Examen

11 Februarie 2018

Timp de lucru 2h. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Aveți 3 subiecte, fiecare valorând 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

Fie X o variabilă aleatoare repartizată

$$\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

unde $\theta \in (0,1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

Exercițiul 2

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbf{1}_{[\theta,+\infty)}(x)$$

cu $\theta > 0$, parametru necunoscut.

1. a) Determinați repartiția lui $\frac{X_1}{\theta} - 1$.
   b) Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestuia.
   c) Găsiți legea limită a lui $\tilde{\theta}$.
2. a) Determinați estimatorul $\hat{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda verosimilității maxime.
   b) Calculați eroarea pătratică medie a lui $\hat{\theta}$ și verificați dacă estimatorul este consistent.
   c) Construiți un interval de încredere pentru θ de nivel de încredere $1 - \alpha$.
   d) Pe care dintre cei doi estimatori îl preferați ?

Exercițiul 3

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n din populația f_θ unde

$$f_\theta(x) = \frac{3}{(x-\theta)^4}\mathbf{1}_{[1+\theta,+\infty)}(x)$$

1. a) Calculați $\mathbb{E}_\theta[X_1]$, $Var_\theta(X_1)$ și funcția de repartiție $F_\theta(x)$ a lui X_1.

   b) În cazul în care $\theta = 2$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0, 1]$: $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0.4$ și $u_3 = 0.5$. Descrieți procedura.

2. a) Determinați estimatorul $\hat{\theta}_n^M$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestui estimator. Care este legea lui limită ?

   b) Găsiți un interval de încredere asimptotic de nivel de încredere de 95% pentru θ.

3. a) Exprimați în funcție de θ mediana repartiției lui X_1 și plecând de la aceasta găsiți un alt estimator $\hat{\theta}_n^Q$ al lui θ.

   b) Determinați legea lui limită a lui $\hat{\theta}_n^Q$ și arătați că, asimptotic, acesta este mai bun decât $\hat{\theta}_n^M$.

   c) Găsiți un interval de încredere asimptotic de nivel de încredere de 95% pentru θ.

4. a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n^{VM}$ a lui θ și verificați dacă este deplasat.

   b) Calculați funcția de repartiție a lui $\hat{\theta}_n^{VM} - \theta$.

   c) Pe care dintre cei trei estimatori îl preferați ?

Examen 11 feb 2018

Ex 1:

1) $P_\theta(X=k) = A(k+1)\theta^k$ discretă

1.1) $A=?$ $E[X]=?$ $Var[X]=?$

$$P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} P_\theta(X=k) = 1$$

P_θ = distr de prob

$$\sum_{k=0}^{\infty} A\cdot(k+1)\theta^k = A\cdot\underbrace{\sum(k+1)\theta^k}_{\frac{1}{(1-\theta)^2}} = A\cdot\frac{1}{(1-\theta)^2} = 1$$

$$\frac{A}{(1-\theta)^2} = 1 \Rightarrow A = (1-\theta)^2 \Rightarrow P_\theta(X=k) = (1-\theta)^2(k+1)\theta^k$$

$E[X]=?$ $Var[X]=?$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P_\theta(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(1-\theta)^2(k+1)\theta^k = (1-\theta)^2\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)\theta^k}_{2\theta\cdot\frac{1}{(1-\theta)^3}} =$$

$$= (1-\theta)^2\cdot 2\theta\cdot\frac{1}{(1-\theta)^3} = \frac{2\theta}{1-\theta}$$

$$E[X] = \frac{2\theta}{1-\theta}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\cdot(1-\theta)^2(k+1)\theta^k = (1-\theta)^2\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k^2(k+1)\theta^k}_{\frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^4}} = (1-\theta)^2\cdot\frac{4\theta+2\theta}{(1-\theta)^4} = \frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^2}$$

$$Var[X] = \frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^2} - \frac{(2\theta)^2}{(1-\theta)^2} = \frac{2\theta}{1-\theta^2}$$

1.2) $\tilde{\theta}=?$ → met. momentelor

$P_\theta(\tilde{\theta}=0)=?$

$$E[X] = \bar{x} \Leftrightarrow \frac{2\theta}{1-\theta} = \bar{x} \Leftrightarrow 2\theta = (1-\theta)\bar{x} \Leftrightarrow 2\theta = \bar{x} - \theta\bar{x}$$

$$2\theta + \theta\bar{x} = \bar{x}$$

$$\theta(2+\bar{x}) = \bar{x}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\bar{x}}{2+\bar{x}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\bar{x}}{2+\bar{x}}$$

$P(X=k)$

$$P_\theta(\tilde{\theta}=0) = P_\theta\left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}+2}=0\right) = P_\theta(\bar{x}=0) = P_\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = 0\right) = P_\theta(x_j=0) = A\cdot(0+1)\theta^0$$

$$= A = (1-\theta)^2$$

1.3) $\hat{\theta} = ?$ (E.V.M)

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} (\theta-1)^2 \theta^{x_i} (x_i+1) = (\theta-1)^{2n} \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} (x_i+1) =$$

$$= (\theta-1)^{2n} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} (x_i+1) \Rightarrow \ln L(\theta|x) = 2n \ln(\theta-1) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\theta + \ln \prod_{i=1}^{n} (x_i+1) =$$

$$= 2n \ln(\theta-1) + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln\theta + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i+1)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta|x)}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{2n}{\theta-1} + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$2n\theta + (\theta-1) \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$2n\theta + \theta \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\theta \left(2n + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n + \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n \overline{x}_n$$

$$\hat{\theta} = \frac{n \overline{x}_n}{2n + n \overline{x}_n} = \frac{\overline{x}_n}{2 + \overline{x}_n}$$

Verif că e pct de maxim adică

$$\left. \frac{\partial^2 \ln L(\theta|x)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}} < 0$$

$$\left. \left(\frac{-2n}{(\theta-1)^2} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \right|_{\theta=\hat{\theta}} = - \left. \left(\frac{2n}{(\theta-1)^2} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$ evident

2.1 $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{(\theta,\infty)}(x)$

a) $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}, & x \in (\theta,\infty) \\ 0, & \hat{\imath}n \text{ rest} \end{cases}$

$$P\left(\frac{X_1}{\theta} - 1 \le x\right) = P(X_1 \le \theta(x+1)) = F_{X_1}(\theta(x+1)) = \begin{cases} \int_\theta^{\theta(x+1)} f_\theta(u)\, du, & x \in [0,+\infty) \\ 0, & \hat{\imath}n \text{ rest} \end{cases}$$

$$F_{X_1}(\theta(x+1)) = \int_\theta^{\theta(x+1)} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{u-\theta}{\theta}} du = \frac{1}{\theta}\int_\theta^{\theta(x+1)} e^{-\frac{u-\theta}{\theta}} du$$

$$\left(-\frac{u-\theta}{\theta}\right)' = \frac{-1}{\theta}$$

$$F_{X_1}(\theta(x+1)) = -\int_\theta^{\theta(x+1)} \frac{-1}{\theta} e^{-\frac{u-\theta}{\theta}} du = -e^{-\frac{u-\theta}{\theta}}\Big|_\theta^{\theta(x+1)} = -e^{-\left(\frac{\theta(x+1)-\theta}{\theta}\right)} + e^{-\left(\frac{\theta-\theta}{\theta}\right)} =$$

$$= -e^{-\left(\frac{\theta x+\theta-\theta}{\theta}\right)} + 1 = 1 - e^{-x}$$

$$\Rightarrow F_{X_1}(\theta(x+1)) = \begin{cases} 1-e^{-x}, & x > \theta \\ 0, & \hat{\imath}n \text{ rest} \end{cases}$$

b) $\tilde{\theta} = ?$ → met. mom

eroarea pătratică medie = ?

$E[X] = \bar{X}$

$$E[X] = \int_\theta^\infty x \cdot f_\theta(x)\, dx = \int_\theta^\infty x \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)} dx = \frac{1}{\theta}\int_\theta^\infty x \cdot e^{-\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)} dx$$

$e^{-\text{ceva}}$

↳ int $\Gamma = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = \Gamma(a)$

Sch de var:

$\frac{x-\theta}{\theta} = t \Rightarrow x - \theta = t\theta$

$\Rightarrow x = t\theta + \theta$

$dx = \theta\, dt$

$x_1 = \theta \Rightarrow t_1 = 0$

$x_2 = \infty \Rightarrow t_2 = \infty$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty \underbrace{(t\theta+\theta)}_{x} e^{-t}\cdot \underbrace{\theta\, dt}_{dx} = \int_0^\infty (t\theta+\theta)e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t\theta e^{-t}\,dt + \int_0^\infty \theta e^{-t}\,dt =$$

$$= \theta\Gamma(2)+\theta\Gamma(1) = \theta(\Gamma(2)+\Gamma(1)) = 2\theta$$

$\Gamma(a) = (a-1)!$

$$\Gamma(2) = (2-1)! = 1$$

$$\Gamma(1) = (1-1)! = 0! = 1$$

$$\Rightarrow 2\theta = \bar{x} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\bar{x}}{2}$$

Eroarea pătratică medie (MSE)

↳ mean square error

$$MSE(\tilde{\theta}) = Var(\tilde{\theta}) + \underbrace{b_\theta^2(\tilde{\theta},\theta)}_{\text{distorsiunea}}$$

$$b(\tilde{\theta},\theta) = E[\tilde{\theta}] - \theta$$

Calculez $Var(\tilde{\theta})$ $\quad a^2 Var(x)$

$$Var(\tilde{\theta}) = Var\left(\frac{\bar{x}}{2}\right) = \frac{1}{4} Var(\bar{x}) = \frac{1}{4} Var\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{m^2}\cdot m\,Var[X] = \frac{1}{4m^2} Var[X]$$

Dar $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$$E[X^2] = \int_\theta^\infty x^2\cdot f_\theta(x)\,dx = \int_\theta^\infty x^2 \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)} dx = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty \underbrace{x^2 e^{-\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)}}_{\Gamma(a)} dx$$

Sch. de var:

$$\frac{x-\theta}{\theta} = t \Rightarrow x = \theta(t+1)$$

$$dx = \theta\, dt$$

$$x_1 = \theta \Rightarrow t_1 = 0$$

$$x_2 = \infty \Rightarrow t_2 = \infty$$

$$= \frac{1}{\theta}\int_0^\infty \theta^2(t+1)^2 e^{-t}\theta\, dt = \int_0^\infty \theta^2(t+1)^2 e^{-t}\,dt = \theta^2\underbrace{\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt}_{\Gamma(3)} + 2\theta^2\underbrace{\int_0^\infty t e^{-t}\,dt}_{\Gamma(2)} + \theta^2\underbrace{\int_0^\infty e^{-t}\,dt}_{\Gamma(1)}$$

$$= \theta^2(\Gamma(3)+2\Gamma(2)+\Gamma(1)) = \theta^2(2! + 2\cdot 1! + 0!) = 5\theta^2$$

$$Var[X] = 5\theta^2 - (2\theta)^2 = \theta^2$$

$$Var[\tilde{\theta}] = \frac{1}{4m}\theta^2$$

Calculez distorsiunea : $b(\tilde{\theta}, \theta)$

$b(\tilde{\theta}, \theta) = E[\tilde{\theta}] - \theta = E\left[\frac{\bar{X}}{2}\right] - \theta = \frac{1}{2} E[\bar{X}] - \theta = \frac{1}{2} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \theta = \frac{1}{2n} \cdot n E[X] - \theta$

$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2\theta}_{E[X]} - \theta = 0$

$\Rightarrow MSE(\tilde{\theta}) = Var(\tilde{\theta}) = \frac{1}{4n}\theta^2$

2.2) a) $\hat{\theta} = ?$ (MVM)

$-\left(\frac{X_i}{\theta} - \frac{\theta}{\theta}\right) = \frac{-X_i}{\theta} + 1$

① Scriu funcția de verosimilitate

$L(X,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{X-\theta}{\theta}\right)} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} e^{-\left(\frac{X_i-\theta}{\theta}\right)} = \frac{1}{\theta^n} e^{\underbrace{\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)+n}_{e^{-\frac{1}{\theta}\sum X_i} \cdot e^{n}}}$

② Logaritmez

$\ln L(X,\theta) = \ln \frac{1}{\theta^n} + \ln e^{\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)+n} = -\ln \theta^n - \left(\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + n = -n \ln\theta - \left(\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + n$

③ Derivez parțial

$\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta} = -n \cdot \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i$

④ Rez ec de verosimilitate

$\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta} = 0$

$\theta^2 /$

$\frac{-n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta^2} = 0 \iff -n\theta + \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$

$n\theta = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X}$

b) $MSE = ?$

$MSE = Var(\hat{\theta}) + b_{\theta}^2(\hat{\theta}, \theta)$

$Var(\hat{\theta}) = Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} n\, Var[X] = \frac{1}{n} Var[X] = \frac{1}{n}\left(E[X^2] - (E[X])^2\right)$

$= \frac{1}{n}\left(5\theta^2 - (2\theta)^2\right) = \frac{\theta^2}{n}$

$E[X^2]$ și $E[X]$ sunt cele la ⓐ. $\Rightarrow Var[X]$ e aceeași.

$$b_\theta(\hat\theta,\theta) = E(\hat\theta)-\theta = E[\bar X]-\theta = E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right)-\theta = \frac{1}{m}\cdot m E[X]-\theta =$$

$= 2\theta - \theta = \theta \neq 0 \Rightarrow$ estimator deplasat

$$MSE = Var(\hat\theta) + b_\theta^2(\hat\theta,\theta) = \frac{\theta^2}{m} + \theta^2 = \frac{\theta^2(1+m)}{m}$$

Am folosit Met. Verosim. Maxime $\Rightarrow \hat\theta$ este consistent și asimptotic eficient.

Exercițiul 3:

Fie $X_1,\dots,X_n$ un eșantion de talie n din pop unde:

$$f_\theta(x) = \frac{3}{(x-\theta)^4}\mathbb{1}_{[1+\theta,+\infty)}(x) = \begin{cases} \frac{3}{(x-\theta)^4}, & x\in[1+\theta,\infty) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

1. a) $E_\theta[X_1] = ?$

$Var_\theta[X_1] = ?$

$F_\theta(x) = ?$ a lui X_1

$$E_\theta[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_\theta(x)\,dx = \int_{1+\theta}^{\infty} x\cdot\frac{3}{(x-\theta)^4}\,dx \underset{\text{Artificiu!}}{=} 3\int_{1+\theta}^{\infty}\frac{x-\theta+\theta}{(x-\theta)^4}\,dx =$$

$$= 3\int_{1+\theta}^{\infty}\frac{1}{(x-\theta)^3}\,dx + 3\theta\int_{1+\theta}^{\infty}\frac{1}{(x-\theta)^4}\,dx = 3\,\frac{(x-\theta)^{-2}}{-2}\Bigg|_{1+\theta}^{\infty} + 3\theta\,\frac{(x-\theta)^{-3}}{3}\Bigg|_{1+\theta}^{\infty} =$$

$$= \frac{-3}{2}\,\frac{1}{(x-\theta)^2}\Bigg|_{1+\theta}^{\infty} - \theta\,\frac{1}{(x-\theta)^3}\Bigg|_{1+\theta}^{\infty} = \frac{-3}{2}(0-1) - \theta(0-1) = \frac{3}{2}+\theta$$

$$Var_\theta[X_1] = E_\theta[X_1^2] - (E_\theta[X_1])^2$$

Artificiu!

$$E_\theta[X_1^2] = \int_{1+\theta}^{\infty} x^2\cdot f_\theta(x)\,dx = \int_{1+\theta}^{\infty}\frac{3x^2}{(x-\theta)^4}\,dx = 3\int_{1+\theta}^{\infty}\frac{x^2 \overbrace{-2\theta x+\theta^2+2\theta x-\theta^2}^{\text{le-am adaugat și scăzut}}}{(x-\theta)^4}\,dx =$$

$$= 3\int_{1+\theta}^{\infty}\frac{(x-\theta)^2}{(x-\theta)^4}\,dx + 3\cdot 2\theta\int_{1+\theta}^{\infty}\frac{x}{(x-\theta)^4}\,dx - 3\theta^2\int_{1+\theta}^{\infty}\frac{1}{(x-\theta)^4}\,dx =$$

$$= 3\int_{1+\theta}^{\infty} \frac{1}{(x-\theta)^2}\,dx + 6\theta\int_{1+\theta}^{\infty} \frac{x-\theta+\theta}{(x-\theta)^4} - 3\theta^2 \int_{1+\theta}^{\infty} \frac{1}{(x-\theta)^4}\,dx = \cancel{+3\theta^2 \int_{1+\theta}^{\infty} (x-\theta^4)\,dx}$$

$$= 3\,\frac{(x-\theta)^{-1}}{-1}\Big|_{1+\theta}^{\infty} + 6\theta\int_{1+\theta}^{\infty}(x-\theta)^{-3}dx + 6\theta^2\int_{1+\theta}^{\infty}(x-\theta)^{-4}dx - 3\theta^2\int_{1+\theta}^{\infty}(x-\theta)^{-4}dx =$$

$$= -3\cdot\frac{1}{(x-\theta)}\Big|_{1+\theta}^{\infty} + 6\theta\,\frac{(x-\theta)^{-2}}{-2}\Big|_{1+\theta}^{\infty} + 3\theta^2\,\frac{(x-\theta)^{-3}}{-3}\Big|_{1+\theta}^{\infty} =$$

$$= \frac{-3}{x-\theta}\Big|_{1+\theta}^{\infty} - \frac{3\theta}{(x-\theta)^2}\Big|_{1+\theta}^{\infty} - \frac{\theta^2}{(x-\theta)^3}\Big|_{1+\theta}^{\infty} =$$

$$= -3(0-1) - 3\theta(0-1) - \theta^2(0-1) = 3+3\theta+\theta^2$$

$$\Rightarrow Var_\theta[X_1] = E[X_1^2] - (E[X_1])^2 = 3+3\theta+\theta^2 - \left(\frac{3}{2}+\theta\right)^2$$

$$= 3+\cancel{3\theta}+\cancel{\theta^2} - \frac{9}{4} - 2\cdot\frac{3}{2}\theta - \cancel{\theta^2} = 3 + \cancel{3\theta} - \frac{9}{4} - \cancel{3\theta} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{F_\theta(x) = P(X\le x) = \underbrace{\int_{1+\theta}^{x} \frac{3}{(u-\theta)^4}\,du}_{\text{Atenție! înlocuiesc } x \text{ cu } u \text{ în integrală}}} = 3\int_{1+\theta}^{x}\frac{1}{(u-\theta)^4}\,du = 3\cdot\frac{(u-\theta)^{-3}}{-3}\Big|_{1+\theta}^{x} =$$

$$= \frac{-1}{(u-\theta)^3}\Big|_{1+\theta}^{x} = \frac{-1}{(x-\theta)^3} + \frac{1}{(1+\theta-\theta)^3} = \frac{-1}{(x-\theta)^3} + 1$$

$$\Rightarrow F_\theta(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{(x-\theta)^3}, & x\in[1+\theta,\infty) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

b) $\theta = 2$ $\quad X \sim f_\theta(x)$ $\quad u_1 = 0{,}25$ $\quad u_2 = 0{,}4$ $\quad u_3 = 0{,}5$

$F_\theta(x) = y$ pt $x\in[1+\theta,\infty) \Rightarrow 1 - \frac{1}{(x-\theta)^3} = y \Rightarrow \frac{-1}{(x-\theta)^3} = y-1$

$\frac{1}{(x-\theta)^3} = 1-y \Rightarrow 1 = (1-y)(x-\theta)^3 \Rightarrow (x-\theta)^3 = \frac{1}{1-y} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{1-y}} + \theta$

$F_2^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{1}{1-y}} + 2$ $\quad$ Se aplică pe u_1, u_2, u_3.