Facultatea de Matematica-Informatica
Universitatea din Bucuresti

27 Noiembrie 2019

Test EDP -varianta A

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale
Tipul examinarii: lucrare partiala
Nume student: ______________________________
Grupele 311, 312
Timp de lucru : 90 minute

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest test contine 3 probleme (toate obligatorii).

Testul este individual. In cazul fraudarii (redactare identica cu a altui coleg) se anuleaza punctajul tuturor partilor implicate.

Pentru redactarea solutiilor incercati sa aplicati urmatoarele reguli:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **trebuie sa indicati** acest lucru si sa explicati de ce rezultatul respectiv se poate aplica.
- Pe cat posibil, **organizati-va munca** astfel incat la sfarsitului timpului de lucru sa returnati rezolvarile in ordinea de pe subiecte.
- Va sugerez sa rezolvati mai intai ce stiti sa faceti la prima vedere pentru a nu intra in criza de timp la finalul timpului de lucru !
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Punctaj: Problema 1 (2.5 p), Problema 2 (3.5 p), Problema 3 (3 p). Un punct este din oficiu, deci se **pleaca din nota 10**.

Problema 1. *(2.5p)*

(a). Calculati (pe domeniul maxim de definitie) $\frac{\partial f}{\partial y}$ *pentru functia*

$$f(x,y) = \arctan\left(3^{x\cos(y)}\right).$$

(b). Calculati

$$\int_{B_2(0)} |x|^{-\frac{5}{4}} dx,$$

unde $B_2(0) \subset \mathbb{R}^5$ *este bila de raza 2 centrata in origine.*

(c). Integrati problema Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 u_x(x,y) - 3u_y(x,y) = u^2, & u = u(x,y) \\ u(x,0) = e^x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Problema 2. *(3.5p) Fie* $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 4\}$ *si* $\partial\Omega$ *frontiera lui* Ω*. Fie problema*

$$(2) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x,y) = (2-x)^2, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

(a). Aratati ca problema (2) *are cel mult o solutie* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(b). Aratati ca u este functie para in raport cu variabila y. Calculati $u_y(0,0)$.

(c). Gasiti constanta C astfel incat functia $v(x,y) = C(x^2+y^2)$ *sa verifice* $-\Delta v = 4$ *in* Ω.

(d). Folosind (eventual) principiul de maxim pentru functii armonice sa se determine solutia problemei

$$(3) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x,y) = 4, & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

(e). Folosind (eventual) principiul de maxim pentru functii sub/super armonice sa se arate ca solutia problemei (2) *verifica*

$$0 < u(x,y) \leq 4, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Problema 3. *(3p)*

(a). Fie functia $g(x) := |x|^{\frac{3}{2}} - x_1 x_2, \quad x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$*. Calculati* $\operatorname{div}(g(x)x)$ *intr-un punct oarecare din domeniul de definitie si apoi in punctul (0,1,1).*

(b). Calculati $\Delta(x \cdot \nabla(|x|^4)), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Se considera problema la limita

$$(4) \qquad \begin{cases} u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) = u(1,y) = 0, & x \in (0,1), \ y \in (0,1) \\ u_x(0,y) - u(0,y) = \sin(2\pi y), & y \in (0,1), \end{cases}$$

(c). Aratati ca (4) *are cel mult o solutie de clasa* C^2.

(d). Gasiti solutia problemei (4) *cautand-o sub forma* $u(x,y) = A(x)B(y)$.