LABORATOR#12

EX#1 (a) Scrieţi o funcţie în Python care are ca dată de intrare matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, şi ca date de ieşire matricea ortogonală $\mathbf{Q} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi matricea superior triunghiulară $\mathbf{R} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ cu $r_{kk} > 0$, $k = \overline{1,n}$, obţinute prin factorizarea QR a matricei $\mathbf{A}$ folosind aşa-numita *rafinare iterativă a metodei Gram-Schmidt clasice/standard*.

Această procedură se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\,\mathbf{R}_1\,, \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2\,\mathbf{R}_2\,, \quad \ldots \quad \mathbf{Q}_{\ell-1} = \mathbf{Q}_\ell\,\mathbf{R}_\ell\,, \tag{1}$$

unde factorizările QR de mai sus ale matricelor $\mathbf{A}, \mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_{\ell-1}$, $\ell \in \mathbb{N}$ şi $\ell \geq 2$, se obţin prin *metoda Gram-Schmidt clasică/standard*, cu menţiunea că $\ell = 2$ este, de regulă, suficient. Astfel, din relaţiile (1) obţinem factorizarea QR a matricei $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\,\mathbf{R}_1\,, \quad \text{unde} \quad \mathbf{Q} \coloneqq \mathbf{Q}_\ell \quad \text{şi} \quad \mathbf{R} \coloneqq \mathbf{R}_\ell\,\mathbf{R}_{\ell-1}\ldots\mathbf{R}_1\,. \tag{2}$$

(b) Testaţi funcţia pentru matricele

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}; \tag{3a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 26 \\ 12 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}; \tag{3b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10^{-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1,8}; \tag{3c}$$

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{H}_n = \big(h_{ij}\big)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,, \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}\,,\ i,j = \overline{1,n}\,; \quad n = \overline{2,12}\,; \tag{3d}$$

pentru $\ell = 2, 3$ şi verificaţi identitatea $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

(c) Pentru matricele date de relaţia (3d), cunoscute sub numele de *matrice Hilbert de ordin* n, reprezentaţi grafic mărimea $-\log_{10}\ \|\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\|_F$, unde

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 \coloneqq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \tag{4}$$

este aşa-numita *normă Frobenius* a matricei $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ca funcţie de $n = \overline{2,12}$ pentru factorizările QR obţinute prin

(i) metoda Gram-Schmidt clasică/standard;
(ii) metoda Gram-Schmidt modificată;
(iii) rafinarea iterativă a metodei Gram-Schmidt clasice/standard.

Indicaţii: Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) $\mathbf{A}$ este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;
(ii) $\mathbf{A}$ este o matrice inversabilă la stânga.

EX#2 (a) Scrieţi o funcţie în Python care are ca dată de intrare vectorul $\mathbf{x} \coloneqq \big[x_1\, x_2\, \ldots\, x_m\big]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m \setminus \big\{\mathbf{0}_m\big\}$ şi ca date de ieşire vectorul $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ care defineşte transformarea Householder $\mathbf{H}_\mathbf{v} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ care anulează componentele x_i, $i = \overline{2, m}$, ale vectorului $\mathbf{x}$ şi valoarea nenulă a vectorului $\mathbf{H}_\mathbf{v}\,\mathbf{x}$, i.e. $\alpha \coloneqq \big(\mathbf{e}^{(1)}\big)^\mathsf{T}\big(\mathbf{H}_\mathbf{v}\,\mathbf{x}\big)$, unde $\mathbf{e}^{(1)} \coloneqq \big[1\ 0\ \ldots\ 0\big]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$.

(b) Scrieţi o funcţie în Python care are ca dată de intrare matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, şi ca date de ieşire matricea ortogonală $\mathbf{Q} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ şi matricea superior triunghiulară $\mathbf{R} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ cu $r_{kk} > 0$, $k = \overline{1, n}$, obţinute prin factorizarea QR a matricei $\mathbf{A}$ folosind *metoda reflexiilor* (*Householder*).

(c) Testaţi funcţia pentru matricele date de (3a)–(3c) şi verificaţi identitatea $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_m$.

(d) Pentru matricele Hilbert de ordin n date de relaţia (3d), reprezentaţi grafic mărimea $-\log_{10}\, \|\mathbf{I}_m - \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\|_F$, obţinută prin factorizarea QR folosind metoda reflexiilor (Householder), ca funcţie de $n = \overline{2, 12}$.

Indicaţii: Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) $\mathbf{A}$ este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;
(ii) $\mathbf{A}$ este o matrice inversabilă la stânga.

EX#3 Fie matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, vectorul $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ şi sistemul supraabundent/supradeterminat de ecuaţii liniare

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{5}$$

Scrieţi o funcţie în Python are ca date de intrare matricea $\mathbf{A}$ şi vectorul $\mathbf{b}$, iar ca date de ieşire soluţia sistemului (5), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vectorul eroare reziduală, $\mathbf{r} \coloneqq \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, şi norma sa euclidiană, $\|\mathbf{r}\|_2$, obţinute prin *factorizarea QR* a matricei sistemului (5) folosind *metoda reflexiilor* (*Householder*).

Testaţi funcţia pentru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,28 \\ 3,31 \end{bmatrix}; \tag{6a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,27 \\ 0,25 \\ 3,33 \end{bmatrix}; \tag{6b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10^{-7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-7} \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{6c}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-k}, \quad k = \overline{1, 10}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6d}$$

Indicaţii: Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) **A** este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;

(ii) **A** este o matrice inversabilă la stânga;

(iii) **A** şi **b** sunt compatibili.