

Examen la analiză matematică¹
an I, sem. I - seria 10
31.01.2022

Numele și prenumele

Grupa

Punctaj seminar

Subiectul 1. a) Fie $A = \left\{ \sin \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{Z} \right\} \cup (7, 12]$ o submulțime a mulțimii numerelor reale \mathbb{R} . Determinați interiorul, aderența, mulțimea punctelor de acumulare și frontiera mulțimii A . Decideți dacă mulțimea A este compactă sau conexă. Justificați!

b) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(e^x + 1) + e^x$. Determinați polinomul Taylor de rang 3 asociat funcției f și punctului $a = 0$.

Subiectul 2. a) Studiați convergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2 \sqrt{n}} x^n$$

în funcție de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

b) Studiați convergența șirului $\left(\frac{2^n}{(n+1)^2 \sqrt{n}} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)_{n \geq 0}$ și calculați limita sa (în caz că aceasta există).

Subiectul 3. Considerăm numărul $a \in \mathbb{R}$ și funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2x+1)}{x} + x\sqrt{x} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x^2} \right), & \text{dacă } x \in (0, \infty), \\ a, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinați valoarea lui a pentru care funcția f este continuă.

ii) Pentru valoarea lui a determinată la punctul **i)** studiați derivabilitatea și uniform continuitatea funcției f .

Subiectul 4. Considerăm șirul de funcții $f_n : [4, 6] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{nx e^{x+1}}{n+x},$$

pentru orice $x \in [4, 6]$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n \geq 1}$.

Subiectul 5. i) Demonstrați că pentru fiecare număr $n \in \mathbb{N}$ ecuația $x^x = e^n$ are o unică soluție strict pozitivă pe care o notăm x_n .

ii) Studiați monotonia și convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$.

iii) Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - x_n) \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

¹Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valorează 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!