Milosteanu Andreea
Mihoci Valentina

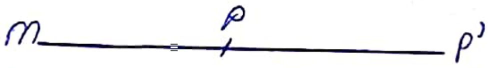
17.11.2021

Tutoriat 5
Geometrie I

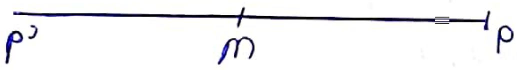
Inversiuni

Def. Fie $M \in \mathcal{E}_2$ punct fixat și $K \in \mathbb{R}^*$. Se numește inversiune de pol M și raport K o aplicație $\mathcal{I}_{M,K} : \mathcal{E}_2 \setminus \{M\} \to \mathcal{E}_2 \setminus \{M\}$, unde $\mathcal{I}_{M,K}(P) = P'$, $P' \in MP$ și $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP'} = K$.

Obs. 1° $K > 0$ atunci $\mathcal{I}_{M,K}$ se numește inversiune pozitivă



2° $K < 0$ atunci $\mathcal{I}_{M,K}$ se numește inversiune negativă



Ecuația unei inversiuni

1° de centru origine $O(0,0)$ și raport K

$$\mathcal{I}_{O,K}: \quad x' = \frac{Kx}{x^2+y^2}, \qquad y' = \frac{Ky}{x^2+y^2}$$

2° de centru $M(a,b)$ și raport K

$$\mathcal{I}_{M,K}: \quad x' = \frac{K(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2} + a, \qquad y' = \frac{K(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2} + b$$

Obs. Orice inversiune este o involuție, i.e. $\mathcal{I}_{M,K} \circ \mathcal{I}_{M,K} = id_{\mathcal{E}_2 \setminus \{M\}}$. Deci $\mathcal{I}_{M,K}^{-1} = \mathcal{I}_{M,K}$.

Prop. Fie $K > 0$ și inversiunea $\mathcal{I}_{M,K}$. $\mathcal{C}(M, \sqrt{K})$ este locul geometric al punctelor fixe ale inversiunii $\mathcal{I}_{M,K}$ (cercul de inversiune).

Prop. Fie punctele necoliniare M, A, B și inversiunea $\mathcal{I}_{M,K}$. Dacă $\mathcal{I}_{M,K}(A) = A'$, $\mathcal{I}_{M,K}(B) = B'$, atunci: 1° A, A', B, B' sunt puncte conciclice (reprezintă vârfurile unui patrulater inscriptibil)

2° $d(A', B') = \dfrac{|K| \, d(A,B)}{d(M,A)\, d(M,B)}$.

Teoremă Imaginea printr-o inversiune a unei drepte care nu trece prin pol este un cerc care trece prin pol, iar diametrul care trece prin pol este perpendicular pe dreaptă.

Obs. O dreaptă care trece prin pol este invariantă în raport cu inversiunea $\mathcal{I}_{M,K}$, i.e. $\mathcal{I}_{M,K}(d) = d$.

Teoremă Imaginea printr-o inversiune a unui cerc care nu trece prin pol este un cerc care nu trece prin pol.