Cristian-Mihai Cazacu

Ecuații cu derivate parțiale I
Note de curs
(În pregătire)

Universitatea din București

Facultatea de Matematică și Informatică

2 ianuarie 2022

Cuprins

1 Introducere

În cadrul acestui curs ne propunem o scurtă incursiune introductivă în studiul matematic al Ecuațiilor cu Derivate Parțiale (EDP), insistând în mare parte pe EDP liniare. In aceasta parte introductiva am extras cateva idei prezentate mai pe larg cu precadere in [7]. Ce este în general o EDP ? Exista cu adevarat un domeniu unitar al Matematicii care sa ne numeasca EDP ? La o primă privire raspunsul pare simplu: putem defini EDP ca fiind domeniul matematicii preocupat cu studiul ecuațiilor cu derivate parțiale. Din acest punct de vedere, scopul "natural" al subiectului este acela de a cauta o teorie generală care să acopere o clasă cât mai mare de EDP.

Gromov: "Objects, definitions or questions which look natural at a first glance may in fact be stupid".

Din pacate nu există o teorie generală de rezolvare a EDP. Totusi o teorie generală funcționează destul de bine pentru EDP liniare cu coeficienți constanți, caz în care transformata Fourier (TF) (semestrul II) este destul de efectivă. TF se poate aplica și la anumite clase de ecuații liniare cu coeficienti variabili (slabiciunea TF apare la ecuațiile neliniare).

EDP, și în particular cele neliniare, sunt prea subtile pentru a se încadra într-o schemă generală de rezolvare. Din contra, fiecare EDP induce o teorie proprie de abordare.

Cum un punct de vedere general asupra EDP si-a pierdut atractivitatea, foarte mulți matematicieni au început să adopte o metodă mai pragmatică, concentrându-se pe acele EDP considerate mai importante.

Numărul aplicațiilor pentru EDP specifice este fenomenal de mare. Subiecte importante din matematică cum ar fi analiza armonică, diverse arii din fizica matematică și teoria probabilităților sunt strâns legate de ecuații eliptice, parabolice, hiperbolice, sau de tip Schrödinger. Anumite ecuații geometrice specifice cum ar fi Laplace-Beltrami sau Dirac studiate pe varietăti s-au dovedit deosebit de utile în topologie și geometrie.

Teoria spectrală pentru operatorii Laplace-Beltrami la fel ca și teoria de scattering pentru ecuațiile de tip hiperbolic prezintă aplicații în teoria numerelor.

În cele din urmă, matematica aplicată este interesată nu numai în ecuațiile fizice de bază dar și într-o gamă largă de EDP cu relevanță în inginerie, biologie, chimie, economie, etc.

Punctul pragmatic de vedere face dificilă încadrarea EDP ca fiind un subiect în sine. Cu cât ne implicăm mai mult în studiul unei ecuații specifice cu atât mai mult trebuie să profităm de proprietățile/trăsăturile particulare ale ecuației, și deci, rezultatele obținute pot avea sens doar ca niște contribuții pentru aria/domeniul particular în care aceea EDP este relevantă.

Fiecare ecuație importantă pare să genereze insule izolate de activitate matematică.

Mai mult, o EDP poate fi studiată din diferite puncte de vedere de un matematician aplicat, fizician, geometru sau analist.

EDP ca subiect unitar, de sine stătător, a încetat demult sa mai existe, reprezentand în prezent o largă colecție de subiecte interconectate.

Conceptul de EDP își are originile în fizică sau mai apropiat în fizica matematică; mu existau diferențe clare între cele două pe vremea lui D'Alambert, Euler, Poisson, Laplace.

Riemann a fost primul care a folosit EDP pentru a ataca probleme de matematică pură. În ultimul secol EDP a reprezentat o unealtă de rezolvare a unor probleme în analiza complexă, geometrie, topologie.

Pentru detalierea dezvoltării EDP din ultimul secol și aplicațiilor acestora recomandăm lucrările [2,7].

1.1 Planul general al cursului

Un plan al cursului ar fi următorul:

1. **Forma generala a unei EDP**
   - Ecuatii liniare. Exemple.
   - Ecuatii neliniare (semiliniare, cvasiliniare, total neliniare).
   - Exemple de ecuatii fundamentale.
   - Operatori cu derivate partiale (D^α, div, Δ, ∇, curl).
2. **EDP de ordin I**
   - Ecuatii liniare cu coeficienti constanti, ecuatii neliniare (metoda geometrica, metoda curbelor caracteristice).
   - Ecuatia de transport. Ecuatii cu coeficienti variabili.
3. **EDP de ordin II**
   - Clasificare (eliptice, parabolice, hiperbolice) si exemple reprezentative (ecuatiile Poisson, Laplace, caldurii, undelor).
   - Conditii la limita pentru problemele eliptice (Dirichlet, Neumann, Robin).
   - Formule integrale (integrarea prin parti, formula Green, formula flux-divergenta, formula co-ariei, etc).
4. **Ecuatii eliptice**
   - Operatorul Laplace in coordonate sferice in 2-d si 3-d. Solutii radial ale ecuatii lui Laplace. Solutia fundamental si proprietati.
   - Problema Poisson in $\mathbb{R}^n$; reprezentarea solutiei sub forma unei convolutii.
   - Problema Poisson cu with conditii Dirichlet; exemple particulare pe patrat (rezolvare prin separare de variabile) si pe bila (solutii radiale). Principiul lui Dirichlet.
   - Functii armonice (sub/super). Lema lui Hopf, principiul slab si tare de maxim. Formula de medie. Aplicatii. Teorema lui Liouville.
   - Formula Green-Riemann. (Analiticitatea functiilor armonice) Functia lui Green. Teorema de reprezentare pentru solutiile problemei Dirichlet si Poisson (cazul bilei).
5. **Ecuatii de evolutie**
   - Ecuatia caldurii in $\mathbb{R}^n$. Solutii auto-similare. Determinarea nucleului caldurii. Proprietati ale nucleului caldurii. Problem Cauchy in $\mathbb{R}^n$. Reprezentarea solutiei cu ajutorul convolutiei. Efect regularizant.
   - Ecuatia caldurii in domenii marginite. Descrestere exponentiala in timp. Solutii in variabile separabile pe un interval (metoda Fourier).

- Ecuatii hiperbolice. Ecuatia undelor in 1-d. Formula lui D'Alambert. Ecuatia undelor pe un interval. Solutii in variabile separabile (metoda Fourier). Metode energetice.

6. **Spatiile Sobolev H^1, H_0^1, $W^{1,p}$**
   - Definitii, exemple.
   - Inegalitatea Poincare.
   - Solutii slabe pentru EDP liniare. Formulari variationale.
   - Lemele Lax-Migram si Stampacchia.
   - Existenta solutiilor slabe pentru problemele Dirichlet si Neumann sau cu conditii mixte.

Reamintim mai intai ca o ecuatie diferentiala ordinara (EDO) este o ecuație ce implica o functie de o variabila reala $u = u(t)$ si derivate ale acesteia, necunoscuta ecuatiei fiind chiar functia u.

O EDP in necunoscuta u este o ecuatie ce implica o functie de mai multe variabile $u = u(x_1, \ldots x_n)$ si derivatele sale partiale, unde $x_1, x_2, \ldots x_n$ sunt coordonatele carteziene din $\mathbb{R}^n$; n-pletul din $\mathbb{R}^n$ il vom mai nota $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Notatiile pentru derivatele partiale sunt extrem de variate si se folosesc in functie de fiecare situatie in parte atata timp cat nu exista pericol de confuzie. Pentru derivatele partiale de ordin I ale lui u in raport cu variabila x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ folosim notatiile

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i}, \quad \partial_i u, \quad \partial_{x_i} u, \quad etc... \tag{1}$$

Pentru derivatele parțiale de ordin II ale lui u in raport cu variabilele x_i si x_j, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ folosim notatiile

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad u_{x_i x_j}, \quad \partial_i \partial_j u, \quad \partial_{x_i} \partial_{x_j} u, \quad etc.. \tag{2}$$

ordinea derivarii in (2) facandu-se in felul urmator

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad u_{x_i x_j} = (u_{x_i})_{x_j}, \quad etc.. \tag{3}$$

Daca $i = j$ putem prescurta notatiile in (2) astfel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad u_{x_i x_i}, \quad \partial_i^2 u, \quad \partial_{x_i}^2 u, \quad etc.. \tag{4}$$

In felul acesta iterativ putem extinse notatiile pentru derivatele partiale de ordin III, IV,etc. Cele uzuale in acest curs sunt primele doua variante de la fiecare dintre notatiile (1)-(4) de mai sus.

Exemplu. (de EDP). $u = u(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

1.2 Clasificare EDP

Pentru inceput avem nevoie sa introducem **operatorul diferential D^α.** Pentru un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ si o functie $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ definim

$$D^\alpha u \stackrel{\text{def}}{:=} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad \text{unde } |\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Exemplu. $u = u(x, y, z)$, $\alpha = (1, 2, 1)$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z}.$$

Pe parcursul cursului vom folosi si notatia $D^k u$ pentru functii u suficient de netede, unde k e numar natural si prin $D^k u$ vom intelege multimea tuturor derivatelor partiale de ordin k ale lui u, i. e.,

$$D^k u := \left\{ \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \;\middle|\; k = k_1 + \ldots + k_n. \right\}.$$

Exemplu. Daca $u = u(x, y)$ este de clasa C^2 atunci $D^2 u = \{u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\}$

Definitie 1 (Forma generala a unei EDP)**.** *Printr-o EDP de ordin k ($k \geq 1$) pentru o functie u intelegem o expresie de forma*

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \ldots, Du, u, x) = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{5}$$

ce are loc pentru orice x apartinand unei regiuni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, unde F este o functie data. In acest caz, functia u spunem ca este necunoscuta ecuatiei (5).

Ordinul unei EDP (aici k) reprezinta numarul maxim de derivate partiale care apar in ecuatie.

In cadrul Definitiei 1 distingem mai multe tipuri de ecuatii cu derivate partiale:

– liniare (L)

– neliniare
- semiliniare (SL)
- cvasiliniare (CvL)
- total neliniare (TN)

Inainte de a da definitiile pentru fiecare dintre tipurile de mai sus si exemple specifice fiecarui tip, mentionam faptul ca acest curs se va concentra in mare parte pe ecuatiile liniare fiind de regula si cele mai usor de studiat.

Ecuatii liniare

Definitie 2 (Operator diferential liniar)**.** *Un operator $\mathcal{L}$ se numeste diferential daca asociaza unei functii u (suficient de netede) o functie ce depinde de u si de derivatele sale partiale. $\mathcal{L}$ se numeste liniar daca*

$$\mathcal{L}(au + bv) = a\mathcal{L}u + b\mathcal{L}v, \tag{6}$$

pentru orice numere reale a si b si orice functii u si v (suficient de netede).

In particular, D^α (din sectiunea (1.2)) este operator liniar, ceea ce ne conduce la urmatoarea definitie.

Definitie 3 (Forma generala EDP liniara)**.** *O ecuatie liniara de ordin k are forma*

$$\underbrace{\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)}_{\mathcal{L}u} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

unde a_α si f sunt functii date care nu depind de necunoscuta u.

Daca $f \equiv 0$ atunci (7) se numeste ecuatie liniara omogena.

Altfel, daca $f \not\equiv 0$ atunci (7) se numeste ecuatie liniara neomogena.

Exemplu. $n = 3$, $u = u(t, x) = u(t, x_1, x_2)$

$$-u_{tt} + (x_1^2 + x_2^2) u_{x_1 x_1 x_2} + u_{x_1 x_2} = \ln(1 + \cos(x_1)).$$

Identificati coeficientii a_α, operatorul liniar $\mathcal{L}$ si functia f pentru exemplul de mai sus.

Exemplu. Care dintre ecuatiile de mai jos nu este liniara ? Justificati.

1. $u = u(x, y)$, $u_{xy} + y u_x = \sin(xy)$
2. $u = u(x, y)$, $u_x + u u_y = \cos(y)$
3. $u = u(t, x)$, $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$

La fel ca in cazul EDO si in cazul unei EDP omogene $\mathcal{L}u = 0$ are loc principiul superpozitiei: daca $u_1, \ldots u_m$ sunt solutii atunci orice combinatie liniara $c_1 u_1 + .. + c_m u_m$ este de asemenea solutie.

In plus, la fel ca in cazul EDO toate solutiile ecuatiei neomogene $\mathcal{L}u = f$ sunt date de translatia familiei solutiilor ecuatiei omogene $\mathcal{L}u = 0$ cu o solutie particulara u_p a ecuatiei neomogene $\mathcal{L}u_p = f$.

Ecuatii neliniare

Definitie 4 (Ecuatii semiliniare)**.** *Forma generala a unei ecuatii semiliniare de ordin $k \geq 1$ este*

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + F(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x) = 0 \tag{8}$$

(Ecuatie neliniara, in care termenii ce contin derivatele de ordin maxim sunt liniari.)

Exemplu. $u = u(t, x)$, $u_t - u_{xx} + u u_x = 0$.

Definitie 5 (Ecuatii cvasiliniare)**.** *Forma generala a unei ecuatii cvasiliniare de ordin $k \geq 1$ este*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x) D^\alpha u(x) + F(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x) = 0. \tag{9}$$

(Ecuatie neliniara, in care termenii ce contin derivate de ordin maxim sunt "aproape" liniari.)

Exemplu. $u = u(x, y)$, $u_{xx} + (u_x^2 + u)u_{yy} + \sin(u) = 0$.

Definitie 6 (Ecuatii total neliniare)**.** *Sunt EDP in necunoscuta u in care nu exista termeni liniari ce contin derivate de ordin maxim ale lui u.*

Exemplu.

1. Ecuatia “Eikonala”[1]: $u = u(x, y)$, $u_x^2 + u_y^2 = 1$.
2. Ecuatia Monge-Ampere: $\det(Hu(x)) = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, unde H este matricea Hessiana a lui u ($H_{ij} = u_{x_i x_j}$).

1.3 Exemple de EDP ce modeleaza fenomene fizice

1. $u = u(x, y)$
   - $u_{xx} + u_{yy} = 0$, ecuatia Laplace, ord 2, (L) omogena,
   - $u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2$, ecuatia Poisson, ord 2, (L) neomogena
2. $u = u(t, x)$
   - $u_t + u_x = 0$, ecuatie de transport, ord 1, (L) omogena,
   - $u_t - u_{xx} = 0$, ecuatia caldurii, ord 2, (L) omogena
   - $u_{tt} - u_{xx} = 0$, ecuatia undelor, ord 2, (L) omogena
   - $u_t + uu_x = 0$, ecuatia Burgers, ord 1, (CvL) omogena
   - $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$, ecuatia Korteweg de Vries (KdV), ord 3, (SL) omogena
   - $iu_t + u_{xx} = 0$ ecuatia Schordinger, ord 2, (L) omogena
3. $u = u(t, x, y)$ etc..

In spatiul Euclidian $\mathbb{R}^n$ operatorul Laplacian definit prin $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ este cel mai simplu si spectaculos operator diferential simetric.

Operatorii ecuatiilor caldurii, Schrodinger si undelor: $\partial_t - \Delta$, $-i\partial_t - \Delta$ si respectiv $\partial_t^2 - \Delta$ sunt cei mai simpli operatori de evolutie care pot fi formati folosind Δ. Operatorul ecuatiei undelor $\Box := \partial_t^2 - \Delta$ se mai numeste si d'Alambertian.

Solutiile ecuatiei $\Delta u = 0$ sunt solutii stationare pentru $\Box u = 0$.

Laplacianul si D'Alambertianul sunt operatori liniari in EDP, reprezentand cele mai simple aproximari pt ecuatii strans legate natural cu doua dintre structurile geometrice fundamentale, Euclidiana si Minkowskiana. Ecuatia caldurii este cea mai simpla paradigma pentru fenomenele de difuzie.

Aceiasi operatori se pot defini pe varietati Riemannniene (M, g) unde putem asocia Δ_g, $\Box_g$, etc. in raport cu metrica g.

Presupuneri “fenomenologice”. In multe aplicatii are sens sa presupunem ca anumite cantitati sunt mici si pot fi neglijate conducand la niste ecuatii simplificate.

Un mod tipic de a genera ecuatii fenomenologice este sa incerci sa scrii cel mai simplu model de ecuatie care descrie o anumita particularitate a sistemului initial.

[1] $\varepsilon\iota\kappa o\nu\alpha$= imagine (lb. greaca); este o ecuatie care apare in propagarea undelor

Exemple: Efectele undelor plane ale fluidelor incompresibile, elasticitate pot fi ilustrate prin ec Burgers simplificata. Fenomene dispersive neliniare duc la studiul KdV simplificat, etc.

Problemele model simplificate sunt de asemenea esentiale in munca de zi cu zi a unui matematician care lucreaza cu rigurozitate in EDP.

Ne vom axa pe patru dintre ecuatii principale care stau la baza fizici matematice: ecuația de transport, ecuația lui Laplace, ecuația căldurii, ecuația undelor.

Pe parcursul acestui curs se presupune cunoscută rezolvarea ecuațiilor și sistemelor differențiale ordinare standard care se parcurg în anul II de facultate la cursul de Ecuații Diferențiale Ordinare (EDO). Totuși, pentru acest curs de EDP nu vom recurge la prea multă teorie EDO cu exceptia celei de bază (ecuații cu coeficienti constanti, ecuații de tip Euler, sisteme liniare cu coeficienți constanți, etc).

Spre deosebire de EDO unde există foarte multe tehnici/algoritmi de rezolvare/determinare explicită a soluțiilor, la EDP determinarea explicită a soluțiilor este posibilă în mai puține situații concrete. Acest lucru depinde de complexitatea ecuației dar mai ales de domeniul pe care se studiază ecuația, care nu mai este un interval ca in cazul EDO dar poate fi un pătrat, cub, o bilă multidimensională, sau un domeniu mai complex, cu forma neregulata, etc. Sunt situații când vom putea reduce problema la rezolvarea unei EDO pentru a rezolva o ecuație cu derivate parțiale, cum ar fi unele dintre cazurile enumerate mai sus.

1.4 Operatori diferentiali importanti in studiul EDP

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa. Numim o functie $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ *camp scalar* si o functie $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \ldots F_n)$ *camp vectorial*, unde $F_i = F_i(x_1, \ldots, x_n)$ sunt campuri scalare pentru pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Presupunem ca f si F_i admit derivate partiale de ordin suficient de mare pentru ca urmatoarele definitii sa aiba sens.

I. Operatori pentru campuri scalare

a) Operatorul de derivare partiala in raport cu variabila x_i este

$$\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

b) Operatorul diferential D^α, cu multiindicele $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, este

$$D^\alpha \stackrel{\text{def}}{:=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Exemplu. Sa se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}$ si $D^{(1,1)} f$ pentru functiile

- $f(x, y) = \ln\left(\cos \frac{x}{y}\right)$
- $f(x, y) = \tan(y \arcsin x)$

– $f(x,y) = (x^3+y^2)^{\sqrt{\frac{x}{y}}}$
pe domeniul maxim de definitie.

c) Operatorul **gradient** $\nabla\cdot$, ("nabla")

$$\nabla f \stackrel{\text{def}}{:=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathbf{e}_i,$$

cu $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1,n}}$ baza canonica in $\mathbb{R}^n$.
Exemplu.
(a) Pentru $f(x,y,z) = \frac{x^2 z}{y}$ avem

$$\nabla f = \left(\frac{2xz}{y}, \frac{-x^2 z}{y^2}, \frac{x^2}{y}\right), \quad y \neq 0.$$

(b) Pentru $f(x) = |x|^\lambda$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$ si $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$, avem

$$\nabla f = \lambda x |x|^{\lambda-2}, \quad x \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

d) Operatorul **Laplacian** Δ in coordonate carteziene ("Delta") (se mai foloseste si notatia ∇^2) se defineste astfel:

$$\begin{aligned}\Delta f &\stackrel{\text{def}}{:=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= \mathbf{Tr}(H_f),\end{aligned} \tag{10}$$

unde $\mathbf{Tr}(H_f)$ este urma matricei Hessiane $H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$ a lui f.
Notatia ∇^2 (mai putin uzuala in acest curs) provine din urmatorul calcul operatorial

$$\begin{aligned}\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\end{aligned}$$

Exemplu.
(a) Functia $f(x,y) = x^2 + y$ are $\Delta f = 2$.
(b) Functia $f(x) = |x|^\lambda$ cu $\lambda \in \mathbb{R}$ si $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$ are

$$\Delta f = \lambda(\lambda + n - 2)|x|^{\lambda-2}, \quad x \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

II. Operatori diferentiali pentru campuri vectoriale

Fie $F : \underbrace{\Omega}_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ camp vectorial, $F = (F_1, \ldots, F_n)$.

a) Operatorul **divergenta div** (notatie alternativa $\nabla\cdot$) se defineste prin

$$\begin{aligned}\mathbf{div}F &\stackrel{\text{def}}{:=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \\ &= \nabla \cdot F \\ &= \mathbf{Tr}(J_F),\end{aligned}$$

unde $\mathbf{Tr}(J_F)$ este urma matricei Jacobiane $J_F = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$ asociate lui F.

Exemplu. Fie $F(x) = x|x|^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$. Avem

$$\mathbf{div}F = (\lambda + n)|x|^{\lambda-1}, \quad x \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

11

b) Operatorul **rotational rot** in $\mathbb{R}^3$ (se mai noteaza si **curl** sau $\nabla \times \cdot$) este

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}F &\stackrel{\text{def}}{:=} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \nabla \times F, \end{aligned} \tag{11}$$

unde $F = (F_1, F_2, F_3)$, $F_i = F_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,3}$.
(Operatorul rotational se poate interpreta ca produsul vectorial dintre gradient si campul F.)

Propozitie 1 (Legaturi intre ∇, Δ, **div**, **rot**). *Aratati ca urmatoarele relatii sunt adevarate pentru campuri suficient de netede*

1. $\Delta f = \mathbf{div}(\nabla f)$
2. $\mathbf{div}(\mathbf{rot}F) = 0$
3. $\mathbf{div}(f_1 \nabla f_2) = \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 + f_1 \Delta f_2$
4. $\nabla(f_1 f_2) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1$
5. $\Delta(f_1 f_2) = f_2 \Delta f_1 + f_1 \Delta f_2 + 2\nabla f_1 \cdot \nabla f_2$.
6. $\mathbf{rot}(\nabla f) = 0$.

Mai sus f, f_1, f_2 sunt campuri scalare in $\mathbb{R}^n$ iar F este camp vectorial in $\mathbb{R}^3$.

1.5 Formule integrale

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu (i.e. multime deschisa si conexa) suficient de neted (e.g. cu frontiera ”fara colturi”). In ceea ce urmeaza vom da o serie de formule extrem de folositoare in studiul EDP.

(FIP) Formula de integrare prin parti

$$\boxed{\int_{\Omega} uv_{x_i}dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i d\sigma - \int_{\Omega} u_{x_i}vdx, \quad \forall u,v \in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}),} \tag{12}$$

pentru orice $i = \overline{1,n}$, unde ν_i este componenta a-i-a a versorului normalei exterioare in punctele de pe $\partial\Omega$.

Observatie 1. *In cazul $n = 1$, $\Omega = [a,b]$ formula (12) se reduce la*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = uv\nu\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \quad \forall u,v \in C^1(a,b)\cap C([a,b]).$$

Cu conventia $\nu(b) = 1$ si $\nu(a) = -1$ recuperam formula de integrare prin parti invata in liceu pentru integrala Riemann.

(GG) Formula Gauss-Green

$$\boxed{\int_{\Omega} u_{x_i}dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i d\sigma, \quad \forall u \in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}).} \tag{13}$$

Formula (13) este caz particular al (12) alegand $v = 1$.

(GO) Formula Gauss-Ostrogradski (formula flux-divergenta)

Fie $F \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ camp vectorial oarecare. Atunci

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathrm{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F\nu d\sigma} \tag{14}$$

Formula (14) se obtine aplicand (13) pentru $v = 1$, $u_{x_i} = F_i$ si sumand dupa i de la 1 la n.

Observatie 2. *Denumirea de formula flux-divergenta provine din faptul ca integrala de frontiera reprezinta fluxul campului F prin suprafata $\partial\Omega$.*

(G1) Prima formula a lui Green

$$\boxed{\int_{\Omega} u\Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla v dx, \quad \forall u,v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}).} \tag{15}$$

Formula (15) se poate deduce din (14) pentru $F = \mathrm{div}(u\nabla v)$.

(G2) A doua formula a lui Green

$$\boxed{\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)d\sigma, \quad \forall u,v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}).} \tag{16}$$

Formula (16) se poate deduce aplicand de doua ori (15), schimband rolurile lui u si v.

(CoA) Formula co-ariei (”principiul foitelor de ceapa”)

Fie $f \in L^1(B_R(0))$ (incluzand si cazul $R = \infty$, i.e. $B_R(0) = \mathbb{R}^n$) atunci

$$\boxed{\int_{B_R(0)} f(x)dx = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f(r\sigma)d\sigma dr = \int_0^R r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(r\sigma)d\sigma dr} \tag{17}$$

O demonstratia a formulei (17) se poate face utilizand sumele Riemann. Prima parte a egalitatii in (17) este destul de intuitiva. A doua egalitate in (17) este o schimbare de variabila. De fapt formula co-ariei in forma (17) este un caz particular al formulei co-ariei mai generale din Federer [5].

1.6 Sfera si bila din $\mathbb{R}^n$. Proprietati

Amintim ca pentru orice $R > 0$, bila deschisa de raza R centrata in origine este definita de

$$B_R(0) := \{x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots x_n^2 < R^2\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}. \tag{18}$$

Notam cu $\partial B_R(0)$ frontiera bilei $B_R(0)$ adica sfera de raza R din $\mathbb{R}^n$ centrata in origine. Ca notatie alternativa pentru sfera $\partial B_R(0)$ mai folosim S_R^{n-1} sau daca este vorba despre sfera de raza 1 doar S^{n-1}. Mai precis,

$$\partial B_R(0) = S_R^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = R\}. \tag{19}$$

In mod analog se definesc bila si sfera de raza R centrate intr-un punct oarecare $x_0 \in \mathbb{R}^n$, respectiv $B_R(x_0)$ si $\partial B_R(x_0)$. Mai precis,

$$B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < R\}, \quad \partial B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| = R\}.$$

In acest curs ne vom referi in cea mai mare parte la bilele si sferele centrate in originea $x = 0$.

Prin ”volumul” bilei $B_R(x_0)$ intelegem

$$\text{vol}(B_R(x_0)) := \int_{B_R(x_0)} 1dx. \tag{20}$$

Prin ”aria” sferei $B_R(x_0)$ intelegem

$$\text{aria}(\partial B_R(x_0)) = \int_{\partial B_R(x_0)} 1d\sigma. \tag{21}$$

Integrala din (20) in raport cu dx reprezinta integrala Lebesque din $\mathbb{R}^n$ pe multimea $B_R(x_0)$. Tinand cont ca sfera $\partial B_R(x_0)$ este o hipersuprafata $n-1$ dimensionala, integrala (21) in raport cu $d\sigma$ poate fi inteleasa ca o integrala Lebesque pe $\mathbb{R}^{n-1}$ (de fapt pentru o definitie riguroasa este o integrala in raport cu masura Haussdorf $n-1$ dimensionala $d\mathcal{H}^{n-1}$, a se vedea detalii in cartea lui Evans si Gariepy [4]).

Propozitie 2. *Au loc formulele*

$$\text{aria}(\partial B_R(x_0)) = w_n R^{n-1}, \quad \text{vol}(B_R(x_0)) = \frac{w_n R^n}{n}. \tag{22}$$

unde $\omega_n := \text{aria}(S^{n-1})$

Demonstraţie. Pentru prima parte din (22) consideram $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ o parametrizare a lui $\partial B_R(0)$, i.e.

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i^2(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = R^2, \quad \forall (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in U,$$

iar g este metrica asociata. Evident $\mathcal{L}/R$ devine o parametrizare a lui S^{n-1} si notam cu γ metrica asociata pe S^{n-1}. Este usor de vazut ca

$$g = R^2 \gamma, \quad |g| = R^{2(n-1)} |\gamma|.$$

Prin urmare avem

$$\begin{aligned} \partial B_R(0)| = \int_{\partial B_R(0)} d\sigma &= \int_U \sqrt{|g|} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}, \\ &= R^{n-1} \int_U \sqrt{|\gamma|} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= R^{n-1} |S^{n-1}| = R^{n-1} w_n \end{aligned}$$

Pas 2. Din formula co-ariei rezulta (22). □

Pentru a intelege mai bine formulele si notiunile generalizate de "volum" si "arie" sa ne referim la dimensiunile $n \in \{1, 2, 3\}$ unde lucrurile sunt mai intuitive. Fara a pierde din generalitate putem considera cazul $x_0 = 0$.

1. $n = 1 : B_R(0) = (-R, R), \partial B_R(0) = \{-R, R\}$. Avem $\text{vol}(B_R(0)) = 2R$ si $\text{aria}(\partial B_R(0)) = 2$. In acest caz "volumul" este lungimea intervalului iar "aria" este cardinalul unei multimi cu doua elemente.
2. $n = 2 : B_R(0) =$discul de raza R, $\partial B_R(0) =$cercul de raza R. Avem $\text{vol}(B_R(0)) = \pi R^2$ si $\text{aria}(\partial B_R(0)) = 2\pi R$. In acest caz "volumul" este aria discului iar "aria" este lungimea cercului.
3. $n = 3 : B_R(0) =$bila de raza R, $\partial B_R(0) =$sfera de raza R. Avem $\text{vol}(B_R(0)) = 4\pi R^3/3$ si $\text{aria}(\partial B_R(0)) = 4\pi R^2$. In acest caz "volumul" este volumul bilei iar "aria" este aria sferei.

Observam ca in fiecare din cazurile $n \in \{1, 2, 3\}$ recuperam formulele (22).

Propozitie 3 (Determinarea formulei pentru w_n)**.** *Sa se arate ca*

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{23}$$

unde Γ *este functia lui Euler* $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$.

Demonstraţie. Consideram integrala $I := \int_{\mathbb{R}}^n e^{-|x|^2}dx$ pe care o calculam in doua moduri. Pe de o parte, folosind formula co-ariei obtinem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_{\partial B_r(0)} e^{-r^2} d\sigma dr \\ &= \int_0^\infty \text{aria}(\partial B_r(0)) e^{-r^2} d\sigma dr \\ &= \omega_n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} \\ &= \omega_n \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \omega_n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2} \end{aligned} \tag{24}$$

Pe de alta parte, avem

$$I = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^n = \sqrt{\pi}^n. \tag{25}$$

Din (24)-(25) obtinem (23).

Exercitiu 1. *Sa se demonstreze independent formulele* (22) *in dimensiuni* $n = 2, 3$. *Interpretarea geometrica a elementului de suprafata* $d\sigma$ *in 2 dimensiuni este* ds *elementul de lungime a unui arc de curba iar in 3 dimensiuni este elementul de arie a unei suprafete. Se defineste integrala de suprafata in* $\mathbb{R}^n$ *facand paralela cu lungimea unei curbe respectiv aria unei suprafete. Se poate face o interpretare geometrica cu "petice" (lungimea vectorului tangent, aria unui paralelogram din spatiul tangent, etc).*

Cateva exercitii legate de diferentiabilitate

Exercitiu 2. *Sa considera functia definita pe ramuri* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{26}$$

Aratati ca:

1. f *este continua in punctul* $(0,0)$.
2. f *admite derivate partiale de ordin intai in punctul* $(0,0)$.
3. f *nu este diferentiabila in punctul* $(0,0)$.

Exercitiu 3. *Fie functia definita pe ramuri* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(\frac{y^2-x^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{27}$$

Aratati ca

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1 \ \textit{si} \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1.$$

(Acest exemplu ne spune ca functia f nu e de clasa C^2 (conform teoremei lui Schwarz) desi admite derivate partiale pana la ordinul doi.)

Exercitiu 4. *Sa considera functia definita pe ramuri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{28}$$

Aratati ca:

1. f este continua in punctul $(0,0)$.
2. f este diferentiabila in punctul $(0,0)$.
3. Sa se scrie diferentiala functiei f in punctul $(0,0)$
4. Derivatele partiale f_x, f_y nu sunt continue in $(0,0)$.

$$\boxed{\text{Pe } \mathbb{R} : \text{diferentiabilitate} \Leftrightarrow \text{ derivabilitate.}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Pe } \mathbb{R}^n, n \geq 1 : \{\text{functii de clasa } C^1\} &\subsetneqq \{\text{functii diferentiabile}\} \\ &\subsetneqq \{\text{functii pt care exista derivate partiale de ordin I}\} \end{aligned}} \tag{29}$$

2 Ecuatii de ordin I

Forma generala a unei EDP de ordin I pentru o functie $u = u(x,y,\ldots)$ are forma

$$F(u_x, u_y, \ldots, u, x, y, \ldots) = 0 \tag{30}$$

Ideea principala este aceea de a reduce rezolvarea unei EDP de tipul (30) la rezolvarea unor sisteme de EDO. Acest lucru nu este neaparat adevarat pentru EDP de ordin superior.

In cele ce urmeaza ne vom limita la ecuatii de tipul (30) cu doua variabile x, y (teoria generala prezentata in cazul a doua variabile se poate extinde pentru orice numar de variabile).

2.1 Metoda curbelor caracteristice

Aceasta sectiune se bazeaza in parti pe [6, Cap. 1]. Studiem ecuatii cu forma generala

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \quad (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{31}$$

unde a, b, c sunt functii de clasa C^1.

Vom reprezenta fiecare solutie printr-o suprafata in $\mathbb{R}^3$ cu parametrizarea indusa

$$\Sigma : (x,y,z), \quad z = u(x,y); \quad r(x,y) = (x,y,u(x,y)).$$

Definitie 7. *Aceste suprafete Σ se numesc* ***suprafete integrale*** *ale EDP de tip* (31).

Definitie 8. *Functiile prescrise $a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)$ definesc campuri de vectori $(a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u))$ din $\mathbb{R}^3$ ce poarta numele de* ***directii caracteristice****.*

Suprefetele integrale Σ admit ca vectori tangenti in fiecare punct pe

$$r_x = (1, 0, u_x), \quad r_y = (0, 1, u_y)$$

iar directia normalei la Σ este data de

$$\boldsymbol{n} \sim r_x \times r_y \sim (u_x, u_y, -1).$$

Observatie 3. *Normala unei suprafete integrale intr-un punct este perpendiculara pe directia caracteristica (a, b, c) in acel punct.*

Definitie 9. ***Curbele caracteristice*** *sunt curbele pe Σ care in fiecare punct sunt tangente la directia caracteristica (a, b, c) in acel punct.*

Altfel spus, curbele caracteristice sunt curbe de forma $(x(t), y(t), z(t)) \subset \Sigma$ (pentru un parametru adecvat t) astfel incat vectorul tangent la curba in fiecare punct este directia caracteristica in acel punct, i. e.

$$(\gamma_{car}): \quad \begin{cases} x\prime(t) = a(x(t), y(t), z(t)), \\ y\prime(t) = b(x(t), y(t), z(t)), \\ z\prime(t) = c(x(t), y(t), z(t)). \end{cases} \tag{32}$$

In plus γ_{car} trebuie sa verifice $z(t) = u(x(t), y(t))$.

Stim din teoria EDO ca daca $a, b, c \in C^1$ atunci prin fiecare punct $(x_0, y_0, z_0 = u(x_0, y_0))$ trece exact o curba caracteristica (unicitatea locala a solutiei sistemului γ_{car}, vezi EDO anul II).

Observatie 4. *Daca inlocuim parametru t cu $t + \tilde{c}$, cu $\tilde{c}$ constanta, se schimba solutia dar nu si curba caracteristica care este imaginea solutiei sistemului.*

Observatie 5. *O suprafata integrala poate fi privita ca reuniunea curbelor caracteristice.*

2.2 Problema Cauchy

Vrem sa gasim solutii in functie de o multime de functii prescrise F numite “date”, i. e. $F \mapsto u$. Spatiul solutiilor este descris de spatiul datelor de plecare.

Problema Cauchy consta in gasirea (stabilirea existentei) acelei solutii u pentru data F prescrisa.

Un mod simplu de a selecta o solutie individualizata dintr-o multime de solutii consta in prescrierea unei curbe Γ in $\mathbb{R}^3$ care sa fie continuta in curba integrala Σ.

Fie Γ reprezentata parametric prin

$$\Gamma: \quad \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s). \end{cases} \tag{33}$$

Ne dorim o solutie $u = u(x, y)$ a. i. $\Gamma \subset \Sigma$, deci u trebuie sa satisfaca

$$h(s) = u(f(s), g(s)) \tag{34}$$

Definitie 10. *Gasirea solutiei* $u = u(x, y)$ *a problemei* (31) *pentru datele* f, g, h *satisfacand* (34) *se numeste problema Cauchy pentru* (31).

Altfel spus, problema Cauchy asociata ecuatiei este

$$(P_{Cauchy}): \quad \begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \\ u(f(s), g(s)) = h(s), \end{cases} \tag{35}$$

unde f, g, h sunt functii netede date.

Vom fi interesati de solutii locale definite pentru x, y in jurul valorilor

$$x_0 = f(s_0), \quad y_0 = g(s_0).$$

In multe exemple variabila y va fi identificata cu **timpul** si x cu **spatiul**.

Problema Cauchy cu valori initiale

Studiem problema Cauchy speciala in care curba Γ are forma

$$\Gamma: \quad \begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = h(s), \quad (u(s, 0) = h(s)). \end{cases} \tag{36}$$

Fie acum functiile $f(s), g(s), h(s)$ descriind pe Γ de clasa C^1 intr-o vecinatate a unei valori $s = s_0$. Fie punctul $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$ si presupunem ca coeficientii $a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)$ sunt de clasa C^1 in x, y, z in jurul lui P_0.

Intuitiv, suprafata integrala Σ a solutiei care contine pe Γ este constituita din curbe caracteristice care trec prin curba Γ. In acord cu acest lucru formam pentru orice s in vecinatatea lui s_0 acea solutie

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad z = Z(s, t) \tag{37}$$

(Fiecarui s in jurul lui s_0 ii corespunde o curba caracteristica.)

Functiile X, Y, Z vor satisface

$$\begin{cases} X_t(s, t) = a(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)), \\ Y_t(s, t) = b(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)), \\ Z_t(s, t) = c(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)). \end{cases} \tag{38}$$

cu conditiile initiale

$$X(s,0) = f(s), \quad Y(s,0) = g(s), \quad Z(s,0) = h(s) \tag{39}$$

Din teoria generala de existenta si dependenta continua de datele initiale pt EDO rezulta ca exista o unica solutie $(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t))$ de clasa C^1 a problemei (38)-(39) in jurul punctului $(s_0, 0)$.

Ecuatiile (37) reprezinta o suprafata integrala Σ descrisa de doi parametri s, t. Daca suntem capabili sa rezolvam primele doua ecuatii exprimand s, t in functie de x, y am avea

$$s = S(x,y), \quad t = T(x,y) \tag{40}$$

Si atunci u definit de

$$z = u(x,y) = Z(S(x,y), T(x,y))$$

ar fi reprezentarea implicita a solutiei. Avem $x_0 = X(s_0, 0)$, $y_0 = Y(s_0, 0)$.

Teorema functiilor implicite afirma ca putem gasi solutii $s = S(x,y), t = T(x,y)$ pentru

$$x = X(S(x,y), T(x,y)), \quad y = Y(S(x,y), T(x,y))$$

astfel incat $s_0 = S(x_0, y_0)$, $0 = T(x_0, y_0)$ daca Jacobianul

$$J := \begin{vmatrix} X_s(s_0,0) & Y_s(s_0,0) \\ X_t(s_0,0) & Y_t(s_0,0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{41}$$

Din (38)-(39) acest lucru este echivalent cu

$$J := \begin{vmatrix} f\prime(s_0) & g\prime(s_0) \\ a(x_0,y_0,z_0) & b(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{42}$$

Deci (41) garanteaza ca (38) reprezinta local o suprafata.

Unicitatea: orice curba integrala care trece prin Γ trebuie sa contina curbele caracteristice care trec prin Γ si deci ar trebui sa contina suprafata descrisa parametric de (s,t) si deci local ar trebui sa se identifice cu suprafata.

Conditia (42) este esentiala pentru existenta.

Analog se poate extinde teoria la mai multe dimensiuni (a se vedea [6], pag. 13-14).

Observatie 6. *La sistemul* (38)-(39) *se ajunge in mod direct cautand curbele caracteristice parametrice* $t \mapsto (X(s,t), Y(s,t), Z(s,t))$ *astfel incat* $Z(s,t) = u((X(s,t), Y(s,t))$ *si*

$$\frac{\partial}{dt}\left(u(X(s,t), Y(s,t))\right) = c(X(s,t), Y(s,t)),$$

care transforma EDP-ul (38) *intr-o EDO.*

2.3 Aplicatii

Exercitiu 5. *Sa se rezolve local problema Cauchy cu valori initiale*

$$\begin{cases} u_y + cu_x = 0, \quad u = u(x,y), \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{43}$$

unde h e o functie neteda data si c este o constanta reala.

Rezolvare: Curba initiala este

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = h(s), \quad (u(s,0) = h(s)). \end{cases}$$

Cautam curbele caracteristice ce trec prin fiecare punct de coordonata curbilinie s a lui Γ, la timpul $t = 0$. Mai precis, cautam $(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t))$ (parametrizare a curbei integrale $(x, y, u(x,y))$ ce verifica

$$\begin{cases} X_t(s,t) = c \\ Y_t(s,t) = 1 \\ Z_t(s,t) = 0. \\ X(s,0) = s, Y(s,0) = 0, Z(s,0) = h(s). \end{cases}$$

Prin integrare de la 0 la t obtinem

$$X(s,t) = ct + s, Y(s,t) = t, Z(s,t) = h(s).$$

Din sistemul

$$\begin{cases} x = ct + s \\ y = t \end{cases}$$

scoatem pe s si t in functie de x si y (i.e. $s = x - cy$, $t = y$) si inlocuim in a treia ecuatie de unde obtinem

$$u(x,y) = h(x - cy),$$

solutia problemei Cauchy (43). □

Exercitiu 6. *Sa se integreze problema Cauchy cu valori initiale (ecuatie de tip Burgers)*

$$\begin{cases} u_y + uu_x = 0 \quad u = u(x,y) \\ u(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{44}$$

unde h e o functie neteda data.

Rezolvare: Curba initiala este

$$\Gamma: \quad \begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = h(s), \quad (u(s,0) = h(s)). \end{cases}$$

Cautam curbele caracteristice ce trec prin fiecare punct de coordonata curbilinie s a lui Γ, la timpul $t = 0$. Mai precis, cautam $(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t))$ (parametrizare a curbei integrale $(x, y, u(x,y))$ ce verifica

$$\begin{cases} X_t(s,t) = u = z = Z(t,s) \\ Y_t(s,t) = 1 \\ Z_t(s,t) = 0. \\ X(s,0) = s, Y(s,0) = 0, Z(s,0) = h(s). \end{cases}$$

Prin integrare de la 0 la t obtinem

$$Y(s,t) = t, Z(s,t) = h(s).$$

Rezulta

$$X_t(t,s) = h(s), X(0,s) = s.$$

Integrand de la 0 la t

$$X(t,s) = th(s) + s.$$

Din sistemul

$$\begin{cases} x = th(s) + s \\ y = t \\ z = h(s)(= u(x,y)) \end{cases}$$

obtinem reprezentarea implicita a solutiei problemei Cauchy

$$u(x,y) = h(x - tu(x,y)).$$

Caz particular: $h(x) = \sin x$. □

Exercitiu 7. *Sa se rezolve problema Cauchy cu valori initiale*

$$\begin{cases} u_y + u_x = u^2 \quad u = u(x,y) \\ u(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{45}$$

unde h e o functie neteda data.

Demonstraţie. Curba initiala este

$$\Gamma: \quad \begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = h(s), \quad (u(s,0) = h(s)). \end{cases}$$

Cautam curbele caracteristice ce trec prin fiecare punct de coordonata curbilinie s a lui Γ, la timpul $t = 0$. Mai precis, cautam $(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t))$ (parametrizare a curbei integrale $(x, y, u(x,y))$ ce verifica

$$\begin{cases} X_t(s,t) = 1 \\ Y_t(s,t) = 1 \\ Z_t(s,t) = u^2 = Z^2(s,t). \\ X(s,0) = s, Y(s,0) = 0, Z(s,0) = h(s). \end{cases}$$

Prin integrare de la 0 la t obtinem

$$X(s,t) = t + s, Y(s,t) = t.$$

Din sistemul

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = t \end{cases}$$

scoatem pe s si t in functie de x si y (i.e. $s = x - y$, $t = y$). Revenim la ecuatia lui Z prin integrare obtinem

$$\int_0^t \frac{Z_t(t', s)}{Z^2(t', s)} dt' = t,$$

Echivalent cu

$$-\frac{1}{Z(t,s)} + \frac{1}{Z(0,s)} = t,$$

de unde obtinem

$$Z(t,s) = \frac{h(s)}{1 - h(s)}.$$

Prin urmare solutia problemei Cauchy (45) este

$$u(x,y) = \frac{h(x-y)}{1 - yh(x-y)}.$$

. □

Exercitiu 8. *Sa se integreze local urmatoarele ecuatii de ordin I*

1).

$$\begin{cases} u_y = xuu_x \qquad u = u(x,y) \\ u(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{46}$$

Solutie implicita: $x = u(x,y)e^{-yu(x,y)}$.

2).

$$\begin{cases} xu_y - yu_x = u \;\; u = u(x,y) \\ u(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{47}$$

Solutie explicita: $u = h(\sqrt{x^2 + y^2})e^{arctg(y/x)}$.

3).

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + u_z = u \; u = u(x, y, z) \\ u(x, y, 0) = h(x, y), \end{cases} \tag{48}$$

Observatie 7. *Ecuatiile liniare cu coeficienti constanti i. e.* $au_x + bu_y = f(x, y)$ *se rezolva alternativ intr-o maniera simplificata cautand curbele caracteristice* $t \mapsto (x+at, y+bt, u(x+at, y+bt))$ *astfel incat*

$$\frac{\partial}{dt}\left(u(x + at, y + bt)\right) = f(x + at, y + bt).$$

.

3 Ecuatii de ordin II

3.1 Clasificarea ecuatiilor cvasiliniare de ordin II

3.2 Ecuatii eliptice

Problema Poisson in $\mathbb{R}^n$

Teorema 1. *Fie* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ *si functia*

$$u(x) := (E * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x - y)f(y)dy. \tag{49}$$

Atunci $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *si*

$$\Delta u(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstraţie. In primul rand observam ca functia u este bine definita in fiecare punct $x \in \mathbb{R}^n$ deoarece functia $y \mapsto E(x - y)f(y)$ este integrabila pe $\mathbb{R}^n$ datorita faptului ca $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ iar f are suport compact. In continuare sa aratam ca exista derivatele partiale u_{x_i} pentru orice $i = 1, n$. Mai intai, printr-o schimbare de variabila observam ca u se poate scrie si sub forma $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(z)f(x - z)dz$, de unde obtinem diferentele finite

$$\frac{u(x + te_i) - u(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)\left(\frac{f(x + te_i - z) - f(x - z)}{t}\right)dz. \tag{50}$$

Din Teorema cresterilor finite a lui Lagrange avem ca

$$\frac{f(x + te_i - z) - f(x - z)}{t} = e_i \cdot \nabla f(c_{i,z}(x)),$$

unde $c_{i,z}(x)$ este un punct pe segmentul $[x - z, x - z + te_i]$. Cum f are suport compact rezulta ca ∇f are support compact. Fie $K \subset \mathbb{R}^n$ compact astfel incat $Supp\frac{\partial f}{\partial x_i} \subset\subset K$ pentru orice $i = 1, n$. Prin urmare

$$\left|\frac{f(x + te_i - z) - f(x - z)}{t}\right| \leq |\nabla f|_{L^\infty}\mathbf{1}_{K(x)}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, |t| << 1,$$

unde $K(x)$ este compactul $K - x$. Aplicand teorema convergentei dominante obtinem

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} E(y) \left(\frac{f(x+te_i - z) - f(x-z)}{t} \right) dz \to \int_{\mathbb{R}^n} E(y) \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(x+te_i - z) - f(x-z)}{t} \right) \\ = \int_{\mathbb{R}^n} E(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-z) dz.\end{aligned}$$

Obtinem ca

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-z).$$

Analog,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x-z) dz$$

si deci

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y) \Delta f(x-z) dz.$$

In cele ce urmeaza vom argumenta faptul ca

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(y) \Delta f(x-z) dz = f(x).$$

Fie $\epsilon > 0$ si $x \in \mathbb{R}^n$ fixati. Pentru a evita singularitatea lui E in $x = 0$ scriem

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} E(y) \Delta f(x-z) dz &= \int_{B_\epsilon(0)} E(y) \Delta f(x-z) dz + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} E(y) \Delta f(x-z) dz \\ &:= A_\epsilon + B_\epsilon\end{aligned}$$

Estimari pentru A_ϵ: Avem succesiv

$$\begin{aligned}|A_\epsilon| &\leq \int_{B_\epsilon(0)} |E(z)| |\Delta f(x-z)| dz \\ &\leq \sup |\Delta f|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_\epsilon(0)} |E(z)| dz.\end{aligned}$$

Pe de alta parte, calcule directe ne conduc la faptul ca (exercitiu !)

$$\int_{B_\epsilon(0)} |E(z)| dz \lesssim \begin{cases} \epsilon^2 \ln(1/\epsilon), & n = 2 \\ \epsilon^2, & n \geq 3 \end{cases}$$

de unde rezulta

$$|A_\epsilon| \lesssim \begin{cases} \epsilon^2 \ln(1/\epsilon), & n = 2 \\ \epsilon^2, & n \geq 3 \end{cases} \tag{51}$$

Estimari pentru B_ϵ: Cu schimbarea de variabila $x - z = y$ rezulta

$$B_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} E(x-y) \Delta f(y) dy$$

Din prima formula a lui Green rezulta

$$\begin{aligned} B_\epsilon &= \int_{\partial B_\epsilon(x)} E(x-y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y) d\sigma(y) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \nabla_y (E(x-y)) \cdot \nabla f dy. \\ &= B_{1,\epsilon} - B_{2,\epsilon} \end{aligned}$$

Estimari pentru $B_{1,\epsilon}$:

$$\begin{aligned} |B_{1,\epsilon}| &\lesssim \int_{\partial B_\epsilon(x)} |E(x-y)| |\nabla f(y) \cdot \nu_y| d\sigma(y) \\ &\leq |\nabla f|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B_\epsilon(x)} |E(x-y)| d\sigma(y) \\ &\leq \int_{\partial B_\epsilon(0)} |E(z)| d\sigma(z). \end{aligned}$$

Analog ca inainte, prin calcul direct obtinem

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} |E(z)| dz \lesssim \begin{cases} \epsilon \ln(1/\epsilon), & n = 2 \\ \epsilon, & n \geq 3 \end{cases}$$

Rezulta

$$|B_{1,\epsilon}| \lesssim \begin{cases} \epsilon \ln(1/\epsilon), & n = 2 \\ \epsilon, & n \geq 3 \end{cases} \tag{52}$$

Estimari pentru $B_{2,\epsilon}$: Tinand cont de

$$\nabla E(x) = \frac{1}{\omega_n} \frac{x}{|x|^n}, \quad \forall n \geq 2$$

de formula lui Green si de faptul ca E este functie armonica pe $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$ avem succesiv

$$\begin{aligned}
B_{2,\epsilon} &= -\int_{\partial B_\epsilon(x)} \nabla_y (E(x-y)) f(y) \nu_y d\sigma(y) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \underbrace{\Delta(E(x-y))}_{=0} f(y) dy \\
&= \int_{\partial B_\epsilon(x)} \nabla E(y-x) f(y) \frac{y-x}{|y-x|} dy \\
&= \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_\epsilon(x)} \frac{y-x}{|y-x|^n} f(y) \frac{y-x}{|y-x|} d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_\epsilon(x)} \frac{f(y)}{|y-x|^{n-1}} d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon(x)} f(y) d\sigma(y) \\
&= \fint f(y) d\sigma(y) \\
&\to f(x), \quad \epsilon \to 0,
\end{aligned}$$

unde $\fint_A$ este integrala medie $\frac{1}{|A|}\int_A$.

In concluzie, trecand la limita cand ϵ tinde la zero obtinem finalizarea demonstratiei. □

Exercitiu 9 (Laplacianul unei functii radiale in coordonate sferice)**.** *Fie $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ o **functie radiala**, i. e. exista o functie $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel incat*

$$f(x) = g(|x|) = g(r), \quad r := |x|.$$

Atunci

$$\Delta f = g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r). \tag{53}$$

Demonstraţie. Din formula lantului avem succesiv

$$\begin{aligned}
f_{x_i} &= g'(r) \frac{x_i}{r} \\
f_{x_i x_i} &= \left(g'(r) \frac{x_i}{r} \right)_{x_i} \\
&= g''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + g'(r) \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}.
\end{aligned}$$

Concluzia se obtine sumand dupa i in ambii membri in ultima identitate de mai sus.

□

Exemplu. $f : \mathbb{R}^5 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_5) = \ln \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_5^2}$. Sa se calculeze Δf pe domeniul maxim de definitie.

Exercitiu 10. *Sa se arate ca solutiile radiale ale ecuatiei lui Laplace* $\Delta u(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *sunt de forma*

$$u(x) = \begin{cases} c_1|x|, & n = 1 \\ c_2 \ln|x|, & n = 2 \\ c_3|x|^{2-n}, & n = 3 \end{cases} \tag{54}$$

unde c_1, c_2, c_3 *sunt constante reale oarecare.*

Definitie 11. *Functia particulara din* (54) *definita prin*

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|x|, & n = 2, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n}|x|^{2-n}, & n = 3, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{cases} \tag{55}$$

unde ω_n *este aria sferei de raza 1 din* $\mathbb{R}^n$, *se numeste* ***solutia fundamentala a ecuatiei lui Laplace****.*

Exercitiu 11. *Aratati ca solutia fundamentala* (55) *verifica relatia*

$$\nabla E(x) = \frac{1}{\omega_n}\frac{x}{|x|^n}, \quad \forall n \geq 2. \tag{56}$$

Exercitiu 12 (Scrierea operatorului Laplacian in coordonate polare)**.** *Fie* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2)$ *o functie de clasa* C^2. *Consideram transformarea*

$$\mathcal{L} : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \mathcal{L}(r, \theta) = (\underbrace{r\cos\theta}_{x_1}, \underbrace{r\sin\theta}_{x_2})$$

si definim $\tilde{f}(r, \theta) = f(\mathcal{L}(r, \theta))$. *Aratati ca*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}, \quad \forall x \neq 0. \tag{57}$$

unde $\Delta f = f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2}$.

Rezolvare: Folosind formula lantului pentru derivarea functiilor compuse de mai multe variabile obtinem succesiv

$$\begin{aligned} \tilde{f}_r &= f_{x_1}\cos\theta + f_{x_2}\sin\theta. \\ \tilde{f}_{rr} &= f_{x_1x_1}\cos^2\theta + 2f_{x_1x_2}\cos\theta\sin\theta + f_{x_2x_2}\sin^2\theta. \\ \tilde{f}_{\theta\theta} &= f_{x_1x_1}r^2\sin^2\theta - 2r^2 f_{x_1x_2}\cos\theta\sin\theta + f_{x_2x_2}r^2\cos^2\theta \\ &\quad - r(f_{x_1}\cos\theta + f_{x_2}\sin\theta). \end{aligned}$$

In consecinta obtinem identitatea (57).

□

Exercitiu 13. *Se considera problema Dirichlet in* $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \Delta u = f, & in\ \mathbb{R}^n \\ \lim_{|x|\to\ \infty} u(x) = 0, \end{cases} \tag{58}$$

unde $f(x) = e^{-|x|^2}$.

1). Aratati ca functia $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *data prin legea*

$$v(x) = (E * f)(x)$$

este bine definita, unde E *este solutia fundamentala a ecuatiei lui Laplace.*

2). Aratati ca $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3). Aratati ca v *verifica punctual ecuatia* $\Delta u = f$ *in* $\mathbb{R}^n$.

4). Aratati ca daca $n \geq 3$ *atunci*

$$0 < v(x) \leq C|x|^{2-n}$$

pentru orice $x \neq 0$, *unde* C *este o constanta care nu depinde de* x *(depinde doar de* n*).*

5). Aratati ca daca $n = 2$ *atunci*

$$v(x) \geq C \ln |x|$$

pentru orice $|x| \geq 1$, *unde* C *este o constanta care nu depinde de* x*).*

6). Aratati unicitatea solutiei problemei (58).

7). Aratati ca daca $n \geq 3$ *atunci* v *este unica solutie a problemei* (58).

Demonstraţie. 1). Trebuie sa demonstram ca integrala este finita pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

$$|v(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |E(x-y)||f(y)|dy := \int_{|y|<1} + \int_{|y|>1} := I_1 + I_2.$$

Cum f este marginita superior de 1 si $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (integrabila pe orice bila) pentru I_1 avem (cu schimbarea de variabila $x - y = z$)

$$I_1 \leq \int_{|y|<1} |E(x-y)|dy = \int_{B_1(x)} |E(z)|dz < \infty.$$

Pentru I_2 distingem in functie de dimensiune. Daca $n \geq 3$ avem

$$I_2 \leq c \int_{|y|\geq 1} f(x-y)dy = c \int_{|y|\geq 1} e^{-|x-y|^2} dy < \infty. \quad (Ex!).$$

Daca $n = 2$ atunci

$$I_2 \leq c \int_{|y|\geq 1} \ln |y| f(x-y)dy \leq c \int_{|y|>1} |y| e^{-|x-y|^2} dy < \infty \quad (Ex!).$$

2). Se face analog ca in demoonstratia Teoremei 1.

3). Se face analog ca in demoonstratia Teoremei 1.

4). Avem succesiv,

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)f(x-y)dy \\
&= c\int_{|y|<|x|/2} |y|^{2-n}e^{-|x-y|^2}dy + c\int_{|y|>|x|/2} |y|^{2-n}e^{-|x-y|^2}dy \\
&\leq ce^{-\frac{|x|^2}{4}}\int_{|y|<|x|/2} |y|^{2-n}dy + c_1|x|^{2-n}\int_{|y|>|x|/2} e^{-|x-y|^2}dy \\
&\leq c_2e^{-\frac{|x|^2}{4}}|x|^2 + c_3|x|^{2-n} \\
&\leq c_4|x|^{2-n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.
\end{aligned}
$$

5). Spargem integrala in urmatorul mod:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= c\int_{\mathbb{R}^2} \ln|y|e^{-|x-y|^2}dy \\
&= \int_{|y|<1} + \int_{1<|y|<|x|/2} + \int_{|x|/2<|y|<3|x|/2} + \int_{|y|>3|x|/2} \\
&:= I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x).
\end{aligned}
$$

Apoi tinand cont ca $|x| \geq 1$ obtinem pe rand,

$$
\begin{aligned}
|I_1(x)| &\leq c\int_{|y|<1} \ln\frac{1}{|y|}e^{-|x-y|^2}dy \\
&\lesssim e^{-\frac{|x|^2}{4}}\int_{|y|<1} \ln\frac{1}{|y|}dy \\
&\lesssim e^{-|x|^2/4}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq e^{-\frac{|x|^2}{4}}\int_{|y|<|x|/2} \ln\frac{1}{|y|}dy \\
&\lesssim e^{-\frac{|x|^2}{4}}|x|^2\ln|x|.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_4(x)| &\leq e^{-\frac{|x|^2}{8}} \int_{|y|>3|x|/2} \ln|y| e^{-\frac{|x-y|^2}{2}} dy \\
&\lesssim e^{-\frac{|x|^2}{8}} \int_{|x-y|>|x|/2} \ln|x-y| e^{-\frac{|x-y|^2}{2}} dy \\
&\lesssim e^{-\frac{|x|^2}{8}} \int_{|z|>|x|/2} \ln|z| e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz \\
&\lesssim e^{-\frac{|x|^2}{8}} \int_{|z|>|x|/2} e^{-\frac{|z|^2}{4}} dz \\
&\lesssim e^{-\frac{|x|^2}{8}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3(x) &= c \int_{|x|/2<|y|<3|x|/2} \ln|y| e^{-|x-y|^2} dy \\
&\geq c_1 \ln|x| \int_{|x|/2<|y|<3|x|/2} e^{-|x-y|^2} dy \\
&= c_1 \ln|x| \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x-y|^2} dy - \int_{|y|<|x|/2} e^{-|x-y|^2} dy - \int_{|y|>3|x|/2} e^{-|x-y|^2} dy \right) \\
&:= c_1 \ln|x| (\pi - J_1(x) - J_2(x)).
\end{aligned}
$$

Similar ca la $I_2(x)$ obtinem

$$|J_1(x)| \lesssim e^{-\frac{|x|^2}{4}} |x|^2.$$

Similar ca la $I_4(x)$ obtinem

$$|J_2(x)| \lesssim e^{-\frac{|x|^2}{4}}.$$

Deci

$$I_3(x) \geq \tilde{c} \ln|x|, \quad \forall |x| \geq 1.$$

Cum

$$|I_1(x)|, |I_2(x)|, |I_3(x)| \to 0, \quad \text{cand } |x| \to \infty,$$

se obtine concluzia.

6). Presupunem ca problema (58) ar avea doua solutii u_1, u_2. Atunci $U := u_1 - u_2$ verifica problema

$$
\begin{cases}
\Delta U = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \\
\lim_{|x| \to \infty} U(x) = 0,
\end{cases}
\tag{59}
$$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si $\epsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci exista $\delta_\epsilon > 0$ a.i.

$$|U(x)| < \epsilon, \quad \forall |x| > \delta_\epsilon.$$

Fie $B_R(0)$, $R > 0$, a.i. $x_0 \in B_R(0)$ si $R > \delta_\epsilon$. Atunci

$$
\begin{cases}
\Delta U = 0, & \text{in } B_R(0) \\
|U(x)| \leq \epsilon, & \text{pe } \partial B_R(0).
\end{cases}
\tag{60}
$$

Din Principiul de maxim pentru functii armonice rezulta

$$|U(x)| \le \epsilon, \qquad \text{pe } \overline{B_R(0)}.$$

In particular avem $|U(x_0)| \le \epsilon$. Facand $\epsilon \to 0$ se obtine $U(x_0) = 0$. Dar si x_0 a fost ales arbitrar. In concluzie, rezulta $U \equiv 0$ si unicitatea este obtinuta.

7). Rezulta din punctele 4). si 6).

3.3 Functii armonice (sub si super-armonice)

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domeniu.

Definitie 12. *O functie $u \in C^2(\Omega)$ se numeste armonica in Ω daca $\Delta u(x) = 0$ pentru orice $x \in \Omega$.*

Teorema 2. *[Formula de medie pentru functii armonice]*

(i) Daca $u \in C^2(\Omega)$ este functie armonica atunci

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \fint_{B_r(x)} u(z) dz \tag{61}$$

pentru orice $x \in \Omega$ si orice $r > 0$ astfel incat $B_r(x) \subset \Omega$.

(ii) Daca functia $u \in C^2(\Omega)$ are proprietatea ca

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y) dy, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall B_r(x) \subset \Omega, \tag{62}$$

atunci u este armonica in Ω.

Demonstraţie. Dem lui (i): Fie $x \in \Omega$ arbitrar fixat. Consideram functia

$$\varphi(r) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y), \quad r > 0.$$

Cu schimbarea de variabila $y = x + rz$, $z \in S^{n-1}$, $d\sigma(y) = r^{n-1} d\sigma(z)$ obtinem

$$\varphi(r) = \fint_{S^{n-1}} u(x + rz) d\sigma(z).$$

Derivand in raport cu r obtinem succesiv

$$\begin{aligned}
\varphi\prime(r) &= \fint_{S^{n-1}} \frac{d}{dr}[u(x+rz)]d\sigma(z) \\
&= \fint_{S^{n-1}} \nabla u(x+rz)\cdot z d\sigma(z) \\
(S.V.) &= \fint_{\partial B_r(x)} \nabla u(y)\cdot \frac{x-y}{r} d\sigma(y) \\
&= \fint_{\partial B_r(x)} \nabla u(y)\nu_y d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{\partial B_\epsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)d\sigma(y) \\
(G-O) &= \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_\epsilon(x)} \Delta u(y)dy \\
(u \text{ armonica }) &= 0, \quad \forall r>0.
\end{aligned}$$

Rezulta $\varphi(r) = const$ pentru orice $r>0$. Facem $r \searrow 0$ si obtinem

$$\varphi(r) = \lim_{r\searrow 0}\varphi(r) = \lim_{r\searrow 0} \fint_{\partial B_r(x)} u(y)d\sigma(y) = u(x).$$

Dem lui (ii): Presupunem ca u nu ar fi armonica. Atunci exista $x_0 \in \Omega$ si $r_0>0$ astfel incat (fara a pierde din generalitate)

$$\Delta u(x) > 0, \quad \forall x\in B_{r_0}(x_0).$$

Cu aceleasi notatii de dinainte avem

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{|B_{r_0}(x)|}\int_{B_{r_0}(x)} \Delta u(y) > 0.$$

Contradictie !

Observatie 8. *Teorema 2 se poate extinde si la functii sub/super-armonice inlocuind egalitatile in* (61)-(62) *cu inegalitati. Incercati sa enuntati formulele de medie pentru functii sub/super-armonice observand ce se intampla in cazul 1 dimensional.*

Definitie 13. *O functie $u\in C^2(\Omega)$ se numeste sub-armonica daca*

$$-\Delta u(x) \le 0, \quad \forall x\in\Omega.$$

Definitie 14. *O functie $u\in C^2(\Omega)$ se numeste super-armonica daca*

$$-\Delta u(x) \ge 0, \quad \forall x\in\Omega.$$

Teorema 3 (Principiul slab de maxim pentru functii (sub/super) armonice)**.** *Fie* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *domeniu marginit.*

(i) Daca $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *este sub-armonica atunci*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) Daca $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *este super-armonica atunci*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Corolar 1. *Daca* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *este functie armonica atunci*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

(Atat minimul cat si maximum se ating pe frontiera.)

Demonstraţie. Vom dem (i) in Teorema 3, pentru (ii) procedandu-se similar. Presupunem prin absurd ca $\max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$. Deci exista $x_0 \in \Omega$ astfel incat $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$. Fie

$$v(x) = u(x) + \epsilon|x - x_0|^2.$$

Aleg $\epsilon > 0$ suficient de mic $\left(\epsilon < \frac{\max_{\overline{\Omega}} u - \max_{\partial\Omega} u}{M_{x_0}} \text{ unde } M_{x_0} := \max_{x\in\partial\Omega} |x - x_0|^2\right)$ astfel incat

$$v(x_0) = u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} v.$$

Intr-adevar, avem

$$\max_{\partial\Omega} v \le \max_{\partial\Omega} u + \epsilon \max_{\partial\Omega} |x - x_0|^2 = \max_{\partial\Omega} u + \epsilon M_{x_0} < \max_{\overline{\Omega}} u = v(x_0),$$

inegalitatea stricta fiind posibila din alegerea lui ϵ.

Rezulta ca v isi atinge maximul in $\overline{\Omega}$ intr-un punct interior $x_1 \in \Omega$. Fie $v(x_1) = \max_{\Omega} v \ge v(x_0) > \max_{\partial\Omega} v$. Rezulta ca $\nabla v(x_1) = 0$ si $\Delta v(x_1) \le 0$. Pe de alta parte, din definirea lui v si din faptul ca u este sub-armonica obtinem

$$\Delta v(x) = \Delta u(x) + 2\epsilon n > \Delta u(x) \ge 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Contradictie ! □

3.4 Principiul tare de maxim

Definitie 15. *Un domeniu* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *are* ***proprietatea bilei interioare intr-un punct*** $x \in \partial\Omega$ *daca exista o bila inchisa* $B_x \subset \overline{\Omega}$ *astfel incat* $B_x \cap \partial\Omega = \{x\}$.

Observatie 9. *De exemplu, domeniile de clasa* C^2 *au proprietatea bilei interioare in toate punctele.*

Lema 1 (Lemma lui Hopf)**.** *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu cu proprietatea bilei interioare intr-un punct $x_0 \in \partial\Omega$ si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ o o functie sub-armonica (respectiv, super-armonica) in Ω. Presupunem ca*

$$u(x_0) > u(x) \quad (\textit{respectiv } u(x_0) < u(x)) \quad \forall x \in \Omega$$

si ca exista $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$. Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0 \quad (\textit{respectiv } < 0). \tag{63}$$

Demonstraţie. Vom demonostra aceasta lemma in cazul functiilor sub-armonice (in cazul functiilor super-armonice se procedeaza similar). Importanta lui (63) este inegalitatea stricta. Faptul ca $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$ este evident. Procedam in mai multi pasi.

Pas 1. Fara a pierde din generalitate putem presupune ca $B = B_r(0)$ pentru $r > 0$ arbitrar si consideram functia

$$v(x) := e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}, \quad x \in B_r(0),$$

unde $\lambda > 0$ va fi ales convenabil mai tarziu. Evident avem

$$v > 0 \text{ pe } B_r(0). \tag{64}$$

Simple calcule conduc la

$$-\Delta v(x) = 2\lambda(n - 2\lambda|x|^2)e^{-\lambda|x|^2}.$$

Consideram inelul $\Omega_r = B_r(0) \setminus \overline{B_{r/2}(0)}$. Atunci, pentru λ suficient de mare ($\lambda >> n/(2\text{diam}(\Omega))$) obtinem

$$-\Delta v < 0 \text{ in } \Omega_r. \tag{65}$$

Din ipoteza, exista $\epsilon > 0$ mic astfel incat

$$u(x_0) \geq u(x) + \epsilon v(x), \quad \forall x \in \partial B_{r/2}(0).$$

Pe de alta parte observam ca

$$u(x_0) \geq u(x) = u(x) + \epsilon v(x), \quad \forall x \in \partial B_r(0).$$

Obtinem ca

$$-\Delta(u + \epsilon v - u(x_0)) = -\Delta(u + \epsilon v) < 0, \quad \text{in } \Omega_r$$

si $u + \epsilon v - u(x_0) \leq 0$ pe $\partial\Omega_r$. Conform principiului de maxim pentru functii sub-armonice deducem

$$u + \epsilon v - u(x_0) \leq 0 \text{ in } \Omega_r.$$

Dar $(u + \epsilon v - u(x_0))(x_0) = 0$ Rezulta ca

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u + \epsilon v - u(x_0))(x_0) \geq 0.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) &\geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0\\ &= -\epsilon \nabla v(x_0)\cdot \nu\\ &= 2\epsilon\lambda |x_0| e^{-\lambda |x_0|^2}\\ &> 0.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4. *Fie $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, unde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu marginit.*

(i). Daca u este functie sub-armonica si isi atinge maximul intr-un punct interior atunci u este constanta in Ω.
(ii). Daca u este functie super-armonica si isi atinge minimul intr-un punct interior atunci u este constanta in Ω.

Demonstraţie. Fie $M := \max_{\overline{\Omega}} u$ si $C := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$. Daca $u \not\equiv M$ fie $V := \{x \in \Omega | u(x) < M\}$. Alegem un punct $y \in V$ astfel incat $dist(y, C) < dist(y, \partial\Omega)$ si fie $B := B_{dist(y,C)}(y)$ cea mai mare bila centrata in y al carui interior este in V. Rezulta ca exista cel putin un punct $x_0 \in C$ cu $x_0 \in \partial B$. Prin urmare V satisface proprietatea bilei interioare in punctul x_0. Deci lemma lui Hopf implica $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$. Dar aceasta este o contradictie: cum u isi atinge maximul lui $x_0 \in V$ avem $\nabla u(x_0) = 0$.

Teorema 5 (Teorema lui Liouville - aplicatie la teorema de medie pentru functii armonice)**.** *Fie $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ armonica si marginita inferior (sau marginita superior). Atunci u este constanta.*

Demonstraţie. Fie $M \in \mathbb{R}$ astfel incat $u \geq M$ pe $\mathbb{R}^n$. Fara a pierde din generalitate putem presupune $u \geq 0$ pe $\mathbb{R}^n$. Cum u este armonica rezulta ca u_{x_i} este armonica pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$. Din formula de medie avem

$$\begin{aligned}|u_{x_i}(x)| &= \frac{1}{w_n r^n}\left|\int_{B_r(x)} u_{x_i}(y)dy\right| = \frac{1}{w_n r^n}\left|\int_{\partial B_r(x)} u\nu^i(y)d\sigma(y)\right|\\ &\leq \frac{1}{w_n r^n}\int_{\partial B_r(x)} |u| d\sigma(y)\\ &= \frac{n}{r} ⨍_{\partial B_r(x)} u d\sigma(y)\\ &= \frac{n}{r}u(x), \quad \forall r > 0.\end{aligned}$$

Pentru $r \to \infty$ obtinem $|u_{x_i}(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ si orice $i \in \{1, \dots, n\}$. Deci $u_{x_i} = 0$ orice $i \in \{1, \dots, n\}$. Concluzionam ca u este constanta.

Exercitii

Exercitiu 14. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ multime deschisa, marginita si conexa. Consideram $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ astfel incat $u = 0$ pe $\partial\Omega$ si exista $x_0 \in \Omega$ astfel incat $u(x_0) = 0$. Aratati ca exista $x_1 \in \Omega$ astfel incat $\Delta u(x_1) = 0$.*

Demonstraţie. Cazul $u \equiv 0$ este trivial. Daca $u \not\equiv 0$ atunci $\min_{\overline{\Omega}} u < \max_{\overline{\Omega}} u$. Fie $u(x_m) = \min_{\overline{\Omega}} u$ si $u(x_M) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Din ipoteza putem considera $x_m, x_M \in \Omega$ (intr-adevar, daca $x_m \in \partial\Omega$ rezulta $\min_{\overline{\Omega}} u = 0 = u(x_0)$, deci putem reconsidera $x_m = x_0$). Deci exista $x_m \neq x_M$ apartinand lui Ω astfel incat $u(x_m) \leq 0 \leq u(x_M)$. Fie functia continua $v(x) := \Delta u(x)$, $x \in \Omega$. Rezulta $v(x_m) \geq 0$ si $v(x_M) \leq 0$. Cum Ω este conexa din proprietatea lui Darboux (a valorii intermediare) obtinem ca exista $x_1 \in \Omega$ astfel incat $v(x_1) = \Delta u(x_1) = 0$.

Exercitiu 15. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domeniu marginit si $\Omega_1 := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Consideram o functie u armonica in Ω_1 a. i. $u \in C(\overline{\Omega_1})$ si $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Aratati ca*

$$|u(x)| \leq \max_{y\in\partial\Omega} |u(y)|, \quad \forall x \in \overline{\Omega_1}. \tag{66}$$

In particular daca $u = 0$ pe $\partial\Omega$ atunci $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$.

Demonstraţie. Cazul I: Fie $x_0 \in \Omega_1$ si $\epsilon > 0$ arbitrar fixat. Cum $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ exista $\delta_\epsilon > 0$ a.i. $|u(x)| < \epsilon$ pentru orice x cu $|x| > \delta_\epsilon$. Consideram $R > \max\{|x_0|, \delta_\epsilon\}$. Atunci avem

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in B_R(0) \setminus \overline{\Omega} \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \\ |u(x)| \leq \epsilon, \ x \in \partial B_R(0) \end{cases} \tag{67}$$

Din principiul slab de maxim rezulta

$$-\epsilon \leq \min_{\partial B_R(0)\cup\partial\Omega} u = \min_{B_R(0)\setminus\overline{\Omega}} u \leq \max_{B_R(0)\setminus\overline{\Omega}} u = \max_{\partial B_R(0)\cup\partial\Omega} u \leq \epsilon.$$

Cum $x_0 \in B_R(0) \setminus \Omega$ rezulta $|u(x_0)| \leq \epsilon$. Dar ϵ a fost ales arbitrar si facand $\epsilon \to 0$ obtinem $u(x_0) = 0$. De asemenea, x_0 a fost ales arbitrar, prin urmare $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega_1}$.

Cazul II: $u \not\equiv 0$ pe $\partial\Omega$;

Fie $M := \max_{y\in\partial\Omega} |u(y)| > 0$. Fie $x_0 \in \Omega_1$ si $\epsilon > 0$ alese arbitrar. Cu aceeasi constructie de mai sus, pentru R suficient de mare obtinem

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in B_R(0) \setminus \overline{\Omega} \\ |u(x)| \leq M, x \in \partial\Omega \\ |u(x)| \leq \epsilon, \ \ x \in \partial B_R(0) \end{cases} \tag{68}$$

Din principiul de maxim obtinem

$$\min\{-\epsilon, -M\} \leq \min_{\partial B_R(0)\cup\partial\Omega} u = \min_{B_R(0)\setminus\overline{\Omega}} u \leq \max_{B_R(0)\setminus\overline{\Omega}} u = \max_{\partial B_R(0)\cup\partial\Omega} u \leq \max\{\epsilon, M\}.$$

Luand $\epsilon < M$, cum $x_0 \in B_R(0) \setminus \overline{\Omega}$ rezulta $|u(x_0)| \leq M$. Dar x_0 a fost ales arbitrar si deci, concluzia este obtinuta.

Exercitiu 16. *Fie problema Poisson*

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & \text{in } \Omega := (0,1) \times (0,1) \\ u = 0, & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{69}$$

Aratati ca

$$0 < u(x,y) \leq \frac{1}{8}, \quad \forall\ (x,y) \in \Omega. \tag{70}$$

Demonstraţie. Pentru prima inegalitate din (225) putem aplica direct P.M. pentru functii superarmonice problemei (69). Mai precis, avem

$$u(x,y) \geq \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u = 0, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Inegalitatea stricta in Ω se obtine aplicand principiul tare de maxim. Intr-adevar, daca presupunem prin absurd ca ar exista $(x_0, y_0) \in \Omega$ astfel incat $u(x_0, y_0)$ ar rezulta ca (x_0, y_0) este punct de minim interior. Prin urmare, din principiul tare de maxim pentru functii superarmonice (vezi Teorema 4) ar rezulta ca u este functie constanta ceea ce ar contrazice ipoteza $-\Delta u = 1$ in Ω. Astfel se obtine prima inegalitate din (225).

Pentru a doua inegalitate apelam la urmatoarea functie ajutatoare/de comparatie $v(x,y) := \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2$.

Un simplu calcul duce la $\Delta v(x,y) = 1$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Consideram $w := u + v$ si rezulta

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & \text{in } \Omega := (0,1) \times (0,1) \\ w(x,y) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{71}$$

Din P.M. pentru functii armonice avem

$$\min_{(x,y)\in\partial\Omega} w(x,y) \leq w(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial\Omega} w(x,y), \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Echivalent,

$$\begin{aligned} 0 = \min_{(x,y)\in\partial\Omega} & \left\{ \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \right\} \\ & \leq w(x,y) \leq \\ & \max_{(x,y)\in\partial\Omega} \left\{ \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \right\} = \frac{1}{8}, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{72}$$

In particular, din a doua inegalitate din (72) rezulta

$$u(x,y) \leq \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{8}, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega},$$

ceea ce ne conduce la cota superioara din (225).

Exercitiu 17. *Fie problema Poisson*

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & in\ \Omega \\ u = 0, & pe\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{73}$$

unde $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ *este bila de raza* R *pentru un* $R > 0$.

1). Aratati unicitatea unei solutii $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *pentru* (73).
2). Determinati explicit solutia problemei (73) *cautand-o sub forma radiala.*

Demonstrație. 1). Fie u_1 si u_2 doua solutii. Atunci e usor de vazut ca diferenta $u := u_1 - u_2$ satisface problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{74}$$

Din PM pentru functii armonice rezulta

$$\forall (x,y) \in \overline{\Omega}: \quad 0 = \min_{\partial\Omega} u = \min_{\overline{\Omega}} u \le u(x,y) \le \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u = 0.$$

Deci $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$ ceea ce implica $u_1 \equiv u_2$.

2). Cautam u sub forma radiala, adica $u(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$, unde $g : [0,R] \to \mathbb{R}$ este functie de doua ori derivabila. Folosind scrierea (simplificata) Laplacianului unei functii radiale problema (74) se reduce la o ecuatie diferentiala ordinara de ordin 2 cu conditii la limita:

$$\begin{cases} -g''(r) - \frac{g'(r)}{r} = 1, & \forall r \in (0,R) \\ g(R) = g'(0) = 0. \end{cases} \tag{75}$$

Conditia $g'(0) = 0$ din (75) se poate deduce, spre exemplu, din ecuatia diferentiala ordinara prin inmultire cu r si lasand ulterior $r \searrow 0$. Un mod de a integra ecuatia (75) este prin inmultire cu r de unde se obtine

$$(g'(r)r)' = -r, \quad r \in (0,R).$$

Integrand rezulta $g'(r)r = -\frac{r^2}{2} + c_1$ sau $g'(r) = -\frac{r^2}{2} + \frac{c_1}{r}$, unde c_1 este o constanta reala. Din $g'(0) = 0$ obtinem cu necesitate $c_1 = 0$. Prin urmare avem $g(r) = -\frac{r^2}{4} + c_2$, unde c_2 este o alta constanta reala. Cum $g(R) = 0$ rezulta $c_2 = \frac{R^2}{4}$. In concluzie se obtine $g(r) = \frac{1}{4}(R^2 - r^2)$ ceea ce conduce la

$$u(x,y) = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2), \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Exercitiu 18. *Fie problema Poisson*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & in\ \Omega \\ u = 0, & pe\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{76}$$

unde $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ *este bila de raza* R *pentru un* $R > 0$ *dat iar* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *este o functie continua data. Aratati ca*

$$|u(x,y)| \leq \frac{R^2}{4} \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |f(x,y)|, \quad \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{77}$$

In particular, daca $f \equiv 1$ *atunci*

$$0 < u(x,y) \leq \frac{R^2}{4}, \quad \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Demonstraţie. In primul rand cautam o functie care are Laplacianul egal cu $\|f\|_\infty := \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |f(x,y)|$ numar ce apare in partea dreapta a inegalitatii (77).

Considerand functia $v(x,y) = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2)\|f\|_\infty$ observam ca v satisface problema la limita

$$\begin{cases} -\Delta v = \|f\|_\infty, & \text{in } \Omega \\ v = 0, & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{78}$$

Fie $w_1 := u + v$. Rezulta

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = f + \|f\|_\infty \geq 0, & \text{in } \Omega \\ w_1 = 0, & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{79}$$

Din P.M. pentru functii superarmonice obtinem $\min_{\overline{\Omega}} w_1 = \min_{\partial\Omega} w_1 = 0$ de unde $w_1 \geq 0$ in $\overline{\Omega}$. Mai departe deducem

$$\forall (x,y) \in \overline{\Omega}: \quad u(x,y) \geq -v(x,y) = -\frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2)\|f\|_\infty \geq -\frac{R^2}{4}\|f\|_\infty. \tag{80}$$

Fie $w_2 := u - v$. Rezulta

$$\begin{cases} -\Delta w_2 = f - \|f\|_\infty \leq 0, & \text{in } \Omega \\ w_2 = 0, & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{81}$$

Din P.M. pentru functii subrarmonice obtinem $\max_{\overline{\Omega}} w_2 = \max_{\partial\Omega} w_2 = 0$ de unde $w_2 \geq 0$ in $\overline{\Omega}$. Mai departe rezulta

$$\forall (x,y) \in \overline{\Omega}: \quad u(x,y) \leq v(x,y) = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2)\|f\|_\infty \leq \frac{R^2}{4}\|f\|_\infty. \tag{82}$$

Din (80)-(82) rezulta (77).

Pentru cazul particular $f \equiv 1$ cota superioara este evidenta din cazul general. Pentru cota inferioara se procedeaza ca la Exercitiul 16, aplicand PM slab + PM tare pentru functii superarmonice (detalii!).

Exercitiu 19. *Fie problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 + x^2, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{83}$$

unde $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1\}$ *Aratati ca* (83) *are cel mult o solutie clasica* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *si in pus*

$$0 < u(x, y) < \frac{1}{6}, \quad \forall \ (x, y) \in \overline{\Omega}. \tag{84}$$

Demonstrație. Pentru unicitatea solutiei putem aplica PM pentru functii armonice sau metoda energetica. Detaliati!

Pentru prima parte din (84) putem aplica din nou PM slab+tare.

Pentru a doua parte din (84) putem folosi ca functie de comparatie pe $v(x, y) := -\frac{x^4}{12} - \frac{y^2}{2}$ (cautam o functie de forma $v(x, y) := \alpha x^4 + \beta y^2$ astfel incat $-\Delta v(x, y) = 1 + x^2$).

Detaliati demonstratia !

Exercitiu 20. *Fie* Ω *un domeniu din* $\mathbb{R}^n$ *si consideram problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = u - u^3, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{85}$$

Aratati ca

$$-1 \leq u \leq 1, \ \text{ in } \Omega.$$

Se ating valorile 1 si -1 ?

Demonstrație. Aratam doar ca $u \leq 1$, pentru inegalitatea cealalta procedandu-se similar. Presupunem prin absurd ca exista $x_0 \in \Omega$ astfel incat $u(x_0) > 1$. Consideram $\Omega' := \{x \in \Omega \mid u(x) > 1\}$. Evident Ω este nevida din prespunere si cum $\Omega' = u^{-1}(1, \infty)$ rezulta ca este si deschisa. Pe de alta parte avem ca $\partial\Omega' \subset \{x \in \Omega \mid u(x) = 1\}$. Obtinem

$$\begin{cases} -\Delta u = u(1 - u^2) \leq 0, & \text{in } \Omega' \\ u = 1, & \text{pe } \partial\Omega'. \end{cases} \tag{86}$$

Deci u este subarmonica. Din principiul de maxim rezulta $\max_{\overline{\Omega'}} u = \max_{\partial\Omega'} u = 1$. Deci $u(x_0) \leq 1$. Contradictie!

In general 1 si -1 nu se ating. Intr-adevar $u \equiv 0$ este solutie a problemei (85).

Exercitiu 21. *Fie* u *o functie armonica in* $B_3(0) \subset \mathbb{R}^2$ *si notam in coordonate polare*

$$u(x) = u(x_1, x_2) = u(r \cos\varphi, r \sin\varphi) := \tilde{u}(r, \varphi), \quad r \in (0, 2), \varphi \in [0, 2\pi].$$

Stiind ca $\tilde{u}(2, \varphi) = 2\cos(3\varphi) + 1$ *calculati* $\sup_{B_2(0)} u$ *si* $u(0)$.

Demonstraţie. Din Principiul de Maxim pentru functii armonice rezulta

$$\sup_{B_2(0)} u = \sup_{\partial B_2(0)} = \sup_{\varphi\in[0,2\pi]} \tilde{u}(2,\varphi)$$
$$\sup_{\varphi\in[0,2\pi]} \{2\cos(3\varphi)+1\} = 2+1 = 3.$$

Din Teorema de medie pentru functii armonice avem

$$\begin{aligned} u(0) &= \fint_{\partial B_2(0)} u d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_2(0)} \tilde{u}(2,\varphi) ds \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(2,\varphi)\sqrt{(-2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2\cos(3\varphi)+1) d\varphi \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exercitiu 22. * *Fie problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & in\ \Omega \\ u = 0, & pe\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{87}$$

unde $\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < R^2\}$ *este bila de raza* R *pentru un* $R>0$ *dat iar* $f\in C^1(\overline{\Omega})$ *este o functie* **radiala** *data.*

Aratati ca unica solutie $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ *a problemei* (87) *este functie* **radiala** *si apoi gasiti o formula integrala explicita pentru* u.

Demonstraţie. Demonstratia faptului ca u este radiala nu este triviala si contine mai mult pasi dupa cum urmeaza. In primul rand cum f este radiala, fie $g\in C^1([0,R])$ astfel incat

$$f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2}) = g(r), \quad \forall (x,y)\in\overline{\Omega}. \tag{88}$$

Pasul 1. Definim functia

$$w(x,y) := y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \quad \forall (x,y)\in\Omega. \tag{89}$$

Aratam ca w este functie armonica in Ω. Intr-adevar, avem succesiv

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - x\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y) - x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y).$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) = y\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,y) - x\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}(x,y).$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y) = y\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}(x,y) - x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y).$$

Deci

$$\begin{aligned}
\Delta w(x,y) &= y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right) - x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right)\\
&= y\frac{\partial}{\partial x}(-\Delta u(x,y)) - x\frac{\partial}{\partial y}(-\Delta u(x,y))\\
&\overset{(87)-(88)}{=} y\frac{\partial}{\partial x}(g(\sqrt{x^2+y^2})) - x\frac{\partial}{\partial y}(g(\sqrt{x^2+y^2}))\\
&= x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}g'(\sqrt{x^2+y^2}) - y\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}g'(\sqrt{x^2+y^2})\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pasul 2: Aratam ca $w \equiv 0$ pe $\partial\Omega$.

Pentru asta demonstram mai intai un rezultat ajutator intr-un context chiar mai general:

Lema 2. *Fie Ω un domeniu din $\mathbb{R}^n$ (oarecare, nu neaparat bila) si fie $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ cu $u =$ constant pe $\partial\Omega$. Atunci*

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\nu \tag{90}$$

Demonstratia Lemei 2. Local, in jurul lui $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ exista o parametrizare a frontierei lui Ω,

$$\partial\Omega : \begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t), \end{cases} \qquad \forall t \in \mathcal{I}$$

, cu proprietatea ca $\quad \exists t_0 \in \mathcal{I}$ astefel incât $a(t_0) = x_0$ si $b(t_0) = y_0$.

Atunci, cu ipoteza, avem ca $u(a(t), b(t)) = cst, \quad \forall t \in \mathcal{I}$. Derivând in raport cu t obtinem

$$\frac{\partial u}{\partial x}a'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}b'(t) = 0$$

atunci

$$< \nabla u; (a'(t), b'(t)) >= 0.$$

De unde deducem ca $\nabla u \perp (a'(t), b'(t))$. Cum $(a'(t), b'(t))$ este vector tangent la curba $\partial\Omega$ in punctul $(a(t), b(t))$ rezulta $\nabla u \parallel \nu$, deci exista α astfel incât $\nabla u = \alpha\nu$, unde ν este vectorul normal unitar.

Inmultind ultima relatie la dreapta cu ν se obtine $\alpha = \nabla u \cdot \nu$. Folosind relatia

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu,$$

deducem ca $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\nu$, ceea ce incheie demostratia lemei.

Aplicand Lemma 2 pentru Ω "al nostru" (pentru care stim versorul normalei exterioare ν), din definitia lui w in (89), pentru orice $(x,y) \in \partial\Omega$ avem succesiv ca:

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \nabla u(x,y) \cdot (y,-x) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y)\nu \cdot (y,-x) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y)\left(\frac{x_1}{\sqrt{R}}, \frac{x_2}{\sqrt{R}}\right) \cdot (x_2,-x_1) \\ &= 0, \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Astfel, Pasul 2 este finalizat.

Pasul 3: Aratam ca u este functie radiala.

Din Pasul 1 si Pasul 2 obtinem ca w este o functie armonica in Ω cu $w = 0$ pe $\partial\Omega$. Prin urmare rezulta $w \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$ adica

$$y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{91}$$

Pentru ca arata ca u este functie radiala este suficient sa arat ca scrierea lui u in coordonate polare (adica $u(x) = u(r\cos(\theta), r\sin(\theta)), \quad r \in (0,R), \quad \theta \in (0,2\pi)$) nu depinde de componenta radiala.

Fie $r \in (0,R)$ fixat si definim $\widetilde{u}(\theta) := u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Derivand in raport cu θ, tinand cont de (91) se obtine

$$\widetilde{u}'(\theta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)r\cos(\theta) = y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0, \quad \forall \theta \in (0,2\pi).$$

Asadar, $\widetilde{u}(\theta) = \widetilde{u}(0) = u(r,0), \quad \forall \theta \in (0,2\pi)$, de unde concluzionam ca $u(x) = u(r,0) = h(r)$, cu $r = \sqrt{x^2+y^2}$ deci u este functie radiala.

Exercitiu 23. *Se considera problema la limita*

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) = u(1,y) = 0, x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ u_x(0,y) - u(0,y) = \sin(2\pi y), & y \in (0,1), \end{cases} \tag{92}$$

1). Aratati ca (92) *are cel mult o solutie de clasa* C^2.
2). Gasiti solutia problemei (247) *cautand-o sub forma* $u(x,y) = A(x)B(y)$.

Demonstraţie. 1). Fie $\Omega := (0,1)\times(0,1)$ si frontiera lui Ω formata din $\partial\Omega = \Gamma + \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ unde Γ_i sunt segmentele de dreapta parametrizate prin

$$t \in (0,1), \quad \Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad \Gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, \quad \Gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}, \quad \Gamma_4 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}.$$

Fie u_1 si u_2 doua solutii si consideram $U := u - 1 - u_2$. Atunci U verifica problema

$$\begin{cases} \Delta U(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ U(x,0) = U(x,1) = U(1,y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ U_x(0,y) - U(0,y) = 0, & y \in (0,1), \end{cases} \tag{93}$$

Aplicand ”metoda energetica” prin inmultire cu U in (93) si integrare avem din prima formula a lui Green:

$$= \int_{\Omega} U \Delta U dxdy = I - \int_{\Omega} |\nabla U|^2 dxdy \tag{94}$$

unde I este integrala pe frontiera data in acest caz de integrala curbilinie de speta I:

$$I := \int_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial \nu} U d\sigma.$$

Tinand cont de conditiile de frontiera din (93) avem succesiv ca

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma_4} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial \nu} U ds \\ \left(\frac{\partial U}{\partial \nu} = \nabla U \cdot \nu\right) &= \int_{\Gamma_4} (U_x, U_y) \cdot (-1,0) U ds \\ \left(ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = dt\right) &= \int_0^1 -U_x(0,t) U(0,t) dt \\ &= -\int_0^1 U^2(0,t) dt. \end{aligned} \tag{95}$$

Din (94)-(95) rezulta

$$0 = \int_0^1 U^2(0,t) dt + \int_{\Omega} |\nabla U|^2 dxdy \geq 0.$$

Prin urmare, cu necesitate obtinem $\nabla U = 0$ in Ω, ceea ce implica ca $U = ct$ in $\overline{\Omega}$ dar cum U se anuleaza pe o parte a frontierei, pentru a avea continuitate pana la frontiera a solutiei se obtine $U \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$. In concluzie avem unicitatea solutiei.

2). Sistemul (92) se rescrie

$$\begin{cases} A''(x)B(y) + A(x)B''(y) = 0, & x \in (0,1), y \in (0,1) \\ A(x)B(0) = A(x)B(1) = A(1)B(y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ A'(0)B(y) - A(0)B(y) = \sin(2\pi y), & y \in (0,1), \end{cases} \tag{96}$$

Cum $A \not\equiv 0$ si $B \not\equiv 0$ rezulta

$$B(0) = B(1) = A(1) = 0. \tag{97}$$

Din a treia conditie in (96) rezulta

$$B(y) = \frac{\sin(2\pi y)}{C}, \text{ unde } \quad C := A'(0) - A(0) \neq 0. \tag{98}$$

Evident B din (98) verifica (97). Prin urmare,

$$u(x,y) = \frac{A(x)}{C}\sin(2\pi y). \tag{99}$$

Renotand $A(x)/C =: \tilde{A}(x)$ ramane sa cautam solutia de forma

$$u(x,y) = \tilde{A}(x)\sin(2\pi y), \qquad \text{unde } \tilde{A}'(0) - \tilde{A}(0) = 1. \tag{100}$$

Din (97) si (100) avem de asemenea

$$\tilde{A}(1) = 0. \tag{101}$$

Din (101) inlocuind in prima ecuatie din (96) obtinem ecuatia diferentiala liniara de ordin doi cu coeficienti constanti:

$$\tilde{A}''(x) - 4\pi^2\tilde{A}(x) = 0, \quad x \in (0,1). \tag{102}$$

Rezulta

$$\tilde{A}(x) = C_1 e^{2\pi x} + C_2 e^{-2\pi x},$$

unde coeficientii C_1, C_2 se determina din conditiile (100)-(101) si se obtine

$$C_1 = \frac{1}{2\pi - 1 + e^{4\pi}(2\pi+1)}, \quad C_2 = \frac{-e^{4\pi}}{2\pi - 1 + e^{4\pi}(2\pi+1)}.$$

In final obtinem

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi - 1 + e^{4\pi}(2\pi+1)}(e^{2\pi x} - e^{2\pi(2-x)})\sin(2\pi y).$$

Exercitiu 24. * *Se considera problema la limita*

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) = u(1,y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ u_x(0,y) + u(0,y) = \sin(2\pi y), & y \in (0,1), \end{cases} \tag{103}$$

1). Aratati ca (103) *are cel mult o solutie de clasa* C^2.
2). Gasiti solutia problemei (103) *cautand-o sub forma* $u(x,y) = A(x)B(y)$.

Demonstraţie. 1). Similar ca la Exercitiu 23 consideram doua solutii u_1, u_2 si diferenta $U := u_1 - u_2$ verifica

$$\begin{cases} \Delta U = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ U(x,0) = U(x,1) = U(1,y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ U_x(0,y) + U(0,y) = 0, & y \in (0,1), \end{cases} \tag{104}$$

Aplicand metoda energetica se obtine

$$0 = \int_0^1 U^2(0,t)dt - \int_\Omega |\nabla U|^2 dxdy. \tag{105}$$

Spre deosebire de Exercitiu 23 unde semnul lui $\int_0^1 U^2(0,t)dt$ este cu $-$ aici semnul este "rau" adica cu plus. In acest caz este nevoie de efort suplimentar pentru a proba unicitatea. Ca prim pas avem urmatorul rezultat preliminar

Propozitie 4. *Solutia problemei* (104) *verifica inegalitatile:*

(a).

$$\int_0^1 U^2(0,t)dt \le \int_\Omega U_x^2(x,y)dxdy + \int_\Omega U^2(x,y)dxdy.$$

(b).

$$2\int_\Omega U^2(x,y)dxdy \le \int_\Omega U_y^2(x,y)dxdy.$$

Dem. (a). Pentru orice $t \in (0,1)$ avem

$$\begin{aligned} U^2(0,t) &= -(U^2(1,t) - U^2(0,t)) \\ &= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(U^2(x,t)\right) dx \\ &= -2\int_0^1 U_x(x,t)U(x,t)dx \\ &\le \int_0^1 U_x^2(x,y)dxdy + \int_0^1 U^2(x,y)dxdy. \end{aligned} \tag{106}$$

Integrand in raport cu t pe intervalul $(0,1)$ concluzionam cu (a).

(b). Fie $x \in (0,1)$ fixat. Avem pentru orice $y \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} U(x,y) = U(x,y) - U(x,0) &= \int_0^y \frac{\partial}{\partial t}\left(U(x,t)\right) dt = \int_0^y U_t(x,t)dt \\ (\text{ineg. } C-S) &\le \left(\int_0^y U_t^2(x,t)dt\right)^{1/2} \left(\int_0^y 1dt\right)^{1/2}. \\ &\le \left(\int_0^1 U_y^2(x,y)dy\right)^{1/2} \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Rezulta

$$U^2(x,y)dy \le \left(\int_0^1 U_y^2(x,y)dy\right) y. \tag{107}$$

Integrand in y in (107) avem

$$\int_0^1 U^2(x,y)dy \le \int_0^1 U_y^2(x,y)dy \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}\int_0^1 U_y^2(x,y)dy.$$

Integrand in x avem

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 U^2(x,y)dy\right) dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 U_y^2(x,y)dy\right) dx.$$

Din ultima inegalitate rezulta (b).

Revenind la demonstratia unicitatii, aplicand succesiv (105) si inegalitatile $(a)-(b)$ din Propozitia 4 obtinem

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla U|^2 dxdy &= \int_0^1 U^2(0,t)dt \\ &\le \int_\Omega U_x^2(x,y)dxdy + \int_\Omega U^2(x,y)dxdy \\ &\le \int_\Omega U_x^2(x,y)dxdy + \frac{1}{2}\int_\Omega U_y^2(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

Rezulta

$$\frac{1}{2}\int_\Omega U_y^2(x,y)dxdy \le 0.$$

Prin urmare, obtinem $U_y(x,y) = 0$ pentru orice $(x,y) \in \Omega$. Deci $U(x,y) = C(x)$ pentru orice $x \in (0,1)$. Din continuitatea lui U pe frontiera deducem $C(x) = 0$ pentru orice $x \in (0,1)$. Deci $U(x,y) \equiv 0$ pentru orice $(x,y) \in \overline{\Omega}$. Demonstratie punctului 1). este astfel incheiata.

2). Cautand solutia sub forma $u(x,y) = A(x)B(y)$ atunci (103) se reduce la

$$\begin{cases} A''(x)B(y) + A(x)B''(y) = 0, & x \in (0,1), y \in (0,1) \\ A(x)B(0) = A(x)B(1) = A(1)B(y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ A'(0)B(y) + A(0)B(y) = \sin(2\pi y), & y \in (0,1), \end{cases} \tag{108}$$

Rezulta

$$B(y) = \frac{\sin(2\pi y)}{C}, \text{ unde } C := A'(0) + A(0) \ne 0, \quad y \in (0,1),$$

ceea ce implica

$$u(x,y) = \frac{A(x)}{C}\sin(2\pi y).$$

Ca mai devreme notand $\tilde{A}(x) := A(x)/C$ avem

$$u(x,y) = \tilde{A}(x)\sin(2\pi y),$$

unde

$$\tilde{A}'(0) + \tilde{A}(0) = 1, \quad \tilde{A}(1) = 0. \tag{109}$$

Inlocuind ultima expresie a lui u in ecuatia diferentialaSimi deducem ca $\tilde{A}$ verifica ecuatia diferentiala

$$\tilde{A}''(x) - 4\pi^2\tilde{A}(x) = 0, \quad + \text{ conditiile } (109).$$

Similar ca la Exercitiu (23) se determina $\tilde{A}$ si se obtine

$$u(x,y) = \frac{1}{e^{4\pi}(2\pi-1)+2\pi+1}(e^{2\pi x} - e^{2\pi(2-x)})\sin(2\pi y).$$

□

3.5 Functia lui Green

Teorema 6 (Teorema Green-Riemann). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu marginit si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ a.i. $\Delta u \in C(\overline{\Omega})$. Atunci*

$$\int_\Omega \Delta u(y)E(x-y)dy - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)E(x-y)d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y}d\sigma(y) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases} \tag{110}$$

unde E este solutia fundamentala a Laplacianului.

Demonstraţie. Cazul I: $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Atunci avem ca functia $\Omega \ni y \mapsto E(x-y)$ este neteda si prin urmare $\Delta E(x-y) = 0$ pentru orice $y \in \Omega$. Aplicam I formula a lui Green si obtinem

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} - \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)E(x-y)\right)d\sigma(y) &= \int_\Omega \left(u(y)\Delta_y(E(x-y)) - E(x-y)\Delta u(y)\right)dy \\ &= \int_\Omega \left(u(y)\Delta E(x-y) - E(x-y)\Delta u(y)\right)dy \\ &= \int_\Omega -E(x-y)\Delta u(y)dy\end{aligned}$$

de unde se obtine concluzia.

Cazul II: $x \in \Omega$. In acest caz functia $\Omega \ni y \mapsto E(x-y)$ devine singulara in x (atunci cand $y = x$). Din aceasta cauza va trebui sa evitam singularitatea ! Consideram domeniul

$\Omega_\epsilon := \Omega \setminus \overline{B_\epsilon(x)}$. Pentru noul domeniu functia $\Omega_\epsilon \ni y \mapsto E(x-y)$ devine neteda si prin urmare suntem din nou in situatia de la Cazul I. Punand Ω_ϵ in loc de Ω cu argumentul de mai sus obtinem

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Delta u(y) E(x-y) dy - \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) E(x-y) d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega_\epsilon} u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y) = 0 \quad (111)$$

Ne intereseaza sa trecem la limita in (111) cand $\epsilon \to 0$. Cum

$$|\Delta u(y) E(x-y) 1_{\Omega_\epsilon}(y)| \leq \underbrace{|\Delta u(y)|}_{marginita+continua} \underbrace{|E(x-y)|}_{\in L^1_{loc}} \in L^1(\Omega),$$

rezulta din teorema convergentei dominate a lui Lebesque ca

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Delta u(y) E(x-y) dy = \int_{\Omega} \Delta u(y) E(x-y) 1_{\Omega_\epsilon} dy \to \int_{\Omega} \Delta u(y) E(x-y) dy, \quad \epsilon \to 0. \quad (112)$$

Pe de alta parte, stim ca $\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\epsilon(x)$. Atunci (111) este echivalent cu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} \Delta u(y) E(x-y) dy + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) d\sigma \\ + \int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y) - \int_{\partial B_\epsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) E(x-y) d\sigma(y) = 0 \quad (113) \end{aligned}$$

Aratam in continuare in (113) ca al doilea termen de frontiera tinde la zero iar primul termen tinde la $-u(x)$. Mai precis, avem succesiv

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\epsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) E(x-y) d\sigma(y) \right| &\leq \int_{\partial B_\epsilon(x)} |E(x-y)| |\nabla u| d\sigma \\ &\leq |\nabla u|_{L^\infty} \int_{\partial B_\epsilon(x)} |E(x-y)| d\sigma \\ &\lesssim C \begin{cases} \int_{\partial B_\epsilon(0)} |z|^{2-n} d\sigma(z), \, n \geq 3 \\ \int_{\partial B_\epsilon(0)} \ln \frac{1}{|z|} d\sigma(z), \; n = 2 \end{cases} \\ &\lesssim C \begin{cases} |\partial B_\epsilon(0)| \epsilon^{2-n}, \, n \geq 3 \\ |\partial B_\epsilon(0)| \ln \frac{1}{\epsilon}, \, n = 2 \end{cases} \\ &\lesssim C \begin{cases} \epsilon, \quad n \geq 3 \\ \epsilon \ln \frac{1}{\epsilon}, \, n = 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (114)$$

Pe de alta parte, analog ca pentru $B_{2,\epsilon}$ in demonstratia Teoremei 1 se poate arata ca

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y) \to -u(x), \text{ cand } \epsilon \to 0. \quad (115)$$

Tinand cont de (112), (114), (115) si trecand la limita in (113) cand ϵ tinde la 0 rezulta concluzia Teoremei 6.

Aplicatii ale Teoremei Green-Riemman

Reamintin ca o functie $u \in C^\infty(\Omega)$ este analitica daca se poate dezvolta in serie de puteri (serie Taylor) in jurul fiecarui punct $x_0 \in \Omega$, i.e.

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0)(x - x_0)^\alpha, \quad \forall x \in \mathcal{V}_{x_0}, \tag{116}$$

unde $\mathcal{V}_{x_0}$ este o vecinatate a lui x_0.

Pentru a arata ca o functie este analitica este suficient sa aratam urmatoarea propozitie.

Propozitie 5. *O functie $u \in C^\infty(\Omega)$ este analitica daca pentru orice compact $K \subset \Omega$ exista $C_K > 0$ a.i.*

$$\frac{1}{\alpha!}|D^\alpha u(x)| \leq C_K^{|\alpha|}, \qquad \forall x \in K, \forall \alpha - \textit{multi-indice}. \tag{117}$$

Demonstraţie. Este suficient sa aratam ca seria (116) este convergenta intr-o vecinatate a unui punct $x_0 \in \Omega$ ales arbitrar. In primul rand sa observam ca

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0)(x - x_0)^\alpha \right| &\leq \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha u(x_0)||x - x_0|^{|\alpha|} \\ &\leq (C_K |x - x_0|)^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

Din criteriul comparatiei seria (116) este convergenta pentru ca

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (C_K |x - x_0|)^{|\alpha|} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} k^n (C_K |x - x_0|)^k$$

este convergenta in jurul lui x_0 (alegem de exemplu $K = B_1(x_0)$ si $\mathcal{V}_{x_0} = B_r(x_0)$ unde $r = \frac{1}{2C_K}$, seria din urma comparandu-se superior cu o serie de forma $\sum_{k \in \mathbb{N}} k^n q^k$ cu $|q| < 1/2$ care este convergenta).

Propozitie 6. *Solutia fundamentala E a ecuatiei lui Laplace este analitica pe $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Propozitia 6 este o consecinta imediata a Propozitiei 5.

Propozitie 7. *Fie $u \in C^2(\Omega)$ o functie armonica in Ω. Atunci u este analitica in Ω.*

Demonstraţie. Fixam $x_0 \in \Omega$ si $r > 0$ a.i. $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$. Fie K compact a.i. $B_{r+\epsilon}(x_0) \subset K \subset \Omega$ pentru $\epsilon > 0$ suficient de mic. Consideram $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ a.i. $Supp\phi = K$ si $\phi \equiv 1$ in $B_{r+\epsilon}(x_0)$. Avem

$$\begin{aligned} \Delta(\phi u) &= \phi \Delta u + u \Delta \phi + 2\nabla u \cdot \nabla \phi \\ &= u \Delta \phi + 2\nabla u \cdot \nabla \phi := g, \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

Pe de alta parte, $\phi u = 0$ in $\Omega \setminus K$. Aplicand Teorema 6 obtinem

$$\begin{aligned}(\phi u)(x) = \int_\Omega \Delta(\phi u)(y) E(x-y)dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\phi u)}{\partial \nu_y}(y) E(x-y) d\sigma(y) \\ + \int_{\partial\Omega} (\phi u)(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y) \\ = \int_\Omega g(y) E(x-y) dy, \quad \forall x \in \Omega. \quad (118)\end{aligned}$$

Cum $g \equiv 0$ in $B_{r+\epsilon}(x_0)$ si $\phi \equiv 1$ in $B_{r+\epsilon}(x_0)$ rezulta

$$u(x) = \int_{\Omega \setminus B_{r+\epsilon}(x_0)} g(y) E(x-y) dy, \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

Observam ca functia $x \in B_r(x_0) \mapsto E(x-y)$ este neteda pentru orice $y \in \Omega \setminus B_{r+\epsilon}(x_0)$. De aici se obtine ca $u \in C^\infty(\Omega)$ intrucat de mai sus obtinem

$$D^\alpha u(x) = \int_{\Omega \setminus B_{r+\epsilon}(x_0)} g(y) D^\alpha E(x-y) dy, \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

unde x_0 a fost ales arbitrar in Ω. In plus, cum E este analitica pe $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ rezulta ca u este analitica in $B_r(x_0)$, deci in tot Ω.

Functia lui Green pentru problema Dirichlet

In aceasta sectiune vom cauta o formula de rezolvare a problemei Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u = g, & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{119}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este un deschis neted (marginit) iar $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$ sunt functii date.

Fie $x \in \Omega$ fixat. Consideram problema Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta \varphi_x(y) = 0, & y \in \Omega \\ \varphi_x(y) = E(x-y), & y \in \partial\Omega \end{cases} \tag{120}$$

Definitie 16. *Functia definita prin*

$$G(x,y) := \varphi_x(y) - E(x-y), \forall y \in \overline{\Omega}, \quad x \neq y. \tag{121}$$

se numeste **functia lui Green** *pentru problema Dirichlet.*

In acest moment nu este evident faptul ca functia lui Green este simetrica in x si y dar vom vedea asta putin mai tarziu. In schimb, este evident din definitie functia lui Green satisface problema

$$\begin{cases} \Delta_y G(x,y) = 0, \forall y \in \Omega, \ y \neq x \\ G(x,y) = 0, \quad \forall y \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{122}$$

Teorema 7. *Pentru problema* (119) *are loc urmatoarea formula de reprezentare a solutiei, i.e.*

$$u(x) = -\int_{\Omega} G(x,y)f(y)dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)g(y)d\sigma(y). \tag{123}$$

Demonstraţie. Inmultim in (120) cu u si aplicand a doua formula a lui Green obtinem

$$0 = \int_{\Omega} \Delta\varphi_x(y)u(y)dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \nu_y}(y)u(y) - \int_{\partial\Omega} \varphi_x(y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)d\sigma + \int_{\Omega} \Delta u(y)dy. \tag{124}$$

Pe de alta parte, utilizand formula Green-Riemann avem

$$u(x) = \int_{\Omega} \Delta u(y)E(x-y)dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)E(x-y)d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y}d\sigma(y) \tag{125}$$

Scazand (124) din (125) obtinem succesiv

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} \Delta u(y)(E(x-y) - \varphi_x(y))dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)(E(x-y) - \varphi_x(y))d\sigma(y) \\ &+ \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}(E(x-y) - \varphi_x(y))d\sigma(y) \\ &= -\int_{\Omega} \Delta u(y)G(x,y)dy - \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}d\sigma \\ &= -\int_{\Omega} f(y)G(x,y)dy - \int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}d\sigma \end{aligned}$$

si demonstratia este incheiata.

Asa cum ziceam mai devreme o proprietate importanta a functiei Green este simetria.

Propozitie 8. *Are loc*

$$G(x,y) = G(y,x), \qquad \forall x, y \in \Omega, \quad x \neq y. \tag{126}$$

Demonstraţie. Pentru detalii a se vedea cartea lui Evans [3].

Teorema 7 este extrem de utila mai ales cand suntem capabili sa determinam explicit functia Green. Acest lucru este posibil in unele cazuri particulare ale domeniului Ω. Vom exemplifica acest lucru in continuare in cazul in care Ω este o bila din $\mathbb{R}^n$.

3.6 Functia lui Green pe bila

Fie $R > 0$ fixat si bila $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ iar $\partial B_R(0)$ frontiera sa. Pentru determinarea functiei Green avem nevoie ca pentru fiecare $x \in B_R(0) \setminus \{0\}$ sa defininim un alt punct din $\mathbb{R}^n$ notat $x^\star \in \mathbb{R}^n$, i.e. inversiunea de pol $x = 0$ a lui x si modul R^2, prin formula

$$x* := \frac{x}{|x|^2}R^2.$$

Cum $|x||x^\star| = R^2$ rezulta ca $x^\star$ se gaseste inafara bilei $B_R(0)$ si de asemenea

$$x \to \partial B_R(0) \Leftrightarrow x \simeq x^\star.$$

In plus, $x^\star$ verifica urmatoarea relatie importanta

Propozitie 9. *Are loc*

$$|x^\star - y| = \frac{R|x-y|}{|x|}, \quad \forall x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}, \forall y \in \partial B_R(0).$$

Demonstraţie. Observam asemanarea de triunghiuri $\Delta xOy \sim \Delta yOx$ (cazul LUL) pentru ca $\angle xOy = \angle yOx^\star$ si $|x|/R = R/|x^\star|(= |x-y|/|x^\star - y|)$. Prin urmare Prop. (9) se deduce din al treilea raport de asemanare. $\square$

Cazul $n = 3$.

Propozitie 10. *Functia lui Green pe bila $B_R(0)$ este data explicit prin formula*

$$G(x,y) = \begin{cases} R^{n-2}|x|^{2-n}E(x^\star - y) - E(x-y), & x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}, y \in \overline{B_R(0)} \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n}R^{2-n} - E(y), & x = 0, y \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\} \end{cases} \tag{127}$$

pentru orice $x \neq y$. Reamintim ca in cazul $n = 3$ solutia fundamentala este $E(x) = \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}$.

Demonstraţie. Asa cum sugereaza si rezultatul Propozitiei 10 distingem doua cazuri:

1). $x = 0$
2). $x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}$

• Daca $x = 0$ atunci functia Green este determinata ca in (121) prin intermediul functiei φ_0 din (120). Mai precis, φ_0 satisface

$$\begin{cases} \Delta\varphi_0(y) = 0, & y \in B_R(0) \\ \varphi_0(y) = E(y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}R^{2-n}, & y \in \partial B_R(0). \end{cases} \tag{128}$$

Deci $\varphi_0(y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}R^{2-n}$ pentru orice $y \in \overline{B_R(0)}$. Obtinem functia Green

$$G(0,y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}R^{2-n} - E(y), \quad \forall y \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}. \tag{129}$$

• Daca $x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}$, tinand cont de forma generala (121) si proprietatile (120) cautam functia Green asociata bilei sub forma

$$G(x,y) := \alpha E(x^\star - y) - E(x-y), \tag{130}$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}$ urmeaza a fi determinat. Din Propozitia 9 si (130) avem

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}, \quad \forall y \in \partial B_R(0): \\
&\qquad G(x,y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(\alpha |x^\star - y|^{2-n} - |x-y|^{2-n}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(\alpha \frac{R^{2-n}}{|x|^{2-n}}|x-y|^{2-n} - |x-y|^{2-n}\right) \\
&\qquad = \frac{|x-y|^{2-n}}{(2-n)\omega_n |x|^n}\left(\alpha R^{2-n} - |x|^{2-n}\right).
\end{aligned}$$

Prin urmare, conditia de frontiera din (120) ne obliga la

$$\alpha = \frac{|x|^{2-n}}{R^{2-n}}, \quad \forall x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}. \tag{131}$$

□

Cazul $n = 2$.

Propozitie 11. *Functia lui Green pe bila $B_R(0)$ este data explicit prin formula*

$$G(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|x|} + E(x^\star - y) - E(x-y), & x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}, y \in \overline{B_R(0)} \\ \frac{1}{2\pi}(\ln R - \ln|y|), & x = 0, y \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\} \end{cases} \tag{132}$$

pentru orice $x \neq y$. Reamintim ca in cazul $n = 2$ solutia fundamentala este $E(x) = \frac{\ln|x|}{2\pi}$.

Demonstraţie. Ca in cazul $n = 3$ avem discutia

1). $x = 0$
2). $x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}$

• Daca $x = 0$ atunci functia Green este determinata ca in (121) prin intermediul functiei φ_0 din (120). Mai precis, φ_0 satisface

$$\begin{cases} \Delta\varphi_0(y) = 0, & y \in B_R(0) \\ \varphi_0(y) = E(y) = \frac{1}{2\pi}\ln R, & y \in \partial B_R(0) \end{cases} \tag{133}$$

Deci $\varphi_0(y) = \frac{1}{2\pi}\ln R$ pentru orice $y \in \overline{B_R(0)}$. Obtinem functia Green

$$G(0,y) = \frac{1}{2\pi}\ln R - E(y), \quad \forall y \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}. \tag{134}$$

• Daca $x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}$, tinand cont de forma generala (121) si proprietatile (120) cautam functia Green asociata bilei sub forma

$$G(x,y) := \alpha + E(x^\star - y) - E(x-y), \tag{135}$$

unde $\alpha = \alpha(x) \in \mathbb{R}$ urmeaza a fi determinat. Din Propozitia 9 si (130) avem

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}, \quad \forall y \in \partial B_R(0) : \\
&\qquad G(x,y) = \alpha + \frac{1}{2\pi}\left(\ln|x^\star - y| - \ln|x-y|\right) \\
&\qquad = \alpha + \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{R|x-y|}{|x|} - \ln|x-y|\right) \\
&\qquad = \alpha + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|x|}.
\end{aligned}$$

Prin urmare, conditia de frontiera din (120) ne obliga la

$$\alpha(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|x|}, \quad \forall x \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\}. \tag{136}$$

Demonstratia Propozitiei 11 este astfel incheiata. □

Propozitie 12. *Fie $n \geq 2$ si $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Daca G este functia Green asociata bilei $B_R(0)$ sa se verifice ca*

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) = \frac{|x|^2 - R^2}{R\omega_n|x-y|^n} \tag{137}$$

pentru orice $x \in \overline{B_R(0)}$ si orice $y \in \partial B_R(0)$ cu $x \neq y$.

Demonstraţie. In primul rand avem

$$\begin{aligned}
\nabla_y G(x,y) &= (R^{n-2}|x|^{2-n}\nabla_y(E(x^\star - y)) - \nabla_y(E(x-y))) \\
(\text{din } (56)) &= R^{n-2}|x|^{2-n}\frac{y - x^\star}{\omega_n|y-x^\star|^n} - \frac{y-x}{\omega_n|y-x|^n}
\end{aligned}$$

Pentru $y \in \partial B_R(0)$ din Prop. 9 obtinem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) &= \nabla_y G(x,y) \cdot \nu_y \\
&= \left(R^{n-2}|x|^{2-n}\frac{y - \frac{x}{|x|^2}R^2}{\omega_n|y-x^\star|^n} - \frac{y-x}{\omega_n|y-x|^n}\right) \cdot \frac{y}{|y|} \\
&= \left(\frac{|x|^2}{R^2}\frac{y - \frac{x}{|x|^2}R^2}{\omega_n|y-x|^n} - \frac{y-x}{\omega_n|y-x|^n}\right) \cdot \frac{y}{|y|} \\
&= \frac{1}{\omega_n|y-x|^n}\left(\frac{|x|^2 y}{R^2} - x - (y-x)\right) \cdot \frac{y}{R} \\
&= \frac{|x|^2 - R^2}{R\omega_n|y-x|^n}.
\end{aligned}$$

3.7 Formula lui Poisson

Teorema 8. *Fie problema*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & in\ B_R(0) \\ u = g, & pe\ \partial B_R(0), \end{cases} \tag{138}$$

unde $g \in C(\partial B_R(0))$. *Atunci functia*

$$u(x) := \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y), & \forall x \in B_R(0) \\ g(x), & \forall x \in \partial B_R(0), \end{cases} \tag{139}$$

verifica $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$ *si este solutia problemei* (138) *(unica solutie* $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$*!).*

Propozitie 13. *Definim* **nucleul Poisson** *ca fiind functia*

$$P(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n |x-y|^n}, \quad x \in B_R(0), y \in \partial B_R(0). \tag{140}$$

Din Teorema 8, luand $g \equiv 1$ *pe* $\partial B_R(0)$*, Atunci rezulta*

$$\int_{\partial B_R(0)} P(x,y) d\sigma(y) = 1, \quad \forall x \in B_R(0). \tag{141}$$

Observatie 10. *Formula* (139) *o vom folosi la demonstratia Teoremei 8. Demonstratia Prop. 13 se obtine folosind Prop. 12, formula de integrare Gauss-Green si proprietatea* (122). *Pasul de finete in acest argument este acela de a arata faptul ca*

$$\int_{B_\epsilon(x)} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) d\sigma(y) = 1, \quad \forall x \in B_R(0), \forall \epsilon > 0 \ a.\ i.\ B_\epsilon(x) \subset B_R(0). \tag{142}$$

Demonstratie Teorema 8: Formula (139) rezulta in mod direct din formula de reprezentare a solutiei pentru problema Dirichlet (Teorema 7) si din Prop. 12.

Este usor de vazut ca $u \in C^2(B_R(0))$.

Partea mai delicata de aratat o constitute continuitatea lui u pana la frontiera bilei $B_R(0)$, i.e. $u \in C(\overline{B_R(0)})$. Pentru aceasta apelam la un argument de tipul (ϵ, δ). Fixam in primul rand $x_0 \in \partial B_R(0)$. Aratam ca $\lim_{x \to x_0} u(x) = g(x_0)$. Fie $\epsilon > 0$ arbitrar fixat. Cum g este continua rezulta ca exista $\delta_\epsilon > 0$ astfel incat pentru orice $y \in \partial B_R(0)$ cu $|x-y| < \delta_\epsilon$

avem $|g(y) - g(x_0)| < \epsilon/2$. Tinand cont de (139) estimam pentru $|x - x_0| < \delta_\epsilon/2$:

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\partial B_R(0)} P(x,y) g(y) d\sigma(y) - g(x_0) \right| \\
&= \left| \int_{\partial B_R(0)} P(x,y)(g(y) - g(x_0)) d\sigma(y) \right| \\
&\le \int_{\partial B_R(0)} P(x,y) |g(y) - g(x_0)| d\sigma(y) \\
&= \int_{y \in \partial B_R(0), |y - x_0| < \delta_\epsilon} P(x,y) |g(y) - g(x_0)| d\sigma(y) \\
&+ \int_{y \in \partial B_R(0), |y - x_0| > \delta_\epsilon} P(x,y) |g(y) - g(x_0)| d\sigma(y) \\
(g \text{ continua }) &\le \frac{\epsilon}{2} \int_{y \in \partial B_R(0), |y - x_0| > \delta_\epsilon} P(x,y) d\sigma(y) + 2 \sup_{\partial B_R(0)} |g| \left(\frac{2}{\delta_\epsilon} \right)^n \frac{1}{R\omega_n} (|x_0| - |x|) 2R \\
(\text{ din } (139)) &\le \frac{\epsilon}{2} + 4 \sup_{\partial B_R(0)} |g| \left(\frac{2}{\delta_\epsilon} \right)^n \frac{1}{\omega_n} |x_0 - x| \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Prin urmare, alegand

$$\delta(\epsilon) := \min \left\{ \frac{\delta_\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{8 \sup_{\partial B_R(0)} |g| \left(\frac{2}{\delta_\epsilon} \right)^n \frac{1}{\omega_n}} \right\},$$

obtinem ca oricare ar fi $x \in B_R(0)$ astfel incat $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$ rezulta $|u(x) - g(x_0)| < \epsilon$. Deci, u este continua pana la bordul lui $B_R(0)$. $\square$

3.8 Laplacianul in coordonate locale. Aplicatii.

Exercitiu 25. *1). Fie $\gamma > 0$ fixat. Probati inegalitatea optimala Friedrichs*

$$\int_0^\gamma |u'(\theta)|^2 d\theta \ge \frac{\pi^2}{\gamma^2} \int_0^\gamma |u(\theta)|^2 d\theta, \quad \forall C_c^1((0,\gamma)), \tag{143}$$

unde $C_c^1((0,\gamma)) = \{u \in C^1((0,\gamma)) \mid Supp\ u\ este\ compact\}$.
Indicatii:

– *Pas 1. Considerati functia $v \in C_c^1((0,\gamma))$ definita prin $v(\theta) := \frac{u(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{\gamma}\theta\right)}$ si integrand prin parti in membrul stang in (143) aratati ca*

$$\int_0^\gamma |u'(\theta)|^2 d\theta = \frac{\pi^2}{\gamma^2} \int_0^\gamma |u(\theta)|^2 d\theta + \int_0^\gamma |v'(\theta)|^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{\gamma}\theta\right) d\theta. \tag{144}$$

– *Pas 2. Finalizare demonstratie.*

2). Argumentati ca inegalitatea (143) *este stricta pentru functii din* $C_c^1((0,\gamma))$.

3). Aratati ca egalitatea in (143) *se realizeaza pentru functii din* $\{u \in C^1([0,\gamma]) \mid u(0) = u(\gamma) = 0\}$ *si gasiti acele functii.*

Exercitiu 26. *Fie* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *o functie de clasa* C^2. *Notam*

$$f(x) = f(x_1, x_2) = f(\mathcal{L}(r,\theta)) := \tilde{f}(r,\theta),$$

unde $\mathcal{L} : (0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *reprezinta transformarea in coordonate polare*

$$\mathcal{L}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

1). Sa se arate ca Laplacian-ul in coordonate polare este dat de formula

$$\Delta f(x) = \tilde{f}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{f}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{f}_{\theta\theta}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \tag{145}$$

Indicatie: Incepeti prin a calcula membrul drept.

2). Fie sectorul cu deschiderea γ *din* $\mathbb{R}^2$ *definit prin*

$$\Omega_\gamma := \{x = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in (0,\infty), \theta \in (0,\gamma)\}.$$

3). Aratati ca

$$|\nabla f|^2 = \tilde{f}_r^2 + \frac{\tilde{f}_\theta^2}{r^2}, \quad \forall f \in C^1(\Omega_\gamma). \tag{146}$$

Folosind eventual (145) *si* (146), *trecand la coordonate polare, demonstrati formula de integrare prin parti:*

$$\int_{\Omega_\gamma} (-\Delta f) f dx = \int_{\Omega_\gamma} |\nabla f|^2 dx, \quad \forall f \in C_c^2(\Omega_\gamma). \tag{147}$$

4). Aratati inegalitatea Hardy optimala

$$\int_{\Omega_\gamma} |\nabla f|^2 dx \geq \frac{\pi^2}{\gamma^2} \int_{\Omega_\gamma} \frac{|f|^2}{|x|^2} dx, \quad \forall f \in C_c^1(\Omega_\gamma). \tag{148}$$

Indicatie: Treceti in membrul stang la coordonate polare si folositi (143) *si* (146).

5). Aratati ca inegalitatea (148) *este stricta in* $C_c^1(\Omega_\gamma)$.

*6). *Aratati ca daca* $f \in C^1(\overline{\Omega_\gamma})$, $f_{|\partial\Omega_\gamma} = 0$ *si Supp* f *este compact, atunci* $\frac{f}{|x|} \in L^2(\Omega_\gamma)$.

Indicatie: $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx))dt = \int_0^1 \nabla f(tx) \cdot x dt$.

Prin urmare, $\frac{|f(x)|}{|x|} \leq \int_0^1 |\nabla f(tx)| dt$, *etc..*

Exercitiu 27 ($\star\star$ Exclus pentru examen/lucrare intermediara)**.** *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o functie de clasa* C^2. *Pentru* $x \neq 0$ *notam*

$$f(x) = f(r\sigma) = \tilde{f}(r,\sigma), \quad r = |x|,\ \sigma = \frac{x}{|x|}$$

unde $(r,\sigma) \in (0,\infty) \times S^{n-1}$ *(S^{n-1} reprezinta sfera de raza 1 din $\mathbb{R}^n$). Sa se arate ca Laplacian-ul in coordonate sferice este dat de formula*

$$\Delta f(x) = \tilde{f}_{rr} + \frac{n-1}{r}\tilde{f}_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}}\tilde{f}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{149}$$

unde $\Delta_{S^{n-1}}$ reprezinta operatorul Laplacian in raport cu metrica de pe sfera S^{n-1} (cunoscut sub numele de operatorul Laplace-Beltrami).

Observatie 11 (In legatura cu Exercitiu 27)**.** *Fie $(\mathcal{M}, g)$ o varietate Riemanniana differentiabila de dimeninsiune d si $g = (g_{ij})_{i,j=1,d}$ metrica asociata. Notam cu $|g| = \det(g)$ si $g^{-1} = (g^{ij})_{i,j=1,d}$ inversa lui g, i.e. $g^{ij}g_{jk} = \delta_{ik}$. Atunci Laplacianul Δ_g in raport cu metrica g este definit prin*

$$\Delta_g f(x) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f \right), \tag{150}$$

unde ∂_i reprezinta derivata partiala in raport cu coordonata locala θ^i, pentru orice $i = 1, d$.

Notatii:
In cadrul Exercitiilor 26 si 27 am notat:
$C_c^k(\Omega_\gamma) = \{f \in C^k(\Omega_\gamma) \mid \text{Supp } f \text{ este compact}\}$
$\partial\Omega_\gamma :=$ frontiera lui Ω_γ,
$f_{|\partial\Omega_\gamma} =$ restrictia lui f la frontiera lui Ω_γ.
$\star$ = posibil grad mai mare de dificultate
$\star\star$ = grad mai mare de dificultate

Exercitiu 28. *Sa se scrie operatorul Laplacian (Laplace-Beltrami) pe sfera S^2 in coordonatele locale standard.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{L}$ parametrizarea standard a lui S^2 data de

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3) = \mathcal{L}(\theta, \varphi) &= (\mathcal{L}_1(\theta,\varphi), \mathcal{L}_2(\theta,\varphi), \mathcal{L}_3(\theta,\varphi)) \\ &= (\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \cos\varphi), \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0,\pi). \end{aligned} \tag{151}$$

Fie

$$g = (g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,2}, \quad g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{,\mu} \cdot \mathcal{L}_{,\nu},$$

metrica indusa de θ, ϕ pe S^2. Mai detaliat elementele metricii g sunt

$$g_{11} = \mathcal{L}_{,\theta} \cdot \mathcal{L}_{,\theta}, \quad g_{12} = \mathcal{L}_{,\theta} \cdot \mathcal{L}_{,\varphi}, \quad g_{21} = \mathcal{L}_{,\varphi} \cdot \mathcal{L}_{,\theta}, \quad g_{22} = \mathcal{L}_{,\varphi} \cdot \mathcal{L}_{,\varphi}.$$

Particularizand pentru (151) obtinem

$$g = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |g| = \det g = \sin^2\varphi.$$

Fie $g^{-1} = (g^{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,2}$ inversa lui g mai precis

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel avem

$$\begin{aligned}\boxed{\Delta_{S^2} u} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu u)\\ &= \frac{1}{\sin\varphi}\left(\partial_\theta\left(\sin\varphi\frac{1}{\sin^2\varphi}\partial_\theta\right)+\partial_\varphi\left(\sin\varphi\partial_\varphi u\right)\right)\\ &= \boxed{\partial_{\varphi\varphi}u+\cot\partial_\varphi u+\frac{1}{\sin^2\varphi}\partial_{\theta\theta}u}.\end{aligned}$$

Exercitiu 29. *Sa se scrie Laplacianul in $\mathbb{R}^3$ in coordonate cilindrice.*

Demonstrație. Parametrizarea lui $\mathbb{R}^3$ in coordonate cilindrice este

$$x=(x_1,x_2,x_3)=\mathcal{L}(r,\theta,z)=(r\sin\theta,r\cos\theta,z),\quad r\in(0,\infty),\theta\in[0,2\pi),z\in\mathbb{R}.$$

Avem

$$\mathcal{L}_{,r}=(\sin\theta,\cos\theta,0),\quad \mathcal{L}_{,\theta}=(r\cos\theta,-r\sin\theta,0),\quad \mathcal{L}_{,z}=(0,0,1).$$

Prin urmare avem

$$g=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad g^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \sqrt{|g|}=r.$$

Avem succesiv,

$$\begin{aligned}\boxed{\Delta_g u} &= \frac{1}{r}\partial_i\left(rg^{ij}\partial_j u\right)\\ &= \frac{1}{r}\left(\partial_r(r\partial_r u)+\partial_\theta(r\frac{1}{r^2}\partial_\theta u)+\partial_z(r\partial_z u)\right)\\ &\boxed{=\partial_{rr}u+\frac{1}{r}\partial_r u+\frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}u+\partial_{zz}u}.\end{aligned}$$

Exercitiu 30. *Determinati formula Laplacianului pe un cilindru de raza 1 din $\mathbb{R}^3$.*

Demonstrație. Fie cilindrul

$$\mathcal{C}=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\quad|\ x_1^2+x_2^2=1\}.$$

Consideram parametrizarea lui $\mathcal{C}$ data de

$$x=\mathcal{L}(\theta,x_3):=(\sin\theta,\cos\theta,x_3),\quad \theta\in[0,2\pi),x_3\in\mathbb{R}.$$

Avem

$$\mathcal{L}_{,\theta}=(\cos\theta,-\sin\theta,x_3),\quad \mathcal{L}_{,x_3}=(0,0,1).$$

Se obtine

$$g=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad |g|=1.$$

Rezulta

$$\boxed{\Delta_{\mathcal{C}}u=\partial_{\theta\theta}u+\partial_{x_3x_3}u.}$$

Exercitiu 31. *Fie $R > 0$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie continua si periodica de perioada 2π. Folosind eventual metoda separarii variabilelor, gasiti o functie $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$, $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ pentru problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, \ \ in\ B_R(0) \\ \tilde{u}(R, \theta) = u(R\cos\theta, R\sin\theta) = f(\theta), \theta \in (0, 2\pi] \end{cases} \tag{152}$$

unde

$$\tilde{u}(r, \theta) := u(r\cos\theta, r\sin\theta)u(x) = u(x_1, x_2), \quad \forall r \in (0, R], \theta \in (0, 2\pi],$$

Demonstraţie. Mai intai cautam functii armonice in $B_R(0)$ de forma

$$u(x) = \tilde{u}(r, \theta) = A(r)B(\theta).$$

Utilizand formula Laplacianului in coordonate polare (146) rezulta ca ecuatia $\Delta u = 0$ este echivalenta cu

$$A''(r)B(\theta) + \frac{1}{r}A'(r)B(\theta) + \frac{1}{r^2}A(r)B''(\theta) = 0, \quad (r, \theta) \in (0, R) \times (0, 2\pi).$$

Impartind cu AB si inmultind cu r^2 obtinem

$$\frac{A''(r)}{A(r)}r^2 + r\frac{A'(r)}{A(r)} = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)}, \quad \forall r, \forall \theta. \tag{153}$$

Rezulta ca ambii termeni din (153) trebuie sa fie constante in raport cu r si θ. i.e.

$$\frac{A''(r)}{A(r)}r^2 + r\frac{A'(r)}{A(r)} = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall r, \forall \theta.$$

Datorita periodicitatii lui f impunem de asemenea ca B sa fie periodica de perioada 2π, i.e. $B(\theta) = B(\theta + 2\pi)$, pentru orice $\theta in [0, 2\pi]$. Prin urmare, B verifica problema cu conditii la limita periodice

$$\begin{cases} B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0, \quad \theta \in (0, 2\pi) \\ B(0) = B(2\pi) \\ B'(0) = B'(2\pi) \end{cases} \tag{154}$$

Facand discutie dupa cazurile $\lambda < 0$ si $\lambda = 0$ obtinem $B \equiv 0$ ceea ce nu convine (dorim sa obtinem solutii netriviale).

In schimb, daca $\lambda > 0$ atunci ecuatia caracteristica asociata ecuatiei (154) $\alpha^2 + \lambda = 0$ are radacinile $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ si deci forma generala a lui B este

$$B(\theta) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\theta), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Din conditiile de periodicitate pentru B rezulta

$$\begin{cases} (1 - \cos(2\pi\sqrt{\lambda}))C_1 + C_2 \sin(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \\ \sin(2\pi\sqrt{\lambda})C_1 + (1 - \cos(2\pi\sqrt{\lambda}))C_2 = 0 \end{cases} \tag{155}$$

Se obtin solutii (C_1, C_2) netriviale in (155) daca si numai daca $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Obtinem solutiile
$$B_k(\theta) = C_1 \sin(k\theta) + C_2 \cos(k\theta).$$
In continuare rezolvam ecuatia de tip Euler verificata de A: $r^2 A''(r) + rA'(r) - k^2 A(r) = 0$. Cu schimbarea de variabila $v(s) := A(e^s) = A(r)$ se obtine o ecuatie cu coeficienti constanti in v: $v''(s) - n^2 v(s) = 0$. Integrand pe v si apoi revenind la A se obtine forma generala

$$A_k(r) = D_1 r^k + D_2 r^{-k}.$$

Tinand cont de lipsa regularitatii in $r = 0$ a termenului r^{-k} alegem $D_2 = 0$. Prin urmare am obtinut solutii de forma

$$\tilde{u}_k(r, \theta) = r^k (C_k \cos(k\theta) + D_k \sin(k\theta)), k \in \mathbb{N}.$$

In ceea ce urmeaza vom cauta solutia problemei (152) sub forma unei serii de forma

$$u(x) = \tilde{u}(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} r^k (C_k \cos(k\theta) + D_k \sin(k\theta)).$$

Rescriem mai convenabil

$$\tilde{u}(r, \theta) = C_0 + \sum_{k \geq 1} r^k (C_k \cos(k\theta) + D_k \sin(k\theta)).$$

Coeficientii C_k, D_k ii vom determina in mod unic din conditia de frontiera $\tilde{u}(R, \theta) = f(\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ care este echivalenta cu

$$C_0 + \sum_{k \geq 1} R^k (C_k \cos(k\theta) + D_k \sin(k\theta)) = f(\theta). \tag{156}$$

Integrand de la 0 la 2π rezulta

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta.$$

Pentru a afla un coeficient oarecare C_m, $m \geq 1$ inmultim (105) cu $\cos(m\theta)$ si integram pe $(0, 2\pi)$. Tinand cont de ortogonalitatile

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \cos(m\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(k\theta) \sin(m\theta) d\theta = \pi \delta_{km},$$

obtinem $R^m = C_m \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta$. Mai precis,

$$C_m = \frac{1}{R^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta, \quad m \geq 0.$$

Inmultind apoi (156) cu $\sin(m\theta)$ si integrand obtinem coeficientii

$$D_m = \frac{1}{R^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(m\theta) d\theta, \quad m \geq 0.$$

Concluzionam ca solutia problemei (152) este

$$\tilde{u}(r,\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{k\geq 0} \left(\left(\frac{r}{R}\right)^k \int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(k\theta)d\theta \right) \cos(k\theta) + \frac{1}{\pi} \sum_{k\geq 1} \left(\left(\frac{r}{R}\right)^k \int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(k\theta)d\theta \right) \sin(k\theta). \tag{157}$$

Gradientul sferic si Laplacianul sferic. Operatorii gradientul sferic si Laplace-Beltrami (∇_σ, respectiv Δ_σ) sunt definiti dupa cum urmeaza. Pentru definirea celor doi operatori consideram mai intai, pentru simplitate, $f \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

1). Operatorul **gradientul Beltrami** $\nabla_\sigma : C^1(S^{n-1}) \to C(S^{n-1})^n$ se defineste prin

$$\nabla_\sigma f(\sigma) := \nabla \left(f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)\Big|_{x=\sigma}. \tag{158}$$

2). Operatorul **Laplacianul Beltrami** $\Delta_\sigma : C^2(S^{n-1}) \to C(S^{n-1})$ se defineste prin

$$\Delta_\sigma f(\sigma) = \Delta \left(f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)\Big|_{x=\sigma}. \tag{159}$$

Exercitiu 32. *Aratati ca gradientul uzual in coordonate sferice are forma*

$$\nabla u(x) = \sigma \partial_r [u(r\sigma)] + \frac{1}{r} \nabla_\sigma [u(r\sigma)], \tag{160}$$

unde $x = r\sigma$ *cu* $r = |x|$ *si* $\sigma = x/|x|$. *Operatorul* $\partial_r := \sigma \cdot \nabla$ *reprezinta derivata radiala.*

Rezolvare: Pentru $r > 0$ fixat avem $\nabla_\sigma [u(r\sigma)] = \nabla_x \left[u\left(r\frac{x}{|x|}\right)\right]\Big|_{x=\sigma}$. Pentru fiecare $i = 1, n$ rezulta succesiv

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u\left(r\frac{x}{|x|}\right)\right]\Bigg|_{x=\sigma} &= \frac{\partial u}{\partial x_k}\left(r\frac{x}{|x|}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(r\frac{x_k}{|x|}\right)\Bigg|_{x=\sigma} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_k}\left(r\frac{x}{|x|}\right) r \left(\frac{\delta_{ik}}{|x|} - \frac{x_k x_i}{|x|^3}\right)\Bigg|_{x=\sigma} \\
&= r\frac{\partial u}{\partial x_i}(r\sigma) - r\frac{\partial u}{\partial x_k}(r\sigma)\sigma_k \sigma_i
\end{aligned}$$

Apoi rezulta

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma[u(r\sigma)] &= r\frac{\partial u}{\partial x_i}(r\sigma)\mathbf{e_i} - r\frac{\partial u}{\partial x_k}(r\sigma)\sigma_k\sigma_i\mathbf{e_i} \\ &= r\nabla u(x) - r\sigma\frac{\partial u}{\partial x_k}(r\sigma)\sigma_k \\ &= r\nabla u(x) - r\sigma(\sigma\cdot\nabla u(x)) \\ &= r\nabla u(x) - r\sigma\partial_r[u(r\sigma)],\end{aligned}$$

de unde se obtine concluzia. □

3.9 Ecuatia caldurii

Ecuatia caldurii reprezinta prototipul ecuatiilor de tip parabolic.

In cele ce urmeaza consideram $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu marginit si $0 < T \leq \infty$ variabila temporala. Vom studia aici solutiile clasice $u = u(x,t)$ ale ecuatiei caldurii omogene (sau neomogene) in forma cea mai simpla

$$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0 \text{ (sau } f(x,t)) \text{ in } \Omega\times(0,T),$$

unde, in cazul ecuatiei neomogene, f este o functie continua data pe domeniul studiat.

Interpretare fizica. $u(x,t)$ reprezinta temperatura in punctul x la momentul t.

Pentru a identifica o unica solutie a ecuatiei se necesita impunerea unor conditii la limita. Conditiile la limita se impun pe *cilindrul parabolic* Ω_T cu *frontiera parabolica* Γ_T definite prin

$$\Omega_T := \Omega\times(0,T); \quad \Gamma_T := (\Omega\times\{t=0\})\cup\partial\Omega\times(0,T). \tag{161}$$

Avem cel putin 4 tipuri de conditii la limita:

a). *Conditii initiale:* $u(x,0) = g(x)$, $x\in\Omega$ (stim temperatura la momentul initial $t=0$; conditia este data pe *baza* frontierei Γ_T);
b). *Conditii de temperatura pe bord:* $u(x,t) = g(x,t)$, $(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$ (conditie de tip Dirichlet pe *peretii laterali* ai frontierei Γ_T);
c). *Conditii de flux:* $\frac{\partial u}{\partial\nu}(x,t) = g(x,t)$, $(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$ (conditie de tip Neumann pe *peretii laterali* ai frontierei Γ_T);
d). *Conditii de radiatie:* $\frac{\partial u}{\partial\nu}(x,t) - \alpha(x,t)u(x,t) = g(x,t)$, $(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$ (conditie de tip Robin pe *peretii laterali* ai frontierei Γ_T)

In toate aceste situatii functiile g si α sunt date cunoscute.

3.10 Nucleul caldurii

Vrem sa rezolvam problema *ideala* pentru ecuatia caldurii

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) := u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{162}$$

unde regularitatea datei initiala u_0 va fi specificata mai tarziu. Rezolvarea (162) este strans legata de o *solutie speciala* a ecuatiei caldurii

$$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \tag{163}$$

(fara nicio legatura cu conditia initiala la limita u_0 momentan), asa numita *solutie fundamentala* a ecuatiei caldurii sau *nucleul caldurii.*

Scaling. Observam ca o solutie $u(x,t)$ a ecuatiei (163) genereaza o infinitate de solutii de forma:

$$v_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{164}$$

Intr-adevar, din (164) si (163) avem

$$v_{\lambda,t} - \Delta_x v_\lambda(x,t) = \lambda^2 (u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta_x u(\lambda x, \lambda^2 t)) = 0.$$

Luand $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$ rezulta $v_\lambda(x,t) = u(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1) := f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. Astfel suntem motivati sa cautam solutii pentru (163) de forma $u(x,t) = t^\alpha f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ impunand conditia de conservare a masei in timp, adica $\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = 1$, pentru orice $t > 0$. Printr-o schimbare de variabila obtinem $\alpha = -n/2$ (a se vedea Ex. (33)).

Nucleul caldurii. Rezumand cele de mai sus, cautam solutii $u(x,t)$ pentru (163) de forma

$$u(x,t) = t^{-\frac{n}{2}} f\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{165}$$

Astfel de solutii se numesc *autosimilare* (i.e. solutii fractale).

Calcule directe ne conduc la urmatoarele

$$u_t(x,t) = t^{-\frac{n}{2}-1}\left[-\frac{n}{2} f\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) - \frac{|x|}{2\sqrt{t}} f'\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\right], \tag{166}$$

$$u_{x_i} = t^{-\frac{n+1}{2}} \frac{x_i}{|x|} f'\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right), \tag{167}$$

$$u_{x_i x_i} = t^{-\frac{n}{2}-1}\left[\frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}\sqrt{t} f'\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) + \frac{x_i^2}{|x|^2} f''\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\right] \tag{168}$$

and

$$\Delta_x u = t^{-\frac{n}{2}-1}\left[\frac{n-1}{|x|}\sqrt{t} f'\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) + f''\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\right] \tag{169}$$

Asadar, (163) este echivalenta cu

$$-\frac{n}{2}\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)-\left[\frac{|x|}{2\sqrt{t}}+(n-1)\frac{\sqrt{t}}{|x|}\right]f'\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)-f''\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)=0.$$

Cu notatia $y:=\frac{|x|}{\sqrt{t}}$ ecuatia de mai sus se rescrie

$$\frac{n}{2}yf(y)+\left(\frac{1}{2}y+(n-1)\frac{1}{y}\right)f'(y)+f''(y)=0.$$

Inmultind ecuatia cu y^{n-1} obtinem

$$\frac{n}{2}y^{n-1}f(y)+\frac{1}{2}y^nf'(y)+(n-1)y^{n-2}f'(y)+y^{n-1}f''(y)=0,$$

sau altfel spus (cupland primii doi termeni si apoi ultimii doi)

$$\frac{1}{2}\left(y^nf(y)\right)'+\left(y^{n-1}f'(y)\right)'=0.$$

Integrand rezulta

$$\frac{1}{2}y^nf(y)+y^{n-1}f'(y)=c_n,\quad \forall y\geq 0.$$

unde c_n este o constanta reala. Luam $c_n=0$ si obtinem ecuatia diferentiala de ordin I omogena

$$f'(y)=-\frac{1}{2}yf(y).$$

Prin urmare,

$$f(y)=Ce^{\int -\frac{y}{2}dy}=Ce^{-\frac{y^2}{4}},\quad c\in\mathbb{R},$$

ceea ce conduce la solutiile

$$u(x,t)=ct^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},\quad c\in\mathbb{R}.$$

Suntem acum in masura sa definim nucleul caldurii.

Definitie 17. *Functia* $K(\cot,\cdot):\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\mapsto\mathbb{R}$ *definita prin*

$$K(x,t):=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},\quad x\in\mathbb{R}^n, t>0, \tag{170}$$

se numeste nucleul caldurii sau solutia fundamentala a ecuatiei caldurii.

Nucleul caldurii verifica urmatoarele proprietati fundamentale

Propozitie 14. *Au loc urmatoarele proprietati*

i). $K\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$.

ii). K verifica ecuatia caldurii, i.e.

$$K_t(x,t) - \Delta_x K(x,t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0.$$

iii). K are masa 1 la orice moment de timp, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)dx = 1, \quad \forall t > 0.$$

iv). K prezinta o singularitare in $t = 0$ dar converge la asa numita distributie Dirac in punctul 0 atunci $t \searrow 0$. Matematic, acest lucru inseamna:

$$\lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{171}$$

3.11 Problema Cauchy in $\mathbb{R}^n$

Fie problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) := u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{172}$$

unde $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (i.e. u este continua si marginita).

Teorema 9. *Fie functia*

$$\begin{aligned} u(x,t) :&= (K(\cdot,t) * u_0)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)u_0(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty). \end{aligned} \tag{173}$$

Atunci aceasta functie este solutie pentru problema Cauchy (172). Mai precis are urmatoarele proprietati:

1). $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ (efectul regularizant al nucleului caldurii)
2). u verifica ecuatia caldurii, adica

$$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

3). $\lim_{t \searrow 0} u(x,t) = u_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Observatie 12. *Functia u definita prin convolutie in* (173) *nu este definita in $t = 0$ dar, conform* (3), *poate fi extinsa prin continuitate in $t = 0$ pana la u_0. Altfel spus, extensia prin continuitate in $t = 0$ a functiei u din* (173) *este solutia problemei* (172).

Demonstraţie (Demonstratia Teoremei 9). 1).Idee: Intr-o vecinatate V_{x_0,t_0} a fiecarui punct $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ derivatele partiale de orice ordin $D_x^\alpha(D_t^\beta)\left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right)$ si avem marginirile uniforme

$$\left|D_x^\alpha(D_t^\beta)\left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right)\right|\leq P_{\alpha,x_0,t_0}(y)e^{-C_1(t_0)|y|^2},\quad \forall(x,t)\in V_{x_0,t_0},\forall y\in\mathbb{R}^n,$$

unde $C_1(t_0)$ este o constanta pozitiva depinzand de t_0 iar $P_{\alpha,x_0,t_0}(y)$ este un polinom de ordin $|\alpha|$ in y cu coeficienti reali ce depind de x_0,t_0. Prin urmare, se poate aplica teorema convergentei dominate Lebesque si avem ca operatorul de derivare partiala comuta cu operatorul de integrare. Rezulta

$$D_x^\alpha(D_t^\beta)u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}D_x^\alpha(D_t^\beta)K(x-y,t)u_0(y)dy.$$

Deci $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$.

2). Similar ca mai sus

$$(\partial_t-\Delta_x)u=\int_{\mathbb{R}^n}[(\partial_t-\Delta_x)K(x-y,t)]u_0(y)dy=0,$$

tinand cont de Prop. 14, item ii).

3). Pentru $t>0$ mic (vrem sa facem $t\searrow 0$) estimam diferenta tinand cont de Prop. 14, item iii):

$$\begin{aligned}u(x,t)-u_0(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}K(x-y,t)u_0(y)dy-u_0(x)\\&=\int_{\mathbb{R}^n}K(x-y,t)(u_0(y)-u_0(x))dy.\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}|u(x,t)-u_0(x)|\leq&\\&=\int_{\mathbb{R}^n}K(x-y,t)|u_0(y)-u_0(x)|dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x)}\dots dy+\int_{B_\delta(x)}\dots dy\\&:=I_1+I_2,\end{aligned}$$

unde δ va fi ales convenabil in cele ce urmeaza. Pentru argumentarea limitei folosim un argument de tipul (ϵ,δ). Fie $\epsilon>0$ arbitrar fixat. Cum $u_0\in C(\mathbb{R}^n)$ rezulta ca exista $\delta_\epsilon>0$ a.i. pentru orice $y\in\mathbb{R}^n$ cu $|x-y|<\delta_\epsilon$ avem $|u_0(y)-u_0(x)|<\epsilon/2$. Prin urmare avem din Prop. 14, iii).

$$I_2\leq\frac{\epsilon}{2}\int_{B_{\delta_\epsilon}(x)}K(x-y,t)dy\leq\frac{\epsilon}{2}.$$

Pentru I_1 estimarile urmatoare sunt facute modulo o constanta care se poate schimba de la un pas la altul fara a afecta fondul demonstratiei. Avem

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{2}{t^{n/2}} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |u(y)| \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{\delta_\epsilon}(x)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\
(S.V.) &\simeq \frac{1}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{\delta_\epsilon}(0)} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz \\
&= t^{-n/2} \int_{\delta_\epsilon}^{\infty} \left(\int_{\partial B_s(0)} e^{-\frac{s^2}{4t}} d\sigma(z) \right) ds \\
&\simeq t^{-n/2} \int_{\delta_\epsilon}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} s^{n-1} ds \\
(S.V. \quad \frac{s}{2\sqrt{t}} = w) &\simeq \int_{\frac{\delta_\epsilon}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-w^2} w^{n-1} dw \to 0, \qquad \text{cand } t \searrow 0.
\end{aligned}$$

Deci exista $\gamma = \gamma_\epsilon > 0$ a.i. pentru orice $t \in (0, \gamma)$ avem $I_1 \leq \epsilon/2$. Concluzionam ca $\forall \epsilon > 0$ exista γ_ϵ a.i. pentru orice $t \in (0, \gamma_\epsilon)$ rezulta

$$I = I_1 + I_2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Deci $u(x,t)$ converge la $u_0(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ cand $t \searrow 0$. $\square$

3.12 Execitii cu ecuatia caldurii

Exercitiu 33. *1. Sa se arate ca*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

2. Sa se arate ca

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \sqrt{\pi}^n.$$

3. Fie functia $v : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ definita prin

$$v(x,t) := Ct^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sa se determine constanta C astfel incat

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x,t)dx = 1, \quad \forall t > 0.$$

Solutie: 1). Fie $I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$. Atunci, aplicand Fubini si trecand la coordonate polare obtinem succesiv

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \\
&= \pi \left(-e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{\infty} \right) \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

2). Avem din Fubini si din item 1) ca

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\
& \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2} dx_2 \ldots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2} dx_n \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n \\
&= \sqrt{\pi}^n.
\end{aligned}
$$

3). Din itemi 1)-2) combinat cu o schimbare de variabila obtinem

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} v(x,t) dx &= C t^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\
&= C t^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|}{y}|^2} (2\sqrt{t})^n dy \\
&= C 2^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|}{y}|^2} dy \\
&= C (4\pi)^{n/2}.
\end{aligned}
$$

Rezulta $C = (4\pi)^{-n/2}$.

Exercitiu 34. *Se considera ecuatia caldurii pe intervalul* $(0,1)$ *cu conditii Dirichlet omogene la frontiera*

$$
\begin{cases}
u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\
u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in (0,\infty) \\
u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,1)
\end{cases}
\tag{174}
$$

unde $u_0 \in C([0,1])$ *este data initiala.*

1. *Aratati ca daca u este o solutie clasica (i.e. toate derivatele implicate in ecuatie exista in mod uzual) pentru* (176) *atunci*

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \le \int_0^1 u_0^2(x)dx, \quad \forall t \in (0,\infty). \tag{175}$$

2. *Aratati ca problema* (176) *are cel putin o solutie clasica.*
3. *Gasiti solutia problemei* (176) *folosind metoda separarii variabilelor (devoltare in serii Fourier).*

Solutie: 1). Aplicam metoda energetica (inmultim ecuatia ecuatia (176) cu u si integram in raport cu variabila x). Integrand prin parti, obtinem succesiv

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 u_t(x,t)u(x,t)dx - \int_0^1 u_{xx}(x,t)u(x,t)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u^2(x,t)\right)dx - \underbrace{u_x(x,t)u(x,t)\Big|_{x=0}^{x=1}}_{=0} + \int_0^1 u_x^2(x,t)dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 u^2(x,t)dx\right) + \int_0^1 u_x^2(x,t)dx.
\end{aligned}$$

Rezulta

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 u^2(x,t)dx\right) = -2\int_0^1 u_x^2(x,t)dx \le 0.$$

Deci aplicatia $(0,\infty) \ni t \mapsto \int_0^1 u^2(x,t)dx$ este descrescatoare. Prin urmare rezulta concluzia:

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \le \int_0^1 u^2(x,0)dx = \int_0^1 u_0^2(x)dx.$$

1). Fie u_1, u_2 doua solutii. Atunci functia $U := u_1 - u_2$ verifica

$$\begin{cases} U_t(x,t) - U_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty) \\ U(0,t) = U(1,t) = 0, \quad t \in (0,\infty) \\ U(x,0) = 0, \quad x \in (0,1) \end{cases} \tag{176}$$

Aplicand punctul 3). lui U obtinem

$$0 \le \int_0^1 U^2(x,t)dx \le 0, \quad \forall t \ge 0.$$

Rezulta $U \equiv 0$ in $(0,1)\times(0,\infty)$, de unde obtinem unicitatea solutiei problemei (176)

2). Mai intai cautam solutiile in variabile separate de forma $u(x,t) = A(x)B(t)$ pentru

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,\infty) \end{cases} \tag{177}$$

(fara conditia initiala in (176)). Astfel avem de rezolvat

$$\begin{cases} A'(x)B(t) - A(x)B''(t) = 0, x \in (0,1), t \in (0,\infty) \\ A(0)B(t) = A(1)B(t) = 0, \quad t \in (0,\infty) \end{cases} \tag{178}$$

Impartind in (177) cu $A(x)B(t)$ rezulta cu necesitate

$$\begin{cases} \frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{B''(t)}{B(t)} = \lambda \text{ (constanta)}, x \in (0,1), t \in (0,\infty) \\ A(0) = A(1) = 0, \end{cases} \tag{179}$$

Analizam in prima faza problema (numita si de valori proprii) verificata de A:

$$\begin{cases} A'(x) - \lambda A(x) = 0 \; x \in (0,1) \\ A(0) = A(1) = 0, \end{cases}$$

fiind interesati de solutii netriviale. Ecuatia caracteristica asociata ecuatiei este $\mu^2 - \lambda = 0$. Analizam cele 3 cazuri posibile: $\lambda = 0, \lambda > 0$, $\lambda < 0$. Pentru $\lambda = 0$ se obtine rapid $A \equiv 0$ si nu convine. pentru $\lambda > 0$ obtinem $A(x) = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$ dar impunand conditiile la limita din (3.12) se obtine $c_1 = c_2 = 0$ situatie care ar implica din nou $A \equiv 0$, care nu convine.

In schimb, daca $\lambda < 0$ atunci $A(x) = c_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{-\lambda})$. Din conditiile la limita constantele c_1, c_2 satisfac sistemul

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Avem solutii netriviale daca si numai daca $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$. Prin urmare gasim valorile proprii $\lambda_k = -k^2\pi^2$ si functiile proprii asociate $A_k(x) = c_k \sin(k\pi x)$, $k \geq 1$. Astfel, ecuatia lui B devine $B'(t) + k^2\pi^2 B(t) = 0$, $t > 0$. Obtinem solutiile $B_k(t) = d_k e^{-k^2\pi^2 t}$. O prima concluzie ca e functiile

$$u_k(x,t) = c_k \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}, \quad k \geq 1,$$

sunt solutiile in variable separate pentru (177).

Mai departe cautam solutii pentru (174) de forma

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} u_k(x,t) = \sum_{k\geq 1} c_k \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t},$$

unde coeficientii Fourier c_k se determina din conditia initiala. Luand $t = 0$ in (174) obtinem

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{k\geq 1} c_k \sin(k\pi x). \tag{180}$$

Fie $k_0 \geq 1$ fixat. Pentru determinarea coeficientului c_{k_0} inmultim (180) cu $\sin(k_0\pi x)$ si integram pe $(0,1)$. Obtinem

$$\int_0^1 \sin(k_0\pi x)u_0(x)dx = \sum_{k\geq 1} c_k \underbrace{\int_0^1 \sin(k_0\pi x)\sin(k\pi x)dx}_{=\delta_{kk_0}}.$$

Tinand cont de ortogonalitatea familiei de functii $\{\sin(k\pi x)\}_{k\geq 1}$ obtinem

$$c_{k_0} = 2\int_0^1 \sin(k_0\pi x)u_0(x)dx.$$

Deci, solutia este data de seria Fourier

$$u(x,t) = 2\sum_{k\geq 1}\left(\int_0^1 \sin(k_0\pi x)u_0(x)dx\right)\sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}.$$

Exercitiu 35. *Se considera ecuatia caldurii pe intervalul* $(0,1)$ *cu constante disipativa* $a > 0$ *si conditii Dirichlet omogene la frontiera*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + au(x,t) = 0, (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1) \end{cases} \tag{181}$$

unde $u_0 \in C([0,1])$ *este data initiala.*

1. *Aratati ca daca u este o solutie clasica (i.e. toate derivatele implicate in ecuatie exista in mod uzual) pentru* (176) *atunci*

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \leq e^{-2at}\int_0^1 u_0^2(x)dx, \quad \forall t \in (0,\infty). \tag{182}$$

2. *Aratati ca problema* (176) *are cel putin o solutie clasica.*
3. *Folosind o trasformare de tipul* $v(x,t) := f(t)u(x,t)$ *gasiti o functie* f *astfel incat* v *sa verifice ecuatia caldurii* $v_t(x,t) - v_xx(x,t) = 0$ *pentru orice* $(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$.
4. *Tinand seama de expresia solutiei din Ex. 34 gasiti dezvoltarea in serie Fourier a solutiei problemei* (181).

Exercitiu 36. *Se considera ecuatia caldurii pe intervalul* $(0,1)$ *cu conditii periodice la frontiera*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in (-1,1) \times (0,\infty) \\ u(-1,t) = u(1,t), \qquad t \in (0,\infty) \\ u_x(-1,t) = u_x(1,t) \qquad t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,1) \end{cases} \tag{183}$$

unde $u_0 \in C([0,1])$ *este data initiala cu* $\int_{-1}^{1} u_0(x)dx = 0$.

1. *Aratati ca daca* u *este o solutie clasica (i.e. toate derivatele implicate in ecuatie exista in mod uzual) pentru* (183) *atunci*

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \le e^{-2\pi^2 t} \int_0^1 u_0^2(x)dx, \quad \forall t \in (0,\infty). \tag{184}$$

2. *Aratati ca problema* (183) *are cel putin o solutie clasica.*

Merita mentionat mai intai ca daca folosim metoda energetica (inmultim ecuatia (183) cu u si integram in x) se obtine inegalitatea mai slaba

$$\int_{-1}^1 u^2(x,t)dx \le \int_{-1}^1 u_0^2(x)dx, \quad \forall t \in (0,\infty).$$

Solutia este sa folosim metoda separarii variabilelor (metoda Fourier). De remarcat ca coeficientul π^2 este prima valoare proprie a Laplacianului Dirichlet 1-d.

Exercitiu 37. *Gasiti o solutie explicita a problemei Cauchy*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{185}$$

Rezolvare: Cum functia $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ rezulta din Teorema 9 ca functia definita prin

$$u(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \sin y dy, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

rezolva problema (185). Ne propunem sa calculam explicit intregrala din definitia lui u. Avem succesiv

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (\text{S.V.} z := \frac{x-y}{2\sqrt{t}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \sin(x - 2\sqrt{t}z)dz \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-z^2}\cos(2\sqrt{t}z)}_{\text{functie para}} dz - \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-z^2}\sin(2\sqrt{t}z)}_{\text{functie impara (deci integrala este 0)}} dz \\ &= \frac{2\sin x}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2}\cos(2\sqrt{t}z)dz \end{aligned} \tag{186}$$

Ultima integrala de mai sus se reduce la a calcula o integrala parametrica de tipul

$$I(a) := \int_0^\infty e^{-z^2} \cos(az)dz, \quad a \geq 0.$$

Prin derivare si apoi integrare prin parti se obtine

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^\infty e^{-z^2}(-z\sin(az))dz \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{-e^{-z^2}}{2}\right)' \sin(az)dz \\
&= \underbrace{\frac{-e^{-z^2}}{2}\sin(az)\Big|_{z=0}^{z=\infty}}_{=0} - \int_0^\infty \frac{-e^{-z^2}}{2} a\cos(az)dz \\
&= -\frac{a}{2} I(a).
\end{aligned}$$

Deci I verifica ecuatia diferentiala cu conditie initiala:

$$I'(a) + \frac{a}{2} I(a) = 0, a \geq 0; \quad I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Prin integrare rezulta $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{a^2}{4}}$. Intorcandu-ne in (186) rezulta (luand $a = 2\sqrt{t}$)

$$u(x,t) = \frac{2\sin x}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{2} e^{-t} = e^{-t}\sin x.$$

□

Observatie 13. *Independent de Teorema 9 solutia $u(x,t) = e^{-t}\sin x$ a problemei (185) se poate gasi prin cautarea ei in variabile separate de forma $u(x,t) := A(x)B(t)$ (Exercitiu!). Nu acelasi lucru se intampla pentru exercitiul 38 unde solutia problemei nu se scrie sub forma $u(x,t) := A(x)B(t)$ si prin urmare solutia exprimata cu ajutorul nucleului caldurii este mai greu de explicitat. Concret,*

Exercitiu 38. *Fie problema Cauchy*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \cos^2 x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{187}$$

1). Aratati ca functia

$$u(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \sin y dy, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

este egala cu

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)e^{-4t}\right).$$

2). Verificati direct ca functia obtinuta mai sus explicit este solutie pentru (187).

Indicatie: se scrie $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ si se parcurg aceeasi pasi ca la Exercitiul 37.

Exercitiu 39. *Fie problema Cauchy*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 2u_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \cos^2 x, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{188}$$

1). Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ fixat si onsideram functia $v(x,t) := u(x,\lambda t)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$. Gasiti λ astfel incat v sa verifice problema

$$\begin{cases} v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ v(x,0) = \cos^2 x, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{189}$$

2). Folosind eventual Ex. 38 gasiti o solutie u a problemei (188).

Exercitiu 40. *Fie problema Cauchy neomogena*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 2u_{xx}(x,t) = t, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \cos^2 x, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{190}$$

1). Fie o functie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ si consideram functia $v(x,t) := u(x,t) + f(t)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$. Gasiti o functie f astfel incat v sa verifice problema

$$\begin{cases} v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ v(x,0) = \cos^2 x, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{191}$$

2). Folosind eventual Ex. 38 gasiti o solutie u a problemei (190).

Exercitiu 41. *Fie problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \quad u(x,0) := u_0(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{192}$$

unde $u_0 \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Aratati ca functia

$$u(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

este solutie pentru (192) *si satisface in plus*

$$(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{9|x|^2}{16t}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le u(x,t) \le (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{16t}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ cu } |x| \ge 2R, \quad \forall t > 0, \tag{193}$$

unde $R > 0$ este o constanta pozitiva suficient de mare astfel incat $\mathrm{Supp} u_0 \subset B_R(0)$.

Solutie: Ne vom limita la a proba cota superioara din (193). Ideea este urmatoare: atunci cand $|x|$ e suficient de mare atunci cantitatile $|x-y|$ si $|x|$ sunt comparabile atata timp cat y se mentine intr-un compact. Mai precis pentru orice $y \in B_R(0)$ si $x \in B_{2R}^c(0)$ avem

$$\frac{|x|}{2} \leq |x| - |y| \leq |x-y| \leq |x| + |y| \leq \frac{3|x|}{2}. \tag{194}$$

Rezulta

$$\begin{aligned} u(x,t) &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{16t}} |u_0(y)| dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{16t}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)| dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{16t}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty). \end{aligned}$$

Cota inferioara decurge similar din (194).

3.13 Ecuatia undelor

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu marginit si $T > 0$ fixat. Ca in cazul ecuatiei caldurii consideram cilindrul parabolic $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$ cu frontiera parabolica $\Gamma_T := \partial\Omega \times (0,T) \cup \Omega \times \{t = 0\}$.

Ecuatia undelor este prototipul de ecuatie hiperbolica si descrie miscarea corzii vibrate in dimensiune $n = 1$ (coarda unei chitari), miscarea unei membrane in dimensiune $n = 2$ (membrana unei tobe muzicale), etc.

In forma cea mai simpla ecuatie undelor este descrisa de modelul matematic

$$u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0 \text{ (sau } f(x,t)) \text{ in } \Omega \times (0,T),$$

unde, in cazul ecuatiei neomogene, f este o functie continua data pe domeniul studiat.

Pentru a identifica o unica solutie a ecuatiei se necesita impunerea unor conditii la limita pe Γ_T.

Problema tipica la limita pentru ecuatia undelor este

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{195}$$

unde $f \in C(\Omega_T)$, u_0 si u_1 sunt functii date cu regularitate suficienta (vom vedea mai tarziu).

Conditia a doua din (195) reprezinta conditii omogene de tip Dirichlet pe frontiera, iar ultimele doua conditii sunt conditii initiale la momentul $t = 0$ (u_0 este pozitia initiala iar u_1 este impulsul initial).

Ecuatia undelor ne spune in fond ca forta exercitata (pe coarda sau membrana) este direct proportionala cu curbura.

3.14 Problema Cauchy pe $\mathbb{R}$. Formula lui D'Alambert

Un caz special il reprezinta ecuatia undelor pe $\mathbb{R}$ data de

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{196}$$

unde $f \in C^2(\mathbb{R})$ si $g \in C^1(\mathbb{R})$ sunt datele initiale.

Teorema 10 (Formula lui D'Alambert)**.** *Solutia problemei* (196) *este data de formula*

$$u(x,t) := \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds. \tag{197}$$

Rezolvare Pas 1. Putem privi operatorul D'Alambertian $\Box = \partial_{tt} - \partial_{xx}$ca o compunere de 2 operatori de tip transport, $\Box := (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)$. Definim $v(x,t) := (\partial_t + \partial_x)u(x,t)$. Atunci v verifica ecuatia de transport cu data initiala

$$\begin{cases} v_t(x,t) - v_x(x,t) = 0, \qquad\qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ v(x,0) = u_t(x,0) + u_x(x,0) = g(x) + f'(x), x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{198}$$

Ecuatia se rescrie $(v_x, v_t) \cdot (-1,1) = 0$ sau $\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{a}} = 0$ unde $\boldsymbol{a} = (-1,1)$, Deci v este constanta pe directia $\boldsymbol{a}$. Rezulta

$$v(x,t) = v(t\boldsymbol{a} + (x+t,0)) = v(x+t,0) = g(x+t) + f'(x+t)$$

Avem de rezolvat acum problema de transport neomogena in u:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u_x(x,t) = g(x+t) + f'(x+t), (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{199}$$

Pentru integrarea problemei (199) vom prezenta doua metode.

Metoda 1. Gasim mai intai curbele caracteristice asociate $(X(\tau,s), Y(\tau,s), Z(\tau,s))$ integrand sistemul

$$\begin{cases} X_\tau(\tau,s) = 1 \\ Y_\tau(\tau,s) = 1 \\ Z_\tau(\tau,s) = g(X_\tau(\tau,s) + Y_\tau(\tau,s)) + f'(X_\tau(\tau,s) + Y_\tau(\tau,s)) \\ X(0,s) = s \\ Y(0,s) = 0 \\ Z(0,s) = f(s) \end{cases} \tag{200}$$

Imediat se obtine

$$X(\tau,s) = s + \tau, \quad Y(\tau,s) = \tau,$$

de unde revenind la variabile initiale avem

$$s = x - t, \tau = t.$$

Prin urmare Z verifica ecuatia diferentiala cu conditie initiala

$$Z_\tau(\tau, s) = g(s+2\tau) + f'(s+2\tau); \quad Z(0,s) = f(s).$$

Integrand de la 0 la τ rezulta succesiv

$$\begin{aligned} Z(\tau, s) &= Z(0,s) + \int_0^\tau (g(s+2\xi) + f'(s+2\xi))d\xi \\ (S.V\ \ s+2\xi = \alpha) &= f(s) + \frac{1}{2}\int_s^{2\tau+s} g(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2} f(s+2\tau)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\tau}. \end{aligned}$$

Rezulta, intorcandu-ne la variabilele initiale

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}(f(x+t) - f(x-t)) \\ &= \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds. \end{aligned}$$

si demonstratia este incheiata.

Metoda 2. Pentru (x,t) fixat consideram o functie depinzand de un parametru s, definita prin

$$\omega(s) := u(x+s, t+s).$$

Asadar stim ca $\omega(0) = u(x,t)$ si $\omega(-t) = f(x-t)$. Atunci observam ca ω verifica ecuatia diferentiala in variabila s data de

$$\omega'(s) = g(x+t+2s) + f'(x+t+2s).$$

Integrand aceasta ecuatie de la 0 la s ajungem la aceeasi concluzie de la la metoda 1 (faceti detaliile!).

3.15 Exercitii cu ecuatii de tip "unde"

Exercitiu 42. *Sa se arate ca problema*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,t) = g(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{201}$$

are cel mult o solutie clasica.

Rezolvare: Fie u_1, u_2 doua solutii pentru (201) si consideram $U := u_1 - u_2$. Atunci U verifica:

$$\begin{cases} U_{tt}(x,t) - \Delta_x U(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega_T \\ U(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ U(x,0) = 0, & x \in \Omega \\ U_t(x,0) = 0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{202}$$

Vrem sa aratam ca $U \equiv 0$. Pentru asta vom aplica metoda energetica. In acest caz, inmultim ecuatia (202) cu U_t si integram in variabila x. Atfel, integrand prin parti obtinem

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} (U_{tt}(x,t) - \Delta_x U(x,t)) U_t(x,t) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(U_t^2(x,t) \right) dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial U}{\partial \nu}(x,t) \underbrace{U_t(x,t)}_{=0} d\sigma + \int_{\Omega} \nabla U(x,t) \nabla U_t(x,t) dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} U_t^2(x,t) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla_x U(x,t)|^2 dx \\
&= E'(t),
\end{aligned}$$

unde E reprezinta energia sitemului:

$$E(t) := \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} U_t^2(x,t) dx + \int_{\Omega} |\nabla_x U(x,t)|^2 dx \right).$$

Cum $E'(t) = 0, \forall t \geq 0$ rezulta ca

$$E(t) = E(0) = \int_{\Omega} \left(U_t^2(x,0) + |\nabla_x U(x,0)|^2 \right) dx = 0,$$

unde ultima egalitate rezulta din conditiile initiale din (202).

Deci $E(t) = 0$ pentru orice $t \geq 0$. Prin urmare,

$$U_t(x,t) = U_{x_i}(x,t) = 0, \quad \forall i = 1,n, \quad \forall (x,t) \in \Omega_T,$$

ceea ce implica $U(x,t) \equiv ct$ in Ω_T. Impunand continuitate pana la frontiera rezulta $U \equiv 0$ in $\Omega_T \cup \Gamma_T$ si unicitatea este probata.

Exercitiu 43.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = t, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{203}$$

1. Determinati o functie $h = h(t)$ astfel incat functia $v(x,t) := u(x,t) + h(t)$ sa verifice ecuatia undelor $v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0$ in $\mathbb{R} \times (0,\infty)$.
2. Gasiti functia u solutie pentru (203).

Indicatie: Ecuatia $v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0$ este echivalenta cu $h''(t) = -t$ de unde avem $h(t) = -t^3/6$.

Exercitiu 44. *Sa se integreze problema*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - 2u_{tx}(x,t) - 3u_{xx} = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{204}$$

Rezolvare: Gandind in variabila t putem "asocia" o ecuatie caractieristica de forma $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ cu radacinile $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. In felul acesta observam ca putem scrie operatorul diferential din ecuatia (204) ca o compunere de doi operatori de transport. Mai precis,

$$u_{tt} - 2u_{tx} - 3u_{xx} = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - 3\partial_x)u.$$

Intr-adevar, tinand cont de teorema lui Schwarz derivatele partiale mixte de ordinul doi comuta si avem $u_{tx}(x,t) = u_{xt}(x,t)$. Prin urmare

$$(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - 3\partial_x)u = u_{tt} - 3u_{xt} + u_{tx} - 3u_{xx} = u_{tt} - 2u_{tx} - 3u_{xx}.$$

In continuare definim functia $v(x,t) := (\partial_t - 3\partial_x)u(x,t)$. Atunci v verifica ecuatia de transport omogena

$$\begin{cases} v_t(x,t) + v_x(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ v(x,0) = u_t(x,0) - 3u_x(x,0) = g(x) - 3f'(x), x \in (0,1) \end{cases} \tag{205}$$

De unde rezulta ca v este constanta pe directia $\boldsymbol{a} = (1,1)$. Atunci avem

$$v(x,t) = v(t(1,1) + (x-t,0)) = v(x-t,0) = g(x-t) - 3f'(x-t).$$

Intorcandu-ne la u observam ca u verifica o problema Cauchy pentru o ecuatie de transport neomogena:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 3u_x(x,y) = g(x-t) - 3f'(x-t), (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{206}$$

Pentru (x,t) fixati consideram functia $s \mapsto w(s)$ definita prin

$$w(s) := u(x-3s, t+s).$$

Conform (206) rezulta ca w verifica ecuatia diferentiala de ordin I

$$\begin{aligned} w'(s) &= -3u_x(x-3s,t+s) + u_t(x-3s,t+s) \\ &= g(x-t-4s) - 3f'(x-t-4s). \end{aligned}$$

Tinand cont ca $w(0) = u(x,t)$ si $w(-t) = f(x+3t)$ integrand mai sus pe intervalul $(-t,0)$ se obtine

$$\underbrace{w(0) - w(-t)}_{u(x,t) - f(x+3t)} = \int_{-t}^{0} g(x-t-4s)ds - 3\int_{-t}^{0} f'(x-t-4s)ds.$$

Echivalent, dupa schimbarea de variabila $x - t - 4s = \tau$, deducem

$$u(x,t) = f(x+3t) + \frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+3t} g(\tau)d\tau - \frac{3}{4}\int_{x-t}^{x+3t} f'(\tau)d\tau.$$
$$= \frac{f(x+3t)+3f(x-t)}{4} + \frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+3t} g(\tau)d\tau.$$

si solutia este gasita. □

Observatie 14. *Pentru determinarea solutiei ecuatiei undelor pe un interval cu conditii Dirichlet/periodice la frontiera, folosind serii Fourier, se poate consulta cap. 5 si 6 din cartea lui Strauss [8]*

4 Spatii Sobolev si solutii slabe (in pregatire)

A se consulta de exemplu cap. VIII si IX din cartea lui Brezis [1].

5 Subiecte tip examen

Sa se integreze urmatoarele probleme Cauchy:

Exercitiu 45.

$$\begin{cases} u_y + uu_x = 0, \;\; u = u(x,y) \\ u(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{207}$$

unde h e o functie data de clasa C^1.

Solutie implicita: $u(x,y) = h(x - yu(x,y))$. Proba: prin derivare se obtine $(uu_x + u_y)(1 + yh'(x-yu)) = 0$. In jurul lui $y = 0$ nu putem avea $1 + yh'(x-yu) = 0$, altfel $h'(x) = \infty$. Prin urmare rezulta $uu_x + u_y = 0$ local in jurul oricarui punct $(x_0, 0)$.

Exercitiu 46.

$$\begin{cases} u_y - xuu_x = 0, u = u(x,y) \\ u(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{208}$$

unde h e o functie data de clasa C^1.

Solutie implicita: $u = h\left(xe^{yu}\right)$. Proba: prin derivare se obtine $(u_y - xuu_x)(1 - h'(xe^{yu})e^{yu}) = 0$. Daca $1 - h'(xe^{yu})e^{yu} = 0$ atunci din conditia in $y = 0$ obtinem $h'(x) = 1$. Rezulta $1 = e^{yu}$ ceea ce ar implica $u \equiv 0$, in contradictie cu $h \not\equiv 0$. Prin urmare, obtinem ca $u_y - xuu_x = 0$.

Exercitiu 47.

$$\begin{cases} xu_y - yu_x = u, u = u(x,y) \\ u(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{209}$$

unde h e o functie data de clasa C^1.

Solutie explicita: $u(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})e^{arctg(y/x)}$ cand $x > 0$; $u(x,y) = h(-\sqrt{x^2+y^2})e^{arctg(y/x)}$ cand $x < 0$. Nu exista solutie locala in jurul punctului $(0,0)$ (Jacobianul transformarii $(s,t) \mapsto (x(s,t) = s\sin t, y(s,t) = s\cos t)$ este $J = s$ care e diferit de zero daca si numai daca $(x,y) \neq (0,0)$).

Exercitiu 48.

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = u^2, u = u(x,y) \\ u(x,1) = h(x), \end{cases} \tag{210}$$

unde h e o functie data de clasa C^1.

Indicatie: Se cauta curbele caracteristice care trec la momentul initial $t = 0$ prin curba $(s, 1, h(s))$. Solutie explicita: se obtine $u(x,y) = \frac{h(x/y)}{1-(\ln y)h(x/y)}$ local in jurul tuturor punctelor $(x_0, 1)$.

Exercitiu 49.

$$\begin{cases} xu_x - yu_y = 0, \ \ u = u(x,y) \\ u(x, 2x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{211}$$

Indicatie: Se obtine solutie explicita $u(x,y) = h(\sqrt{xy/2})$ daca $x, y > 0$, respectiv $u(x,y) = h(-\sqrt{xy/2})$ daca $x, y < 0$. Avem solutie in jurul oricarui punct $(x_0, 2x_0) \neq (0,0)$ (Jacobianul $J(\frac{x,y}{t,s}) = 4s$).

Exercitiu 50.

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + u_z = u, u = u(x,y,z) \\ u(x,y,0) = h(x,y), \end{cases} \tag{212}$$

unde h e o functie data de clasa C^1.

Solutie explicita: $u(x,y,z) = e^z h(xe^{-z}, ye^{-z})$.

Exercitiu 51. *Consideram ecuatia de tip unde*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + u_{tx} - 2u_{xx}(x,t) = 0, x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\ u(x,0) = e^x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = e^{-x}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{213}$$

Rezolvati problema (234) *reducand-o la 2 ecuatii de tranport (prima omogena, a doua neomogena).*

Exercitiu 52. *Consideram ecuatia de tip caldura*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + x = 0, x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{214}$$

(i). Gasiti functia ϕ astfel astfel incat $v(x,t) := u(x,t) + \phi(x)$ sa verifice ecuatia caldurii $v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

(ii). Scrieti formula solutiei problemei (245) *cu ajutorul nucleului caldurii.*

(iii). Calculati $u(0, \frac{1}{2})$.

Exercitiu 53 $(\star)$**.** *Fie* $B_R(0)$ *bila de raza* R *in* $\mathbb{R}^3$ *iar* $\partial B_R(0)$ *frontiera sa. Consideram functia* $G : B_R(0) \times \partial B_R(0) \to \mathbb{R}$ *definita prin*

$$G(x, y) := \frac{R}{|x|} E(x^\star - y) - E(x - y),$$

unde E *este solutia fundamentala a ecuatiei lui Laplace in* $\mathbb{R}^3$ *iar* $x* := \frac{x}{|x|^2} R^2$. *Aratati ca*

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) = \frac{|x|^2 - R^2}{R\omega_3 |x - y|^3},$$

unde ω_3 *este aria sferei de raza 1 din* $\mathbb{R}^3$.

Exercitiu 54. *(i). Pe domeniul maxim de definitie* D *consideram functia*

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \arctan\left(\ln(x 2^y)\right).$$

Calculati $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

(ii). Folosind eventual formula Laplacianului pentru functii radiale calculati $\Delta f(x)$ *pentru*

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1 + |x|^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^4.$$

Exercitiu 55. *(i). Determinati p numar real astfel incat*

$$\cos(|x|)|x|^p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3), \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

(ii). Determinati p numar real astfel incat

$$|x|^p \in L^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_1(0)}), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

unde $B_1(0)$ *reprezinta bila de raza 1 centrata in origine din* $\mathbb{R}^3$.

Exercitiu 56. *(i). Pe domeniul maxim de definitie* D *consideram functia*

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \arctan\left(3^{x \sin(y)}\right).$$

Calculati $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

(ii). Folosind formula Laplacianului pentru functii radiale calculati $\Delta f(x)$ *pentru*

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1 - |x|}\right), \quad x \in \mathbb{R}^4, \quad |x| < 1.$$

Exercitiu 57.

$$\begin{cases} u_x(x, y) + 2u_y(x, y) = 3u(x, y), \\ u(x, 0) = \cos(x). \end{cases} \tag{215}$$

Exercitiu 58. *Fie* $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2+y^2 < 4\}$ *si* $\partial\Omega$ *frontiera lui* Ω. *Fie problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 2\sin x, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{216}$$

i). *Gasiti constanta* C *astfel incat functia* $v(x,y) = C(x^2+y^2)$ *sa verifice* $-\Delta v = 2$ *in* Ω.

ii). *Folosind eventual principiul de maxim pentru functii armonice sa se determine solutia problemei*

$$\begin{cases} -\Delta v(x,y) = 2, & (x,y) \in \Omega \\ v(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{217}$$

iii). *Folosind eventual principiul de maxim pentru functii sub/super armonice sa se arate ca solutia problemei* (242) *verifica*

$$|u(x,y)| \le 2, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{218}$$

Exercitiu 59. *(i). Aratati prin calcul direct ca functia*

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \cos(3x)\cosh(3y)$$

verifica ecuatia lui Laplace $\Delta u(x,y) = 0$ *in* $\mathbb{R}^2$.

(ii). Calculati $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *pentru functia*

$$f(x,y) = y^{y\cos(xy)}$$

pe domeniul maxim de definitie.

Exercitiu 60. *Integrati problema Cauchy*

$$\begin{cases} x u_x(x,y) - y^2 u_y(x,y) = 1, \\ u(x,0) = \cos(x). \end{cases} \tag{219}$$

Exercitiu 61. *(i). Determinati p numar real astfel incat*

$$\frac{|x|^p}{\sin^2(|x|) + |x|^3} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3), \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

(ii). Determinati p numar real astfel incat

$$\frac{|x|^p}{\sin^2(|x|) + |x|^3} \in L^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_1(0)}), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

unde $B_1(0)$ *reprezinta bila de raza 1 centrata in origine din* $\mathbb{R}^3$.

Exercitiu 62. *Fie functia* $f(x) = |x|^{\frac{5}{2}} - x_4^2, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$.

i). *Calculati* $x \cdot \nabla f$ *si* Δf *intr-un punct oarecare din domeniul de definitie si apoi in punctul (1,1,1,1).*

ii). *Calculati* $\operatorname{div}(x|x|^3)$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
iii). *Dati exemplu de functie u strict sub-armonica* ($-\Delta u < 0$) *in* $\mathbb{R}^2$ *care se anuleaza pe dreapta* $x + y = 0$.
iv). *Aratati ca*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} ⨍_{B_\epsilon(x)} \varphi(y)dy = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

pentru orice $\varphi \in C(\mathbb{R}^N)$, *unde* $⨍$ *reprezinta integrala medie.*
Fie E *solutia fundamentala a Laplacianului in* $\mathbb{R}^N$.
v). *Aratati ca* $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ *(N=2).*
vi). *Aratati ca* $\frac{\partial E}{\partial x_1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^4)$ *(N=4).*
vii). *Aratati ca* $\frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *(N=3).*

Exercitiu 63. *Se considera problema*

$$\begin{cases} yu_x(x,y) + xu_y(x,y) = 0, (x,y) \in \Omega := \{(x,y) \mid x > |y|\} \\ u(x,0) = e^{-x}, \qquad\qquad\qquad x > 0. \end{cases} \tag{220}$$

i). *Consideram sistemul de ecuatii diferentiale:*

$$\begin{cases} x'(s) = y(s) \\ y'(s) = x(s), s \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{221}$$

Probati ca $x(s), y(s)$ *verifica ecuatia diferentiala*

$$z''(s) - z(s) = 0. \tag{222}$$

ii). *Scrieti solutia generala a ecuatiei* (230).
iii). *Determinati solutia generala a sistemului* (229).
iv). *Determinati curbele caracteristice ale problemei* (245).
v). *Determinati o solutie/ solutia de clasa* C^1 *a problemei* (245).

Exercitiu 64. *Fie* $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 4\}$ *si* $\partial\Omega$ *frontiera lui* Ω. *Fie problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 4\arctan x, (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, \qquad\qquad (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{223}$$

i). *Aratati ca problema* (242) *are cel mult o solutie* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.
ii). *Aratati ca solutia problemei* (242) *este impara in raport cu variabila* x.
iii). *Aratati ca* $u(0,0) = 0$.
iv). *Gasiti constanta* C *astfel incat functia* $v(x,y) = C(x^2 + y^2)$ *sa verifice* $-\Delta v = 2\pi$ *in* Ω.
v). *Folosind principiul de maxim pentru functii armonice sa se determine solutia problemei*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 2\pi, (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{224}$$

vi). Folosind eventual principiul de maxim pentru functii sub/super armonice sa se arate ca solutia problemei (242) *verifica*

$$|u(x,y)| \leq 2\pi, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{225}$$

vii). Determinati o cota superioara mai mica ca 2π *in ineqalitatea* (225).

Exercitiu 65. *Pe bila* $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$, *cu* $R > 0$ *fixat, consideram problema*

$$\begin{cases} \Delta\varphi(y) = 0, & y \in B_R(0) \\ \varphi(y) = \frac{1}{2\pi}\ln R, & y \in \partial B_R(0). \end{cases} \tag{226}$$

i). Justificati ca (246) *are solutie unica si determinati solutia.*
Pentru $x \in B_R(0) \setminus \{0\}$ *fixat, consideram problema Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta\varphi_x(y) = 0, & y \in B_R(0) \\ \varphi_x(y) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-y|, & y \in \partial B_R(0). \end{cases} \tag{227}$$

ii). Determinati functia $x \mapsto \alpha(x)$ *astfel incat solutia problemei* (247) *sa fie*

$$\phi_x(y) = \alpha(x) + E(x^\star - y), \quad x^\star := \frac{R^2}{|x|^2}x,$$

unde E *este solutia fundamentala a Laplacianului in* $\mathbb{R}^2$.

iii). Aratati ca

$$\varphi_x(y) = \varphi_y(x), \quad \forall x, y \in B_R(0), \quad x \neq y,$$

unde prin φ_0 *intelegem solutia problemei* (246).
Se considera functia Green

$$G(x,y) := \varphi_x(y) - E(x-y), \quad \forall x \in B_R(0),\ \forall y \in \overline{B_R(0)}, \quad x \neq y.$$

iv). Aratati ca

$$G(x,y) > 0, \quad \forall x, y \in B_R(0), \quad x \neq y.$$

v). Calculati

$$\frac{\partial\varphi_x(y)}{\partial\nu_y}, \quad y \in \partial B_R(0),$$

unde $\partial/\partial\nu_y$ *desemneaza derivata normala in punctul* y.

Exercitiu 66. *Fie functia* $f(x) = |x|^{\frac{7}{2}} - x_1x_2, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

i). Calculati $x \cdot \nabla f$ *si* Δf *intr-un punct oarecare din domeniul de definitie si apoi in punctul (1,1,1).*

ii). Calculati $\mathrm{div}(x|x|^4), \quad x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$.

iii). Dati exemplu de doua functii armonice in $\mathbb{R}^2$ *care se anuleaza pe dreapta* $x - 2y = 0$.

iv). *Aratati ca*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \fint_{B_\epsilon(x)} \varphi(y)dy = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

pentru orice $\varphi \in C(\mathbb{R}^N)$, *unde* $\fint$ *reprezinta integrala medie.*
Fie E *solutia fundamentala a Laplacianului in* $\mathbb{R}^N$.

v). *Aratati ca* $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *(N=3).*
vi). *Aratati ca* $\frac{\partial E}{\partial x_1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *(N=3).*
vii). *Aratati ca* $\frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *(N=3).*

Exercitiu 67. *Se considera problema*

$$\begin{cases} yu_x(x,y) + xu_y(x,y) = 0, (x,y) \in \Omega := \{(x,y) \mid -x > |y|\} \\ u(x,0) = e^x, \qquad\qquad\qquad x < 0. \end{cases} \tag{228}$$

i). *Consideram sistemul de ecuatii diferentiale:*

$$\begin{cases} x'(s) = y(s) \\ y'(s) = x(s), s \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{229}$$

Probati ca $x(s), y(s)$ *verifica ecuatia diferentiala*

$$z''(s) - z(s) = 0. \tag{230}$$

ii). *Scrieti solutia generala a ecuatiei* (230).
iii). *Determinati solutia generala a sistemului* (229).
iv). *Determinati curbele caracteristice ale problemei* (245).
v). *Determinati o solutie/ solutia de clasa* C^1 *a problemei* (245).

Exercitiu 68. *Fie* $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad |y| < 1\}$ *si* $\partial\Omega$ *frontiera lui* Ω. *Fie problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 1, (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{231}$$

i). *Gasiti constanta* C *astfel incat functia* $v(x,y) = Cy^2$ *sa verifice* $-\Delta v = 1$ *in* Ω.
ii). *Aratati ca problema* (242) *are cel mult o solutie* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *(***HINT:** *Folositi principiul tare de maxim pentru functii armonice pe domenii marginite pentru a arata ca unica functie armonica care se anuleaza pe* $\partial\Omega$ *este functia identic zero).*
iii). *Scrieti ecuatia satisfacuta de* $u - v$.
iv). *Determinati solutia problemei* (242).

Exercitiu 69. *Fie* $\epsilon \in (0,1)$ *si* $\Omega_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \epsilon < |x| < 1\}$. *Consideram problema Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta_\epsilon u = 1, \;\; in\ \Omega_\epsilon \\ \\ u_\epsilon = 0, \qquad pe\ \partial\Omega_\epsilon. \end{cases} \tag{232}$$

i). *Aratati ca problema* (236) *are cel mult o solutie* $C^2(\Omega_\epsilon) \cap C(\overline{\Omega_\epsilon})$.

ii). *Rescrieti problema* (236) *pentru o functie radiala* $g_\epsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *astfel incat* $u_\epsilon(x) = g_\epsilon(|x|)$.

iii). *Rezolvati problema corespunzatoare lui* g_ϵ.

iv). *Determinati solutia* u_ϵ *a problemei* (236).

v). *Fie* $\tilde{u}_\epsilon : B_1(0) \to \mathbb{R}$ *extinderea lui* u_ϵ *cu 0 pe bila* $B_\epsilon(0)$. *Calculati limita punctuala*

$$\tilde{u}(x) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{u}_\epsilon(x), \quad \forall x \in B_1(0).$$

Fie problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & in\ B_1(0) \\ u = 0, & pe\ \partial B_1(0). \end{cases} \tag{233}$$

vi). *Rescrieti problema* (237) *pentru o functie radiala* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *astfel incat* $u(x) = g(|x|)$.

vii). *Rezolvati problema corespunzatoare lui* g.

viii). *Determinati solutia* u *a problemei* (237).

ix). *Comparati punctual* u *si* $\tilde{u}$ *precum si normele lor* L^p, $1 \le p \le \infty$.

Exercitiu 70. *Fie functia* $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}} - x_1, \quad x = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$.

i). *Calculati* $x \cdot \nabla f$ *si* Δf *intr-un punct oarecare din domeniul de definitie si apoi in punctul (1,1,1,1,1).*

ii). *Calculati* $\mathrm{div}(x|x|^3), \quad x \in \mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$.

iii). *Dati exemplu de functie strict super-armonica* ($-\Delta u > 0$) *in* $\mathbb{R}^2$ *care se anuleaza pe dreapta* $x + 2y = 0$.

iv). *Aratati ca*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} ⨍_{B_\epsilon(x)} \varphi(y)dy = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

pentru orice $\varphi \in C(\mathbb{R}^N)$, *unde* $⨍$ *reprezinta integrala medie.*
Fie E *solutia fundamentala a Laplacianului in* $\mathbb{R}^N$.

v). *Aratati ca* $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *(N=3).*

vi). *Aratati ca* $\frac{\partial E}{\partial x_1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ *(N=2).*

vii). *Aratati ca* $\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *(N=3).*

Exercitiu 71. *Se considera problema*

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2}u_x(x,y) + u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in (-1,1) \times \mathbb{R} \\ u(0,y) = y, & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{234}$$

i). *Scrieti ecuatiile diferentiale verificate de curbele caracteristice* $(x(s), y(s))$ *ale ecuatiei* (234).

ii). *Integrati ecuatiile curbelor caracteristice.*

iii). *Integrati ecuatia din* (234).

iv). *Studiati unicitatea solutiei de clasa* C^1 *pentru problema* (234).

v). Determinati o solutie/unica solutie de clasa C^1 *a problemei* (234).

Exercitiu 72. *Se considera problema la limita*

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, (x,y) \in \Omega := (0,1) \times (0,1) \\ u(x,0) = 0, \qquad\qquad\qquad x \in (0,1) \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \qquad y \in (0,1) \\ u(x,1) = \sin(2\pi x), \qquad\quad x \in (0,1), \end{cases} \tag{235}$$

i). Aratati ca (235) *are cel mult o solutie in* $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

ii). Calculati (fara a cunoaste explicit solutia problemei (235)*)* $\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$, $\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$.

iii). Determinati functiile de forma $u(x,y) = A(x)B(y)$ *care verifica conditiile omogene ale sistemului* (235) *(cele 4 relatii egale cu zero).*

iv). Din familia de solutii determinata la punctul anterior determinati pe cea care rezolva si ultima conditie (neomogena) a sistemului (235) *si implicit este solutia problemei* (235).

Exercitiu 73. *(3 p) Fie* $\epsilon \in (0,1)$ *si* $\Omega_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \epsilon < |x| < 1\}$. *Consideram problema Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = |x|, \ \ in\ \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon = 0, \qquad\quad pe\ \partial\Omega_\epsilon. \end{cases} \tag{236}$$

i). Aratati ca problema (236) *are cel mult o solutie* $C^2(\Omega_\epsilon) \cap C(\overline{\Omega_\epsilon})$.

ii). Aratati ca o eventuala solutie a problemei (236) *este strict pozitiva in* Ω_ϵ.

iii). Rescrieti problema (236) *pentru o functie radiala* $g_\epsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *astfel incat* $u_\epsilon(x) = g_\epsilon(|x|)$.

iv). Rezolvati problema corespunzatoare lui g_ϵ.

v). Determinati solutia u_ϵ *a problemei* (236).

vi). Fie $\tilde{u}_\epsilon : B_1(0) \to \mathbb{R}$ *extinderea lui* u_ϵ *cu 0 pe bila* $B_\epsilon(0)$. *Calculati limita punctuala*

$$\tilde{u}(x) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{u}_\epsilon(x), \quad \forall x \in B_1(0).$$

Fie problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|, \ \ in\ B_1(0) \\ u = 0, \qquad\quad pe\ \partial B_1(0). \end{cases} \tag{237}$$

vii). Rescrieti problema (237) *pentru o functie radiala* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *astfel incat* $u(x) = g(|x|)$.

viii). Rezolvati problema corespunzatoare lui g.

ix). Determinati solutia u *a problemei* (237).

x). Comparati punctual u *si* $\tilde{u}$ *precum si normele lor* L^p, $1 \le p \le \infty$.

Exercitiu 74. *i). Sa se scrie formula operatorului Laplacian* Δ *pentru functii cu simetrie radiala (fara demonstratie).*

ii). *Sa se calculeze* Δu *pentru urmatoarele functii:*

– $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x) = \ln(1 + |x|^2)$

– $u : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad u(x) = 1/\sqrt{|x|}$

– $\star\ u : \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\} \to \mathbb{R}, \quad u(x) = x_3|x|^{-3}$

Care dintre functiile de mai sus este functie armonica pe domeniul sau de definitie ?

iii). *Aratati ca functia* $E(x) = \ln(2/|x|)$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, *este integrabila pe bila unitate centrata in origine. Ce putem spune despre integrabilitatea derivatelor partiale de ordin intai ale lui* E *?*

Exercitiu 75. *Folosind eventual metoda curbelor caracteristice sa se gaseasca solutia problemei de tip "transport"*

$$\begin{cases} u_x(x,y) + u_y(x,y) + u(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{238}$$

Exercitiu 76. *Consideram urmatoarea problema de tip "unde"*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + 2u_{xt}(x,t) - 8u_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{239}$$

i). *Aratati ca pentru orice functie* w *de clasa* C^2 *avem*

$$w_{tt}(x,t) + 2w_{xt}(x,t) - 8w_{xx}(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial}{\partial x}\right) w.$$

ii). *Fie* u *solutia ecuatiei* (246) *si notam*

$$v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} + 4\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Gasiti ecuatia satisfacuta de v.

iii). *Gasiti forma generala a functiei* v.

iv). *Cu* v *determinat anterior rezolvati ecuatia*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = v(x,t)$$

si scrieti forma generala a unei astfel de solutii u.

v). *Folosind conditiile asupra lui* u *la* $t = 0$ *din enunt obtineti solutia* u *a problemei* (246) *in functie de functiile* f *si* g.

Exercitiu 77. *Fie* $a \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita prin* $u(x) = |x|^{-1}\sin(a|x|)$ *pentru* $x \neq 0$ *si* $u(0) = a$.

i). *Aratati ca exista derivatele partiale* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *pentru orice* $i, j = 1, 3$ *si sa se calculeze* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$, $\forall\ i, j = 1, 3$.

ii). Aratati ca $-\Delta u(x) = a^2 u(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^3$.
iii). $\star$ *Este u de clasa* C^2 *? Argumentati.*

Exercitiu 78. *Consideram functia* $E : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|. \tag{240}$$

i). Aratati ca

$$\Delta E(x) = 0, \quad \forall x \neq 0.$$

ii). Fie $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.
 – *Aratati ca*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{|\partial B_\epsilon(0)|} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \varphi(x) d\sigma(x) = \varphi(0),$$

unde $|\partial B_\epsilon(0)|$ *este aria sferei de raza* ϵ.
 – *Aratati ca* $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ *si*

$$\int_{\mathbb{R}^2} E(x) \Delta\varphi(x) dx = \varphi(0). \tag{241}$$

HINT: $\int_{\mathbb{R}^2} E(x)\Delta\varphi(x)dx = \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon(0)} E(x)\Delta\varphi(x)dx$ *+ integrare prin parti (prima formula a lui Green), etc.*

Exercitiu 79. *Fie* $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 4\}$ *si* $\partial\Omega$ *frontiera lui* Ω. *Fie problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 3\cos x, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{242}$$

a). Aratati ca problema (242) *are cel mult o solutie* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.
b). Gasiti constanta C *astfel incat functia* $v(x,y) = C(x^2+y^2)$ *sa verifice* $-\Delta v = 3$ *in* Ω.
c). Folosind principiul de maxim pentru functii armonice sa se determine solutia problemei

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 3, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{243}$$

d). Folosind principiul de maxim pentru functii sub/super armonice sa se arate ca solutia problemei (242) *verifica*

$$|u(x,y)| \le 3, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Exercitiu 80. *Se considera problema la limita*

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) = u(1,y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) - u(0,y) = \sin(2\pi y), & y \in (0,1), \end{cases} \tag{244}$$

1). Aratati ca (247) *are cel mult o solutie de clasa* C^2.
2). Folosind metoda separarii variabilelor gasiti solutia problemei (247).

Exercitiu 81. *Se considera ecuatia de tip "caldura"*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + t^2 u(t,x) = 0, (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = e^x, \qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{245}$$

1. *Sa se integreze ecuatia diferentiala* $w_t - t^2 w = 0$ *si alegeti o solutie particulara netriviala* w_p.
2. *Rescrieti problema* (245) *pentru functia*

$$v(t,x) = w_p(t) u(t,x).$$

3. *Determinati o solutie pentru problema verificata de* v.
4. *Determinati* ($\star$*-explicit) o solutie a problemei* (245).

Exercitiu 82. *(2 p) Pe bila* $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$*, cu* $R > 0$ *fixat, consideram problema*

$$\begin{cases} \Delta\varphi(y) = 0, \qquad y \in B_R(0) \\ \varphi(y) = \frac{1}{2\pi} \ln R, y \in \partial B_R(0). \end{cases} \tag{246}$$

i). Justificati ca (246) *are solutie unica si determinati solutia.*
Pentru $x \in B_R(0) \setminus \{0\}$ *fixat, consideram problema Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta\varphi_x(y) = 0, \qquad\qquad y \in B_R(0) \\ \varphi_x(y) = \frac{1}{2\pi} \ln |x-y|, y \in \partial B_R(0). \end{cases} \tag{247}$$

ii). Determinati functia $x \mapsto \alpha(x)$ *astfel incat solutia problemei* (247) *sa fie*

$$\phi_x(y) = \alpha(x) + E(x^\star - y), \quad x^\star := \frac{R^2}{|x|^2} x,$$

unde E *este solutia fundamentala a Laplacianului in* $\mathbb{R}^2$.
iii). Aratati ca

$$\varphi_x(y) = \varphi_y(x), \quad \forall x, y \in B_R(0), \quad x \neq y,$$

unde prin φ_0 *intelegem solutia problemei* (246).
Se considera functia Green

$$G(x,y) := \varphi_x(y) - E(x-y), \quad \forall x \in B_R(0),\ \forall y \in \overline{B_R(0)}, \quad x \neq y.$$

iv). Aratati ca

$$G(x,y) > 0, \quad \forall x, y \in B_R(0), \quad x \neq y.$$

v). Calculati

$$\frac{\partial \varphi_x(y)}{\partial \nu_y}, \quad y \in \partial B_R(0),$$

unde $\partial/\partial\nu_y$ *desemneaza derivata normala in punctul* y.

Bibliografie

1. H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011. xiv+599 pp.
2. H. Brezis, Haïm and F. Browder, *Partial differential equations in the 20th century.* Adv. Math. 135 (1998), no. 1, 76–144.
3. L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, Second Edittion, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, xxii+749.
4. L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions.* Revised edition. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015
5. H. Federer, *Geometric measure theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153 Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.
6. F. John, *Partial differential equations*, Fourth edition. Applied Mathematical Sciences, 1. Springer-Verlag, New York, 1982. x+249 pp.
7. S. Klainerman, *PDE as a unified subject*, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I, 279–315.
8. W. Strauss, *Partial differential equations. An introduction.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.