Seminar 1

Analiză complexă

Exercițiul 1 Rezolvați ecuația $z^2 + 2\sqrt{3}iz - 2 - i = 0$.

Exercițiul 2 Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ deschis conex și $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfă. Demonstrați că dacă una dintre următoarele condiții este îndeplinită, atunci f este constantă.

1. $\mathrm{Re}(f)$ este constantă
2. $\mathrm{Im}(f)$ este constantă
3. $|f|$ este constantă
4. $\overline{f}$ este olomorfă.

Exercițiul 3 Considerăm operatorul Laplace $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

- Arătați că $\Delta = 4\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = 4\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial}{\partial z}$.
- Demonstrați că dacă $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ este olomorfă (și de clasă $\mathcal{C}^2$), atunci u și v sunt funcții armonice, adică $\Delta u = \Delta v = 0$.

Exercițiul 4 Considerăm f și g olomorfe pe un deschis conex $\Omega \subset \mathbb{C}$. Să se arate că:

1. dacă $f(z) + \overline{g}(z) \in \mathbb{R}$ pentru orice $z \in \Omega$, atunci $f(z) = c + g(z)$ pentru orice $z \in \Omega$, cu $c \in \mathbb{R}$.
2. dacă $g(z) \neq 0$ și $f(z)\overline{g}(z) \in \mathbb{R}$ pentru orice $z \in \Omega$, atunci $f(z) = cg(z)$ pentru orice $z \in \Omega$, cu $c \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 5 Presupunem $f_1, f_2, \ldots, f_n$ olomorfe (și de clasă $\mathcal{C}^2$) pe un deschis conex Ω. Să se arate că dacă $\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2$ este constantă pe Ω, atunci toate funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt constante.

Exercițiul 6 Să se determine toate funcțiile olomorfe $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ (și cu derivata f' olomorfă pe Ω), cu proprietatea $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ pe Ω.

Exercițiul 7 Să se determine toate funcțiile olomorfe $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ (și cu derivata f' continuă pe Ω) și cu proprietatea că funcția $g = u^2 + iv^2$ este de asemenea olomorfă.

Exercițiul 8 Un cuplu de funcţii armonice (u, v) se numesc conjugate dacă funcţia $f = u + iv$ este olomorfă. Considerăm (u, v) un cuplu de funcţii armonice şi $f = u + iv$. Să se arate că şi cuplurile (U, V) de mai jos sunt cupluri de funcţii armonice conjugate şi să se indice, în funcţie de f, căror funcţii olomorfe corespund.

1. $U = au - bv$, $V = bu + av$, $(a, b \in \mathbb{R})$.
2. $U = \exp(u)\cos(v)$, $V = \exp(u)\sin(v)$.
3. $U = u^2 - v^2$, $V = 2uv$.

Exercițiul 9 Găsiţi toate funcţiile olomorfe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cu $\mathrm{Re}(f) = x^3 - 3xy^2 - x$.

Seminar 2

Analiză complexă

Exercițiul 1 Determinați toate polinoamele $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ de forma

$$P(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \cdots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n,$$

astfel încât $z = x + iy \mapsto P(x, y)$ este funcție olomorfă.

Exercițiul 2 Demonstrați că în coordonate polare (r, θ), ecuațiile Cauchy-Riemann au forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Exercițiul 3 Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \end{cases}$$

este de clasă $\mathcal{C}^\infty$, dar nu este (real) analitică.

Exercițiul 4 Demonstrați că

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ nu converge în niciun punct de pe cercul $C_1(0)$.
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge peste tot pe cercul $C_1(0)$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge peste tot pe cercul $C_1(0) \setminus \{1\}$ şi este divergentă în 1.

Exercițiul 5 Demonstrați că funcția $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ verifică

1. $\exp(z)\exp(w) = \exp(z + w)$.
2. $\exp'(z) = \exp(z)$.
3. $\exp(z) \neq 0$ şi $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.
4. $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$ şi $|\exp(z)| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.
5. $\exp(z) = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi i k$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

Exercițiul 6 Demonstrați că funcțiile $\sin z$ şi $\cos z$ sunt nemărginite pe $\mathbb{C}$.

Seminar 3

Analiză complexă

Exercițiul 1. Calculați următoarele integrale:

1. $\displaystyle\int_{C_r(0)} z^n dz$, unde $n \in \mathbb{Z}$, iar $C_r(0)$ este pozitiv orientat.

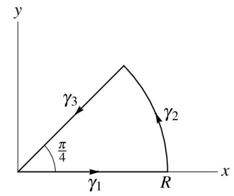
2. $\displaystyle\int_C z^n dz$, unde $n \in \mathbb{Z}$, iar C este un cerc pozitiv orientat, ce nu trece prin 0.

3. $\displaystyle\int_{C_r(0)} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz$, unde $|a| < r < |b|$ si $C_r(0)$ are orientarea pozitivă.

Exercițiul 2. Demonstrați că

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Hint: Integrăm funcția $f(z) = e^{-z^2}$ pe conturul $\Gamma_R = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ din desenul de mai jos:

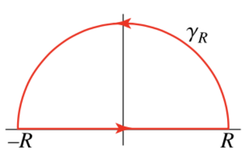


Exercițiul 3. Demonstrați că pentru orice $\xi \in \mathbb{R}$, avem $e^{-\pi\xi^2} = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}$.

Hint: Integrăm funcția $f(z) = e^{-\pi z^2}$ pe dreptunghiul cu vârfurile $-R$, R, $R + i\xi$, $-R + i\xi$, orientat in sens trigonometric.

Exercițiul 4. Demonstrați că $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Hint: Integrăm funcția $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$ pe conturul γ_R din desenul de mai jos:



Exerciţiul 5. Calculaţi integralele $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)dx$ şi $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)dx$, unde $a, b > 0$.

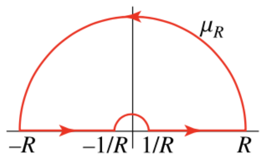
Hint: Integrăm funcţia $f(z) = e^{-Az}$, unde $A = \sqrt{a^2+b^2}$, pe conturul unui sector de disc de unghi ω a.î. $\cos\omega = \frac{a}{A}$.

Seminar 4

Analiză complexă

Exercițiul 1. Arătați că $\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

Hint: Considerăm funcția $f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$ și integrăm f pe conturul μ_R din desenul de mai jos:



Exercițiul 2. Poate fi aproximată uniform orice funcție continuă $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ cu polinoame în variabila z?

Exercițiul 3. Dacă $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ este olomorfă și se prelungește continuu la $\overline{\mathbb{D}}$, iar $C = \partial\mathbb{D}$, este adevărată egalitatea

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

pentru orice $z \in \mathbb{D}$?

Exercițiul 4. Putem extinde orice funcție continuă definită pe cercul unitate C, la o funcție care este olomorfă pe discul unitate $\mathbb{D}$ și continuă pe $\overline{\mathbb{D}}$?

Seminar 5

Analiză complexă

Exercițiul 1. Considerăm $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă și neconstantă. Demonstrați că $\mathrm{Re}(f)$ și $\mathrm{Im}(f)$ sunt nemărginite.

Exercițiul 2. Demonstrați că dacă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este olomorfă și există w, w' numere complexe liniar independente peste $\mathbb{R}$ astfel încât $f(z+w) = f(z) = f(z+w')$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, atunci f este constantă.

Exercițiul 3. Decideți dacă există funcții olomorfe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pentru care:

- $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ pentru orice $n \geq 1$.
- $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ pentru orice $n \geq 1$.
- $f(\frac{1}{n}) = e^{-n}$ pentru orice $n \geq 1$.

Exercițiul 4. Fie f o funcție întreagă astfel încât $|f(z)| \leq \ln(|z|+1)$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Demonstrați că f este constantă.

Exercițiul 5. Fie f o funcție întreagă astfel încât $|f(z)| \leq |z|^2$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Demonstrați că există $a \in \mathbb{C}$ cu $|a| \leq 1$, astfel încât $f(z) = az^2$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Exercițiul 6. Fie f o funcție întreagă ce verifică $|f(z_1 + z_2)| \leq |f(z_1)| + |f(z_2)|$ pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demonstrați că f este polinomială de grad cel mult 1.

Exercițiul 7. Fie f o funcție întreagă astfel încât pentru orice $z_0 \in \mathbb{C}$, dacă scriem seria Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

atunci cel puțin un coeficient a_n este zero. Demonstrați că f este polinomială.

Hint: Folosim egalitatea $a_n n! = f^{(n)}(z_0)$ și un argument de numărabilitate.

Exercițiul 8. Fie Ω o mulțime deschisă și L o dreaptă din plan. Demonstrați că dacă $f : \Omega \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe $\Omega \setminus L$ și continuă pe Ω, atunci f este olomorfă pe Ω.

Hint: Teorema Morera.

Seminar 6

Analiză complexă

Exercițiul 1. Dați exemplu de funcție $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfă și $z_1, z_2 \in \Omega$ astfel încât

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \neq f'(c),$$

pentru orice $c \in I = \{(1-t)z_1 + tz_2 \mid t \in [0,1]\} \subset \Omega$.

Hint: Alegem un interval I convenabil pentru funcția $f : \Omega = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.

Exercițiul 2. Considerăm $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfe astfel încât $|f(z)| \leq |g(z)|$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Demonstrați că $f(z) = ag(z)$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, unde $|a| \leq 1$. Rămâne adevărată concluzia dacă în loc de funcții întregi, avem funcțiile olomorfe $f, g : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$?

Exercițiul 3. Determinați o funcție olomorfă $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ astfel încât partea ei reală este dată de formula $u(x, y) = x \cosh x \cos y - y \sinh x \sin y$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 4. Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplu conex și $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ de clasă $\mathcal{C}^1$, olomorfă. Deduceți teorema Cauchy folosind formula Green și ecuațiile Cauchy-Riemann.

Formula Green: $\displaystyle\int_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$

Remarcă: Definiția initială pentru funcțiile olomorfe era doar pentru funcții de clasă $\mathcal{C}^1$, iar teorema Cauchy a fost prima dată demonstrată folosind formula Green. Goursat a arătat mai târziu că nu este necesară ipoteza ca funcția să fie $\mathcal{C}^1$ (așa cum am făcut și noi la curs).

Exercițiul 5. Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex și $u : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcție armonică. Demonstrați că există $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfă, astfel încât $\mathrm{Re}(f) = u$.

Hint: Dacă ar exista $f = u + iv$ olomorfă, atunci $g = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ ar fi olomorfă și $f' = g$. Fixăm $z_0 \in \Omega$ și considerăm $f(z) = u(z_0) + \int_{\gamma_{z_0,z}} g(z)dz$, unde $\gamma_{z_0,z} \subset \Omega$ este o curbă care unește z_0 cu z. Funcția f astfel definită verifică cerințele din enunț.

Exercițiul 6. Fie $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armonică și $\overline{D}_R(z_0) \subset \Omega$. Arătați că este verificată următoarea formulă de medie:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{it}) dt.$$

Seminar 7

Analiză complexă

Exercițiul 1. Care dintre următoarele funcții are o singularitate eliminabilă în $z_0 = 0$?

- $\frac{e^z}{z^4}$
- $\frac{(e^z-1)^2}{z^2}$
- $\frac{\cos(z)-1}{z^2}$.

Exercițiul 2. Determinați polii și ordinele lor pentru funcțiile

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n!(z^2+n^2)}$

Exercițiul 3. Considerăm funcția $f(z) = \frac{(z-1)^2(z+3)}{1-\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}$. Determinați toate singularitățile lui f și decideți de ce tip este fiecare.

Exercițiul 4. Considerăm funcția $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2z^2+8}$. Arătați că funcția f este bine definită și continuă pe $\mathbb{R}$. Determinați domeniul maximal pe care f este olomorfă. Determinați polii lui f.

Exercițiul 5. Studiați tipul singularității în 0 a funcției $f(z) = \frac{\sin z}{\cos z^3 - 1}$.

Exercițiul 6. Dacă singularitatea izolată $a \in \mathbb{C}$ a funcției olomorfe f nu este eliminabilă, atunci e^f are o singularitate esențială în a.

Exercițiul 7. Dacă f are pol de ordin m în z_0, iar P este un polinom de ordin n, atunci $g = P \circ f$ are pol de ordin mn în z_0.

Exercițiul 8. Scrieți seria Laurent asociată funcției $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ în coroana circulară $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 2\}$.

Exercițiul 9. Scrieți seria Laurent a funcției $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ în coroana circulară $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 2| < 1\}$.

Exerciţiul 10. Demonstraţi că

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

unde $\{a_n\}_{n\geq 0}$ verifică $a_0 = a_1 = 1$ şi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pentru orice $n \geq 2$. Calculaţi raza de convergenţă a seriei.

Seminar 8

Analiză complexă

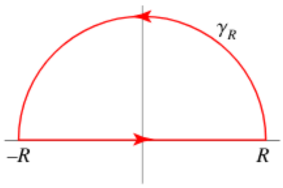
Exercițiul 1. Dacă z_0 este singularitate (izolată) pentru o funcție olomorfă f, atunci $\operatorname{res}(f', z_0) = 0$.

Exercițiul 2. Calculați reziduurile în punctele singulare pentru fiecare din următoarele funcții:

- $\frac{1-\cos z}{z^2}$
- $\frac{1}{\exp(z)+1}$
- $ze^{\frac{1}{1-z}}$
- $\frac{1}{\sin \pi z}$
- $\frac{1}{(z^2+1)(z-i)^3}$.

Exercițiul 3. Calculați $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx$.

Hint: Folosim conturul de integrare γ_R descris în desenul de mai jos:



Exercițiul 4. Calculați $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+4}dx$.

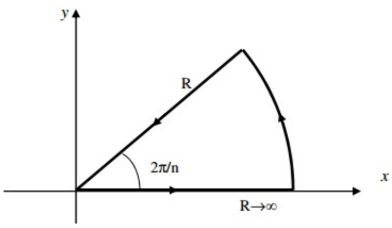
Exercițiul 5. Calculați $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$.

Hint: Dacă $z = e^{i\theta}$, cu $\theta \in \mathbb{R}$, atunci $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \cos\theta$.

Exercițiul 6. Demonstrați că pentru orice număr întreg $n \geq 2$, are loc egalitatea:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Hint: Folosim funcția $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ și conturul de integrare Γ_R descris în desenul de mai jos:



Seminar 9

Analiză complexă

Exercițiul 1. Considerăm f și g olomorfe, cu singularitate izolată in 0. Justificați ce putem spune despre fg, în fiecare dintre următoarele cazuri:

- f și g au pol în 0.
- f și g au singularitate esențială în 0.
- f are pol în 0, iar g are singularitate esențială în 0.

Exercițiul 2. Justificați, printr-un exemplu, că există o funcție f olomorfă pe un domeniu (nemărginit) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, care se prelungește continuu la $\overline{\Omega}$, și care nu își atinge maximumul modulului pe $\partial\Omega$.

Exercițiul 3. Fie $w_1, w_2, \ldots, w_n$ puncte pe cercul unitate. Demonstrați că există un punct w pe cercul unitate astfel încât produsul distanțelor de la w la w_j, $1 \leq j \leq n$, este exact 1.

Exercițiul 4. Folosind *principiul argumentului*, demonstrați că orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$ de grad $n \geq 1$ are exact n rădăcini.

Exercițiul 5. Folosind *teorema lui Rouché*, demonstrați că orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$ de grad $n \geq 1$ are exact n rădăcini.

Exercițiul 6. Considerăm $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfă astfel încât $\mathbb{D} \subset \Omega$ și $|f(z)| < 1$ pentru orice $|z| = 1$. Demonstrați că $f(z) = z^3$ are exact 3 soluții în $D_1(0)$.

Exercițiul 7. Arătați că polinomul $f(z) = 1 + 2z + 7z^2 + 3z^5$ are exact 2 rădăcini în discul $D_1(0)$.

Exercițiul 8. Demonstrați că polinomul $P(z) = z^5 + 14z + 2$ are 4 rădăcini în coroana circulară $\mathcal{A} = \left\{\frac{3}{2} < |z| < 2\right\}$.

Exercițiul 9. Calculați integrala

$$\int_{|z|=1} \frac{10z + e^z + \cos z}{5z^2 + e^z + \sin z} dz.$$

Exercițiul 10. Considerăm $\Omega \subset \mathbb{C}, \Omega \neq \mathbb{C}$ şi $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continuă pe $\overline{\Omega}$ şi olomorfă pe Ω. Dacă există $M_1, M_2 > 0$ astfel încât $|f(z)| \leq M_1$ pentru orice $z \in \partial\Omega$ şi $|f(z)| \leq M_2$ pentru orice $z \in \Omega$, atunci $|f(z)| \leq M_1$ pentru orice $z \in \overline{\Omega}$.

Hint: W.L.O.G., $M_1 = 1$ şi $M_2 = M$. Alegem $z_0 \in \Omega$ pentru care $f'(z_0) \neq 0$ şi considerăm $g(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \to 0$ pentru $z \to \infty$. Pentru N întreg pozitiv, considerăm $h_N(z) = f^N(z)g(z)$. Aplicăm *princ. max. mod.* pentru h_N pe $\Omega \cap D_R(0)$ şi apoi facem $R \to \infty$ pentru a deduce că există o constantă $k > 0$ astfel încât $|h_N(z)| \leq k$ pe Ω. Apoi, facem $z = z_0$ şi $N \to \infty$, şi deducem $|f(z_0)| \leq 1$.

Exercițiul 11. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă, neconstantă. Demonstrați că există o curbă $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ cu $\lim\limits_{t\to\infty} |\gamma(t)| \to \infty$, pentru care $\lim\limits_{t\to\infty} |f(\gamma(t))| \to \infty$.

Hint: Folosim Exercițiul 10.

Seminar 10

Analiză complexă

Exerciţiul 1. Demonstraţi direct (fără a folosi principiul maximului modulului) că e^z îşi atinge minimul şi maximul pe frontiera oricărui compact.

Exerciţiul 2. Demonstraţi că dacă $f : \Omega \to \mathbb{C}$ este olomorfă, $f(z) \neq 0$ pe Ω, iar $K \subset \Omega$ este compact, atunci $|f|$ îşi atinge minimul pe ∂K. Folosind acest rezultat, demonstraţi că orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geq 1$, are cel puţin o rădăcină în $\mathbb{C}$.

Exerciţiul 3. Fie $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfe şi $K \subset \Omega$ compact. Demonstraţi că $|f(z)| + |g(z)|$ îşi atinge maximul pe ∂K.

Exerciţiul 4. Demonstraţi *principiul de maxim/minim pentru funcţii armonice*, adică:

1. Dacă $\Omega \subset \mathbb{C}$ este un deschis conex şi $u : \Omega \to \mathbb{R}$ este armonică şi neconstantă, atunci u nu îşi poate atinge maximumul şi nici minimul pe Ω.

2. Dacă $\overline{\Omega}$ compactă, iar u are prelungire continuă pe $\overline{\Omega}$, atunci $\max_{z\in\overline{\Omega}} |u(z)|$ şi $\min_{z\in\overline{\Omega}} |u(z)|$ se ating pe $\partial\Omega$.

Exerciţiul 5. Fie f olomorfă pe o vecinătate a discului unitate $\mathbb{D}$, astfel încât $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Demonstraţi că $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Exerciţiul 6. Fie f olomorfă pe o vecinătate a coroanei circulare $\mathcal{A} = \{1 \leq |z| \leq 2\}$, astfel încât $|f(z)| \leq 1$ pentru $|z| = 1$ şi $|f(z)| \leq 4$ pentru $|z| = 2$. Demonstraţi că $|f(z)| \leq |z|^2$ pe $\mathcal{A}$.

Exerciţiul 7. Fie f o funcţie olomorfă pe o vecinătate a discului unitate $\mathbb{D}$, astfel încât $|f(z)| \leq 2$ pentru $|z| = 1$, $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ şi $|f(z)| \leq 3$ pentru $|z| = 1$, $\mathrm{Im}(z) \leq 0$. Demonstraţi că $|f(0)| \leq \sqrt{6}$.

Hint: Considerăm $g(z) = f(z)f(-z)$.

Exerciţiul 8. Fie f o funcţie întreagă ce verifică $|f(z)| \geq |z|^N$ pentru orice $|z| \geq R > 0$. Demonstraţi că f este polinom de grad cel puţin N.

Hint: f nu poate avea singularitate esenţială la ∞.

Seminar 11

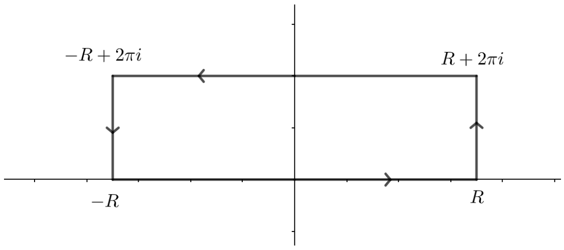
Analiză complexă

Exercițiul 1. Calculați i^i și $(1+i)^{1-i}$, folosind $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, unde $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$.

Exercițiul 2. Demonstrați că dacă $0 < a < 1$, atunci

$$\int_0^\infty \frac{v^{a-1}}{1+v}dv = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Hint: $f(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$



Exercițiul 3. Fie $a > 0$. Atunci, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi \ln a}{2a}$.

Exercițiul 4. Demonstrați că dacă f este meromorfă pe $\mathbb{C}$, atunci există g și h olomorfe pe $\mathbb{C}$, astfel încât $f = \frac{g}{h}$.

Seminar 12

Analiză complexă

Exercițiul 1. Determinați imaginea prin funcția $f(z) = e^z$ a următoarelor mulțimi:

- $d_1 = \{\mathrm{Re}(z) = a\}$.
- $d_2 = \{\mathrm{Im}(z) = b\}$.
- $d_3 = \{z = x + ix \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- $D_1 = \{z = x + iy \mid 0 < x < 1\}$.
- $D_2 = \{z = x + iy \mid 0 < y < 1\}$.

Exercițiul 2. f se numește *transformare omografică* (sau *transformare Möbius*) dacă $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ este definită prin

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$. În acest caz, f este meromorfă pe $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, și avem $f(\infty) = \frac{a}{c}$, $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Demonstrați că dacă $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ este o transformare omografică ce are 3 puncte fixe, atunci $f = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$.

Exercițiul 3. Găsiți o funcție olomorfă și bijectivă între domeniile:

- $\Omega_1 = \{z = x + iy \mid x < 0 \text{ și } 0 < y < 1\}$ și $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$.
- $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ și $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap \{\mathrm{Im}(z) < 0\} \cap \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.
- $\Omega_1 = \{z = e^{it} \mid t \in (0, \frac{3\pi}{2})\}$ și $\Omega_2 = \{z = e^{it} \mid t \in (0, \pi)\}$.
- $\mathbb{D}$ și $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$.
- $\Omega = D_2(0) \setminus D_1(1)$ și $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Exercițiul 4. Determinați transformările omografice pentru care $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

Exercițiul 5. Sunt $\mathbb{D}$ și $\mathbb{C}$ biolomorfe?

Exercițiul 6. Există $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ olomorfă și surjectivă?

Seminar 13

Analiză complexă

Exercițiul 1. [**lema Schwarz-Pick**] Fie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ olomorfă. Atunci,

1. pentru orice $a, b \in \mathbb{D}$,
$$\left|\frac{f(a) - f(b)}{1 - \overline{f(a)}f(b)}\right| \leq \left|\frac{a - b}{1 - \overline{a}b}\right|.$$
2. pentru orice $a \in \mathbb{D}$,
$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}.$$

Exercițiul 2. Dacă $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ este olomorfă și $z_0 = 0$ este zero de ordin n, atunci $|f(z)| \leq |z|^n$ pentru orice $z \in \mathbb{D}$.

Exercițiul 3. Are orice $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ cel puțin un punct fix?

Exercițiul 4. Găsiți o transformare conformă și bijectivă $f : \Omega \to \mathbb{H}$, unde
$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0, \left|z - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}\right\}.$$

Exercițiul 5. Găsiți o transformare conformă și bijectivă $f : \Omega \to \mathbb{D}$, unde
$$\Omega = D_1(1) \setminus \overline{D_1(0)}.$$

Exercițiul 6. Considerăm $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ și mulțimea deschisă
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0, |z| > 1\}.$$

Demonstrați că $f(\Omega) = \mathbb{H}$ și arătați apoi că $f : \Omega \to \mathbb{H}$ este conformă și bijectivă.