GEOMETRIE

SEMINAR 4

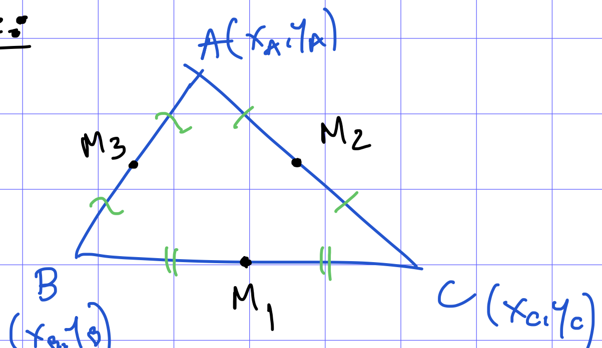
Exc 4.1 Punctele $M_1 = (-2,1)$

$M_2 = (2,3)$

$M_3 = (-4,-1)$ sunt mijloacele laturilor ΔABC.

Determinați coord. vf. ΔABC.

Rezolvare:



$$(x_A + x_B, y_A + y_B) = 2\cdot(-4,-1)$$

$$(x_A + x_C, y_A + y_C) = 2\cdot(2,3)$$

$$(x_B + x_C, y_B + y_C) = 2\cdot(-2,1)$$

$$\begin{cases} x_A + x_B = -8 \\ x_A + x_C = 4 \\ x_B + x_C = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_A + y_B = -2 \\ y_A + y_C = 6 \\ y_B + y_C = 2 \end{cases}$$

$$2(x_A + x_B + x_C) = -8 \qquad 2(y_A + y_B + y_C) = 6$$

$$x_A + x_B + x_C = -4 \qquad y_A + y_B + y_C = 3$$

$$\Downarrow$$

$$x_C = 4,\ x_B = -8,\ x_A = 0 \qquad y_C = 5,\ y_B = -3,\ y_A = 1$$

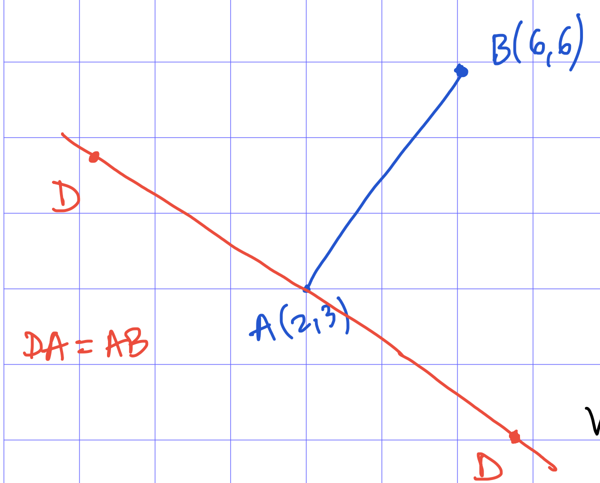
$$A = (0,1),\quad B(-8,-3),\quad C(4,5)$$

Exc 4.2 Un pătrat din $\mathbb{R}^2$ are două vf. consecutive în $\overset{A}{(2,3)}$ şi $\overset{B}{(6,6)}$. Aflaţi coord. celorlaltor vârfuri.

Rez.:

ec. AB: $\dfrac{x-6}{2-6} = \dfrac{y-6}{3-6}$

AB: $\dfrac{x-6}{-4} = \dfrac{y-6}{-3}$



AB: $3x - 18 - 4y + 24 = 0$

$\boxed{AB:\ 3x - 4y + 6 = 0}$

Vector normal la AB: $(3,-4)$ = vector director al lui AD

Calculăm ec. dreptei AD : $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{-4}$

$AB = AD$ $\qquad$ $D(x_D, y_D)$

$AB = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$\dfrac{x_D-2}{3} = \dfrac{y_D-3}{-4} \iff 4x_D - 8 + 3y_D - 9 = 0$

$4x_D + 3y_D - 17 = 0 \iff 4(x_D-2)+3(y_D-3)=0$

$\boxed{y_D - 3 = \dfrac{-4}{3}(x_D-2)}$

$AD = 5 \iff \sqrt{(x_D-2)^2+(y_D-3)^2} = 5$

$\boxed{(x_D-2)^2 + (y_D-3)^2 = 25}$

$(x_D-2)^2 + \dfrac{16}{9}(x_D-2)^2 = 25$

$(x_D-2)^2 = 25 \cdot \dfrac{9}{25} = 9$

$x_D - 2 = \pm 3$

$x_D \in \{-1, 5\} \rightsquigarrow y_D = \dots$

$\vec{AB} = (4,3)$

$\vec{AD} = (3,-4)$

$(x_{C_2}, y_{C_2}) = (2,3) + (7,-1)$
$= (9,2)$

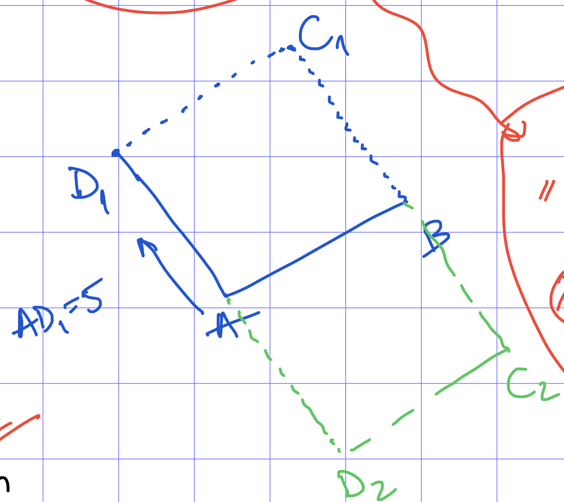
Cazul 1

$D_1 = (-1, 7)$

sau

Cazul 2

$D_2 = (5,-1)$



$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

"$C_1 = A + \vec{AC}$"

$(x_{C_1}, y_{C_1}) = (2,3) + (1,7) = (3,10)$

$\vec{AB} = (4,3)$

$\vec{AD} = (-3,4)$

Cum aflăm în alt mod coord. lui D?

vect. normal la AB este $v = (3,-4) = (v_1, v_2)$. Normalizăm v-ul ca să aibă modul 1

$A(2,3)$

$$v' = \frac{1}{\|v\|} \cdot v = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

$$\|v'\| = 1$$

$$AD: \begin{cases} x = x_A + t \cdot v'_1 \\ y = y_A + t \cdot v'_2 \end{cases}$$

ec. parametrică

$$AD: \begin{cases} x = 2 + t \cdot \frac{3}{5} \\ y = 3 + t \cdot \frac{-4}{5} \end{cases}$$

D se obține pentru $t=5$ sau $t=-5$

$t=5 \Rightarrow D_2 = (5,-1)$

$t=-5 \Rightarrow D_1 = (-1,7)$ $\rightsquigarrow$ se află și C_1 și C_2.

$\boxed{\text{Exc 4.3}}$ $\mathcal{F} = \{ d_m : \underbrace{(m^2+2m+4)}_{(m+1)^2+3>0} x - (2m^2+3m+5)y - (m+3) = 0, \ m \in \mathbb{R} \}$

deci $\neq 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$

Este $\mathcal{F}$ fascicul de drepte?

Rezolvare: Dacă toate d_m, $m \in \mathbb{R}$ trec prin același punct, atunci există (x, y) a.î.

$$\boxed{(m^2+2m+4)x - (2m^2+3m+5)y - (m+3) = 0, \ \forall m \in \mathbb{R}}$$

$A(2,1)$

$$m^2(x-2y) + m(2x-3y-1) + (4x-5y-3) = 0$$

$\forall m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x-2y=0 \quad |\cdot(-2) \\ 2x-3y-1=0 \\ 4x-5y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+4y=0 \\ y-1=0 \\ 4x-5y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=1 \\ x=2} \\ 4x-5y-3=0 \ \checkmark \end{cases}$$

Deci $A(2,1)$ se află pe toate dreptele din $\mathcal{F}$.

Pentru a fi fascicul de drepte, mai trebuie să verificăm dacă toate dreptele din plan care trec prin A se află în $\mathcal{F}$.

dreapta $d: y = 1$ trece prin A și nu se află în $\mathcal{F}$

(pentru că orice dreaptă din $\mathcal{F}$ are forma
$ax + by + c = 0$
cu $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$
dar $a \neq 0$)

Concluzie: $\mathcal{F}$ nu e fascicul de drepte.

$\boxed{\text{Exc. 4.4}}$ $M(3,3)$ și

$$d_1: \ x+2y-4=0$$
$$d_2: \ 3x+y-2=0$$
$$d_3: \ x-3y-4=0$$

Considerăm $\{A\} = d_1 \cap d_3$, $\{B\} = d_1 \cap d_2$, $\{C\} = d_2 \cap d_3$

(a) Calculați aria $\Delta\ ABC$

(b) Fie $P := pr_{OA} M$, $Q := pr_{OB} M$, $R := pr_{AB} M$.

Arătați că P, Q, R coliniare,

(c) Să se scrie ec. fasciculului de drepte determinat de AB și PQ.

(d) Care este dreapta din acest fascicul ce trece prin $N(0,5)$?

Rezolvare: (a) $\{A\} = d_1 \cap d_3 = \begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-3y-4=0 \quad / \cdot (-1) \end{cases}$

$$x+2y-4-x+3y+4=0$$
$$5y=0$$
$$y=0 \implies x=4$$

$A=(4,0)$

$\{B\} = d_1 \cap d_2 = \begin{cases} x+2y-4=0 \\ 3x+y-2=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

$B=(0,2)$

$\{C\} = d_2 \cap d_3 = \begin{cases} 3x+y-2=0 \\ x-3y-4=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

$C=(1,-1)$

determinant

modul

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Altfel: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5$

$$\left.\begin{aligned} AB &= \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5} \\ BC &= \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \\ AC &= \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2$$

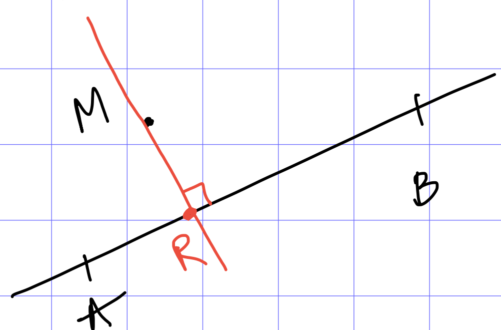
deci Δ este dreptunghic în C

(b) $P = pr_{OA} M = pr_{Ox} M = (3,0)$ deoarece $A \in Ox$

$M = (3,3)$. $Q = pr_{OB} M = pr_{Oy} M = (0,3)$ deoarece $B \in Oy$

$R = pr_{AB} M$

$R \in AB$



Pas 1: Scriem ec. lui AB

$AB: \frac{x-4}{-4} = \frac{y}{2}$

$AB: 2x + 4y - 8 = 0$

Pasul 2: Scriem ec. perpendicularei din M pe AB

$v = (1,2)$ = vect. normal la AB

$v \perp AB \Rightarrow v \parallel MR$ (v = vect. director al lui MR)

$MR: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2}$

$MR: 2x - y - 3 = 0$

$\{R\} = AB \cap MR$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 8 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$R = (2,1)$

$P=(3,0),\ Q=(0,3),\ R(2,1).$

$PQ: \dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y}{3}$

$PQ: 3x+3y-9=0$

$PQ: x+y-3=0$ ✓ deci P, Q, R coliniare

(c) Rem.: $AB: 2x+4y-8=0$

$PQ: x+y-3=0$

$$\mathcal{F}=\{\alpha(2x+4y-8)+\beta(x+y-3)=0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha^2+\beta^2\neq 0.\}$$

$$\mathcal{F}=\{(2\alpha+\beta)x+(4\alpha+\beta)y-(8\alpha+3\beta)=0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha^2+\beta^2\neq 0\}$$

(d) $N(0,5)$

$$(2\alpha+\beta)\cdot 0+(4\alpha+\beta)\cdot 5-(8\alpha+3\beta)=0$$

$$12\alpha+2\beta=0$$

$$6\alpha+\beta=0$$

Alegem $\alpha=1$, $\beta=-6$.

Atunci, $d: -4x-2y-(-10)=0$

$d: 2x+y-5=0$ este dreapta din $\mathcal{F}$ care trece prin N.

$\boxed{\text{Exc 4.5}}$ Fie dreptele $d: 2x-5y-1=0$

$$\boxed{d_\alpha: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{\alpha},\quad \alpha\in\mathbb{R}}$$

(a) Este mulţimea $\mathcal{A} = \{d_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ fascicul de drepte?

(b) determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ (dacă există) a.î. $d_\alpha \parallel d$

(c) — — — — — — — — — — $d_\alpha \perp d$

(d) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $(1,1) \in d_\alpha$. Pentru acest α, calculaţi $\cos \sphericalangle (d, d_\alpha)$.

Rezolvare: (a) $(-1,2) \in d_\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

În general, fasc. dreptelor care trec prin $P(x_0, y_0)$ este

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \quad a^2+b^2 \neq 0.$$

$$b(x-x_0) = a(y-y_0)$$

$$\underline{\underline{b}}(x-x_0) - \underline{\underline{a}}(y-y_0) = 0$$

$$d_\alpha : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{\alpha}$$

$$\underline{d_\alpha : \alpha(x+1) - 2(y-2) = 0} \rightsquigarrow v_\alpha = (\alpha, -2)$$

Considerăm dreapta $d' : x+1 = 0 \ni (-1,2)$

dar $d' \notin \mathcal{A}$. Deci $\mathcal{A}$ nu este fascicul de drepte.

(b) $d_\alpha \parallel d$ $\qquad \underline{d : 2x - 5y - 1 = 0} \rightsquigarrow v = (2, -5)$

$$v_\alpha \parallel v \iff \begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha = \frac{4}{5}$$

(c) $d_\alpha \perp d$ $\qquad v_\alpha \perp v \iff \langle v_\alpha, v \rangle = \langle (\alpha, -2), (2, -5) \rangle = 0$

$$2\alpha + 10 = 0$$
$$\alpha = -5$$

(d) $(1,1) \in d_\alpha : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{\alpha} \Rightarrow \frac{1+1}{2} = \frac{1-2}{\alpha} \Rightarrow \alpha = -1$

$\alpha = -1 \Rightarrow d_\alpha : x+1+2y-4=0$

$x+2y-3=0$

$$\cos \sphericalangle(d, d_\alpha) = \cos \sphericalangle(v, v_\alpha) = \cos \sphericalangle((2,-5),(-1,-2))$$

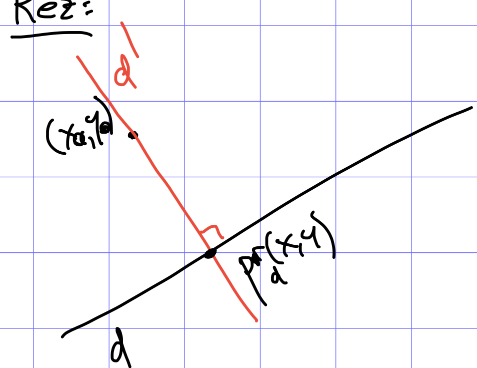
$$= \frac{\langle (2,-5),(-1,-2)\rangle}{\|(2,-5)\| \cdot \|(-1,-2)\|}$$

$$= \frac{-2+10}{\sqrt{4+25} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{8}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{5}}$$

$\boxed{\text{Exc. 4.7}}$ $d: x+2y+1=0$

$pr_d : \mathbb{R}^2 \to d \subset \mathbb{R}^2$. $pr_d(x_0, y_0) = ?$

Rez:



ideea rez.: luăm vect normal la d

$v = (1,2)$

Scriem dreapta care trece prin (x,y), de direcție $v = (1,2)$

$d' : \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{2}$

$$pr_d(x_0,y_0) : \begin{cases} x+2y+1=0 \\ \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{2} \end{cases}$$

$$x = -2y - 1$$

$$2(-2y - 1 - x_0) = y - y_0$$

$$5y - y_0 + 2 + 2x_0 = 0$$

$$y = \frac{-2x_0 + y_0 - 2}{5} \implies x = \frac{4x_0 - 2y_0 - 1}{5}$$

$$pr_d(x_0, y_0) = \left(\frac{4x_0 - 2y_0 - 1}{5}, \frac{-2x_0 + y_0 - 2}{5} \right)$$

$$pr_d(x, y) = \left(\frac{4x - 2y - 1}{5}, \frac{-2x + y - 2}{5} \right)$$