Functii implicite

Graficul unei functii reale $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este multimea punctelor (x, y) astfel incat $y = f(x)$; vizual graficul unei functii este o curba cu proprietatea ca fiecare dreapta paralela cu Oy printr-un punct al domeniului taie aceasta curba cel mult o data. Exista si alte curbe pe care le putem desena in plan care sunt taiate in mai multe puncte de drepte paralele cu axa Oy. O astfel de curba este cercul de raza 1 centrat la origine, adica curba de ecuatie

$$x^2 + y^2 = 1$$

Daca eliminam o parte din cerc (de exemplu, partea inferioara) curba ramasa este graficul unei functii. La fel, daca eliminam partea superioara a cercului curba ramasa este graficul unei functii. Cele doua functii pot fi determinate, si anume sunt

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1 \quad y(x) = -\sqrt{1 - x^2},\ -1 \leq x \leq 1.$$

De exemplu daca ceea ce ne intereseaza este o functie definita de ecuatia $x^2 + y^2 = 1$ care trebuie sa satisfaca conditia $y(0) = 1$ functia respectiva va fi

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1.$$

In general pentru o curba arbitrara de ecuatie $F(x, y) = 0$, y nu poate fi determinat explicit in functie de x pentru ca nu putem rezolva ecuatia. Vom vedea insa ca in astfel de cazuri desi nu putem determina functia definita de o astfel de ecuatie putem afla suficiente informatii despre aceasta functie. De exemplu vom putea determina derivatele ei, fapt ce permite aproximarea functiei folosind polinomul Taylor.

Fie $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o functie definita pe multimea deschisa $D \subset \mathbb{R}^2$. Fie $(x_0, y_0) \in D$ astfel incat $F(x_0, y_0) = 0$. Se spune ca ecuatia $F(x, y) = 0$ defineste implicit pe y ca functie de x in jurul lui (x_0, y_0) daca exista $U \in V(x_0)$[1], $V \in V(y_0)$ astfel incat pentru orice $x \in U$ sa existe un unic $y \in V$ cu proprietatea $F(x, y) = 0$; definind $f(x)$ ca fiind unicul $y \in V$ pentru care $F(x, y) = 0$, obtinem o functie $f : U \to V$. Atunci $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in U$. Se spune ca functia f este definita implicit in jurul punctului (x_0, y_0) de ecuatia $F(x, y) = 0$.

Revenind la exemplul nostru ecuatia $y^2 + x^2 = 1$ nu defineste implicit pe y ca functie de x in jurul lui $(1, 0)$ deoarece pentru orice vecinatate $U \in V(1)$ si orice vecinatate $V \in V(0)$ exista puncte $x \in U$ pentru care multimea $\{y \in V :\ x^2 + y^2 = 1\}$ contine exact doua elemente.

[1] pentru $x_0 \in \mathbb{R}^n$ notam cu $V(x_0)$ multimea vecinatatilor lui x_0

Teorema. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o multime deschisa, $F : D \to \mathbb{R}$ si $(x_0, y_0) \in D$ astfel incat

(i) F este de clasa C^1;

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$;

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Atunci exista o vecinatate deschisa U_0 a lui x_0, exista V_0 o vecinatate deschisa a lui y_0 si o singura functie $f : U_0 \to V_0$ astfel incat

(1) $f(x_0) = y_0$ si $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in U_0$

(2) f este de clasa C^1 si

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

pentru orice $x \in U_0$.

(3) daca F este de clasa C^k atunci f este de clasa C^k.

Demonstratie. Sa presupunem ca $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Deoarece F este de clasa C^1 rezulta ca $\frac{\partial F}{\partial y}$ este continua si atunci exista $U \in V(x_0)$ si $V \in V(y_0)$, $U \times V \subset D$ astfel incat

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0 \text{ pentru orice } (x, y) \in U \times V.$$

In consecinta, functia

$$y \to F(x_0, y)$$

este strict crescatoare. Alegem $\alpha, \beta \in V$, $\alpha < y_0 < \beta$ astfel incat $[\alpha, \beta] \subset V$ si notam $V_0 = (\alpha, \beta)$. Atunci $F(x_0, \alpha) < 0$ si $F(x_0, \beta) > 0$ Deoarece, pentru orice $y \in V$, functia $x \mapsto F(x, y)$ este continua in x_0, exista $U_0 \subset U$ o vecinatate deschisa a lui x_0 astfel incat $F(x, \alpha) < 0$ si $F(x, \beta) > 0$ pentru orice $x \in U_0$. Cum pentru orice $x \in U_0$ functia

$$y \to F(x, y)$$

este strict crescatoare, continua si $F(x, \alpha) < 0$ si $F(x, \beta) > 0$ rezulta ca exista un unic $y \in (\alpha, \beta)$ astfel incat $F(x, y) = 0$. Deoarece $x \in U_0$ a fost ales arbitrar rezulta ca pentru orice $x \in U_0$ exista un unic $y = f(x) \in V_0$ astfel incat $F(x, f(x)) = 0$. Pentru $x = x_0$ avem $F(x_0, y_0) = 0$ si cum y_0 este unicul punct din V_0 cu aceasta proprietate, rezulta ca $f(x_0) = y_0$. Cu aceasta punctul (1) este demonstrat.

Din demonstratia punctului 1) rezulta ca pentru orice vecinatate V a lui y_0 exista o vecinatate U a lui x_0 astfel incat $f(U) \subset V$ si deci f este continua in x_0. Fie $a \in U_0$

arbitrar si $b = f(a) \in V_0$. Functia $F(x, y)$ verifica ipotezele teoremei relativ la (a, b) in loc de (x_0, y_0) si deci exista vecinatati $U_1 \subset U_0$ si $V_1 \subset V_0$ ale lui a respectiv b si o functie $g : U_1 \to V_1$ continua in a astfel incat $g(a) = b$ si $F(x, g(x)) = 0$ pentru orice $x \in U_1$. De asemenea, $f(a) = b$ si $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in U_1 \subset U_0$. Din unicitatea lui g rezulta ca $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in U_1$ si deci functia f este continua in a, Cum punctul $a \in U_0$ a fost ales arbitrar, rezulta ca functia f este continua pe U_0.

Lema. Fie $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasa C^1 si $a = (x_0, y_0), b = (x_1, y_1) \in D$ astfel incat segmentul $[a, b] = \{ta + (1-t)b : 0 \leq t \leq 1\} \subset D$. Atunci exista $\xi \in [a, b]$ astfel incat

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi)(x_1 - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(y_1 - y_0)$$

Demonstratie. Fie $c : [0, 1] \to [a, b]$, $c(t) = a(1-t) + bt = (x_0(1-t) + y_0 t, x_1(1-t) + y_1 t)$. Atunci $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g = F \circ c$

$$g(t) = F(x_0(1-t) + y_0 t, x_1(1-t) + y_1 t)$$

satisface conditiile Teoremei cresterilor finite a lui Lagrange si deci exista $\theta \in (0, 1)$ astfel incat

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi)(y_0 - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(y_1 - x_1).$$

unde $\xi = c(\theta)$.

Revenim la demonstratia teoremei pentru a arata ca f este de clasa C^1.

Fie $x \in U_0$. Pentru t suficient de mic $x + t \in U_0$ si deci

$$F(x + t, f(x + t)) - F(x, f(x)) = 0$$

Din lema de mai sus, rezulta ca exista (ξ, η) pe segmentul de dreapta determinat de punctele $(x, x + t)$ si $(f(x), f(x + t)$ astfel incat

$$0 = F(x + t, f(x + t)) - F(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta) \cdot t + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta) \cdot (f(x + t) - f(x))$$

adica,

$$\frac{f(x + t) - f(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta)}$$

Deoarece $\xi \to x$ daca $t \to 0$ si f este continua rezulta ca $f(x+t) \to f(x)$ si deci $\eta \to f(x)$ daca $t \to 0$. Cum derivatele partiale ale lui F sunt continue rezulta ca exista

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Asadar, f este derivabila in orice punct x din U_0 si

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Deoarece toate functiile care apar in membrul drept al relatiei de mai sus sunt continue rezulta ca derivata f' este continua. Punctul (3) al teoremei se demonstreaza prin inductie dupa k.

Exercitiu. Sa se arate ca ecuatia $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$ defineste implicit functia $y = y(x)$ intr-o vecinatate a lui $(1, 1)$ care satisface conditia $y(1) = 1$, si sa se calculeze $y'(1)$.

Solutie. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2.$$

Evident,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2y + 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2x + 2y + 1$$

Avem

(i) F este de clasa C^1;

(ii) $F(1, 1) = 0$;

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) \neq 0$

Asadar sunt indeplinite conditiile teoremei anterioare si deci exista o vecinatate deschisa U a lui 1, exista V o vecinatate deschisa a lui 1 si o unica functie $y : U \to V$ astfel incat

(1) $y(1) = 1$

(2) $x^2 - 2xy(x) + y(x)^2 + x + y(x) - 2 = 0$ pentru orice $x \in U$

(3) y este de clasa C^1 si

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$$

pentru orice $x \in U$.

(4) daca F este de clasa C^k atunci functiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt de clasa C^k.

Prin urmare,

$$y'(x) = -\frac{2x - 2y(x) + 1}{2y(x) - 2x + 1}$$

si, deci

$$y'(1) = -\frac{2 - 2y(1) + 1}{2y(1) - 2 + 1} = -1.$$

Teorema anterioara, se generalizeaza astfel.

Teorema 1. Fie $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o multime deschisa, $F : D \to \mathbb{R}$ si un punct $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0) \in D$ astfel incat

(i) F este de clasa C^1;

(ii) $F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$;

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0) \neq 0$

Atunci exista o vecinatate deschisa U a lui $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, exista V o vecinatate deschisa a lui y^0 si o unica functie $f : U \to V$ astfel incat

(1) $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = y^0$

(2) $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$ pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$

(3) f este de clasa C^1 si

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))}$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ si orice $i = 1, 2, \ldots, n$.

(4) Daca F este de clasa C^k atunci f este de clasa C^k

Exemplu. Sa se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$ si $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$ pentru functia $z = z(x, y)$ definita implicit de ecuatia $x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$ si care satisface conditia $z(1, 0) = 0$.

Fie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1.$$

Evident F este de clasa C^1 si

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos y - z \sin x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -x \sin y + \cos z, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -y \sin z + \cos x$$

Asadar

(i) F este de clasa C^1;

(ii) $F(1,0,0) = 0$;

(iii) $\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,0) \neq 0$

Prin urmare, sunt indeplinite conditiile teoremei anterioare si deci exista o vecinatate deschisa U a lui $(1,0)$, exista V o vecinatate deschisa a lui 0 si o unica functie $z : U \to V$ astfel incat

(1) $z(1,0) = 0$

(2) $x\cos y + y\cos z(x,y) + z(x,y)\cos x - 1 = 0$ pentru orice $x \in U$

(3) z este de clasa C^1 si

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{\cos y - z(x,y)\sin x}{-y\sin z(x,y) + \cos x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{-x\sin y + \cos z(x,y)}{-y\sin z(x,y) + \cos x}.$$

pentru orice $(x,y) \in U$.

Tinand cont ca $z(1,0) = 0$, rezulta ca

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{1}{\cos 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = -\frac{1}{\cos 1}.$$

Teorema 2. Fie $D \subset \mathbb{R}^{m+n}$ o multime deschisa, $(x_0, y_0) \in D$ unde $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots x_0^m)$ si $y_0 = (y_0^1, y_0^2, \ldots y_0^n)$ si $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) : D \to \mathbb{R}^n$ o functie vectoriala astfel incat

(i) functiile F_i sunt de clasa C^1;

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$;

(iii) $\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_n)}(x_0,y_0) \neq 0$

Atunci exista o vecinatate deschisa U_0 a lui x_0, exista V_0 o vecinatate deschisa a lui y_0 si o unica functie $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : U_0 \to V_0$ astfel incat

(1) $f(x_0) = y_0$ si $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in U_0$

(2) functiile f_i sunt de clasa C^1 si

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{D(x_i,y_2,\ldots,y_n)}}{\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_n)}}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = -\frac{\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{D(y_1,\ldots,y_{n-1},x_i)}}{\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_n)}}.$$

pentru orice $x \in U_0$.

(2) Daca F_i sunt de clasa C^k atunci functiile f_i sunt de clasa C^k.

Teorema se demonstreaza prin inductie dupa n. Stim ca teorema este adevarata pentru $n = 1$. Pentru a intelege mai usor cum decurge demonstratia prin inductie vom arata cum putem demonstra teorema pentru $m = n = 2$. Vom demonstra urmatoarele:

Propozitie 3. Fie $D \subset \mathbb{R}^{2+2}$ o multime deschisa, $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in D$ si $F, G : D \to \mathbb{R}^2$ astfel incat

(i) functiile F si G sunt de clasa C^1;

(ii) $F(x_0, y_0, z_0, w_0) = 0$ si $G(x_0, y_0, z_0, w_0) = 0$

(iii) $\frac{D(F,G)}{D(z,w)}(x_0, y_0, z_0, w_0) \neq 0$

Atunci exista o vecinatate deschisa U_0 a lui (x_0, y_0), exista V_0 o vecinatate deschisa a lui (z_0, w_0), si o unica functie vectoriala $(f, g) : U_0 \to V_0$, cu proprietatile

(1) $f(x_0, y_0) = z_0$, $g(x_0, y_0) = w_0$ si

$$F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0, \quad G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \;\; \forall (x, y) \in U$$

(2) functiile f si g sunt de clasa C^1 si

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,w)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(y,w)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}$$

(2) Daca F si G sunt de clasa C^k atunci functiile f si g sunt de clasa C^k.

Practic trebuie sa aratam ca sistemul

$$\begin{cases} F(x, y, z, w) = 0 \\ G(x, y, z, w) = 0 \end{cases}$$

poate fi rezolvat in raport cu x si y intr-o vecinatate a punctului (x_0, y_0, z_0, w_0). Deoarece

$$\frac{D(F, G)}{D(z, w)}(x_0, y_0, z_0, w_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, w_0) & \frac{\partial F}{\partial w}(x_0, y_0, z_0, w_0) \\ \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, w_0) & \frac{\partial G}{\partial w}(x_0, y_0, z_0, w_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

rezulta ca

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, w_0) \neq 0 \text{ sau } \frac{\partial F}{\partial w}(x_0, y_0, z_0, w_0) \neq 0$$

Sa presupunem ca
$$\frac{\partial F}{\partial w}(x_0, y_0, z_0, w_0) \neq 0$$
Din Teorema 1, rezulta ca exista o vecinatate deschisa U a lui (x_0, y_0), o vecinatate deschisa Z a lui z_0, o vecinatate deschisa W_0 a lui w_0 si o unica functie

$$\varphi : U \times Z \to W_0 \text{ de clasa } C^1$$

astfel incat $\varphi(x_0, y_0, z_0) = w_0$ si

$$F(x, y, z, \varphi(x, y, z)) = 0, \quad \forall (x, y, z) \in U \times Z$$

In plus
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, \varphi(x, y, z))}{\frac{\partial F}{\partial w}(x, y, z, \varphi(x, y, z))} \qquad \forall (x, y, w) \in U \times W$$
Fie $H : U \times Z \to \mathbb{R}$ definita prin

$$H(x, y, z) = G(x, y, z, \varphi(x, y, w))$$

Atunci H este de clasa C^1, $H(x_0, y_0, z_0) = 0$. Cum
$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial w} \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial w}}$$
rezulta ca
$$\frac{\partial H}{\partial w}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$
Atunci exista U_0 o vecinatate deschisa a lui (x_0, y_0), exista Z_0 o vecinatate deschisa a lui z_0 si o unica functie $f : U_0 \to Z_0$ de clasa C^1 astfel incat

$$H(x, y, f(x, y), \varphi(x, y, f(x, y))) = 0 \quad \forall (x, y) \in U_0.$$

Fie $g : U_0 \to W_0$ definita prin

$$g(x, y) = \varphi(x, y, f(x, y))$$

Asadar exista o unica pereche de functii $(f, g) : U_0 \to V_0 := Z_0 \times W_0$ de clasa C^1 astfel incat

$$\begin{cases} F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \\ G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \end{cases} \quad \forall \ (x, y) \in U_0$$

si $f(x_0, y_0) = z_0$ si $g(x_0, y_0) = w_0$. Deorece f si g sunt de clasa C^1 derivand in raport cu x obtinem
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial x}=0$$

si atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,w)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}},\qquad \frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}$$

Derivand acum in raport cu y obtinem

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

si atunci

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{D(F,G)}{D(y,w)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}},\qquad \frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}.$$

Exercitiu. Aratati ca sistemul

$$\begin{cases} u+v-x-y=0 \\ xu+yv-1=0 \end{cases}$$

defineste intr-o vecinatate a punctului $(1,0,1,0)$ functiile implicite $u=u(x,y)$ si $v=v(x,y)$ si calculati , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ si $du(1,0)$.

Solutie. Functiile $F,G:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ definite prin

$$F(x,y,u,v)=u+v-x-y \qquad G(x,y,u,v)=xu+yv-1$$

sunt de clasa C^1 si $F(1,0,1,0)=0$, $G(1,0,1,0)=0$. Cum

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y\end{vmatrix}=y-x \quad \text{rezulta ca} \quad \frac{D(F,G)}{D(u,v)}(1,0,1,0)=-1\neq 0,$$

rezulta ca exista o vecinatate deschisa U a lui $(1,0)$, o vecinatate deschisa V a lui $(1,0)$ si o pereche de functii de clasa C^1 unic determinate $(u,v):U\to V$ si astfel incat

$$\begin{cases} u(x,y)+v(x,y)-x-y=0 \\ xu(x,y)+yv(x,y)-1 \quad =0 \end{cases} \quad \text{pentru orice } (x,y)\in U$$

si $u(1,0)=1$, $v(1,0)=0$. Avem

$$\frac{D(F,G)}{D(x,v)}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ u & y\end{vmatrix}=-y-u,\qquad \frac{D(F,G)}{D(u,x)}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & u\end{vmatrix}=x+u$$

$$\frac{D(F,G)}{D(y,v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ v & y \end{vmatrix} = -y - v, \qquad \frac{D(F,G)}{D(u,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & v \end{vmatrix} = v + x.$$

Deci,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,v)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}} = -\frac{u+y}{y-x}, \text{ adica } \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\frac{u(x,y)+y}{y-x}, \quad \forall\ (x,y) \in U;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(u,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}} = -\frac{x+u}{y-x}, \text{ adica } \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{x+u(x,y)}{y-x}, \quad \forall\ (x,y) \in U;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(y,v)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}} = -\frac{-y-v}{y-x}, \text{ adica } \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{y+v(x,y)}{y-x}, \quad \forall\ (x,y) \in U;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(u,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}} = -\frac{v+x}{y-x}, \text{ adica } \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -\frac{v(x,y)+x}{y-x}, \quad \forall\ (x,y) \in U;$$

In loc sa folosim formulele putem calcula derivatele lui u siu v in raport cu x, repectiv y derivand identitatile.

$$\begin{cases} u(x,y) + v(x,y) - x - y = 0 \\ xu(x,y) + yv(x,y) - 1 \quad = 0 \end{cases} \text{ pentru orice } (x,y) \in U.$$

De exemplu, derivand in raport cu x obtinem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - 1 = 0 \\ u(x,y) + x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases} \text{ pentru orice } (x,y) \in U.$$

de unde obtinem, la fel ca mai sus

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\frac{u(x,y)+y}{y-x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{x+u(x,y)}{y-x}, \text{ pentru orice } (x,y) \in U$$

Prin urmare

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = 2,$$

si deci

$$du(1,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,0)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(1,0)dy = dx + 2dy$$