

Factorizarea LDU

Fie A inversabilă, care admite factorizarea LU fără pivotare.

Atunci $A = LU$

Putem de la factorizarea $A = LU$ să ajungem ușor la $A = LDU$

unde: $L \rightarrow$ inferior triunghiulară cu $l_{ii} = 1$ (1 pe diag prim)

$D \rightarrow$ matrice diagonală

$U \rightarrow$ superior triunghiulară cu $u_{ii} = 1$

1 Să se determine factorizarea LDU a matricii:

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Sol După factorizare LU fără pivotare am obținut:

$$A = LU = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{\tilde{U} = DU}$$

Unem $\tilde{U} = DU$

$$D = \text{diag}(25, 9, 9) \Rightarrow D^{-1} = \text{diag}(1/25, 1/9, 1/9)$$

$$U = D^{-1} \tilde{U} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1/25 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Am obținut } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorizarea LDL^T

Dacă $A = A^T$ atunci $A = LDL^T$ (pt. că $A = A^T$ obținem $U = L^T$)

2 Să se determine factorizarea LDL^T a matricii:

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Sol După factorizare LU fără pivotare am obținut:

$$A = \underbrace{L}_{\tilde{L}} \underbrace{\tilde{U}}_{\tilde{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Urmm } \tilde{U} = D L^T$$

$$D = \text{diag}(25, 9, 9)$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{U} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Am obținut } A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_D \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}$$