CURS 1 18.02.2022

ANALIZĂ MATEMATICĂ II

- SPERANȚA VLĂDOIU -

Final 80% - examen final

20% - lucrare de seminar (după săpt. a 7-a)

1 punct (2) - activitate seminar

- Integrale improprii
- Serii de puteri
- Topologie, convergență, continuitate în $\mathbb{R}^n$
- Diferențiabilitate în $\mathbb{R}^n$
- Integrala Riemann pt. funcții de mai multe variabile.

BIBLIOGRAFIE:

① R. Miculescu - Analiză matematică - Note de curs (Pro Universitaria 2018)

② N. Boboc - Analiză matematică (I, II) (Ed. Univ. Buc)(1999)

③. M. Nicolescu, S. Marcus, N. Dinculeanu - Analiză matematică

④. T. Tao - Analysis II - Springer 2016

⑤ P. M Fitzpatrick - Advanced Calculus - AMS - 2006

⑥ J Callahan - Advanced Calculus: A Geometric Point of view.

Integrale improprii

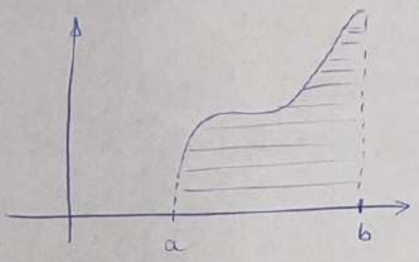
$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

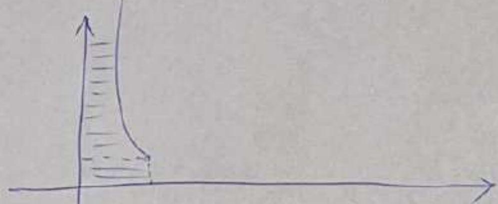
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\int_a^b f(x)\,dx$

$f : [a,b) \to \mathbb{R}$

$f \geq 0$





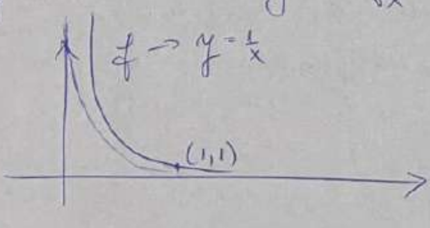
$f : (0,1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in (0,1] \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$

$\tilde{f}$ nu este int. Riemann

$g : (0,1] \to \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



Definiții:

Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

1) Spunem că f este local integrabilă dc. f este integrabilă Riemann pe $[a,c]$, pentru orice $c \in (a,b)$.

2) Funcția f este integrabilă în sens generalizat dacă f este local integrabilă și există $\lim\limits_{\substack{c \to b \\ c < b}} \int_a^c f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ (este finită)

...tatu: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)\,dx$ – s.n. integrala improprie a funcției f.

Dc. f este integrabilă în sens generalizat, spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

Dc. $\lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)\,dx \in \{+\infty, -\infty\}$, spunem că integrala improprie există $\left(\int_a^b f(x)\,dx = +\infty / -\infty\right)$, dar nu este convergentă.

Dc $\nexists \lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)\,dx$ – integrala improprie nu există.

Observații: 1) Se poate defini analog pentru intervale de tip $(a, b]$. ($f : (a,b] \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a<b$)

2) Dacă f este integrabilă în sens generalizat spunem că $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

Dacă $\lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^b f(x)\,dx$ nu e finită sau nu există spunem că integrala este divergentă.

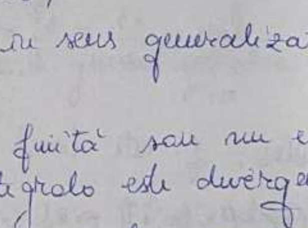
3) Dacă $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$, spunem că f este integrabilă în sens generalizat dc. $\exists\, c \in (a, b)$ a.î. f este integrabilă în sens generalizat pe $(a, c]$ și $[c, b)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{\mathbb{R}}{\int_a^c f(x)\,dx} + \underset{\mathbb{R}}{\int_c^b f(x)\,dx}$$

Obs. f este local integrabilă dc. f este integrabilă Riemann pe orice $[c, d] \subseteq [a, b) / (a, b] / (a, b)$.

Exemple:

① $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



f este local integrabilă pe $(0,1]$

f este integrabilă Riemann pe $[c,1]$ $\forall c \in (0,1)$

• $c \in (0,1)$

$$\int_c^1 f(x)\,dx = \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = 2-2\sqrt{c}$$

$$\lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \int_c^1 f(x)\,dx = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} (2-2\sqrt{c}) = 2 \Rightarrow f$$ în sens generalizat

și $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$

② $f:[0,3)\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

$\tilde{f}:[0,3]\to \mathbb{R}$ $\tilde{f}(x)=x^2$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \lim_{\substack{c\to 3\\ c>3}} \int_0^c f(x)\,dx = \lim_{\substack{c\to 3\\ c<3}} \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^c\right) =$$

$$= \lim_{\substack{c\to 3\\ c<3}} \frac{c^3}{3} = \frac{3^3}{3} = 9.$$

Obs: f este local integrabilă.

③ $f:(0,1]\to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$

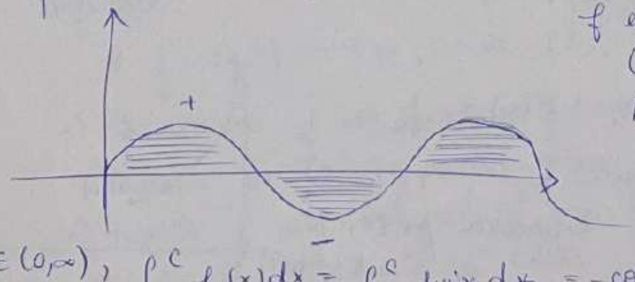
• f este local integrabilă

• $\int_c^1 f(x)\,dx = \int_c^1$

$\Rightarrow f$ are integrală improprie

$\int_c^1 f(x)\,dx$ este divergentă (există și nu e finită)

④ $f:[0,\infty)\to \mathbb{R}$ $f(x)=\sin x$



f este local integrabilă
($\forall\, c\in(0,\infty)$, f integrabilă Riemann pe $[0,c]$)

$c\in(0,\infty)$, $\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^c \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^c = 1-\cos c.$

$\lim_{c\to\infty} \int_0^c f(x)\,dx.$ ~ - tilde

$\Rightarrow \int_0^\infty \sin x\,dx$ (nu există) divergentă!

Prop. 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ și $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă și mărginită. Atunci 1) f este integrabilă în sens generalizat
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}:[a,b] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b) \\ \alpha, & x = b \end{cases}$

funcția $\tilde{f}$ este integrabilă Riemann și:

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Obs: Prop 1 nu rămâne adevărată dc. a și b nu sunt finite! (ex 4)

Dem: Temă.

Prop. 2. Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ și $f, g: [a,b) \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Atunci, dc f și g sunt integrabile în sens generalizat, rez:

$$f+g \quad \text{și} \quad \alpha f$$

sunt integrabile în sens generalizat și

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dem: f, g sunt integrabile în sens generalizat $\Rightarrow f, g$ local int.

$\exists \lim_{\substack{c\to b \\ c<b}} \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$\exists \lim \int_a^c g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

Atunci • $f+g$ este local integrabilă

• $\lim_{\substack{c\to b \\ c<b}} \int_a^c (f+g)(x)\,dx = \lim_{\substack{c\to b \\ c<b}} \left[\int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx\right]$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f+g$ este integrabilă în sens generalizat.

și $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

Exemplu: • $f:(0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ f integrabilă în sens general

$f \cdot f = f^2 : (0,1] \to \mathbb{R}$ $f^2(x) = \frac{1}{x}$ f^2 nu este int. în sens gen.

Obs: În general, produsul fg al două funcții integrabile în sens generalizat nu este o funcție integrabilă în sens generalizat!!

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă

Def. f integrabilă în sens generalizat $\Leftrightarrow \exists\, c \in (a,b)$, f integrabilă în sens generalizat pe $(a,c]$, $[c,b)$ $\Leftrightarrow \forall\, c \in (a,b)$, $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(x)\,dx$ sunt convergente.

$a < c_1 < c_2 < b$

$\int_a^{c_1} f(x)\,dx$ - convergentă

$$\int_a^{c_2} f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx =$$

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} x\,dx = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-a}^{a} \right) = 0$$

$\left.\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{c} x\,dx \\ \int_{c}^{\infty} x\,dx \end{array}\right\}$ divergente $\quad \lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b x\,dx = \lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_a^b \right) =$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \underbrace{\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)}_{\infty - \infty\ ?}$$

3. Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă.
Atunci f este integrabilă în sens generalizat dacă și numai dacă
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists c_\varepsilon \in (a,b)$ a.î. $\forall c', c'' \in (c_\varepsilon, b)$

$$\left| \int_a^{c'} f(x)\,dx - \int_a^{c''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

Fie $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă.
Atunci definim integrala improprie (generalizată): $\int_a^b f(x)\,dx$.
Dc. $\exists \lim\limits_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx =$ finită spunem că $\int$ convergentă.
Altfel spunem că $\int$ divergentă.

① $i = \int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \neq 1$: $\lim\limits_{t \to \infty} \int_a^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_a^t$

$\alpha < 1 \to \lim\limits_{t \to \infty} \frac{t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \infty$

$\alpha = 1 \to \lim\limits_{t \to \infty} \ln \frac{t}{a} = \infty$

$\alpha > 1 \to \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$

$i = \int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

pt. $\alpha \neq 1$: $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim\limits_{t \searrow 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_t^a = \lim\limits_{t \searrow 0} \frac{a^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

$\alpha > 1$: $-\infty$

$\alpha < 1$: $\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

$\alpha = 1$: $\lim\limits_{t \searrow 0} \ldots = \infty$.

i - conv. , $\alpha \le 1$
div , $\alpha \geq 1$

② $\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \sin x dx = \lim_{t\to\infty} -\cos x \Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} -\cos t + 1$ $\nexists$

$x_n = 2n\pi \xrightarrow{n} \infty$ $\quad \lim_n (-\cos 2n\pi + 1) = 0$ $\quad$ 0 sau 2

$y_n = (2n+1)\pi \xrightarrow{n} \infty$ $\quad \lim_n (-\cos(2n+1)\pi + 1) = 2$ $\quad$ i div.

③ $\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-ax} \sin bx \, dx$

$$J = \int_0^t e^{-ax} \sin bx \, dx = -\frac{e^{-ax}}{b}\Big|_0^t - \frac{a}{b}\int_0^t e^{-ax} \cos bx \, dx$$

$e^{-ax} \quad - \quad a e^{-ax}$

$\sin bx \quad - \quad \frac{\cos bx}{b}$

$$J = -e^{-ax}\left(\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}\sin bx\right)\Big|_0^t - \frac{a^2}{b^2} J$$

$$J \cdot \frac{b^2+a^2}{b^2} = -e^{at}\left(\frac{\cos bt}{b} + \frac{a}{b^2}\sin bt\right) + \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow J = \frac{b^2}{a^2+b^2}\left(-e^{-at}\left(\frac{\cos bt}{b} + \frac{a}{b^2}\sin bt\right) + \frac{1}{b}\right)$$

$$\cancel{\lim_{t\to\infty} \frac{b^2}{a^2+b^2}\left(-e^{-at}\left(\frac{\cos bt}{b} + \cdot\right.\right.}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{b^2}{a^2+b^2}\left(-\frac{b\cos bt + a\sin bt}{b^2 e^{at}} + \frac{1}{b}\right)$$

④ $i = \int_0^\infty \frac{1}{x^2-2x+4} dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2-2x+4} dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^2+3} dx$

$u = x-1$
$du = dx$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-1}^{t-1} \frac{1}{u^2+3} du = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} \Big|_{-1}^{t-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

+1 ex . . . .