EXAMEN LA ANALIZA MATEMATICA I

I. 1) Fie

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \big| x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0\} \cup \left\{\left(-2^{-n}, 2^{-n}\right) \ \big| \ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Determinati interiorul, aderenta si multimea punctelor de acumulare ale multimii A. Decideti daca A este inchisa, deschisa sau compacta. Decideti daca aderenta multimii A este compacta. Justificati raspunsurile!

2) Aratati ca daca $A \subset \mathbb{R}^2$ este o multime conexa atunci aderenta multimii A este o multime conexa.

II. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & \text{daca } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+2x)}{x} + x, & \text{daca } x > 0 \end{cases}$$

1) Studiati continuitatea si derivabilitatea lui f.

2) Studiati uniform continuitatea functiei f pe $\mathbb{R}$ si pe $(0, \infty)$.

III. 1) Pentru $n \geq 1$, fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{4ne^x + e^{2x} + 5n^2}{5n^2 + e^{2x}}$$

Sa se studieze convergenta simpla si convergenta uniforma a sirului $(f_n)_{n\geq 1}$ pe $(-\infty, 0)$ si $\mathbb{R}$.

2) Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un sir de functii reale definite pe intervalul $[0, \infty)$ care converge uniform catre functia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ si fie $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Pentru $n \geq 1$, fie $h_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definite prin $h_n(x) = f_n(x)\text{arctg}(g(x))$.

Este adevarat ca sirul de functii $(h_n)_{n\geq 1}$ este uniform convergent pe $[0, \infty)$? Justificati raspunsul!

IV. 1) Studiati convergenta seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)\right)$$

2) Studiati convergenta sirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea ca

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{\text{arctg}(n)}{n^2 + 2n}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Nota. Timpul de lucru este de 2 ore. Fiecare subiect se noteaza cu note de la 1 la 10. Nota obtinuta la aceasta lucrare este media aritmetica a celor 4 note. Toate raspunsurile trebuie justificate!

Rezolvarile trebuie scanate si trimise impreuna cu lista de subiecte sub forma unui **singur** fisier pdf la adresele radu-bogdan.munteanu@g.unibuc.ro si radu.munteanu@unibuc.ro.

Examen Analiză I

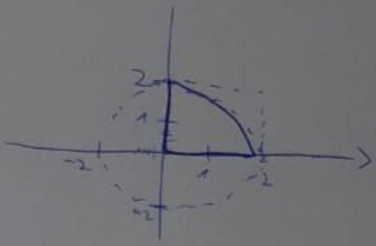
ONUȚU RADU-CONSTANTIN
Grupa 113

I 1) $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4,\ x>0,\ y>0\} \cup \{(-2^{-n}, 2^{-n}) \mid n\in\mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$

$\cancel{\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0\}}$

~~Pt. punctele de această formă~~

$\cancel{A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(0,2)\}}$



$\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0\}$

Pt. punctele de această formă, există o vecinătate pt. fiecare punct astfel încât vecinătatea să fie inclusă complet în sfertul de cerc

$\bar{A} = A\cup\{(0,0)\}$

Pt. punctele de această formă, orice vecinătate a lor aș lua, intersecția dintre vecinătate și $\bar{A}$ o să fie diferită de mulțimea vidă

$A' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4,\ x>0,\ y>0\} \cup \{(0,0)\}$

Pt. punctele de această formă, orice vecinătate a lor aș lua, aceasta conține o infinitate de puncte din A'

$A\ne\bar{A} \Rightarrow A$ nu este închisă
$A\ne\mathring{A} \Rightarrow A$ nu este deschisă

A nu este închisă $\Rightarrow A$ nu este compactă

$\left.\begin{array}{l}\bar{A} \text{ este închisă prin definiție} \\ \bar{A} \text{ este mărginită } (2^{-n}\in(0,1))\end{array}\right| \Rightarrow \bar{A}$ este compactă

II $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^3+2, & x \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x} + x, & x > 0 \end{cases}$$

1) f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$ fiind o compunere de funcții elementare

Studiez continuitatea în $x=0$

$$l_s = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x^3+2 = 2$$

$$f(0) = 2$$

$$l_d = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln(1+2x)}{x} + x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} + x =$$

$$= \cancel{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}}} 1 \cdot 2 + 0 = 2$$

$l_s = f(0) = l_d \overset{=2}{\Rightarrow} f$ este continuă și în $x=0 \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$

f este derivabilă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$ fiind o compunere de funcții elementare

Studiez derivabilitatea în $x=0$

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{x^3+2-2}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x^2 = 0$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\frac{\ln(1+2x)}{x} + x - 2}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln(1+2x)+x^2-2x}{x^2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\frac{2}{1+2x} + 2x - 2}{2x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{2+2x+4x^2-4x}{2x+4x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{2-2x+4x^2}{2x+4x^2}$$

$= \frac{2}{0^+} = \infty \Rightarrow f$ nu este derivabilă în $x=0$

$\Rightarrow f$ derivabilă pe $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

2

2) pt. $x>0$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x)}{x^2} + 1 = \frac{1 - \frac{1}{1+2x} - \ln(1+2x)}{x^2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+2x^3} - \frac{\ln(1+2x)}{x^2} + 1 \Rightarrow f'(x) \text{ mărginită}$$

$\in(0,1)$ $\in(0,1)$ $\in(0,1)$

f - derivabilă pe $(0,\infty)$

$\Rightarrow f$ uniform continuă pe $(0,\infty)$

III 1) $n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{4ne^x + e^{2x} + 5n^2}{5n^2 + e^{2x}}$$

Convergența simplă și uniformă pe $(-\infty, 0)$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{4ne^x + e^{2x} + 5n^2}{5n^2 + e^{2x}} = \cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2x}\left(\frac{4n}{e^x} + 1 + \frac{5n^2}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(\frac{5n^2}{e^{2x}} + 1\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{5n^2}\left(\frac{4e^x}{5n} + \frac{e^{2x}}{5n^2} + 1\right)}{\cancel{5n^2}\left(1 + \frac{e^{2x}}{5n^2}\right)}$$

$= 1$

$f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$

$$f_n \xrightarrow[(-\infty,0)]{s} f$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,0)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,0)} \left| \frac{4ne^x + e^{2x} + 5n^2}{5n^2 + e^{2x}} - 1 \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,0)} \left| \frac{4ne^x}{5n^2 + e^{2x}} \right| = \lim_{n\to\infty} 4n \cdot \sup_{x\in(-\infty,0)} \frac{e^x}{5n^2 + e^{2x}}$$

Fie $g_n : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{e^x}{5n^2 + e^{2x}}$

$$g_n'(x) = \frac{5n^2e^x + e^{3x} - 2e^{3x}}{(5n^2 + e^{2x})^2} = \frac{5n^2e^x - e^{3x}}{(5n^2 + e^{2x})^2}$$

$$g_n'(x) = 0 \Rightarrow 5n^2e^x - e^{3x} = 0$$

$\cancel{e^{3x} = 5n}$

$e^x(5n^2 - e^{2x}) = 0$ dar $e^x \neq 0$

$\Rightarrow e^{2x} = 5n^2$

$2x = \ln(5n^2)$

$x = \frac{\ln(5n^2)}{2} > 0$

x	$-\infty$					0
$g'_n(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+++$	
$g_n(x)$						

g_n este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in(-\infty,0)} g_n(x) = g_n(0) = \dfrac{1}{5n^2+1}$

$\cancel{\dfrac{\ln 5n^2}{2} = \ln \sqrt{5}n}$

$\cancel{g_n(\ln \sqrt{5}n) = \dfrac{\sqrt{5}n}{5n^2+5n^2} = \dfrac{\sqrt{5}n}{10n^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{10n}}$

$\cancel{\Rightarrow \sup g_n(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{10n}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 4n \cdot \sup\limits_{x\in(-\infty,0)} g_n(x) = \cancel{\lim\limits_{n\to\infty} 4n \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{10n} = \dfrac{4\sqrt{5}}{10} \neq 0}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 4n \cdot \dfrac{1}{5n^2+1} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[(-\infty,0)]{u} f$

Convergența simplă și uniformă pe $\mathbb{R}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1$

$f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{s} f$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} 4n \cdot \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{e^x}{5n^2 + e^{2x}}$

Fie $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h_n(x) = \dfrac{e^x}{5n^2+e^{2x}}$

$h'_n(x) = \dfrac{5n^2e^x - e^{3x}}{(5n^2+e^{2x})^2}$

$h'_n(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\ln 5n^2}{2} = \ln \sqrt{5}n$

x	$-\infty$		$\ln \sqrt{5}n$		∞
$h'_n(x)$	$+ + + + +$		0	$- - - -$	
$h_n(x)$	$\nearrow$		$h_n(\ln\sqrt{5}n)$	$\searrow$	

$\Rightarrow h_n(\ln\sqrt{5}n) > h_n(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

6

Dar $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} h_n(x) = h_n(\ln\sqrt{5}\,n) = \dfrac{\sqrt{5}\,n}{5n^2+5n^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{10n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 4n \cdot \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} h_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 4n \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{10n} = \dfrac{4\sqrt{5}}{10} \neq 0$

$\Rightarrow f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{u}{\not\longrightarrow}} f$

IV. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\ln\left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Compar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^2+2}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ prin criteriul comparației

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)\right)}{\ln \frac{n^2+2}{n^2}} = 1 \in (0,\infty) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

limită remarcabilă

$\ln\left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right) = \ln\left(\dfrac{2}{n^2}+1\right)$

Compar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ prin criteriul comparație

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{2}{n^2}+1\right)}{\frac{2}{n^2}} = 1 \in (0,\infty) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$

limită remarcabilă

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ este o serie armonică convergentă, deoarece $2>1$

Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\ln\left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)\right)$ - serie convergentă