$\boxed{\begin{array}{l}\text{Geometrie} \\ \text{SEMINARUL 3}\end{array}}$

ec. parametrică în coordonate

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Exc 3.1 $M = (1,2)$

$d_0 : 3x - 2y + 2 = 0$

(a) Găsiți o ec. parametrică pentru d_0

(b) Scrieți ec. dreptei $d_1 \ni M$ a.î. $d_1 \perp d_0$

(c) Aflați coord. punctelor P și Q unde $P = pr_{d_0} M$ și Q este simetricul lui M față de d_0. $(Q = sym_{d_0} M)$

Rez.: (a)

$$3x - 2y + 2 = 0$$

$$3x = 2y - 2$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = t \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

(b) $v = (a,b) \perp d_1$, unde $a = 3, b = -2$. $M(1,2)$

$d : ax + by + c = 0$ $\quad v = (a,b) \perp d$ vector normal la d

$u = (p, q) \parallel d$ vector paralel cu d (director pt. d)

$(-b, a)$

$\langle u, v \rangle = 0$

$p, q = ?$ a.î. $ap + bq = 0$. Pot alege $p = -b$

$q = a$

$$d_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} \Longrightarrow d_1 : 2x + 3y - 8 = 0$$

$$\begin{cases} d_0: 3x-2y+2=0 \\ d_1: 2x+3y-8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x-6y+6=0 \\ 4x+6y-16=0 \end{cases}$$

$$13x-10=0 \implies x=\frac{10}{13}$$

din ec. lui d_0, $y=\frac{-3x-2}{-2}=\frac{3x+2}{2}=\frac{\frac{30}{13}+2}{2}=\frac{56}{2\cdot 13}=\frac{28}{13}$

$$P=\left(\frac{10}{13},\frac{28}{13}\right)$$

$P=$ mijl. lui MQ. $\qquad M=(1,2)$

$$x_Q=2x_P-x_M=\frac{20}{13}-1=\frac{7}{13}$$

$$y_Q=2y_P-y_M=\frac{56}{13}-2=\frac{30}{13}$$

$\boxed{\text{Exc } 3.2}$ $\quad d_1: mx+2y=8$

$d_2: x+(m-1)y=4$

Determinați poziția relativă a celor 2 drepte în funcție de $m\in\mathbb{R}$.

Rez.: $v_1=(m,2)\perp d_1$

$v_2=(1,m-1)\perp d_2$

$d_1\perp d_2 \iff v_1\perp v_2 \iff \langle v_1,v_2\rangle=0 \iff m\cdot 1+2(m-1)=0$

$\iff m=\frac{2}{3}$

$d_1 \parallel d_2 \iff v_1\parallel v_2 \iff v_1=\alpha\cdot v_2$, $\alpha\in\mathbb{R}$ $\iff \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m-1\end{vmatrix}=0 \iff m^2-m-2=0$

$\iff m\in\{-1,2\}$

$m=-1$: $\quad d_1: -x+2y=8$ $\quad$ Sunt paralele, dar

$d_2: -x+2y=-4$ $\quad$ nu coincid

$m=2$ $\quad d_1: 2x+2y=8$ $\quad$ Dreptele coincid.

$d_2: x+y=4$

Exc 3.3 $\quad d_1: 3x-2y+2=0$

$d_2: x-2y+1=0$

Determinați punctele $P\in d_1$ a.î. $dist(P, d_2)=1$.

Rez.: $\underset{(x_p, y_p)}{P} \in d_1 \Rightarrow 3x_p-2y_p+2=0$

$$y_p=\frac{3x_p+2}{2}$$

$$1=dist(P,d_2)=\frac{\left|1\cdot x_p-2\cdot\frac{3x_p+2}{2}+1\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$P(x_p, y_p)$

$d: ax+by+c=0$

$$dist(P,d)=\frac{|ax_p+by_p+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$|x_p-3x_p-2+1|=\sqrt{5}$$

$$|-2x_p-1|=\sqrt{5}$$

$$|2x_p+1|=\sqrt{5} \Longrightarrow 2x_p+1=\pm\sqrt{5}$$

$$x_p\in\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

$$x_p=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y_p=\frac{3\cdot\frac{-1-\sqrt{5}}{2}+2}{2}=\frac{1-3\sqrt{5}}{4}$$

$$x_p=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y_p=\frac{1+3\sqrt{5}}{4}$$

$$P_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-3\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$P_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+3\sqrt{5}}{4}\right)$$

Exc 34 $\quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$

Considerăm A și B = intersecțiile dreptei $ax + (2a+1)y + a^2 = 0$ cu axele Ox, resp. Oy.

(a) Scrieți ec. dreptei d_1 a.î. $A \in d_1$, $d_1 \parallel$ prima bisectoare

(b) - - ——— — - - d_2 a.î. $B \in d_2$ și $d_2 \perp$ prima bisectoare.

(c) Aflați a a.î. $d_1 \cap d_2 = \{M\}$ și $M \in d: x+2y = 1$.

Rez.:

(a) $x = 0 \Rightarrow a \cdot 0 + (2a+1)y + a^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-a^2}{2a+1}$

$$\boxed{B = \left(0, \frac{-a^2}{2a+1}\right)} \in Oy$$

$y = 0 \Rightarrow a \cdot x + (2a+1) 0 + a^2 = 0 \Rightarrow x = -a$

$$\boxed{A = (-a, 0)} \in Ox$$

prima bis: vector director $u = (1,1)$

$$d_1 : \frac{x - (-a)}{1} = \frac{y - 0}{1}$$

$$d_1 : x - y + a = 0$$

(b) $d_2 \perp$ prima bis. $\Rightarrow d_2 \parallel$ a doua bisectoare $\Rightarrow (-1, 1)$ vector director pentru d_2

$$d_2 : \frac{x - 0}{-1} = \frac{y + \frac{a^2}{2a+1}}{1}$$

$$d_2 : x + y + \frac{a^2}{2a+1} = 0$$

$$\{M\} = d_1 \cap d_2 : \begin{cases} x - y + a = 0 \\ x + y + \dfrac{a^2}{2a+1} = 0 \end{cases}$$

$$2x = -a - \frac{a^2}{2a+1}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3a^2 - a}{2a+1} \Rightarrow x = \frac{-3a^2 - a}{4a+2}$$

$$y = x + a = \frac{-3a^2 - a}{4a+2} + a = \frac{a^2 + a}{4a+2}$$

$M \in d : x + 2y = 1$

$$\frac{-3a^2 - a}{4a+2} + 2\frac{a^2 + a}{4a+2} = 1$$

$$-6a^2 - 2a + a^2 + a = 4a + 2$$

$$-5a^2 - 5a - 2 = 0$$

$$5a^2 + 5a + 2 = 0 \qquad a = \frac{-5 \pm \sqrt{25 -}}{10}$$

$\Delta < 0$

$\therefore$ nu are sol. reale

$$-3a^2 - a + 2a^2 + 2a = 4a + 2$$

$$-a^2 + a = 4a + 2$$

$$a^2 + 3a + 2 = 0 \Rightarrow a \in \{-1, -2\}$$

Exc 3.5

$A = (0, -2)$

$B = (2, -3)$

$C = (3, 4)$

(a) Verificați că A, B, C nu sunt coliniare

(b) Aflați coord. centrului de greutate al lui ABC

(c) Aflați coord. centrului cercului circumscris ΔABC

(d) ... coord. ortocentrului ΔABC

(e) $A_{ABC} = ?$

Rezolvare: (a) AB: $\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-(-2)}{-3-(-2)}$

AB: $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-1}$

AB: $x+2y+4=0$. $C(3,4)$

$3+2\cdot 4+4 \neq 0$ Deci $C \notin AB$.

(b) G = centrul de greutate $= \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

(c) Calculăm ec. mediatoarei lui BC, notată m_{BC}

M = mijl. lui $BC = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

BC: $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{4+3}$; BC: $x-2 = \frac{y+3}{7}$

BC: $7x-y-17=0$ vector normal: $(7,-1)$

m_{BC} : $\frac{x-\frac{5}{2}}{7} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-1} \iff m_{BC}: x-\frac{5}{2}+7y-\frac{7}{2}=0$

$\boxed{m_{BC}: x+7y-6=0}$

$m_{AB}=?$ N = mijl. lui $AB = \left(1, -\frac{5}{2}\right)$

AB: $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-1} \iff$ AB: $x+2y+4=0$ Vector normal: $(1,2)$

m_{AB} : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+\frac{5}{2}}{2} \iff \boxed{m_{AB}: 2x-y-\frac{9}{2}=0}$

$\{O\} = m_{AB} \cap m_{BC} : \begin{cases} x + 7y - 6 = 0 \quad / \cdot (-2) \\ 2x - y - \frac{9}{2} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x - 14y + 12 = 0 \\ 2x - y - \frac{9}{2} = 0 \end{cases}$

$-15y - \frac{9}{2} + 12 = 0$

$-15y + \frac{15}{2} = 0$

$x = 6 - 7 \cdot \frac{1}{2} \Leftarrow \boxed{y = \frac{1}{2}}$

$x = 6 - \frac{7}{2}$

$\boxed{x = \frac{5}{2}} \Rightarrow O = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(d) H = ortocentrul lui ABC.

h_A = înălțimea din A

$A(0,-2)$
$B(2,-3)$
$C(3,4)$

Vector normal la BC: $(7,-1)$

$h_A : \frac{x}{7} = \frac{y+2}{-1}$

$\boxed{h_A : x + 7y + 14 = 0}$

h_C = înălțimea din C. Vector normal la AB: $(1,2)$

$h_C : \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2}$

$\boxed{h_C : 2x - y - 2 = 0}$

$\{H\} = h_A \cap h_C : \begin{cases} x + 7y + 14 = 0 \quad / \cdot (-2) \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x - 14y - 28 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$

$-15y - 30 = 0$

$$\boxed{x=0} \xleftarrow[\text{ec. lui } h_C]{\text{din}} \boxed{y=-2}$$

$$H=(0,-2) \overset{\text{obs!}}{=} A$$

deci ΔABC este dreptunghic în A.

(e) $$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-6)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}}{2} = \frac{15}{2}$$

$\boxed{\text{Exc 3.9}}$ Fie d_1 și d_2 drepte în plan și mulțimea

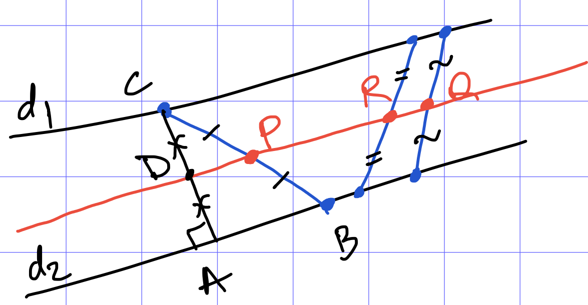
$$\mathcal{M} = \{ P \mid P = \text{mijlocul unui segment cu un capăt pe } d_1 \text{ și celălalt pe } d_2 \}$$

Ce este $\mathcal{M}$ în funcție de poziția relativă a dreptelor d_1 și d_2?

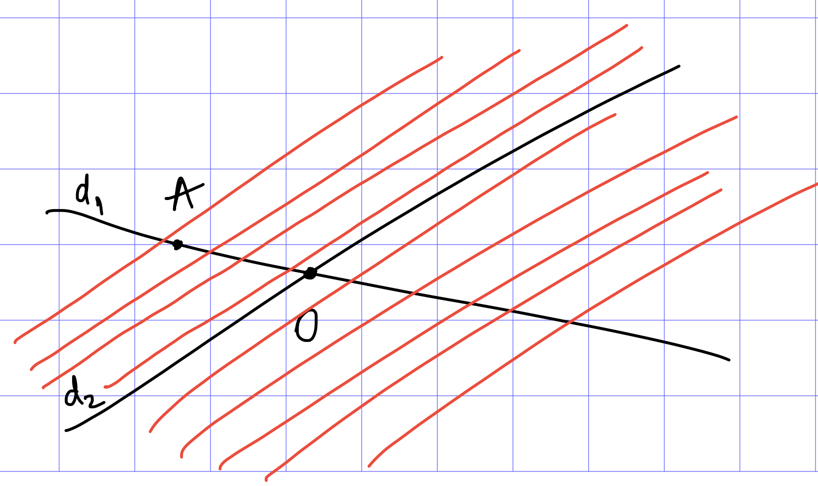
Rez.: Cazul 1: $d_1 \parallel d_2$. $\mathcal{M}$ = dreaptă paralelă cu d_1 și d_2.

Justificare: Cu th. Thales

la jumătatea distanței între dreptele d_1 și d_2

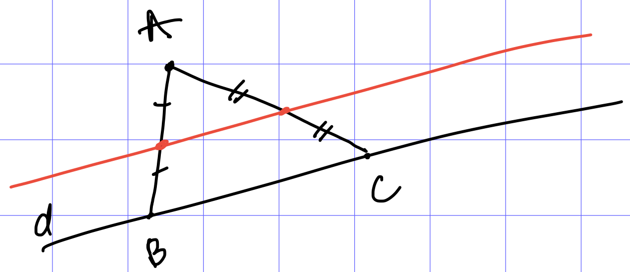


Cazul 2: $d_1 \nparallel d_2$



$\mathcal{M}$ = tot planul

Luăm A fixat în O $(A=O)$
și B mobil pe d_2. $\Big\} \Rightarrow$ Obținem toată dreapta d_2



Justificare analitică:
(pentru $d_1 \not\parallel d_2$)

$$d_1:\ ax+by+c=0$$
$$d_2:\ mx+ny+p=0$$

$d_1 \not\parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} \neq 0$

Fie $O=(x_0,y_0)=d_1\cap d_2$

$$d_1:\begin{cases} x=x_0-bt \\ y=y_0+at \end{cases}$$

$u=(u_1,u_2)=$ vect. director al lui d_1
$=(-b,a)$

$$A(t)=(x_0-bt,\ y_0+at)\in d_1,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

Facem la fel pentru d_2

.... și ... restul este TEMĂ