SEMINAR 6

Derivate parțiale ale funcțiilor compuse. Diferențiabilitate de ordin superior. Formula lui Taylor

Exercițiul 1 Calculați derivatele parțiale ale funcțiilor compuse în următoarele cazuri:

a) $g(x,y) = f\left(\frac{y}{x}, 2xy\right)$

b) $g(R,\alpha) = f(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$

REZOLVARE a) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$ și funcția $\varphi: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \to \mathbb{R}^2$ definită prin $\varphi(x,y) = \left(\frac{x}{y}, 2xy\right) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$

Funcția $g: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0\} =: D \to \mathbb{R}$ este definită prin $g(x,y) = (f\circ\varphi)(x,y)$, $\forall (x,y)\in D$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, 2xy\right)\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, 2xy\right)\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, 2xy\right)\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, 2xy\right)\cdot(2xy)'_x =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, 2xy\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, 2xy\right)\cdot 2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},2xy\right)\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},2xy\right)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},2xy\right)\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},2xy\right)\cdot(2xy)'_y=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},2xy\right)\cdot\frac{1}{x}+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},2xy\right)\cdot 2x.$$

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funcție de clasă C^1

$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\varphi(R,\alpha)=(R\cos\alpha, R\sin\alpha)=(\varphi_1(R,\alpha),\varphi_2(R,\alpha))$

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(R,\alpha)=(f\circ\varphi)(R,\alpha)$

$$\frac{\partial g}{\partial R}(R,\alpha)=\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial R}(R,\alpha)+\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)\cdot$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial R}(R,\alpha)=\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)(R\cos\alpha)'_R+\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)$$

$$(R\sin\alpha)'_R=\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)\sin\alpha$$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(R,\alpha)=\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}(R,\alpha)+\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)\cdot$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha}(R,\alpha)=\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)\cdot(R\cos\alpha)'_\alpha+\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)$$

$$(R\sin\alpha)'_\alpha=\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)(-R\sin\alpha)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha,R\sin\alpha)\cdot R\cos\alpha.$$

DEFINIȚIE Fie $D=\overset{\circ}{D}\subseteq\mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 pe D. Se numește laplacianul funcției f funcția $\Delta f:D\to\mathbb{R}$ definită prin $\Delta f(x)\overset{!}{=}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x)+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$ $\forall x\in D$.

Pe scurt, $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i^2}$

EXERCIȚIUL 2 Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 și funcția $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $g(R, \alpha) = f(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ $\forall (R,\alpha) \in \mathbb{R}^2$. Calculați Δg.

REZOLVARE Știm din exercițiul 1, pct (b), că

$\frac{\partial g}{\partial R}(R,\alpha) = \frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cdot\sin\alpha$

$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(R,\alpha) = -\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cdot R\sin\alpha + \frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\, R\cos\alpha.$

$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 R}(R,\alpha) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial g}{\partial R}(R,\alpha)\right) = \cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\right) + \sin\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\right) = \cos\alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cdot\sin\alpha\right) + \sin\alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cdot\sin\alpha\right)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 R}(R,\alpha) = \cos^2\alpha\,\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) + 2\cos\alpha\sin\alpha\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) + \sin^2\alpha\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ $\forall (R,\alpha)\in\mathbb{R}^2$ (1)

$\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}(R,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}(R,\alpha)\right) = -R\cos\alpha\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) - R\sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\right) - R\sin\alpha\,\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) + R\cos\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\right)$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}(R,\alpha) = -R\cos\alpha \frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) - R\sin\alpha \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cdot(-R\sin\alpha) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cdot R\cos\alpha\right] -$$

$$- R\sin\alpha \frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) + R\cos\alpha\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cdot(-R\sin\alpha) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cdot R\cos\alpha\right]$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}(R,\alpha) = -R\cos\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) - R\sin\alpha\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$$

$$+ R^2\sin^2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) - 2R^2\sin\alpha\cos\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$$

$$+ R^2\cos^2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(R\cos\alpha, R\sin\alpha), \quad \forall (R,\alpha)\in\mathbb{R}^2 \quad (2)$$

Adunăm relațiile (1) și (2) și obținem

$$\Delta g(R,\alpha) = \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}(R,\alpha) + \frac{\partial^2 g}{\partial R^2}(R,\alpha) = \cos^2\alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) + R^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\right) + \sin^2\alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) +\right.$$

$$\left. + R^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\right) - R\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) -$$

$$- R\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial u}(R\cos\alpha, R\sin\alpha) + 2\cos\alpha\sin\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cdot(1-R^2) \quad \forall (R,\alpha)\in\mathbb{R}^2.$$

<u>EXERCIȚIUL 3</u> Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcție definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right), & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

$\boxed{5}$

a) Calculați derivatele parțiale ale funcției f și arătați că f este funcție de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$

b) Calculați derivatele parțiale de ordinul doi mixte ale funcției f și verificați continuitatea acestora.

REZOLVARE

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(y^2 \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right)'_x = y^2 \cdot \frac{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)'_x}{1+\frac{x^2}{y^2}} =$

$= \frac{2y^2x}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $y \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, 0) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x,0)-f(\alpha,0)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{0-0}{x-\alpha} = 0.$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(y^2 \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right)'_y = 2y \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) + y^2 \cdot \frac{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)'_y}{1+\frac{x^2}{y^2}}$

$= 2y \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $y \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(\alpha,y)-f(\alpha,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{y^2}\right)-0}{y}$

$= \lim_{y\to 0} y \ln\left(1+\frac{\alpha^2}{y^2}\right) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^2x}{x^2+y^2} & ; \ y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} 2y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)-\frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

Funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y) \mid y=0\}$

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(\alpha,0)}\frac{2y^2x}{x^2+y^2}$$

$$\left|\frac{2y^2x}{x^2+y^2}\right|=\frac{2y^2|x|}{x^2+y^2}\leq\frac{2y^2|x|}{y^2}=2|x| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,0). \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ este funcție continuă în $(\alpha,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(\alpha,0)}\left[2y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)-\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right]$$

$$\left|2y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)-\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq 2|y|\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)+\frac{2x^2|y|}{x^2+y^2}$$

$$\leq\frac{2x^2|y|}{x^2}+4|y|\ln\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\leq 2|y|+4|y|\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=$$

$$=2|y|+4\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,0)$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$ funcție continuă în $(\alpha,0)$.

AȘADAR, f admite toate derivatele parțiale și sunt funcții continue pe $\mathbb{R}^2$, adică f este funcție de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \left(\frac{2y^2 x}{x^2+y^2}\right)'_y =$

$= \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $y \neq 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, 0)\right) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, 0)}{y - 0}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{\frac{2y^2\alpha}{\alpha^2+y^2} - 0}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{2y\alpha}{\alpha^2+y^2} = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(2y \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2 y}{x^2+y^2}\right)'_x$

$= 2y \cdot \frac{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)'_x}{1+\frac{x^2}{y^2}} - \frac{(2x^2 y)'_x (x^2+y^2) - 2x^2 y (x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} =$

$= \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $y \neq 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha, 0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\alpha, 0) = \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, 0)}{x - \alpha}$

$= \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{0 - 0}{x - \alpha} = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$

Se observă că derivatele parțiale mixte de ordinul doi sunt egale în orice punct din $\mathbb{R}^2$. Întrebarea este dacă trebuie să fie continue în orice punct pentru a verifica dacă această condiție este necesară în cadrul teoremei lui Schwarz.

Vom verifica continuitatea lor în $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^4}}{\frac{4}{n^4}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot\frac{1}{n^3}\cdot 0}{\left(\frac{1}{n^2}+0\right)^2} = 0$$

$1 \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \nexists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \Rightarrow$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu sunt continue în $(0,0)$.

CONCLUZIE: Continuitatea lui $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ este o condiție suficientă, dar nu și necesară pentru egalitatea $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ în cadrul teoremei lui Schwarz.

<u>EXERCIȚIUL 4</u> Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^3 + 2xy - 2x^2 + 3x + y - 2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Calculați derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f.

b) Calculați $df(1,2)$ și $d^2f(1,2)$

c) Să se scrie polinomul Taylor de ordin 2 asociat funcției f în punctul $(1,2)$

REZOLVARE

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (xy^3 + 2xy - 2x^2 + 3x + y - 2)'_x =$
$= y^3 + 2y - 4x + 3 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (xy^3 + 2xy - 2x^2 + 3x + y - 2)'_y =$
$= 3xy^2 + 2x + 1 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x} \text{ funcții continue pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ mulțime deschisă}\end{array}\right\} \Rightarrow f$ funcție de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (y^3 + 2y - 4x + 3)'_x = -4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (3xy^2 + 2x + 1)'_x = 3y^2 + 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (y^3 + 2y - 4x + 3)'_y = 3y^2 + 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (3xy^2 + 2x + 1)'_y = 6xy$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ funcții continue pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ mulțime deschise}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ funcție de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$

b) $df(1,2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$df(1,2)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \cdot y =$

$= -2x + 15y \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$d^2 f(1,2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Pentru $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$d^2 f(1,2)(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)\, u \cdot v +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)v^2 = -4u^2 + 28uv + 12v^2$$

c) $$T_2(x,y) = f(1,2) + \frac{1}{1!} df(1,2)((x,y)-(1,2))$$

$$+ \frac{1}{2!} d^2 f(1,2)((x,y)-(1,2))$$

$$= f(1,2) + \frac{1}{1!} df(1,2)(x-1, y-2) + \frac{1}{2!} d^2 f(1,2)(x-1, y-2)$$

$$= f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\cdot(y-2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)(x-1)(y-2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2\right]$$

Deci, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$T_2(x,y) = 13 + 11(x-1) + 15(y-2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-4(x-1)^2 + 28(x-1)(y-2) + 12(y-2)^2\right]$$

TEMĂ

Ex. 1 Calculați derivatele parțiale ale funcției $g(x,y) = f(xy, x^2+y^2)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ex. 2 Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + y^3 + 2x - 3y + 1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Calculați derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f.

b) Calculați $df(1,0)$ și $d^2f(1,0)$

c) Să se scrie polinomul Taylor de ordin doi asociat funcției f în punctul $(1,0)$