# Examen Geometrie
## 18.06.2022

## Subiectul I

(1) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$
subspațiu în $\mathbb{R}^3$

Subspațiile lui $\mathbb{R}^3$ sunt: $\mathbb{R}^3$, un plan, o dreaptă, un punct sau o mulțime vidă.

A este semispațiu $\Rightarrow$ Fals

(2.) $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = Af(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)$

$\dim \mathcal{A}_1 = 1$
$\dim \mathcal{A}_2 = 1$
$\Rightarrow \dim(Af(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)) = 2$.
$\in \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ Adevărat

(3.) $\dim \mathcal{A}_1 = \dim \mathcal{A}_2 = n$

Luăm două repere afine (baze):

$R_1$ din $\mathcal{A}_1$: $R_1 = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$
$R_2$ din $\mathcal{A}_2$: $R_2 = \{P_0', P_1', \dots, P_n'\}$

Luam f un izomorfism afin a.î. $f(P_i) = P_i'$

Adevărat

4. Fals

Dacă planul nu este paralel cu Δ dreptunghic atunci nu este adevărat.

5. $P^2 \mathbb{R}$ = vecinătatea din $\mathbb{R}^2$ cu adăugarea dreptei la infinit.

În $\mathbb{R}^2$ avem cercul atunci în $P^2 \mathbb{R}$ luăm cercul și dreapta la infinit.

Adevărat

6. Are doar puncte regulate ⇒ ∃ hiperplane proiective tangente la ea. Cum ea este conținută în 2 hiperplane, atunci dc există vreun punct pe ambele hiperplane, adică pe dr de $n$, spațiul tangent la hipercuadrică era tot $m$ ambient ⇒ hipercuadrica avea puncte singulare.

Fals

## Subiectul II

1. $\pi: x-2y+z+2=0$. ⇒ vector normal $(1,-2,1)=u_1$

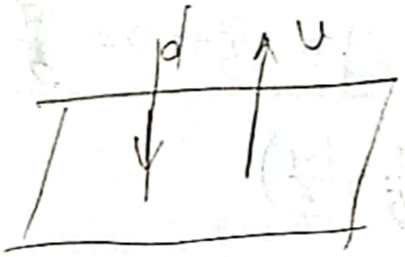
$d: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$ ⇒ vector director $(1,2,2)=u_2$

a) $d \parallel \pi \Leftrightarrow \langle(1,2,2),(1,-2,1)\rangle=0$.

2.

$d \nparallel \pi \Rightarrow u_1, u_2$ sunt proporționale. $\Rightarrow$ nu sunt

verific dacă $d_1 \cap \pi$:




$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} = t$

$x = t-1$
$y = 2t+2$
$z = 2t+3$.

$t-1-2(2t+2)+2t+3+2=0$.

$t-1-4t-4+2t+5=0$.

$-t=0 \Rightarrow \boxed{t=0} \Rightarrow \boxed{x=-1}; \boxed{y=2}; \boxed{z=3}$

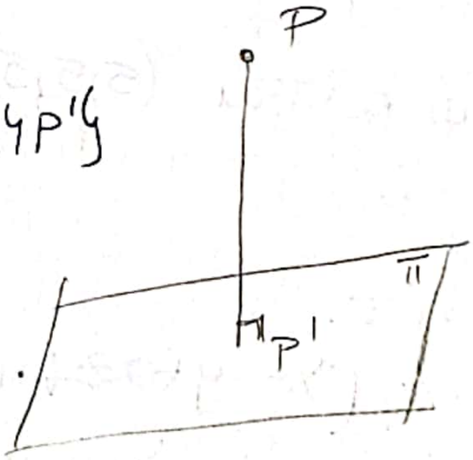
$d \cap \pi = \{(-1,2,3)\}$.

e) $P(5,5,5)$

$pr_\pi(P) = ?$

Fie $pr_\pi(P) = P'$, $PP' \cap pr_\pi(P) = \{P'\}$

$(1,-2,1)$




$PP': \frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-5}{1} = s$.

$\pi: x-2y+z+2=0$.

$x = s+5$
$y = -2s+5$.
$z = s+5$.

$s+5-2(-2s+5)+s+5+2=0$

$2s+12+4s-10=0.$

$6s+2=0 \Rightarrow s=-\frac{1}{3}$

$\boxed{x=\frac{14}{3}}$; $\boxed{y=\frac{2}{3}+5=\frac{17}{3}}$, $\boxed{z=\frac{14}{3}.}$

$P'\left(\frac{14}{3}, \frac{17}{3}, \frac{14}{3}\right)$

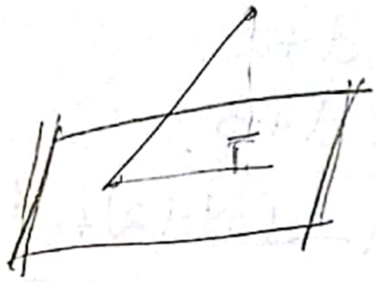
c) $pr_{\pi}(d)$ și $pr_d(\pi)$.

$pr_{\pi}(d): P'\left(\frac{14}{3}, \frac{17}{3}, \frac{14}{3}\right)$

Iau un punct $M \in d \Rightarrow$ fac

$pr_{\pi}(M)=M' \Rightarrow pr_{\pi}(d)=M'P'.$

$pr_d(\pi)=d$ cum $d \cap \pi \neq \emptyset$.





dacă $d \perp \pi$ atunci $pr_d(\pi)$ = punctul de intersecție al planului $\pi$ cu dreapta $d$

d) sfera de centru $(5,5,5)$ (punctul P) și raza (distanța de la P la plan) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2) $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

$f(x,y,z)=\frac{1}{3}(x-2y+2z+4, 2x-y-2z+1, 2x+2y+z)$

a) $f$ aplicație afină $\Leftrightarrow f=Ax+C$.

$$f=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fie $g: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ urma ei

$$g=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) $f$ izomorfism afin $\Leftrightarrow \det A \neq 1 (A)$

c) $f(d) \parallel d \Leftrightarrow$ există o valoare proprie reală

$(\deg p_A = 3 \Rightarrow$ are o rădăcină reală $\to$ ok!)

d) $f(\pi) \parallel \pi$

<u>OBS</u> nu merge să zicem că nu are 2 valori proprii!

Verific dacă $A \in SO(3)$ : $A^tA = I_n$, $\det A = 1$.

$\Rightarrow A$ este o rotație în jurul unei drepte $\Rightarrow$ invariază un plan $\Rightarrow$ ged.

(3) $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ cu $[z : w : 1]$.

$w^2 = z^3 + 2$.

a) $\overline{\mathcal{E}} : w^2 \varepsilon = z^3 + 2\varepsilon^3$.

$\varepsilon = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow [0 : 1 : 0]$ punctul de la infinit

! Pentru a afla punctul de la infinit omogenizăm adăugăm o variabilă nouă și apoi fac acea variabilă 0.

b) $s([z : w : \varepsilon]) = [z : -w : \varepsilon]$.

<u>OBS</u> Pentru a demonstra că este un izomorfism proiectiv arăt întâi că este o aplicație liniară

Aplicația $s : P^2\mathbb{C} \to P^2\mathbb{C}$ este o proiectivitate

$s([z : w : \varepsilon]) = [z : -w : \varepsilon]$ se observă că provine din aplicația : înmulțirea cu matricea

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$g(z, w, \varepsilon) = A \begin{pmatrix} z \\ w \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ deci este o aplicație liniară

Simvariată $\overline{\mathcal{E}}$ deoarece dacă îl înlocuiesc pe $w$ cu $-w$ în ecuația lui $\overline{\mathcal{E}}$ ($z$, $\varepsilon$ rămân neschimbate) obțin același lucru.

c) $A = [-1 : 1 : 1] \in \overline{\mathcal{E}}$

$AS(A) \cap \overline{\mathcal{E}} = \{A, S(A), \Omega\}$.

$\left.\begin{array}{l} A = [-1 : 1 : 1] \\ S(A) = [-1 : -1 : 1] \end{array}\right\} \Rightarrow$ ecuația lui $AS(A)$: $z + \varepsilon = 0$.

$AS(A) \cap \overline{\mathcal{E}}$: $\begin{cases} z = -\varepsilon \\ w^2\varepsilon = z^3 + 2\varepsilon^3 \end{cases}$

$\Rightarrow w^2\varepsilon = -\varepsilon^3 + 2\varepsilon^3 = \varepsilon^3$

$\Rightarrow w^2 = \varepsilon^2 = z^2 \Rightarrow$ vom avea 2 soluții:

I: $z = w \Rightarrow [\lambda : \lambda : -\lambda] = [1 : 1 : -1] = S(A)$

II: $z = -w \Rightarrow [-\lambda : \lambda : \lambda] = [-1 : 1 : 1] = A$.

d) $P = [a : b : 1]$.

$\Omega = [0 : 1 : 0]$.

$P\Omega \cap d_\infty = \{\Omega\}$

de la infinit ~~dreapta~~ de la infinit
punctul

1/

$P_{\mathcal{R}}: z - a\varepsilon = 0.$

$(P_{\mathcal{R}} \cap \overline{\mathcal{E}}) \setminus d_{\infty} = P_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{E}$
(în plan)

Transpunem practic problema în plan.

$$\begin{cases} z = a\varepsilon \\ w^2 = z^3 + 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{în plan}} a \quad \Rightarrow w^2 = a^3 + 2$$

$\mathcal{E}''$

b este una din rădăcinile ec și a doua este $-b$.

$\Rightarrow$ ged.
$\alpha$

(4) $d_1: \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$d_2: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

$d_3: \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z.$

Scrieți ecuația unei cuadrice care conține $d_1, d_2, d_3$. Unicitate.

1. Facem ec planului care le conține pe $d_1$ și $d_2$.

$\operatorname{dir}(d_1) \subset \operatorname{dir}(\overline{u}) \Rightarrow \alpha - \beta + \gamma = 0$
$\operatorname{dir}(d_2) \subset \operatorname{dir}(\overline{u}) \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \Rightarrow \alpha + \gamma = 0.$

Fie $\pi_1: \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$

$\Rightarrow \gamma = -\alpha. \Rightarrow \beta = 0.$

$\Rightarrow \pi_1: x - z = 0$.

Facem ecuația unui plan care o conține pe $d_3$.

$dir(d_3) = (3, 2, 1)$

$P \in d_3$, $P = (0, 0, 0)$

Fie $\pi_2: ax + by + cz = 0$. $\Rightarrow \langle (3,2,1), (a,b,c) \rangle = 0$.

$\Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \Rightarrow a = 1; b = -1; c = -1$

$\pi_2: x - y - z = 0$

$\Rightarrow$ ecuația cuadricii este:

$(\pi_1 \cdot \pi_2) = (x - y - z)(x - z) = 0$.

(nu ~~iese~~ e așa)

Nu este unica.