Tutoriat 2

RELAȚII BINARE

Def: Fie R mulțime. UASE:

- $(\exists)\ A, B$ a.î. $R \subseteq A \times B$
- $(\forall)\ z \in R\ (\exists)\ x, y$ cu $z = (x, y)$

R s.n. relație binară între A și B.

Def: Fie A mulțime.

$\Delta_A = \{p \in A \times A \mid (\exists)\ a$ cu $p \in (a, a)\}$ relația diagonală.

Def: Fie A, B mulțimi, R relație între A și B.
Spunem că R este grafic între A și B dacă $(\forall)\ a \in A\ (\exists!)\ b \in B$ a.î. $(a, b) \in R$.

Def: Fie A, B mulțimi. Spunem că f este funcție între A și B: $f: A \to B$ dacă $(\exists)\ R$ grafic între A și B. a.î. $f = (A, B, R)$. Not. $f(a) = b$. cu $(a, b) \in R$.

Prop: Fie R rel. binară. UASE

- $(\exists)\ A$ și B a.î. R - grafic între A și B
- $(\forall)\ x, y, z$ cu $(x, y), (x, z) \in R$, avem $y = z$.

Prop: Fie R rel. binară și A, B, C, D a.î. R - grafic între A și B și între C și D. Atunci $A = C$.

Obs! Funcția identitate: (A, A, Δ_A).

Definim o funcție astfel: $f: A \to B$ a.î. $(\forall)\ x \in A$, $f(x) = E(x)$ și înțelegem

$R = \{p \in A \times B \mid (\exists)\ x \in A$ cu $p = (x, E(x))\}$

Def: Fie $f: A \to B$, atunci

definim $B^A = \{ f \in (\{A\} \times \{B\}) \times \mathcal{P}(A \times B) \ / \ f$ funcție $\}$.

Def: Fie $f: A \to B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$. Atunci:

- $f(X) = \{ y \in B \ / \ (\exists)\ x \in X$ cu $f(x) = y \}$ imaginea directă.
- $f^{-1}(Y) = \{ x \in A \ / \ f(x) \in Y \}$ imaginea inversă
- $\mathrm{Im}(f) = f(A)$.

Def: Fie $f: A \to B$, atunci

- f inj dacă: $(\forall)\ x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- f surj. dacă: $\mathrm{Im}(f) = B \overset{\text{sau}}{\Leftrightarrow} (\forall)\ y \in B\ (\exists)\ x \in A$ cu $f(x) = y$.
- f bij. dacă e inj. și surj.

Def: Fie A, B, C și $f: A \to B$, $g: B \to C$.

Def. $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Prop: Fie $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$. Atunci

- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
- $f \circ id_A = f$ și $id_B \circ f = f$.

Def: Fie $f: A \to B$ și $X \subseteq A$.

Definim $f|_X : X \to B$, $f|_X(x) = f(x)$. $(\forall)\ x \in X$

Def: Fie $f: A \to B$. Dacă $g: B \to A$ cu

$g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_A$,

spunem că f inversabilă cu inversa g.

Prop: O funcție este inversabilă $\Leftrightarrow$ este bijectivă

Obs! • $(\exists!)\ f: \emptyset \to A$. funcția vidă

• $(\exists!)\ f: A \to \emptyset$ și anume când $A = \emptyset$.

X singleton $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ (\exists)\ \text{o coresp. biunivocă între } \{ f: X \to A \} \text{ și el. lui } A \\ \bullet\ (\exists!)\ f: A \to X \end{array} \right.$

(S1.1) Fie X o mulţime. Să se arate că nu există o funcţie surjectivă cu domeniul X şi codomeniul $\mathcal{P}(X)$.

Demonstraţie: Presupunem că ar exista, şi fie $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulţimea

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că f este surjectivă, există $y \in X$ cu $f(y) = A$. Dar atunci: $y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A \Leftrightarrow y \notin A$ ceea ce este o contradicţie. $\square$