EXAMEN
Teoria măsurii
28.01.2022

Exerciţiu 1 Aplicaţi teorema de convergenţă monotonă şirului de funcţii

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}\chi_{[0,n^2]}(x) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

în spaţiul cu măsură $([0,\infty), \mathcal{L}\mathrm{eb}([0,\infty)), \lambda)$. Analizaţi limita

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{(\cos x)^n}{1+x^2} d\lambda(x).$$

Exerciţiu 2 Fie câmpul vectorial

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = (y, x, x-y)$$

şi curba

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0).$$

Arătaţi că

$$\int_\gamma (F|dl)_{\mathbb{R}^3} = \int_{\partial\sigma} (F|dl)_{\mathbb{R}^3},$$

unde

$$\sigma : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0).$$

Folosind formula Stokes-Ampere, calculaţi

$$\int_\gamma (F|dl)_{\mathbb{R}^3}.$$

Exerciţiu 3 Fie $f : [1,\infty) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{x^2(y^2+1)}, \quad \forall (x,y) \in [1,\infty) \times [1,\infty).$$

Arătaţi că f este Lebesgue integrabilă.