrac{\pi}{2}) = \sin\tfrac{\pi}{2} = 1$$

V. $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{\sqrt{n^3+n}}\right)}_{x_n}$

Verificăm dacă $x_n \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}_{\to 0} \cdot \operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{n^3+n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 0 \cdot \operatorname{arctg} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 0 \cdot \operatorname{arctg} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}_{\to 0} =$$

$$= \cancel{\lim} \; 0 \cdot \operatorname{arctg} 0 = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ avem șanse ca seria $\sum x_n$ să fie convergentă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}}{\frac{n}{\sqrt{n^3+n}}} = 1$$

Voiam să folosesc al doilea criteriul al comparației

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}}{\frac{n}{\sqrt{n^3+n}}}}{} = 0, \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$$

$$y_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$$

Voiam să arăt că y_n - e conv. și at. x_n era conv.

avem $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$

Dar y_n - este ~~con~~ divergent (Aceasta strategie nu a mers)

Dar seria nu e divergentă căci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \neq \infty$

Deci seria e convergentă.