Consultație 05.05.2023

Luni 14^{00} - la [illegible], pe hol, recapitulative

Marți 16^{00}

1. Fie densitatea:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\mathbb{1}_{[-2,2]}(x).$$

a. scrieți codul R care să permită trasarea graficului funcției f pe intervalul $[-2,2]$.

```
t <- seq(-2, 2, 0.01)
f <- function(x){
  1/(2*pi)*sqrt(4-x^2)
}
plot(t, f(t))
```

$Y \sim Unif(a, b)$

$g(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$

(teoretică) b. descrieți, folosind metoda respingerii, o procedură prin care să generați observații din f. câte obs trebuie să generați în medie pt a obține o realizare a lui f?

$X \sim f$ Aleg $Y \sim Unif(-2,2)$ # e ok să se lucreze și cu paranteze deschise

$Y \sim g$ ✓ $g(x) = \frac{1}{4}\,\mathbb{1}_{(-2,2)}(x)$

Căutăm c a.î. $\frac{f(x)}{g(x)} \le c$, $\forall x \in (-2,2)$ ✓

Notăm $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4\cdot\sqrt{4-x^2}}{2\pi} = \frac{2\sqrt{4-x^2}}{\pi}$

Găsim un pct de maxim global sau:

$x \in (-2,2) \Leftrightarrow 4-x^2 \in (0,4) \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} \in (0,2)$

$h(x) = \frac{2\sqrt{4-x^2}}{\pi}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow h(x) \le \frac{2}{\pi}\cdot 2 \le 2 \Rightarrow c = 2.$

Deci, pentru $c = 2$, $\frac{f(x)}{g(x)} \le c$, $\forall x$

$$\frac{f(x)}{c\cdot g(x)} = \frac{1}{\pi}\sqrt{4-x^2}$$

Algoritm – generarea unei realizări din f

1. Generez $U \sim Unif(0,1)$ (din teorie)

nu contează dacă generez U sau Y întâi, căci sunt independente

2. Generez $Y \sim Unif(-2,2)$

3. Testăm condiția:

Dacă, $U \le \frac{\sqrt{4-Y^2}}{\pi}$, atunci $X=Y$ STOP

Altfel, revin la 2.

Codul R:

```
while (T) → TRUE
{y <- runif(1, -2, 2)  → o singură uniformă pe (-2,2)
 u <- runif(1, 0, 1)
 if (u ≤ 1/pi * sqrt(4 - y^2)) x <- y break;
}
```

Numărul de iterații necesare pentru a obține o realizare din f este o v.a. $G \sim Geom(p)$ cu $E(G) = c$.

(empirică) c. Scrieți un cod R care să genereze $n=1000$ observații iid din repartiția f și estimați valoarea medie a nr. de încercări necesare pt a obține o realizare.

Met I

```
gen <- function (n) {
  x <- c() # vector nul
  nr_it <- c()   } # contor pt a ține de
  k <- 0         }   câte iterații am avut
                     nevoie pt a construi x
  → replicate (n, { [while (T) ... }])
  while (T)
  { k <- k+1
    y <- runif(1, -2, 2)
    u <- runif(1, 0, 1)
    if (u ≤ 1/pi * sqrt(4 - y^2)) {
      x <- c(x, y) # am actualizat vectorul x cu y
      nr_it <- c(nr_it, k)
      break; }
  }
```

while-ul arată câte încercări au fost necesare pt a obține o realizare a unei singure obs

2. Considerăm cuplul de v.a (X,Y) cu densitatea:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-y^2 x/2 - \sqrt{x}} \mathbb{1}_{x>0}.$$

c. propuneți o metodă de simulare pt o observație din densitatea $f(x,y)$ și scrieți un cod R care să permită acest lucru

Știm de la a) $f_{Y|X}$

Știm de la b) f_X.

<u>Algoritm</u>:

Generez o valoare din f_X, apoi generez o valoare din $f_{Y|X}$ și obțin perechea (x,y)

- $f(x \mid a < X \le b) = \dfrac{f(x) \cdot \mathbb{1}_{(a,b]}(x)}{F(b) - F(a)}$ → Truncated distribution (Wikipedia)

- $f(x \mid \underbrace{X > a}_{\Updownarrow \; a < X < \infty}) = \dfrac{f(x) \cdot \mathbb{1}_{(a,b]}(x)}{1 - F(a)}$ $\quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Când v.a discretă – nu poate fi o fct bijectivă

avem fct bij → suportul $\mathbb{R}$ și v.a. continuă

(*) Exercițiu examen feb. 2023

$T = F^{-1}(F(a) + (1 - F(a))U)$, $U \sim Unif(0,1)$

Det fct de repartiție a lui T

fct de rep. e crescătoare

$F_T(x) = \mathbb{P}(T \le x) = \mathbb{P}(F^{-1}(F(a) + (1-F(a))U) \le x) =$

deci nu schimbă inegalitatea

$= \mathbb{P}(F(a) + (1-F(a))U \le F(x)) \iff$

↪ sg. parte aleatoare

$\iff \mathbb{P}\left(U \le \frac{F(x)-F(a)}{1-F(a)}\right) = F_U\left(\underbrace{\frac{F(x)-F(a)}{1-F(a)}}_{<1}\right) = \frac{F(x)-F(a)}{1-F(a)}$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 1, & x > b \end{cases}, \quad U \sim Unif(a,b)$$

$U \sim Unif(0,1)$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Cum $F(x) < 1 \Rightarrow F(x) - F(a) < 1 - F(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{F(x)-F(a)}{1-F(a)} < 1$