LABORATOR#11

EX#1 Scrieţi o funcţie în Python care are ca dată de intrare matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, şi ca date de ieşire matricea ortogonală $\mathbf{Q} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi matricea superior triunghiulară $\mathbf{R} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ cu $r_{kk} > 0$, $k = \overline{1,n}$, obţinute prin factorizarea QR a matricei $\mathbf{A}$ folosind *metoda Gram-Schmidt clasică/standard.*

Testaţi funcţia pentru matricele

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}; \tag{1a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 26 \\ 12 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}; \tag{1b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10^{-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1,8}; \tag{1c}$$

şi verificaţi identitatea $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

Indicaţii: Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) $\mathbf{A}$ este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;

(ii) $\mathbf{A}$ este o matrice inversabilă la stânga.

EX#2 Scrieţi o funcţie în Python care are ca dată de intrare matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, şi ca date de ieşire matricea ortogonală $\mathbf{Q} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi matricea superior triunghiulară $\mathbf{R} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ cu $r_{kk} > 0$, $k = \overline{1,n}$, obţinute prin factorizarea QR a matricei $\mathbf{A}$ folosind *metoda Gram-Schmidt modificată.*

Testaţi funcţia pentru matricele date de (1a)–(1c) şi verificaţi identitatea $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

Indicaţii: Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) $\mathbf{A}$ este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;

(ii) $\mathbf{A}$ este o matrice inversabilă la stânga.

EX#3 Fie matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, vectorul $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ şi sistemul supraabundent/supradeterminat de ecuaţii liniare

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{2}$$

Scrieţi o funcţie în Python care are ca date de intrare matricea $\mathbf{A}$ şi vectorul $\mathbf{b}$, iar ca date de ieşire soluţia sistemului (2), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vectorul eroare reziduală, $\mathbf{r} \coloneqq \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, şi norma sa euclidiană, $\|\mathbf{r}\|_2$, obţinute prin *factorizarea QR* a matricei sistemului (2) folosind

(a) *metoda Gram-Schmidt clasică/standard*;

(b) *metoda Gram-Schmidt modificată*.

Testaţi funcţiile de la punctele (a) şi (b) pentru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,28 \\ 3,31 \end{bmatrix}; \tag{3a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,27 \\ 0,25 \\ 3,33 \end{bmatrix}; \tag{3b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10^{-7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-7} \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{3c}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-k}, \quad k = \overline{1, 10}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3d}$$

Indicaţii: Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) $\mathbf{A}$ este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;

(ii) $\mathbf{A}$ este o matrice inversabilă la stânga;

(iii) $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{b}$ sunt compatibili.