Nume și prenume: DINOIU NADIA-STEFANIA
Grupa: 311

Nota: ____________

Examen

12 Mai 2020

Timpul de rezolvare al problemelor este de 2h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF[1] în folderul vostru de pe Dropbox aveți 30 de minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe la **ora 14 și 58 minute** și se termină la **ora 17 și 28 minute**.

⚠ Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Numărul de clienți pe zi de la ghișeul unei bănci poate fi modelat cu ajutorul unei variabile aleatoare $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Pentru a îmbunătății serviciile oferite, banca vrea să estimeze parametrul λ atât prin metoda momentelor cât și prin metoda verosimilității maxime. Pentru aceasta dispune de următorul eșantion înregistrat pe parcursul a două săptămâni:

`X: 24 22 29 23 32 29 22 29 20 26 27 27 30 24`

a) Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor $\tilde{\lambda}$ și estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\lambda}$ și verificați dacă aceștia sunt deplasați, consistenți și eficienți. Determinați repartiția lor limită.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\lambda(X_1 = 1 \,|\, X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 2 (asemănător cu ex 3, 12 mai 2018)

10p

Numărul de clienți care intră în magazinul Unirea zilnic poate fi modelat cu ajutorul unei variabile aleatoare repartizate Poisson de parametru λ, cunoscut. Odată intrat, un client cumpără produse în valoare de cel puțin 250 RON cu probabilitatea p. Pentru a estima p avem la dispoziție un eșantion $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{20}$ pentru 20 zile, reprezentând numărul de clienți, zilnic, care au efectuat cumpărături de cel puțin 250 RON:

`Y: 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0`

Propuneți un estimator pentru p, studiați proprietățile acestuia și dați o estimare plecând de la eșantionul dat (știind că $\lambda = 20$).

Exercițiul 3

10p

Fie X o v.a. de densitate

$$f_\theta(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

[1] Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner

cu $\theta > 0$ un parametru și A o constantă (care depinde de θ). Fie $X_1, \ldots, X_n$ un eșantion de talie $n \in \mathbb{N}^*$ din populația X.

a) Determinați constanta A și calculați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ, verificați dacă este deplasat, consistent și eficient și găsiți repartiția limită a acestuia.

c) În cazul în care $\theta = 4$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui $X \sim f_\theta(x)$. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0, 1]$: $u_1 = 0.008$, $u_2 = 0.321$ și $u_3 = 0.582$.

12.Mai.2020

Exercitiul 1

$X: 24\ 22\ 29\ 23\ 32\ 29\ 22\ 29\ 20\ 26\ 27\ 27\ 30\ 24$ (14)

a) • $\tilde{\lambda}$ = estimatorul obț. prin met. mom.

Dacă $X \sim Pois(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(X=x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum x_i}$

$E_\lambda[X] = \overline{X}$

$\lambda = \overline{X} \Rightarrow \tilde{\lambda} = \overline{X}$ (est. prin met. mom).

$\overline{X_n} = \overline{X_{14}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{24+22+\dots+24}{14} = \frac{364}{14} = 26$

$(\tilde{\lambda} = \overline{X_{14}} = 26)$

• $\hat{\lambda}$ = estim. obț. prin ver. max.

$\boxed{L(\lambda; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)} =$ funcția de verosimilitate pt. va discrete

$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!} = e^{-\lambda n} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$

$\Rightarrow \ell(\lambda, x_1, \dots x_n) = \ln L = -\lambda n + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n}\left(\ln \lambda^{x_i} - \ln(x_i!)\right)$

$= -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} \ln \lambda^{x_i} - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln\lambda - \sum \ln(x_i!)$

$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = -n + \sum x_i \cdot \frac{1}{\lambda}$

egalăm $\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \sum \frac{x_i}{\lambda} = n \Rightarrow \frac{\sum x_i}{\lambda} = n \Rightarrow \hat{\lambda} = \boxed{\frac{\sum x_i}{n} = \overline{X}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{\lambda} = \overline{X}$

$\hat{\lambda} = \overline{X_n} = \overline{X_{14}}$

$(\hat{\lambda} = 26)$

$\boxed{\text{un estimator } \hat{\theta} \text{ e nedeplasat} \Leftrightarrow E_\theta(\hat{\theta}) = \theta}$

$\boxed{\hat{\lambda} = \tilde{\lambda} = \overline{X}}$ știm asta

$E_\lambda[\hat{\lambda}] = E_\lambda[\tilde{\lambda}] = E_\lambda[\overline{X}] = E_\lambda\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right] = \frac{1}{n} \cdot E_\lambda\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] =$

$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E_\lambda[X_i]$ [Dar, la Poisson, $E[X] = \lambda$] și $E[X_i] = E[X]\ \forall i$ $\Rightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X =$

$= \frac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda \Rightarrow \hat{\lambda}$ și $\tilde{\lambda}$ sunt nedeplasați!

$\boxed{\hat{\theta} \text{ e eficient} \Leftrightarrow Var(\hat{\theta}) = MIRC}$

$\boxed{\hat{\theta} \text{ e consistent} \Leftrightarrow \hat{\theta} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta}$

$$Var(\hat{\lambda}) = Var(\tilde{\lambda}) = Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2} Var \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var\, x_i \xrightarrow{Var(x_i) = Var(x)} \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var\, x = \frac{1}{n} \cdot Var\, x =$$

e știut la rep Poisson că $Var\, x = \lambda$

$$= \frac{1}{n} \cdot \lambda = \frac{\lambda}{n}$$

$\boxed{Var\, x = E[x^2] - (E[x])^2}$

Acum aflăm MIRC-ul

$$MIRC = \frac{1}{n \cdot E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln P(X = x)\right)^2\right]} = \frac{1}{-n \cdot E\left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \cdot \ln P(X = x)\right]}$$

$$\ln P(X = x) = \ln \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = \ln(\lambda^x \cdot e^{-\lambda}) - \ln x!$$

$$= \ln \lambda^x + \ln e^{-\lambda} - \ln x! = x \ln \lambda - \lambda \ln e - \ln x! = x \ln \lambda - \lambda - \ln x!$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln P(X = x)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(x \ln \lambda - \lambda - \ln x!)$$

$$= \frac{x}{\lambda} - 1 - \frac{\partial \ln x!}{\partial \lambda} = \frac{x}{\lambda} - 1 - 0 = \frac{x}{\lambda} - 1$$

$$\frac{\partial^2 \ln P(X = x)}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{x}{\lambda} - 1\right) = \frac{-x}{\lambda^2}$$

$$\text{Deci, } MIRC = \frac{1}{-n \cdot E\left[-\frac{x}{\lambda^2}\right]} = \frac{1}{-n} \cdot \frac{1}{E\left[\frac{-x}{\lambda^2}\right]} = \frac{1}{-n} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{\lambda^2} \cdot E[x]} =$$

$$= \frac{1}{\frac{n}{\lambda^2} \cdot E[x]} = \frac{\lambda^2}{n} \cdot \frac{1}{E[x]} = \frac{\lambda^2}{n\lambda} = \frac{\lambda}{n}$$

$\Rightarrow Var(\hat{\lambda}) = MIRC = Var(\tilde{\lambda}) \Rightarrow \tilde{\lambda}, \hat{\lambda}$ sunt <u>eficienți</u>

Consistența

Legea nr. mari - teoremă => Fie $(X_n)_n$ un șir de v.a. iid, cu $\mu = E[X_i] < \infty$

Atunci: $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{as} \mu$

Din legea nr mari => $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} \xrightarrow{as} E[X_i] = E[X]$

IMPLICAȚIE: Dacă $X_n \xrightarrow{as} X$, atunci $X_n \xrightarrow{P} X$

Dacă $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$

Deci, $\overline{X} \xrightarrow{P} E[X] = \lambda$

$(\hat{\lambda} = \tilde{\lambda})$

$\Rightarrow \hat{\lambda} \xrightarrow{P} \lambda$ și $\tilde{\lambda} \xrightarrow{P} \lambda \Rightarrow \hat{\lambda}$ și $\tilde{\lambda}$ sunt consistenți

- repartiția lor limită:

$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \lambda)}{\lambda} \xrightarrow{d} N(0,1)$, din Th. Limitei centrale pt. λ finit.

b. $P_\lambda(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$ est. de ver max? consistent?

sol $P_\lambda(X_1 = 1 \mid X_1 > 0)$

$X_1 \sim P(\lambda) \Rightarrow X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ & & \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} & & \end{pmatrix} \quad k \in N$

X nu poate fi negativ pt. Poisson

$\frac{P((X_1 = 1) \cap (X_1 > 0))}{P(X_1 > 0)} = \frac{P(X_1 = 1)}{1 - P(X \le 0)} = \frac{P(X_1 = 1)}{1 - P(X = 0)} = \frac{\frac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!}}{1 - \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!}} =$

$= \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \overset{not}{=} g(\lambda)$

Vrem un estimator de verosimilitate maximă pt $g(\lambda)$

$MiRC = \frac{g'(\lambda)^2}{n \cdot E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f_\lambda(x_i)\right)^2\right]} = \frac{g'(\lambda)^2}{-n \cdot E\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln f_\lambda(x_i)\right)\right]}$

Dacă vreau estimatorul de veros. max pt $g(\lambda)$, plec de la estimatorul de veros max pt. λ și aplic pe el funcția respectivă.

$\hat{\lambda} = \bar{X}$

$g(\lambda) = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

<u>Th.1</u>. Dacă $\hat{\theta}$ este eVM pt. θ, atunci, pt. $\forall$ fct. g avem că $g(\hat{\theta})$ este EVM pt $g(\theta)$.

Din proprietatea de invarianță $\Rightarrow$ estim de ver. max pt $g(\lambda)$.

$$g(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda} \cdot e^{-\hat{\lambda}}}{1-e^{-\hat{\lambda}}} = \frac{\bar{X} \cdot e^{-\bar{X}}}{1-e^{-\bar{X}}} \overset{not}{=} \widehat{g(\lambda)}$$

Verificăm consistența:

Avem că $\bar{X} \xrightarrow{P} \lambda$ (din subpct. a)).

<u>Th. aplicațiilor continue</u>

Fie $(X_n)_n$ este un șir de va, X o va și g o fct ale cărei pcte de discontinuitate sunt notate cu D_g. Dacă $P(X \in D_g) = 0$, atunci șirul $(g(X_n))_n$ converge la $g(X)$ în același mod în care $X_n \to X$

Dacă $X_n \xrightarrow{P} X$, atunci $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ (analog pt $X_n \xrightarrow{as} X$ și $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$)

Din th aplicațiilor continue $\Rightarrow g(\bar{X}) \xrightarrow{P} g(\lambda)$, adică $\widehat{g(\lambda)}$ e consistent

$$\left(\frac{\bar{X} \cdot e^{-\bar{X}}}{1-e^{-\bar{X}}} = g(\hat{\lambda}) \right)$$

c). Verificăm dacă $\boxed{E[\widehat{g(\lambda)}] = g(\lambda)} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

Dacă g e convexă, avem că $E(g(X)) > g(E(X))$ | fcții
Dacă g e concavă, avem că $E(g(X)) < g(E(X))$ | subarmonice

Verificăm convexitatea:

$$g(x) = \frac{x \cdot e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$$g'(x) = \frac{(x \cdot e^{-x})'(1-e^{-x}) - x \cdot e^{-x}(1-e^{-x})'}{(1-e^{-x})^2} =$$

Exercițiul 2

$X \sim Pois(x)$

$Y_1 \dots Y_{20}$ eșantion de 20 zile

Y: 000000 11 000000000000

estimator pt. p, studiați proprietățile acestuia și estimarea plecând de la eșantionul dat ($\lambda = 20$)

Sol

$X \sim Pois(\lambda)$

$Y \mid (X = k) \sim Binom(k, p)$ $\Rightarrow$ $Y \sim Pois(x, p)$

$$\hat{\mu} = \overline{X_n} \Rightarrow \lambda \cdot p = \overline{X_n} \Rightarrow p = \frac{\overline{X_n}}{\lambda} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n \cdot \lambda} = \frac{0 + \dots 0 + 1 + 1}{20 \cdot 20} =$$

$$p = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} \Rightarrow p = 0{,}05$$

Continuare ex. 1 cl.

$$= \frac{(e^{-x} + x(-e^{-x}))\cdot(1-e^{-x}) - x\cdot e^{-x}(-(-e^{-x}))}{(1-e^{-x})^2} = \frac{(e^{-x} + x\cdot(-e^{-x}))(1-e^{-x}) - x\cdot e^{-x}\cdot e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{e^{-x} - e^{-2x} - x\cdot e^{-x} + x\cdot e^{-2x} - x\cdot e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(1-e^{-x}-x)}{(1-e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(1-e^{-x}-x)}{(1-e^{-x})^2}$$

$$g''(x) = \frac{(e^{-x})'(1-e^{-x}-x) - (e^{-x})(1-e^{-x}-x)'}{(1-e^{-x})^4} = \frac{-e^{-x}\cdot(1-e^{-x}-x) - e^{-x}\cdot(e^{-x}-1)}{(1-e^{-x})^4} =$$

$$= \frac{-e^{-x}\cdot(1-e^{-x}-x+e^{-x}-1)}{(1-e^{-x})^4} = \frac{e^{-x}\cdot x}{(1-e^{-x})^4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow g \text{ e convexă}$$

$$\Rightarrow E[g(x)] > g(E[x]) \Rightarrow E[g(\bar{X})] > g(E[X]) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{E\left[\frac{\bar{X}\cdot e^{-\bar{X}}}{1-e^{-\bar{X}}}\right]}_{E[g(\hat{\lambda})]} > g(\lambda) = \frac{\lambda\cdot e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

Deci, $E[g(\hat{\lambda})] \neq g(\lambda) \Rightarrow g(\hat{\lambda})$ e deplasat.

Exercitiul 3

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty u \cdot e^{-u} du$$

$\Gamma(2) = 1$

$\Gamma(3) = 2$

$$f_\theta(x) = \begin{cases} A e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

a). $A = ?$, $\tilde{\theta}$ (m. mom.)

$$\int_0^\infty A \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 1 \Rightarrow \theta A \int_0^\infty e^{-u} du = 1 \Rightarrow -A \cdot \theta \cdot e^{-u} \Big|_0^\infty = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\theta}$$

$$\Rightarrow f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Met. momentelor: $E[X] = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta \int_0^\infty u \cdot e^{-u} du = \theta \Gamma(2)$

$\Rightarrow \underline{\tilde{\theta}_n = \overline{X_n}}$ ($\tilde{\theta}$ nedeplasat și consistent)

b). $\hat{\theta} = ?$ (verosim max), deplasat, consistent și eficient), rep. limită a acestuia.

$$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} \cdot e^{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} \cdot e^{\frac{-\overline{X_n} \cdot n}{\theta}}$$

$$l = -\ln(\theta^n) + \frac{-\overline{X_n} \cdot n}{\theta} = -n \cdot \ln\theta - \frac{\overline{X_n} \cdot n}{\theta}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{\overline{X_n} \cdot n}{\theta^2}$$

$$\log f_\theta = \ln\theta - \frac{x}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2\overline{X_n} \cdot n\theta}{\theta^3}$$

$$\frac{\partial^2 \log f_\theta}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2x}{\theta^3}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{-n(\theta + \overline{X_n})}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \theta + \overline{X_n} = 0 \Rightarrow \overline{X_n} = \hat{\theta}$$

Deci $\overline{X_n} = \hat{\theta} = \theta$ estim. de verosim. max. $\Rightarrow \hat{\theta}$ e nedeplasat

$$E[\overline{X_n}] = E[X] = \theta$$

$$E[\overline{X_n}^2] = E[X^2] = \underbrace{\frac{1}{\theta}\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx}_{} = \underbrace{\theta^2 \Gamma(3)}_{} = \underbrace{2\theta^2}_{}$$

$$Var(\overline{X_n}) = E[\overline{X_n}^2] - E[\overline{X_n}]^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

$$E\left[-\frac{1}{\theta^2} + \frac{2X}{\theta^3}\right] = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} E[X] = \frac{-1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

MIRC $= \theta^2 \Rightarrow \hat{\theta}$ e eficient.

$$\text{MIRC} = \frac{1}{n \cdot E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \ln f_\theta(x_i)\right)^2\right]} = \frac{1}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \cdot \ln f_\theta(x_i)\right]}$$

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \lambda)}{\lambda} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

(Th Lim. centrale pt. λ finit).

c). $\theta = 4$, 3 val. aleatoare, $X \sim f_\theta(x)$.

$(0,1]$: $u_1 = 0{,}008$, $u_2 = 0{,}321$, $u_3 = 0{,}582$ (rep. uniformă)

Aplic met respingerii pt. caz continuu.

Se dă f densitatea

Propunem g densitatea cunoscută

$f(x) \leq c \cdot g(x)$

Generăm $U \sim U(0,1)$; $X \sim g$

Dacă $cg(x)\,U \leq f(x)$. Atunci $z \to f$

Algoritm:

Se cere $X \sim f$. Se cunoaște $Y \sim g$

$\exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î. $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Generez y (demonstrez că f e densitate, calculez $h(x) = f(x)\,g(x)$.
Determin $f'(x)$, îi fac tabelul de semn, găsesc punctul de maxim pt. $h \Rightarrow h = c$)

Determin $\frac{f(x)}{c \cdot g(x)}$

Generez U uniformă cu $U \leq \frac{f(y)}{c \cdot g(y)}$

Aleg valori reale pt. y și U.

Le testez în inegalitate

Dacă o verifică $X = Y$, astfel reiau algoritmul.