Examen

2 Iunie 2018

Timp de lucru 2h30. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \,|\, X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 2

10p

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$ unde $\theta \in (0,1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

Exercițiul 3

10p

Calculați marginea Rao-Cramer pentru familia $\mathcal{N}(\mu, 1)$ unde μ este necunoscut. Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor și verificați dacă este eficient.

Exercițiul 4

10p

Considerăm următorul eșantion de talie 20 dintr-o populație Bernoulli de parametru $\theta \in (0,1)$:

`0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0`

a) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și determinați informația lui Fisher $I(\theta)$.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{V}_\theta[X_1]$. Este acesta nedeplasat? Dar consistent? Justificați răspunsul.

c) Construiți un interval de încredere pentru $\hat{\theta}$ de nivel 95%.

Exercitiul 1

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim P(\theta)$

a) $\hat{\theta}$ est. de vers. max., deplasat, consistent și eficient?

$f_\theta(k) = P(X=k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$

$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = e^{-n\theta} \frac{\theta^{x_1+\dots+x_n}}{(x_1+\dots+x_n)!}$

$\ell(\theta; x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots x_n) \log(\theta) - n\theta - \ln(x_1+\dots+x_n)!$

$\frac{d\ell}{d\theta}(\theta; x_1, \dots, x_n) = (x_1+\dots+x_n)\frac{1}{\theta} - n$

θ	0	$\overline{x_n}$
$\ell(\theta; x_1, \dots x_n)$	$\nearrow$	$\searrow$

Deci $\ell(\theta; x_1, \dots x_n) = \overline{x_n}$

$\boxed{\hat{\theta} = \overline{X_n}}$

$E[X] = \sum_{k \geq 0} k \cdot e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!}$

$\sum_{k \geq 0} e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} = 1 \Rightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{\theta^k}{k!} = e^\theta \;\Big|\frac{d}{d\theta}$

$\sum k \cdot \frac{\theta^{k-1}}{k!} = e^\theta \;\Big|\cdot\theta \Rightarrow \sum k \cdot e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!} = \theta$

Deci $\boxed{E[X_1] = \theta} = E(\overline{X_n}) = E(\hat{\theta})$, deci $\hat{\theta}$ este nedeplasat

$\hat{\theta} = \overline{X_n} \xrightarrow{P} E[X_1] = \theta$ (LNM) $\Rightarrow \hat{\theta}$ e consistent

Exercitul 3

Marginea Rao - Cramer pt $\mathcal{N}(\mu,1)$

Vezi lab $\overline{XII}$ $MIRC = \frac{1}{n}$ $(I_n = n)$

met momentelor:

$X_1, ---, X_n \sim N(\mu,1)$

$\Rightarrow E[X] = \mu$. Punem $\tilde{\mu}_n = \overline{X_n}$

$Var_\mu(\tilde{\mu}_n) = Var_\mu(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X_1) = \frac{1}{n} = MIRC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ estimator eficient.

---

sau

$X_1, ..., X_n \sim N(\mu,1)$

$$f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}}$$

$$\frac{d}{d\mu} \log f_\mu(x) = \frac{d}{d\mu}\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right) = x-\mu$$

$$I_1 = E\left[\left(\frac{d}{d\mu} \log f_\mu(x)\right)^2\right] = E[(x-\mu)^2] = Var(x) = 1$$

$I_n = n \Rightarrow MIRC = \frac{1}{n}$

$E[X_1] = \mu \Rightarrow \tilde{\mu} = \overline{X_n}$ $\rightarrow$ met mom

$Var(\tilde{\mu}) = var\, \overline{X_n} = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X_1) = \frac{1}{n}$

$Var(\tilde{\mu}) = MIRC$, deci $\tilde{\mu}$ e eficient.

Scanned with CamScanner

Exercitiul 4

0 11 0 11 0 11 00 11 111 0000 Bernoulli, de talie 20.

a). est. de veros max $\hat{\theta}$, informatia lui Fisher $I(\theta)$ - ?

$X_1, \dots, X_n \sim Bern(\theta)$ $[n = 20]$

$P_\theta(X_i = x_i) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$

$L(\theta, x_1, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n - \sum x_i} =$

$= (1-\theta)^n \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum x_i}$

$\ell(\theta, x_1, \dots, x_n) = \sum x_i \ln\theta + n\ln(1-\theta) - (\sum x_i)\ln(1-\theta)$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n}{1-\theta} + \frac{\sum x_i}{1-\theta} = \sum x_i\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}\right) - \frac{n}{1-\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{x_n}$

$\hat{\theta}_{20} = \frac{11}{20} = 0,55$

$I(\theta)$:

$\log P_\theta(x) = x\ln\theta + \ln(1-\theta) - x\ln(1-\theta)$

$\frac{\partial^2 \log P_\theta(x)}{\partial\theta^2} = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{x}{(1-\theta)^2}$

Deci, $I_1(\theta) = -\mathbb{E}\left[-\frac{x}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{x}{(1-\theta)^2}\right]$

$= \frac{\mathbb{E}[x]}{\theta^2} + \frac{1}{(1-\theta)^2} - \frac{\mathbb{E}[x]}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{(1-\theta)^2} - \frac{\theta}{(1-\theta)^2} =$

$= \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$

$\Rightarrow I_n(\theta) = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$

b). $V_0[X_1]$, nedeplasat?, consistent?

$V_0[X_1] = \theta(1-\theta)$

$\hat{\theta} = \overline{X_n} \Rightarrow T_n$ est. de veros. max pt $V_0[X_1]$

$T_n = \overline{X_n}(1-\overline{X_n})$

Nedeplasarea: $E[T_n] = E[\overline{X_n}] - E[(\overline{X_n})^2]$

$= \theta - (Var(\overline{X_n}) + (E[X_n]^2))$

$Var(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \cdot Var(X_1 + \dots + X_n) = \frac{n}{n^2} Var(X_1) = \frac{1}{n} \cdot \theta(1-\theta)$

$E[T_n] = \theta\left(\frac{1}{n}\theta(1-\theta) + \theta^2\right) = \theta(1-\theta) - \frac{1}{n}\theta(1-\theta) = \frac{n-1}{n}\theta(1-\theta)$

Deci $E[T_n] \neq \theta(1-\theta) \Rightarrow T_n$ nu e deplasat

Consecință:

$\overline{X_n} \xrightarrow{P} \theta$

Fie $g: [0,1] \to R$

$g(\theta) = \theta(1-\theta)$ continuă

Din T gal. cont. $\Rightarrow g(\overline{X_n}) \xrightarrow{P} g(\theta)$

$T_n \xrightarrow{P} \theta(1-\theta) \Rightarrow T_n$ e consistent.