Davidescu-Filip Olivia-Alexandra 9.03.2022

Elemente de calcul științific
TUTORIAT 1

Sisteme de ecuații liniare

Ne propunem să rezolvăm sisteme de ecuații liniare pătratice:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \qquad (1)$$

- $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă
- $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$

} → Date

- $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ → Necunoscute

Observație: Vrem să calculăm numeric (= cât mai precis) soluția sistemului (1) fără a calcula inversa matricii A.

Sisteme triunghiulare

- Matrice inferior triunghiulară

$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară dacă $a_{ij} = 0, \forall 1 \le i < j \le n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matrice superior triunghiulară

$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară dacă $a_{ij} = 0, \forall 1 \le j < i \le n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Observații:

- $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matrice superior / inferior triunghiulară
$\Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

- $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matrice superior / inferior triunghiulară
A inversabilă $\Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i = \overline{1,n}$

- $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matrice superior / inferior triunghiulară
dacă există A^{-1}, atunci ea este superior / inferior triunghiulară

Transformări elementare

- permutarea a două linii / ecuații E_i și E_k: $E_i \leftrightarrow E_k$
- înmulțirea unei linii / ecuații cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}^*$: $\alpha E_i \rightarrow E_i$
- adunarea unei linii / ecuații E_i cu o altă linie / ecuație E_k înmulțită cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}^*$: $E_i + \alpha E_k \rightarrow E_i$

Metoda de Eliminare Gauss (MEG)

Folosind transformări elementare, modificăm sistemul (1) într-un sistem echivalent superior triunghiular:

$$U\underline{x} = \underline{\tilde{b}} \quad (2)$$

$$U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$u_{ij} = 0, \ \forall 1 \leq j < i \leq n$$

$$\underline{\tilde{b}} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

Sistemul (2) se rezolvă folosind metoda substituției descendente.

· Metoda de Eliminare Gauss fără Pivotare (MEGFP)

<u>Date</u>: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$\underline{b} = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$

<u>Algoritm</u>:

$k = \overline{1,n}$:

  $i = \overline{k+1,n}$:

    $m = a_{ik} / a_{kk}$

    $b_i = b_i - m b_k$

    $j = \overline{k+1,n}$:

      $a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$

    end

    $a_{ik} = 0$

  end

end

· Metoda de Eliminare Gauss cu Pivotare Parțială (MEGPP)

<u>Date</u>: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ $\quad \underline{b} = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$

<u>Algoritm</u>:

$k = \overline{1,n-1}$:

  $\ell = |a_{\ell k}| = \max\limits_{i=\overline{k,n}} |a_{ik}| \quad (k \le \ell)$

  $A = P_{\ell k} A \quad (\text{i.e. } (E_\ell) \leftrightarrow (E_k))$

  $i = \overline{k+1,n}$:

    $m = a_{ik} / a_{kk}$

    $b_i = b_i - m b_k$

    $j = \overline{k+1,n}$:

      $a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$

    end

    $a_{ik} = 0$

  end

end