EXAMEN EDP - 3 FEBRUARIE 2016/2017 (GRUPA 301)

- NUME si PRENUME:

Cateva instructiuni:

- Cu exceptia unei singure foi nu sunt permise alte materiale ajutatoare.
- Telefoanele si orice alte dispozitive electronice trebuie mentinute inchise pe tot parcursul examenului.
- 1 punct din oficiu
- Durata examen: 3 ore

Problema 1. *(3p). Fie functia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x-1|}$.

1). Definiti spatiul $W^{1,1}(\mathbb{R})$.

2). Determinati derivata slaba f' *a lui* f *si aratati ca* $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

3). Aratati ca $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ *si calculati norma lui* f *in* $W^{1,1}(\mathbb{R})$.

4). Consideram functia $u : B_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *data de*

$$u(x) = \left(\ln \frac{2}{|x|}\right)^{\frac{1}{2}-\epsilon}, \quad \epsilon \geq 0, \quad x = (x_1, x_2),$$

unde $B_1(0)$ *este bila unitate din* $\mathbb{R}^2$ *centrata in origine.*

5). Pentru $\epsilon > 0$ *calculati*

$$\int_0^1 \frac{1}{r} \left(\ln \frac{2}{r}\right)^{-1-2\epsilon} dr.$$

6). Aratati ca derivatele partiale $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i \in \{1, 2\}$ *apartin lui* $L^2(B_1(0))$.

7). Sa se scrie formula operatorului Laplacian Δ *pentru functii cu simetrie radiala.*

8). Pentru $\epsilon = 0$ *aratati ca*

$$\Delta u + \frac{u}{4|x|^2 \ln^2(2/|x|)} = 0. \quad \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Problema 2. *(2p). Consideram urmatoarea problema de tip "unde"*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - 2u_{xx}(x,t) = 1, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = x^2, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

i). Consideram

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{t^2}{2}.$$

ii). Scrieti ecuatia satisfacuta de v

iii). Aratati ca pentru orice functie w *de clasa* C^2 *avem*

$$w_{tt}(x,t) - 2w_{xx}(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) w.$$

iv). Pentru v *de mai sus notam*

$$z(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \sqrt{2}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Gasiti ecuatia satisfacuta de z.

v). Gasiti forma generala a functiei z.

vi). Cu z determinat anterior rezolvati ecuatia

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sqrt{2}\frac{\partial v}{\partial x} = z(x,t)$$

si scrieti forma generala a lui v.

vii). Folosind conditiile asupra lui v la $t = 0$ din enunt obtineti pe v si apoi deduceti solutia u a problemei (1).

Problema 3. *(2p). Se considera problema la limita*

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) = u(1,y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ u(0,y) = \sin(2\pi y). & y \in (0,1), \end{cases} \tag{2}$$

1). Scrieti formula lui Green de integrare prin parti.

2). Aratati ca (2) are cel mult o solutie de clasa C^2.

3). Determinati solutia problemei (2) cautand-o in variabile separate sub forma $u(x,y) = A(x)B(y)$.

4). Calculati $\max_\Omega u$, $\min_\Omega u$ unde $\Omega := [0,1] \times [0,1]$.

Problema 4. *(2p). Se considera problema Dirichlet omogena*

$$\begin{cases} (-(2 - \sin x)u'(x))' + u(x) = \cos x, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

1). Definim o solutie slaba pentru (3) ca fiind o functie $u \in H_0^1(0,1)$ ce satisface formularea variationala

$$\int_0^1 (2 - \sin x)u'v'dx + \int_0^1 uvdx = \int_0^1 \cos x v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1). \tag{4}$$

2). Aratati ca daca $u \in C^2([0,1])$ este solutie clasica pentru (3) atunci u este solutie slaba pentru (3) in sensul lui (4).

3). Aratati ca formularea variationala (4) se gaseste in conditiile aplicarii lemei Lax-Milgram si aratati ca exista o unica solutie slaba $u \in H_0^1(0,1)$ in sensul lui (4).