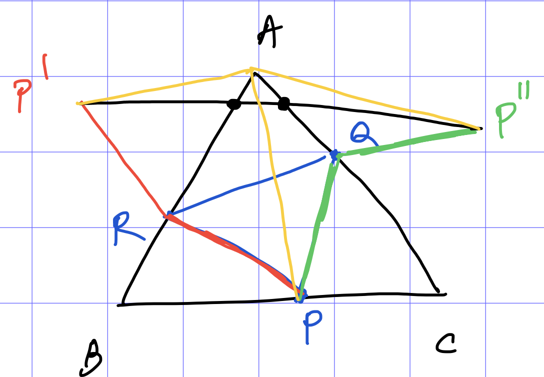
GEOMETRIE
SEMINAR 7

Exc 7.1 Fie un triunghi ascuțitunghic ABC.
Construiți P, Q, R, fiecare pe câte o latură, a.î. perimetrul ΔPQR să fie minim.

<u>Rezolvare:</u>

Construim $P' = S_{AB}(P)$, $P'R = PR$

$P'' = S_{AC}(P)$. $P''Q = PQ$



$$\mathcal{P}_{PQR} = RP + RQ + QP$$
$$= P'R + RQ + \cancel{+Q}P'' \geq P'P''$$

Deci pentru P fixat pe BC, perimetrul minim al lui ΔPQR se obține luând R și Q la intersecția dreptei $P'P''$ cu laturile AB, resp. AC.

$\Delta AP'P''$: $AP' = AP'' = AP$ (din construcția cu ajutorul simetriilor axiale)

Deci $\Delta AP'P''$ e isoscel.
În plus, $m\sphericalangle P'AP'' = 2 \cdot m\sphericalangle BAC$ (deoarece $\Delta AP'R \equiv \Delta APR$, $\Delta AP''Q \equiv \Delta APQ$)

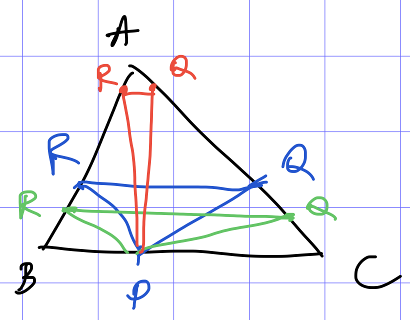
$\Downarrow$

$m\sphericalangle P'AP''$ nu depinde de alegerea punctului P pe BC.

Pentru a minimiza baza Δ isoscel $AP'P''$, cu unghiul $\widehat{P'AP''}$ fixat, trebuie să minimizăm laturile egale, adică trebuie să minimizăm AP.

În concluzie, trebuie să alegem P = piciorul înălțimii din A în ΔABC.

Reluând același raționament cu R și Q în loc de P, obținem că triunghiul căutat este <u>triunghiul ortic</u> (adică cel determinat de picioarele înălțimilor ΔABC).



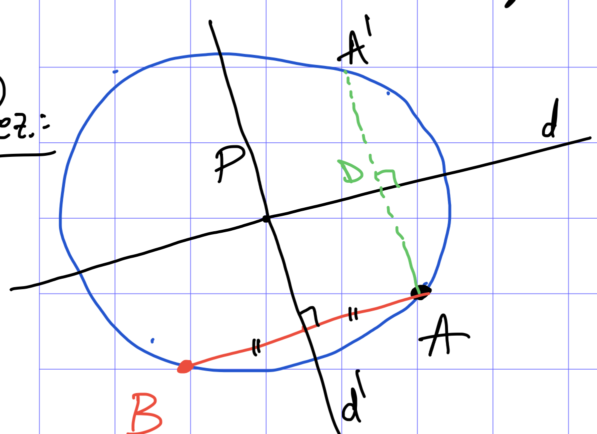
$\mathcal{A}_{PQR}$ minimă ?

$\inf \mathcal{A}_{PQR} = 0.$

Exc 7.2 Considerăm $P \neq A$ două puncte în plan

Ce este mulțimea $M = \{ S_d(A) \mid d \ni P \}$?

Rez.:



Arătăm că $\{ S_d(A) \mid d \ni P \} = \mathcal{C}(P, |AP|)$

Luăm o dreaptă $d \ni P$ arbitrară.

$A' = S_d(A)$.

$AA' \cap d = D$

$$\left.\begin{array}{l} AD = A'D \\ AA' \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta A'PD \equiv \Delta APD$$

$\Downarrow$

$PA = PA'$, deci $A' \in \mathcal{C}(P, |PA|)$

Am obținut până acum că $M \subset \mathcal{C}(P, |PA|)$ *

Luăm $B \in \mathcal{C}(P, |PA|)$. Vrem să găsim $d' \ni P$ a.î. $S_{d'}(A) = B$.

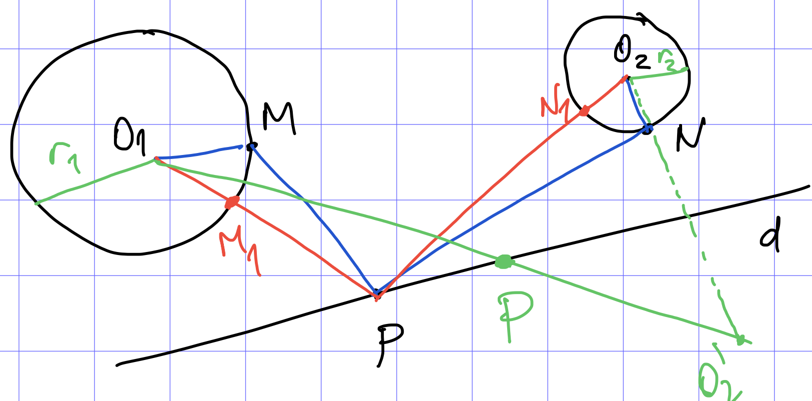
Pentru aceasta, alegem d' = mediatoarea lui BA.

În consecință $\mathcal{C}(P, |PA|) \subset M$. **

$* \,\&\, ** \implies M = \mathcal{C}(P, |PA|)$.

Exc 7.2 Fie d o dreaptă, O_1 și O_2 două puncte care se află pe aceeași parte a lui d, și C_1, C_2 cercuri de centru O_1 și rază r_1, resp. O_2 și rază r_2, a.î. acestea nu intersectează dreapta d.

Aflați punctele $M \in C_1$ și $N \in C_2$ și $P \in d$ a.î. $MP + PN$ să fie minim.



A găsi $M \in C_1$, $N \in C_2$, $P \in d$ a.î. $MP + PN$ minim

$\Updownarrow$

a găsi $M \in C_1$, $N \in C_2$, $P \in d$ a.î. $\underbrace{O_1M}_{r_1} + MP + PN + \underbrace{NO_2}_{r_2}$ minim

(r_1 și r_2 sunt fixe, din ipoteză)

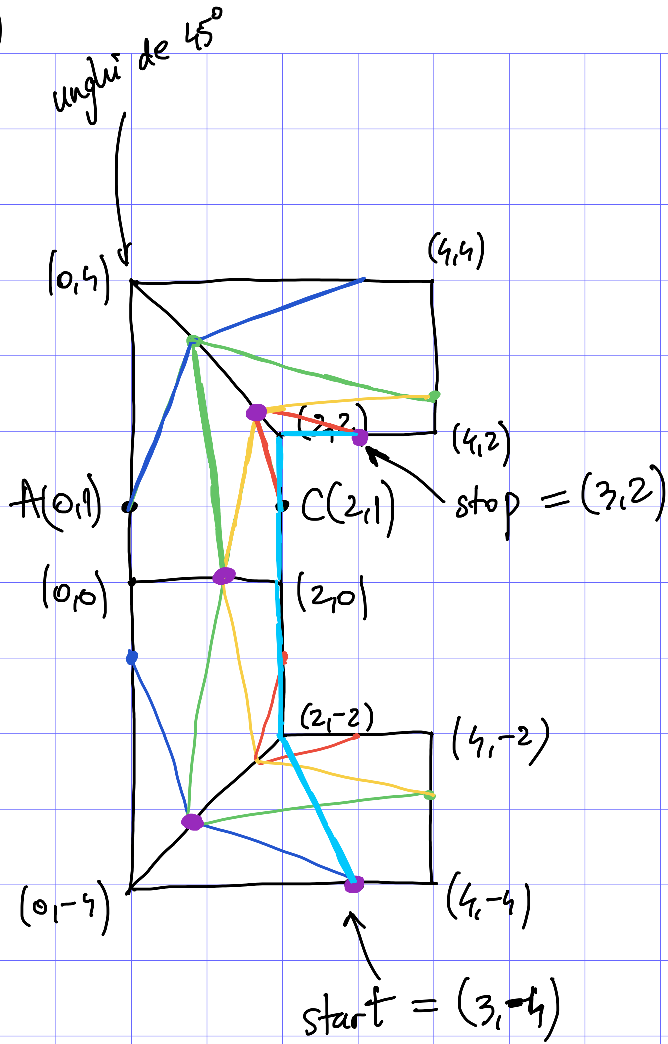
Rez.:

$$O_1M + MP + PN + NO_2 \geq O_1M_1 + M_1P + PN_1 + N_1O_2 = O_1P + PO_2$$

Mai trebuie să găsesc P care face suma minimă

Acum, din problema râului, știu cum să alegem punctul P: luăm $O_2' = S_d(O_2)$ și $P = O_1O_2' \cap d$.

Exc 7.4

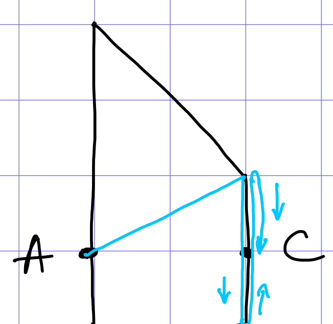


Aflați drumul de lungime minimă de la A la C care inters. latura d într-un punct apoi latura b într-un punct și din nou latura d într-un punct.

Drumul desenat inițial are aceeași lungime ca cel parcurs de la start la stop prin punctele •

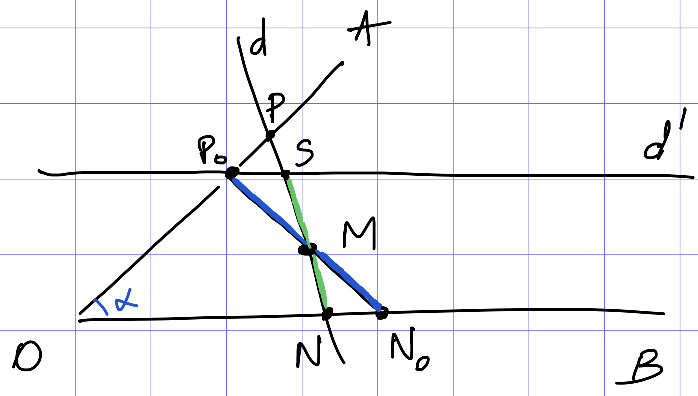
Dar drumul inițial > drumul

Pe desenul inițial, drumul cel mai scurt corespunde traseului: $(0,1) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (2,0) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (2,1)$



Ex 7.5 Dat un unghi $\widehat{AOB}$ și M un punct în interiorul lui. Găsiți dreapta ce trece prin M și taie OA în P și OB în N a.î. ΔPON să aibă arie minimă.

ΔPON arie minimă



$$A_{PON} = \frac{OP \cdot ON \cdot \sin\alpha}{2}$$

ar trebui să minimizăm $OP \cdot ON$

... găsim vreo metodă de a termina demonstrația?

$\Delta P_0MS \equiv \Delta N_0MN$

$d' = R_{M,\pi}(OB)$

$P_0M \cap OB = \{N_0\}$

$$A_{PON} = A_{PP_0M} + A_{P_0ONM} \geq A_{P_0MS} + A_{P_0ONM} =$$

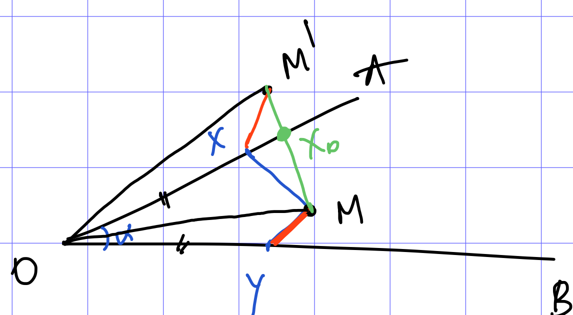
$$= A_{N_0MN} + A_{P_0ONM} = A_{P_0ON_0}$$

Deci oricum am alege dreapta d inițială (care determină punctele P și N), $A_{PON} \geq A_{P_0ON_0}$.

Deci P_0N_0 (construită prin metoda descrisă mai sus) este dreapta căutată.

Ex 7.6 Dat un unghi $\widehat{AOB}$ și M în interiorul lui. Găsiți $X \in OA$ și $Y \in OB$ a.i. $OX = OY$ și $MX + MY$ să fie minim.

Rez:



Considerăm $M' = R_{O,\alpha}(M)$

Atunci, $R_{O,\alpha}(Y) = X$

Deci $\Delta OYM \equiv \Delta OXM'$

$\Downarrow$

$XM' = YM$

$MX+MY = MX + XM' \geq M'X_0 + X_0M = MY_0 + X_0M = MX_0 + MY_0$

Luam $X_0 = MM' \cap OA$.

$R_{0,-\alpha}(X_0) = Y_0$

X_0, Y_0 sunt punctele căutate.

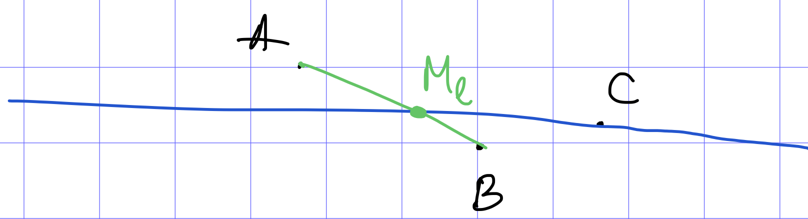
Exc 7.7 A, B, C puncte necoliniare în plan.

ℓ = o dreaptă arbitrară care trece prin C

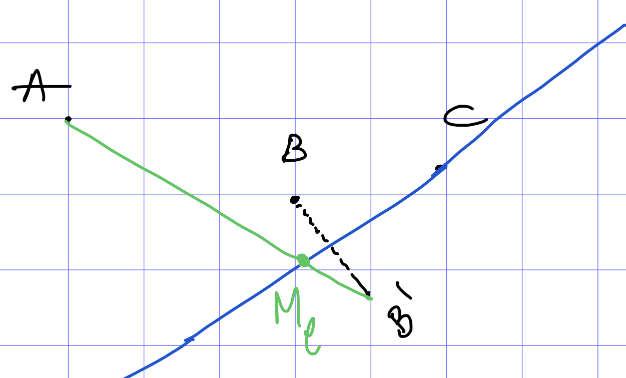
M_ℓ = punctul de pe ℓ ce realizează $\min AM_\ell + BM_\ell$.

Aflați dreapta ℓ pentru care $AM_\ell + BM_\ell$ este maxim.

Rez.:



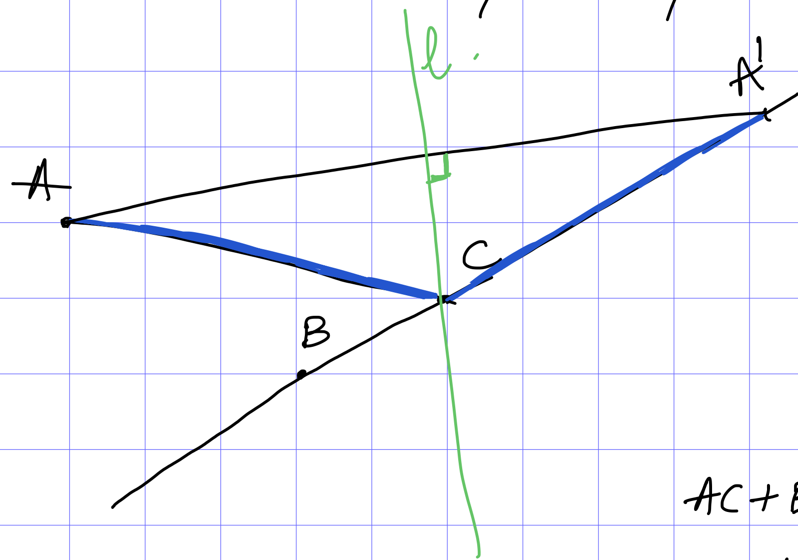
I Dacă ℓ separă A și B, atunci $\{M_\ell\} = AB \cap \ell$



II Dacă ℓ nu separă A și B atunci M_ℓ = obținut prin sol. la pb. râului

În ambele cazuri, $AM_\ell + BM_\ell \leq AC + BC$

Pentru a demonstra că $AC+BC$ este maximumul căutat, trebuie să construim o dreaptă l pentru care $M_l = C$.



$A' \in BC$

$AC = CA'$

l = mediatoarea lui AA'

$AC + BC = A'C + BC$

deci $M_l = C$ ✓