

Examen la analiză matematică¹
an I, sem. I - seria 10
22.01.2021

Numele și prenumele

Grupa

Punctaj seminar

Subiectul 1. a) Fie $A = \left\{ \frac{4^n+1}{4^{n-1}+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup [(-3, 5] \setminus \mathbb{Q}]$ o submulțime a mulțimii numerelor reale \mathbb{R} . Determinați interiorul, aderența, mulțimea punctelor de acumulare și frontiera mulțimii A . Decideți dacă mulțimea A este compactă sau conexă. Justificați!

b) Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1-\frac{1}{\sqrt{1}}} + \frac{1}{n+2-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \dots + \frac{1}{n+n-\frac{1}{\sqrt{n}}} \right).$$

Subiectul 2. Studiați convergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right) x^n$$

în funcție de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

b) Studiați convergența șirului $\left(\left(\sin \frac{1}{n} \right) 5^n \right)_{n>0}$ și calculați limita sa (în caz că aceasta există).

Subiectul 3. Considerăm funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x^2+1)}{x}, & \text{dacă } x \in (0, \infty), \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

i) Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției f .

ii) Studiați uniform continuitatea funcției f .

Subiectul 4. Considerăm șirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = (\sin x) \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n \geq 1}$.

Subiectul 5. Fie $f_n, g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții definite prin

$$f_n(x) = \int_0^1 |x^n - t^n| dt, \text{ pentru orice } x \in [0, 1], n \in \mathbb{N} \text{ și}$$

,

¹Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valorează 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{dacă } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ x - x^2, & \text{dacă } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i) Determinați

$$\inf_{x \in [0, 1]} f_n(x) \text{ și } \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x).$$

ii) Determinați numărul $n \in \mathbb{N}$ pentru care funcția g_n are cel puțin un punct în care este derivabilă.