1,65 — 0,95
1,29 — 0,90
2,33 — 0,99

Consultația 6. Statistică

Problema magazin și clienți:

$X \sim Pois(\lambda)$ $\quad$ $Y \sim$ câți clienți cheltuitori sunt. $\quad$ T — clienții care cheltuiesc o sumă.

$T \sim Bern(p)$ $\quad$ K — câți clienți vin.

$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ $\quad$ $E[X] = p.$ $\quad$ caz general.

$\bar{x}$ — media de selecție.

$\bar{Y} = \hat{p}$ și trebuie să îi determinăm proprietățile. (putem doar să le invocăm).

$W = X | T = 1$

→ trebuie să construim repartiția condiționată.

→ rep. comună va fi produsul lor.

$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$

$E[X^2] = 1,8$

Problema porcări:

$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $E[X] = 1.2$ $\quad$ $E[X^2] = 1.8$

$Var(X) = 1,8 - 1,44 = 0,36.$

nr. locuri de porcare care ar trebui construite: $Y = \sum_{i=1}^{200} X_i$; X_i i.i.d.

L.N.M: $\bar{X} \xrightarrow{P} m$

TLC: $\dfrac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$

în practică: $n \geq 30$.

Proprietățile lui $\bar{X}$: $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}[X] = m.$

$Var(\bar{X}) = \dfrac{Var(X)}{n} = \dfrac{\sigma^2}{n}$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sum X_i] = \sum^{n}(\underbrace{E(X_i)}_{1,2}) = 200 \cdot 1,2 = 240$

$Var(Y) = Var(\sum X_i) \overset{IND.}{=} \sum(\underbrace{Var(X_i)}_{0,36}) = 200 \cdot 0,36 = 72.$

$\bar{Y} = \dfrac{1}{200} \cdot Y$

$\dfrac{\bar{Y} - 240}{\sqrt{\frac{72}{200}}} \approx N(0;1)$ $\quad$ V.

Pentru $n \geq 30$ (la noi $n = 200$)

$V = \dfrac{\bar{Y} - 240}{\sqrt{\frac{72}{200}}} \leq 1,65 \Rightarrow \boxed{\bar{Y} \simeq \ldots}$

$P(V \leq x) \simeq \underbrace{\phi(x)}_{\text{f. de repart. a normalei}}$

$\overset{\shortparallel}{E_y(x)}$ $\quad$ $\overset{\approx}{1,65}$

Consistența unui estimator înseamnă ca estimatorul să conveargă la val. estimată

$\boxed{MSE_\theta[\hat{\theta}_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ atunci } \hat{\theta}_n \text{ consistent (Prop. curs. 10)}}$

TAC: $g \to$ continuă

$\left.\begin{array}{l}\bar{X} \xrightarrow{\mathbb{P}} m \quad (LNM) \\ g\text{-f continuă}\end{array}\right\} \Rightarrow g(\bar{X}) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(m)$.

Ex subiect: X v.a.

$\mathbb{P}(X=k) = A\cdot(k+1)\cdot\theta^k$; $k \in \mathbb{N}$.

Să zicem că vrem estimatorul $\mathbb{P}(X=1) = \underbrace{2A\theta}_{\tau(\theta)}$. (pe A îl aflăm din cond. ca $A(k+1)\theta^k$ să fie funcția de masă).

Invarianța MLE:

Dacă $\hat{\theta}_n$ este MLE pentru θ, atunci $\Rightarrow \tau(\hat{\theta}_n)$ = este MLE pentru $\tau(\theta)$. $(\forall \tau)$.

În aceste condiții calculăm estimatorul de verosimilitate maximă ~~al~~ al lui θ și invocăm teorema de invarianță MLE.

$\mathbb{P}(X=3 \mid X<5) = \dfrac{\mathbb{P}(X=3)}{\mathbb{P}(X<5)} = \dfrac{A\cdot 4\theta^3}{(\ldots)}$ → aici înlocuim, pe rând, cazurile posibile.

Cuantilă de ordin p: $x_p = \underbrace{F^{-1}(p)}_{} = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}$.

când F e bijectivă ⇒ f. cuantilă e chiar inversa.

Metoda Delta: $\dfrac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$ } ⇒ cele două sunt echivalente.

$\left\{\begin{array}{l} g \text{ derivabilă în } m. \\ \sqrt{n}(\bar{X}-m) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \end{array}\right.$

$\sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(m)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0; g'^2(m)\,\sigma^2)$ (ne ajută mult, dar nu prea știu să aplic) (poză)

Ex: $\hat{\theta} = \dots$

$E(\hat{\theta}) = \theta$ → nedeplasat.

$Var(\hat{\theta}) = \frac{3\theta}{n} > \frac{\theta}{n}$ ($=$ MIRC) → estimatorul nu este eficient.

Dar calculez limita $\frac{\theta}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ⟹ $\boxed{\text{asimptotic eficient}}$

SFAT: posibil să ne cheme la oral.

MUSAI TLC și LNM.

TLC: $\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0;1)$

Știm că $E(\bar{X}) = m$.

$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

$\Rightarrow \sqrt{n} \cdot \frac{(\bar{X} - m)}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0;1)$

Să zicem că $Z \sim N(0;1)$

$E(\alpha \cdot Z) = \alpha \cdot E(Z)$

$Var(\alpha \cdot Z) = \alpha^2 \cdot Var(Z)$

$E(Z - \alpha) = E[Z] - E[\alpha] = E[Z] - \alpha$

$Var(Z - \alpha) = Var(Z)$

Variații ale TLC:

- $\sqrt{n}(\bar{X} - m) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (dacă înmulțim cu σ ca să scăpăm de numitor ⟹ folosim proprietățile mediilor și a varianței pt. membrul celălalt)
- $\bar{X} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ → putem jongla cu chestiile astea.