Tutoriat 5

1. Factorizarea Cholesky:

Teoremă: Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrică și pozitiv definită. Atunci, $\exists !$
$L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ care să fie:

- inferior triunghiulară
- $l_{ii} > 0$, $i = \overline{1,n}$

astfel încât $A = LL^T$.

O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s.n. simetrică și pozitiv definită dacă $A = A^T$ și $x^T A x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Cum verificăm că o matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite factorizarea Cholesky?

Aplicăm criteriul lui Sylvester: $\det A^{(k)} > 0$, $k = \overline{1,n}$ și $A = A^T$.

Scopul factorizării:

Din $A = LL^T \Rightarrow L(\underbrace{L^T x}_{y}) = b \Rightarrow Ly = b$ cu $y = L^T x$.

$Ly = b \rightarrow$ se rezolvă prin metoda substituției ascendente

$L^T x = y \rightarrow$ se rezolvă prin metoda substituției descendente

Algoritm:

1. Partiționăm matricele asemănător ca la LU FP și înlocuim în $A = LL^T$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}; \quad L^T = \begin{bmatrix} l_{11} & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{bmatrix}$$

2. La fiecare pas, se va găsi câte o coloană din L și se va continua până se vor găsi toate elementele lui L.

2. FACTORIZAREA DOOLITTLE:

→ prin matrice tridiagonală înțelegem următoarea formă de matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \dots & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & & a_{n-1,n} \\ 0 \dots & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

→ este un caz particular de LU fără pivotare, astfel:

Pornim cu $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ tridiagonală. Considerăm:

• L = o matrice inferior triunghiulară cu elementele de pe diagonala principală egale cu 1 și cu elementele de forma $l_{i+1,i} \neq 0$ (restul elementelor sunt 0).

• U = o matrice superior triunghiulară cu elementele de forma $u_{i,i+1} \neq 0$ și restul elementelor 0. Apoi, similar ca la LU FP, partiționăm matricele, repetând procedeul până când găsim toate elementele lui L și U.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}; \; L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & L_{22}\end{bmatrix}; \; U=\begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22}\end{bmatrix} \text{ cu } A=LU.$$

3. Factorizarea Crout:

→ se merge pe aceeași pași ca la factorizarea Doolittle, diferența fiind la modul în care definim matricele L și U:

• L = o matrice inferior triunghiulară cu elementele $l_{i+1,i} \neq 0$, restul elementelor fiind 0.

• U = o matrice superior triunghiulară cu elementele de pe diagonala principală egale cu 1 și cu elementele de forma $u_{i,i+1} \neq 0$, restul elementelor fiind 0.

Condiții necesare pentru ca o matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ să admită factorizarea Doolittle/Crout:

→ A admite LU FP;

→ A este tridiagonală.

Exerciții:

① Să se găsească factorizarea Cholesky a matricei $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4{,}25 & 2{,}75 \\ 1 & 2{,}75 & 3{,}5 \end{bmatrix}$

② Găsiți factorizarea Crout a matricei:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

③ Găsiți factorizarea Doolittle a matricei:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observație utilă: Având factorizarea Doolittle a unei matrice A, atunci putem găsi factorizarea Crout astfel:

$$L_{Crout} = U^T_{Doolittle} \text{ și } U_{Crout} = L^T_{Doolittle}.$$

În mod similar, dacă avem factorizarea Crout a unei matrice A, atunci putem găsi factorizarea Doolittle astfel:

$$L_{Doolittle} = U^T_{Crout} \text{ și } U_{Doolittle} = L^T_{Crout}.$$

1, Să verificăm dacă A admite factorizarea Cholesky:

$A^{(1)} = 4 \Rightarrow \det(A^{(1)}) = |4| = 4 > 0$

$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4,25 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A^{(2)}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4,25 \end{vmatrix} = 17 - 1 = 16 > 0.$

$A^{(3)} = A \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4,25 & 2,75 \\ 1 & 2,75 & 3,5 \end{vmatrix} = 16 > 0.$ $\xRightarrow{\text{Sylvester}}$ A admite factorizarea Cholesky.

În plus, $A^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4,25 & 2,75 \\ 1 & 2,75 & 3,5 \end{bmatrix} = A.$

Avem: $\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} = A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4 = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = 2. \text{(nu alegem varianta cu - datorită teoremei).} \\ A_{12} = l_{11} L_{21}^T \Rightarrow L_{21}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ A_{21} = l_{11} L_{21} \text{ (echivalent cu ce am găsit în a doua relație)} \\ A_{22} = L_{21} L_{21}^T + L_{22} L_{22}^T \Rightarrow L_{22} L_{22}^T = A_{22} - L_{21} L_{21}^T = \begin{bmatrix} 4,25 & 2,75 \\ 2,75 & 3,5 \end{bmatrix} - \end{cases}$

$- \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,25 & 2,75 \\ 2,75 & 3,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3,25 \end{bmatrix}.$

Problema s-a redus la:

$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22} & 0 \\ l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{22} & l_{32} \\ 0 & l_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} l_{22}^2 = 4 \Rightarrow l_{22} = 2 \\ l_{22} l_{32} = 3 \Rightarrow l_{32} = \frac{3}{2} \\ l_{32} l_{22} = 3 \text{ (identic cu } \uparrow) \\ l_{32}^2 + l_{33}^2 = 3,25 \end{cases}$

$l_{33}^2 = 3,25 - 9/4 = 3,25 - 2,25 = 1 \Rightarrow l_{33} = 1.$

Am obținut:

$$L=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0,5 & 2 & 0 \\ 0,5 & 1,5 & 1 \end{bmatrix}$$. Putem verifica:

$$LL^T=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0,5 & 2 & 0 \\ 0,5 & 1,5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 2 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4,25 & 2,75 \\ 1 & 2,75 & 3,5 \end{bmatrix}$$

②. Să verificăm dacă A admite factorizarea Crout:

Observăm că A este tridiagonală.

$\Delta_1 = |2| \neq 0$ $(|2|=2)$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8-2-2=4\neq 0.$$

$\Rightarrow$ A admite factorizarea Crout.

Luăm $$L=\underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}} ; \quad U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}$$

$$A=LU \Rightarrow \begin{cases} l_{11}=a_{11}=2 \\ l_{11}U_{12}=A_{12} \Rightarrow U_{12}=\dfrac{A_{12}}{2}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u_{12}=-\frac{1}{2}. \\ L_{21}=A_{21} \Rightarrow l_{21}=-1. \end{cases}$$

$$L_{21}U_{12}+L_{22}U_{22}=A_{22} \Rightarrow L_{22}U_{22}=A_{22}-L_{21}U_{12}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22} & 0 \\ l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{23} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22} & l_{22}u_{23} \\ l_{32} & l_{32}u_{23}+l_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$l_{22} = \frac{3}{2}$; $l_{22}u_{23} = -1 \Rightarrow u_{23} = -\frac{2}{3}$; $l_{32} = -1$; $l_{32}u_{23} + l_{33} = 2 \Rightarrow l_{33} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Așadar: $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$; $U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Folosind observația, obținem:

$L_{Doolittle} = U^T_{Crout} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$; $U_{Doolittle} = L^T_{Crout} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$