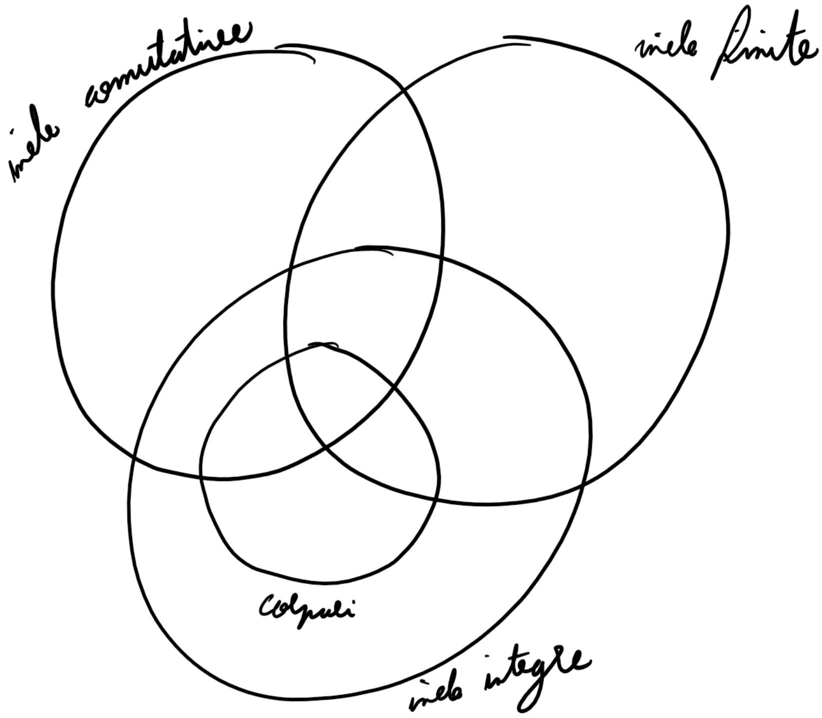
Seminarul 1 de Algebră II

Grupa 113 - 2020-2021

1 Exerciții de recapitulare

Exercițiul 1.1: În diagrama de mai jos, completaţi toate zonele logic posibile cu cel puţin un exemplu de inel sau decideţi că sunt vide:



Exercițiul 1.2:

a) Pentru $n \geq 2$, determinaţi în inelul $\mathbb{Z}_n$ elementele inversabile, divizorii lui zero şi elementele nilpotente. Precizaţi numărul lor.

b) Daţi exemple de inele neizomorfe cu exact 36 de elemente nilpotente.

Exercițiul 1.3: Folosiți algoritmul lui Euclid pentru a demonstra că a este inversabil modulo n și pentru a determina inversul lui $\hat{a}$ din $\mathbb{Z}_n$, unde:

a) $a = 13, n = 20$;

b) $a = 1891, n = 3797$;

c) $a = 237, n = 1000$.

Exercițiul 1.4: Calculaţi $28^{2021} \pmod{34}$.

Exercițiul 1.5: Calculaţi $7^{7^{9^9}} \pmod{29}$.

Exercițiul 1.6: Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există n numere naturale consecutive astfel încât niciunul dintre ele să nu fie putere de număr prim.

Exercițiul 1.7: Fie $R = \mathbb{Z}$ sau $K[X]$ cu K corp.

a) Fie $a, b, c \in R$. Demonstrați că, dacă $a \mid bc$ și $(a, b) = 1$, atunci $a \mid c$.

b) Mai general, demonstrați că, dacă $a \mid bc$, atunci $\frac{a}{(a,b)} \mid c$.

c) Fie $a, b \in R$ și $n \in R$. Arătați că există $x, y \in R$ cu $ax + by = n \iff (a, b) \mid n$.

d) Fie $a, b \in R$ și $n \in R$. Arătați că, dacă (x_0, y_0) este o soluție în R a ecuației $ax + by = n$, atunci toate soluțiile sunt de forma

$$x = x_0 + m\frac{b}{(a,b)},\ y = y_0 - m\frac{a}{(a,b)},\ m \in R.$$

Exercițiul 1.8: Rezolvați ecuațiile diofantice (*i.e.* găsiți soluțiile întregi pentru):

a) 2x + 4y = 5;

b) 17x + 29y = 31;

c) 85x + 145y = 505.

Temă: Determinaţi toate morfismele de inele:

- de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Z}$;
- de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Q}$;
- de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{Z}$;
- de la $\mathbb{Z}_m$ la $\mathbb{Z}_n$;
- de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{Q}$;
- de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$;
- de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$;
- de la $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ la $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;

Seminarul 2 de Algebră II

Grupa 113 - 2020-2021

1 Ideale. Inelul factor. Recapitulare

Exercițiul 1.1: Fie R inel și $I_1, I_2 \trianglelefteq R$. Demonstraţi că

$$I_1 \cdot I_2 \subset I_1 \cap I_2 \subset I_1 + I_2.$$

Arătaţi că dacă $I_1+I_2 = R$ (spunem că I_1 și I_2 sunt *comaximale*), atunci $I_1 \cdot I_2 = I_1 \cap I_2$.

Exercițiul 1.2: Calculaţi $18\mathbb{Z}+(2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z})$, $15\mathbb{Z}\cap(12\mathbb{Z}+16\mathbb{Z})$ şi $(2\mathbb{Z}+5\mathbb{Z})\cdot(5\mathbb{Z}\cap 7\mathbb{Z})$.

Exercițiul 1.3: Demonstraţi următoarea **Teoremă de corespondenţă a idealelor**:

Fie R, S inele și $f : R \to S$ un morfism surjectiv de inele.

Atunci există o corespondență bijectivă între idealele lui S și idealele lui R care conțin $\operatorname{Ker} f$ *i.e.* funcțiile

$$\varphi : \{I \trianglelefteq R \mid I \supset \operatorname{Ker} f\} \to \{J \trianglelefteq S\},\ \varphi(I) = f(I),$$
$$\psi : \{J \trianglelefteq S\} \to \{I \trianglelefteq R \mid I \supset \operatorname{Ker} f\},\ \psi(J) = f^{-1}(J).$$

sunt mutual inverse: $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}, \psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Exercițiul 1.4: Pentru un inel R şi $I \trianglelefteq R$, descrieţi idealele lui R/I. În particular, descrieţi idealele lui $\mathbb{Z}_n$.

Exercițiul 1.5: Folosind Teorema fundamentală de izomorfism, demonstraţi că

a) $\mathbb{Z}[X]/(X-a) \simeq \mathbb{Z}$;

b) $\mathbb{Z}[X]/(2) \simeq \mathbb{Z}_2[X]$;

c) $\mathbb{Z}[X]/(X^2-2) \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;

d) $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{Z}[i]$;

e) $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$.

Exercițiul 1.6: Calculați $\mathbb{Z}[X]/(2X-1)$.

Exercițiul 1.7: (Teorema I de izomorfism) Folosiți Teorema Fundamentală de Izomorfism pentru a demonstra:

Fie R un inel și $I \subset J$ ideale ale lui R. Atunci

$$\frac{R/I}{J/I} \simeq R/J.$$

Observația 1.8: Dacă $\varphi : R \to S$ este un izomorfism de inele, $I \trianglelefteq R, J \trianglelefteq S$ astfel încât $\varphi(I) = J$, atunci $R/I \simeq S/J$.

Exercițiul 1.9: Calculați:

a) $\mathbb{Z}[X]/(2, X)$;

b) $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$;

c) $\mathbb{Z}[X]/(7, X^2 + X + 1)$;

d) $\mathbb{Z}[i]/(7 + i)$;

e) $\mathbb{Z}[i]/(1 + 2i)$.

Seminarul 3 de Algebră II

Grupa 113 - 2020-2021

1 Inele de polinoame. Inelul factor (cont.)

Toate inelele se consideră comutative şi unitare.

Exercițiul 1.1: Folosind Teorema fundamentală de izomorfism, demonstraţi că:

a) $\mathbb{Z}[X]/(X^2-2) \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

b) $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{Z}[i]$

c) $\mathbb{Q}[X]/(X^3-2) \simeq \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\right] = \left\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\right\}$

Exercițiul 1.2: Calculați:

a) $\mathbb{Z}[X]/(7, X-2)$

b) $\mathbb{Z}[X]/(X+5, X-2)$

c) $\mathbb{Z}[i]/(7+i)$

d) $\mathbb{Z}[i]/(1+2i)$

Exercițiul 1.3:

a) Pentru p, q prime, demonstraţi că $\mathbb{Z}[X]/(X^2-p) \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2-q)$ dacă şi numai dacă $p = q$.

b) Demonstraţi că $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(6+\sqrt{7})$ este un corp cu 29 elemente.

Exercițiul 1.4:

a) Demonstraţi că $\mathbb{Z}[i]/(3)$ este un corp cu 9 elemente.

b) Demonstraţi că $\mathbb{Z}[i]/(5)$ este un inel cu 25 de elemente care nu este corp.

Exercițiul 1.5: Fie idealul $I = (3, X^3 - X^2 + 2X + 1) \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că I nu este ideal principal şi că $\mathbb{Z}[X]/I$ nu este corp.

Seminarul 4 de Algebră II

Grupa 113 - 2020-2021

1 Inele de polinoame. Inelul factor (cont.)

Dacă nu este precizat altfel, toate inelele se consideră comutative şi unitare.

Exercițiul 1.1: Fie R un inel şi $f \in R[X]$ monic, de grad $n \geq 1$. Pentru un $g \in R[X]$, notăm cu $\overline{g}$ clasa lui g în ${}^{R[X]}\!/\!_{(f)}$.

a) Demonstraţi că

$$\begin{aligned} {}^{R[X]}\!/\!_{(f)} &= \{\overline{g} \mid g \in R[X], \deg g < n\} \\ &= \{\overline{a_0 + a_1X + ... + a_{n-1}X^{n-1}} \mid a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in R\}. \end{aligned}$$

b) Demonstraţi că dacă $\overline{g} = \overline{h}$ pentru $g, h \in R[X]$ cu $\deg g < n$ şi $\deg h < n$, atunci $g = h$.

Exercițiul 1.2: Fie idealul $I = (3, X^3 - X^2 + 2X + 1) \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că I nu este ideal principal şi că ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!/\!_{I}$ nu este corp.

Exercițiul 1.3:

a) Arătați că ${}^{\mathbb{Q}[X]}\!/\!_{(X^2-1)} \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

b) Determinați idempotenții lui ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!/\!_{(X^2-1)}$.

c) Arătați că ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!/\!_{(X^2-1)}$ este canonic inclus strict în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

d) Arătați că ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!/\!_{(X^2-1)} \not\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercițiul 1.4: Demonstraţi că

$${}^{\mathbb{Q}[X]}\!/\!_{(X^n-2)} \simeq \mathbb{Q}[\sqrt[n]{2}] = \{a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + a_2(\sqrt[n]{2})^2 + ... + a_{n-1}(\sqrt[n]{2})^{n-1} \mid a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{Q}\}.$$

Exercițiul 1.5:

a) Aflaţi câtul împărţirii lui $X^5 - 3X^2 + 4X - 2$ la $X^2 - 1$.

b) Aflaţi câtul împărţirii lui $X^{100} - 2X^{51} + 1$ la $X^2 - 1$.

c) Aflaţi câtul împărţirii lui $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ la $(X+1)^2, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercițiul 1.6: Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $(X-1)^2 \mid aX^4 + bX^3 + 1$.

Exercițiul 1.7: Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1$.

Exercițiul 1.8: Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ diferite. Demonstraţi că nu există un polinom $P \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $P(a) = b, P(b) = c$ şi $P(c) = a$.

Exercițiul 1.9: Fie R un inel şi $\mathcal{N}(R)$ mulţimea nilpotenţilor din R.

a) Demonstraţi că $\mathcal{N}(R) \trianglelefteq R$.

b) Demonstraţi că dacă x este nilpotent, atunci $1 + x$ este inversabil.

c) Demonstraţi că dacă x este nilpotent, atunci $u + x$ este inversabil, pentru orice u inversabil în R.

Exercițiul 1.10: Fie R un inel şi $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in R[X]$.

a) Demonstraţi că f este inversabil $\in R[X]$ dacă şi numai dacă a_0 este inversabil şi $a_1, ..., a_n$ sunt nilpotente în R.

b) Demonstraţi că f este nilpotent în $R[X]$ dacă şi numai dacă $a_0, a_1, ..., a_n$ sunt nilpotente în R.

c) Demonstraţi că f este divizor al lui zero în $R[X]$ dacă şi numai dacă există $a \in R$ nenul astfel încât $af = 0$.

d) Demonstraţi că f este idempotent în $R[X]$ dacă şi numai dacă a_0 este idempotent în R şi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Exercițiul 1.11: Determinaţi numărul polinoamelor de grad 2 din $\mathbb{Z}_{36}[X]$ care sunt:

a) inversabile;

b) nilpotente.

Exercițiul 1.12:

a) Determinaţi centrul corpului cuaternionilor $\mathbb{H}$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $x^2 = -1$ în $\mathbb{H}$.

Exercițiul 1.13: Fie polinomul $P = X^3 - 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Scrieți polinomul care are rădăcinile:

a) $x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1$;

b) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$;

c) x_1^2, x_2^2, x_3^2.

Exercițiul 1.14: Fie p un număr prim. Demonstrați că $\mathbb{Z}[i]/(p)$ este un inel cu p^2 elemente și este corp dacă și numai dacă $p \equiv 3 \pmod 4$, eventual urmând pașii:

a) Demonstrați că $\mathbb{Z}[i]/(p) \simeq \mathbb{Z}_p[X]/(X^2 + \hat{1})$.

b) Demonstrați că ${}^{\mathbb{Z}[i]}\!\diagup_{(p)}$ este corp $\iff$ ecuația $x^2 \equiv -1 \pmod p$ nu are soluții.

c) Demonstrați că, dacă $p = 2$, ecuația $x^2 \equiv -1 \pmod p$ are soluții.

d) Demonstrați, eventual folosind Teorema lui Wilson, că, dacă $p \equiv 1 \pmod 4$, ecuația $x^2 \equiv -1 \pmod p$ are soluție.

e) Demonstrați, eventual folosind Teorema lui Fermat, că, dacă există x cu $x^2 \equiv -1 \pmod p$, atunci $p \equiv 1 \pmod 4$.

f) Concluzionați.

Polinoame

Seminar 5

Problema 1. Dacă α, β sunt rădăcinile polinomului $X^2 - 6X + 1 \in \mathbb{R}[X]$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem că $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$ şi nu este divizibil cu 5.

Problema 2. Când este polinomul $X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2} \in \mathbb{Q}[X]$ divizibil cu $X^4 + X^2 + 1$?

Problema 3. Rezolvaţi în numere reale sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Problema 4. Rezolvaţi în numere reale ecuaţia $\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

Problema 5. Fie a, b două rădăcini ale polinomului $X^4 + X^3 - 1$. Demonstraţi că ab este o rădăcină a polinomului $X^6 + X^4 + X^3 - X^2 - 1$.

Problema 6. Fie a, b, c numere reale nenule astfel încât $a + b + c \neq 0$ şi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Demonstraţi că pentru orice număr întreg impar n

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

Problema 7. Fie polinomul $P(X) = X^3 - 4X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ care are rădăcinile complexe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Scrieţi polinomul monic care are rădăcinile:

(1) $2\alpha_1 - 3, 2\alpha_2 - 3, 2\alpha_3 - 3$;
(2) $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}$;
(3) $\alpha_1^2 + 2, \alpha_2^2 + 2, \alpha_3^2 + 2$.

Problema 8. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienţi întregi de grad n astfel încât $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pentru $k = 0, ..., n$. Calculaţi $P(n+1)$.

Problema 9. Date $2n$ numere distincte două câte două $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, umplem o matrice $n \times n$ astfel: pe poziţia (i, j) în matrice punem numărul $a_i + b_j$. Demonstraţi că dacă produsul elementelor de pe fiecare coloană este constant, atunci şi produsul elementelor de pe fiecare linie este constant.

Problema 10. Scrieţi ca polinom de polinoamele simetrice fundamentale următoarele polinoame:

(1) $P(X_1, X_2, X_3) = (X_1 - X_2)^2 (X_2 - X_3)^2 (X_3 - X_1)^2 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$;

(2) $F(X_1, X_2, X_3) = X_1^4X_2 + X_1^4X_3 + X_2^4X_1 + X_2^4X_3 + X_3^4X_1 + X_3^4X_2 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$;

(3) $G(X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1 + X_2 - X_3 - X_4)(X_1 + X_3 - X_2 - X_4)(X_1 + X_4 - X_2 - X_3) \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]$.

Problema 11. a) Dacă $x, y, z \in \mathbb{C}$ sunt astfel încât $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ şi $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, determinaţi valoarea lui $x^4 + y^4 + z^4$.

b) Demonstraţi că numerele x, y, z care satisfac condiţiile anterioare nu sunt raţionale dar că $x^n + y^n + z^n \in \mathbb{Q}$ pentru orice număr natural n.

Problem 12. Fie k cel mai mic număr natural nenul cu următoarea proprietate: există întregii distincţi m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 astfel încât polinomul

$$p(X) = (X - m_1)(X - m_2)(X - m_3)(X - m_4)(X - m_5)$$

are exact k coeficienţi nenuli.

Determinaţi, cu demonstraţie, o mulţime de întregi m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 pentru care minimul k este atins.

Problema 13*. Fie p un număr prim. Demonstraţi că $\mathbb{Z}[i]/(p)$ este un inel cu p^2 elemente şi este corp dacă şi numai dacă $p \equiv 3 \pmod 4$, eventual urmând paşii:

(1) Demonstraţi că are loc izomorfismul de inele $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{Z}_p[X]/(X^2 + \hat{1})$.

(2) Demonstraţi că $\mathbb{Z}[i]/(p)$ este corp dacă şi numai dacă ecuaţia $x^2 \equiv -1 \pmod p$ nu are soluţii.

(3) Demonstraţi că, dacă $p = 2$, ecuaţia $x^2 \equiv -1 \pmod p$ are soluţii.

(4) Demonstraţi, eventual folosind Teorema lui Wilson, că, dacă $p \equiv 1 \pmod 4$, ecuaţia $x^2 \equiv -1 \pmod p$ are soluţii.

(5) Demonstraţi, eventual folosind Teorema lui Fermat, că, dacă există x cu $x^2 \equiv -1 \pmod p$ atunci $p \equiv 1 \pmod 4$.

(6) Concluzionaţi.

Problema 14*. Fie $n \geq 3$ un număr întreg. Fie $f(X)$ şi $g(X)$ polinoame cu coeficienţi reali astfel încât punctele $(f(1), g(1))$, $(f(2), g(2)), \ldots, (f(n), g(n))$ în $\mathbb{R}^2$ sunt vârfurile unui poligon regulat cu n laturi, aşezate în ordine inversă acelor de ceasornic. Demonstraţi că cel puţin unul dintre polinoamele $f(X)$ şi $g(X)$ are gradul mai mare sau egal cu $n - 1$.

Problema 15*. Fie a, b, c numere întregi care sunt laturile unui triunghi. Demonstraţi că dacă ecuaţia

$$x^2 + (a + 1)x + b - c = 0$$

are rădăcini întregi atunci triunghiul este isoscel.

Problema 16*. Fie $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom şi $n \geq 3$. Demonstraţi că nu există numerele întregi distincte două câte două $a_1, \ldots, a_n$ astfel încât $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3, \ldots, f(a_{n-1}) = a_n$, $f(a_n) = a_1$. (Indicaţie: este generalizarea unei probleme făcute în seminarul 4)

Problema 17*. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_k$ polinoame neconstante cu coeficienţi întregi. Demonstraţi că pentru o infinitate de numere naturale n toate numerele $f_1(n), \ldots, f_k(n)$ sunt compuse. (Indicaţie: $a - b | f(a) - f(b)$ pentru $a \neq b \in \mathbb{Z}$ şi $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$)

Problema 18*. Fie $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom de grad $n \geq 2$. Demonstraţi că polinomul $f(f(X)) - X$ are cel mult n rădăcini întregi. (Indicaţie: folosiţi problema anterioară.)

Problema 19*. Fie $P(X)$ un polinom de grad $n > 1$ cu coeficienţi întregi şi k un număr natural nenul. Considerăm polinomul $Q(X) = \underbrace{P(P(...(P}_{\text{k ori}}(X)...)))$. Demonstraţi că există cel mult n întregi astfel încât $Q(t) = t$. (Indicaţie: folosiţi problema anterioară.)

Seminarul 6 de Algebră II

Grupa 113 - 2020-2021

1 Rezultate folositoare din cursurile și seminariile trecute

Definiția 1.1: Fie R un inel și $n \geq 1$. Pentru un $\sigma \in S_n$, notăm cu

$$\sigma^* : R[X_1, ..., X_n] \to R[X_1, ..., X_n],\ \sigma^*(X_i) = X_{\sigma(i)}$$

(morfism de inele definit cu ajutorul proprietății de universalitate a inelului de polinoame).

i) Un polinom $P \in R[X_1, ..., X_n]$ se numește *simetric* dacă $\sigma^*(P) = P$ pentru orice $\sigma \in S_n$.

ii) Pentru orice $1 \leq k \leq n$, notăm cu

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
&s_1 = X_1 + ... + X_n \\
&s_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + ... + X_{n-1}X_n \\
&... \\
&s_n = X_1X_2...X_n.
\end{aligned}$$

Atunci s_k sunt polinoame simetrice și se numesc *polinoamele simetrice fundamentale.*

Definiția 1.2: Fie R un inel și $n \geq 1$.

a) Pe mulțimea monoamelor din $R[X_1, ..., X_n]$ introducem *ordinea lexicografică*:

$$X_1^{a_1} X_2^{a_2} ... X_n^{a_n} \geq_{lex} X_1^{b_1} X_2^{b_2} ... X_n^{b_n} \iff \begin{array}{c} a_1 = b_1, a_2 = b_2, ...a_n = b_n \\ \text{sau} \\ \text{primul termen nenul din} \\ (a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n) \text{ este pozitiv.} \end{array}$$

Este imediat că $\geq_{lex}$ este ordine totală.

b) Fie $f \in R[X_1, ..., X_n]$. Notăm cu $LT_{lex}(f) = LT(f)$ termenul din f al cărui monom este cel mai mare în sensul ordinii lexicografice și îl numim *termenul principal al lui f*.

Teorema 1.3: *(fundamentală a polinoamelor simetrice)*

Fie R un inel, $n \geq 1$ și $f \in R[X_1, ..., X_n]$. Atunci există un unic polinom $g \in R[X_1, ..., X_n]$ astfel încât

$$f = g(s_1, ..., s_n).$$

Propoziția 1.4: *(Formulele lui Newton) Fie R un inel și $n \geq 2$. Pentru orice $k \geq 0$, notăm cu*

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

Atunci p_k sunt polinoame simetrice și, cu notațiile de la Definiția 1.1, avem relațiile:

$$p_k - s_1 p_{k-1} + s_2 p_{k-2} - ... + (-1)^k k s_k = 0, \text{ dacă } k < n,$$
$$p_k - s_1 p_{k-1} + s_2 p_{k-2} - ... + (-1)^n p_{k-n} s_n = 0, \text{ dacă } k \geq n.$$

2 Polinoame simetrice (cont.)

Exercițiul 2.1:

a) Dacă $x, y, z \in \mathbb{C}$ sunt astfel încât $x + y + Z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 2$ şi $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, determinaţi valoarea lui $x^4 + y^4 + z^4$.

b) Demonstraţi că numerele x, y, z care satisface condiţiile anterioare nu sunt raţionale, dar că $x^n + y^n + z^n \in \mathbb{Q}$ pentru orice număr natural n.

Exercițiul 2.2: Calculați $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $X^3 - 3X + 1$.

Exercițiul 2.3: Scrieți următoarele polinoame simetrice ca polinoame în polinoamele simetrice fundamentale:

a) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_1^3 X_2 = X_1^3 X_2 + X_1^3 X_3 + X_1 X_2^3 + X_1 X_3^3 + X_2^3 X_3 + X_2 X_3^3$.

b) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_1^2 X_2^2$.

c) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_2^2 X_3^3$.

d) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_1^3 X_2^3$.

e) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_1^4 X_2 X_3$.

f) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_1^4 X_2^3$.

Exercițiul 2.4: Demonstrați că $K[X,Y]/(Y^2 - X)$ și $K[X,Y]/(Y^2 - X^2)$ nu sunt izomorfe, pentru orice corp K.

Exercițiul 2.5: Fie R un inel.

a) Scrieți polinomul $f = (X_1 - X_2)^2 \in R[X_1, X_2]$ ca polinom în polinoamele simetrice fundamentale.

b) Fie x_1, x_2 rădăcinile polinomului $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$. Calculați discriminantul ecuației $aX^2 + bX + c = 0$ *i.e.* $(x_1 - x_2)^2$.

Exercițiul 2.6: Fie R un inel.

a) Scrieți polinomul $f = (X_1 - X_2)^2(X_1 - X_3)^2(X_2 - X_3)^2 \in R[X_1, X_2, X_3]$ ca polinom în polinoamele simetrice fundamentale.

b) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $X^3 + pX + q \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$. Calculați discriminantul ecuației $X^3 + pX + q = 0$ *i.e.* $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.

Exercițiul 2.7:

a) Fie K un corp cu $\operatorname{char} K \neq 2$ și $A \subset K[X, Y]$ subinelul polinoamelor simetrice din $K[X, Y]$. Demonstrați că
$$A/(X^2 + Y^2) \simeq K[X].$$

b) Demonstrați că
$$\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2) \not\simeq \mathbb{C}[X].$$

c) Demonstrați că
$$\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2) \not\simeq \mathbb{R}[X].$$

Exercițiul 2.8: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demonstraţi că dacă
$$tr(A) = tr(A^2) = ... = tr(A^n) = 0,$$
atunci A este nilpotentă.

Seminarul 7 de Algebră II

Grupa 113 - 2020-2021

1 Despre parţialul 1

În mare parte din seminar, vom discuta subiectele de la parţialul de pe 26 martie.

2 Alte probleme

Exercițiul 2.1: Fie R un inel.

a) Scrieți polinomul $f = (X_1 - X_2)^2(X_1 - X_3)^2(X_2 - X_3)^2 \in R[X_1, X_2, X_3]$ ca polinom în polinoamele simetrice fundamentale.

b) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $X^3 + pX + q \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$. Calculați discriminantul ecuației $X^3 + pX + q = 0$ *i.e.* $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.

Exercițiul 2.2: Fie $n \geq 2$. Cu notaţiile uzuale pentru polinoamele simetrice din $R[X_1, ..., X_n]$, arătaţi că, pentru orice $k \leq n$,

$$P_k = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 2s_2 & s_1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 3s_3 & s_2 & s_1 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ks_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & ... & s_1 \end{vmatrix}.$$

Exercițiul 2.3: Fie K un corp, $\operatorname{char} K = 0$ și $x_1, ..., x_n \in K$ cu $x_1^k + ... + x_n^k = 0$ pentru orice $1 \leq k \leq n$. Demonstrați că $x_1 = ... = x_n = 0$.

Rămâne același lucru adevărat pentru corpuri de caracteristică pozitivă? Dacă nu, dați un contraexemplu și scrieți o condiție suficientă pentru n și $\operatorname{char} K$ astfel încât rezultatul să rămână valabil.

Polinoame

Seminar 8

Problema 1. Fie a, b, c numere reale astfel încât $a + b + c = 0$. Demonstraţi că:

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right).$$

Problema 2. Demonstraţi că pentru numerele naturale nenule $m, n \in \mathbb{N}^*$ avem $(X^m - 1, X^n - 1) = X^{(m,n)} - 1$. În particular, $(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{(n,m)} - 1$.

Problema 3. Fie p un număr prim şi considerăm polinomul $F(X) = X^{p-1} + \cdots + X + 1$. Calculaţi restul împărţirii polinomului $F(X^p)$ la $F(X)$.

Problema 4. Determinaţi toate numerele naturale nenule $n < 10^{100}$ pentru care simultan n divide 2^n, $n - 1$ divide $2^n - 1$ şi $n - 2$ divide $2^n - 2$.

Problema 5. Calculaţi $(X^{23} + \cdots + X + 1, X^{53} + \cdots + X + 1)$.

Problema 6. Fie m, n numere naturale nenule relativ prime şi $a > 1$ un număr real astfel încât $a^m + \frac{1}{a^m}$ şi $a^n + \frac{1}{a^n}$ sunt întregi. Demonstraţi că $a + \frac{1}{a}$ este de asemenea un întreg.

Problema 7. Determinaţi toate polinoamele $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $P(0) = 0$ şi $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Problema 8. Există un polinom nenul $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $Xf(X-1) = (X+1)f(X)$?

Problema 9. Determinaţi toate polinoamele $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $XP(X - 1) = (X - 5)P(X)$.

Problema 10. Arătaţi că polinomul $P(X) = (1 + X + \cdots + X^n)^2 - X^n \in \mathbb{Q}[X]$ este reductibil, unde $n \geq 2$ este un număr natural.

Problema 11. Fie f un polinom neconstant având coeficienţii numerele naturale nenule. Demonstraţi că dacă n este un număr natural, atunci $f(n)$ divide $f(f(n) + 1)$ dacă şi numai dacă $n = 1$.

Problema 12*. Fie a, b două numere raţionale pozitive astfel încât pentru un $n \geq 2$ numărul $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ este raţional. Demonstraţi că $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ sunt de asemenea raţionale.

Problema 13*. Există un şir infinit de numere reale nenule $a_0, a_1, a_2, \ldots$ astfel încât pentru orice $n = 1, 2, 3, \ldots$ polinomul

$$p_n(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

are exact n rădăcini reale distincte?

Problema 14*. Fie $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad n. Atunci $f(n) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă există numerele întregi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ astfel încât

$$f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 \frac{X(X-1)}{2!} + \cdots + a_n \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

Polinoame

Seminariile 9 şi 10

Problema 1. Testaţi dacă următoarele polinoame sunt ireductibile în $\mathbb{Q}[X]$:

(i) $3X^2 - 7X - 1$;

(ii) $6X^3 - 3X - 18$;

(iii) $X^3 - 7X + 1$;

(iv) $X^3 - 9X - 9$.

Problema 2. Determinaţi toate polinoamele ireductibile de grad ≤ 5 din $\mathbb{Z}_2[X]$.

Problema 3. Demonstraţi folosind criteriul lui Eisenstein că următoarele polinoame sunt ireductibile (pentru fiecare din ele este precizat inelul unde este ireductibil):

(1) $P(X) = X^{12} + 2X^5 + 4X^3 + 14X + 6$ în $\mathbb{Q}[X]$;

(2) $P(X) = X^n - 2$ în $\mathbb{Q}[X]$;

(3) $f(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$, unde p este un număr natural prim, este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$;

(4)* $P(X, Y, Z) = X^2 - YZ$ în $\mathbb{R}[X, Y, Z]$;

(5)* $P(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$ în $\mathbb{R}[X, Y]$;

(6) $P(X) = X^{2^n} + 1$ în $\mathbb{Q}[X]$.

Problema 4. Să se arate că $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3 + X + \hat{1})$ şi $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3 + X^2 + \hat{1})$ sunt corpuri izomorfe.

Problema 5. Fie F un corp. Arătaţi că dacă $a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in F[X]$ este ireductibil, atunci la fel este şi $a_n + a_{n-1}X + \ldots + a_0X^n$.

Problema 6. Fie $f(X) = X^2 - 3$, $g(X) = X^2 - 2X - 2$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$. Să se arate că f şi g sunt ireductibile peste $\mathbb{Q}$ şi are loc următorul izomorfism de inele $\mathbb{Q}[X]/(f(X)) \cong \mathbb{Q}[X]/(g(X))$.

Problema 7. Descompuneţi $X^n - 1$, $1 \leq n \leq 8$, în produs de polinoame ireductibile în $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X], \mathbb{Z}_2[X]$.

Problema 8. Fie $L := \mathbb{Z}_2[X]/(X^3 + X + \hat{1})$ şi $f(X) = X^4 + X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$. Să se arate că L este corp şi să se studieze ireductibilitatea lui f în $L[X]$.

Problema 9. Fie K un corp, $f \in K[X]$ un polinom neconstant şi $a, b \in K$, $a \neq 0$. Arătaţi că f este ireductibil în $K[X]$ dacă şi numai dacă $f(aX + b)$ este ireductibil în $K[X]$.

Problema 10. Arătaţi că polinomul $P(X) = X^{105} - 9$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Problema 11. Demonstraţi că polinomul $P(X) = X^{101} + 101X^{100} + 102$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Problema 12. Dacă $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ sunt distincte două câte două atunci polinomul $f(X) = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_n) - 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Problema 13. Dacă $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ sunt distincte două câte două atunci polinomul $f(X) = (X - a_1)^2(X - a_2)^2 \cdots (X - a_n)^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Problema 14. Fie p un număr prim natural. Demonstraţi că polinomul

$$P(X) = X^{p-1} + 2X^{p-2} + 3X^{p-3} + \ldots + (p-1)X + p$$

este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Problema 15*. Demonstraţi că polinomul $f(X) = X^4 - 10X^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, dar este reductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$ pentru orice număr prim p.

Problema 16*. Să se arate că polinoamele $f(X, Y) = X^2 - Y^3$, respectiv $g(X, Y) = Y^2 - X^2 - X^3$ sunt ireductibile în $\mathbb{R}[X, Y]$.

Problema 17*. Să se arate că polinomul $f(T) = T^3 - X^3 \in \mathbb{Z}_5(X^5)[T]$ este ireductibil peste corpul $\mathbb{Z}_5(X^5)$.

Problema 18*. Polinomul $X^p - X + a \in \mathbb{Z}[X]$, unde p este număr prim astfel încât $(p, a) = 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Problema 19*. Fie $n > 1$ un număr natural şi $f(X) = X^n + 5X^{n-1} + 3$. Demonstraţi că $f(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Problema 20*. (Criteriul de ireductibilitate al lui Cohn) Fie $b \geq 2$ şi p un număr prim. Scriem p în baza b, i.e. $p = a_n b^n + \ldots + a_1 b + a_0$ cu $0 \leq a_i \leq b - 1$. Atunci polinomul $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Seminarul 10 de Algebră II

Grupa 113 - 2020-2021

1 Ideale maximale şi polinoame ireductibile în $K[X]$

Toate inelele se consideră comutative şi unitare.

Exercițiul 1.1: Demonstraţi că Teorema de corespondenţă a idealelor este compatibilă cu idealele maximale *i.e.* ideale maximale corespund la ideale maximale.

Exercițiul 1.2: Determinaţi idealele maximale ale lui $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$.

Exercițiul 1.3: Demonstraţi că:

a) $(X^2 - 2) \in \mathrm{Max}(\mathbb{Q}[X])$;

b) $(X^n - 2) \in \mathrm{Max}(\mathbb{Q}[X])$;

c) $(4, X) \notin \mathrm{Max}(\mathbb{Z}[X])$;

d) $(2 + i) \in \mathrm{Max}(\mathbb{Z}[i])$;

e) $(2, X^4 + X^3 + 1) \in \mathrm{Max}(\mathbb{Z}[X])$;

Exercițiul 1.4: Decideţi dacă următoarele ideale sunt maximale în $\mathbb{Z}[X]$:

a) $(5, X^3 + 2X^2 + 4X + 3)$;

b) $(7, X^4 + X^2 + 2)$.

Exercițiul 1.5: Fie R un inel. Demonstraţi că (X) este ideal maximal dacă şi numai dacă $(X - a)$ este ideal maximal pentru orice $a \in R$.

Definiția 1.6: Un inel R se numeşte **local** dacă are un singur ideal maximal.

Exercițiul 1.7: Pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, când este $\mathbb{Z}_n$ inel local?

Exercițiul 1.8:

a) Fie $R_1, R_2, ..., R_n$ inele. Determinați forma idealelor maximale ale lui $R = R_1 \times ... \times R_n$.

b) Determinați idealele maximale ale lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_8$.

Exercițiul 1.9: Determinați toate idealele inelului $\mathbb{Z}[X]/(2, X^3 + 1)$. Precizaţi care dintre ele sunt maximale.

Exercițiul 1.10: Fie R un inel comutativ. Demonstrați că urmatoarele afirmații sunt echivalente:

(i) R este inel local.

(ii) Pentru orice $a, b \in R$, dacă $a + b \in U(R)$, atunci $a \in U(R)$ sau $b \in U(R)$.

(iii) $R \setminus U(R)$ este ideal al lui R.

Exercițiul 1.11: Demonstraţi că singurele elemente idempotente dintr-un inel local sunt 0 şi 1.

Exercițiul 1.12: Fie p un număr prim şi

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ p \nmid b \right\}$$

Demonstraţi că A este inel local.

Exercițiul 1.13:

a) Fie K un corp și $a_1, ..., a_n \in K$. Demonstrați că idealul

$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, ..., X_n - a_n) \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$$

este maximal.

b) Daţi exemplu de corp K pentru care $K[X_1, ..., X_n]$ are şi alte ideale maximale.

Exercițiul 1.14: Determinați idealele maximale ale lui $\mathbb{R}[X]$.

Exercițiul 1.15*: Determinați idealele maximale ale lui $\mathbb{R}[X, Y]$.

Exercițiul 1.16: Demonstrați că un corp finit are p^n elemente, pentru un p prim și un $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercițiul 1.17: Arătaţi că $\mathbb{Z}_2[X] / (X^3 + X + \hat{1})$ şi $\mathbb{Z}_2[X] / (X^3 + X^2 + \hat{1})$ sunt corpuri izomorfe.

Exercițiul 1.18: Fie $L := \mathbb{Z}_2[X] / (X^3 + X + \hat{1})$ şi $f(X) = X^4 + X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$. Arătaţi că L este corp şi studiaţi ireductibilitatea lui f în $L[X]$.

Exercițiul 1.19: Construiți un corp cu:

a) 8 elemente;

b) 9 elemente;

c) 125 de elemente.

Exercițiul 1.20: Fie p un număr prim și $f = X^p - X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_p[X]$.

a) Arătați că f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_p$.

b) Arătați că, dacă f are o rădăcină într-un corp L, $\mathbb{Z}_p \subset L$, atunci f are toate rădăcinile în L.

c) Arătați că f este ireductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$.

Seminarul 11 de Algebră II

Grupa 113 - 2020-2021

1 Ideale maximale şi polinoame ireductibile în $K[X]$

Toate inelele se consideră comutative şi unitare.

Exercițiul 1.1: Fie K corp şi $f \in K[X]$. Descrieţi idealele inelului $K[X]/(f)$.

Exercițiul 1.2: Determinați idealele maximale ale lui $\mathbb{R}[X]$.

Exercițiul 1.3*: Determinați idealele maximale ale lui $\mathbb{R}[X,Y]$.

Exercițiul 1.4: Demonstraţi că polinomul $f(X) = (X-1)(X-2)...(X-n)+1 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil pentru $n \neq 4$.

Exercițiul 1.5: Dacă $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ sunt distincte două câte două, atunci polinomul $f(X) = (X-a_1)^2(X-a_2)^2...(X-a_n)^2+1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Exercițiul 1.6: Fie R un domeniu şi $I \trianglelefteq R, I \neq R$. Dacă $f \in R[X]$ **monic** este ireductibil în $\left(R/I\right)[X]$, atunci este ireductibil în $R[X]$.

Exercițiul 1.7: Demonstraţi că următoarele polinoame sunt ireductibile:

a) $X^5 + 9X^2 + 4X + 7 \in \mathbb{Z}[X]$;

b) $X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$;

c) $X^2 + XY + 1 \in \mathbb{Z}[X,Y]$.

Teorema 1.8: *(Criteriul lui Cohn) Fie $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ şi $p \in \mathbb{N}$ prim a cărui scriere în baza b este*

$$p = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + ... + a_n b^n,\ 0 \leq a_i < b.$$

Atunci polinomul $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ este ireductibil (în $\mathbb{Z}[X]$ şi $\mathbb{Q}[X]$).

Exercițiul 1.9: Demonstraţi că următoarele polinoame sunt ireductibile în $\mathbb{Q}[X]$:

a) $X^6 + X^4 + X^3 + 1$;

b) $X^5 + X^4 + 2X + 1$;

c) $2X^3 + 5X^2 + 5X + 7$.

Exercițiul 1.10: Fie p un număr prim și $f = X^p - X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_p[X]$.

a) Arătați că f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_p$.

b) Arătați că, dacă f are o rădăcină într-un corp L, $\mathbb{Z}_p \subset L$, atunci f are toate rădăcinile în L.

c) Arătați că f este ireductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$.

2 Inele locale

Definiția 2.1: Un inel R se numeşte **local** dacă are un singur ideal maximal.

Exercițiul 2.2: Fie R un inel comutativ. Demonstrați că urmatoarele afirmații sunt echivalente:

(i) R este inel local.

(ii) Pentru orice $a, b \in R$, dacă $a + b \in U(R)$, atunci $a \in U(R)$ sau $b \in U(R)$.

(iii) $R \setminus U(R)$ este ideal al lui R.

Exercițiul 2.3: Demonstraţi că singurele elemente idempotente dintr-un inel local sunt 0 şi 1.

Exercițiul 2.4: Fie p un număr prim şi

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ p \not| \, b \right\}$$

Demonstraţi că A este inel local.

Seminarul 12 de Algebră II

Grupa 113 - 2020-2021

1 Problemă rămasă de data trecută

Exercițiul 1.1: Fie m, n numere naturale nenule relativ prime şi $a > 1$ un număr real astfel încât $a^m + \frac{1}{a^m}$ şi $a^n + \frac{1}{a^n}$ sunt întregi. Demonstraţi că $a + \frac{1}{a}$ este de asemenea un întreg.

2 Discuţie despre subiectele de la Parţialul 2

3 Metoda lui Cardano de rezolvare a ecuaţiilor algebrice de grad 3

Fie ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Prin schimbarea de variabilă $y = x + \frac{a}{3}$, putem să preupunem că termenul de grad 2 este nul, deci vrem să găsim, prin formule cu radicali, rădăcinile ecuaţiei

$$x^3 + px + q = 0.$$

Dacă $p = 0$, atunci $x = \sqrt[3]{-q} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $0 \le k \le 2$.

Presupunem $p \neq 0$. Scriem $x = u + v$. Atunci

$$0 = (u + v)^3 + p(u + v) + q = u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q.$$

Dacă $3uv + p = 0$, atunci $u^3 + v^3 = -q$. Căutăm atunci soluţii u, v ale sistemului

$$\begin{cases} u^3 + v^3 & = -q \\ uv & = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Atunci u^3 şi v^3 sunt rădăcinile ecuaţiei de gradul 2

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Aşadar

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \tag{3.1}$$

(prin $\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$ întelegem oricare din cele două numere complexe ce au pătratul $q^2 - 4p^3$, de vreme ce u şi v sunt interschimbabile).

Pentru fiecare din cele 3 valori posibile ale lui u ce rezultă din (3.1), $u_k = re^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $0 \le k \le 2$, cu $r^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$, rezultă o rădăcină x_k a ecuaţiei iniţiale.

Exercițiul 3.1: Arătaţi că $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6$.

Exercițiul 3.2: Rezolvaţi următoarele ecuaţii de gradul 3 folosind metoda lui Cardano şi, acolo unde este posibil, direct:

a) $x^3-9x-12=0$;

b) $x^3-3x=0$;

c) $x^3+2x^2+1=0$;

d) $x^3-3x^2+9x-5=0$;

e) $x^3-3x-52=0$;

f) $x^3-21x+20=0$.

Seminarul 13 de Algebră II

Grupa 113 - 2020-2021

1 Metoda lui Cardano de rezolvare a ecuaţiilor algebrice de grad 3

Fie ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Prin schimbarea de variabilă $y = x + \frac{a}{3}$, putem să preupunem că termenul de grad 2 este nul, deci vrem să găsim, prin formule cu radicali, rădăcinile ecuaţiei

$$x^3 + px + q = 0.$$

Dacă $p = 0$, atunci $x = \sqrt[3]{-q} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $0 \leq k \leq 2$.

Presupunem $p \neq 0$. Scriem $x = u + v$. Atunci

$$0 = (u + v)^3 + p(u + v) + q = u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q.$$

Dacă $3uv + p = 0$, atunci $u^3 + v^3 = -q$. Căutăm atunci soluţii u, v ale sistemului

$$\begin{cases} u^3 + v^3 & = -q \\ uv & = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Atunci u^3 şi v^3 sunt rădăcinile ecuaţiei de gradul 2

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Aşadar

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \tag{1.1}$$

(prin $\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$ întelegem oricare din cele două numere complexe ce au pătratul $q^2 - 4p^3$, de vreme ce u şi v sunt interschimbabile).

Pentru fiecare din cele 3 valori posibile ale lui u ce rezultă din (1.1), $u_k = re^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $0 \leq k \leq 2$, cu $r^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$, rezultă o rădăcină x_k a ecuaţiei iniţiale.

2 Rezolvarea ecuaţiilor algebrice

Exercițiul 2.1: Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţiile:

a) $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$;

b) $z^2 = 1 + 2i$.

Exercițiul 2.2: Arătaţi că $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 6$.

Exercițiul 2.3: Rezolvaţi următoarele ecuaţii de gradul 3 folosind metoda lui Cardano şi, acolo unde este posibil, direct:

a) $x^3 - 9x - 12 = 0$;

b) $x^3 - 3x = 0$;

c) $x^3 + 2x^2 + 1 = 0$;

d) $x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0$;

e) $x^3 - 3x - 52 = 0$;

f) $x^3 - 21x + 20 = 0$.

Exercițiul 2.4: Determinaţi a astfel încât -1 este rădăcină multiplă a polinomului $X^5 - aX^2 - aX + 1$.

Exercițiul 2.5: Fie K corp şi $R : K[X] \to K[X]$,

$$R(a_0 + a_1X + ... + a_nX^n) = a_n + a_{n-1}X + ... + a_0X^n.$$

Un polinom se numeşte *reciproc* dacă $R(f(X)) = f(X)$.

a) Demonstraţi că, dacă $f(0) \neq 0$, atunci $f(X)$ ireductibil dacă şi numai dacă $R(f)(X)$ este ireductibil.

b) Demonstraţi că, dacă f este reciproc şi $\deg f = 2n$, atunci $f(X) = X^n g\left(X + \frac{1}{X}\right)$ cu g un polinom de grad n.

c) Demonstraţi că, dacă f este reciproc şi $\deg f = 2n+1$, atunci $f(X) = (X+1)f_1(X)$ cu $f_1(X)$ reciproc de grad par.

Exercițiul 2.6: Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţiile:

a) $z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0$;

b) $4z^{11} + 4z^{10} - 21z^9 - 21z^8 + 17z^7 + 17z^6 + 17z^5 + 17z^4 - 21z^3 - 21z^2 + 4z + 4 = 0$.

Exercițiul 2.7: Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $x^4 + a^4 - 3ax^3 + 3a^3x = 0$.

Exercițiul 2.8: Rezolvaţi, pentru $x \in \mathbb{C}$, ecuaţia $(x - a)^4 + (x - b)^4 = (a - b)^4$.

Exercițiul 2.9: Fie $n > 1$ natural. Demonstraţi că polinomul $X^n + 5X^{n-1} + 3$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Exercițiul 2.10: Demonstraţi că, pentru p prim, polinomul $X^{p^n} + p - 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.