Examen*

8 Februarie 2017

Exercițiul 1

Fie X o v.a. de densitate

$$f_\theta(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

cu $\theta > 0$ un parametru și A o constantă (care depinde de θ). Fie $X_1, \ldots, X_n$ un eșantion de talie $n \in \mathbb{N}^*$ din populația X.

a) Determinați constanta A și calculați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă este eficient.

Exercițiul 2

O firmă de construcții dorește să construiască o parcare pentru un imobil de 200 de apartamente. Investigând piața, firma presupune că fiecărui apartament îi pot reveni 0, 1 sau 2 mașini cu probabilitățile 0.1, 0.6, respectiv 0.3. Care este numărul minim de locuri de parcare pe care constructorul trebuie să le prevadă dacă acesta vrea să asigure, cu o probabilitate de 0.95, locuri suficiente pentru întregul imobil ?

Exercițiul 3

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 4

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație cu densitatea $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$.

a) Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ obținut prin metoda momentelor.

b) Dterminași estimatorul $\hat{\theta}$ obținut prin metoda verosimilității maxime.

c) Determinați legea variabilei $n(\hat{\theta} - \theta)$.

d) Verificați dacă estimatorul $\hat{\theta}$ este nedeplasat.

e) Calculați eroarea medie pătratică a lui $\hat{\theta}$.

f) În cazul în care $\theta = 2$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0,\ 1]$: $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$ și $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

*Timp de lucru 2h. Toate documentele și calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Computerele personale, telefoanele mobile/smartwatch-urile sunt **strict interzise**.

8.Feb.2017

Exercițiul 1

$$f_\theta(x) = \begin{cases} A \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases} \qquad A = ct.$$

a). $A = ?$, $\tilde{\theta}_n$ prin met. mom.

$$\int_0^\infty A \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 1 \Rightarrow \theta A \int_0^\infty e^{-u} du = 1 \Rightarrow -A\theta e^{-u} \Big|_0^\infty = 1 \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{\theta} \Rightarrow f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta \int_0^\infty u e^{-u} du = \theta \Gamma(2) = \boxed{\tilde{\theta}_n = \overline{X_n}}$$

Obs: $\hat{\theta}$ nedeplasat și consistent.

b). $\hat{\theta}_n$, eficient? (verosimilitate maximă)

$$L(x/\theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{\frac{-\overline{X_n} \cdot n}{\theta}}$$

$$l = -\ln(\theta^n) + \frac{-\overline{X_n} \cdot n}{\theta} = -n \ln\theta - \frac{\overline{X_n} \cdot n}{\theta}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\overline{X_n} \cdot n}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2\overline{X_n} \cdot n \cdot \theta}{\theta^3}$$

$$\log f_\theta) = -\ln\theta - \frac{x}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \log f_\theta}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2x}{\theta^3}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -\frac{n(\theta + \overline{X_n})}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \theta + \overline{X_n} = 0 \Rightarrow \overline{X_n} = \hat{\theta}$$

Deci $\overline{X_n} = \hat{\theta} = \tilde{\theta}$ est. de veros. max.

$$E[\overline{X_n}] = E[X] = \theta$$

$$E[\overline{X_n}^2] = E[X^2] = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta^2 \Gamma(3) = 2\theta^2$$

Exercitiul 2

imobil cu 200 apartamente, 0, 1 sau 2 masini cu prob 0,1; 0,6; 0,3
Care e nr. minim de locuri pe care constr. trebuie să le prevadă ca să asigure cu $p = 0,95$, locuri suficiente pt. întreg imobilul?

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0,6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Vrem $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_{200} \leq n) \geq 0,95$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_{200}} \leq \frac{n}{200}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X_{200}} - 1,2 \leq \frac{n}{200} - 1,2\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{200}\,(\overline{X_{200}} - 1,2)}{0,6} \leq \frac{\sqrt{200}\left(\frac{n}{200} - 1,2\right)}{0,6}\right)$$

$$\mathbb{E}[X_1] = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 1,2$$

$$\sigma^2 = Var(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1] = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,3 - 1,44 =$$
$$= 1,8 - 1,44 = 0,36$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{200}\,(\overline{X_{200}} - 1,2)}{0,6} \leq \frac{\sqrt{200}\left(\frac{n}{200} - 1,2\right)}{0,6}\right) \geq 0,95$$

TLC: $\dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{200}\left(\frac{n}{200} - 1,2\right)}{0,6}\right) \geq 0,95$$

$$\frac{\sqrt{200}\left(\frac{n}{200} - 1,2\right)}{0,6} \geq \Phi^{-1}(0,95) \simeq 1,65$$

$$\frac{n}{200} - 1,2 \geq \frac{1,65 \cdot 0,6}{\sqrt{200}} \Rightarrow n \geq 200\left(1,2 + \frac{0,6 \cdot 1,65}{\sqrt{200}}\right) \simeq 254$$

Exercițiul 3

$X_1, \dots, X_n \sim Pois(\theta)$, $\theta > 0$.

a) θ est. de veros. max, deplasat?, consistent?, eficient?

$\mathbb{P}(X_i = k) = \theta^k \frac{e^{-\theta}}{k!}, k \geq 0$

$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) = \theta^{\sum x_i} \frac{e^{-n\theta}}{\prod x_i!}$

$\ell(\theta, x_1, \dots, x_n) = (\sum x_i) \ln\theta - n\theta - \sum \ln(x_i!)$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - n \Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x}_n$

$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} \leq 0$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \bar{X}_n$ est. de ver max

Pt. o populație Poisson, în general

prop: $\hat{\theta}_n$ nu e depl deoarece $b_\theta(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n] - \theta = \frac{1}{n} E[X_i] - \theta = \frac{1}{n} \cdot n\theta - \theta = 0$

$\hat{\theta}_n$ e consistent din LNM.

$\log \mathbb{P}_\theta(X_i = k) = \log \theta^k \frac{e^{-\theta}}{k!} = k \log\theta - \theta - \log k!$

$\frac{\partial^2 \log \mathbb{P}_\theta}{\partial \theta^2} = \frac{-k}{\theta^2} \rightsquigarrow -\frac{X}{\theta^2}$; $I_1(\theta) := E\left[\left(\frac{\partial \log \mathbb{P}_\theta}{\partial \theta}\right)^2\right] \stackrel{sau}{=} E\left[-\left(\frac{\partial^2 \log \mathbb{P}_\theta}{\partial \theta^2}\right)\right]$

$I_1(\theta) = \frac{1}{\theta^2} E[X] = \frac{1}{\theta}$, $I_n(\theta) = \frac{n}{\theta}$

$Var(\hat{\theta}_n) = Var_\theta\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n Var(X_1) = \frac{\theta}{n}$

$Var(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{I_n(\theta)}$ i.e. $\hat{\theta}_n$ e eficient.

b) est. de vers. max pt. $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 | X_1 > 0)$, este consistent?

$\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 | X_1 > 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 \geq 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1)}{1 - \mathbb{P}(X_1 = 0)} = \frac{\theta \cdot e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}$

E.V.M. pt. $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 | X_1 > 1)$ este $\frac{\hat{\theta}_n e^{-\hat{\theta}_n}}{1 - e^{-\hat{\theta}_n}}$

Conform th. apl. cont, g cont și $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}/as/d} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}(as/d)} g(X)$

DA.

Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x\cdot e^{-x}}{1-e^{-x}}$ continuă.

Cum $\theta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ (consist.)

$g(\theta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(\theta) \Rightarrow \dfrac{\hat\theta_n \cdot e^{-\hat\theta_n}}{1-e^{-\hat\theta_n}}$ e consistent pt P_θ $(x_1-1 / x_1>0)$

c). estimatorul aflat la b). este sau nu deplasat?

$$E_\theta\left[\frac{\hat\theta_n \cdot e^{\hat\theta_n}}{1-e^{\hat\theta_n}}\right] = E_\theta\left[\frac{\overline{X_n}\cdot e^{-\overline{X_n}}}{1-e^{\overline{X_n}}}\right] = E_\theta\left(\frac{\overline{X_n}}{e^{\overline{X_n}}-1}\right)$$

$g(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ $\quad g'(x)=\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{e^x(1-x)-1}{(e^x-1)^2}$ $\quad g''(x)\ldots\ldots$

$\Rightarrow g$ e convexă, cf ineg Jensen $E[g(x)]\geq g(E[x])$

$\downarrow$ (dacă e concavă, ineg e pe dos)

$\Rightarrow E[g(x)] \geq \dfrac{\theta}{e^\theta-1}$

g nu e liniară, $\dfrac{\overline{X_n}}{e^{\overline{X_n}}-1}$ nu e ct, deci inegalit e strictă ie.

$b_\theta\left(\dfrac{\hat\theta_n}{e^{\hat\theta_n}-1}\right)\neq 0 \Rightarrow$ e deplasat.

Scanned with CamScanner

Exercițiul 4

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \qquad x \geq \theta.$$

a). $\tilde{\theta} = ?$ met mom.

$$E_\theta[X] = \int_0^\infty x\, f_\theta(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot e^{-(x-\theta)}\,dx = \int_0^\infty (x+\theta)e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,dx + \theta\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

$$= \Gamma(2) + \theta \cdot 1 = 1+\theta$$

$$1+\theta_n = \overline{X_n} \Rightarrow \hat{\theta}_n = \overline{X_n} - 1$$

b). $\hat{\theta}$ prin met. vers. max.

$$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = e^{n\theta} \cdot e^{-\sum x_i}$$

$$\ell(\theta, x_1, \dots, x_n) = n\theta - \sum x_i$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = n$$

c). Det legea variabilei $n(\hat{\theta} - \theta)$

$n(\overline{X_n} - \theta)$

$$Var_\theta : E_\theta[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-(x-\theta)}\,dx = \int_0^\infty (x+\theta)^2 e^{-x}\,dx = \underbrace{\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x}\,dx}_{\Gamma(3)} + 2\theta\underbrace{\int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,dx}_{\Gamma(2)} + \theta^2\underbrace{\int_0^\infty e^{-x}\,dx}_{1}$$

$$= 2 + 2\theta + \theta^2$$

$$Var_\theta(X) = \theta^2 + 2\theta + 2 - \theta^2 - 2\theta - 1 = 1$$

Dp $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$

$$\log f_\theta(x) = -x+\theta, \quad \frac{\partial \log f_\theta}{\partial \theta} = 1$$

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial \theta}\right)^2\right] = 1 \Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

d). $\hat{\theta}$ este nedeplasat.

$$E[\hat{\theta}_n] = E[\bar{x}_n] = E[x] = 1+\theta + \theta \Rightarrow \hat{\theta}_n \text{ nedeplasat cu } b_\theta = 1$$

e). eroarea medie patratică a $\hat{\theta}$, MSE

$$Var_\theta(\hat{\theta}_n) = Var_\theta(\bar{x}_n) = \frac{1}{n^2} n \, Var_\theta(x_1) = \frac{1}{n}$$

$$MSE(\hat{\theta}_n) = Var_\theta(\hat{\theta}_n) + b_\theta^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} + 1$$

f). $\theta = 2$, dorim 3 val. din $X \sim f_\theta(x)$; $u_1 = 0{,}25$, $u_2 = 0{,}4$, $u_3 = 0{,}5$

$[0,1]$

$$F_\theta(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-(x-\theta)} dx = e^\theta \int_\theta^x e^{-t} dt = e^\theta \cdot e^{-t} \Big|_\theta^t =$$

$$= e^\theta (e^\theta - e^{-x}) = y$$

$$y \cdot e^{-\theta} = e^\theta \cdot e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = e^\theta - y e^{-\theta} \Rightarrow x = \ln(e^\theta - y e^{-\theta})$$

$$\Rightarrow F_\theta^{-1}(x) = -\ln(e^\theta - x e^{-\theta})$$

$$F_2^{-1}(x) = -\ln(e^2 - x e^{-2}) \qquad x_i = F_i^{-1}(u_i) \quad i = \overline{1,3}$$