Examen la Analiza Matematică

1 of

NUMĂRUL 1

2p 1) Să se demonstreze următorul enunț
Fie $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o aplicație liniară și injectivă. Atunci există $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$ astfel încât $m\|x\| \leq \|f(x)\|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$

3p 2) Să se ~~studieze~~ demonstreze următorul enunț: Orice submulțime mărginită și infinită a lui $\mathbb{R}^n$ are (cel puțin) un punct de acumulare

2p 3) Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}$

2p 4) Să se arate că dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elemente din $(0,\infty)$, are proprietatea că $x_{n+1} \leq \frac{1}{S_{n-1}}((S_n-1)x_n + x_{n-1})$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, unde $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, atunci el este convergent și să se afle limita sa.

R.I.C.
O'

Analiză NUMĂRUL 2

2p 1) Să se demonstreze următorul enunț: Orice submulțime F a lui $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că $F' \subseteq F$ este închisă

3p 2) Să se demonstreze următorul enunț: Șirul polinoamelor Berstein asociate oricărei funcții continue $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ converge uniform către f

2p 3) Să se stabilească natura seriei

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n + n}$$

2p 4) Să se arate că:

i) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

ii) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = 1$$

iii) $$\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\frac{1}{e}$