Proprietati ale functiilor integrabile

Propozitie 1. Daca $f : J \to \mathbb{R}$ o functie marginita pe un interval J, atunci

$$\underline{\int_J} f = \sup\{\int_J \varphi : \varphi \text{ functie elementara } \varphi \leq f\}$$

$$\overline{\int_J} f = \inf\{\int_J \varphi : \varphi \text{ functie elementara } \varphi \geq f\}$$

Demonstratie. Exercitiu!

Din Propozitia anterioara si Criteriul lui Darboux (Teorema **??**, Cursul 10) obtinem:

Propozitie 2. O functie marginita $f : J \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann daca si numai daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista φ, ψ functii elementare $\varphi \leq f \leq \psi$ astfel incat

$$\int_J \psi - \int_J \varphi < \varepsilon.$$

Daca $f : J \to \mathbb{R}$, prin definitie

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

Propozitie 3. Daca $f : J \to \mathbb{R}$ este integrabila atunci f^+ si f^- sunt integrabile.

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$. Cum f este intergrabila, exista φ, ψ functii elementare astfel incat $\varphi \leq f \leq \psi$ si

$$\int_J \psi - \int_J \varphi < \varepsilon.$$

Atunci φ^+, ψ^+ sunt functii elementare (exercitiu),

$$\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$$

si prin urmare

$$\int_J \psi^+ - \int_J \varphi^+ < \int_J \psi - \int_J \varphi < \varepsilon.$$

In consecinta, f^+ este integrabila.

Propozitie 4. Daca $f : J \to \mathbb{R}$ este integrabila atunci $|f|$ este integrabila si in plus $\left|\int_J f\right| \leq \int_J |f|$.

Demonstratie. Cum $f = f^+ + (-f^-)$ si f^+ si f^- sunt integrabile, rezulta ca $|f| = f^+ + f^-$ este integrabila. Deoarece $f \leq |f|$ si $-|f| \leq f$ rezulta

$$\int_J f \leq \int |f| \qquad - \int_J |f| \leq \int f.$$

si deci

$$\left|\int_J f\right| \leq \int |f|.$$

Definitie 5. Fie A o multime din $\mathbb{R}^n$. Multimea A se numeste neglijabila Lebesgue daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista un sir $(I_k)_{k\geq 1}$ de intervale in $\mathbb{R}^n$ astfel incat

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_k) < \varepsilon.$$

Exercitiu 6. Daca A este neglijabila Lebesgue si B este o dsubmultime a lui A atunci B este neglijabila Lebesgue. Daca $(A_k)_{k\geq 1}$ este un sir de multimi neglijabile Lebesgue atunci multimea $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ este neglijabila Lebesgue.

Teorema 7. Fie J un interval din $\mathbb{R}^n$ si $f : J \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Atunci f este intergabila Riemann pe J daca si numai daca multimea discontinuitatilor lui f este neglijabila Lebesgue.

Demonstratie. Demonstratia este similara cu cea din cazul functiilor de o variabila reala.

Corolar 8. Fie J un interval din $\mathbb{R}^n$. Daca $f : J \to \mathbb{R}$ este o functie marginita si continua atunci f este integrabila Riemann.

Teorema Fubini

Daca l si k sunt numere naturale si $n = k + l$ atunci putem identifica $\mathbb{R}^n$ ca produs cartezian $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Atunci orice element $z \in \mathbb{R}^n$ poate fi scris

$$z = (x, y), \quad x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^l$$

Daca Aeste un interval din $\mathbb{R}^k$ si B este interval din $\mathbb{R}^l$ atunci $A \times B$ este interval din $\mathbb{R}^n$.

Propozitie 9. Fie A un interval din $\mathbb{R}^k$, B un interval din $\mathbb{R}^l$ si $\mathcal{P} = \{J_1, J_2, \ldots, J_p\}$ o descompunere a intervalului $J = A \times B \in \mathbb{R}^{l+k}$. Atunci functia elementara $f = \sum\limits_{i=1}^{p} c_i \chi_{J_i}$ este integrabila Riemann, pentru orice $x \in A$ functia

$$y \mapsto f(x, y)$$

este integrabila Riemann pe B, functia

$$x \mapsto \int_B f(x, y)dy$$

este integrabila Riemann pe A si

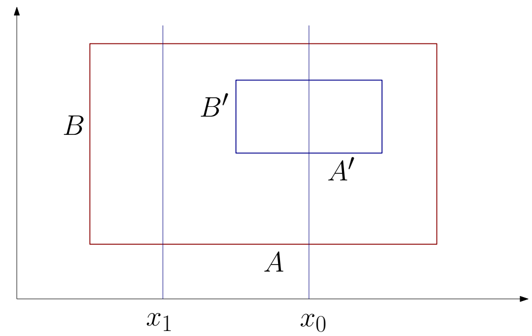
$$\int_{A\times B} f(z)dz = \int_A \left(\int_B f(x, y)dy \right) dx$$

Demonstratie. Integrabiltatea lui f a fost demonstrata in Cursul 10. Se observa cu usurinta, ca este suficient sa demonstram propozitia pentru cazul in care $f = \chi_I$ unde $I = A' \times B'$ este un interval inclus in J. Pentru $x \in X$ notam cu f_x functia

$$y \mapsto f(x, y)$$

Observam ca pentru $x \in A'$ avem $f_x = \chi_{B'}$, adica

$$f_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{daca } y \in B' \\ 0 & \text{daca } y \in B \setminus B' \end{cases}$$

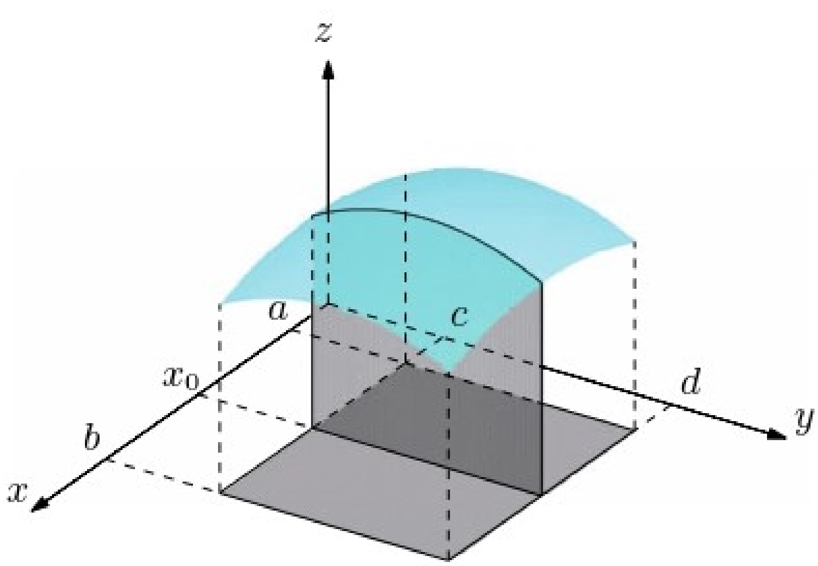


iar daca $x \in A \setminus A'$, atunci $f_x = 0$. (In Figura, $x_0 \in A'$ iar $x_1 \in A \setminus A'$) Asadar,

$$F(x) = \int_B f(x, y)dy = \begin{cases} \mathrm{vol}_l(B') & \text{daca } x \in A' \\ 0 & \text{daca } x \in A \setminus A' \end{cases} .$$

Asadar, F este o functie elementara, deci integrabila, si

$$\int_A \left(\int_B f(x, y)dy \right) = \int_A F(x)dx = \mathrm{vol}_l(B')\mathrm{vol}_k(A') = \mathrm{vol}_n(I) = \int_{A\times B} f(z)z.$$



Propozitie 10. Fie A si B doua intervale din $\mathbb{R}^k$ respectiv $\mathbb{R}^l$ si $f : A \times B \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Atunci

$$\underline{\int}_{A\times B} f \leq \underline{\int}_{A} \left(\underline{\int}_{B} f(x,y)dy \right) dx \leq \overline{\int}_{A} \left(\overline{\int}_{B} f(x,y)dy \right) dx \leq \overline{\int}_{A\times B} f.$$

Demonstratie. Fie $\varphi \geq f$ o functie elemantara. Notam

$$T(x) = \int_B \varphi(x,y)dy.$$

Remarcam ca T este o functie elementara. Deoarece $\varphi \geq f$, avem $\varphi_x \geq f_x$ si [1] deci

$$T(x) = \int_B \varphi(x,y)dy \geq \overline{\int}_B f(x,y)dy \text{ pentru orice } x \in A.$$

Sa notam

$$F(x) = \overline{\int}_B f(x,y)dy$$

(Observati ca $F(x)$ este integrala superioara, deoarece nu stim ca functia f_x este integrabila Riemann!). Asadar

$$T(x) \geq F(x) \text{ pentru orice } x \in A.$$

si atunci

$$\int_A T(x)dx \geq \overline{\int}_A F(x)dx$$

Din Propozitia 9, rezulta ca

$$\int_{A\times B} \varphi = \int_A T(x)dx \geq \overline{\int}_A F(x)dx$$

Deoarece

$$\overline{\int}_{A\times B} f = \inf\{\int_{A\times B} \varphi \ : \varphi \text{ simpla } \varphi \geq f\}$$

rezulta ca

$$\overline{\int}_{A\times B} f \geq \overline{\int}_A \left(\overline{\int}_B f(x,y)dy \right) dx.$$

Similar se demonstreaza ca

$$\underline{\int}_{A\times B} f \leq \underline{\int}_A \left(\underline{\int}_B f(x,y)dy \right) dx.$$

[1] prin f_c intelegem functia $y \mapsto f(x,y)$

Teorema 11 (Fubini)**.** Fie A si B doua intervale din $\mathbb{R}^k$ respectiv $\mathbb{R}^l$ si $f : A \times B \to \mathbb{R}$ o functie integrabila Riemann. Atunci functiile

$$x \mapsto \overline{\int}_B f(x,y)dy \text{ si } x \mapsto \underline{\int}_B f(x,y)dy$$

sunt integrabile Riemamnn pe A si

$$\int_{A\times B} f(z)dz = \int_A \left(\underline{\int}_B f(x,y)dy \right) dx = \int_A \left(\overline{\int}_B f(x,y)dy \right) dx.$$

Demonstratie. Fie $F, G : A \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \overline{\int}_B f(x,y)dy, \quad G(x) = \underline{\int}_B f(x,y)dy.$$

Din lema anterioara avem

$$\int_{A\times B} f(z)dz \le \underline{\int}_A G(x)dx \le \underline{\int}_A F(x)dx \le \overline{\int}_A F(x)dx \le \int_{A\times B} f(z)dz.$$

Cum primul termen si ultimul termen din acest sir de inegalitati sunt egali, trebuie sa avem egalitate peste tot. In particular integralele suprioara si inferioara ale lui F sunt egale si deci F este integrabila. Un rationament similar ne arata ca G este integrabila Riemann.

Observatie. Fie $f : D = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ o functie integrabila Riemann. Atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\overline{\int}_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\underline{\int}_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Daca functia

$$x \mapsto \overline{\int}_c^d f(x,y)dy$$

este integrabila Riemann, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Similar, daca

$$y \mapsto \overline{\int}_a^b f(x,y)dy$$

este integrabila Riemann, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Daca f este continua si marginita pe D atunci f este integrabila Riemann. Pentru orice x functia

$$y \mapsto f(x,y)$$

este integrabila Riemann si pentru orice y functia

$$x \mapsto f(x,y)$$

este integrabila Riemann. Asadar, functiile

$$x \mapsto \overline{\int_c^d} f(x,y)dy = \int_c^d f(x,y)dy, \quad y \mapsto \overline{\int_a^b} f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y)dx$$

sunt integrabile si avem

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Acelasi lucru este adevarat in cazul unei functii continue pe un interval din $\mathbb{R}^n$, n arbitar. De exemplu, daca $f : V = [a,b] \times [c,d] \times [u,v] \to \mathbb{R}$ este continua si marginita pe V, atunci este intergabila pe V si integrala se calculeaza astfel (ordinea de integrare nu conteaza):

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_u^v f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

Exemplu. Sa se calculeze integrala

$$\iint_D (x+y)dxdy, \text{ unde } D = [0,1] \times [0,1].$$

Solutie. Functia $f(x,y) = x+y$ este continua si marginita pe intervalul $D \subset \mathbb{R}^2$ si deci este integrabila Riemann.

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)dy \right) dx$$

$$\int_0^1 (x+y)dy = x\int_0^1 dy + \int_0^1 ydy = xy\Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1} = x + \frac{1}{2}.$$

Deci

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)dy \right) dx = \int_0^1 (x + \frac{1}{2})dx = 1.$$

Exemplu. Sa se calculze integrala

$$\iint_D ye^{xy}dxdy, \text{ unde } D = [0,1] \times [1,2]$$

Solutie. Functia $f(x,y) = xe^{xy}$ este continua si marginita pe intervalul $D \subset \mathbb{R}^2$ si deci este integrabila Riemann. Este mai usor sa integram intai in raport cu y

$$\iint_D ye^{xy}dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^1 ye^{xy}dx \right) dy = \int_1^2 \left(e^{xy} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy$$

$$= \int_1^2 (e^y - 1)dy = (e^y - y)\Big|_{y=1}^{y=2} = e^2 - e - 1.$$

Exemplu. Sa se calculze integrala

$$\iiint_V (x + yz)dxdydz, \text{ unde } V = [0,1] \times [2,5] \times [1,3].$$

Solutie. Functia $f(x,y,z) = x + yz$ este continua si marginita pe intervalul $[0,1] \times [2,5] \times [1,3]$ si deci este integrabila Riemann.

$$\iiint_V (x + yz)dxdydz = \int_0^1 \left(\int_2^5 \left(\int_1^3 (x + yz)dz \right) dy \right) dx$$

Avem

$$\int_1^3 (x + yz)dz = \left(xz + y\frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_{z=1}^{z=3} = 2x + 4y$$

$$\int_2^5 \left(\int_1^3 (x + yz)dz \right) dy = \int_2^5 (2x + 4y)dy = \left(2xy + 2y^2\right)\Big|_{y=2}^{y=5} = 6x + 42$$

In final,

$$\iiint_V (x + yz)dxdydz = \int_0^1 \left(\int_2^5 \left(\int_1^3 (x + yz)dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 (6x + 42)dx$$

$$= \left(3x^2 + 42x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 45.$$

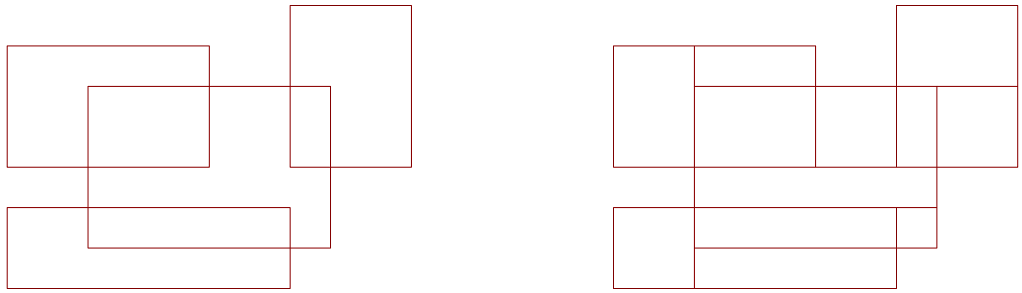
Multimi elementare din $\mathbb{R}^n$

Definitie 12. Fie X o multime nevida. O familie nevida $\mathcal{A}$ de submultimi ale lui X se numeste inel daca

$$A \cup B \in \mathcal{A} \text{ si } A \setminus B \in \mathcal{A} \text{ pentru orice } A, B \in \mathcal{A}.$$

Exercitiu 13. Daca $\mathcal{A}$ este un inel, pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$ avem $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Definitie 14. O multime E din $\mathbb{R}^n$ se numeste elementara daca se scrie ca o reuniune finita de intervale din $\mathbb{R}^n$. Vom nota cu $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ familia multimilor elementare din $\mathbb{R}^n$.



Propozitie 15. Familia multimilor elementare $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ este un inel.

Demonstratie. Exercitiu!

Propozitie 16. Fie $J_1, J_2, \ldots, J_m$ intervale din $\mathbb{R}^n$ disjuncte doua cate doua.

(1) Daca $\bigcup_{i=1}^{m} J_i \subset Y \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ atunci $\sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(J_i) \leq \operatorname{vol}(Y)$;

(ii) Daca $Y_1, \ldots Y_p \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ sunt disjuncte doua cate doua si $\bigcup_{i=1}^{m} J_i \subset \bigcup_{k=1}^{p} Y_k$ atunci

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(J_i) \leq \sum_{k=1}^{p} \operatorname{vol}(Y_k)$$

(iii) Daca $Y_1, \ldots Y_p \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ sunt disjuncte doua cate doua si $\bigcup_{i=1}^{m} J_i = \bigcup_{k=1}^{p} Y_k$ atunci

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(J_i) = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{vol}(Y_k).$$

Demonstratie. Din Propozitia 15 rezulta ca

$$Y \setminus \bigcup_{i=1}^{m} J_i$$

este elemantara si deci exista $C_1, \ldots C_q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ disjuncte doua cate doua astfel ca

$$Y \setminus \bigcup_{i=1}^{m} J_i = \bigcup_{j=1}^{q} C_j.$$

Deci

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} J_i \cup \bigcup_{j=1}^{q} C_j \quad \text{(intervalele sunt mutual disjuncte).}$$

si in concluzie

$$\operatorname{vol}(Y) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(J_i) + \sum_{j=1}^{q} \operatorname{vol}(C_j) \geq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(J_i).$$

(ii) Fie $Y_1, \dots Y_p$ mutual disjuncte a.i. $\bigcup\limits_{i=1}^{m} J_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} Y_k$. Deoarece $J_i \subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} Y_k$ atunci

$$J_i = J_i \cap \bigcup_{k=1}^{p} Y_k = \bigcup_{k=1}^{p} (J_i \cap Y_k).$$

Cum intervalele $J_i \cap Y_k$, $k = 1, \dots, p$ sunt mutual disjuncte si reuniunea lor este intervalul J_i rezulta ca

$$\operatorname{vol}(J_i) = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{vol}(Y_k).$$

Deci

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(J_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \operatorname{vol}(Y_k \cap J_i) = \sum_{k=1}^{p} \left[\sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(Y_k \cap J_i) \right].$$

Din (i)

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(Y_k \cap J_i) \leq \operatorname{vol}(Y_k).$$

si atunci

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(J_i) \leq \sum_{k=1}^{p} \operatorname{vol}(Y_k).$$

Punctul (iii) rezulta imediat din (ii).

Definitie 17. Fie $\mathcal{A}$ un inel. Se numeste masura pe $\mathcal{A}$ o functie $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea ca

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ oricare ar fi } A, B \in \mathcal{A}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Din Propozitia 16 obtinem:

Propozitie 18. Exista si este unica o masura λ pe $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ astfel incat pentru orice interval J din $\mathbb{R}^n$

$$\lambda(J) = \operatorname{vol}(J).$$

Daca $E = \bigcup_{i=1}^{p} J_i$ unde J_i sunt intervale disjuncte doua cate doua atunci

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{vol}(J_i).$$

Masura λ se numeste masura Jordan pe $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.

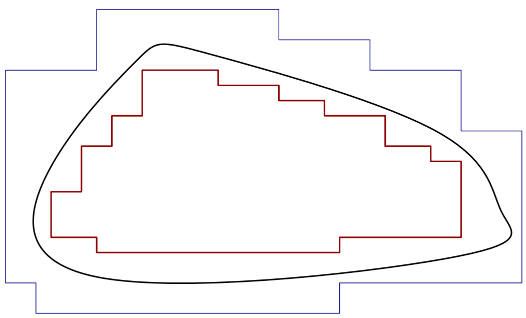
Multimi Masurabile Jordan

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o multime marginita. Definim

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(E) :\ A \subseteq E,\ E \text{ multime elementara}\}$$

$$\lambda_*(A) = \sup\{\lambda(E) :\ E \subseteq A,\ E \text{ multime elementara}\}$$

Numarul $\lambda^*(A)$ se numeste masura Jordan exterioara a multimii A si $\lambda_*(A)$ se numeste masura Jordan interioara a multimii A. Evident $\lambda_*(A) \leq \lambda^*(A)$. O multime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numeste masurabila Jordan daca $\lambda^*(A) = \lambda_*(A)$ si in acest caz numarul $\lambda^*(A) = \lambda_*(A)$ se numeste masura Jordan a multimii A. Daca E este elementara atunci E este masurabila Jordan si $\lambda(E) = \lambda^*(E) = \lambda_*(E)$. Daca A este masurabila Jordan atunci masura Jordan a lui A se noteaza cu $\lambda(A)$.



Exercitiu 19. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o multime marginita si J un interval din $\mathbb{R}^n$ astfel incat $A \subset J$. Atunci

$$\lambda_*(A) = \underline{\int}_J \chi_A$$

$$\lambda^*(A) = \overline{\int}_J \chi_A$$

si A este masurabila Jordan daca si numai daca functia χ_A este integrabila Riemann pe J si

$$\lambda(A) = \int_J \chi_A$$

Propozitie 20. Daca P si Q sunt marginite atunci

(i) $\lambda^*(P \cup Q) + \lambda^*(P \cap Q) \leq \lambda^*(P) + \lambda^*(Q)$

(ii) $\lambda_*(P \cup Q) + \lambda_*(P \cap Q) \geq \lambda_*(P) + \lambda_*(Q)$

(iii) daca $P \subset Q$ atunci $\lambda^*(Q \setminus P) \leq \lambda^*(Q) - \lambda^*(P),\ \lambda_*(Q \setminus P) \geq \lambda_*(Q) - \lambda_*(P)$.

Demonstratie. (i) Fie E, F multimi elementare astfel incat $P \subset E$ si $Q \subset F$. Avem $P \cup Q \subset E \cup F$ si $P \cap Q \subset E \cap F$. Avem (exercitiu!)

$$\lambda(E \cup F) + \lambda(E \cap F) = \lambda(E) + \lambda(F).$$

Deci

$$\lambda^*(P \cup Q) + \lambda^*(P \cap Q) \leq \lambda(E \cup F) + \lambda(E \cap F) = \lambda(E) + \lambda(F)$$

si in consecinta

$$\lambda^*(P \cup Q) + \lambda^*(P \cap Q) \leq \inf\{\lambda(E) + \lambda(F) \ : \ E \supset P, F \supset Q\} = \lambda^*(P) + \lambda^*(Q).$$

(iii) Fie E, F multimi elementare astfel incat $P \supset E$ si $Q \subset F$. Avem $Q \setminus P \subset F \setminus E$ si $E \subset P \subset Q \subset F$ si deci

$$\lambda^*(Q \setminus P) \leq \lambda(F) - \lambda(E) = \lambda(F \setminus E).$$

De aici rezulta ca

$$\begin{aligned} \lambda^*(Q \setminus P) &\leq \inf\{\lambda(F) - \lambda(E) \ : E \subset P, Q \subset F\} \\ &= \inf\{\lambda(F) \ : Q \subset F\} - \sup\{\lambda(E) \ : E \subset P\} = \lambda^*(Q) - \lambda^*(P). \end{aligned}$$

Celelalte inegalitati se demonstreaza la fel si sunt lasate ca exercitiu.

Propozitie 21. Familia $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a multimilor masurabile Jordan din $\mathbb{R}^n$ formeaza un inel de multimi si aplicatia $A \mapsto \lambda(A)$ este o masura pe $\mathcal{J}(\mathcal{R}^n)$.

Demonstratie. Fie A si B doua multimi masurabile Jordan. Atunci

$$\lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

$$\lambda_*(A \cup B) + \lambda_*(A \cap B) \geq \lambda_*(A) + \lambda_*(B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

Cum $\lambda^*(A \cup B) \geq \lambda_*(A \cup B)$ si $\lambda^*(A \cap B) \geq \lambda_*(A \cap B)$, rezulta ca

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda_*(A \cup B), \quad \lambda^*(A \cap B) = \lambda_*(A \cap B)$$

si deci $A \cup B$ si $A \cap B$ sunt masurabile Jordan si in plus

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

In particular, daca $A \cap B = \emptyset$ avem

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

Ramane de aratat ca $A \setminus B$ este masurabila Jordan. Cum $A = B \cup (A \setminus B)$ si reuniunea a doua multimi masurabile Jordan este masurabila Jordan, este suficient sa aratam ca daca $B \subset A$ atunci $A \setminus B$ este masurabila Jordan.

$$\lambda^*(A \setminus B) \leq \lambda^*(A) - \lambda^*(B) = \lambda(A) - \lambda(B),$$

$$\lambda_*(A \setminus B) \geq \lambda_*(A) - \lambda_*(B) = \lambda(A) - \lambda(B),$$

Asadar

$$\lambda^*(A \setminus B) = \lambda_*(A \setminus B)$$

si prin urmare $A \setminus B$ este masurabila Jordan.

Exercitiu. Folosind definitia, aratati ca multimea hasurata din imaginea de mai jos este masurabila Jordan si gasiti masura ei (calculati masura Jordan exterioara, masura Jordan interioara si aratati ca sunt egale).