Subiect pentru examenul scris la algebră, grupa 102

Numele şi prenumele ....

Subiectul 1: 15 puncte

5 p a) Definește dimensiunea unui spațiu vectorial.

5 p b) Enunță Teorema Hamilton - Cayley și explică toate noțiunile care apar în enunț.

5 p c) Dă exemplu de polinom simetric și exemplu de polinom care nu e simetric din inelul **Q** [X, Y, Z]. Justifică exemplele date.

Subiectul 2: 25 puncte

10 p a) Fie V = $\mathbf{R}^2$ și fie $B = \{e_1,\ e_2\}$ baza sa canonică. În spațiul dual V^*, considerăm baza duală $B^* = \{e^1,\ e^2\}$ și $f \in V^*, f(x,y) = 2x - 5y$. Determină coordonatele lui *f* în baza B^*.

15 p b) Fie $P(X) = X^3 + X^2 - 3 \in \boldsymbol{Q}[X]$ și $n \geq 1$ un număr natural. Calculează $\mathcal{R}(P(X), X^n)$ (rezultantul celor două polinoame). Există oare un număr *n* pentru care, la calculul de mai sus, obținem rezultatul 0?

Subiectul 3: 20 puncte

10 p a) Scrie proprietatea de universalitate a produsului tensorial a două spații vectoriale definite peste același corp. Demonstrează apoi că în cazul finit dimensional:

$$\dim(V \otimes_K W) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

10 p b) Enunță și demonstrează teorema lui Frobenius, privitoare la polinomul minimal al unei matrice pătratice cu coeficienți într-un corp comutativ.

Subiectul 4: 20 puncte

5 p a) Rezolvă în **C** sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1 \end{cases}$$

15 p b) Fie $A, B \in M_n(\boldsymbol{C})$ și fie $D = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\boldsymbol{C})$.

Demonstrează că polinomul caracteristic al matricei *D* este produsul polinoamelor caracteristice ale matricelor $A + B$ și $A - B$.