SEMINAR ALGEBRA III SERIILE 20,22

TIBERIU DUMITRESCU ŞI MIHAI EPURE

Seminar 0

1. Determinaţi:
(i) câtul şi restul împărţirii lui $X^{23}-1$ la X^5-1 în $\mathbb{Q}[X]$,
(ii) câtul şi restul împărţirii lui 8388607 la 31 în $\mathbb{Z}$.
(Ind. $8388607 = 2^{23}-1$.)

2. Arătaţi că unităţile inelului $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ sunt 1, -1, i, $-i$. Aici unitate = element inversabil.

3. Arătaţi că: $X^5+X^3-X^2-1$ divide $X^n-1 \Leftrightarrow 12$ divide n.

4. Arătaţi că: 35 divide $2^n-1 \Leftrightarrow 12$ divide n.

5. Arătaţi că $2-i$ divide $3+i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

6. Verificaţi dacă $3+\sqrt{2}$ divide numerele $13 \pm 2\sqrt{2}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

7. Verificaţi dacă $24+5\sqrt{23}$ este element inversabil în inelul

$$\mathbb{Z}[\sqrt{23}] = \{a+b\sqrt{23} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}.$$

(Ind. Calculaţi $1/(24+5\sqrt{23})$.)

Seminar 1

8. Verificaţi dacă $2+5i$ divide numerele $7+3i$, $7-3i$, $7+i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

9. Verificaţi dacă $1+\sqrt{5}$ divide $1-\sqrt{5}$
(*i*) în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$,
(*ii*) în inelul $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$.

10. Verificaţi dacă numerele următoare sunt asociate în divizibilitate:
(*i*) $9+7i$ şi $7+9i$ în inelul $\mathbb{Z}[i]$,
(*ii*) $7+2\sqrt{2}$ şi $5+\sqrt{2}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$,
(*iii*) $23+13\sqrt{3}$ şi $5-\sqrt{3}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

11. Arătaţi că: $2+3i$ divide $a+bi$ în $\mathbb{Z}[i] \Leftrightarrow 13$ divide $2a+3b$ în $\mathbb{Z}$.

12. Verificaţi dacă $A := \{a+b(1+\sqrt{7})/2 \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ este subinel în $\mathbb{R}$.

13. Determinaţi divizorii lui $13-4i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

14. Determinaţi un element inversabil diferit de ± 1 în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

Seminar 2

15. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ numerele 13 şi $3+2\sqrt{-5}$ sunt elemente prime.

16. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:
(*i*) $3+\sqrt{-5}$ este atom neprim,
(*ii*) $7-\sqrt{-5}$ este element reductibil.

17. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ numerele 7 şi $5-\sqrt{6}$ sunt elemente prime.

18. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ numerele 2, 3, 5 şi $\sqrt{6}$ sunt elemente reductibile.

19. Găsiţi numerele prime p, q, r astfel încât în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$:
(*i*) p este element prim,
(*ii*) q este atom neprim,
(*iii*) r este element reductibil.

20. Folosind inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$, arătaţi că ecuaţia $y^2 = 14x^2 + 23$ nu are soluţii în numere întregi.

21. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^2 + b^2$ se divide cu 19. Arătaţi că 19 divide numerele a şi b.

Seminar 3

22. Arătaţi că
$$(3+\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})(7-3\sqrt{2})$$
este o factorizare atomică a lui $67+20\sqrt{2}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

23. Găsiţi o factorizarea atomică a lui $633+135i$ în inelul $\mathbb{Z}[i]$.

24. Găsiţi toate factorizările atomice ale lui $29-5\sqrt{-5}$ în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

25. Găsiţi o factorizare atomică a lui 91 în inelul $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{-3})/2]$.

26. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$
$$3^4 = (5+2\sqrt{-14})(5-2\sqrt{-14})$$
sunt factorizări atomice ale lui 81.

27. Găsiţi o infinitate de soluţii numere întregi ale sistemului de ecuaţii
$$\begin{cases} xz + 2yv = 3 \\ xv + yz = 1. \end{cases}$$

28. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[X]$ este inel CLD.

Seminar 4

29. Listaţi divizorii lui $62 + 34i$ în $\mathbb{Z}[i]$.

30. Listaţi divizorii lui $95 - 27\sqrt{2}$ în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

31. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-26}]$ este nefactorial folosind egalitatea
$$109^2 + 12^2 \cdot 26 = 5^6.$$

32. Folosind atomul 2, arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ este nefactorial dacă $d < -2$.

33. Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ este nefactorial.

34. Rezultă din egalitatea $\sqrt{6}^2 = 2 \cdot 3$ că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ este nefactorial ?

35. Fie A un inel factorial şi $a, b \in A - \{0\}$ astfel încât $a^{2n-1} | b^{2n} | a^{2n+1}$ pentru orice $n \geq 1$. Arătaţi că a este asociat cu b.

Seminar 5

36. Pentru numerele $a = 779 - 247i$, $b = 817 + 19i$, calculaţi (a, b) şi $[a, b]$ în $\mathbb{Z}[i]$.

37. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$:
(i) $2 + \sqrt{-17}$ şi 7 sunt relativ prime,
(ii) $6 + 3\sqrt{-17}$ şi 21 nu au cmmdc.

38. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ numerele $13 - 7\sqrt{-5}$ şi $29 - 5\sqrt{-5}$ nu au CMMDC. Observaţi că numerele se divid cu $1 - \sqrt{-5}$.

39. Fie a, b două numere întregi cu $(a, b) = d$. Calculaţi $(a + bi,\ a - bi)$ în $\mathbb{Z}[i]$.

40. Arătaţi că $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sunt coprime dacă au normele coprime în $\mathbb{Z}$. Este reciproca adevărată ?

41. Arătaţi că în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ numerele $3 + 2\sqrt{-5}$ şi $3 - 2\sqrt{-5}$ au CMMMC.

42. Fie A un inel factorial şi $a, b, c \in A - \{0\}$. Arătaţi că

$$[a, b, c](a, b)(a, c)(b, c) = abc(a, b, c).$$

Seminar 6

43. Arătaţi că idealul $< 2, \sqrt{6} >$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ este principal.

44. Arătaţi că idealul $< 2, \sqrt{-6} >$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ nu este principal.

45. Arătaţi că numerele $2 - \sqrt{7}$ şi $3 + 4\sqrt{7}$ sunt comaximale în $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

46. Găsiţi un generator pentru idealul $< -1 + 5i, 1 + 3i >$ din $\mathbb{Z}[i]$.

47. Arătaţi că în $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ avem $< 2 > \cap < 1 + \sqrt{-3} > = < 4, 2 + 2\sqrt{-3} >$ şi că acest ideal nu este principal.

48. Găsiţi exemple de ideale neprincipale în $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

49. Fie A un domeniu. Arătaţi că $A[X]$ este inel principal dacă şi numai dacă A este corp.

Seminar 7

50. Calculaţi $(43-81i, 33-19i)$ în $\mathbb{Z}[i]$ folosind algoritmul lui Euclid.

51. Rezolvaţi ex. precedent prin factorizare.

52. Fie A un domeniu şi $a, a', b, b', c \in A - \{0\}$ cu proprietatea $aa' + bb' = 1$. Rezolvaţi ecuaţia $ax + by = c$.

53. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}[i]$ ecuaţia $(43-81i)x + (33-19i)y = 27-5i$.

54. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}[i]$ ecuaţia $(43-81i)x + (33-19i)y = 12+i$.

55. Arătaţi că $N(\sqrt{10}-2q) \geq 4$ pentru orice $q \in \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$. Deduceţi că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ nu este norm-euclidian.

56. Completaţi tabelul următor cu întregi Gauss astfel încât produsele pe orizontală/verticală să fie numerele indicate

	$-1+7i$	$8+19i$
$2+11i$		
$1+13i$		

Seminar 8

57. Verificaţi dacă următoarele ideale din $\mathbb{Z}[\sqrt{79}]$ sunt prime:

$$< 11 >,\ < 2 >,\ < 3 + \sqrt{79} >,\ < 6 + \sqrt{79} > .$$

58. Verificaţi dacă următoarele ideale din $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ sunt prime:

$$< 7, 2 - \sqrt{-10} >,\ < 11, 2 + 13\sqrt{-10} >,\ < 3, 1 - \sqrt{-10} > .$$

59. Verificaţi dacă idealul $< 5, 12 - i >$ este prim în $\mathbb{Z}[i]$.

60. Verificaţi dacă idealul $< 23 + 3\sqrt{-5}, 13 + 2\sqrt{-5} >$ este prim în $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

61. Arătaţi că în $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ idealul $< 11 >$ nu este prim dar este produs de două ideale prime. Intr-un inel A, produsul idealelor $< a, b >$ şi $< c, d >$ este prin definiţie idealul $< ac, ad, bc, bd >$.

62. Arătaţi că idealul $H =< X^2 + 1, Y^2 + 1 >$ din $\mathbb{Q}[X, Y]$ nu este prim. (Ind. $X^2 - Y^2 \in H$.)

63. Arătaţi că în $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ idealul $H =< 2 >$ nu este o intersecţie de două ideale prime. (Ind. $(1 + \sqrt{-5})^2 \in H$.)

Seminar 9

64. Scrieţi polinomul $(3+i)X^3+(7+i)X-10 \in \mathbb{Z}[i][X]$ ca produs dintre o constantă şi un polinom primitiv.

65. Factorizaţi polinomul $15015X^4 + 60060$ în $\mathbb{Z}[X]$.

66. Fie polinoamele $f = 2X + 1 + \sqrt{-3}$ şi $g = 2X + 1 - \sqrt{-3}$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}][X]$.
Arătaţi că:
(i) f şi g sunt primitive dar fg este neprimitiv.
(ii) f şi g sunt atomi, iar fg este produs de 3 atomi în $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}][X]$.

67. Factorizaţi polinoamele $(3+i)X^4 - (3+i)$ şi $(5-i)X^6 - (5-i)$ în $\mathbb{Z}[i][X]$ şi calculaţi cmmdc al lor.

68. Verificaţi dacă $X^4 - X^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[i][X]$ sau $\mathbb{Z}[\sqrt{3}][X]$.

69. Verificaţi dacă $X^4 - X^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$ sau $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}][X]$.

70. Fie A un domeniu astfel încât $A[X]$ este inel factorial. Arătaţi că A este inel factorial.

Seminar 10

71. Arătaţi că $33X^6 + 84X^5 - 546X^3 + 294X^2 + 168$ ireductibil in $\mathbb{Q}[X]$.

72. Arătaţi că $3X^6+11X^4-5X^3-4X^2+X+7$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ reducându-l mod 2.

73. Arătaţi că $\sqrt{-2}X^5 + (7 - 6\sqrt{-2})X^3 + 22X^2 + 1 + 7\sqrt{-2}$ este ireductibil în $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})[X]$.

74. Arătaţi că $X^3Y + XY^2 + Y^3 + X$ este ireductibil în $\mathbb{C}[X, Y]$.

75. Arătaţi că polinomul $f = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ folosind teorema lui Murty. (Ind. $13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 - 547 \cdot 177 = -242$.)

76. Fie $p \in \{2, 3, 5\}$ şi $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom p-Eisenstein. Rezultă că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}(i)$?

77. Fie p un număr prim cu scrierea zecimală

$$p = 10^n \cdot 2 + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0, \quad 0 \leq a_i \leq 9.$$

Deduceţi din teorema lui Murty că polinomul

$$f = 2X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

este ireductibil.

Seminar 11

78. Arătaţi că $\mathbb{Z}_{13}$ este $\mathbb{Z}[i]$-modul faţă de înmulţirea cu scalari

$$(a+bi)\widehat{x} := (\widehat{a+5b})x,\ \ a,b \in \mathbb{Z},\ \ \widehat{x} \in \mathbb{Z}_{13}.$$

79. Arătaţi că $\mathbb{Z}_7$ nu are structuri de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$-modul.

80. Arătaţi că $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ este $\mathbb{Z}[i]$-modul faţă de înmulţirea cu scalari

$$(a+bi)(x,y) := (ax-by, ay+bx),\ \ a,b \in \mathbb{Z},\ \ x,y \in \mathbb{Z}_3.$$

Este acest modul ciclic ?

81. Arătaţi că în $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}^2$ avem

$$< (3,1),(5,-3)) > \ \cap\ < (7,0),(0,7) > = < (14,0),(7,7) > .$$

82. Este $\mathbb{Z}[i]$ un $\mathbb{Z}[3i]$-modul finit generat? Dar ciclic ?

83. Fie funcţia

$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10},\ \ f(x,y) = (\bar{x}, \widehat{2x-y}).$$

Arătaţi că :

(i) f este aplicaţie $\mathbb{Z}$-liniară.
(ii) f este surjectivă.
(iii) Nucleul lui f este egal cu $< (4,-2),(2,4) >$.

84. Arătaţi că orice $\mathbb{Z}[i]$-submodul finit generat al lui $\mathbb{Q}[i]$ este ciclic.

Seminar 12

85. Fie funcţia
$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10},\ f(x,y) = (\bar{x}, \widehat{2x-y}).$$
Arătaţi că :
(*i*) f este aplicaţie $\mathbb{Z}$-liniară.
(*ii*) f este surjectivă.
(*iii*) Nucleul lui f este egal cu $<(4,-2),(2,4)>$.
(*iv*) Modulul factor $\mathbb{Z}^2/<(4,-2),(2,4)>$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$.

86. Folosind teorema fundamentală de izomorfism, arătaţi că $\mathbb{Z}[i]$-modulul factor
$$\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]/<(1+i, 1-i)>$$
este izomorf cu $\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}_2$. Structura de $\mathbb{Z}[i]$-modul a lui $\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}_2$ este dată de
$$(a+bi)(c+di, x) = ((a+bi)(c+di), (a+b)x), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}_2.$$
(Ind. Incercaţi cu funcţia $(x, y) \mapsto (x - iy, y \cdot \widehat{1})$.)

87. Este $\mathbb{Z}[i]$-modulul $\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]/<(1+i, 1-i)>$ din ex. precedent ciclic ?

88. Arătaţi că $\mathbb{Z}[i]$-modulul factor
$$\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]/<(2-i, 2+i)>$$
este izomorf cu $\mathbb{Z}[i]$ cu structura canonică de $\mathbb{Z}[i]$-modul.
(Ind. Incercaţi cu funcţia $(x, y) \mapsto (2+i)x - (2-i)y$.)

89. Arătaţi că $\mathbb{Z}[i]$-modulul $\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]$ este generat de vectorii $(2-i, 2+i)$ şi $(1, 1+i)$.
(Ind. $1 = (1+i)(2-i) - (2+i)$.)

90. Rezolvaţi ex. 88 folosind ex. precedent şi teorema a doua de izomorfism.

91. Fie A un inel comutativ şi fie $a, b, a', b' \in A$ cu $aa' + bb' = 1$. Arătaţi că A-modulul factor $A^2/<(a,b)>$ este izomorf cu A.

Seminar 13

92. Arătaţi că
$$\mathbb{Z}_{144} =< \widehat{9} > \dot{+} < \widehat{16} >$$
ca $\mathbb{Z}$-module.

93. Spunem că un modul este *indecompozabil* dacă singura sa descompunere în sumă directă internă $M = M_1 \dot{+} M_2$ este cea trivială, adică $M = M \dot{+} \{0\}$. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulele $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Z}_8$ sunt indecompozabile.

94. Verificaţi dacă
$$B = \{1 + 2i, 2 + 3i\},\ C = \{1 + 2i, 4 + 5i\},\ D = \{1, 1 + i, 1 + 3i\}$$
sunt baze ale $\mathbb{Z}$-modulul liber $\mathbb{Z}[i]$.

95. Arătaţi că $\mathbb{Z}_4$ nu este $\mathbb{Z}_8$-modulul liber. Generalizare.

96. Arătaţi că $\mathbb{Z}$-modulul factor $\mathbb{Z}^2/ < (2, 8) >$ nu este liber.

97. Număraţi aplicaţiile $\mathbb{Z}$-liniare de la $\mathbb{Z}[i]$ la $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

98. Daţi că un exemplu de două module nelibere M, N cu produsul direct $M \times N$ liber.