Examen la Cercetări operaţionale 23.6.2020

$$\begin{cases} \inf(3x_1 + 2x_2) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

a) Aflaţi mulţimea soluţiilor optime şi valoarea optimă.
b) Scrieţi problema duală.
c) Aflaţi o soluţie optimă şi valoarea optimă pentru problema duală.
Scrieţi la început numele şi grupa.
Trimiteţi-mi rezolvările în 3 ore, preferabil în format .pdf, pe adresa crnicul@fmi.unibuc.ro.
Păstraţi foile sau fişierul cu rezolvările.
Punctajul: fiecare cerinţă are câte 3 puncte; 1 punct din oficiu.
Notele le dau pe moodle.
Cine este nemulţumit de notă să-mi scrie.
Succes!

Răzvan Căbălău

Cercetări operaționale

14.01. . ora 14

$$\begin{cases} \inf(x_1 + 100x_2) \\ x_1 + 20x_2 - x_3 = 10 \\ x_2 - x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

a) Aflați mulțimea soluțiilor optime și valoarea optimă.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = (1, 100, 0, 0)$$

Folosim metoda celor 2 faze.

La constrângerea (1) adăugăm variabila artificială A_1

La constrângerea (2) adăugăm variabila artificială A_2

$$\Rightarrow \begin{cases} \inf(A_1 + A_2) \\ x_1 + 20x_2 - x_3 + A_1 = 10 \\ x_2 - x_4 + A_2 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

Faza I:

		C_B	0	0	0	0	1	1
C'_B	V_B	VBB	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2
1	A_1	10	1	20	-1	0	1	0
1	A_2	1	0	1	0	-1	0	1
	z'	11	1	21	-1	-1	0	1

$z_1'^B - c_1' = 11 \nleq 0$ => testul de optim nu e îndeplinit

sau: $z_j^B - c_j \nleq 0, \forall j \in R$ => testul de optim nu este îndeplinit

- Mă uit pe ultima linie să văd dacă toate valorile sunt negative, Nu sunt.
- Mă uit după cel mai mare element pozitiv, este 21, iar pe coloana lui fac la fel. Deci pivotul este 20
- Variabila x_2 intră în bază
- Variabila A_1 iese din bază.
- Pivotul este 20.

Iterația 1 :

		C_B	0	0	0	0	1	1
C'_B	VB	VBB	x_1	x_2	x_3	x_3	A_1	A_2
0	x_2	1/2	1/20	1	-1/20	0	1/20	0
1	A_2	1/2	-1/20	0	1/20	-1	-1/20	1
	z'	1/2	-1/20	0	1/20	-1	-21/20	0

- Variabila x_3 intră în bază
- Variabila A_2 iese din bază
- Pivotul este $1/20$

Iterația 2

		C_B	0	0	0	0	1	1
C'_B	VB	VBB	x_1	x_2	x_3	x_3	A_1	A_2
0	x_2	1	0	1	0	-1	0	1
0	x_3	10	-1	0	1	-20	-1	20
	z'	0	0	0	0	0	-1	-1

Iterațiile din prima fază sunt terminate și există o posibilă soluție la problemă. Eliminăm variabilele artificiale și trecem la a doua fază.

Tabela II

		C_B	1	100	0	0
C_B^*	V_B	VBB	x_1	x_2	x_3	x_4
100	x_2	1	0	1	0	-1
0	x_3	10	-1	0	1	-20
	z^*	100	-1	0	0	-100

$z_j^B - c_j \leq 0 \rightarrow$ avem soluție optimă, $\forall j \in R$

Valoarea ~~Soluția~~ optimă este 100

+. Mulțimea soluțiilor optime este $P^* = \{(0,1,10,0)^T\}$

Soluția optimă este $(0,1,10,0)$.

b) Scrieți problema duală.

$$\begin{cases} \inf (x_1 + 100x_2) \quad (\geq) \\ x_1 + 20x_2 - x_3 = 10 \quad \rightsquigarrow u_1 \\ x_2 - x_4 = 1 \quad \rightsquigarrow u_2 \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Teorie

$$\begin{cases} \inf (c^t x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sup (b^t u) \\ A^t u \leq c \\ u \text{ - aleatoriu} \end{cases}$$

forma canonică -> dualizare

$$\begin{cases} \inf (c^t x) \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \sup (b^t u) \\ A^t u \leq c \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Problema duală este:

$$\begin{cases} \sup(10u_1 + u_2) \\ u_1 \le 1 \\ 20u_1 + u_2 \le 100 \\ -u_1 \le 0 \\ -u_2 \le 0 \\ u_1, u_2 \text{ - arbitrari} \end{cases}$$

c) Aflați o soluție optimă și valoarea optimă pentru problema duală.

C8 + S8

- Cautăm o bază primal și dual admisibilă pentru problema primală.

(Nu știu cum să fac asta, am luat la întâmplare.)

$\Rightarrow u_B = (C_B^T B^{-1})^T$ este soluție optimă pentru problema duală

Cautăm în tabelul simplex de la final unde avem valoarea 0 și poate găsim matricea identitate. (C8)

Fie $B = \{a_2, a_3\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$$\Rightarrow B^{-1} b = I_2 \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$$

B primal admisibilă.

$\Leftrightarrow z_j^B - c_j \leq 0, \forall j = \overline{1,4}$, B este

~~și~~ dual admisibilă.

$\Rightarrow u_B = (c_B^T B^{-1})^T$ este sol. optimă pentru problema duală

$$u_B^T = c_B^T B^{-1} = (100, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (100, 0)$$

$$\begin{cases} (u_B)_1 = (z_2^B - c_2) + c_2 = 100 \\ (u_B)_2 = (z_3^B - c_3) + c_3 = 0 \end{cases}$$

?

Soluția optimă ~~este~~ pentru problema duală este $(u_B)_1 = 100$, $(u_B)_2 = 0$, iar valoarea optimă este 100.