Examen la Cercetări operaţionale seria 31

Cristian Niculescu

13 ianuarie 2021

1) Fie sistemul primal:

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccc} -3x_1 & +4x_2 & +8x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & +ix_2 & +2x_3 & = & 8 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \geq & 7 \end{array} \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

a) Scrieţi sistemul dual.

b) Care dintre cele 2 sisteme este compatibil şi care este incompatibil? Justificaţi răspunsul.

2) Rezolvaţi prin metoda celor 2 faze:

$$\begin{cases} \inf(10x_1 + x_2) \\ 36x_1 - x_2 + x_3 = i \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

3) Fie problema:

$$\begin{cases} \inf(-2x_1 - x_2) \\ x_1 + x_2 + x_3 = i \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 80 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

a) Rezolvaţi problema.

b) Reoptimizaţi pentru $b = \begin{pmatrix} 36 - i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Înlocuiţi i cu numărul corespunzător din următoarea listă:

ALBU MIHAI-PAVEL 1
ALECU FLORIN-GABRIEL 2
ANGHELESCU DIANA-LIVIA 3
APOSTOL CRISTIANA-CLAUDIA 4
AVRAMESCU ROBERT-VALENTIN 5
BALTATESCU ELENA-ECATERINA 6

EXAMEN CO - seria 31

1. Fie sistemul primal:

$$\begin{cases} -3x_1+4x_2+8x_3 \le 2 \\ x_1+2x_2+2x_3=8 \\ 5x_1-3x_2+2x_3 \ge 7 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \text{ arbitrar},\ x_3 \le 0 \end{cases}$$

a) Scrieți sistemul dual.

b) Care dintre cele 2 sisteme este compatibil și care este incompatibil?

REZOLVARE:

a) Punem în evidență corespondența dintre ecuațiile și inecuațiile din sistemul primal și variabilele din sistemul dual.

$$\begin{cases} -3x_1+4x_2+8x_3 \le 2 \longleftrightarrow u_1 \\ x_1+2x_2+2x_3=8 \longleftrightarrow u_2 \\ 5x_1-3x_2+2x_3 \ge 7 \longleftrightarrow u_3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \text{ arbitrar},\ x_3 \le 0 \end{cases}$$

Scriem pe rând ecuațiile sau inecuațiile din sistemul dual corespunzătoare variabilelor din sistemul primal.

Pentru x_1:

$3u_1-u_2-5u_3 \ge 0$

Semnul este $\ge$, deoarece $x_1 \ge 0$.

Pentru x_2:

$-4u_1-2u_2+3u_3=0$

Semnul este $=$, deoarece x_2 este arbitrar

Pentru x_3:

$-8u_1-2u_2-2u_3 \le 0$

Semnul este $\le$, deoarece $x_3 \le 0$.

Semnele variabilelor din sistemul dual:

$u_1 \le 0$, deoarece corespunde unei inegalități cu $\le$.

u_2 arbitrar, deoarece corespunde unei ecuații

$u_3 \ge 0$, deoarece corespunde unei inegalități cu $\ge$.

Condiția de exces $\langle (2,8,7),(u_1,u_2,u_3) \rangle > 0 \Leftrightarrow 2u_1+8u_2+7u_3 > 0$

Sistemul dual este:

$$\begin{cases} 3u_1 - u_2 - 5u_3 \geq 0 \\ -4u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0 \\ -8u_1 - 2u_2 - 2u_3 \leq 0 \\ 2u_1 + 8u_2 + 7u_3 \geq 0 \\ u_1 \leq 0,\ u_2 \text{ arbitrar},\ u_3 \geq 0 \end{cases}$$

b) Numerotăm ecuațiile din sistemul dual:

$$\begin{cases} 3u_1 - u_2 - 5u_3 \geq 0 & (1) \\ -4u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0 & (2) \\ -8u_1 - 2u_2 - 2u_3 \leq 0 & (3) \\ u_1 \leq 0 & (4) \\ u_2 \text{ arbitrar} & (5) \\ u_3 \geq 0 & (6) \\ 2u_1 + 8u_2 + 7u_3 \geq 0 & (7) \end{cases}$$

Sist primal:

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 7 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ arbitrar},\ x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Iau $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ și verific dacă e sol în sist primal.

$-3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 = -24 + 4 + 0 = -20 \leq 2$

$6 + 2 + 2 \cdot 0 = 6 + 2 = 8$

$5 \cdot 6 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 30 - 3 + 0 = 27 \geq 7$

Deci $(6, 1, 0)$ este soluție a sistemului primal $\Rightarrow$ sistemul primal este compatibil.

Conform Teoremei Farkas-Minkowski, dintre sistemul dual și cel primal, unul și numai unul este compatibil.

Cum sistemul primal este compatibil rezultă că sistemul dual este incompatibil.

$(2): 2u_2 = -4u_1 + 3u_3$

$2 \cdot (1): 6u_1 - 2u_2 - 10u_3 \geq 0$

$6u_1 + 4u_1 - 3u_3 - 10u_3 \geq 0$

$10u_1 - 13u_3 \geq 0$

$u_1 \leq 0 \Rightarrow 10u_1 \leq 0$

$u_3 \geq 0 \Rightarrow -13u_3 \leq 0$

$\overline{\qquad\qquad\qquad} (+)$

$10u_1 - 13u_3 \leq 0$ ℵP

2) Rezolvaţi prin metoda celor 2 faze.

$$\begin{cases} \inf(10x_1+x_2) \\ 36x_1-x_2+x_3=2 \\ -x_1+x_2+x_4=-1 \\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4} \end{cases}$$

REZOLVARE:

Trebuie să avem $b\geq 0$, deci înmulţim cea de a doua ecuaţie cu (-1).

$$\begin{cases} \inf(10x_1+x_2) \\ 36x_1-x_2+x_3=2 \\ x_1-x_2-x_4=1 \\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4} \end{cases}$$

Matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 36 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Introducem câte o variabilă artificială în fiecare ecuaţie care nu conţine o variabilă a cărei coloană în A este vector unitar.

Singura coloană vector unitar este a^3 $\Rightarrow$ în ecuaţia în care apare x_3 nu introducem var. artificială

$$\begin{cases} \inf(x_5) \\ 36x_1-x_2+x_3=2 \\ x_1-x_2-x_4+x_5=1 \\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,5} \end{cases} \qquad A'=\begin{pmatrix} 36 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^T=(0\ 0\ 0\ 0\ 1)$$

Caut $B=I_2$ bază primal admisibilă

$B=(a^3,a^5)=I_2 \Rightarrow B^{-1}=I_2$

$B^{-1}b=I_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\geq 0 \Rightarrow B$ este primal admisibilă

$\mathcal{B}=\{3,5\}$, $\mathcal{R}=\{1,2,4\}$

Se rezolvă cu algoritmul simplex primal

			0	0		0	
	VB	VNB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	← x_3	2	36	-1	1	0	0
1	x_5	1	1	-1	0	-1	1
	z	1	1	-1	0	-1	0

$\bar{x}^B=B^{-1}b=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\bar{z}^B=c_B^T\bar{x}^B=(0\ 1)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=0\cdot 2+1\cdot 1=1$

COL. VAR SEC: $y_j^B=B^{-1}a^j$, $j\in R$

Testul de optim: $z_j'^B - c_j' \leq 0, \forall j \in R$

$z_1'^B - c_1' = 1 \not\leq 0 \Rightarrow$ testul de optim nu este îndeplinit

Testul de optim infinit: nu putem avea optim infinit la faza I, deoarece valoarea minimă pe domeniul admisibil este 0 ($x_3, x_5 \geq 0$)
(la faza I nu mai facem TOI)

Criteriul de intrare în bază:

$k \in R$ ai $z_k'^B - c_k' = \max\{z_j'^B - c_j' \mid j \in R, z_j'^B - c_j' > 0\} \Rightarrow x_k$ intră în bază

$\max(1) = 1$ atins pe col lui $x_1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x_1$ intră în bază.

Criteriul de ieșire din bază

$r \in B$ ai $\dfrac{\overline{x_r}^B}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{ik}^B > 0} \dfrac{\overline{x_i}^B}{y_{ik}^B} \Rightarrow x_r$ iese din bază

$k = 1$; $\min\limits_{y_{i1}^B > 0} \dfrac{\overline{x_i}^B}{y_{i1}^B} = \min\left(\dfrac{2}{36}, \dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{2}{36}$ atins pe linia lui $x_3 \Rightarrow x_3$ iese din bază

Nu putem trece la faza a II-a dacă avem variabile artificiale în bază.

$B = \{1, 5\}$, $R = \{2, 3, 4\}$

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$1/18$	1	$-1/36$	$1/36$	0	0
x_5	$17/18$	0	$-35/36$	$-1/36$	-1	1
z'	$17/18$	0	$-36/36$	$-1/36$	-1	0

Testul de optim: $z_j'^B - c_j' \leq 0, \forall j \in R \Rightarrow$ Testul de optim este îndeplinit

$z' = \dfrac{17}{18} > 0 \Rightarrow$ problema nu are soluție admisibilă

$z' = \overline{x_5}$

3) Fie problema:

$$\begin{cases} \inf(-2x_1 - x_2) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 80 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^T = (-2 \ -1 \ 0 \ 0)$$

a) Rezolvați problema

b) Reoptimizați pentru $b = \begin{pmatrix} 34 \\ 1 \end{pmatrix}$

REZOLVARE:

a) Caut B bază primal admisibilă

$B = (a^3, a^4) = I_2 \Rightarrow B^{-1} = I_2$

$B^{-1} b = I_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 80 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow B$ este primal admisibilă

Rezolvăm folosind alg simplex primal. $B = \{3, 4\}$, $R = \{1, 2\}$

$\overline{x}^B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 \\ 80 \end{pmatrix}$

$\overline{z}^B = c_B^T \overline{x}^B = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 80 \end{pmatrix} = 0.$

			-2	-1		
	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	2	1	1	1	0
0	x_4	80	1	2	0	1
	z	0	2	1	0	0

Testul de optim: $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in R$

$z_1^B - c_1 = 2 \nleq 0 \Rightarrow$ TO nu este îndeplinit

Testul de optim infinit $z_j^B - c_j > 0, y_j^B \leq 0, \forall j \in R$

$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \nleq 0$

$z_2^B - c_2 = 1 > 0$

$y_2^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \nleq 0$

$\Rightarrow$ TOI nu e îndeplinit

Crit de intrare în bază $\max(2, 1) = 2 \Rightarrow x_1$ intră în bază

Crit de ieșire din bază $\min\left(\frac{2}{1}, \frac{80}{1}\right) = 2 \Rightarrow x_3$ iese din bază

$B = \{1, 4\}$, $R = \{2, 3\}$

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2	1	1	1	0
x_4	78	0	1	-1	1
z	-4	0	-1	-2	0

TO este îndeplinit $\Rightarrow$ sol optimă este

$x_1^* = 2, x_4^* = 78, x_2^* = x_3^* = 0$

val optimă $= -4$.

b) Se modifică b => se modifică coloana VVB din ultimul tabel simplex.

	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
-2	x_1	34	1	1	1	0
0	x_4	-33	0	1	-1	1
	z	-68	0	-1	-2	0

$$a^j = e^i \Rightarrow (B^{-1})^i = B^{-1}e^i = B^{-1}a^j = y_j^B$$

$$\begin{cases} a^3 = e^1 \\ a^4 = e^2 \end{cases} \Rightarrow B^{-1} = (y_3^B, y_4^B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^B = B^{-1}b = B^{-1}\begin{pmatrix} 34 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 34 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ -33 \end{pmatrix}$$

$z_j^B - c_j \le 0, \forall j \in R \Rightarrow$ baza rămâne dual admisibilă

Continuăm cu alg simplex dual.

$x_B = \begin{pmatrix} 34 \\ -33 \end{pmatrix} \not\geq 0 \Rightarrow$ TO nu e îndeplinit

TI: $\exists r \in B$ a.î. $x_r^B < 0$ și $y_{rj}^B \geq 0, j = \overline{1,n}$

$r = 4: x_4^B = -33 < 0$

$y_{41}^B = 0 \geq 0$

$y_{42}^B = 1 \geq 0$

$y_{43}^B = -1 \not\geq 0 \Rightarrow$ TI nu e îndeplinit

Crit de ieșire din bază $r \in B$ a.î. $x_r^B = \min\limits_{i | x_i^B < 0} x_i^B \Rightarrow x_r$ iese din bază

$\min\limits_{i | x_i^B < 0} x_i^B = \min(x_1^B, x_4^B) = \min(34, -33) = -33 \Rightarrow x_4$ iese

Crit de intrare în bază $k \in R$ a.î. $\dfrac{z_k^B - c_k}{y_{rk}^B} = \min\limits_{y_{rj}^B < 0} \dfrac{z_j^B - c_j}{y_{rj}^B} \Rightarrow x_k$ intră în bază

$$\min_{y_{4j}^B < 0} \frac{z_j^B - c_j}{y_{4j}^B} = \min\left(\frac{z_3^B - c_3}{y_{43}^B}\right) = \frac{-2}{-1} = \frac{z_3^B - c_3}{y_{43}^B} \Rightarrow x_3 \text{ intră în bază}$$

VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1		0	
x_3	33	0	-1	1	-1
z	-2	0		0	

TO: $\overline{x_B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ TO este îndeplinit $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sol optimă $x_1^* = 1$, $x_3^* = 33$, $x_2^* = x_4^* = 0$

val optima : -2