Mihoci Valentina .11.2022

Grupa 311

Seria 31

Tema Laborator Statistică

SIMULARE V.A.

Metoda respingerii pentru simularea v.a.

I. Cazul v.a. continue

Fie X și Y două v.a. continue cu densitățile de probabilitate f și respectiv g. Presupunem cunoscută o metodă de simulare pentru Y. Atunci:

Căutăm o constantă $c>0$ a.î. $\frac{f(y)}{g(y)} \leq c, \forall y$.

ALGORITM

1. Generez Y
2. Generez U
3. Dacă $U \leq \frac{f(Y)}{c \cdot g(Y)}$ $\begin{cases} \text{atunci } X=Y \\ \text{altfel mergi la } ① . \end{cases}$

Construiți un algoritm pentru simularea v.a. X în următoarele cazuri:

26) $f(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-x}, x>0$

SOL: $X \sim f$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Uitându-mă la suportul lui f, mă gândesc că suportul densității de probabilitate pt. Y trebuie să fie $(0;\infty)$, ceea ce mă duce cu gândul la repartiția exponențială.

Aleg $Y \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & , x > 0 \\ 0 & , \text{în rest} \end{cases}$

PRECIZARE: Am ajuns la alegerea de mai sus după mai multe încercări pe foaie.

Caut constanta c:

- Calculez $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{not.}{=} h(x) = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} e^{-x} x^2}{\cancel{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}} = e^{-x+\frac{x}{2}} x^2 =$

$= e^{-x/2} x^2.$

$h : (0; \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^2 \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

- Pentru a determina c verificăm dacă h(x) are punct de maxim.

$h'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} x^2 + 2x e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} x\left(-\frac{1}{2}x + 2\right)$

$h'(x) = 0 \iff e^{-\frac{x}{2}} x\left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (0, \infty) \\ \boxed{x = 4} \in (0, \infty) \end{cases}$

Fac tabelul de variație pt. h

x	0	2	4	6	∞
$h'(x)$		+ + + +	0	− − −	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$16e^{-2}$	$\searrow$	0

$h(4) = e^{-2} \cdot 4^2 = 16e^{-2}$

$h'(2) = e^{-1} \cdot 2 \cdot (-1+2) = 2e^{-1} > 0$

$h'(6) = e^{-3} \cdot 6(-3+2) = -6e^{-3} < 0$

$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \lim_{x \searrow 0} e^{-\frac{x}{2}} x^2 = e^0 \cdot 0^2 = 0$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} e^{-\frac{x}{2}} x^2 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{\frac{x}{2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}} = 0$$

Din tabelul de variație avem că punctul $(4; 16e^{-2})$ este punct de maxim global pt. $h \Rightarrow h(x) \leq 16e^{-2}, \forall x \in (0,\infty)$

Deci, aleg $c = 16e^{-2}$.

Mai rămâne să calculez $\frac{f(x)}{c\, g(x)} = \frac{1}{c} \cdot h(x) =$

$$= \frac{1}{16e^{-2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} x^2 = \frac{1}{16} \cdot e^{2-\frac{x}{2}} x^2$$

$Y \sim Exp(\frac{1}{2})$ (alg.)

$\begin{cases} 1)\ \text{Generez } U \sim Unif(0,1) \\ 2)\ Y = -2 \cdot \log(U) \end{cases}$

<u>Algoritm:</u>

<u>PAS1</u>: Generez $Y \sim Exp(\frac{1}{2})$

<u>PAS2</u>: Generez $U_1 \sim Unif(0,1)$

<u>PAS3</u>: Dacă $U_1 \leq \frac{1}{16} \cdot e^{2-Y/2} \cdot Y^2$ $\begin{cases} \text{atunci: } X = Y, \text{ STOP} \\ \text{altfel: revin la } \boxed{\text{PAS1}} \end{cases}$

<u>Algoritm (simplificat)</u>

variabila uniformă din alg. generării

<u>PAS1</u>: Generez U_1 și U_2 ($\sim Unif(0,1)$)

în locul lui Y

<u>PAS2</u>: Dacă $U_2 \leq \frac{1}{16} \cdot e^{+2+\frac{2\log U_1}{2}} \cdot (-2\log U_1)^2$

$\frac{1}{16} \cdot e^{+2+\frac{2\log U_1}{2}} = \frac{1}{16} \cdot e^{2+\log U_1}$

$\begin{cases} \text{atunci: } X = -2\log U_1, \text{ STOP} \\ \text{altfel: revin la } \boxed{\text{PAS1}} \end{cases}$

27) $f(x) = \frac{10^6}{336} \cdot x(1-x)^3$, $0.8 < x < 1$

$\boxed{\text{SOL}}$: $X \sim f$, $f(x) = \frac{10^6}{336} \cdot x(1-x)^3$, $x \in (0.8;1)$

Uitându-mă la suportul lui f, mă gândesc că suportul densității de probabilitate pt. Y trebuie să fie $(0.8;1)$, ceea ce mă duce cu gândul la repartiția uniformă pe intervalul $(0.8;1)$

Aleg $Y \sim Unif(0.8;1)$, $g(x) = \frac{1}{1-0.8} = \frac{1}{0.2} = 5$, $x \in (0.8;1)$

Caut constanta c:

- Calculez $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{not.}{=} h(x) = \frac{\cancel{10}^{2} \cdot 10^5}{\cancel{336}_{168}} \cdot x(1-x)^3 \cdot \frac{1}{\cancel{5}} =$

$= \frac{10^5}{168} x(1-x)^3$

$h : (0.8, 1) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{10^5}{168} x(1-x)^3$

- Pentru a determina c verific dacă $h(x)$ are punct de maxim

$h'(x) = \frac{10^5}{168} \left[(1-x)^3 + x \cdot 3 \cdot (-1)(1-x)^2 \right] =$

$= \frac{10^5}{168} \cdot (1-x)^2 \left(1 - x - 3x\right) = \frac{10^5}{168} \cdot (1-x)^2 (1-4x)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10^5}{168} (1-x)^2 (1-4x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow x = 1 \notin (0.8;1) \\ 1 - 4x = 0 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow x = \frac{1}{4} \notin (0.8;1) \end{cases}$

Deci, cum $h'(x) \neq 0$, $\forall x \in (0.8, 1) \Rightarrow$ nu avem pct. de maxim pt h, însă putem face tabelul de variație să vedem ce limite are.

x	0.8		1
$h'(x)$		$- \; - \; - \; - \; - \; -$	
$h(x)$	$\frac{80}{21}$	$\searrow$	0

$$0.8 < x < 1 \,/\cdot 4 \Rightarrow \quad 3.2 < 4x < 4 \Rightarrow -4 < -4x < -3.2$$

$$-3 < \underline{1-4x} < -2.2 < 0$$

$$h'(x) = \underbrace{\frac{10^5}{168}}_{>0} \underbrace{(1-x)^2}_{>0} \underbrace{(1-4x)}_{<0} \Rightarrow h'(x) < 0,\ \forall x \in (0.8;1)$$

$$\lim_{x \searrow 0.8} h(x) = \lim_{x \searrow 0.8} \frac{10^5}{168} \cdot (x) \cdot (1-x)^3 = \frac{10^5}{168} (0.8)(1-0.8)^3 =$$

$$= \frac{10^{\cancel{5}}}{\underset{21}{\cancel{168}}} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{10}} \cdot \frac{2^3}{\cancel{10^3}} = \frac{10 \cdot 2^3}{21} = \frac{80}{21}$$

$$\lim_{x \nearrow 1} h(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{10^5}{168} \cdot x \cdot (1-x)^3 = \frac{10^5}{168} \cdot 1 \cdot 0^3 = 0$$

Din tabelul de variație, observ că $h(x) < \frac{80}{21}$, $x \in (0.8;1)$

Deci, aleg $c = \frac{80}{21}$.

Mai rămâne să calculez $\frac{f(x)}{c \cdot g(x)} = \frac{1}{c} \cdot h(x) =$

$$= \frac{\cancel{21}}{\cancel{80}} \cdot \frac{10^{\cancel{5}\,4}}{\underset{8}{\cancel{168}}} \cdot x \cdot (1-x)^3 = \frac{\overset{250}{\cancel{1000}} \cdot \overset{5}{\cancel{10}}}{8 \cdot \underset{4}{\cancel{8}}} \cdot x(1-x)^3 =$$

$$= \frac{\overset{125}{\cancel{250}} \cdot 5}{\underset{4}{\cancel{8}}} x(1-x)^3 = \frac{725}{4} x(1-x)^3$$

<u>Algoritm</u>:

<u>PAS 1</u>: Generez $Y \sim Unif(0.8;1)$

<u>PAS 2</u>: Generez $U \sim Unif(0;1)$

<u>PAS 3</u>: Dacă $U \leq \frac{725}{4} Y (1-Y)^3$ $\begin{cases} \text{atunci } X = Y, \text{ STOP} \\ \text{altfel } \boxed{\text{PAS 1}} \end{cases}$

33) $f(x) = 2\alpha \cdot e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})$, $x > 0$, $\alpha > 0$ fixat

$\boxed{\text{SOL}}$:

$$X \sim f,\ f(x) = \begin{cases} 2\alpha\, e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x}), & x > 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Uitându-mă la suportul lui f, mă gândesc că suportul densității de probabilitate pt. Y trebuie să fie $(0;\infty)$, ceea ce mă duce cu gândul la repartiția exponențială.

Aleg $Y \sim Exp(\alpha)$, $g(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

Caut constanta c:

• Calculez $\dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{not.}}{=} h(x) = \dfrac{2\cancel{\alpha e^{-\alpha x}}(1 - e^{-\alpha x})}{\cancel{\alpha e^{-\alpha x}}} = \underbrace{2(1 - e^{-\alpha x})}_{\xrightarrow{x \to \infty} 2}$

$h : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2(1 - e^{-\alpha x})$

• Pentru a determina c verific dacă $h(x)$ are punct de maxim

$h'(x) = -2e^{-\alpha x} \cdot (-\alpha x)' = 2\alpha e^{-\alpha x}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha e^{-\alpha x} = 0 \Rightarrow$ imposibil pt. $\forall x \in (0;\infty)$ $(\alpha > 0)$

Deci, cum $h'(x) \neq 0$, $\forall x \in (0;\infty) \Rightarrow$ nu avem puncte de maxim pentru h, însă putem face tabelul de variație să vedem ce limite are.

x	0								∞
$h'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	0	$\nearrow$							2

$h'(x) = 2\alpha e^{-\alpha x} = \dfrac{2\alpha}{e^{\alpha x}} \geq 0$, $\forall x \in (0;\infty)$

$\lim\limits_{x \searrow 0} h(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} 2(1 - e^{-\alpha x}) = 2(1 - 1) = 0$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} 2(1-e^{-\alpha x}) = \lim_{x\to\infty} 2\Big(1-\underbrace{\frac{1}{e^{\alpha x}}}_{0}\Big) = 2$$

Din tabelul de variație, observ că $h(x) < 2, x\in(0;\infty)$

Deci, aleg $c = 2$.

Mai rămâne să calculez $\frac{f(x)}{c\,g(x)} = \frac{1}{c}\cdot h(x) = \frac{\cancel{2}(1-e^{-\alpha x})}{\cancel{2}}$

$= 1-e^{-\alpha x}$

Algoritm:

PAS1: Generez $Y \sim Exp(\alpha)$

1) Generez $U \sim Unif(0,1)$
2) $Y = -\frac{1}{\alpha}\log U$

PAS2: Generez $U_1 \sim Unif(0,1)$

PAS3: Dacă $U_1 \le 1-e^{-\alpha Y}$ $\begin{cases} \text{atunci: } X = Y, \text{ STOP} \\ \text{altfel: revin la } \boxed{\text{PAS1}} \end{cases}$

Algoritm simplificat:

PAS1: Generez $U_1, U_2 \sim Unif(0,1)$

PAS2: Dacă $U_2 \le \underbrace{1-e^{-\alpha\cdot(-\frac{1}{\alpha}\log U_1)}}_{1-e^{\log U_1} = 1-U_1}$ $\begin{cases} \text{atunci: } X = Y, \text{ STOP} \\ \text{altfel: revin la } \boxed{\text{PAS1}} \end{cases}$

23) $f(x) = \frac{e^x}{e-1}, \quad 0 \le x \le 1$

$\boxed{\text{SOL}}$: $X \sim f, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e-1}, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

Uitându-mă la suportul lui f, mă gândesc că suportul densității de probabilitate pt. Y trebuie să fie $(0,1)$, ceea ce mă duce cu gândul la repartiția uniformă pe $(0,1)$.

Aleg $Y \sim Unif(0,1)$, $g(x) = 1$, $x \in (0,1)$

Caut constanta c:

- Calculez $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{not.}{=} h(x) = \frac{\frac{e^x}{e-1}}{1} = \frac{e^x}{e-1}$

$h : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{e^x}{e-1}$

- Pentru a determina c verific dacă $h(x)$ are punct de maxim

$h'(x) = \frac{1}{e-1} \cdot e^x$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e-1} \cdot e^x = 0 \Rightarrow$ nu avem pct. critice

x	0		1
$h'(x)$		$+ + + + + + +$	
$h(x)$	$\frac{1}{e-1}$	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$

$h'(x) > 0$, $\forall x \in (0,1)$

$\lim\limits_{x \searrow 0} h(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{e^x}{e-1} = \frac{e^0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$

$\lim\limits_{x \nearrow 1} h(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} \frac{e^x}{e-1} = \frac{e}{e-1}$

Din tabelul de variație, observăm că $h(x) < \frac{e}{e-1}$, $\forall x \in (0,1)$.

deci, aleg $c = \frac{e}{e-1}$

Mai rămâne de calculat $\frac{f(x)}{c \cdot g(x)} = \frac{1}{c} \cdot h(x) =$

$= \frac{\cancel{e-1}}{e} \cdot \frac{e^x}{\cancel{e-1}} = e^{x-1}$

Algoritm:

PAS1: Generez $U_1, U_2 \sim Unif(0,1)$

PAS2: Dacă $U_2 \leq e^{U_1 - 1}$ atunci $X = Y$; STOP

altfel revin la $\boxed{\text{PAS1}}$