Elemente de calcul stiintific
Tutoriat 2

Borza Maria - Cristina, Manea Victor

18 Martie 2022

1 Teorie

1.1 Metoda Gauss cu pivotare partiala scalata (MEGPPS)

Algoritm

Fie sistemul $Ax = b$ cu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $x, b \in \mathbb{R}^n$. Se parcurg următorii pași:

(i) La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ se determină **factorul de scalare** al fiecărei linii $i = \overline{k, n}$ (cel mai mare element in modul de pe linia respectivă).

(ii) Se **scalează** elementele de pe coloana pivotului cu factorul de scalare corespunzator liniei repsective.

(iii) Se alege pivotul ca fiind **cel mai mare element in modul** de pe coloana sa.

(iv) Prin permutarea a 2 linii se aduce pe poziția (k, k) elementul găsit la pasul anterior.

(v) Prin transformari elementare elementele de pe coloana pivotului de fac 0.

(vi) Se repetă procedeul până când matricea A devine superior triunghiulară.

Condiții necesare pentru a putea aplica MEGPPS

(i) Matricea A trebuie să fie pătratică.

(ii) Matricea A trebuie să fie inversabilă.

(iii) Matricea A si vectorul b trebuie sa fie compatibili.

Pseudocod

Algorithm 1 MEGPPS

for $k = \overline{1, n-1}$ **do**
  for $i = \overline{k, n}$ **do**
    $s_i \leftarrow \max\limits_{j=\overline{k,n}} |a_{i,j}|$
    $\tilde{a_i} \leftarrow a_{i,k}/s_i$
  end for
  $l \leftarrow \max\limits_{i=\overline{k,n}} |a_i|$
  $A \leftarrow P_{k,l} \cdot A$
  for $i = \overline{k+1, n}$ **do**
    $m \leftarrow a_{i,k}/a_{k,k}$
    $b_i \leftarrow b_i - m \cdot b_k$
    for $j = \overline{k, n}$ **do**
      $a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - m \cdot a_{k,j}$
    end for
  end for
end for

1.2 Metoda Gauss cu pivotare totală (MEGPT)

Algoritm

Fie sistemul $Ax = b$ cu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $x, b \in \mathbb{R}^n$. Se parcurg urmatorii pași:

(i) La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului se determină cel mai mare element in modul dintre elementele situate la dreapta si sub minorul de la pasul respectiv.

(ii) Prin permutarea a 2 linii și a 2 coloane se aduce pe poziția (k, k) elementul găsit la pasul anterior.

(iii) Prin transformări elementare elementele de pe coloana pivotului de fac 0.

(iv) Se repetă procedeul până când matricea A devine superior triunghiulară.

Condiții necesare pentru a putea aplica MEGPT

(i) Matricea A trebuie să fie patratică.

(ii) Matricea A trebuie să fie inversabilă.

(iii) Matricea A si vectorul b trebuie sa fie compatibili.

Pseudocod

Algorithm 2 MEGPT

for $k = \overline{1, n-1}$ **do**
  $a_{l,m} \leftarrow \max_{i,j=\overline{k,n}} |a_{i,j}|$
  $A \leftarrow P_{k,l} \cdot A \cdot P_{k,m}$
  for $i = \overline{k+1, n}$ **do**
    $m \leftarrow a_{i,k}/a_{k,k}$
    $b_i \leftarrow b_i - m \cdot b_k$
    for $j = \overline{k, n}$ **do**
      $a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - m \cdot a_{k,j}$
    end for
  end for
end for

1.3 Metoda Gauss - Jordan

Problema

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se cere sa se determine A^{-1}.

Idee

Fie $X = (x_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel incat $X = A^{-1}$. Atunci $XA = AX = I_n$. Ne uitam la scrierea lui X pe coloane: $X = col[x^{(1)} x^{(2)} ... x^{(n)}]$, unde $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, pentru orice $j \in \overline{1,n}$.

Scrierea matricii I_n pe coloane este $I_n = col[e^{(1)} e^{(2)} ... e^{(n)}]$, unde $e^{(j)} = (\delta_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}}$, pentru orice $j \in \overline{1,n}$.

Algoritm

Se aplica MEG, de n ori simultan, pentru sistemele:

$$Ax^{(k)} = e^{(k)}, \text{ pentru } k \in \overline{1,n}$$

2 Exercitii

Exercitiul 1: Sa se rezolve urmatorul sistem de ecuatii liniare folosind MEGPPS:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Solutie: Se calculeaza mai intai matricile asociate: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Inainte de a aplica algoritmul, se verifica condintiile pentru a putea aplica MEGPPS:

(i) Se poate vedea usor ca A este patratica ($A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

(ii) $detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$, deci A e inversabila.

(iii) Matricea A si vectorul b sunt compatibili ($A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si $b \in \mathbb{R}^3$).

Rezulta de aici ca se poate aplica MEGPPS.

- Pasul $k = 1$:

  $\overline{A}^{(1)} = [A^{(1)} b^{(1)}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$

  Se calculeaza factorul de scalare: $s_i = \max\limits_{j=\overline{1,3}} |a_{i,j}^{(1)}|$, pentru fiecare $i \in \overline{1,3}$.

  - $s_1 = \max\limits_{j\in\overline{1,3}} |a_{1,j}^{(1)}| = \max\{|1|, |1|, |-1|\} = 1.$
  - $s_2 = \max\limits_{j\in\overline{1,3}} |a_{2,j}^{(1)}| = \max\{|1|, |1|, |4|\} = 4.$
  - $s_3 = \max\limits_{j\in\overline{1,3}} |a_{3,j}^{(1)}| = \max\{|2|, |-1|, |2|\} = 2.$

  Se scaleaza elementele de pe coloana 1: $\tilde{a}_{i,1}^{(1)} = a_{i,1}^{(1)}/s_i$, pentru fiecare $i \in \overline{1,3}$.

  - $\tilde{a}_{1,1}^{(1)} = a_{1,1}^{(1)}/s_1 = 1/1 = 1$
  - $\tilde{a}_{2,1}^{(1)} = a_{2,1}^{(1)}/s_2 = 1/4$
  - $\tilde{a}_{3,1}^{(1)} = a_{3,1}^{(1)}/s_3 = 2/2 = 1$

  Se cauta elementul maxim de pe coloana 1: $\max\limits_{i\in\overline{1,3}} |\tilde{a}_{i,1}^{(1)}| = \max\{|1|, |1/4|, |1|\} = 1 = |\tilde{a}_{1,1}^{(1)}|$. Rezulta de aici ca nu este nevoie sa interschimbam liniile lui $\tilde{A}^{(1)}$, deci matrice permutare de la pasul 1 va fi $P^{(1)} = I_3$. Mai exact, are loc relatia:

  $$P^{(1)}\overline{A}^{(1)} = P^{(1)}[A^{(1)} b^{(1)}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) = [\tilde{A}^{(1)}\tilde{b}^{(1)}] = \overline{\tilde{A}}$$

  Se fac 0 elementele de pe coloana pivotului.
  Se face: $E_2 - E_1$:

- $a_{2,1} = a_{2,1} - a_{1,1} = 1 - 1 = 0$
- $a_{2,2} = a_{2,2} - a_{1,2} = 1 - 1 = 0$
- $a_{2,3} = a_{2,3} - a_{1,3} = 4 - (-1) = 5$
- $b_2 = b_2 - b_1 = 2 - 1 = 1$

Se face: $E_3 - 2E_1$:

- $a_{3,1} = a_{3,1} - 2a_{1,1} = 2 - 2 \cdot 1 = 0$
- $a_{3,2} = a_{3,2} - 2a_{1,2} = -1 - 2 \cdot 1 = -3$
- $a_{3,3} = a_{3,3} - 2a_{1,3} = 2 - 2 \cdot (-1) = 4$
- $b_3 = b_3 - b_1 = 3 - 2 \cdot 2 = 1$

Matricea care transforma $\overline{\overline{A}}^{(1)}$ in $\overline{A}^{(2)}$ este $M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mai exact, are loc relatia:

$$M^{(1)}P^{(1)}\overline{A}^{(1)} = M^{(1)}P^{(1)}[A^{(1)}b^{(1)}] = [A^{(2)}b^{(2)}] = \overline{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

- Pasul $k = 2$:

  $\overline{A}^{(2)} = [A^{(2)}b^{(2)}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

  Se calculeaza factorul de scalare: $s_i = \max\limits_{j=\overline{2,3}} |a_{i,j}^{(2)}|$, pentru fiecare $i \in \overline{2,3}$.

  - $s_2 = \max\limits_{j\in\overline{2,3}} |a_{2,j}^{(2)}| = \max\{|0|, |5|\} = 5.$
  - $s_3 = \max\limits_{j\in\overline{2,3}} |a_{3,j}^{(2)}| = \max\{|-3|, |4|\} = 4.$

  Se scaleaza elementele de pe coloana 2: $\tilde{a}_{i,2}^{(2)} = a_{i,2}^{(2)}/s_i$, pentru fiecare $i \in \overline{2,3}$.

  - $\tilde{a}_{2,2}^{(2)} = a_{2,2}^{(2)}/s_2 = 0/5$
  - $\tilde{a}_{3,2}^{(2)} = a_{3,2}^{(2)}/s_3 = -3/4$

  Se cauta elementul maxim de pe coloana 2: $\max\limits_{i\in\overline{2,3}} |\tilde{a}_{i,2}^{(2)}| = \max\{|0|, |-3/4|\} = 3/4 = |\tilde{a}_{3,2}^{(2)}|$. Rezulta de aici ca este nevoie sa interschimbam liniile 2 si 3 ale lui $\tilde{A}^{(2)}$, deci matricea permutare de la pasul 2 va fi $P^{(2)} = P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mai exact, are loc relatia:

$$P^{(2)}\overline{A}^{(2)} = P^{(2)}[A^{(2)}b^{(2)}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right) = [\tilde{A}^{(2)}\tilde{b}^{(2)}] = \overline{\overline{A}}^{(2)} = \overline{A}^{(3)}$$

Matricea obtinuta este superior triunghiulara, deci matricea de transformare de la pasul 2 va fi $M^{(2)} = I_3$. Se obtine in cele din urma relatia:

$$M^{(2)}P^{(2)}M^{(1)}P^{(1)}[Ab] = [U\tilde{b}]$$

Tot ce mai ramane de facut este sa se rezolve sistemul rezultat prin metoda substitutiei descendente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 5x_3 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 19/15 \\ x_2 = -1/15 \\ x_3 = 1/5 \end{cases}$$

Exercitiul 2: Sa se rezolve urmatorul sistem de ecuatii liniare folosind MEGPT:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Solutie: Se calculeaza mai intai matricile asociate: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Inainte de a aplica algoritmul, se verifica condintiile pentru a putea aplica MEGPT:

(i) Se poate vedea usor ca A este patratica ($A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

(ii) $detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, deci A e inversabila.

(iii) Matricea A si vectorul b sunt compatibili ($A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si $b \in \mathbb{R}^3$).

Rezulta de aici ca se poate aplica MEGPT.

- Pasul $k = 1$:

  $\overline{A}^{(1)} = [A^{(1)}b^{(1)}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$

  Se calculeaza: $\max\limits_{i,j \in \overline{1,3}} |a_{i,j}^{(1)}| = |a_{2,3}^{(1)}| = 3$. Rezulta de aici ca trebuie interschimbate liniile 1 si 2 si coloanele 1 si 3.

  - $E_1 \Leftrightarrow E_2$: Trebuie inmultit la stanga cu matricea permutare $P^{(1)} = P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $C_1 \Leftrightarrow C_3$: Trebuie inmultit la dreapta cu matricea permutare $Q^{(1)} = P_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Obtinem relatia:

$$[P^{(1)}A^{(1)}Q^{(1)}|P^{(1)}b^{(1)}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) = [\tilde{A}^{(1)}\tilde{b}^{(1)}] = \overline{\overline{A}}^{(1)}$$

Se fac 0 elementele de pe coloana pivotului.
Se face: $E_2 - \frac{1}{3} \cdot E_1$:

- $a_{2,1} = a_{2,1} - \frac{1}{3} \cdot a_{1,1} = 1 - 1 = 0$
- $a_{2,2} = a_{2,2} - \frac{1}{3} \cdot a_{1,2} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- $a_{2,3} = a_{2,3} - \frac{1}{3} \cdot a_{1,3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
- $b_2 = b_2 - \frac{1}{3} \cdot b_1 = 0 - 1 = -1$

Se face: $E_3 - \frac{1}{3} \cdot E_1$:

- $a_{3,1} = a_{3,1} - \frac{1}{3} \cdot a_{1,1} = 1 - 1 = 0$
- $a_{3,2} = a_{3,2} - \frac{1}{3} \cdot a_{1,2} = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$
- $a_{3,3} = a_{3,3} - \frac{1}{3} \cdot a_{1,3} = -3 - \frac{2}{3} = -\frac{11}{3}$
- $b_3 = b_3 - b_1 = 3 - 1 = 2$

Matricea care transforma $\overline{\overline{A}}^{(1)}$ in $\overline{A}^{(2)}$ este $M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mai exact, are loc relatia:

$$M^{(1)}P^{(1)}[A^{(1)}Q^{(1)}|b^{(1)}] = [A^{(2)}|b^{(2)}] = \overline{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \end{array}\right)$$

- Pasul $k = 2$:
  $\overline{A}^{(2)} = [A^{(2)}b^{(2)}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{11}{3} & 2 \end{array}\right)$

  Se calculeaza: $\max\limits_{i,j \in \overline{2,3}} |a_{i,j}^{(2)}| = |a_{3,3}^{(2)}| = \frac{11}{3}$. Rezulta de aici ca trebuie interschimbate liniile 2 si 3 si coloanele 2 si 3.

  - $E_2 \Leftrightarrow E_3$: Trebuie inmultit la stanga cu matricea permutare $P^{(2)} = P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  - $C_2 \Leftrightarrow C_3$: Trebuie inmultit la dreapta cu matricea permutare $Q^{(2)} = P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Obtinem relatia:

$$[P^{(2)}A^{(2)}Q^{(2)}|P^{(2)}b^{(2)}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 2 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right) = [\tilde{A}^{(2)}\tilde{b}^{(2)}] = \widetilde{\overline{A}}^{(2)}$$

Se fac 0 elementele de pe coloana pivotului.
Se face: $E_3 + \frac{4}{11} \cdot E_2$:

- $a_{3,2} = a_{3,2} + \frac{4}{11} \cdot a_{2,2} = 0$
- $a_{3,3} = a_{3,3} + \frac{4}{11} \cdot a_{2,3} = \frac{1}{3} - \frac{20}{33} = -\frac{9}{33}$
- $b_2 = b_2 + \frac{4}{11} \cdot b_1 = -1 + \frac{8}{11} = -\frac{3}{11}$

Matricea care transforma $\widetilde{\overline{A}}^{(2)}$ in $\overline{A}^{(3)}$ este $M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{11} & 1 \end{pmatrix}$. Mai exact, are loc relatia:

$$M^{(2)}P^{(2)}[A^{(2)}Q^{(2)}b^{(2)}] = [A^{(3)}b^{(3)}] = \overline{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{33} & -\frac{3}{11} \end{array}\right)$$

Matricea obtinuta este superior triunghiulara. Tot ce mai ramane de facut este sa se rezolve sistemul rezultat prin metoda substitutiei descendente:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ -\dfrac{11}{3}x_2 - \dfrac{5}{3}x_3 = 2 \\ -\dfrac{9}{33}x_3 = -\dfrac{3}{11} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Exercitiul 3: Sa se rezolve determine inversa urmatoarei matrici folosind metoda Gauss - Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solutie: Vom folosi metda Gauss Jordan cu MEGFP.

- Pasul k = 1:

  Construim matricea $\overline{A}^{(1)} = [A^{(1)}I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

$a_{1,1} = 1 \neq 0$, deci putem aplica MEGFP.

Facem $E_2 - 2 \cdot E_1$ si $E_3 - 3 \cdot E_1$. Obtinem $\overline{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

- Pasul k = 2:

  Avem matricea $\overline{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

  $a_{2,2} = -3 \neq 0$, deci putem aplica MEGFP.

  Facem $E_3 - \frac{5}{3} \cdot E_2$. Obtinem $\overline{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$

Am obtinut astfel 3 sisteme liniare superior triunghiulare:

$$\left\{\begin{array}{ccc|c|c} y_1 + 2y_2 & = & 1 & 0 & 0 \\ -3y_2 - y_3 & = & -2 & 1 & 0 \\ \frac{8}{3}y_3 & = & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right.$$

Sistemul 1 da coloana 1 a lui A^{-1}.

$$\begin{cases} x_{1,1} + 2x_{2,1} = 1 \\ -3x_{2,1} - x_{3,1} = -2 \\ \dfrac{8}{3}x_{3,1} = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{1,1} = -\dfrac{1}{4} \\ x_{2,1} = \dfrac{5}{8} \\ x_{3,1} = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Sistemul 2 da coloana 2 a lui A^{-1}.

$$\begin{cases} x_{1,2} + 2x_{2,2} = 0 \\ -3x_{2,2} - x_{3,2} = 1 \\ \dfrac{8}{3}x_{3,2} = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{1}{4} \\ x_{2,2} = -\dfrac{1}{8} \\ x_{3,2} = -\dfrac{5}{8} \end{cases}$$

Sistemul 3 da coloana 3 a lui A^{-1}.

$$\begin{cases} x_{1,3} + 2x_{2,3} = 0 \\ -3x_{2,3} - x_{3,3} = 0 \\ \dfrac{8}{3}x_{3,3} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{1,3} = \dfrac{1}{4} \\ x_{2,3} = -\dfrac{1}{8} \\ x_{3,3} = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Am obtinut in cele din urma:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$