

Test

ONUTU RADU-CONSTANTIN

$$A = 5$$

$$B = 19$$

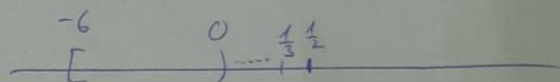
$$1) M = [-6, 0) \cup \left\{ \frac{1}{m+1} \mid m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \right\}$$

$$a) M \text{ închis} \Leftrightarrow M = \bar{M}$$

$$\bar{M} = M \cup M'$$

$$M' = [-6, 0]$$

pt. $\forall x \in M$, \exists o vecinătate pt. fixate x a.o. să conțină o infinitate de puncte



pt. punctele de forma $\left\{ \frac{1}{m+1} \mid m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \right\}$ nu există nicio vecinătate de acest fel

pt. $\{0\}$ pot alege o vecinătate întinsă la stânga lui se găsesc o infinitate de puncte

$$\Rightarrow M' = [-6, 0]$$

$$\bar{M} = M \cup M' = M \cup \{0\}$$

$$M \neq \bar{M} \Leftrightarrow M \text{ nu e mulțime închisă}$$

b) $\overset{\circ}{M} = (-6, 0)$

P. prin reducere la absurd că $\overset{\circ}{M} = \{-6\} \cup \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M, \exists \delta > 0 \text{ a.i. } (x-\delta, x+\delta) \subset M$$

Fals pt. că un interval de forma $(x-\delta, x+\delta)$ nu poate fi inclus într-o mulțime de puncte.

$$\Rightarrow \overset{\circ}{M} = (-6, 0)$$

c) $M' = [-6, 0]$

P. prin reducere la absurd că $M' = \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M, \exists \delta > 0 \text{ a.i.}$$

$$M' = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

$(x-\delta, x+\delta)$ să aibă o infinitate de elem. din M

Fals pt. că $\forall x \in M'$ ~~nu are~~ ^{o inf. de} nu pot să iau o vecinătate care să conțină ^{o inf. de} puncte din M

d) Fie $A \subset \mathbb{R}$ mult. deschisă $\Rightarrow A = \overset{\circ}{A}$

$\overline{A}(A)$ este întotdeauna des închisă

~~des închisă~~

$$\overline{A}(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = A \cup A' - A = A'$$

A' ~~este~~ ^{nu este} închisă

$\Rightarrow \overline{A}(A)$ - închisă, dar nemăginită $\Rightarrow \overline{A}(A)$ nu e compactă

$$2) f: (-5, 5) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{5}, & x \in (-5, 0] \\ \frac{1}{x-5} + x, & x \in (0, 5) \end{cases}$$

f cont. pe $(-5, 5) \setminus \{0\}$ întrucât f e o compunere de funcții elementare.

Verific cont. în $x=0$

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x-5} + x &= -\frac{1}{5} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow f(0) = l_s(0) = l_d(0) \\ \Rightarrow f \text{ cont. în } x=0 \\ \Rightarrow f \text{ cont. pe } (-5, 5) \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-5, 0] \\ -\frac{1}{(x-5)^2} + 1, & x \in (0, 5) \end{cases}$$

f' derivabilă pe $(-5, 5) \setminus \{0\}$ întrucât f' e o compunere de funcții ~~elementare~~ elementare

Verific derivabilitatea în $x=0$

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{x} = 0$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x-5} + x + \frac{1}{5}}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1+x^2-5x}{x-5} + \frac{1}{5}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{5x^2 - 25x + 5 + x - 5}{5x^2 - 25x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{5x^2 - 24x}{5x^2 - 25x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{5x - 24}{5x - 25} = \frac{24}{25}$$

$f'(0) \neq f'_d(0) \Rightarrow f$ derivabilă pe $(-5, 5) \setminus \{0\}$

f derivabilă pe $(-5, 0)$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x) \in (-10, 0)$ mărginit $\left| \begin{array}{l} f \text{ este Lipschitz pe } (-5, 0) \\ \Rightarrow f \text{ unif. cont. pe } (-5, 0) \end{array} \right.$

f derivabilă pe $(0, 5)$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-5)^2} + 1$$

$$-1 \leq -\frac{1}{(x-5)^2} < 0 \quad (+1) \quad \equiv$$

$$0 < f'(x) < 1$$

$f'(x) \in (0, 1)$ mărginită $\left| \begin{array}{l} f \text{ este Lipschitz pe } (0, 5) \\ \Rightarrow f \text{ unif. cont. pe } (0, 5) \end{array} \right.$

$\Rightarrow f$ e unif. cont. pe $(-5, 0) \cup (0, 5)$