Milostanu Andreea
Miboci Valentina

20.10.2021

Tutoriat 1
Geometrie I

1. Produsul scalar

Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ (spațiul vectorilor liberi), unde $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$.

Produsul scalar se definește prin:

$$<\vec{u}, \vec{v}> = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2.$$

Proprietăți:

1° $<\vec{u}, \vec{v}> = <\vec{v}, \vec{u}>$, $(\forall)\ \vec{u}, \vec{v} \in V_2$

2° $\begin{cases} <\vec{u}+\vec{w}, \vec{v}> = <\vec{u}, \vec{v}> + <\vec{w}, \vec{v}> \\ <\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}> = <\vec{u}, \vec{v}> + <\vec{u}, \vec{w}> \end{cases}$ $(\forall)\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_2$

3° $<\vec{v}, \vec{v}> = \|\vec{v}\|^2$, $(\forall)\ v \in V_2$

4° $<\vec{v}, \vec{v}> = 0 \Rightarrow \vec{v} = 0$, $(\forall)\ v \in V_2$

5° $<\vec{v}, \vec{u}> = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{u}$, $(\forall)\ \vec{v}, \vec{u} \in V_2$

Obs. Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$, nenuli. Fie $\alpha \in [0, \pi]$ unghiul format de cei doi vectori.

Produsul scalar se scrie $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$.

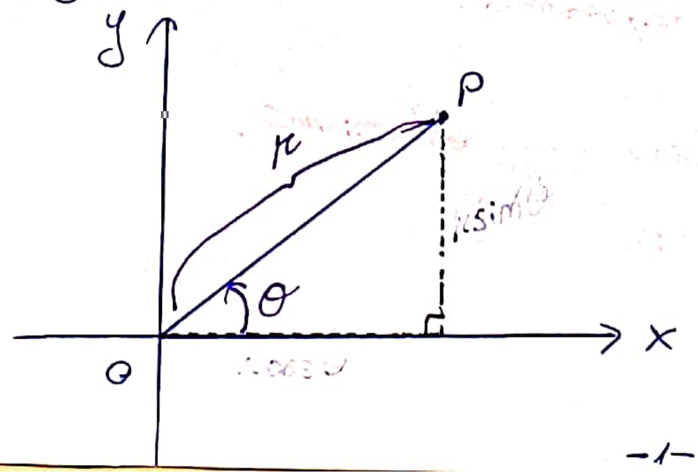
Dacă
1° $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ atunci $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$.
2° $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ atunci $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.
3° $\alpha = \frac{\pi}{2}$ atunci $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemplu de produs scalar: $<(-3,5), (6,-10)> = -3 \cdot 6 + 5 \cdot (-10) = -18 - 50 = -68.$

2. Tipuri de coordonate

Lucrăm în E_2, spațiul euclidian 2-dimensional.

Fie $\begin{cases} f: E_2 \to \mathbb{R}^2, f(P) = (x,y) \leadsto \text{coordonatele carteziene} \\ g: E_2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi), g(P) = (r, \theta) \leadsto \text{coordonatele polare} \end{cases}$



i) Trecerea de la coordonate polare la coordonate carteziene.

Avem (r, θ) coordonate polare.

Trecerea $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

ii) Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare.

Avem (x, y) coordonate carteziene.

Trecerea $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \end{cases}$

Obs. 1° $x \neq 0$, atunci $\theta = \arctan\frac{y}{x} + k\pi$, $k \in \{0, 1, 2\}$

2° $x = 0$, atunci $\theta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.

Obs. Fie punctele $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Atunci avem $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

3. Ecuația unei drepte în plan

1° Dreapta d determinată de un punct $M_1(x_1, y_1)$ și un vector director nenul $\vec{u} = (a, b)$.

Convenție: $\begin{cases} \text{dacă } a = 0 \Rightarrow d: x = x_1 \\ \text{dacă } b = 0 \Rightarrow d: y = y_1 \end{cases}$

$d: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = t$ ec. carteziene

$\begin{cases} x = ta + x_1 \\ y = tb + y_1, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ ec. parametrice

2° Dreapta determinată de două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$.

Avem un vector director $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

$(M_1M_2): \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}_{\text{direcția}} = \underbrace{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}_{\text{direcția}} = t$ ec. carteziene

Convenție: $\begin{cases} \text{dacă } x_1 = x_2 \Rightarrow M_1M_2: x = x_1 \\ \text{dacă } y_1 = y_2 \Rightarrow M_1M_2: y = y_1. \end{cases}$

Obs. Axa Ox are ec. $y = 0$, iar axa Oy are ec. $x = 0$.

$(M_1M_2): \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), t \in \mathbb{R} \end{cases}$ ec. parametrice

Ecuația dreptei poate fi scrisă sub forma unui determinant:

$$(M_1M_2): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Obs. Trei puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ sunt coliniare dacă

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3° Dreapta d determinată de un punct $M_0(x_0, y_0)$ și un vector normal nenul $\vec{n} = (a, b)$.

Avem ecuația: $d: a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$.

Obs. Dacă $\vec{n} = (a, b)$ este un vector normal al dreptei d, atunci $\vec{u} = (-b, a)$ este un vector director.

Dacă avem o dreaptă $d: ax + by + c = 0$, atunci vectorul normal este $\vec{n} = (a, b)$, iar un vector director este $\vec{u} = (-b, a)$.

4° Dreapta determinată de un punct $M_0(x_0, y_0)$ și panta m; $m = tg\,\alpha$.

$$d: y - y_0 = m(x - x_0)$$

Diverse forme ale ecuației carteziene a unei drepte:

1° ecuația generală: $d: ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 > 0$

2° ecuația redusă/explicită: $y = mx + n$

3° ecuația prin tăieturi: $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, unde $A(a, 0)$ și $B(0, b)$ sunt punctele de intersecție ale dreptei d cu axa Ox și cu axa Oy; $a, b \neq 0$.

4° forma normală a unei drepte: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$.

4. Distanța de la un punct la o dreaptă

Fie dreapta $d: ax + by + c = 0$ și punctul $M_0(x_0, y_0) \notin d$. Atunci distanța de la punctul M la dreapta d este:

$$dist(M_0, d) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Reamintire Aria unui triunghi cu vârfurile $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ este: $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Poziția relativă a două drepte în plan

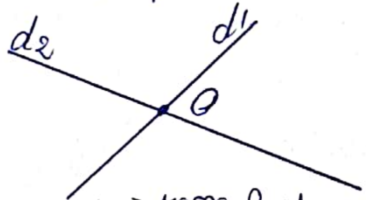
Fie dreptele $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ și $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$, cu vectorii normali și de poziție $\vec{n_1}=(a_1,b_1)$, $\vec{u_1}=(-b_1,a_1)$, respectiv $\vec{n_2}=(a_2,b_2)$, $\vec{u_2}=(-b_2,a_2)$.

Pentru a studia poziția relativă a celor două drepte, studiem ~~soluția mulțimilor~~ mulțimea soluțiilor sistemului liniar $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \end{cases}$

Avem matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ și matricea extinsă a sistemului $\bar{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix}$.

1° $\underline{\det A \neq 0}$ $\Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat, deci are soluție unică.

Așadar, dreptele se intersectează într-un punct (să-i zicem O).

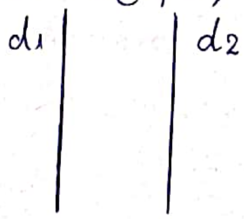


rang $A=1$

2° $\underline{\det A = 0}$ distingem două cazuri

Fie $\Delta_c = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}$ minorul caracteristic

(i) Dacă $\Delta_c \neq 0$, atunci sistemul este incompatibil și dreptele sunt paralele.



Obs. $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$.

(ii) Dacă $\Delta_c=0$, atunci sistemul este compatibil simplu nedeterminat și dreptele coincid (se mai numesc și drepte confundate).

Obs. $d_1=d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

6. Poziția relativă a trei drepte în plan

Fie dreptele $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$, $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$, $d_3: a_3x+b_3y+c_3=0$.
Din nou, studiem mulțimea soluțiilor sistemului liniar:
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \\ a_3x+b_3y=-c_3. \end{cases}$$

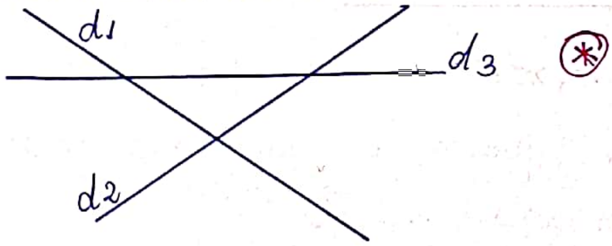
Avem matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ și matricea extinsă sistemului

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{pmatrix}.$$

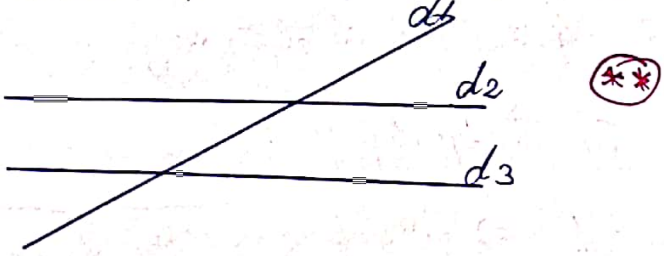
1.° rang $A=2$, deci d_1 și d_2 sunt concurente.
Pentru a vedea poziția lui d_3 calculăm Δ_c.

(i) $\Delta_c=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este incompatibil. ($\Leftrightarrow$ rang $\bar{A}=3$)

(*) Dacă toți minorii de ordinul doi ai lui A sunt nenuli, atunci cele trei drepte sunt concurente două câte două.

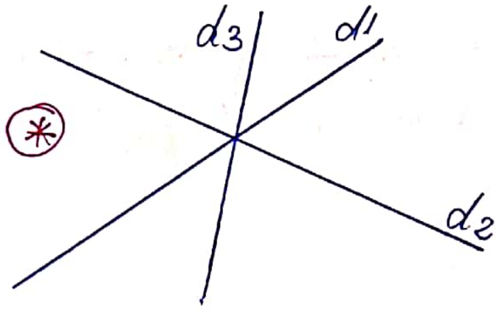


(**) Dacă matricea A are un singur minor de ordinul doi nul, atunci două dintre drepte sunt paralele și cea de-a treia le intersectează

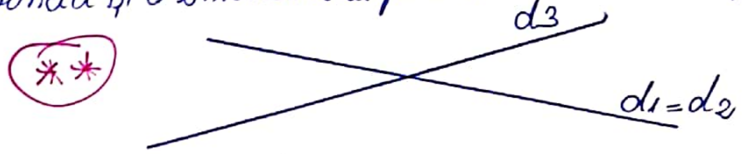


(ii) $\Delta_c=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{vmatrix} =0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat ($\Leftrightarrow$ rang $\bar{A}=2$)

(*) Dacă toți minorii de ordinul doi ai lui A sunt nenuli, atunci cele ~~două~~ trei drepte sunt concurente într-un punct.



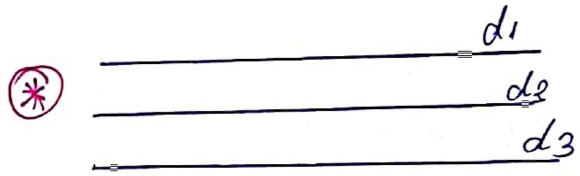
(**) Dacă matricea A are un singur minor de ordinul doi nul, atunci două dintre drepte coincid și o intersectează pe a treia într-un punct.



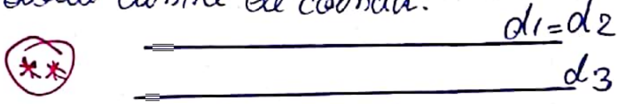
2°. rang $A = 1$

(i) rang $\bar{A} = 2 \Rightarrow$ sistemul este incompatibil

(*) Dacă ambii minori caracteristici sunt nenuli, atunci cele trei drepte sunt paralele și distincte.



(**) Dacă numai unul dintre minorii caracteristici este nul, atunci dreptele sunt paralele, dar două dintre ele coincid.



(ii) rang $\bar{A} = 1 \Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat

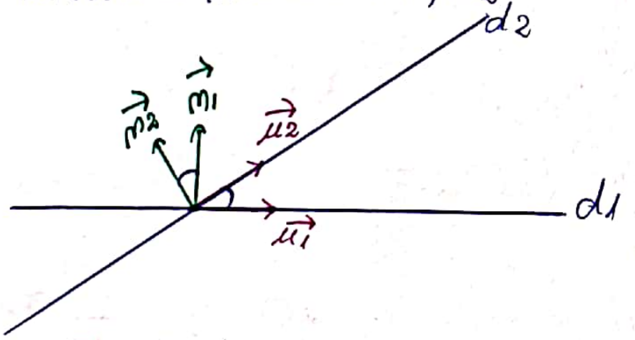
Cele trei drepte coincid:

7. Unghiul format de două drepte orientate

O dreaptă orientată este o dreaptă d împreună cu o alegere a unui sens de parcurs. Fie $\vec{u}$ un vector director, deci d are sensul lui $\vec{u}$.

Fie dreptele concurente $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, cu vectorii normali și de poziție $\vec{n_1} = (a_1, b_1)$, $\vec{u_1} = (-b_1, a_1)$, respectiv $\vec{n_2} = (a_2, b_2)$, $\vec{n_2} = (-b_2, a_2)$.

Fie $\alpha \in [0, \pi]$ unghiul format de dreptele d_1, d_2. Este, de fapt, unghiul format de vectorii normali $\vec{n_1}, \vec{n_2}$.



Din $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \|\vec{n_1}\| \cdot \|\vec{n_2}\| \cdot \cos\alpha$

$$\left(\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cdot \cos\alpha \right)$$

deducem $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\| \cdot \|\vec{n_2}\|} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Obs. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 0$, deci $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Așadar, $d_1 \perp d_2$ (adică $m_1 \cdot m_2 = -1$, unde m_1, m_2 sunt pantele dreptelor d_1, d_2).

8. Fascicul de drepte

O mulțime de drepte ce trec printr-un punct fix P_0 (numit vârful fasciculului) se numește fascicul de drepte.

Fie $d_1: f_1(x,y) = a_1x+b_1y+c_1 = 0$ și $d_2: f_2(x,y) = a_2x+b_2y+c_2 = 0$ două drepte distincte ale fasciculului de vârf P_0. Acestea se numesc drepte fundamentale sau de bază ale fasciculului.

Fasciculul de vârf P_0: $\mathcal{F}: r f_1(x,y) + s f_2(x,y) = 0$, $r^2+s^2>0$, $r,s \in \mathbb{R}$.

Obs. 1° Dacă $r=0 \Rightarrow f_2(x,y)=0$

2° Dacă $r \neq 0 \overset{":r"}{\Longrightarrow} f_1(x,y) + \frac{s}{r} f_2(x,y) = 0$

$\frac{s}{r} \overset{not.}{=} \lambda$.