26.03.24 (1)

ElemTN_Sem5_312

Care sunt numerele care admit reprezentări periodice în baza b?

$$\overline{0,a_1a_2\dots a_r(u_1u_2\dots u_s)}_{(b)} =$$

$$= \frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b^2}+\dots+\frac{a_r}{b^r}+\frac{u_1}{b^{r+1}}+\frac{u_2}{b^{r+2}}+\dots+\frac{u_s}{b^{r+s}}+$$

$$+\frac{u_1}{b^{r+s+1}}+\frac{u_2}{b^{r+s+2}}+\dots+\frac{u_s}{b^{r+2s}}+$$

$$+\frac{u_1}{b^{r+2s+1}}+\dots+\frac{u_s}{b^{r+3s}}+ \dots =$$

$$=\frac{a_1b^{r-1}+a_2b^{r-2}+\dots+a_{r-1}b+a_r}{b^r}+$$

$$+\frac{1}{b^{r+1}}\left(u_1+\frac{u_2}{b}+\dots+\frac{u_s}{b^{s-1}}\right)\left(1+\frac{1}{b^s}+\frac{1}{b^{2s}}+\dots\right)=$$

$$=\frac{\overline{a_1a_2\dots a_r}_{(b)}}{b^r}+\frac{u_1b^{s-1}+u_2b^{s-2}+\dots+u_{s-1}b+u_s}{b^{r+s}}\cdot\lim_{z\to\infty}\frac{1-\overset{\to 0}{\frac{1}{b^{zs}}}}{1-\frac{1}{b^s}}$$

$$=\frac{\overline{a_1a_2\dots a_r}_{(b)}}{b^r}+\frac{\overline{u_1u_2\dots u_s}_{(b)}}{b^{r+s}}\cdot\frac{b^s}{b^s-1}=$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_r}_{(b)}(b^s-1) + \overline{u_1u_2\ldots u_s}_{(b)}}{b^r(b^s-1)} =$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_r\underbrace{00\ldots 0}_{s}}_{(b)} + \overline{u_1u_2\ldots u_s}_{(b)} - \overline{a_1a_2\ldots a_r}_{(b)}}{b^r(b^s-1)} =$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_r u_1u_2\ldots u_s}_{(b)} - \overline{a_1a_2\ldots a_r}_{(b)}}{b^r(b^s-1)} =$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_r u_1u_2\ldots u_s}_{(b)} - \overline{a_1a_2\ldots a_r}_{(b)}}{\underbrace{\beta\beta\ldots\beta}_{s}\underbrace{00\ldots 0}_{r}}$$

Dacă avem nr. $\frac{u}{v}$, $u, v \in \mathbb{N}$, $v \notin \{0,1\}$. $\frac{bu}{v} - \left[\frac{bu}{v}\right] = \frac{bu-\lambda v}{v}$.

$x_1 = \frac{u}{v}$.

$a_1 = [bx_1] = \left[\frac{bu}{v}\right]$; $x_2 = \{bx_1\} = \frac{r_2}{v}$, $r_2 \in \{0,1,\ldots,v-1\}$

$a_2 = [bx_2] = \left[\frac{br_2}{v}\right]$; $x_3 = \{bx_2\} = \frac{r_3}{v}$, $r_3 \in \{0,\ldots,v-1\}$

Continuând calculele constatăm că

$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ $\exists r_k \in \{0,1,\ldots,v-1\}$ $x_k = \frac{r_k}{v}$.

De aceea, $\exists i, j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, cu $i<j$ a.î. $x_i = x_j$.

Atunci $x_{j+1} = \{bx_j\} = \{bx_i\} = x_{i+1}$ și,

inductiv $x_{j+s} = x_{i+s}$ $\forall s \in \mathbb{N}^*$

Morala: $\forall k \geq i \quad x_k = x_{k+j-i}$

(clar: inductive!)

Deci, reprezentarea lui $\frac{u}{v}$ în baza b e periodică.

Am obținut deci:

$\boxed{T1}$ Un număr real x are reprezentare periodică în baza b dacă $x \in \mathbb{Q}$

Care din numerele reale (de fapt, raționale, cf $T1$!!) admit reprezentări ca fracție ~~finită~~ în baza b?

$$\frac{u}{v} = \overline{0,a_1a_2\ldots a_r}_{(b)} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_r}_{(b)}}{b^r} \Rightarrow$$

$$(u,v)=1 \qquad ub^r = v \cdot \overline{a_1a_2\ldots a_r}_{(b)} \overset{(u,v)=1}{\Longrightarrow}$$

$v \mid b^r$. Ca urmare, v nu are factori primi p care să nu-l dividă pe b.

Deci v e un produs de factori primi de-ai lui b.

Reciproc, dacă $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$

iar $v = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$ ~~atunci~~, $\forall \beta_i \in \mathbb{N}$

$$\frac{u}{v} = \frac{u}{p_1^{\beta_1}\ldots p_r^{\beta_r}} \qquad \text{luând } T = \max\left\{\left[\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right]+1, \ldots \left[\frac{\beta_r}{\alpha_r}\right]+1\right\}$$

atunci $\frac{u}{v} = \frac{u p_1^{T\alpha_1 - \beta_1} \cdots p_r^{T\alpha_r - \beta_r}}{b^T}$, care

se reprezintă ca fracție finită în

baza b. La urmare:

$\boxed{T2}$ Un număr rațional x admite reprezentare finită în baza b dacă

$x = \frac{u}{v}$ cu $u, v \in \mathbb{Z}$, $v \neq 0$, $(u,v)=1$,

iar v este produs de factori primi

de-ai lui b.

Obs 3 Singurele numere reale (nenule!) care ~~au~~ au mai mult de o reprezentare în baza b sunt cele din T2.

• Care numere reale (de fapt, raționale!) se scriu ca fracție periodică simplă în baza b ?

$\boxed{(u,v)=1}$

$\frac{u}{v} = 0,\overline{(a_1 a_2 \dots a_r)}_{(b)} = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_r}_{(b)}}{b^r - 1} \Rightarrow$

$u(b^r - 1) = v \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_r}_{(b)} \xrightarrow{(u,v)=1} v \mid b^r - 1 \Rightarrow (v,b) = 1$

Reciproc, dacă $(v,b)=1$, cf TTR

$$b = q_1 v + r_1$$

$$b^2 = q_2 v + r_2$$

$$\vdots$$

$$b^{v+1} = q_{v+1} v + r_{v+1}$$

Dar $r_1, r_2, \ldots, r_{v+1} \in \{0, 1, \ldots, v-1\}$,

deci $\exists\, i, j \in \{0, 1, \ldots, v+1\}$ $i<j \wedge r_i = r_j$.

Pt acești i, j $(q_j - q_i) v = b^j - b^i \Rightarrow$

$$v \mid b^i (b^{j-i} - 1) \xrightarrow{(v,b)=1} v \mid b^{j-i} - 1$$

Deci, $\exists\, w \in \mathbb{Z}$ $vw = b^{j-i} - 1$,

adică $\exists\, w \in \mathbb{Z}$ $\dfrac{1}{v} = \dfrac{w}{b^{j-i}-1}$,

deci $\exists\, w \in \mathbb{Z}$ $\dfrac{u}{v} = \dfrac{uw}{b^{j-i}-1}$ fracție periodică simplă în baza b.

Am obținut deci:

simplă

$\boxed{T3}$ Un număr real x se reprezintă ca fracție periodică ~~simplă~~ în baza b dacă

$\exists\, u, v \in \mathbb{Z}$ $\left(v \neq 0 \wedge (u,v) = 1 \wedge (v,b) = 1 \wedge x = \dfrac{u}{v}\right)$

Scrieți în baza 7 numărul $A31,5(4972)$ (da[illegible]

$\overset{not}{=}$ ~~(12)~~

Sol: $A31_{(12)} = 10 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 + 1 = 1477$

$$\begin{array}{l} 1477 \,\lfloor 7 \\ \underline{14} \quad 211 \,\lfloor 7 \\ \;\; 07 \quad \underline{21} \quad 30 \,\lfloor 7 \\ \;\; \underline{7} \quad\; 01 \quad \underline{28} \quad 4 \,\lfloor 7 \\ \;\; 07 \quad\; \underline{0} \quad\; 2 \quad\; 0 \quad 0 \\ \;\; \underline{7} \quad\; \boxed{1} \quad\; \boxed{2} \quad \boxed{4} \\ \;\; \boxed{0} \quad\; a_1 \quad\; a_2 \quad\; a_3 \\ \;\; a_0 \end{array}$$

$$1477 = a_0 + \underbrace{7a_1 + 7^2 a_2 + \dots}_{7 \cdot 211} \quad (6)$$

$$a_0 = 0$$

$$7(a_1 + 7a_2 + 7^2 a_3 + \dots)$$

$$a_1 = 4$$

$$7(a_2 + 7a_3 + \dots)$$

Deci $A31_{(12)} = 1477 = 4210_{(7)}$

$[x] =$

$a_1\ \{x\}_3 = 0{,}5(4972)_{(12)} = \dfrac{(54972)_{(12)} - 5_{(12)}}{12(12^4 - 1)} =$

BBBB0

$$= \frac{5 \cdot 12^4 + 4 \cdot 12^3 + 9 \cdot 12^2 + 7 \cdot 12 + 3}{12 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 145} = \frac{12^3 \cdot 64 + 1296 + 81}{12 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 29} =$$

$$= \frac{\cancel{27}^{9}(4096 + 48 + 3)}{\cancel{12}_4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 29} = \frac{9 \cdot \cancel{4147}^{29}}{4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 29} = \frac{9}{20} = 0{,}45.$$

$0{,}45 \cdot 7 = 3{,}15$

$0{,}15 \cdot 7 = 1{,}05$

$0{,}05 \cdot 7 = 0{,}35$

$0{,}35 \cdot 7 = 2{,}45$

$0{,}45 \cdot 7 = 3{,}15$

$x_1 = x$ $\quad \sqrt{0{,}291}$

$[10x_1] = 2\ ; \quad x_2 = \{10x_1\} = 0{,}91$

$[10x_2] = 9$.

$a_1 = [5x_1]\ ; \quad x_2 = \{5x_1\}$

$a_2 = [5x_2]\ ; \quad x_3 = \{5x_2\}$

Deci $0{,}5(4972)_{(12)} = 0{,}45 = 0{,}(3102)_{(7)}$

Ca urmare $x = [x] + \{x\} = 4210_{(7)} + 0,(3102)_{(7)}$ ⑦

$= 4210,(3102)_{(7)}$