27-01-2022 NUME ....GRUPA.........

EXAMEN LA TEORIA MASURII SI A INTEGRARII

I. Calculati

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,4]}\frac{n^2+1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\frac{2x}{n^2}}-1\right)d\lambda$$

II. Fie $\mathcal{E}=\{\emptyset,\ [1,4],\ \mathbb{R}\setminus[1,4],\ \mathbb{R}\}$ si $\rho:\mathcal{E}\to[0,+\infty]$

$$\rho(\emptyset)=0,\quad \rho([1,4])=2,\quad \rho\left(\mathbb{R}\setminus[1,4]\right)=\rho(\mathbb{R})=+\infty$$

Fie $\mu^*:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to[0,+\infty]$,

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\rho(E_n)\mid (E_n)_{n\geq 1}\subset\mathcal{E}\text{ astfel incat } A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right\}$$

1) Aratati ca μ^* este o masura exterioara pe $\mathbb{R}$ si determinati $\mu^*(A)$ pentru orice $A\subseteq\mathbb{R}$.

2) Care dintre multimile $[1,2]$, $\mathbb{R}\setminus[1,4]$ si $[5,6]$ este μ^*-masurabila? Justificati!

3) Bonus: Determinati toate submultimile μ^*-masurabile ale lui $\mathbb{R}$.

III. Calculati integrala

$$\int_C x^2dx+(x+2y)dy$$

unde C este frontiera multimii $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ |x^2+y^2\leq 16,\ x\leq 2\sqrt{2}\}$ parcursa in sensul acelor de ceasornic, in doua moduri: direct si cu formula lui Green.

IV. Fie $V\subset\mathbb{R}^3$ multimea marginita de suprafetele

$$x^2+y^2=1,\quad z=-1,\quad z-2x=2$$

Calculati fluxul campului vectorial

$$F(x,y,z)=(z,y,3z)$$

prin suprafata $S=\mathrm{Fr}(V)$ orientata dupa normala exterioara, in doua moduri: direct si cu formula Gauss-Ostrogradski.

Nota. Timpul de lucru este de 2 ore. Fiecare subiect se noteaza cu note de la 1 la 10. Nota obtinuta la aceasta lucrare este media aritmetica a celor 4 note.

Rezolvarile trebuie scanate si trimise cel tarziu la ora 12.30 impreuna cu lista de subiecte sub forma unui **singur** fisier pdf la adresele radu-bogdan.munteanu@g.unibuc.ro si radu.munteanu@unibuc.ro.