Examen Statistică

8 Feb 2020

(11 feb 2019, 2 iunie 2018)

Exercițiul 1: Fie o variabilă aleatoare repartizată

$$\mathbb{P}_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k, \quad k\in\mathbb{N} \quad \text{unde } \theta\in(0,1)$$

un parametru necunoscut și $A\in\mathbb{R}$ constantă.

① Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$. Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2 \dots X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

② Det. estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta}=0)$.

③ Det. estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.

④ Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și det. legea la limită.

Exercițiul 2: Considerăm cuplul de variabile aleatoare (X,Y) cu densitatea:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-y^2x/2} \cdot e^{-\sqrt{x}/4} \quad x>0$$

① Det. repartiția condiționată a lui Y la $X=x$.

② Det. repartiția lui $\sqrt{X}$

③ Propuneți o metodă de simulare a unei observații din cuplul (X,Y) și scrieți un cod R care să permită acest lucru.

Scanned with CamScanner

Exercițiul 3. Fie $X_1 \dots X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde $f_\theta(x) = \frac{7}{(x-\theta)^8} \mathbb{1}_{[1+\theta, +\infty)}(x)$

a) Calculați $E_\theta[X_1]$, $Var_\theta(X_1)$ și funcția de repartiție $F_\theta(x)$ a lui X_1.

b) În cazul în care $\theta = 2$, dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0,1]$ $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$, $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

c). Determinați estimatorul $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestui estimator. Care este legea la limită?

d) Exprimați în funcție de θ mediana repartiției lui X_1 și, pornind de la aceasta, găsiți un alt estimator $\hat{\theta}_n^a$ pt θ

e). Det. legea la limită a lui $\hat{\theta}_n^a$ și arătați că, asimptotic acesta este mai bun decât $\hat{\theta}_n^M$

f). Det. estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n^{VM}$ a lui θ și verificați dacă este deplasat.

h) Pe care dintre cei trei estimatori îi preferați?

Ex 4) Considerăm densitatea $f(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ unde folosim convenția $f(1) = +\infty$.

1. De v.a. Y are densitatea f, care este dens. v.a. $X = \theta Y$, $\theta > 0$?
2. $X_1 \dots X_n$ eșantion talie n din X. Det. estimatorul de verosimilitate max. $\hat{\theta}_n$ a lui θ.
3. Det. repart. limită a lui $n(\theta - \hat{\theta}_n)$
4. Det. mediana repartiției v.a. X și deduceți un nou estimator $\bar{\theta}_n$. Pe care din cei doi estimatori îi preferați?

8. Feb. 2020

Exercițiul 1

$\mathbb{P}_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k, \quad \theta \in (0,1), \quad A = ct.$

a. $A = ?$, $\mathbb{E}[X]$, $Var(X) = ?$

$\mathbb{P}$ e funcție de probabilitate $\Rightarrow$ deci $1 = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X=k) = A\sum_{k\geq 0}(k+1)\theta^k$

Fie $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$. Atunci $f'(x) = \sum_{k\geq 0} k\cdot x^{k-1} = \sum_{k\geq 0}(k+1)x^k =$

$= \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow 1 = A\cdot f'(\theta) = \frac{A}{(1-\theta)^2}$ i.e. $A = (1-\theta)^2$ și $\mathbb{P}(X=k) = (1-\theta)^2(k+1)\theta^k$, $k\geq 0$

$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\geq 0} k(k+1)\theta^k(1-\theta)^2 = (1-\theta)^2\theta\sum_{k\geq 1}k(k+1)\theta^{k-1} = (1-\theta)^2\theta f''(\theta) =$

$= (1-\theta)^2\theta\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'(\theta) = \frac{2\theta(1-\theta)^2}{(1-\theta)^3} = \frac{2\theta}{1-\theta}$

similar, $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k\geq 0} k^2(k+1)\theta^k(1-\theta)^2 = \frac{2\theta}{1-\theta} + \frac{6\theta^2}{(1-\theta)^2} = \frac{(1-\theta)2\theta + 6\theta}{(1-\theta)^2} =$

$= \frac{2\theta - 2\theta^2 + 6\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{-2\theta^2 + 8\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{2(-\theta^2 + 4\theta)}{(1-\theta)^2}$

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \underbrace{\frac{6\theta}{(1-\theta)^2} + \frac{2\theta}{1-\theta}} - \underbrace{\frac{4\theta^2}{(1-\theta)^2}} = \frac{2\theta}{(1-\theta)^2}$

b. $\tilde{\theta} = ?$ met mom., $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0) = ?$

Pt met. mom $\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \overline{X_n}$ i.e. $\frac{2\tilde{\theta}_n}{1-\tilde{\theta}_n} = \overline{X_n} \Rightarrow \overline{X_n} = (2 + \overline{X_n})\tilde{\theta}_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_n = \frac{\overline{X_n}}{2+\overline{X_n}}$

$\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta}_n = 0) = \mathbb{P}_\theta(\overline{X_n} = 0) = \mathbb{P}_\theta(\sum X_i = 0) = \mathbb{P}_\theta(X_i = 0, 1\leq i\leq n) \underline{\text{iid}}$

$(\mathbb{P}_\theta(X_1 = 0))^n = A^n = (1-\theta)^{2n}$

c. $\hat{\theta} = ?$ (estim. de verosimilitate max., este bine definit?)

$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{1\leq i\leq n}\mathbb{P}_\theta(X_i = x_i) = \prod(1-\theta)^2(x_i+1)\theta^{x_i} = (1-\theta)^{2n}\theta^{\sum x_i}\prod(1+x_i)$

$\Rightarrow \ell(\theta; x_1, \dots, x_n) = 2n\log(1-\theta) + (\sum x_i)\log\theta + \sum\log(1+x_i)$

$\frac{\partial \ell}{\partial\theta} = -\frac{2n}{1-\theta} + \frac{\sum x_i}{\theta} = 0 \Leftrightarrow 2n\theta = -\theta\sum x_i + \sum x_i \Leftrightarrow \hat{\theta}_n(\overline{X_n} + 2) = \overline{X_n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{\theta}_n = \frac{\overline{X_n}}{2+\overline{X_n}} = \tilde{\theta}_n; \quad \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta^2} = -\frac{2n}{(1-\theta)^2} - \frac{\sum x_i}{\theta^2} \leq 0$

$\hat{\theta}_n - \theta = \frac{\overline{X_n}}{2+\overline{X_n}} = 1 - \theta - \frac{2}{2+\overline{X_n}} \xrightarrow{P} 1 - \theta - \frac{2}{2+\mathbb{E}[X]} = 1 - \theta - \frac{2}{2+\frac{2\theta}{1-\theta}} = 1 - \theta - 1 - \theta = 0$

□

A

d1. consistența estimatorului $\tilde{\theta}$, legea lui limită?

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(1, \frac{1}{J(\theta)})$ → adv. doar pt. veros. max

$\log P_\theta(x) = 2\ln(1-\theta) + \ln(x+1) + x\ln\theta$

$$\frac{\partial^2 \log P_\theta}{\partial \theta^2} = \frac{2}{(1-\theta)^2} - \frac{x}{\theta^2}$$

$$I_1(\theta) = E\left[-\frac{2}{(1-\theta)^2} + \frac{X}{\theta^2}\right] = \frac{2}{\theta(1-\theta)} - \frac{2}{(1-\theta)^2} = \frac{2-4\theta}{\theta(1-\theta)^2}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\theta(1-\theta)^2}{2-4\theta}\right)$$

c. continuare.

$e \nearrow$ pt. $\theta < \frac{\overline{X_n}}{2+\overline{X_n}}$

$e \searrow$ pt. $\theta > \frac{\overline{X_n}}{2+\overline{X_n}}$

Deci $\hat{\theta} = \frac{\overline{X_n}}{2+\overline{X_n}} = \frac{\sum x_i}{2+\sum x_i}$

$\overline{x_n} \geq 0 \Rightarrow 2+\overline{x_n} \geq 2 \Rightarrow \theta$ este bine definit.

d. Altă rezolvare...

$g: (0,\infty) \to (0,\infty)$ $\quad g(x) = \frac{x}{2+x}$ continuă

$\hat{\theta} = \frac{\overline{X_n}}{2+\overline{X_n}}$

Din th. apl. continue: $\overline{X_n} \xrightarrow{P} E[X_1] = \frac{2\theta}{1-\theta} \Rightarrow \tilde{\theta}_n = g(\overline{X_n}) \xrightarrow{P}$

$$g(E[X]) = g\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right) = \frac{\frac{2\theta}{1-\theta}}{2+\frac{2\theta}{1-\theta}} = \theta \Rightarrow \tilde{\theta}_n \text{ este consistent.}$$

Din T.L.C $\sqrt{n}\left(\overline{x_n} - \frac{2\theta}{1-\theta}\right) \xrightarrow{d} N(0, Var(X_1))$

Din T privind met delta:

$\sqrt{n}\left(g(\overline{x_n})\right) - g\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right) \xrightarrow{d} g'\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right) \cdot N(0, Var(X_1))$

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \left(g'\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right)\right)^2 \cdot Var(X_1)\right)$

$$g'(x) = \frac{2+x-x}{(2+x)^2} = \frac{2}{(2+x)^2} \qquad g'\left(\frac{2\theta}{1-\theta}\right) = \frac{2}{\left(2+\frac{2\theta}{1-\theta}\right)^2}.$$

Exercitul 2 (X,Y) cuplu de v.a. cu densitatea

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2x}{2}} \cdot e^{-\sqrt{x}}, \quad x>0$$

1. rep. condiționată a lui Y la $X=x$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2x}{2}} \cdot e^{-\sqrt{x}}$$

$$f_{Y|X}(y|x) \overset{def}{=} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \text{ unde } f_X(x) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2x}{2}}\,dy$$

SV. $z = \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \Rightarrow dz = dy \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2x}{2}}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\,dz = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$$

Deci $f_{Y|X}(y|x) = \sqrt{4} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{2x} \cdot f(y|x) = 2e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{y^2x}{2}} \cdot e^{-\sqrt{x}} =$

$$= \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2x}{2}} \sim N\left(0, \frac{1}{x}\right)$$

2. Repartiția lui $\sqrt{X}$ = ?

Pt. $t<0$

$\mathbb{P}(X \le t) = 0$

Pt $t>0$

$\mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}((X,Y) \in [0,t] \times \mathbb{R}) =$

$$= \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{y^2x}{2}}\,dy \right) dx = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,dx =$$

SV. $z = \sqrt{x}$ $\quad dz = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$\mathbb{P}(X \le t) = \int_0^{t} e^{-z}\,dz = 1 - e^{-\sqrt{t}}$$

$$\mathbb{P}(\sqrt{X} \le t) = \mathbb{P}(X \le t^2) = 1 - e^{-t}$$

Deci $\sqrt{X} \sim Exp(1)$.

3. generăm un eșantion din distribuția X, apoi pt fiecare val x a eșantionului generăm o obs din distribuția $(Y | X = x)$

Cod R:

```
n = 100
Rx = Rep (n, 1)
x = Rx^2
y = Rep(0, n)
for (i in 1:n)
  { y[i] = Norm (1, 0, 1 | x[i]) }
```

Exercițiul 3

$X_1, \dots, X_n$ eșantion de talie n $f_\theta(x) = \frac{7}{(x-\theta)^8} \mathbb{1}_{[1+\theta, \infty]}(x)$

a. $E_\theta[X_1]$

$Var_\theta(X_1)$

$F_\theta(x) = ?$ funcția de rep. a lui X_1.

$$E_\theta[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} \cdot \mathbb{1}_{[1+\theta, \infty]}(x) = \int_{1+\theta}^{\infty} x \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} =$$

$$= \int_{1+\theta}^{\infty} \frac{7}{(x-\theta)^7} + \theta \int_{1+\theta}^{\infty} \frac{7}{(x-\theta)^8} = -\frac{7}{6(x-\theta)^6} \Big|_{1+\theta}^{\infty} + \theta \cdot \frac{1}{(x-\theta)^7} \Big|_{1+\theta}^{\infty} = \frac{7}{6} + \theta$$

$$E_\theta[X_1^2] = \int_{1+\theta}^{\infty} x^2 \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} dx = \int_{1+\theta}^{\infty} (x-\theta)^2 \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} dx + 2\theta \int_{1+\theta}^{\infty} x \cdot \frac{7}{(x-\theta)^8} -$$

$$- \theta^2 \int_{1+\theta}^{\infty} \frac{7}{(x-\theta)^2} dx = \frac{7}{5} + 2\theta\left(\frac{7}{6} + \theta\right) - \theta^2 = \frac{7}{5} + 2\theta \cdot \frac{7}{6} + 2\theta^2 - \theta^2 =$$

$$= \frac{7}{5} + \frac{2\theta 7}{6} + \theta^2$$

$$Var_\theta(X_1) = E_\theta[X_1^2] - (E_\theta[X_1])^2 = \frac{7}{5} + 2\theta\frac{7}{6} - \left(\frac{7}{6} + \theta\right)^2 =$$

$$= \frac{7}{5} + 2\theta \frac{7}{6} + \theta^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{6} \cdot \theta - \theta^2 = \frac{7}{5} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{7}{5} - \frac{49}{36} = \frac{7}{180}$$

$$F_\theta(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x \le 1+\theta \\ \int_{1+\theta}^{x} \frac{7}{(t-\theta)^7} dt \end{cases}$$

$$= \left(-\frac{1}{(t-\theta)^7} \Big|_{1+\theta}^{x}\right) \cdot \mathbb{1}_{[1+\theta, \infty)}(x) = \left(1 - \frac{1}{(x-\theta)^7}\right) \mathbb{1}_{[1+\theta, \infty)}(x)$$

4. $\theta = 2$, 3 val aleatoare $X \sim f_\theta(x)$.

$[a_1]$ $u_1 = 0,25$; $u_2 = 0,4$; $u_3 = 0,5$

pt. $y \in (0,1)$

$F_2(x) = y \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x-2)^7} = y \Leftrightarrow (x-2)^7 = \frac{1}{1-y}$

$x = 2 \pm \sqrt[7]{\frac{1}{1-y}}$

Deci $F_2^{-1}(y) = 2 + \sqrt[7]{\frac{1}{1-y}}$

Dacă $u \sim u[0,1]$ $F_2^{-1}(u) \sim f_2$

Deci e suficient să aplicăm F_2^{-1} pe val date.

$2 + \sqrt[7]{\frac{1}{1-0,25}}$, $2 + \sqrt[7]{\frac{1}{1-0,4}}$, $2 + \sqrt[7]{\frac{1}{1-0,5}}$

d. $\hat{\theta}_n^M$ (met mom), MSE, care este legea la limită?

$E_\theta[X_1] = \frac{7}{6} + \theta \Rightarrow (\bar{X}_n = \frac{7}{6} + \theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Deci: punem $\hat{\theta}_n^M = \bar{X}_n - \frac{7}{6}$ (înlocuim $E_\theta[X_i]$ cu $\bar{X}_n$)

$MSE_\theta(\hat{\theta}_n^M) = E_\theta[(\hat{\theta}_n^M - \theta)^2] = E_\theta[(\bar{X}_n - \frac{7}{6} - \theta)^2] =$

$= E_\theta[\bar{X}_n^2] - 2\left(\frac{7}{6} + \theta\right) \cdot E[\bar{X}_n] + \left(\frac{7}{6} + \theta\right)^2 =$

$= E_\theta[\bar{X}_n^2] - (E_\theta[\bar{X}_n])^2 = Var_\theta(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) =$

$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X_1) = \frac{1}{n} \cdot Var(X_1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{7}{180}$

Din TLC: $E[X_1]$

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \left(\frac{7}{6} + \theta\right)}{\sqrt{\frac{7}{180}}}\right) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

cum $\hat{\theta}_n^M = \bar{X}_n - \frac{7}{6}$, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^M - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{7}{180}\right)$

d) Mediana este $F_\theta^{-1}(\frac{1}{2}) = x_{\frac{1}{2}}$ = mediana

$F_\theta^{-1}(y) = \theta + \sqrt[7]{\frac{1}{1-y}}$

$x_{\frac{1}{2}} = F_\theta^{-1}(\frac{1}{2}) = \theta + \sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = \theta + \sqrt[7]{2}$

Deci $\hat{\theta}_n^a = \hat{X}_n(\frac{1}{2}) - \sqrt[7]{2}$

F_θ e derivabilă în $x_{\frac{1}{2}}$ și $f_\theta(x_{\frac{1}{2}}) > 0$ deci

$\sqrt{n}(\hat{X}_n(\frac{1}{2}) - x_{\frac{1}{2}}) \xrightarrow{d} N(0, \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{(f_\theta(x_{\frac{1}{2}}))^2})$

$f_\theta(x_{\frac{1}{2}}) = \frac{7}{(\theta + 2^{1/7} - \theta)^8} = \frac{7}{2^{8/7}}$

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^a - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \frac{(2^{\frac{8}{7}})^2}{4 \cdot 49})$

$\frac{7}{180} > \frac{(2^{\frac{8}{7}})^2}{4 \cdot 49} \Leftrightarrow \frac{28 \cdot 49}{180} > 2^{\frac{2}{7}}$

Deci, $\hat{\theta}_n^a$ e mai bun (are varianța mai mică, deci e mai bun)

f) $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod f_\theta(x_i) =$

$= \frac{7}{(x_1-\theta)^8} \cdot \frac{7}{(x_2-\theta)^8} \cdot \ldots \cdot \frac{7}{(x_n-\theta)^8} \cdot 1_{[1+\theta,\infty)}(x_1) \ldots 1_{[1+\theta,\infty)}(x_n)$

Funcția $\theta \to \prod \frac{7}{(x_i-\theta)^8}$ e crescătoare pe $(-\infty, x_1 - 1)$ deci

maximul fct de verosimilitate este în $x_{(1)} - 1$

$\hat{\theta}_n^{VM} = x_{(1)} - 1$

$E[\hat{\theta}_n] = E[X_{(1)}] - 1$ $(x_1 \leq t$ și $\ldots$ $x_n \leq t) \overset{iid}{=} (P(x_1 \leq t))^n =$

$P(X_{(1)} \leq t) = P(X_1 \leq t$ și $X_2 \leq t$ și $\ldots$

$= (1 - \frac{1}{(t-\theta)^7})^n \cdot 1_{[1+\theta,\infty)}(t)$

$f_{X_{(1)}}(t) = n \cdot (1 - \frac{1}{(t-\theta)^7})^{n-1} \cdot \frac{7}{(t-\theta)^8} \cdot 1_{[1+\theta,\infty)}(t)$

$E[X_{(1)}] = \int_{1+\theta}^{\infty} x \cdot n \cdot (1 - \frac{1}{(x-\theta)^7})^{n-1} \cdot \frac{7}{(x-\theta)^7} =$

$= \int_{1+\theta}^{\infty} n \cdot (1 - \frac{1}{(x-\theta)^7})^{n-1} \cdot \frac{7}{(x-\theta)^7} + \theta \cdot \int_{1+\theta}^{\infty} n \cdot (1 - \frac{1}{(x-\theta)^7})^{n-1} \cdot \frac{7}{(x-\theta)^7}$

$E[\hat{\theta}_n^{VM}] - \theta = \int_{1+\theta}^{\infty} n \cdot (1 - \frac{1}{(x-\theta)^7})^{n-1} \cdot \frac{7}{(x-\theta)^7} dx - 1 =$

$$\int_{1+\theta}^{\infty} n\cdot\left(1-\frac{1}{(x-\theta)^7}\right)^{n-1}\cdot\frac{7}{(x-\theta)^8} > \int_{1+\theta}^{\infty} x\cdot\left(1-\frac{1}{(x-\theta)^7}\right)^{n-1}\cdot\frac{7}{(x-\theta)^8} = 1$$

deci $E[\hat{\theta}_n^{vn}]-\theta>0$, de unde $\hat{\theta}_n^{vn}$ e DEPLASAT

$$F_{\hat{\theta}_n^{vn}-\theta}(t) = P(\hat{\theta}_n^{vn}-\theta \le t) = P(X_{(1)} \le 1+\theta+t) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{(1+\theta+t-\theta)^7}\right)^n \cdot 1_{[1+\theta,\infty)} = \left(1-\frac{1}{(1+t)^7}\right)^n \cdot 1_{[0,\infty)}(t)$$

$$P(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{vn}-\theta)\le t) = P\left(\hat{\theta}_n^{vn}-\theta \le \frac{t}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^7}\right)^n \cdot 1_{[0,\infty)}(t)$$

$$\ln\left(1-\left(\frac{x}{x+t}\right)^7\right)^{x^2} = x^2\cdot \ln\left(1-\left(\frac{x}{x+t}\right)^7\right) \xrightarrow{x\to\infty} \infty\cdot(-\infty) = -\infty$$

Deci $P(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)\le t) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, de unde $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{vn}-\theta) \xrightarrow{d} 0$

$\hat{\theta}_n^{vn}$ e cel mai bun, îl alegem pe acesta