Subiecte algebră iulie 2022

1. R inel principal și L un R modul de rang n. Dem. că orice R submodul al lui el este R modul liber de rang $\leq n$.

2. Fie $L = \langle (2,-1,1), (2,0,1), (-1,2,1), (0,3,3) \rangle$

a) factorii invarianți și o $\mathbb{Z}$ bază pentru L

b) sunt modulele $\mathbb{Z}^3$ și L egale?

3. $x^{13} - x^{10} - 4x^8 + 4x^5 + 4x^3 - 4 \in \mathbb{Q}[x]$

a) gradul extinderii $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_f$.

b) Să se arate că $(\exists)$ un nr. n natural a.î. $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{6})$ este inclus în cel de-al n-lea corp ciclotomic.

4. a) $\Phi_{240} = ?$ - descrieți-l

b) gradul extinderii $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sin\frac{\pi}{240}\right)$

Soluții și barem detaliat.

Ex 1 (teorie) • <u>Inducție</u> : cazul $n=1$ (0,5 puncte)

• <u>pasul de inducție</u> $n-1 \longmapsto n$ (2 puncte).

Ex 4 (1) $\phi_{240} = ?$

$$\phi_{240}(x) = \phi_{2^4 \cdot 3 \cdot 5}(x) \overset{(39)}{=} \phi_{2\cdot 3\cdot 5}\left(x^{\frac{240}{2\cdot 3\cdot 5}}\right) = \phi_{2\cdot 3\cdot 5}(x^8)$$

$$\phi_{2\cdot 3\cdot 5}(x) \overset{(37)}{=} \phi_{3\cdot 5}(-x)$$

$$\phi_{3\cdot 5}(x) \overset{(38)}{=} \frac{\phi_3(x^5)}{\phi_3(x)} = \frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1} =$$

$$= x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 \Longrightarrow$$

$$\phi_{30}(x) = x^8 + x^7 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\phi_{240}(x) = x^{64} + x^{56} - x^{40} - x^{32} - x^{24} + x^8 + 1} \quad (1{,}25\text{ p})$$

obs: Se acceptă și alte soluții. Asta e cea mai <u>scurtă</u>!

(2) Știm (dem. la <u>curs</u>) $\left[\mathbb{Q}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\right) : \mathbb{Q}\right] = \frac{\varphi(n)}{2}$, (0,25p)

$(\forall)\ k \in \mathbb{N}$, $\underline{(k,n) = 1}$

$$\underline{\sin\left(\frac{\pi}{240}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{240}\right) = \cos\left(\frac{119\pi}{240}\right) = \underline{\cos\left(\frac{2\cdot 119\pi}{480}\right)}$$

$$(119, 480) = 1 \Rightarrow \underline{\left[\mathbb{Q}\left(\sin\left(\frac{\pi}{240}\right)\right) : \mathbb{Q}\right]} = \frac{\varphi(480)}{2} = \underline{64} \quad (1\text{ punct})$$

$\boxed{Ex. 2}$ (1) Factorii invarianți ai lui L în $\mathbb{Z}^3$ sunt $d_1 = 1$, $d_2 = 1$ și $d_3 = 3$, deci $\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} L = 3$.

De exemplu,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: D = UAV, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$U = D_3(-1)\, T_{32}(-3)\, T_{43}(-2)\, T_{41}(-3)\, T_{31}(-1)\, T_{21}(-1) \in GL_4(\mathbb{Z}),$$

$$V = P_{13}\, T_{12}(1)\, T_{13}(-2) \in GL_3(\mathbb{Z}).$$ (1 punct)

Notând $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică a $\mathbb{Z}$-modulului $\mathbb{Z}^3$, avem că $\{f_1, f_2, f_3\}$ este de asemenea $\mathbb{Z}$-bază a lui $\mathbb{Z}^3$, unde

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

iar o bază în L este $\{d_1 f_1, d_2 f_2, d_3 f_3\}$, anume $\{2e_1 - e_2 + e_3, e_2, 3e_3\}$. (1 punct)

(2) $L \neq \mathbb{Z}^3$ căci $d_3 \notin U(\mathbb{Z})$. (0,5 puncte)

Dacă, prin absurd, $L = \mathbb{Z}^3$, atunci matricea $\tilde{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ar corespunde unei schimbări de bază în $\mathbb{Z}^3$, deci $\tilde{D} \in GL_3(\mathbb{Z})$, ceea ce e fals.

3. (1) $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_3, \zeta_5)$ – 0,5 puncte

$\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) * \mathbb{Q}(\zeta_3, \zeta_5) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) * \mathbb{Q}(\zeta_{15})$;

$[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) : \mathbb{Q}] = 5$, $[\mathbb{Q}(\zeta_{15}) : \mathbb{Q}] = \varphi(15) = 8$,

şi cum $(5, 8) = 1$, rezultă ~~că~~ $[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}] = 5 \cdot 8 = 40$ – 1 punct.

(2) Fie $\zeta_8 = \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, şi deci $\sqrt{2} = \zeta_8 + \overline{\zeta_8} \in \mathbb{Q}(\zeta_8)$ – 0,25 puncte

Apoi fie $\zeta_{12} = \cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, de unde $\sqrt{3} = \zeta_{12} + \overline{\zeta_{12}} \in \mathbb{Q}(\zeta_{12})$ – 0,25 puncte.

Prin urmare, $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\zeta_8, \zeta_{12}) = \mathbb{Q}(\zeta_{[8,12]}) = \mathbb{Q}(\zeta_{24})$; deci găsim $n = 24$ – 0,5 puncte.

<u>ALTFEL</u>: Observăm că $\zeta_8 = \zeta_{24}^3$ şi $\zeta_{12} = \zeta_{24}^2$ aşa că $\sqrt{6} = (\zeta_{24}^3 + \overline{\zeta_{24}^3})(\zeta_{24}^2 + \overline{\zeta_{24}^2}) \in \mathbb{Q}(\zeta_{24})$.