

Temă 1-2
ONUTU RADU-CONSTANTIN
Gr. 113

1. (i) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(ii) $X \cap Y = \{7, 8, 9\}$

(iii) $X \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$

(iv) $Y - \{4, 5, 6, 8, 9\} = \{3, 7\}$

Sol.:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	X	Y	Y	X	Y	XY	XY	XY
motiv:	iv	iv	iv	iii	iii	ii	ii	ii

Cf. tabelului $\Rightarrow X = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$

$Y = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

2. $f: P(\{1, 2, 3, 4\}) \rightarrow P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \times P(\{1, 2, 3\})$

$f(X) = (X \cup \{4, 5\}, X \cap \{1, 2, 3\})$

Sol.:

Pt. simplitate voi scrie direct ex.: $\{1, 2\} = 12$

$P(\{1, 2, 3, 4\}) = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 234, 1234\}$

$$f(\emptyset) = (\{4,5\}, \emptyset) \quad f(\{1\}) = (\{1,4,5\}, \{1\})$$

$$A = \{ \{4,5\}, \{1,4,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,4,5\}, \\ \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\} \}$$

$$B = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$$

$$\text{Im}(f) = \overline{(A, B)} \quad A \times B$$

$$f(\{1,2,3\}) = (\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3\}) \quad \Rightarrow f(\{1,2,3\}) = f(\{1,2,3,4,5\})$$

dar $\{1,2,3\} \neq \{1,2,3,4,5\}$

$$f(\{1,2,3,4,5\}) = (\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3\}) \quad \Rightarrow f \text{ este}$$

non-injectivă

$$A \neq \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \Rightarrow \text{Im}(f) \neq \text{codomeniu} \Rightarrow f \text{ este}$$

//

non-surjectivă

$$\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \times \mathcal{P}(\{1,2,3\})$$

$$3.4. \quad M = \{ m \leq 259 \mid m \in \mathbb{N}^* \}; \text{card}(M) = 259$$

$$M_2 = \{ m \leq 259 \mid 2 \mid m, m \in \mathbb{N}^* \}; \text{card}(M_2) = 129$$

$$M_5 = \{ m \leq 259 \mid 5 \mid m, m \in \mathbb{N}^* \}; \text{card}(M_5) = 51$$

$$M_7 = \{ m \leq 259 \mid 7 \mid m, m \in \mathbb{N}^* \}; \text{card}(M_7) = 37$$

$$\text{Trebuie să aflăm: } \text{card}(M) - \text{card}(M_2 \cup M_5 \cup M_7)$$

$$|M_2 \cup M_5 \cup M_7| = |M_2| + |M_5| + |M_7| - |M_2 \cap M_5| - |M_2 \cap M_7| - \\ - |M_5 \cap M_7| + |M_2 \cap M_5 \cap M_7|$$

$$M_2 \cap M_5 \Leftrightarrow M_{10}; \text{card}(M_{10}) = 25 \quad M_2 \cap M_7 \Leftrightarrow M_{14}; \text{card}(M_{14}) = 18$$

$$M_5 \cap M_4 \subsetneq M_{35}; \text{card}(M_{35}) = 7; M_2 \cap M_5 \cap M_4 \subsetneq M_{70};$$

$$|M_2 \cup M_5 \cup M_4| = 12 + 9 + 5 + 3 + 1 - 2 - 5 - 1 - 1 = 14$$

$$|M| - |M_2 \cup M_5 \cup M_4| = 25 - 14 = 11$$

$$5. \quad f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - \sqrt{2})^2 + (y - \frac{1}{4})^2$$

P. că f este non-injectivă \Rightarrow pt. $\forall x, y, u, v \in \mathbb{Z}$ cu

$f(x, y) = f(u, v)$ atunci $x \neq u$ și $y \neq v$

$$(x - \sqrt{2})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = (u - \sqrt{2})^2 + (v - \frac{1}{4})^2$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - \frac{2}{4}y + \frac{1}{16} = u^2 - 2\sqrt{2}u + 2 + v^2 - \frac{2}{4}v + \frac{1}{16}$$

$$x^2 - u^2 + y^2 - v^2 - \frac{2}{4}y + \frac{2}{4}v = 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}u$$

$$= 2\sqrt{2}(x - u) \quad \left| \cdot \frac{1}{x - u} \right. \quad x \neq u$$

$$\frac{x^2 - u^2 + y^2 - v^2 - \frac{2}{4}y + \frac{2}{4}v}{x - u} = 2\sqrt{2}$$

Fals deoarece membrul stâng este un nr. rațional, iar membrul drept este un nr. irrațional.

\Rightarrow pp. făcută este falsă, deci f este injectivă

$$3. \quad \text{Fie } f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - \sqrt{2})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = AB^2, \text{ unde}$$

$$A(x_A, y_A)$$

$$B(\sqrt{2}, \frac{1}{4})$$

Fie $\mathcal{C}(B, BC)$, unde C este al 10-lea cel mai îndepărtat punct de coordonate întregi de centru.

Cf. ex. 5 f este injectivă \Rightarrow

$\Rightarrow \nexists N(x_0, y_0) \ (x_0, y_0 \in \mathbb{Z}, \text{și } x_0 \neq x_1, y_0 \neq y_1) \text{ a. d. :}$

$$AB^2 = DB^2 \Leftrightarrow AB = DB$$

$$CB^2 = DB^2 \Leftrightarrow CB = DB \neq AB$$

\hat{m}_f concluzie, $G(B, BC)$ are exact 10 pt. de coordonate întregi datorită injectivității funcției f .

(Acest caz se poate generaliza pt. un cerc cu exact m pt. de coordonate întregi.)

Tema 4

ONUTU RADU-CONSTANTIN

Ex. 113

16. Eie tabla $\{1, 2\}$

*	1	2
1	1	2
2	2	1

(1)

$$(1 * 1) * 1 = 1 * (1 * 1) \Leftrightarrow 1 * 1 = 1 * 1 \quad A$$

$$(1 * 1) * 2 = 1 * (1 * 2) \Leftrightarrow 1 * 2 = 1 * 2 \quad A$$

$$(1 * 2) * 1 = 1 * (2 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 1 * 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad A$$

$$(2 * 1) * 1 = 2 * (1 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 2 * 1 \quad A$$

$$(1 * 2) * 2 = 1 * (2 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 1 * 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad A$$

$$(2 * 1) * 2 = 2 * (1 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 2 * 2 \quad A$$

$$(2 * 1) * 1 = 2 * (1 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 2 * 1 \quad A$$

$$(2 * 2) * 2 = 2 * (2 * 2) \Leftrightarrow 1 * 2 = 2 * 1 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad A$$

Eie tabla $\{1, 2\}$

*	1	2
1	1	2
2	2	2

(2)

$$(1 * 1) * 1 = 1 * (1 * 1) \Leftrightarrow 1 * 1 = 1 * 1 \quad A$$

$$(1 * 1) * 2 = 1 * (1 * 2) \Leftrightarrow 1 * 2 = 1 * 2 \quad A$$

$$(1 * 2) * 1 = 1 * (2 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 1 * 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad A$$

$$(2 * 1) * 1 = 2 * (1 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 2 * 1 \quad A$$

$$(1 * 2) * 2 = 1 * (2 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 1 * 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad A$$

$$(2 * 1) * 2 = 2 * (1 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 2 * 2 \quad A$$

$$(2 * 1) * 1 = 2 * (1 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 2 * 1 \quad A$$

$$(2 * 2) * 2 = 2 * (2 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 2 * 2 \quad A$$

Este tabela

*	1	2
1	2	1
2	1	1

(3)

$$(1 * 1) * 1 = 1 * (1 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 1 * 2 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad A$$

$$(1 * 1) * 2 = 1 * (1 * 2) \Leftrightarrow 2 * 2 = 1 * 1 \Leftrightarrow 1 = 2 \quad F$$

$(1 * 1) * 2 \neq 1 * (1 * 2) \Rightarrow$ Tabela (3) nu este semigrupa pe $\{1, 2\}$

Este tabela

*	1	2
1	2	2
2	1	1

(4)

$$(1 * 1) * 1 = 1 * (1 * 1) \Leftrightarrow 2 * 1 = 1 * 2 \Leftrightarrow 1 = 2 \quad F$$

$(1 * 1) * 1 \neq 1 * (1 * 1) \Rightarrow$ Tabela (4) nu este semigrupa pe $\{1, 2\}$

In concluzie, doar tabelele (1) si (2) sunt semigrupa pe $\{1, 2\}$

18. Submonozii de ordinul 3 al lui $(\mathbb{Z}_6, +)$ trebuie sa fie parte stabila si sa contina el. neutru 1^n , iar asociativitatea are loc pe multimilei claselor de resturi.

$M_4 = (\{0, 1, 2\}, +)$ - submonoid (parte stabila)

dim ≈ 30

$(\{0, 1, 3\}, +)$ - submonoid (parte stabila)

$(\{0, 1, 4\}, +)$ - submonoid (parte stabila)

$(\{0, 1, 5\}, +)$ - submonoid (parte stabila)

$M_5 = (\{1, 2, 3\}, +)$ - submonoid (parte stabila: $2 + 2 = 2 \in \{1, 2, 3\}$)

dim ≈ 30 $(\{1, 3, 5\}, +)$ - submonoid (parte stabila: $3 + 3 = 3 \in \{1, 3, 5\}$)

$$20. \quad A = \left\{ a \cdot \frac{a}{2b+1} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$$

(A, \cdot) - monoid

$$\text{Fie } \frac{a}{2b+1} \in A, \text{ si } \frac{c}{2d+1} \in A$$

$$\frac{a}{2b+1} \cdot \frac{c}{2d+1} = \frac{ac}{4bd+2b+2d+1} = \frac{(ac)}{2(2bd+b+d)+1} \in A$$

$$ac \in \mathbb{N}$$

$$2bd+b+d \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow A$ e parte stabilă

$$\frac{a}{2b+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A \subset \mathbb{Q}$$

" este asociativă pe \mathbb{Q} \Rightarrow " este asociativă pe A

A admite el. neutru 1 pt. $a=1$ si $b=0$

$\Rightarrow (A, \cdot)$ monoid

$$\text{Fie } x \in A \text{ si } x' \in A \text{ a.t. } x \cdot x' = x' \cdot x = 1$$

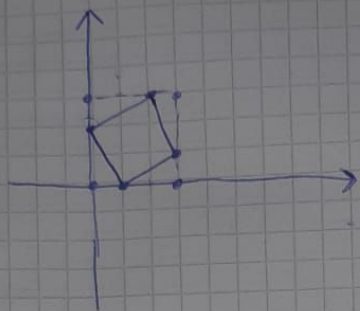
$$\frac{a}{2b+1} \cdot x' = x' \cdot \frac{a}{2b+1} = 1$$

$$x' = \frac{2b+1}{a} \Rightarrow U(A) = \left\{ a \in \mathbb{N}^*, a=2k+1, k \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

Tema 5

ONUTU RADU-CONSTANTIN
Gr. 113

21.



$\text{sim}(F) = \langle P \rangle$, unde P este punctul în răspundere $(0,0)$,
 $(3,0), (3,3), (0,3)$
 Dacă aplic o rotație lui P poți ajunge
 la același punct.

22. $(\mathbb{Z}_m, +)$, $m < 22$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}_{22}, +)$ dacă:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}_m \Rightarrow [a + (-b)] \in \mathbb{Z}_m$$

$$\begin{matrix} a \in \mathbb{Z}_m \\ (-b) \in \mathbb{Z}_m \end{matrix} \Rightarrow [a + (-b)] \in \mathbb{Z}_m \Rightarrow \text{pt. } \forall m < 22 \Rightarrow (\mathbb{Z}_m, +) \text{ subgr. al lui } (\mathbb{Z}_{22}, +)$$

Subgrupurile lui \mathbb{Z}_{22} sunt: $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{22}$

23. (\mathbb{Z}_m, \cdot) $(\mathbb{Z}_m - \{0\}, \cdot)$, $m < 23$ și m m. p.m. \Rightarrow

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}_m - \{0\}$$

$$\begin{matrix} a \in \mathbb{Z}_m - \{0\} \\ m \text{ m. p.m.} \Rightarrow b^{-1} \in \mathbb{Z}_m - \{0\} \end{matrix} \Rightarrow (a \cdot b^{-1}) \in \mathbb{Z}_m - \{0\} \Rightarrow (\mathbb{Z}_m - \{0\}, \cdot) \text{ subgr. al lui } (\mathbb{Z}_{23} - \{0\}, \cdot)$$

Subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{23} - \{0\}$ sunt: $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_{17}, \mathbb{Z}_{19}, \mathbb{Z}_{23}$