Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

13 mai 2020, 16:00–18:30

NUME:	....
PRENUME:	....
GRUPA:	....

INSTRUCŢIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
3. Pe prima pagină a rezolvării fiecarei probleme, vor fi scrise **cu litere de tipar** `numele şi prenumele studentului, precum şi grupa acestuia.`
4. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
5. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 16:00–18:30.**
6. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email:
   - ca fişier PDF, împreună cu fişierul cu subiectele examenului;
   - atât titularului de curs (Prof. dr. Liviu MARIN: `liviu.marin@fmi.unibuc.ro`), cât şi titularului de laborator (Drd. Andreea GRECU: `andreea.grecu@my.fmi.unibuc.ro`);
   - vor avea următoarea **linie de subiect**:
     `Restanţă AnNumMetNum - Nume si prenume student, Grupa 3XX`
7. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **miercuri, 13 mai 2020, orele 19:00.**

Analiză Numerică & Metode Numerice
Restanţă – Anul III – Subiectul#22

I. Presupunem că şirul $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ converge către $x^\star \in \mathbb{R}$ cu ordin/viteză de convergenţă supraliniară. Arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x^\star|} = 1.$$

II. Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ şi nodurile de interpolare $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$. Fie $P_{0,1,\ldots,n-1}(x)$ şi $P_{1,2,\ldots,n}(x)$ polinoamele de interpolare Lagrange asociate funcţiei f şi nodurilor de interpolare $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, respectiv $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Arătaţi că

$$P(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \left[(x - x_0)P_{1,2,\ldots,n}(x) - (x - x_n)P_{0,1,\ldots,n-1}(x)\right], \quad x \in [a, b]\,, \tag{1}$$

este polinomul de interpolare Lagrange asociat funcţiei f şi nodurilor de interpolare $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

III. Fie $f \in \mathrm{C}^2[a, b]$, $h > 0$ suficient de mic şi $x \in (a, b)$ fixat.

(a) Determinaţi formula de aproximare cu diferenţe finite ascendente pentru $f'(x)$ şi *eroarea de trunchiere* asociată, $e_t(x)$.

(b) Estimaţi eroarea de trunchiere asociată, $e_t(x)$.

(c) Pentru orice $x \in (a, b)$, $f(x)$ prin reprezentarea sa în calculator în virgulă mobilă, $\widetilde{f}(x)$, astfel încât această evaluare conţine o *eroare de rotunjire*, $e_r(x)$, i.e.

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + e_r(x)\,, \quad \text{unde} \quad |e_r(x)| \leq \epsilon\,,\ \forall\, x \in (a, b)\,, \tag{2}$$

unde $\epsilon > 0$ este *precizia maşinii* şi este cunoscută.

Determinaţi *eroarea totală*, i.e. $e(x) := e_t(x) + e_r(x)$, indusă ca urmare a aproximării cu diferenţe finite ascendente pentru $f'(x)$ şi a reprezentării în calculator a numerelor în virgulă mobilă.

(d) Determinaţi valoarea optimă a lui $h > 0$ care minimizează eroarea totală, $e(x)$, obţinută la punctul (c).

IV. Fie funcţia pondere $w : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, şi $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset \mathbb{P}_n$ un sistem de polinoamele ortogonale în raport cu produsul scalar din $\mathrm{L}^2_w(0, 1)$.

Determinaţi un sistem de polinoamele ortogonale în raport cu produsul scalar din $\mathrm{L}^2_w(0, b)$, $b > 0$, unde $w : (0, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$.