TAFALAN ALEXANDRU

TUTORIAT GEOMETRIE – Nr 6 (SĂPTĂMÂNA 7)

Spații afine euclidiene

1) Definiție (spațiu afin euclidian)

Se numește SPAȚIU AFIN EUCLIDIAN (real) un triplet de forma: $(\mathcal{E}; \mathbb{E}_{/\mathbb{R}}; \varphi)$, unde $\mathcal{E}$ este un spațiu afin peste corpul $\mathbb{R}$ a cărui direcție, $\mathrm{Dir}(\mathcal{E}) = \mathbb{E}$ spațiu vectorial euclidian real, am fixat o structură de spațiu vectorial euclidian, i.e. un PRODUS SCALAR:

$\langle \cdot ; \cdot \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

2) Proprietățile produsului scalar

i) este SIMETRIC

$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, $(\forall)\, u, v \in \mathbb{E}$

ii) este o FORMĂ BILINIARĂ

$\langle \alpha u + \beta v, z \rangle = \alpha \langle u, z \rangle + \beta \langle v, z \rangle$, $(\forall)\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, u, v, z \in \mathbb{E}$

iii) este POZITIV DEFINIT

$\langle u, v \rangle \geq 0$, $(\forall)\, u, v \in \mathbb{E}$

$\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

3) Definiția distanței

Fie $(\mathcal{E}; \mathbb{E}_{/\mathbb{R}}, \varphi)$ spațiu afin euclidian real și fie funcția $\boxed{d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}}$ definită prin $\boxed{d(A,B) \overset{def}{:=} \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}}$.

Ea se numește distanța de la A la B

! $(\mathcal{E}, d)$ formează SPAȚIU METRIC

4) Produsul scalar, distanța în cazul spațiului afin euclidian real canonic.

Fie $(\underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{mulțime de "puncte"}}, \underbrace{\mathbb{R}^n_{/\mathbb{R}}}_{\text{SPAȚIU VECTORIAL EUCLIDIAN cu } \langle\cdot;\cdot\rangle}, \varphi_{can})$ ⟶ STRUCTURA AFINĂ CANONICĂ

Atunci $\langle\cdot;\cdot\rangle : \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3}_{\text{ca spații VECTORIALE !!}} \longrightarrow \mathbb{R}$ se definește:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad (\forall)\ u = u_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + u_n \vec{e}_n$$
$$v = v_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + v_n \vec{e}_n \in \mathbb{R}^3.$$

Iar $\|\cdot\| : \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{CA SP. VECTORIAL}} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\|\vec{u}\| := \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}, \quad (\forall)\ u = u_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + u_n \vec{e}_n$$

⟶ NORMA EUCLIDIANĂ.

Și: $d : \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3}_{\text{CA SPAȚII AFINE (pentru puncte)}} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} A(a_1, \dots, a_n) \\ B(b_1, \dots, b_n) \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$$

5) Definiție (REPER CARTEZIAN ORTONORMAT)

Fie $\mathcal{R}_c = \{O; \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}\}$ reper cartezian.

$\mathcal{R}_c$ se numește ORTONORMAT dacă

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (\forall)\ i,j = \overline{1,n}.$$

6) Definiție (perpendicularitate)

Fie $(\mathcal{E}, E_{/\mathbb{R}}, \varphi)$ spațiu afin euclidian și fie $\mathcal{E}', \mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}$ subspații afine. Spunem că $\mathcal{E}'$ este perpendicular pe $\mathcal{E}''$ (not $\mathcal{E}' \perp \mathcal{E}''$) dacă $dir(\mathcal{E}') \perp dir(\mathcal{E}'')$, i.e oricare ar fi $\vec{v}' \in dir(\mathcal{E}')$ şi $\vec{v}'' \in dir(\mathcal{E}'')$ avem

$\langle \vec{v}' ; \vec{v}'' \rangle = 0$

<u>Obs</u>: Dacă $\mathcal{E}' \perp \mathcal{E}'' \Rightarrow card(\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'') \leq 1$

Exercițiul 1

Fie $(\mathcal{E} = \mathbb{R}^3, \underset{\underset{\mathbb{R}^3_{/\mathbb{R}}, \langle \cdot ; \cdot \rangle_{can}}{\parallel}}{E_{/\mathbb{R}}}, f_{can})$. Fie planul definit parametric prin:

$$\Pi: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda u - 4v \\ y = 1 - 2u + \mu v \\ z = 1 - \mu u + \lambda v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

a). Să se găsească λ şi $\mu \in \mathbb{R}$ a.î. planul să fie ortogonal pe vectorul $\vec{v}(1, 7, 11)$

b) Pentru valorile λ şi μ găsite să se scrie ecuația generală a planului.

<u>Soluție</u>:

a) Planul Π conține punctul $P(-2, 1, 1)$

$\vec{v}(1, 7, 11)$ este ortogonal pe Π, adică trebuie să fie ortogonal pe orice direcție conținută în planul dat. Fie $\overrightarrow{MP}$ un vector arbitrar din Π, unde $M(-2+3\lambda u - 4v; 1 - 2u + \mu v; 1 - \mu u + \lambda v)$

$\overrightarrow{MP} = (3\lambda u - 4v; -2u + \mu v; -\mu u + \lambda v)$

$\hookrightarrow$ direcție arbitrară conținută în plan

$\vec{v} \perp \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \langle \vec{v} ; \overrightarrow{MP} \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\lambda u - 4v - 14u + 7\mu v - 11\mu u + 11\lambda v = 0, \forall u, v \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow u(3\lambda - 14 - 11\mu) + v(-4 + 7\mu + 11\lambda) = 0, \forall u, v$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda - 11\mu - 14 = 0 \\ 11\lambda + 7\mu - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1, \mu = -1$$

b) $\lambda = 1, \mu = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Pi: \begin{cases} x = -2 + 3u - 4v \\ y = 1 - 2u - v \\ z = 1 + u + v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

$$\Pi: \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x+2) - 7(y-1) + (z-1)\cdot(-11) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 2 - 7y + 7 - 11z + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 7y - 11z + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi: x + 7y + 11z - 16 = 0.$$

Exercitiul 2:

Găsiți α și β a.î. dreapta $d: \frac{x}{\alpha} = \frac{y-\beta}{1} = \frac{z}{2}$ să fie conținută în planul $\Pi: x - z = 0$ și să treacă prin $M(1,1,1)$

Soluție:

Fie $\vec{v} = (\alpha, 1, 2)$ vectorul director al lui d (i.e $Dir(d) = Sp_{\mathbb{R}}\{(1,1,1)\}$)

Teorie: În general $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$\vec{n} = (A, B, C)$ se numește vectorul normal la plan / normala la plan și este perpendicular pe vectorii directori ai planului.

La noi $\vec{n} = (1, 0, -1)$

Dreapta d este conținută în plan $\Leftrightarrow$

$\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (\alpha, 1, 2); (1, 0, -1) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\alpha = 2},$

$M \in d \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1-\beta}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(1-\beta) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

2. $rg\begin{pmatrix} \vec{v} \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0$

3. Sist $\begin{cases} d \\ \pi \end{cases}$ are ∞ sol.

7) PERPENDICULARITATE

i) $d_1 : \frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - x_2}{v_2} = \frac{z - x_3}{v_3}$

$d_2 : \frac{x - y_1}{u_1} = \frac{y - y_2}{u_2} = \frac{z - y_3}{u_3}$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \langle \vec{v} ; \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 \cdot u_3 = 0$

ii) $\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ $\quad \vec{n}_{\pi_1} = (A_1, B_1, C_1)$

$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ $\quad \vec{n}_{\pi_2} = (A_2, B_2, C_2)$

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \langle \vec{n}_{\pi_1} ; \vec{n}_{\pi_2} \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

iii) $d_1 \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{v} \times \vec{n}_{\pi_1} = \bar{0}_V$

$\vec{v} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$

rezultatul e un vector

$d_1 \perp \pi_1 \Leftrightarrow \frac{v_1}{A} = \frac{v_2}{B} = \frac{v_3}{C}$.

8) DISTANȚA DE LA UN PUNCT LA UN HIPERPLAN

Fie $(\mathcal{H}): a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$.

$O = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathcal{E}$

$$\Rightarrow dist(O, \mathcal{H}) = \frac{|a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \dots + a_n x_n^0 + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}$$

Exercițiul 3:

Să se scrie ecuația planului care trece prin mijlocul segmentului MN, unde $M(1,-1,2)$, $N(4,-3,1)$, este paralel cu dreapta

$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$ și este perpendicular pe planul $(P): x - 2y - z - 1 = 0$.

Soluție

Fie Q mijlocul segmentului $MN \Rightarrow$

$\Rightarrow Q\left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}; \frac{z_M + z_N}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; -2; \frac{3}{2}\right)$

Fie π planul căutat

$Q \in \pi$

$\pi \parallel d \Rightarrow Dir(d) \subseteq Dir(\pi) \Rightarrow \vec{v} = (2,3,1) \in Dir(\pi)$

$\pi \perp (P) \Rightarrow \vec{n} \in Dir(\pi)$

$\vec{n} = (1,-2,-1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-\frac{5}{2} & y+2 & z-\frac{3}{2} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi: -x+3y-7z+19=0 \quad \blacksquare$$

Exercițiul 4:

Fie $(d): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+12}{-1}$.

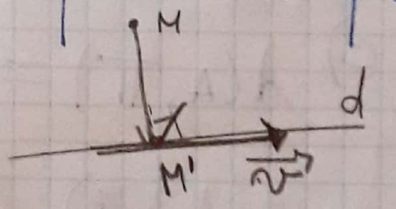
a) Să se afle coordonatele proiecției ortogonale a punctului $M(1,1,1)$ pe dreapta (d).

b) Să se scrie ecuația planului ce este paralel cu (d) și conține punctele $N(1,0,1)$, $P(-1,1,2)$

c) Să se afle distanța de la $A(1,3,7)$ la planul obținut la b)

Soluție

a) Fie $M'(a,b,c)$ proiecția punctului pe dreapta $(d) \Rightarrow M' \in (d) \Rightarrow$



$$\Rightarrow \frac{a-1}{2} = \frac{b+1}{2} = \frac{c+12}{-1}$$

$\vec{v} = (2,2,-1)$ este director al lui d

Cum M' este proiecția ortogonală a lui M pe $d \Rightarrow \overrightarrow{MM'} \perp \vec{v} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{MM'}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \langle (a-1, b-1, c-1); (2,2,-1) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a-2+2b-2-c+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a+2b-c-3=0.$$

Deci: $\begin{cases} 2a+2b-c-3=0 \\ 2a-2-2b-2=0 \\ -b-1-2c-24=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \\ c=-11 \end{cases}$

$\Rightarrow M'(-1,-3,-11)$

b) Fie $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ planul căutat

$d_1 \parallel \Pi \Rightarrow dir(d_1) \subset dir(\Pi) \Rightarrow \vec{v}=(2;2;-1) \in dir(\Pi)$.

$P,N \in \Pi \Rightarrow \vec{NP} \in dir(\Pi)$, $\vec{NP}=(-2,1,1)$

$$\Rightarrow \Pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3(x-1) - y\cdot 0 + 4(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x-3+4z-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Pi: 3x+4z-7=0.$

c) $d(A,\Pi) = \dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 3-7|}{\sqrt{1+9+27}} = \dfrac{|3+12-7|}{\sqrt{47}} \Rightarrow$

$A(1,3,7)$

$\Rightarrow d(A,\Pi) = \dfrac{8}{\sqrt{47}}$.

$\blacksquare$