NUME: PĂUN LIVIU-DUMITRU
GRUPA: 113

Examen final Algebră II
13.06.2021

7.0

1. $f(x) = X^3+3X-4$

0.7/3 a) $(\exists)\ A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalizabilă a.î. $P_A(x) = f(x)$?

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$P_A(x) = X^3 - tr(A)\cdot X^2 + tr(A^*)\cdot X - det(A)$$

$$tr(A^*) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$P_A(x) = f(x) \Leftrightarrow X^3 - tr(A)\cdot X^2 + tr(A^*)\cdot X - det\,A = X^3+3X-4$$

$$\begin{cases} tr(A) = 0 \Rightarrow a_{11}+a_{22}+a_{33}=0 \\ tr(A^*) = 3 \\ det\,A = 4 \end{cases}$$

din exemple de la seminar 14

Continuam calculele și observam că sunt rel. lui Viète $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ un polinom și calculam răd. sale.

Dacă erau toate reale atunci scriam matricea A, altfel, această matrice nu există

$\Rightarrow X^3+3X-4$

1 - sol $\Rightarrow (X-1) \mid f$

$\Rightarrow X^3+3X-4 = (X-1)(X^2+X+4)$

$\Delta = 1-16$

4p(max)

b) $f(x) = x^3+3x-4$ ired. în $\mathbb{Q}[X]$? dar $\mathbb{Z}_3[X]$

Observ că 1 este rădăcină $\xRightarrow{\text{Th. Bezout}}$ $(X-1) \mid f(x)$

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x-4 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+4 \\ \hline \quad x^2+3x-4 & \\ \quad -x^2+x & \\ \hline \qquad 4x-4 & \\ \qquad -4x+4 & \\ \hline \qquad = \;\; = & \end{array}$$

Deci $f(x) = (x-1)(x^2+x+4)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \deg(x^2+x+4)=2 \\ x^2+x+4 \text{ nu are răd. în } \mathbb{Q}[X] \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+x+4 \text{ ired în } \mathbb{Q}[X] \\ \deg(x-1)=1 \Rightarrow x-1 \text{ ired în } \mathbb{Q}[X] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ red în $\mathbb{Q}[X]$

Observ că $\hat{1} \in \mathbb{Z}_3$ este răd $\Rightarrow (x-\hat{1}) \mid f(x)$

$$\begin{array}{l|l} x^3+\hat{3}x-\hat{4} & x-\hat{1} \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+\hat{1} \\ \hline \quad x^2+\hat{3}x-\hat{1} & \\ \quad -x^2+x & \\ \hline \qquad x-\hat{1} & \\ \qquad -x+\hat{1} & \\ \hline \qquad = \;\; = & \end{array}$$

Deci $f(x) = (x-\hat{1})(x^2+x+\hat{1})$

$\deg(x^2+x+\hat{1})=2$

$g = (x^2+x+\hat{1})$

$g(\hat{0}) = \hat{1}$

$g(\hat{1}) = \hat{0}$ $\Rightarrow \hat{1}$ este răd $\Rightarrow (x-\hat{1}) \mid g$

$g(\hat{2}) = \hat{7} = \hat{1}$

$$\begin{array}{l|l} x^2+x+\hat{1} & x-\hat{1} \\ \hline -x^2+x & x+\hat{2} \\ \hline \quad \hat{2}x+\hat{1} & \\ \quad = \hat{2}x-\hat{2} & \\ \quad -\hat{2}x+\hat{2} & \\ \hline \quad = \;\; = & \end{array}$$

Deci $g(x) = (x-\hat{1})(x+\hat{2}) = (x+\hat{2})^2$

2a) ideale $\mathbb{Z}_n$ cu 2 ideale maximale
$\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{12}$ ... și încă unu cu 3

Efectiv am împărțit polinoamele

Așadar, am găsit $f(x) = (x-\hat{1})\cdot(x+\hat{2})^2 = (x+\hat{2})^3$

$\deg(x+\hat{2}) = 1 \Rightarrow x+\hat{2}$ ired în $\mathbb{Z}_3[x] \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ red. în $\mathbb{Z}[x]$

3p max c) Fie $I = (f(x)) = (x^3+3x-4)$ - idealul generat de $f(x)$

$I \subset \mathbb{C}[x]$

$f(x) = x^3+3x-4 = (x-1)(x^2+x+4)$

x^2+x+4

$\Delta = 1-16 = -15 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+i\sqrt{15}}{2} \\ x_2 = \frac{-1-i\sqrt{15}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

descompunerea polinomului în pol ired din $\mathbb{C}[x]$

Seminar 10

un ideal M e maximal dacă R/M - corp

la polinoame: $M = (f)$ ired.

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x+1-i\sqrt{15})(x+1+i\sqrt{15})$

f scris ca produs de 3 pol. ired în $\mathbb{C}[x]$

Cum $x-1$ ired în $\mathbb{C}[x] \Rightarrow (x-1)$ ideal maximal în $\mathbb{C}[x]$

Cum $(x+1-i\sqrt{15})$ ired în $\mathbb{C}[x] \Rightarrow (x+1-i\sqrt{15})$ ideal maximal în $\mathbb{C}[x]$

Cum $(x+1+i\sqrt{15})$ ired în $\mathbb{C}[x] \Rightarrow (x+1+i\sqrt{15})$ ideal maximal în $\mathbb{C}[x]$

Am obținut 3 ideale maximale în $\mathbb{C}[x]$ generate de polinomul $f(x)$.

2/4 (2) 2. b) $(2x^4+9x^3+18x^2+18x+9,\ 2x^4+8x^3+17x^2+21x+15) \overset{not}{=} (f,g)$ maximal în $\mathbb{C}[x] \Leftrightarrow (f,g) = 1$ - cmmdc

așa mi s-a părut logic ce să zic mai mult?

Folosesc algoritmul lui Euclid

Împart polinomul,

$2x^4+9x^3+18x^2+18x+9 = (2x^4+8x^3+17x^2+21x+15)\cdot 1 + x^3+x^2-3x-6$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+8x^3+17x^2+21x+15 & x^3+x^2-3x-6 \\ \hline -2x^4-2x^3+6x^2+12x & 2x+6 \\ \quad 6x^3+23x^2+33x+15 & \\ \quad -6x^3-6x^2+18x+36 & \\ \quad\quad 17x^2+51x+51 & \end{array}$$

iau împărțitorul și împart mai departe la rest.

$2x^4+8x^3+17x^2+21x+15 = (x^3+x^2-3x-6)(2x+6)+17x^2+51x+51$

2a) „Mă pierd la dat exemple" sorry

2c) „M-a speriat acea matrice, am zis că las pe final, dar nu am mai revenit la ea.