Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

Nume și prenume: DINOIU NADIA-STEFANIA
Grupa: 311

Nota: ____________

Examen

12 Mai 2020

Timpul de rezolvare al problemelor este de 2h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF[1] în folderul vostru de pe Dropbox aveți 30 de minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe **la ora 14 și 58 minute** și se termină la **ora 17 și 28 minute**.

⚠ Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Numărul de clienți pe zi de la ghișeul unei bănci poate fi modelat cu ajutorul unei variabile aleatoare $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Pentru a îmbunătății serviciile oferite, banca vrea să estimeze parametrul λ atât prin metoda momentelor cât și prin metoda verosimilității maxime. Pentru aceasta dispune de următorul eșantion înregistrat pe parcursul a două săptămâni:

`X: 24 22 29 23 32 29 22 29 20 26 27 27 30 24`

a) Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor $\tilde{\lambda}$ și estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\lambda}$ și verificați dacă aceștia sunt deplasați, consistenți și eficienți. Determinați repartiția lor limită.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\lambda(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 2 (asemănător cu ex 3, 12 mai 2018)

10p

Numărul de clienți care intră în magazinul Unirea zilnic poate fi modelat cu ajutorul unei variabile aleatoare repartizate Poisson de parametru λ, cunoscut. Odată intrat, un client cumpără produse în valoare de cel puțin 250 RON cu probabilitatea p. Pentru a estima p avem la dispoziție un eșantion $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{20}$ pentru 20 zile, reprezentând numărul de clienți, zilnic, care au efectuat cumpărături de cel puțin 250 RON:

`Y: 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0`

Propuneți un estimator pentru p, studiați proprietățile acestuia și dați o estimare plecând de la eșantionul dat (știind că $\lambda = 20$).

Exercițiul 3

10p

Fie X o v.a. de densitate

$$f_\theta(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

[1] Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner

cu $\theta > 0$ un parametru şi A o constantă (care depinde de θ). Fie $X_1, \ldots, X_n$ un eşantion de talie $n \in \mathbb{N}^*$ din populaţia X.

a) Determinaţi constanta A şi calculaţi estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obţinut prin metoda momentelor.

b) Determinaţi estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ, verificaţi dacă este deplasat, consistent şi eficient şi găsiţi repartiţia limită a acestuia.

c) În cazul în care $\theta = 4$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiţia lui $X \sim f_{\theta}(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiţia uniformă pe $[0, 1]$: $u_1 = 0.008$, $u_2 = 0.321$ şi $u_3 = 0.582$.

Examen 12 mai 2020

Ex 1 $X \sim P(\lambda)$

a) $\tilde{\lambda} = ?$; $\hat{\lambda} = ?$ deplasați, consistenți, eficienți?

Fie $X_1, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o pop Poisson de param $\lambda > 0$

$X \sim Pois(\lambda)$

Din teorie știm că $P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, $x>0$

Pas 1: scriu funcția de verosimilitate:

$$L(x|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = (e^{-\lambda})^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-\lambda n} \cdot \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Pas 2: Logaritmez:

$$\ln L(x|\lambda) = \ln e^{-\lambda n} + \ln \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i! = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$$

Pas 3+4: Derivez; egalez cu 0 și rezolvăm ec de verosimilitate

$$\frac{\partial \ln L(x|\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \ln L(x|\lambda)}{\partial \lambda} = -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{-n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0 \Rightarrow -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow n\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \hat{\lambda} = \overline{X}_n$$

$\tilde{\lambda} = ?$ (Met Mom)

$E[X] = \overline{X}_n$ Din teorie știu că $E[X] = \lambda$

$\Rightarrow \lambda = \overline{X}_n \Rightarrow \tilde{\lambda} = \overline{X}_n$

Deoarece $\hat{\lambda}$ este obținut prin M.V.M. $\Rightarrow \hat{\lambda}$ este asim eficient și consistent $\Rightarrow$ și $\tilde{\lambda}$ este la fel pt că $\hat{\lambda} = \tilde{\lambda} = \overline{X}_n$

$$E[\hat{\lambda}] = E[\overline{X}_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n} \cdot n \underbrace{E[X]}_{= \lambda \text{ (din teorie)}} = \lambda$$

$\Rightarrow \hat{\lambda}$ e nedeplasat $\Rightarrow \tilde{\lambda}$ nedeplasat pt că $\hat{\lambda} = \tilde{\lambda}$

b) $\hat{\lambda} = ?$ pt $P_\lambda(X_1 = 1 | X_1 > 0)$

$X_1 \sim P(\lambda)$

$$P_\lambda(X_1 = 1 | X_1 > 0) = \frac{P(X_1 = 1) \cap P(X_1 > 0)}{P(X_1 > 0)}$$

$$\underset{\text{altă scriere}}{\overset{\text{sau}}{=}} \frac{P(X_1 = 1, X_1 > 0)}{P(X_1 > 0)}$$

$$= \frac{P(X_1 = 1)}{1 - P(X_1 \le 0)}$$ ⟶ asta e intersecția pt că $X > 0$ în Poisson

$$= \frac{P(X_1 = 1)}{1 - P(X = 0)} = \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - \frac{e^{-\lambda}}{1}} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

$$g(\lambda) \overset{\text{not}}{=} \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

Se cere un estimator de verosim. maximă pt $g(\lambda)$

! Avem o teoremă: Dacă $\hat{\lambda}$ este EVM pt λ atunci pt $(\forall)$ funcție g avem că $g(\hat{\lambda})$ este EVM pt $g(\lambda)$

$\Rightarrow \hat{\lambda}$ EVM pt $\lambda \Rightarrow g(\hat{\lambda})$ EVM pt $g(\lambda)$

$$g(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda} \cdot e^{-\hat{\lambda}}}{1-e^{-\hat{\lambda}}} = \frac{\overline{X}_m \cdot e^{-\overline{X}_m}}{1-e^{-\overline{X}_m}} \stackrel{not}{=} \widehat{g(\lambda)}$$ (este estimatorul lui $g(\lambda)$)

Teorema aplicațiilor continue (T.A.C)

$X_m \xrightarrow{P} X$ atunci $g(X_m) \xrightarrow{P} g(X)$

$X_m \xrightarrow{D} X$ și $X_m \xrightarrow{a.s} X$

$\Rightarrow$ dacă $\overline{X}_m \xrightarrow{P} \lambda$ atunci și $g(\overline{X}_m) \xrightarrow{P} g(\lambda)$

adică $g(\hat{\lambda}) \xrightarrow{P} g(\lambda) \Rightarrow \widehat{g(\lambda)}$ e consistent

Ex 3:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{\theta}} & ; x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad \theta > 0, \; A = ct$$

$X_1, \dots, X_m$ un eșantion de talie $m \in \mathbb{N}^*$ din populația X.

a) $A = ?$, $\tilde{\theta} = ?$ (M.Mom.)

$f_\theta(x)$ = densitate $\Leftrightarrow \int_0^\infty A \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 1$ (cond de normare)

$f_\theta(x) \geq 0$

$$\int_0^\infty A \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = A \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}} dx = A \cdot (-\theta) \int_0^\infty \left(\frac{-1}{\theta}\right) e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -A\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^\infty = -A\theta(\underbrace{e^{-\infty}}_{=0} - e^0) =$$

$$= -A\theta(0-1) = A\theta$$

$$\Rightarrow A\theta = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\theta}$$

$$\Rightarrow f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Pt met. momentelor tb să calculăm media teoretică $E[X]$

$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot f_\theta(x)\, dx = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \underbrace{\int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx}_{gamma}$$

Sch de var:

$\frac{x}{\theta} = t \Rightarrow x = \theta \cdot t$ $\qquad x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0$

$dx = \theta\, dt$ $\qquad x_2 = \infty \Rightarrow t_2 = \infty$

$* \; \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$

$$E[X] = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty \underbrace{\theta \cdot t}_{x} \, e^{-t} \underbrace{\theta\, dt}_{dx} = \theta \int_0^\infty t \cdot e^{-t} dt = \Gamma(a)$$

$a-1 = 1 \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow E[X] = \theta\, \Gamma(2)$

$\Rightarrow E[X] = \overline{X}_m$ Condiția M.M. (media teoretică = media de selecție)

$$\theta\,\Gamma(2) = \overline{X}_m \Rightarrow \theta = \frac{\overline{X}_m}{\Gamma(2)} \Rightarrow \tilde{\theta}_m = \frac{\overline{X}_m}{\Gamma(2)}$$

$\tilde{\theta}$ nedeplasat: $E[\tilde{\theta}_m] = E\left[\frac{\overline{X}_m}{\Gamma(2)}\right] = \frac{1}{\Gamma(2)} E[\overline{X}_m] = \frac{1}{\Gamma(2)} E[X] = \frac{1}{\Gamma(2)} \overline{X}_m = \tilde{\theta}_m$

b) $\hat{\theta}_n = ?$ (M.V.M)

Pas 1: Scriu funcția de verosimilitate

$$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{x}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}}$$

Pas 2: Logaritmez.

$$\ln L(x|\theta) = \ln \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i} = \ln \frac{1}{\theta^n} + \ln e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i} = -\ln \theta^n - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i =$$

$$= -n \ln \theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Pas 3: Derivez în rap cu θ

$$\frac{\partial \ln L(x|\theta)}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Pas 4: Rezolv ec de verosimilitate

$$\frac{\partial \ln L(x|\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$-\theta n + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \theta n = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \theta = \overline{X}_n$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \overline{X}_n$

$\hat{\theta}$ este asimptotic eficient și consistent pt că e obținut cu M.V.M.

c) $\theta = 4$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din $X \sim f_\theta(x)$

$U[0,1]$: $u_1 = 0,008$; $u_2 = 0,321$; $u_3 = 0,582$

$$\theta = 4 \Rightarrow f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Aplic met. inversei → aplic th de universalitate a rep. uniforme

Aflu $F_4(x)$

$$F_4(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_4(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{4}}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^x e^{-\frac{t}{4}}\,dt = \frac{1}{4}\cdot(-4)\cdot\int_0^x \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-\frac{t}{4}}\,dt$$

$$= -e^{-\frac{t}{4}}\Big|_0^x = -e^{-\frac{x}{4}} + e^0 = -e^{-\frac{x}{4}} + 1 = 1 - e^{-\frac{x}{4}}$$

$$\Rightarrow F_4(x) = 1 - e^{-\frac{x}{4}}$$

$F_4(x) = y \Rightarrow 1 - e^{-\frac{x}{4}} = y \Rightarrow 1 - y = e^{-\frac{x}{4}}$ Logaritmez

$\Rightarrow \ln(1-y) = \frac{-x}{4} \Rightarrow 4\ln(1-y) = -x \Rightarrow x = -4\ln(1-y) \Rightarrow F_4^{-1}(y) = -4\ln(1-y)$

Deci este suficient să aplicăm $F_4^{-1}(y)$ pe cele 3 valori u_1, u_2 și u_3

$$F_4^{-1}(u_1) = -4 \ln(1-0{,}008) = -4 \ln 0{,}992$$
$$F_4^{-1}(u_2) = -4 \ln(1-0{,}321) = -4 \ln \ldots$$
$$F_4^{-1}(u_3) = -4 \ln(1-0{,}582) = -4 \ln \ldots$$