Geometrie curs 9 - 29 noiembrie

Aplicații ortogonale. Transformări ortogonale

Def. Fie $(E_i, \langle \cdot,\cdot \rangle_i), i=\overline{1,2}$ spații vectoriale euclidiene reale.

Aplicația liniară $f: E_1 \to E_2$ s.n. aplicație ortogonală $\Leftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1, \forall x, y \in E_1$

Prop. Fie $f: E_1 \to E_2$ aplicație ortogonală

$\Rightarrow$ 1) $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1, \forall x \in E_1$

2) f injectivă

Dem

1) f apl. ortog. $\Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1, \forall x, y \in E_1$

Fie $y = x \Rightarrow \underbrace{\langle f(x), f(x)\rangle_2}_{\|f(x)\|_2^2} = \underbrace{\langle x, x\rangle_1}_{\|x\|_1^2} \Rightarrow$

$\|f(x)\|_2 = \|x\|_1, \forall x \in E_1$

2) f liniară

f injectivă $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_{E_1}\}$

Fie $x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0_{E_2} \Rightarrow \underbrace{\|f(x)\|_2}_{\|x\|_1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0_{E_1}$ ($\langle \cdot,\cdot\rangle_1$ este pozitiv def)

Def $(E, \langle \cdot,\cdot\rangle)$ sp vectorial euclidian real, $f \in \operatorname{End}(E)$

f s.n. transformare ortogonală $\Leftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ $\forall x, y \in E$

Not $O(E)$ = mulțimea transformărilor ortogonale ale lui E.

OBS $f \in O(E) \Leftrightarrow$ matricea asociată lui f în raport cu orice reper ortonormat este ortogonală.

Fie $\underset{A}{\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}} \xrightarrow{C} \underset{A'}{\mathcal{R}' = \{e_1', \dots, e_n'\}}$ repere ortonormate

$A' = C^{-1} A C = C^T A C, \quad C \in O(n)$

$A' \cdot A'^T = (C^T A C)(C^T A C)^T = (C^T A C) C^T A^T (C^T)^T = C^T A \underbrace{C C^T}_{} A^T C =$

$= C^T A A^T C = C^T C = I_n$

$A \in O(n) \Leftrightarrow A' \in O(n)$

OBS $f \in O(E)$ este echivalentă cu o schimbare de reper ortonormat

$\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{A} \mathcal{R}' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ repere orton.

$f(e_i) = e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \forall i = \overline{1,n}$

OBS $(O(E), \circ)$ = grupul transformărilor ortogonale

- $\forall f_1, f_2 \in O(E) \Rightarrow f_1 \circ f_2 \in O(E)$

$\langle f_1 \circ f_2(x), f_1 \circ f_2(y)\rangle = \langle f_1(f_2(x)), f_1(f_2(y))\rangle =$

$= \langle f_2(x), f_2(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

- $\forall f \in O(E) \Rightarrow f^{-1} \in O(E)$

A matr asoc lui $f \Rightarrow A^{-1}$ matr asoc lui f^{-1}

$A \in O(n)$ $\quad A^{-1} = A^T \in O(n)$

Prop $f \in O(E)$, $U \subseteq E$ subspațiu invariant al lui f. (i.e. $f(U) \subseteq U$)

a) $f(U) = U$

b) $U^\perp$ = subspațiu vect invariant al lui f

c) $f/_{U^\perp}: U^\perp \to U^\perp$ este o transf ortogonală

Dem

a) $f: U \to f(U)$ este bij + liniară $\Rightarrow f$ izomorfism de sp vect (f inj)

$\Rightarrow \dim U = \dim f(U)$
dar $f(U) \subseteq U$ $\Big\} \Rightarrow U = f(U)$

b) Dc $U \subseteq E$ sp invar al lui $f \Rightarrow$

$U^\perp \subseteq E$ — // — i.e. $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$

Fie $x \in U^\perp$. Dem că $f(x) \in U^\perp$

$U^\perp = \{y \in E / \langle y, u\rangle = 0, \forall u \in E\}$

Fie $y \in U \Rightarrow f(y) \in$

$\underset{0}{\langle x, y\rangle} = \langle f(x), \underset{U}{f(y)}\rangle \Rightarrow f(x) \in U^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow f(U^\perp) \subset U^\perp \overset{\text{cf a}}{\Longrightarrow} f(U^\perp) = U^\perp$

c) $f/_{U^\perp}: U^\perp \to U^\perp$ transf ortog. (cf b)

Exemple

$(E, \langle \cdot,\cdot\rangle)$ sp vectorial euclidian real

$p, s \in \operatorname{End}(E)$, $p^2 = p$, $s^2 = id_E$, $s = 2p - id_E$, ch $K \neq 2$
(proiecție) (simetrie)

$E' = \operatorname{Ker} p$, $E'' = \operatorname{Im} p$, $E = E' \oplus E''$

Dc. $E'' = E'^\perp$, $E = E' \oplus E'^\perp$ at p s.n proiecție ortogonală și s este simetrie ortogonală ~~xxx~~

$x \in E$, $x = \underset{E'}{x'} + \underset{E''}{x''}$; $p(x') = 0$, $p(x'') = x''$, $s(x') = -x'$, $s(x'') = x''$

E' = subsp propriu coresp valorii proprii -1 a lui s

E'' = — // — 1 a lui s

$\langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x' + x''), p(y' + y'')\rangle =$

$= \langle x'', y''\rangle$

$\langle s(x), s(y)\rangle = \langle s(x' + x''), s(y' + y'')\rangle =$

$= \langle -x' + x'', -y' + y''\rangle = \langle x', y'\rangle + \langle x'', y''\rangle - \langle x', y''\rangle - \langle x'', y'\rangle$

$\langle x, y\rangle = \langle x'+x'', y'+y''\rangle = \langle x', y'\rangle + \langle x'', y''\rangle + 0 + 0$

$p \notin O(E)$

$\langle s(x), s(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \forall x, y \in E \Rightarrow s \in O(E)$

OBS $R' = \{e_1, \dots, e_k\}$ reper ortonormat în E'

$R'' = \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ — // — E'', $\dim E = n$

$R = R' \cup R''$ reper ortonormat în E

$p(e_i) = 0, \forall i = \overline{1,k}$

$p(e_j) = e_j, j = \overline{k+1,n}$ $A_p = \left(\begin{array}{c|c} -I_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k}\end{array}\right) \in O(n)$

Prop $f \in O(E) \Rightarrow$ valorile proprii sunt 1 sau -1

Dem Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $\exists x \in E$ ($x \neq 0_E$) a.î. $f(x) = \lambda x$

$f \in O(E) \Rightarrow \|f(x)\| = \|x\| \Rightarrow \|\lambda x\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| \cdot \|x\| = \|x\|$

$x \neq 0_E \Rightarrow \|x\| \neq 0 \Rightarrow |\lambda| = 1, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Prop Fie $f \in O(E) \Rightarrow$ rădăcinile (complexe nereale) polinomului caracteristic au modulul 1

Dem Fie $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, b \neq 0$

$x + iy$ soluție a sistemului liniar și omogen: (SLO)

$(A - \lambda I_n)(x + iy) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (A - aI_n - ibI_n)(x+iy) = 0 \Rightarrow AX - aX + bY + i(AY - aY - bX) = 0$

$\begin{cases} AX = aX - bY \\ AY = bX + aY \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ax - by \\ f(y) = bx + ay \end{cases}$

OBS $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$ SLO

$\|x\|^2 = \|f(x)\|^2 = \langle ax - by, ax - by\rangle = a^2\|x\|^2 + b^2\|y\|^2 - 2ab\langle x, y\rangle$

$\|y\|^2 = \|f(y)\|^2 = \langle bx + ay, bx + ay\rangle = b^2\|x\|^2 + a^2\|y\|^2 - 2ab\langle x, y\rangle$ $\oplus$

$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x\|^2(a^2 + b^2) + \|y\|^2(a^2 + b^2) \Rightarrow$

$\|x\|^2 + \|y\|^2 = (\|x\|^2 + \|y\|^2)(a^2 + b^2)$

$\|x\|^2 + \|y\|^2 > 0$ $\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

$\Rightarrow |\lambda| = 1$

λ răd complexă nereală a polinomului caracteristic

Teoremă $f \in O(E) \Rightarrow f$ invariază cel puțin un subspațiu vectorial 1-dim sau un subspațiu 2-dim

Dem

Fie $x \in E$ ($x \neq 0_E$) a.î. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) = \lambda x \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\langle \{x\}\rangle$ este subspațiu invariant al lui f

- Polinomul caracteristic nu are răd reale

$\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ răd $|\lambda| = 1$

$f(x) = ax - by$

$f(y) = bx + ay$, unde $x + iy$ este sol nenulă a SLO

$(A - \lambda I_n)(x + iy) = 0$

Dem că $\{x, y\}$ este un sis LI

$\|x\|^2 = a^2\|x\|^2 + b^2\|y\|^2 - 2ab\langle x, y\rangle$

$\|y\|^2 = b^2\|x\|^2 + a^2\|y\|^2 + 2ab\langle x, y\rangle$ $\ominus$

$\|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2(a^2 - b^2) - \|y\|^2(a^2 - b^2) - 4ab\langle x, y\rangle = (\|x\|^2 - \|y\|^2)(a^2 - b^2) - 4ab\langle x, y\rangle$

$(\|x\|^2 - \|y\|^2)\underbrace{(1 - a^2 + b^2)}_{2b^2} + 4ab\langle x, y\rangle = 0 \mid : 2b$

$(\|x\|^2 - \|y\|^2)b + 2a\langle x, y\rangle = 0$

$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle ax - by, bx + ay\rangle = ab\|x\|^2 - ab\|y\|^2 + a^2\langle x, y\rangle - b^2\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle = ab(\|x\|^2 - \|y\|^2) + \langle x, y\rangle(a^2 - b^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\|x\|^2 - \|y\|^2)ab + \langle x, y\rangle\underbrace{(-1 + a^2 - b^2)}_{-2b^2} = 0 \mid : b$

$(\|x\|^2 - \|y\|^2)a - \langle x, y\rangle 2b = 0$

$\begin{cases} (\|x\|^2 - \|y\|^2)b + 2a\langle x, y\rangle = 0 \\ (\|x\|^2 - \|y\|^2)a - 2b\langle x, y\rangle = 0 \end{cases}$

SLO cu necunoscutele $\|x\|^2 - \|y\|^2, \langle x, y\rangle$.

Matricea sistemului este

$M = \begin{pmatrix} b & 2a \\ a & -2b \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$

$\det M = -2b^2 - 2a^2 = -2 \neq 0 \Rightarrow$ sol unică nulă

$\|x\|^2 = \|y\|^2 \Rightarrow \|x\| = \|y\| \neq 0_E$

$\langle x, y\rangle = 0$

$\Rightarrow \{x, y\}$ SLI

$\begin{cases} f(x) = ax - by \\ f(y) = bx + ay \end{cases}$

$W = \langle\{x, y\}\rangle$ subsp vect invariant al lui f

$\forall z \in W \Rightarrow z = \alpha x + \beta y$

$f(z) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha(ax - by) + \beta(bx + ay) = (\alpha a + \beta b)x + (-\alpha b + \beta a)y = \alpha' x + \beta' y \in W$

Clasificarea transformărilor ortogonale

① $\dim E = 1$

$R = \{e\}$, e = versor $f(e) = \lambda e$, $\lambda = \pm 1$

$f \in \{id_E, -id_E\}$

② $\dim E = 2$

$A \in O(2)$ matr asociată lui f în raport cu un reper ortonormat

$A \cdot A^T = I_n$, $\det A = \pm 1$

a) $\det A = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

f rotație de $\measuredangle\varphi$ în spațiul 2-dim E

OBS $P(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \underbrace{\det A}_{1} = 0$

$Tr(A) = 2\cos\varphi$ invariant al schimbării de reper

OBS

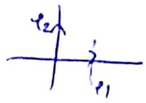
$f = R_\varphi$, $h = R_\theta \Rightarrow f \circ h = R_{\varphi+\theta}$

$A_f \cdot A_h = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) & -\sin(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{pmatrix}$

b) $\det A = -1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

$\exists$ o schimbare de reper $R = \{e_1, e_2\}$ a.î. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi = \pi \Rightarrow f$ este simetrie $\quad f(e_1) = -e_1$, $f(e_2) = e_2$



OBS $\det A = 1$

$\lambda^2 - 2\cos\varphi\,\lambda + 1 = 0$

$\Delta = 4\cos^2\varphi - 4 = 4(\cos^2\varphi - 1) = -4\sin^2\varphi = 4i^2\sin^2\varphi$

dc $\sin\varphi \neq 0$, $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$ $\quad \varphi \in [0, \pi]$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{2\cos\varphi \pm 2i\sin\varphi}{2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Teoremă $\dim E = 2$, $\exists$ un reper ortonormat $R = \{e_1, e_2\}$ a.î.

1) $\det A = 1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $f = R_\varphi$, $TrA = 2\cos\varphi$ invariant

2) $\det A = -1$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad f = s$ (simetrie ortogonală)

Teoremă $f \in O(E)$, $\dim E = 2$

$\Rightarrow f$ se poate scrie ca „o" de cel mult 2 simetrii ortogonale

~~Dem~~ 1) $\det A = 1 \Rightarrow f$ rotație (transformare ortogonală de speță 1)

fie s = simetrie ortogonală ($\det A_s = -1$)

$s' = s \circ f$ simetrie ($\det A_{s'} = -1$)

$s \circ s' = s \circ s \circ f \Rightarrow f = s \circ s'$

2) $\det A = -1 \Rightarrow f = s$ = simetrie (transformare ortogonală de speță 2)

② $f \in O(E)$, $\dim E = 3$

Fie $R = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper ortonormat al lui E și

A matr asoc lui f

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0$

Polinom de grad 3 cu coef reali $\Rightarrow \exists$ cel puțin o răd reală $\lambda = \pm 1$

fie e_1 versor propriu corespunzător valorii proprii λ.

$f(e_1) = \pm e_1$

$\langle\{e_1\}\rangle$ subsp vect 1-dim invariant al lui f

$U = \langle\{e_1\}\rangle^{\perp}$ — // — 2-dim — // —

$f/_U : U \to U$ transf ortogonală, $\dim U = 2$

fie $\tilde{A}$ matr asociată $f/_U$

I $\det A = 1$

a) $\lambda = 1$ $\quad f(e_1) = 1$

$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \tilde{A} \end{array}\right)$

$\det \tilde{A} = 1 \Rightarrow f/_U$ este rotație în 2-planul U

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

b) $\lambda = -1$ $\quad A = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \quad 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \tilde{A} \end{array}\right)$

$\det \tilde{A} = -1 \Rightarrow f/_U \Rightarrow$ simetrie

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

În raport cu $R = \{e_3, e_1, e_2\}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$

f este o rotație în $e_1^{\perp}$ de $\measuredangle\varphi$, cu axa $\langle e_1\rangle$

$x \in \langle\{e_1\}\rangle \Rightarrow f(x) = x$

II. $\det A = -1$

a) $\lambda = 1$ $\quad A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \tilde{A} \end{array}\right)$ $\quad \det \tilde{A} = -1$

$f/_U$ = simetrie $\quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\sin \\ 0 & \sin & \cos \end{pmatrix}$

În rap cu $R = \{e_2, e_1, e_3\}$

b) $\lambda = -1$

$A = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \quad 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \tilde{A} \end{array}\right)$

$\det \tilde{A} = 1 \Rightarrow f/_U$ = rotație

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

În rap cu $R = \{e_1, e_2, e_3\}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

f rotație în $\langle\{e_1\}\rangle^{\perp}$ o simetrie ortog față de $\langle\{e_1\}\rangle^{\perp}$

Scanned by CamScanner

Teoremă $f\in O(E)$, $\dim E=3$

∃ un reper ortonormat a.î.

1) $\det A=1$ $\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$

f = rotație de $\measuredangle\varphi$ în $<\{e_1\}>^\perp$ cu axa $<\{e_1\}>$

$Tr A=1+2\cos\varphi$ = invariant [Axa: $f(x)=x$]

2) $\det A=-1$ $\quad A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$

f = rotație $\measuredangle\varphi$ în $<\{e_1\}>$

$Tr A=-1+2\cos\varphi$

[Axa: $f(x)=-x$]

4) $f\in O(E)$ $\dim E=n\geq 4$

• k = subspații invariante de dimensiune 1

$\begin{cases} s \to \text{coresp valorii proprii } 1\\ k-s \to \text{—//— } -1\end{cases}$

• p = subspații invariante de dim 2 (corespund răd complexe nereale ale pol. caract)

$k+2p=n$

$\{e_1,\dots,e_s\}$ $\quad f(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,s}$

$\{e_{s+1},\dots,e_k\}$ $\quad f(e_j)=-e_j$, $j=\overline{s+1,k}$

$\{e_{k+1},e_{k+2}\}\to\exists\ \lambda_1=a_1+ib_1$ răd complexă a pol caract

$x+iy=e_{k+1}+ie_{k+2}$

$f(x)=ax-by$ $\quad f(e_{k+1})=ae_{k+1}-be_{k+2}$

$f(y)=bx+ay$ $\quad f(e_{k+2})=be_{k+1}+ae_{k+2}$

$a_1^2+b_1^2=1$

$\vdots$

$\{e_{n-1},e_n\}\to\lambda_p=a_p+ib_p$ răd complexă nereală a pol caract

În rap cu:

$R=\{e_1,\dots,e_n\}$

mat asoc lui f este $\begin{pmatrix}\underbrace{1\ \ddots\ 1}_{s}&&&&\\&\underbrace{-1\ \ddots\ -1}_{k-s}&&&\\&&A_1&&\\&&&\ddots&\\&&&&A_p\end{pmatrix}$

$A_j=\begin{pmatrix}\cos\varphi_j&-\sin\varphi_j\\\sin\varphi_j&\cos\varphi_j\end{pmatrix}$, $j=\overline{1,p}$

Aplicație

Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $f(x)=\frac{1}{3}(2x_1+x_2+(-2x_3), -2x_1+2x_2-x_3, x_1+2x_2+2x_3)$

a) f rotație, $f\in O(\mathbb{R}^3)$, de speță 1

b) $\measuredangle$ de rotație

c) Axa de rotație

d) Să se det un reper ortonormat a.î. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$

Sol

$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-2\\-2&-2&-1\\1&2&2\end{pmatrix}$

$A\cdot A^T=I_3$, $\det A=1$

$e_1'=\frac{1}{3}(2,-2,1)$, $e_2'=\frac{1}{3}(1,2,2)$, $e_3'=\frac{1}{3}(-2,-1,2)$

$\{e_1',e_2',e_3'\}$ reper ortonormat $\Rightarrow A\in O(3)$

$\|e_1'\|=\frac{1}{3}\sqrt{9}=1$; $\|e_2'\|=\frac{1}{3}\sqrt{3}=1$; $\|e_3'\|=\frac{1}{3}\sqrt{9}=1$

$<e_i,e_j>=0$, $\forall i\neq j$

$\det A=\frac{1}{3^3}\begin{vmatrix}2&1&-2\\-2&2&-1\\1&2&2\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\begin{vmatrix}0&1&0\\-6&2&3\\-3&2&6\end{vmatrix}$

$=-\frac{1}{27}(-36+9)=1$

$f\in O(\mathbb{R}^3)$ de speță 1 $\Rightarrow$ rotație

$Tr A=\frac{1}{3}\cdot 6=2=1+2\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{1}{2}$

c) Axa de rotație

$\begin{cases}\frac{1}{3}(2x_1+x_2-x_3)=x_1\\\frac{1}{3}(-2x_1+2x_2-x_3)=x_2\\\frac{1}{3}(x_1+2x_2+2x_3)=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1+x_2-2x_3=0\\-2x_1-x_2-x_3=0\\x_1+2x_2-x_3=0\end{cases}$

$M=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-2&0\\-2&-1&-1&0\\1&2&-1&0\end{array}\right)$

$\det M=\begin{vmatrix}-1&1&-2\\-2&-1&-1\\1&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0\\-2&-3&3\\1&3&-3\end{vmatrix}=0$

$rg M=2$ $\quad\{(x_1,x_2,x_3)\}=\{(-x_3,x_3,x_3)/x_3\in\mathbb{R}\}$

$x_3(-1,1,1)$

$\begin{cases}-x_1+x_2=2x_3\\-2x_1-x_2=x_3\end{cases}$

$-3x_1\ /=3x_3\Rightarrow x_1=-x_3$

$x_2=2x_3-x_3=x_3$, (versorul axei)

$e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$

Axa este $<\{e_1\}>$

d) $R=\{e_1,e_2,e_3\}$ ortonormat a.î. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3=<\{e_1\}>\oplus<\{e_1\}>^\perp$

$<\{e_1\}>^\perp=\{x\in\mathbb{R}^3/<x,(-1,1,1)>=0\}=\{x\in\mathbb{R}^3/-x_1+x_2+x_3\}$

$R_0=\{e_1^0,e_2^0,e_3^0\}\xrightarrow{C}R=\{e_1,e_2,e_3\}$

$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-2\\-2&2&-1\\1&2&2\end{pmatrix}$ $\quad A'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad A'=C^{-1}AC=C^TAC$

$-x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_1=x_2+x_3$

$\{(x_1,x_2,x_3)\}=\{(x_2+x_3,x_2,x_3)\}$

$x_2\underbrace{(1,1,0)}_{f_1}+x_3\underbrace{(1,0,1)}_{f_2}$

$e_1'=f_1=(1,1,0)$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ $\quad e_2'=f_2-\frac{<f_2,e_1'>}{<e_1',e_1'>}\cdot e_1'$

$=(1,0,1)-\frac{1}{2}(1,1,0)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)=\frac{1}{2}(1,-1,2)$

$e_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$

$\{\underbrace{e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)}_{\text{versorul axei}},\underbrace{e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),e_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)}_{\text{reper ortonormat în } <\{e_1\}>^\perp}\}$