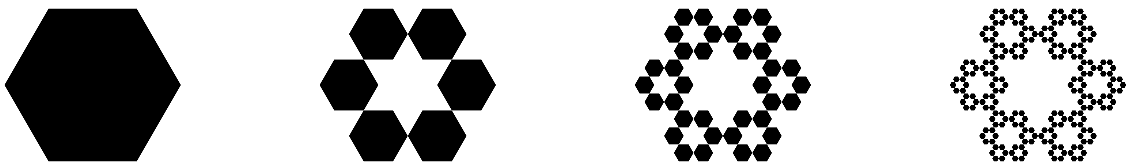
Data: 21 Ianuarie 2023
Timp de lucru: 2h
Punctaj total: 70p + 10p oficiu

Nume: ______________________
Grupa: ________

Elemente de analiză clasică
— Test final —

Subiecte:

1. (30 p) Determinaţi dimensiunea Hausdorff pentru mulţimea fractală obţinută prin procedeul din desenul de mai jos:



unde în prima imagine este un hexagon regulat.

2. (15 p) Considerăm funcţia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) = \cosh x \cos y$.

   - Demonstraţi că u este armonică.
   - Considerăm ΔABC cu vârfurile $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ şi notăm cu T mulţimea punctelor care se află în interiorul sau pe laturile ΔABC. Determinaţi

$$\min_{(x,y)\in T} u(x, y) \qquad \text{şi} \qquad \max_{(x,y)\in T} u(x, y).$$

3. (10 p) Demonstraţi că dacă

   - $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este de clasă $\mathcal{C}^2$, subarmonică
   - $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de clasă $\mathcal{C}^2$, crescătoare şi convexă,

   atunci $\chi \circ u$ este subarmonică.

4. (15 p) Considerăm $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pentru un număr $a > 0$ fixat, definim funcţia $f_a(x) = f(ax)$. Arătaţi că $a\widehat{f_a}(\xi) = \widehat{f}(\frac{\xi}{a})$, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}$.

5. (**Bonus 20p**) Demonstraţi că funcţia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) = e^{|x-y|+|x+y|}$, este subarmonică.