(1) Arătați că ecuația

$$(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2=0$$

definește implicit funcția $y=y(x)$ într-o vecinătate a punctului $(1,-1)$. Calculați $y'(1)$, $y''(1)$ și determinați polinomul Taylor de gradul 2 asociat funcției $y=y(x)$ în punctul $x=1$.

Soluție: Fie $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$F(x,y)=(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=6x(x^2+y^2)^2-6x\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=6y(x^2+y^2)^2-6y$$

1) F de clasă C^2

2) $F(1,-1)=0$.

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1)=-18\neq 0$.

Atunci, există U o vecinătate deschisă a lui 1, există V o vecinătate deschisă a lui -1 și o unică fct. $y=y(x)$, $y:U\longrightarrow V$ de clasă C^2 a. î. $y(1)=-1$ și $(x^2+y^2(x))^3-3(x^2+y^2(x))-2=0$, $\forall x\in U$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\ \text{adică}\ y'(x)=\frac{dy}{dx}(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))},\ x\in U$$

$$y'(x)=-\frac{6x(x^2+y^2(x))^2-6x}{6y(x)\cdot(x^2+y^2(x))^2-6y(x)}\Rightarrow y'(x)=\frac{-x}{y(x)},\ y'(1)=1$$

$$y''(x)=-\frac{y(x)-xy'(x)}{y^2(x)}\Rightarrow y''(1)=-\frac{-1-1}{1}=2.$$

$$T_2(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{1}{2}y''(1)\cdot(x-1)^2$$

$$= -1 + (x-1) + (x-1)^2 = x^2 - x + 1$$

<u>Remarcă 1.</u> $y'(x)$ se poate calcula și fără aplicarea formulei derivând în raport cu x ecuația

$$(x^2+y^2(x))^3 - 3(x^2+y^2(x)) - 2 = 0, \ \forall x \in U.$$

Atunci.

$$3(x^2+y^2(x))^2(2x+2y(x)y'(x)) - 6x - 6y(x)y'(x) = 0.$$

$$y'(x) = -\frac{6x(x^2+y^2(x))^2 - 6x}{6y(x^2+y^2(x))^2 - 6y(x)} = -\frac{x}{y(x)}, \ \forall x \in U.$$

<u>Remarcă 2.</u> În acest funcția $y=y(x)$ poate fi determinată explicit. Ecuația

$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) - 2 = (x^2+y^2+1)^2(x^2+y^2-2) = 0.$$

este echivalentă cu

$$x^2+y^2-2 = 0.$$

Cum $y(1) = -1$ rezultă că:

$$y(x) = -\sqrt{2-x^2}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Evident,

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}, \quad y'(1) = 1.$$

$$y''(x) = \frac{\sqrt{2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{(2-x^2)} = \frac{2}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} \Rightarrow y''(1) = 2$$

(2) Să se determine extremele unei funcții implicite $z = z(x,y)$ definită de ecuația

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$$

Soluție: $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 10x - 2y - 2z$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 10y - 2x - 2z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 10z - 2x - 2y$$

F este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$

Ecuația $F(x,y,z) = 0$ definește implicit funcția $z = z(x,y)$ în vecinătatea unui punct $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ pt care $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ și $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Pentru orice (x_0, y_0, z_0) cu aceste proprietăți, există U_{x_0,y_0} - vecinătate deschisă a lui (x_0,y_0) și V_{z_0} - vecinătate deschisă a lui z_0 și o funcție unic determinată $z = z(x,y)$, $z: U_{x_0,y_0} \longrightarrow V_{z_0}$ de clasă C^2 a.î.

$z(x_0,y_0) = z_0$ și $F(x,y,z(x,y)) = 0$, $\forall (x,y) \in U_{x_0,y_0}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}, \qquad \forall (x,y) \in U_{x_0,y_0} \quad (*)$$

Pentru a determina pct de extrem ale lui $z = z(x,y)$ trebuie rezolvat sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Din (*) rezultă că pentru determinarea pct. de extrem local ale fct implicite trebuie să rezolvam sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 10x - 2y - 2z = 0 \\ 10y - 2x - 2z = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0 \\ 10z - 2x - 2y \neq 0 \end{cases}$$

Soluțiile sunt $(1,1,4)$ și $(-1,-1,-4)$. Fiecare din aceste puncte poate fi privit ca punct de forma (x_0, y_0, z_0) din raționamentul din prima parte.

Corespunzator lui $(1,1,4)$ avem fct implicita $z = z_1(x,y)$ cu punctul critic $(1,1)$ și a.î. $z(1,1) = 4$.

Corespunzator lui $(-1,-1,-4)$ avem fct implicita $z = z_2(x,y)$ cu pct. critic $(-1,-1)$ și a.î. $z(-1,-1) = -4$.

Din (*) avem

$$\frac{\partial z_i}{\partial x}(x,y) = \frac{-5x + y + z_i(x,y)}{5z_i(x,y) - x - y}$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial y}(x,y) = \frac{-5y + x + z_i(x,y)}{5z_i(x,y) - x - y}$$

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\left(\frac{\partial z_i}{\partial x}-5\right)(5z_i-x-y)-(y+z_i-5x)\left(5\cdot\frac{\partial z_i}{\partial x}-1\right)}{(5z_i-x-y)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\left(\frac{\partial z_i}{\partial y}-5\right)(5z_i-x-y)-(x+z-5y)\left(5\cdot\frac{\partial z_i}{\partial y}-1\right)}{(5z_i-x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\left(1+\frac{\partial z_i}{\partial x}\right)(5z_i-x-y)-(x+z_i-5y)\left(5\frac{\partial z_i}{\partial x}-1\right)}{(5z_i-x-y)^2}$$

(În membrul drept al relațiilor de mai sus. $z_i=z_i(x,y)$).

Așadar.

$$\frac{\partial z_1}{\partial x^2}(1,1)=-\frac{5}{18}\ ;\ \frac{\partial z_1}{\partial y^2}(x,y)=\frac{1}{18}\ ;\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}(1,1)=-\frac{5}{18}.$$

$$H_{z_1}(1,1)=\begin{pmatrix}-\frac{5}{18} & \frac{1}{18}\\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18}\end{pmatrix}\qquad \Delta_1=-\frac{5}{18}<0 \qquad \Delta_2>0.$$

Deci $(1,1)$ este punct de maxim local pt funcția $z_1(x,y)$ definită implicit de ecuația dată într-o vecinătate a lui $(1,1,4)$.

$$H_{z_2}(-1,-1)=\begin{pmatrix}\frac{5}{18} & -\frac{1}{18}\\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18}\end{pmatrix}\qquad \Delta_1>0 \qquad \Delta_2>0.$$

Deci $(-1,-1)$ este pct. de minim local pt funcția $z_1(x,y)$ definită implicit de ecuația dată într-o vecinătate a lui $(-1,-1,-4)$.

(3) Arătați că sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$

defineşte într-o vecinătate a punctului $(1,1,-1)$ funcțiile implicite $y=y(x)$, $z=z(x)$. Calculați $y'(1)$, $z'(1)$ și $y''(1)$.

Soluție Fie $F,G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x,y,z) = x+y+z-1$$
$$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3$$

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 2z-2y$$

Avem: 1) F și G de clasă C^1

2) $F(1,1,-1) = G(1,1,-1) = 0$.

3) $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(1,1,-1) = -4 \neq 0$.

Atunci, există U o vecinătate deschisă a lui 1, V o vecinătate deschisă a lui $(1,-1)$ și o unică pereche de funcții $(y,z): U \longrightarrow V$ $y=y(x)$, $z=z(x)$ de clasă C^1 astfel încât

$$\begin{cases} x+y(x)+z(x)=1 \\ x^2+y^2(x)+z^2(x)=3 \end{cases}, \quad \forall x \in U$$

și $y(1)=1$, $z(1)=-1$

Metoda 1 (folosind formule)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,z)}}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(y,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}}$$

$$\frac{D(F,G)}{D(x,z)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2z \end{vmatrix} = 2z - 2x$$

$$\frac{D(F,G)}{D(y,x)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 2x - 2y.$$

Așadar

$$y'(x) = -\frac{2z(x) - 2x}{2z(x) - 2y(x)} = \frac{x - z(x)}{z(x) - y(x)} \quad \forall x \in U$$

$$z'(x) = -\frac{2x - 2y(x)}{2z(x) - 2y(x)} = \frac{y(x) - x}{z(x) - y(x)} \quad \forall x \in U.$$

$$y'(1) = \frac{1 - z(1)}{z(1) - y(1)} = -1, \quad z'(1) = \frac{y(1) - 1}{z(1) - y(1)} = 0.$$

Metoda 2. - derivăm ambele ecuații ale sistemului

$$\begin{cases} x + y(x) + z(x) = 1 \\ x^2 + y^2(x) + z^2(x) = 3 \end{cases}, \quad \forall x \in U.$$

Obținem

$$\begin{cases} 1 + y'(x) + z'(x) = 0 \\ 2x + 2y(x) \cdot y'(x) + 2z(x) z'(x) = 0 \end{cases}, \quad \forall x \in U.$$

Rezolvând sistemul obținem

$$y'(x) = \frac{x - z(x)}{z(x) - y(x)} \qquad z'(x) = \frac{y(x) - x}{z(x) - y(x)}$$

La fel ca mai sus, $y'(1) = 1$, $z'(1) = 0$.

Deoarece F și G sunt de clasă C^2, funcțiile implicite $y = y(x)$ și $z = z(x)$ sunt de clasă C^2.

Derivând $y'(x) = \dfrac{x - z(x)}{z(x) - y(x)}$, $x \in U$.

obținem

$$y''(x) = \frac{(1 - z'(x))(z(x) - y(x)) - (x - z(x))(z'(x) - y'(x))}{(z(x) - y(x))^2}$$

Ținând cont că $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $z(1) = -1$, $z'(1) = 0$ rezultă că

$$y''(1) = \frac{(1 - z'(1))(z(1) - y(1)) - (1 - z(1))(z'(1) - y'(1))}{(z(1) - y(1))^2}$$

$$y''(1) = \frac{-2 - 2(-1)}{4} = 0.$$