Examen la analiză matematică[1]
an I, sem. I - seria 10
22.01.2021

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. a) Fie $A = \left\{ \frac{3n^2+1}{n+1} : \ n \in \mathbb{N} \right\} \cup ((-\infty, -6) \cap \mathbb{Q})$ o submulţime a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Determinaţi interiorul, aderenţa, mulţimea punctelor de acumulare şi frontiera mulţimii A. Decideţi dacă mulţimea A este compactă sau conexă. Justificaţi!

b) Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n(n+1)}} + \frac{2}{n\sqrt{n(n+2)}} + \frac{3}{n\sqrt{n(n+3)}} + ... + \frac{n}{n\sqrt{n(n+n)}} \right).$$

Subiectul 2. a) Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!x^{2n}}$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

b) Studiaţi convergenţa şirului $\left(\frac{7^n (n!)^3}{(3n)!} \right)_{n>0}$ şi calculaţi limita sa (în caz că aceasta există).

Subiectul 3. Considerăm funcţia $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + \cos(x-1) + \frac{e^{1-x}-1}{x-1}, & \text{dacă } \ x \in (1, \infty), \\ \frac{\pi}{2}, & \text{dacă } \ x = 1. \end{cases}$$

i) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

ii) Studiaţi uniform continuitatea funcţiei f.

Subiectul 4. Considerăm şirul de funcţii $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n},$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

Subiectul 5. Fie $f_n, g_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii definite prin

$$f_n(x) = \int_0^1 |x^n - t^n| \, dt, \text{pentru orice } x \in [0, 1], \ n \in \mathbb{N} \ \text{ şi}$$

,

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valoreaza 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!**

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{dacă } \; x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x - x^2, & \text{dacă } \; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i) Determinaţi

$$\inf_{x\in[0,1]} f_n(x) \;\text{ şi }\; \sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$

ii) Determinaţi numărul $n \in \mathbb{N}$ pentru care funcţia g_n are cel puţin un punct în care este derivabilă.