Seminar geometrie 7

def Fie V/K sp vectorial, $f\in End_K(V)$, $\lambda\in K$
Spunem că λ este valoare proprie a lui f dacă $\exists\, x\in V\setminus\{0_V\}$ a.î. $f(x)=\lambda x$

$Spec(f)=\{\lambda\in K \mid \lambda \text{ val proprie a lui } f\}$

Fie $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ bază în V/K. Pp că K corp comutativ

$B \xrightarrow[A]{f} B$

Fie $x_1,\dots,x_n$ coordonatele lui x în B

$x'_1,\dots,x'_n$ ——//—— $f(x)$ în B

$$\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A-\lambda I_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \quad (x_1,\dots,x_n)\in K^n\setminus\{0\}$$

$\det(A-\lambda I_n)$

OBS $\det(A-\lambda I_n)$ nu depinde de alegerea bazei

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"', "A"] \arrow[d, "C"'] & B \arrow[d, "C"] \\ B' \arrow[r, "f", "A'"'] & B' \end{tikzcd}$$

$A'=C^{-1}AC \quad \det(A'-\lambda I_n)=\det(C^{-1}AC-\lambda(C^{-1}\cdot C))=$
$=\det(C^{-1}AC-C^{-1}(\lambda I_n)C)=\det(C^{-1}(A-\lambda I_n)\det C=$
$=\det(A-\lambda I_n)$

def Fie $\lambda\in Spec(f)$
$V_\lambda=\{x\in V \mid f(x)=\lambda x\}$
$V_\lambda \le_K V \quad n_\lambda=\dim_K V_\lambda$
$m_\lambda=$ ordinul de multiplicitate al lui λ în P_f

Atunci $n_\lambda\le m_\lambda$

f este diagonalizabil $\Leftrightarrow P_f(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_p)^{m_p}$, $\exists\,\lambda_1,\dots,\lambda_p\in K$ şi $m_1,\dots,m_p\in\mathbb{N}^*$ şi $\forall k\in\overline{1,p}$
$n_k=m_k$

Ex: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x)=(x_1-3x_2+x_3,-3x_1+x_2-x_3,x_1-x_2+5x_3)$
Să se determine $Spec(f)$ şi câte o bază în subspaţiile vectorilor proprii.
Este f diagonalizabil? În caz afirmativ, să se determine o bază în care matricea asociată lui f cu forma diagonală şi să se precizeze această matrice.

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\-3&1&-1\\1&-1&5\end{pmatrix} \quad P_f=\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&1\\-3&1-\lambda&-1\\1&-1&5-\lambda\end{vmatrix} \quad B_c\xrightarrow[A]{f}B_c$$

$f(x)=A\cdot x$

$$P_f\overset{L_1+L_2}{=}\begin{vmatrix}-2-\lambda&-2-\lambda&0\\-3&1-\lambda&-1\\1&-1&5-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&0\\-3&1-\lambda&-1\\1&-1&5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$P_f=-(2+\lambda)\begin{vmatrix}1&0&0\\-3&4-\lambda&-1\\-1&&5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$P_f=-(2+\lambda)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}4-\lambda&-1\\-2&5-\lambda\end{vmatrix}$$

$P_f=-(2+\lambda)((4-\lambda)(5-\lambda)-2)$
$P_f=-(2+\lambda)(18-9\lambda+\lambda^2)$
$\lambda_1=-2$
$\lambda_2=3$
$\lambda_3=6$

$Spec\, f=\{-2,3,6\}$

$V_{\lambda_1}=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid f(x)=-2x\}$
$(x_1-3x_2+x_3,-3x_1+x_2-x_3,x_1-x_2+5x_3) = -2(x_1,x_2,x_3)$

$$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=-2x_1\\-3x_1+x_2-x_3=-2x_2\\x_1-x_2+5x_3=-2x_3\end{cases}$$

$3x_1-3x_2+x_3=0$
$-3x_1+3x_2-x_3=0$
$x_1-x_2+x_3=0$
$rg\, M_1=2$
$\dim V_{\lambda_1}=1$

Notăm $x_1=\alpha$

$$\begin{cases}3x_2-x_3=3\alpha\\-x_2+7x_3=-\alpha\end{cases}$$
$$\begin{cases}21x_2-7x_3=21\alpha\\-x_2+7x_3=-\alpha\end{cases}$$
$20x_2=20\alpha$
$x_2=\alpha$
$x_3=\frac{-\alpha+\alpha}{7}\Rightarrow x_3=0$

$V_\lambda=\{(\alpha,\alpha,0)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=<\{(1,1,0)\}>$
$u_1=(1,1,0)$

$V_{\lambda_2}=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid f(x)=3x\}$

$$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=3x_1\\-3x_1+x_2-x_3=3x_2\\x_1-x_2+5x_3=3x_3\end{cases}$$
$$\begin{cases}-2x_1-3x_2+x_3=0\\-3x_1-2x_2-x_3=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$$

$x_1=\alpha$
$rg\, M_2=2$
$\dim V_{\lambda_2}=1$
$-3x_2+x_3=2\alpha$
$-2x_2-x_3=3\alpha$
$-5x_2=5\alpha$
$x_2=-\alpha$
$x_3=x_2=-\alpha$

$V_{\lambda_2}=<\{(1,-1,-1)\}>$
$u_2=(1,-1,-1)$

$V_{\lambda_3}=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid f(x)=6x\}$

$$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=6x_1\\-3x_1+x_2-x_3=6x_2\\x_1-x_2+5x_3=6x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5x_1-3x_2+x_3=0\\-3x_1-5x_2+(-x_3)=0\\x_1-x_2-x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

Not $x_1=\alpha$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-5x_2-x_3=3\alpha\\-x_2-x_3=-\alpha\end{cases}$$
$(x_2+x_3=\alpha)$
$-4x_2=4\alpha \quad x_2=-\alpha \quad x_3=2\alpha$