

Test 1 – Analiză 1

8 decembrie 2021

NUME: _____

PRENUME: _____

Testul are **DOUĂ** pagini.

Exercițiile din acest test depind de două numere naturale, A și B , unde:

A = numărul de litere din prenume (dacă există mai multe prenume, doar din primul).

B = numărul total de litere al numelui și prenumelui (complete.

Spre exemplu, dacă te cheamă Ion-Andrei Pop, atunci $A = 3$, $B = 12$.

Problema 1

(3 puncte)

Acest subiect depinde de restul împărțirii lui B la 7.

Stabiliți, FOLOSIND DEFINIȚIA LIMITEI UNUI ȘIR, dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are sau nu limită. Specificați valoarea acestei limite. Șirul (x_n) depinde de restul împărțirii lui B la 7.

$$x_n = \begin{cases} \frac{n^A + Bn^2 + 3}{n^4 + 1} & , B \equiv 0(mod 7) \\ \frac{n^{A+1} + Bn^2 + 1}{n^2 + 2} & , B \equiv 1(mod 7) \\ \frac{n^{A+1} + (B-1)n^2 + 1}{n^{A-1} + 2} & , B \equiv 2(mod 7) \\ \frac{3n^{A-1} + 2Bn^2 + 1}{2n^5 + 2} & , B \equiv 3(mod 7) \\ \frac{2n^A + 5n^3 + 1}{4n^5 + 2} & , B \equiv 4(mod 7) \\ \frac{5n^A + 4n + 3}{2n^3 + 2} & , B \equiv 5(mod 7) \\ \frac{2n^A + (B-2)n^3 + 1}{2n^6 + 2} & , B \equiv 6(mod 7) \end{cases}$$

Problema 2

(3 puncte)

Acest subiect depinde de restul împărțirii lui B la 4.

Stabiliți dacă șirul de numere reale definit recurent mai jos este convergent sau nu. În cazul în care șirul are limită, determinați această limită.

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_0 = A, & A \cdot x_{n+1} = x_n^2 + B \\ x_0 = A, & x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right) \\ x_0 = 1, & x_{n+1} = x_n + \frac{A+1}{x_n} \\ x_0 = 2A, & x_{n+1} = A + \sqrt[3]{(x_n - A)^2} \end{array} \right. , B \equiv 0(mod4) , B \equiv 1(mod4) , B \equiv 2(mod4) , B \equiv 3(mod4) , \forall n \in \mathbb{N}$$

Problema 3

(3 puncte)

Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este definită în funcție de restul împărțirii lui B la 5.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} & , B \equiv 0(mod5) \\ \left[\left(1 + \frac{1}{n \cdot A^n} \right)^n - 1 \right] & , B \equiv 1(mod5) \\ \frac{n^{5n}}{1 \cdot 2^A \cdot 3^A \dots n^A} & , B \equiv 2(mod5) \\ \frac{\ln(n+A)}{\ln(A \cdot n) + \ln(n^n)} & , B \equiv 3(mod5) \\ \frac{(n^2+A)^{6n}}{\left(n + \frac{A}{n} \right)} & , B \equiv 4(mod5) \end{array} \right.$$

Stabiliți dacă seria

$$\sum_{n \geq 1} f(n)$$

este convergentă sau nu.

Oficiu: 1 punct. Total: 10 puncte. Timp de lucru: 1 oră.

Test 1 - Analiză 1

ONUTU

RABU-CONSTANTIN

$$A = 4$$

$$B = 19$$

$$1. \quad x_n = \frac{5n^4 + 4n + 3}{2n^3 + 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + 4n + 3}{2n^3 + 2} = \infty$$

$(x_n)_n$ are limita ∞ dacă:

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq m_\varepsilon$ atunci $x_n > \varepsilon$

$$\frac{5n^4 + 4n + 3}{2n^3 + 2} > \varepsilon$$

$$\frac{5n^4 + 4n + 3}{2n^3 + 2} < \frac{5n^4 + 4n + 3}{2n^3} < \frac{20n^4 + 4}{2n^3} \quad \left(\begin{array}{l} 20n^4 > 5n^4 + 4n + 3 \\ 15n^4 - 4n + 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right)$$

$$\frac{20n^4 + 4}{2n^3} < \frac{20n^4 + 4}{2} \approx 10n^4 + 2 > \varepsilon$$

$$10n^4 > \varepsilon - 2$$

$$n^4 > \frac{\varepsilon - 2}{10}$$

$$n > \sqrt[4]{\frac{\varepsilon - 2}{10}}$$

$$\text{Pl. } \varepsilon \geq 2 \text{ aleg } m_\varepsilon = \left[\sqrt[4]{\frac{\varepsilon - 2}{10}} \right] + 1$$

$$\text{Pl. } \varepsilon < 2 \text{ aleg } m_\varepsilon = 1$$

$$2. \quad x_0 = 8, \quad x_{n+1} = 4 + \sqrt[3]{(x_n - 4)^2}$$

$$x_1 = 4 + \sqrt[3]{(8-4)^2} = 4 + \sqrt[3]{16}$$

$$x_2 = 4 + \sqrt[3]{(4 + \sqrt[3]{16} - 4)^2} = 4 + \sqrt[3]{4\sqrt[3]{4}}$$

Voran sei dem. $(x_n)_n \rightarrow$

$$x_0 > x_1$$

$$8 > 4 + \sqrt[3]{16}$$

$$8 > 4 + \sqrt[3]{16}$$

$$4 > \sqrt[3]{16}$$

$$4^3 > 16 \quad \text{Adev.}$$

Pp. adäquat $x_n > x_{n+1}$

Dem. pl. $x_{n+1} > x_{n+2}$

$$x_{n+1} > 4 + \sqrt[3]{(x_{n+1} - 4)^2}$$

$$x_n > x_{n+1} > 4 + \sqrt[3]{(4 + \sqrt[3]{(x_n - 4)^2} - 4)^2} =$$

$$= 4 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{(x_n - 4)^4}}$$

$$x_n > 4 + \sqrt[3]{(x_n - 4) \sqrt[3]{x_n - 4}}$$

$$x_n - 4 > \sqrt[3]{(x_n - 4) \sqrt[3]{x_n - 4}}$$

$$(x_n - 4)^3 > (x_n - 4) \sqrt[3]{x_n - 4} = \sqrt[3]{(x_n - 4)^4}$$

$$(x_n - 4)^9 > (x_n - 4)^5 \quad \text{Adev.} \Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2} \Rightarrow (x_n)_n \text{ ist}$$

decreasing

$$(x_n)_n \searrow \Rightarrow x_0 > x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$8 > x_n$$

$$\text{Set } x_n = 4 + \sqrt[3]{(x_n - 4)^2} > 0 \quad \Rightarrow x_n \in (0, 8] \text{ m\u00e4\u00dfigend}$$

(2)

2. $(x_n)_n$ strict descrescătoare / Th. Weierstrass
 $x_n \in (0, 8] \quad x_n \in (4, 8] \quad \xrightarrow{\quad} (x_n)_n \text{ conv.}$

Dacă $(x_n)_n$ este conv. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

Inlocuiesc în rel. de recurență:

$$x_{n+1} = 4 + \sqrt[3]{(x_n - 4)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 4 + \sqrt[3]{(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 4)^2}$$

$$l = 4 + \sqrt[3]{(l - 4)^2}$$

$$l - 4 = \sqrt[3]{(l - 4)^2}$$

$$(l - 4)^3 = (l - 4)^2$$

$$(l - 4)^3 - (l - 4)^2 = 0$$

$$(l - 4)^2 (l - 4 - 1) = 0$$

$$l_1 = 4 \text{ nu convine } (l_1 \notin (4, 8])$$

$$l_2 = 5 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5$$

$$\begin{aligned} (x_n - 4)^2 &> 0 \\ \sqrt[3]{(x_n - 4)^2} &> 0 \\ 4 + \sqrt[3]{(x_n - 4)^2} &> 0 \\ x_{n+1} &> 4 \end{aligned}$$

etc

$$3. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(n^2 + 4)^{6n}}{(n + \frac{4}{n})} = \frac{(n^2 + 4)^{6n}}{\frac{(n^2 + 4)}{n}} = (n^2 + 4)^{6n-1} \cdot n$$

$$\sum_{n \geq 1} (n^2 + 4)^{6n-1} \cdot n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 4)^{6n-1} \cdot n = \infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} f(n) \text{ div.}$$

(3)

(1)