Nume și prenume: DINOIU NADIA-STEFANIA
Grupa: 311

Nota: ____________

Examen

12 Mai 2020

Timpul de rezolvare al problemelor este de 2h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF[1] în folderul vostru de pe Dropbox aveți 30 de minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe la **ora 14 și 58 minute** și se termină la **ora 17 și 28 minute**.

⚠ Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Numărul de clienți pe zi de la ghișeul unei bănci poate fi modelat cu ajutorul unei variabile aleatoare $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Pentru a îmbunătății serviciile oferite, banca vrea să estimeze parametrul λ atât prin metoda momentelor cât și prin metoda verosimilității maxime. Pentru aceasta dispune de următorul eșantion înregistrat pe parcursul a două săptămâni:

`X: 24 22 29 23 32 29 22 29 20 26 27 27 30 24`

a) Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor $\tilde{\lambda}$ și estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\lambda}$ și verificați dacă aceștia sunt deplasați, consistenți și eficienți. Determinați repartiția lor limită.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\lambda(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 2 (asemănător cu ex 3, 12 mai 2018)

10p

Numărul de clienți care intră în magazinul Unirea zilnic poate fi modelat cu ajutorul unei variabile aleatoare repartizate Poisson de parametru λ, cunoscut. Odată intrat, un client cumpără produse în valoare de cel puțin 250 RON cu probabilitatea p. Pentru a estima p avem la dispoziție un eșantion $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{20}$ pentru 20 zile, reprezentând numărul de clienți, zilnic, care au efectuat cumpărături de cel puțin 250 RON:

`Y: 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0`

Propuneți un estimator pentru p, studiați proprietățile acestuia și dați o estimare plecând de la eșantionul dat (știind că $\lambda = 20$).

Exercițiul 3

10p

Fie X o v.a. de densitate

$$f_\theta(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

[1] Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner

cu $\theta > 0$ un parametru și A o constantă (care depinde de θ). Fie $X_1, \ldots, X_n$ un eșantion de talie $n \in \mathbb{N}^*$ din populația X.

a) Determinați constanta A și calculați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ, verificați dacă este deplasat, consistent și eficient și găsiți repartiția limită a acestuia.

c) În cazul în care $\theta = 4$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0, 1]$: $u_1 = 0.008$, $u_2 = 0.321$ și $u_3 = 0.582$.

1

EXAMEN MAI 2020

$X \sim Pois(\lambda)$

$\Rightarrow P(X=x) = \dfrac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

$\tilde{\lambda}$ - estimatorul obținut prin metoda momentelor

$\hat{\lambda}$ - estimatorul de verosimilitate maximă

X: 24 22 29 23 32 29 22 29 20 26 27 27 30 24

a) $\tilde{\lambda} = ?$, $\hat{\lambda} = ?$ sunt deplasați? Dar consistenți? sunt eficienți? repartiția limită?

Sol

$E_\lambda[X] = \overline{X}$

$\lambda = \overline{X} \Rightarrow \tilde{\lambda} = \overline{X}$ estimatorul obținut prin metoda momentelor

Funcția de verosimilitate pentru v.a. discrete

pentru $\hat{\lambda}$:

$$\boxed{L(\lambda; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!}$$

$$= e^{-\lambda n} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$\Rightarrow \ell(\lambda; x_1, \ldots, x_n) = \ln L = -\lambda n + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} \left(\ln \lambda^{x_i} - \ln(x_i!)\right)$$

$$= -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} \ln \lambda^{x_i} - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln \lambda - \sum \ln(x_i!)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = -n + \sum x_i \cdot \frac{1}{\lambda}$$

egalăm $\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \sum \frac{x_i}{\lambda} = n \Rightarrow \frac{\sum x_i}{\lambda} = n \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{X}$

estimatorul obținut prin metoda verosimilității maxime

$\boxed{\text{un estimator } \hat{\theta} \text{ e nedeplasat} \Leftrightarrow E_\theta(\hat{\theta}) = \theta}$

$\hat{\lambda} = \overline{X} = \overline{X}$

~~$E(\hat{\theta})$~~ $E_\lambda[\hat{\lambda}] = E_\lambda[\overline{X}] = E_\lambda[\overline{X}] = E_\lambda\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right]$

$= \frac{1}{n} \cdot E_\lambda\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E_\lambda[X_i] \; (*)$

Dar, la Poisson, $E[X] = \lambda$; Deci, $(*) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda =$

și $E[X_i] = E[X], \forall i$ $\qquad = \frac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda \Rightarrow$

$\hat{\lambda}$ și $\overline{X}$ sunt nedeplasați

$\boxed{\hat{\theta} \text{ e eficient} \Leftrightarrow Var(\hat{\theta}) = MIRC}$

$\boxed{\hat{\theta} \text{ e consistent} \Leftrightarrow \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta}$

$$Var(\hat{\lambda}) = Var(\tilde{\lambda}) = Var(\overline{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Var(X_i) = Var X}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var X_i = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var X = \frac{1}{n} Var X \underset{\uparrow}{=} \lambda \cdot \frac{1}{n} = \frac{\lambda}{n}$$

(e știut) la repartiția Poisson că $Var X = \lambda$

OBS $\boxed{Var X = E[X^2] - (E[X])^2}$

Acum aflăm MIRC-ul

$$\underline{\underline{MIRC}} = \frac{1}{n \cdot E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln P(X=x)\right)^2\right]}$$

$$= \boxed{\frac{1}{-n \cdot E\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \ln P(X=x)\right]}}$$

$$\ln P(X=x) = \ln \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = \ln(\lambda^x \cdot e^{-\lambda}) - \ln x!$$

$$= \ln \lambda^x + \ln e^{-\lambda} - \ln x! = x \ln\lambda - \lambda \ln e - \ln x!$$

$$= x\ln\lambda - \lambda - \ln x!$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln P(X=x)}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}(x\ln\lambda - \lambda - \ln x!)$$

$$= \frac{x}{\lambda} - 1 - \overbrace{\frac{\partial \ln x!}{\partial\lambda}}^{\text{constantă}} = \frac{x}{\lambda} - 1 - 0 = \frac{x}{\lambda} - 1$$

$$\frac{\partial^2 \ln P(X=x)}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{x}{\lambda}-1\right) = \frac{-x}{\lambda^2}$$

Deci, MIRC $= \dfrac{1}{-n \cdot E\left[\frac{-X}{\lambda^2}\right]} = \dfrac{1}{-n} \cdot \dfrac{1}{E\left[\frac{-X}{\lambda^2}\right]}$

$$= \frac{1}{-n} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{\lambda^2} \cdot E[X]} = \frac{1}{\frac{n}{\lambda^2} \cdot E[X]} = \frac{\lambda^2}{n} \cdot \frac{1}{E[X]} = \frac{\lambda^2}{n\lambda} = \frac{\lambda}{n}$$

$= Var(\hat{\lambda}) = Var(\tilde{\lambda})$

$\Rightarrow$ $\hat{\lambda}$ și $\tilde{\lambda}$ sunt eficiente

consistența:

Legea numerelor mari - teoremă

Fie $(X_n)_n$ un șir de v.a. i.i.d, cu $\mu = E[X_1] < \infty$

Atunci: $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to \infty]{a.s.} \mu$

Din legea numerelor mari $\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} \xrightarrow{a.s.} E[X_1] = E[X]$

IMPLICAȚIE: Dacă $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, atunci $X_n \xrightarrow{P} X$

Dacă $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$

Deci, $\underbrace{\overline{X}}_{\substack{\| \\ \hat{\lambda} = \tilde{\lambda}}} \xrightarrow{\mathbb{P}} E[X] = \lambda$

$\Rightarrow \hat{\lambda} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda$ și $\tilde{\lambda} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda \Rightarrow \hat{\lambda}$ și $\tilde{\lambda}$ sunt consistenți

b) estimatorul de verosimilitate maximă pentru $P_\lambda(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$ $= ?$ Este acesta consistent?

Sol $P_\lambda(X_1 = 1 \mid X_1 > 0) =$

$$X_1 \sim P(\lambda) \Rightarrow X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ & & \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} & & \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_1 > 0))}{\mathbb{P}(X_1 > 0)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1)}{1 - \mathbb{P}(X \le 0)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1)}{1 - \mathbb{P}(X = 0)}$$

X nu poate fi negativ pt Poisson

$$\frac{\frac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!}}{1 - \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!}} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \overset{not}{=} g(\lambda)$$

Vrem un estimator de verosimilitate maximă pentru $g(\lambda)$

$$MIRC = \frac{g'(\lambda)^2}{n \cdot E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f_\lambda(x_i)\right)^2\right]} = \boxed{\frac{g'(\lambda)^2}{-n \cdot E\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln f_\lambda(x_i)\right)\right]}}$$

Dacă vreau estimatorul de ver. max. pentru $g(\lambda)$, plec de la estimatorul de verosim max. pentru λ și aplic pe el funcția respectivă

$\hat{\lambda} = \overline{X}$ ← estimatorul de ver max pentru λ

$g(\lambda) = \dfrac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

curs 10

Teorema: Dacă $\hat{\theta}$ este EVM pentru θ, atunci, pentru ∀ fct g avem că $g(\hat{\theta})$ este EVM pentru $g(\theta)$

Din propoziția de invarianță ⇒ estim de. ver max pentru $g(\lambda)$

este $g(\hat{\lambda}) = \dfrac{\hat{\lambda} \cdot e^{-\hat{\lambda}}}{1-e^{-\hat{\lambda}}} = \dfrac{\overline{X} \cdot e^{-\overline{X}}}{1-e^{-\overline{X}}} \overset{not}{=} \widehat{g(\lambda)}$

Verificăm consistența:

Avem că $\overline{X} \xrightarrow{P} \lambda$ (din subpunctul a))

~~Avem g funcție~~

teorema aplicațiilor continue → curs 5

Fie $(X_n)_n$ un șir de v. a, X o v. a și g o funcție ale cărei puncte de discontinuitate sunt notate cu D_g. Dacă $P(X \in D_g) = 0$, atunci șirul $(g(X_n))_n$ converge la $g(X)$ în același mod în care $X_n \to X$:

Dacă $X_n \xrightarrow{P} X$, atunci $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ (analog pentru $X_n \xrightarrow{a.s} X$ și $X_n \xrightarrow{D} X$)

Din teorema aplicațiilor continue ⇒ $g(\overline{X}) \xrightarrow{P} g(\lambda)$, adică $\widehat{g(\lambda)}$ e consistent

$g(\overline{X}) = \dfrac{\overline{X} \cdot e^{-\overline{X}}}{1-e^{-\overline{X}}} = \widehat{g(\lambda)}$

c) Estimatorul este nedeplasat?

Verificăm dacă $E\left[\widehat{g(\lambda)}\right] = g(\lambda) = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

! Dacă g e convexă avem că $E(g(X)) > g(E(X))$, iar dacă g e concavă, avem că $E(g(X)) < g(E(X))$

(caracterizarea funcțiilor subarmonice de la EDP, sau așa ceva :))))

verificăm convexitatea:

$$g(x) = \frac{x \cdot e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$$g'(x) = \frac{(x \cdot e^{-x})' \cdot (1-e^{-x}) - x \cdot e^{-x} \cdot (1-e^{-x})'}{(1-e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{-x} + x \cdot (-e^{-x})) \cdot (1-e^{-x}) - x \cdot e^{-x}(-(-e^{-x}))}{(1-e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}))(1-e^{-x}) - x \cdot e^{-x} \cdot e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} =$$

$$\frac{e^{-x} - e^{-2x} - x \cdot e^{-x} + \cancel{x \cdot e^{-2x}} - \cancel{x \cdot e^{-2x}}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(1-e^{-x}-x)}{(1-e^{-x})^2}$$

$$g''(x) = \frac{(e^{-x})' \cdot (1-e^{-x}-x) - (e^{-x}) \cdot (1-e^{-x}-x)'}{(1-e^{-x})^4} =$$

$$\frac{-e^{-x} \cdot (1-e^{-x}-x) - e^{-x} \cdot (e^{-x}-1)}{(1-e^{-x})^4} = \frac{-e^{-x}(\cancel{1} - \cancel{e^{-x}} - x + \cancel{e^{-x}} - \cancel{1})}{(1-e^{-x})^4}$$

$$= \frac{e^{-x} \cdot x}{(1-e^{-x})^4} > 0, \ \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow g \text{ e convexă}$$

$$\Rightarrow E[g(x)] > g(E[x]) \Rightarrow$$

$$E[g(\overline{x})] > g(E[\overline{x}]) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{E\left[\frac{\overline{x} \cdot e^{-\overline{x}}}{1 - e^{-\overline{x}}}\right]}_{\substack{\| \\ E[\widehat{g(\lambda)}]}} > g(\lambda) = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

Deci, $E[\widehat{g(\lambda)}] \neq g(\lambda) \Rightarrow$ $\widehat{g(\lambda)}$ e deplasat