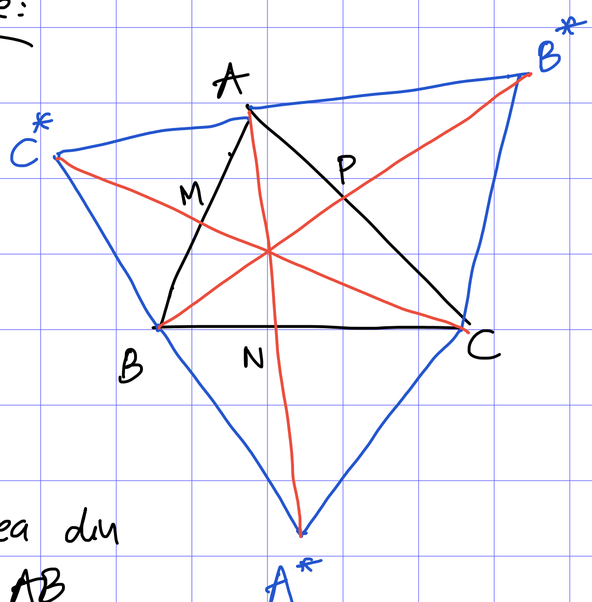
GEOMETRIE
SEMINAR 6

Exc 5.1 Considerăm $\triangle ABC$ și construim în exteriorul lui, pe laturi, triunghiurile echilaterale C^*AB, B^*AC și A^*BC.

Demonstrați, eventual folosind teorema lui Ceva și teorema sinusurilor, că CC^*, BB^* și AA^* sunt concurente. (Punctul de intersecție s.n. punctul lui Fermat)

Demonstrație:



$C^*C \cap AB = \{M\}$

$B^*B \cap AC = \{P\}$

$A^*A \cap BC = \{N\}$

$$\underbrace{\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1}_{\text{vrem să demonstrăm}} \iff CC^*, BB^* \text{ și } AA^* \text{ se inters. într-un singur punct}$$

teorema lui Ceva

reciproca th. Ceva

C^*H = înălțimea din C^* pe AB

$$\boxed{\frac{MA}{MB}} = \frac{MA \cdot C^*H}{MB \cdot C^*H} = \frac{\mathcal{A}_{C^*AM}}{\mathcal{A}_{C^*BM}} = \frac{C^*A \cdot C^*M \cdot \sin \widehat{MC^*A}}{C^*B \cdot C^*M \cdot \sin \widehat{MC^*B}} = \frac{\sin \widehat{MC^*A}}{\sin \widehat{MC^*B}}$$

deoarece $C^*A = C^*B$ ($\triangle C^*AB$ = echil.)

Mai departe, aplicăm teorema sinusurilor în $\boxed{\triangle C^*AC}$ și $\triangle C^*BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta C^*AC: \quad \dfrac{AC}{\sin \widehat{MC^*A}} = \dfrac{CC^*}{\sin \widehat{CAC^*}} = \dfrac{CC^*}{\sin\left(\widehat{CAB}+\frac{\pi}{3}\right)} \\[2em] \Delta C^*BC: \quad \dfrac{BC}{\sin\left(\widehat{MC^*B}\right)} = \dfrac{CC^*}{\sin\left(\widehat{CBC^*}\right)} = \dfrac{CC^*}{\sin\left(\widehat{ABC}+\frac{\pi}{3}\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{AC}{\sin \widehat{MC^*A}}}{\dfrac{BC}{\sin \widehat{MC^*B}}} = \frac{\dfrac{CC^*}{\sin\left(\widehat{CAB}+\frac{\pi}{3}\right)}}{\dfrac{CC^*}{\sin\left(\widehat{ABC}+\frac{\pi}{3}\right)}} \Rightarrow \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin \widehat{MC^*B}}{\sin \widehat{MC^*A}} = \frac{\sin\left(\widehat{ABC}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\widehat{CAB}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\sin \widehat{MC^*A}}{\sin \widehat{MC^*B}} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin\left(\widehat{CAB}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\widehat{ABC}+\frac{\pi}{3}\right)}}$$

Am obținut: $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AC}{BC} \cdot \dfrac{\sin\left(\widehat{CAB}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\widehat{ABC}+\frac{\pi}{3}\right)}$

Similar, vom obține: $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{BA}{CA} \cdot \dfrac{\sin\left(\widehat{ABC}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\widehat{BCA}+\frac{\pi}{3}\right)}$

și

$\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{CB}{AB} \cdot \dfrac{\sin\left(\widehat{BCA}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\widehat{CAB}+\frac{\pi}{3}\right)}$

Înmulțim cele 3 și obținem

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BA}{CA} \cdot \frac{CB}{AB} \cdot \frac{\sin\left(\widehat{CAB}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\widehat{ABC}+\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\widehat{ABC}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\widehat{BCA}+\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\widehat{BCA}\dots\right.}{\sin\left(\widehat{CAB}\dots\right.}$$

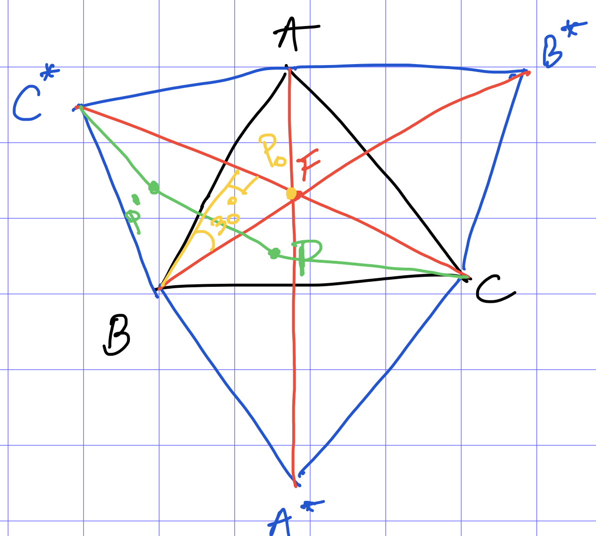
$= 1$ ✓

$\boxed{\text{Exc } 5.2}$ Fie ΔABC. Construiți un punct P în interiorul triunghiului a.î. $|PA| + |PB| + |PC|$ este minim.

Este acest punct unic?

Demo.: Considerăm punctele C^*, B^* și A^* ca în $\boxed{\text{Exc } 5.1}$

Studiem mai întâi cazul în care toate unghiurile sunt $\leq 120^\circ$.



Considerăm P arbitrar în interiorul ΔABC

Considerăm rotația $R_{B,\frac{\pi}{3}}$

$$P' = R_{B,\frac{\pi}{3}}(P)$$

$\Delta ABP \equiv \Delta C^*BP'$ $\left(\begin{array}{l} AB = C^*B \\ BP = BP' \\ AP = C^*P' \end{array} \right)$

deoarece $R_{B,\frac{\pi}{3}}(A) = C^*$

$$PA + PB + PC = C^*P' + PB + PC$$
$$= C^*P' + P'P + PC \geq C^*C \quad [\star]$$

deoarece $\Delta BPP'$ este echilateral

Similar, obținem și $PA + PB + PC \geq B^*B$

$PA + PB + PC \geq A^*A$

cu egalitate dacă $P, P' \in CC^*$ și C^*, P', P, C sunt în această ordine

În continuare, arătăm că $\exists P_0 \in CC^*$ a.î. $P_0' = R_{B,\frac{\pi}{3}}(P_0) = CC^*$

și C^*, P_0', P, C sunt în această ordine.

Construim $BQ \perp CC^*$, luăm $P_0, P_0' \in CC^*$ a.î.

C^*, P_0', P, C în acestă ordine și

$$R_{B,\frac{\pi}{3}}(P_0) = P_0'.$$

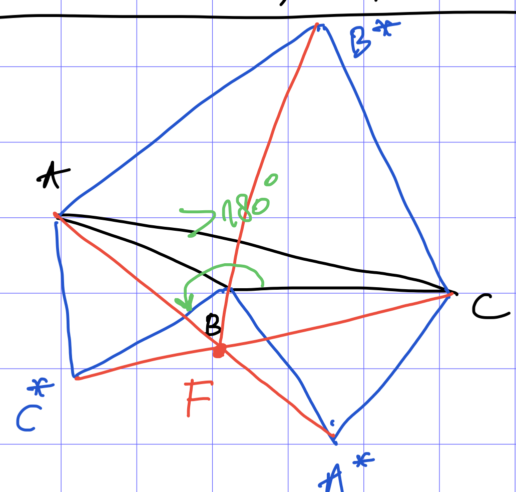
Atunci obținem egalitate în inegalitatea [★].

Analog, există P_1 pe BB^* a.î. $P_1A + P_1B + P_1C = BB^*$

și P_2 pe AA^* a.î. $P_2A + P_2B + P_2C = AA^*$.

Dar BB^*, AA^*, CC^* sunt egale, iar minimul se realizează numai dacă punctul se află pe BB^*, pe AA^*, și pe CC^*.

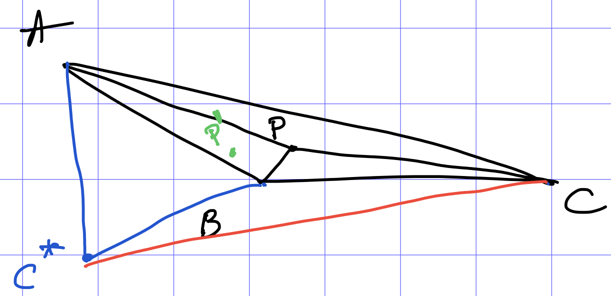
Obținem în final că $AA^* \cap BB^* \cap CC^* \neq \phi$ și punctul lor de inters., F, este punctul căutat.



Q: În ce situație F este în afara triunghiului ABC?

A: un unghi este $> 120°$

Analizăm acum cazul în care ΔABC are un unghi $> 120°$.



Considerăm P în interiorul ΔABC

Construim $P' = R_{B,\frac{\pi}{3}}(P)$.

Vom arăta că $PA+PB+PC > BA+BC$

$$PA+PB+PC = C^*P' + P'P + PC > C^*B + BC = AB+BC$$

$$= BA+BB+BC$$

ΔC^*BC, poligonul $C^*P'PC$

$R_{B,\frac{\pi}{3}}(P) = P'$

$\Delta BPP' =$ echilateral

$R_{B,\frac{\pi}{3}}(A) = C^*$ deoarece $\Delta C^*AB =$ echilateral

OBS: Dacă avem un poligon și un triunghi în interiorul poligonului care are o latură comună cu poligonul, atunci perimetrul poligonului e mai mare decât perimetrul triunghiului

Concluzie: Dacă un unghi este $\geq 120°$, atunci punctul P căutat este vârful obtuz al Δ.

$\boxed{\text{Ex } 6.1}$ Fie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 5\right)$

Demonstrați că f este izometrie.
Este f simetrie axială?

Rezolvare:

$$f(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}}_{b}$$

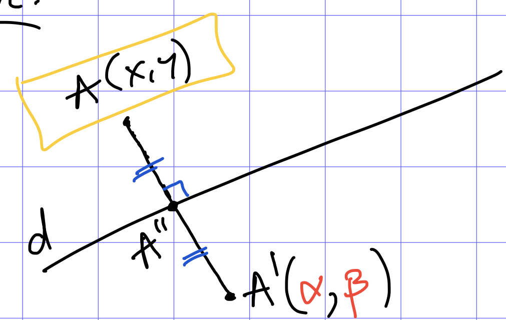
$$A\cdot {}^tA = \begin{pmatrix} \left(\frac35\right)^2+\left(-\frac45\right)^2 & \frac35\cdot\frac45 + -\frac45\cdot\frac35 \\ \frac45\cdot\frac35+\frac35\cdot\left(-\frac45\right) & \left(\frac45\right)^2+\left(\frac35\right)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \checkmark$$

deci $A \in O(2)$.

$$\det A = \frac{9+16}{25} = 1 \implies f = \text{rotație}$$

$\boxed{\text{Exc } 6.2}$ Scrieți ecuația simetriei față de dreapta $d:\ 2x+3y-6=0$.

Rezolvare:



Vrem mai întâi să scriem ec. lui AA'.

Vect. directorul director al lui AA' = vectorul normal al lui d = $=(2,3)$

$$A''\underbrace{(x+2t,\ y+3t)}_{\text{ec. parametrică a lui } AA''},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$A''\in d \implies 2(x+2t)+3(y+3t)-6=0$$

$$4t+9t+2x+3y-6=0$$

$$t=\frac{-2x-3y+6}{13}$$

deci $$A''=\left(x+2\cdot\frac{-2x-3y+6}{13},\ y+3\cdot\frac{-2x-3y+6}{13}\right)$$

$$\boxed{A''=\left(\frac{9x-6y+12}{13},\ \frac{-6x+4y+18}{13}\right)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+\alpha}{2} = \dfrac{9x-6y+12}{13} \\ \\ \dfrac{y+\beta}{2} = \dfrac{-6x+4y+18}{13} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2(9x-6y+12)}{13} - x \\ \\ \beta = \dfrac{2(-6x+4y+18)}{13} - y \end{cases}$$

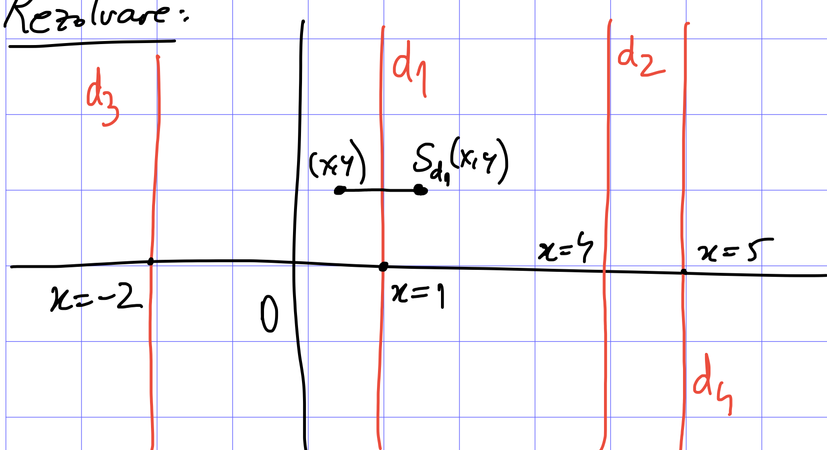
$$S_d(A(x,y)) = A'\left(\frac{5x-12y+24}{13}, \frac{-12x-5y+36}{13} \right)$$

$\boxed{\text{Exc } 6.3}$ Fie dreptele $d_1 : x = 1$ $\quad d_3 : x = -2$

$d_2 : x = 4$ $\quad d_4 : x = 5.$

Calculați $S_{d_1} \circ S_{d_2} \circ S_{d_3} \circ S_{d_4}$. Comută cele 4 simetrii?

Rezolvare:



$$S_{d_1}(x,y) = (\alpha,\beta) = (2-x, y)$$

$$\frac{x+\alpha}{2} = 1$$

$$\alpha = 2-x$$

$$\beta = y$$

$$S_{d_2}(x,y) = (8-x, y)$$

$$S_{d_3}(x,y) = (-4-x, y)$$

$$S_{d_4}(x,y) = (10-x, y)$$

$$\left(S_{d_1}\circ S_{d_2}\circ S_{d_3}\circ S_{d_4}\right)(x,y) = \left(2-\left(8-\left(-4-(10-x)\right)\right), y\right)$$

$$= (-20+x, y) = (x,y)+(-20,0)$$

$$= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-20\\0\end{pmatrix} = \text{translație}$$

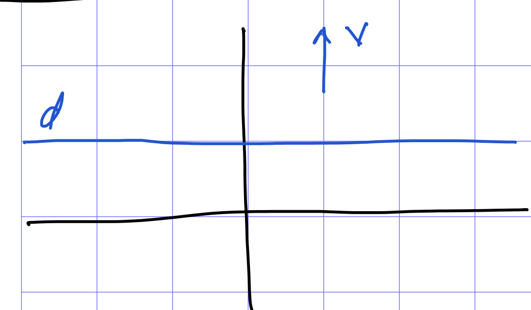
$$\boxed{S_{d_1}\circ S_{d_2} \overset{?}{=} S_{d_2}\circ S_{d_1}}$$

$$\left.\begin{aligned}\left(S_{d_1}\circ S_{d_2}\right)(x,y) &= \left(2-(8-x), y\right) = (-6+x, y)\\ \left(S_{d_2}\circ S_{d_1}\right)(x,y) &= \left(8-(2-x), y\right) = (6+x, y)\end{aligned}\right\} \text{nu sunt egale}$$

Deci simetriile de mai sus nu comută.

$\boxed{\text{Exc 6.4}}$ Dați exemplu de dreaptă d și vector $v \neq 0$, unul pt care $T_v \circ S_d$ = simetrie axială și unul pt care nu este.

Rezolvare:



$d: y = 1$

$v = (0,1)$

$$\left(T_v\circ S_d\right)(x,y) = T_v(x, 2-y)$$

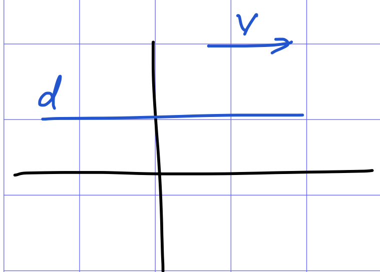
$$= (x, 3-y) = S_{d'}(x,y)$$

unde $d' : y = \frac{3}{2}$

Acum, alegem d și v a.i. $T_v \circ S_d$ să nu fie simetrie axială.

$d: y = 1$

$v: (1,0)$



$$(T_v \circ S_d)(x,y) = T_v(x, 2-y) = (x+1, 2-y)$$

Nu are puncte fixe

$(x+1, 2-y) = (x,y)$ NU are soluții

Deci $T_v \circ S_d$ nu poate fi simetrie axială

$\boxed{\text{Exc 6.5}}$ Fie $d: 2x - y + 1 = 0$. $A = (-1,3)$

$B = (2,9)$.

(a) Arătați că A și B sunt de aceeași parte a dreptei d

(b) Găsiți $P \in d$ a.i. $|PA| + |PB|$ este minimă.

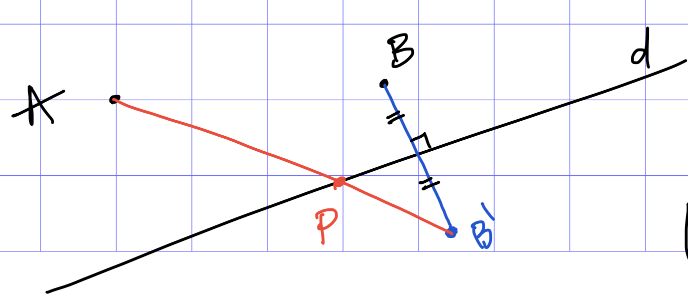
Rezolvare: (a) Dreapta d separă planul în 2 mulțimi:

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y + 1 > 0\}$$
$$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y + 1 < 0\}$$

$2 \cdot (-1) - 3 + 1 = -4 < 0 \Rightarrow A \in M_2$

$2 \cdot 2 - 9 + 1 = 5 - 9 = -4 < 0 \Rightarrow B \in M_2$

(b)



$|PB| = |PB'|$

$|PA| + |PB| = |PA| + |PB'| =$

$=$ minim dacă $P = AB' \cap d$