Tutoriat 1 - ECS

Noțiuni teoretice introductive:

1. O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ se numește:

→ inferior triunghiulară, dacă toate elementele de deasupra diagonalei principale sunt 0;

→ superior triunghiulară, dacă toate elementele de sub diagonala principală sunt 0.

2. Proprietăți ale matricelor inferior/superior triunghiulare:

a) A inferior/superior triunghiulară $\Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

b) A inferior/superior triunghiulară și inversabilă, atunci A^{-1} e inferior/superior triunghiulară.

c) A inferior/superior triunghiulară, atunci A inversabilă $\Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i = \overline{1,n}$.

3. TRANSFORMĂRI ELEMENTARE:

- permutarea a două linii: $E_i \leftrightarrow E_k$;
- înmulțirea unei linii (sau ecuații) cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}^*$:

$$\alpha E_i \to E_i'$$

- adunarea unei linii/ecuații cu o altă linie înmulțită cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$:

$$E_i + \alpha E_k \to E_i.$$

4. Tipuri speciale de matrice:

a) Matrice diagonal dominantă:

O matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ se numește diagonal dominantă dacă:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \forall i = \overline{1,n}$$

Altfel spus, pentru fiecare linie, elementul de pe diagonala principală este mai mare sau egal decât restul elementelor de pe linia sa.

Exemplu: $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 5 & 1\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix}$. Verificăm dacă A este diagonal dominantă:

$i=1: |a_{11}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{3} |a_{1j}| \Leftrightarrow |a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| \Leftrightarrow |3| \geq |1| + |0| \Leftrightarrow 3 \geq 1$ OK.

$i=2: |a_{22}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{3} |a_{2j}| \Leftrightarrow |a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| \Leftrightarrow |5| \geq |-1| + |1| \Leftrightarrow 5 \geq 2$ OK.

$i=3: |a_{33}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 3}}^{3} |a_{3j}| \Leftrightarrow |a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| \Leftrightarrow |4| \geq |-2| + |-2| \Leftrightarrow 4 \geq 4$ OK.

b) Matrice strict diagonal dominantă:

O matrice $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește strict diagonal dominantă dacă:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \forall i=\overline{1,n}$$

Exemplu: $B=\begin{bmatrix}10 & -5 & 5\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 5\end{bmatrix}$. B nu este strict diagonal dominantă, deoarece:

$i=1 \Rightarrow |a_{11}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{3} |a_{1j}| \Leftrightarrow |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \Leftrightarrow |10| > |-5| + |5| \Leftrightarrow 10 > 10$ Ⅹ

Proprietăți ale matricelor strict diagonal dominante:

1. orice matrice strict diagonal dominantă este inversabilă.

2. orice matrice strict diagonal dominantă admite MEGPP.

Metoda substituției ascendente

Fie următorul sistem de ecuații liniare în $\mathbb{R}^n$: $Ax=b$, unde : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară, iar x și $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (vectori coloană). Scris desfășurat, sistemul arată astfel:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots & + a_{kk}x_k = b_k \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots & + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Atunci, soluțiile sistemului se găsesc astfel:

→ pasul $k=1$: $x_k = b_k / a_{kk}$;

→ pașii $k=\overline{2,n}$: $x_k = \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right)/a_{kk}$;

Metoda substituției descendente

Fie următorul sistem de ecuații liniare în $\mathbb{R}^n$: $Ax=b$, unde : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară, iar x și $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (vectori coloană). Scris desfășurat, sistemul arată astfel:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

→ pasul $k=n$: $x_n = b_n / a_{nn}$;

→ pașii $k=\overline{n-1,1}$: $x_k = (b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j)/a_{kk}$;

Metoda de eliminare Gauss-Jordan fără pivotare (MEGFP)

Având sistemul $Ax=b$, cu $A \in M_n(\mathbb{R})$ și $x, b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, vom produce din $\bar{A} := [A|b]$ o matrice superior triunghiulară pentru care vom putea aplica metoda substituției descendente.

Condiții pentru a putea aplica MEGFP:

i) A trebuie să fie pătratică

ii) A trebuie să fie inversabilă

iii) A și vectorul b trebuie să fie compatibili (pentru rezolvarea de sisteme)

iv) La fiecare pas, $a_{kk} \neq 0$.

Exerciții: 1. Rezolvați sistemul de ecuații liniare folosind MEGFP:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases}$$

2. Rezolvați sistemul de ecuații liniare folosind MEGPP:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Metoda de eliminare Gauss-Jordan cu pivotare parțială (MEGPP)

Algoritm: Având sistemul $Ax=b$, cu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $x, b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, procedăm după cum urmează:

1. La fiecare pas k, alegem pivotul drept cel mai mare număr în modul de pe coloana sa (ignorând liniile și coloanele precedente, i.e. mai mici decât k)
2. Prin permutarea a două linii (ecuații), aducem pe poziția pivotului (poziția (k,k)) elementul găsit la pasul 1).
3. Facem 0 pe coloana sa.
4. Repetăm procedeul până când A devine superior triunghiulară.

Condiții care trebuiesc satisfăcute pentru a putea aplica MEGPP:

1. A trebuie să fie pătratică;
2. A trebuie să fie inversabilă;
3. A și vectorul b trebuie să fie compatibili.
4. La fiecare pas k, $a_{kk} \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right]$$ (prin $\bar{A}^{(k)}$ înțelegem $\bar{A}$ la pasul k)

Verificăm condițiile:

1. A este pătratică - $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;
2. A este inversabilă - $\det A = -43 \neq 0$;
3. A și vectorul b sunt compatibili - $A_{3,3} \cdot X_{3,1} = b_{3,1}$;

$\Rightarrow$ Putem aplica MEGFP:

$a_{11} = 4 \neq 0 \Rightarrow$ Putem aplica MEGFP:

$\rightarrow$ Facem $E_2 - \frac{1}{2}E_1$: $a_{22} = 2 - \frac{4}{2} = 0$; $a_{23} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; $a_{24} = -1 - \frac{2}{2} = -2$; $b_2 = -\frac{19}{2}$.

$\rightarrow$ Facem $E_3 - \frac{1}{4}E_1$: $a_{31} = 1 - \frac{4}{4} = 0$; $a_{32} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; $a_{33} = -3 - \frac{2}{4} = -\frac{7}{2}$; $b_3 = -\frac{45}{4}$

Am obținut: $\bar{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 & -\frac{19}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{7}{2} & -\frac{45}{4} \end{array}\right]$

Matricea $M^{(1)}$ care transformă $\bar{A}^{(1)} = [A^{(1)}\, b^{(1)}]$ în $\bar{A}^{(2)} = [A^{(2)}\, b^{(2)}]$ este:

$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mai exact, are loc relația $M^{(1)}[A^{(1)} b^{(1)}] = A^{(2)} b^{(2)}$.

$a_{22} = \frac{7}{2} \neq 0 \Rightarrow$ Putem aplica MEGFP;

$\rightarrow$ Facem $E_3 - \frac{3}{14}E_2$: $a_{32} = \frac{3}{4} - \frac{3}{14} \cdot \frac{7}{2} = 0$; $a_{33} = -\frac{7}{2} - \frac{3}{14} \cdot (-2) = -\frac{7}{2} + \frac{3}{7} = -\frac{43}{14}$;

$b_3 = -\frac{45}{4} - \frac{3}{14} \cdot \left(-\frac{19}{2}\right) = -\frac{45}{4} + \frac{57}{28} = \frac{-315 + 57}{28} = \frac{-258}{28} = \frac{-129}{14}$.

Am obținut: $\bar{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{14} & -\frac{129}{14} \end{bmatrix}$.

Matricea $M^{(2)}$ care transformă $\bar{A}^{(2)} = [A^{(2)} b^{(2)}]$ în $\bar{A}^{(3)} = [A^{(3)} b^{(3)}]$ este:

$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{14} & 1 \end{bmatrix}$. Mai exact, are loc relația $M^{(2)}[A^{(2)} b^{(2)}] = A^{(3)} b^{(3)}$.

Observație: La fiecare pas k, privim $\bar{A}^{(k)}$ fără liniile și coloanele mai mici decât k.

Aproape am terminat! Sistemul $Ax=b$ devine $Ux=\tilde{b}$ ($A^{(3)}$ este superior triunghiulară)

$$\begin{cases} 4x_1+x_2+2x_3=9 \Rightarrow 4x_1-1+6=9 \Rightarrow 4x_1=4 \Rightarrow x_1=1. \\ \frac{7}{2}x_2-2x_3=-\frac{19}{2} \Rightarrow \frac{7}{2}x_2-\overset{2}{\cancel{6}}=-\frac{19}{2} \Rightarrow 7x_2=-19+12 \Rightarrow x_2=-1. \\ -\frac{43}{14}x_3=-\frac{129}{14} \Rightarrow x_3=3 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1+x_2+4x_3=2 \\ 2x_1-x_2+2x_3=3 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A}^{(1)}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

Căutăm maximul de pe coloana 1:

$\max\limits_{i=\overline{1,3}} |a_{i1}^{(1)}| = \max\{|1|,|1|,|2|\} = 2 = |a_{31}| \Rightarrow$ Trebuie să schimbăm $E_3 \leftrightarrow E_1$

Matricea permutare simplă: $P^{(1)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. În fapt, are loc

relația: $P^{(1)}\bar{A}^{(1)}=\tilde{A}^{(1)}=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$.

$a_{11}=2\neq 0 \Rightarrow$ Putem aplica MEGPP. Facem $E_2-\frac{1}{2}E_1$:

$a_{21}=1-\frac{1}{2}\cdot 2=0$; $a_{22}=1-\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{3}{2}$; $a_{23}=4-\frac{1}{2}\cdot 2=3$; $b_2=2-\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{1}{2}$.

Facem $E_3-\frac{1}{2}E_1$: $a_{31}=1-\frac{1}{2}\cdot 2=0$; $a_{32}=1-\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{3}{2}$; $a_{33}=-1-\frac{1}{2}\cdot 2=-2$; $b_3=-\frac{1}{2}$.

Am obținut: $\bar{A}^{(2)}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3/2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Matricea $M^{(1)}$ care transformă

$\bar{A}^{(1)}=[A^{(1)}b^{(1)}]$ în $\bar{A}^{(2)}=[A^{(2)}b^{(2)}]$ este: $M^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mai exact, are loc

relația: $M^{(1)}P^{(1)}[A^{(1)}b^{(1)}]=[A^{(2)}b^{(2)}]$.

Căutăm maximul de pe coloana 2:

$\max\limits_{i=\overline{2,3}} |a_{i2}| = \max\{|a_{22}|,|a_{32}|\} = \max\{|\frac{3}{2}|,|\frac{3}{2}|\} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Nu trebuie să

schimbăm liniile lui $\bar{A}^{(2)} \Rightarrow P^{(2)}=I_3$. Are loc relația: $P^{(2)}\bar{A}^{(2)}=\bar{A}^{(2)}$.

Facem $E_3 - E_2$: $a_{32} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$; $a_{33} = -2-3=-5$; $b_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$.

Am obținut: $\bar{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3/2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}$. $\rightarrow$ matrice superior triunghiulară!

Matricea care transformă $\bar{A}^{(2)} = [A^{(2)} b^{(2)}]$ în $\bar{A}^{(3)} = [A^{(3)} b^{(3)}]$ este:

$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Mai exact, are loc relația $M^{(2)} P^{(2)} [A^{(2)} b^{(2)}] = A^{(3)} b^{(3)}$.

Aproape suntem gata! Sistemul $Ax=b$ a devenit $Ux=b$ ($\bar{A}^{(3)}$ superior triunghiulară)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \Rightarrow 2x_1 = 3 + x_2 - 2x_3 \Rightarrow 2x_1 = 3 - \frac{1}{15} - \frac{2}{5} \Rightarrow 2x_1 = \frac{45-1-6}{15} = \frac{38}{15} \Rightarrow x_1 = \frac{19}{15} \\ \frac{3}{2}x_2 + 3x_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 15x_2 + 6 = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{15}. \\ -5x_3 = -1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$