Nume și prenume: MORARIU C.L. MEDEEA Nota: ______________
Grupa: 301

Examen - Sesiunea ianuarie - februarie 2022

4 Februarie 2022

Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF[1] în folderul vostru de pe Drive aveți 15 de minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe la **ora 11 și 0 minute** și se termină la **ora 14 și 15 minute**.

Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

1. Considerăm cuplul de variabile aleatoare (X, Y) care este repartizat cu densitatea de repartiție

$$f(x, y) = yx^{y-1}e^{-y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y)\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

   a) Determinați repartiția lui Y și propuneți o metodă de simulare pentru aceasta.
   b) Determinați densitatea condiționată a lui X la $Y = y$ și calculați $\mathbb{P}(X \leq x|Y = y)$.
   c) Propuneți o metodă de simulare pentru o obervație din densitatea $f(x, y)$ și scrieți un cod `R` care să permită acest lucru.

2. Considerăm cuplul de variabile aleatoare (X, Y) care este repartizat cu densitatea de repartiție

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{y^2 x}{2}-\sqrt{x}}\mathbf{1}_{x>0}.$$

   a) Determinați repartiția condiționată a lui Y la $X = x$.
   b) Determinați repartiția lui $\sqrt{X}$.
   c) Propuneți o metodă de simulare pentru o observație din densitatea $f(x, y)$ și scrieți un cod `R` care să permită acest lucru.

Exercițiul 2

10p

Fie $\theta \in \mathbb{R}$ și $X_1, \ldots, X_n$ un eșantion de volum n dintr-o populație

$$f_\theta(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-0.5(\log(x) - \theta)^2\right) \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

a) Determinați repartiția variabilei aleatoare $Y_1 = \log X_1$ și calculați $\mathbb{E}[Y_1]$ și respectiv $Var(Y_1)$.

[1] Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner

b) Determinați estimatorul $\tilde{\theta}_n$ obținut prin metoda momentelor și estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$.

c) Calculați Informația lui Fisher pentru o observație, i.e. $I_1(\theta)$.

d) După o renormalizare a estimatorului de verosimilitate maximă găsiți repartiția limită a acestuia.

Exercițiul 3

10p

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de volum n din populația cu funcția de repartiție F_θ unde

$$F_\theta(x) = \left(1 - e^{-\frac{\theta}{18}x^2}\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

cu $\theta > 0$ parametru necunoscut.

a) Determinați densitatea de repartiție $f_\theta(x)$ a lui X_1.

b) În cazul în care $\theta = 2$ dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui X_1. Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe $[0, 1]$: $u_1 = 0.591$, $u_2 = 0.456$ și $u_3 = 0.146$. Descrieți procedura și scrieți un cod `R` care să permită acest lucru.

c) Determinați mediana $x_{1/2}$ repartiției lui X_1. Plecând de la aceasta deduceți un estimator $\tilde{\theta}_n$ a lui θ, verificați dacă este consistent și determinați repartiția limită a lui $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta)$.

d) Determinați repartiția lui X_1^2 și calculați $\mathbb{E}[X_1^1]$ și $Var(X_1^2)$.

e) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ a lui θ.

f) Determinați repartiția limită a lui $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$.

g) Verificați dacă $\hat{\theta}_n$ este asimptotic eficient.

h) Pe care dintre cei doi estimatori îl preferați? Ce puteți spune de estimatorul obținut prin metoda momentelor?

i) În planul $\mathbb{R}^2$ considerăm punctul $M = (X, Y)$ unde X și Y sunt variabile aleatoare i.i.d. repartizate $\mathcal{N}(0, \frac{162}{\theta})$ și fie D distanța euclidiană de la punctul M la origine. Care este repartiția lui D?

Mătui D.F. Elena-Elisabeta 04.02.2022.
Grupa 812

Examen Statistică

Exercițiul 1

2/ v.a (X,Y), $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{y^2 x}{2} - \sqrt{x}} \cdot \mathbb{1}_{x>0}$.

a) rep. condiționată a lui Y la $X = x$

Sol: Trebuie să calculăm $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

Avem:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2 x}{2} - \sqrt{x}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2 x}{2}}\,dy$$

Facem schimbarea de variabilă $v = \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

$$dv = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\,dy$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\,dv = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{x}} = \frac{1}{2\cancel{\sqrt{2\pi}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2\pi}}}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\sqrt{x}}$$

$$f_X(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2 x}{2} - \sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{e^{-\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{y^2 x}{2}}}{e^{\sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{e^{-\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2 x}{2}} \cdot \cancel{e^{-\sqrt{x}}} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{x}}{\cancel{e^{-\sqrt{x}}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2 x}{2}} \cdot \sqrt{x}$$

Deci, $f_{Y|X}(y|x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2 x}{2}} \sim N(0, \frac{1}{x})$

b) repartiția lui $\sqrt{X}$.

Fie z. Avem 2 cazuri:

carul 1 : $z < 0$, avem $\mathbb{P}(X \le z) = 0$

carul 2 : Pt. $z > 0$, vom avea:

Scanned with CamScanner

$$\mathbb{P}(X \le z) = P((x,y) \in [0,z] \times \mathbb{R})$$
$$= \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx$$
$$= \int_0^z \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2 x}{2} - \sqrt{x}}\,dy}_{\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}\,dx = \int_0^z \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Facem s.v. $t = \sqrt{x}$ $\Rightarrow$ avem $\int_0^z e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\sqrt{z}} e^{-t}\,dt = e^{0} - e^{-\sqrt{z}}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

Deci $\mathbb{P}(X \le z) = 1 - e^{-\sqrt{z}}$

$X \longmapsto \sqrt{X}$

$\mathbb{P}(\sqrt{X} \le z)\Big|^2 = \mathbb{P}(X \le z^2) = 1 - e^{-z} \sim Exp(1)$

Așadar, $\sqrt{X} \sim Exp(1)$.

c) o met. de simulare pt o observație din densitatea $f(x,y)$

```
n <- 10^3                # se generează un eșantion de talie n
P <- rexp(n,1)           # și câte o observație pentru fiecare element
X <- P^2                 # din acest eșantion.
Y <- rnorm(n,0,X)
```

1/ cuplu de var. aleatoare (X, Y) cu dens. de rep.

$$f(x,y) = y x^{y-1} e^{-y} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

a) repartiția lui Y

<u>sol</u> Avem de calculat $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\, dy$.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} y\, x^{y-1} \cdot e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y) \cdot \underline{\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\, dx} =$$

$$= y e^{-y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \cdot \int_0^1 x^{y-1} dx = \cancel{y} e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \cdot \frac{1}{\cancel{y}}$$

Deci, $f_Y(y) = e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$

Revenind la $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)\, dy = \int_0^y e^{-y} dy = (-y)' \cdot e^{-y} \Big|_0^y =$

$$= -e^{-y}\Big|_0^y = -e^{-y} - (-e^0) = -e^{-y} - (-1) = 1 - e^{-y}.$$

În final, obținem $F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & , y \in (0, \infty) \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$

$$F_Y(y) \sim Exp(1).$$

b) densitatea condiționată a lui X la $Y = y$, $\mathbb{P}(X \le x \mid Y = y) \stackrel{?}{=}$

$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$. calculăm $f_Y(y)$.

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 y\, x^{y-1} e^{-y} dx = y e^{-y} \underbrace{\int_0^1 x^{y-1} dx}_{= \frac{x^y}{y}} =$$

$$= \cancel{y} e^{-y} \cdot \frac{x^y}{\cancel{y}} \Big|_0^1 = e^{-y} x^y \Big|_0^1 = e^{-y}(1^y - 1^0) = e^{-y}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{y\, x^{y-1} \cancel{e^{-y}}}{\cancel{e^{-y}}} = y\, x^{y-1} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

Scanned with CamScanner

$$\mathbb{P}(X \le x \mid Y = y) = F_{X/Y}(x/y) = \int_{-\infty}^{x} y x^{y-1} \cdot 1\!\!1_{(0,+\infty)}(y)\, 1\!\!1_{(0,1)}(x)\, dx =$$

$$= \int_0^x y x^{y-1}\, 1\!\!1_{(0,\infty)}(y)\, dx = x^y \cdot 1\!\!1_{(0;\infty)}(y), \quad x \in (0,1)$$

(Folosind $1\!\!1_{(0,1)}(x)$, acest lucru se întâmplă dc. $x \in (0,1)$. Astfel, rezultatul e 0

Exercițiul 2

$\theta \in \mathbb{R}$, $X_1, \dots, X_n$ eșantion.

$$f_\theta(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-0{,}5(\log(x) - \theta)^2\right) \mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

a) rep. val. aleat. $Y_1 = \log X_1$, $\mathbb{E}[Y_1]$, $Var(Y_1)$

$$\underset{\substack{\parallel \\ \ln X_1}}{\mathbb{E}[\log X_1]} = \int_{-\infty}^{\infty} \ln x \, f_\theta(x)\, dx = \int_0^{\infty} \ln x \cdot \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-0{,}5(\log x - \theta)^2}$$

Scanned with CamScanner

Exercițiul 3

$x_1, x_2, \dots, x_n$ eșantion de volum n din pop. cu fct. de rep. F_θ

$$F_\theta(x) = \left(1 - e^{-\frac{\theta}{2}x^2}\right) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \qquad , \theta > 0.$$

a) densitatea de repartiție $f_\theta(x)$ a lui X_1.

Sol:

$$f_\theta(x) = F_\theta'(x) = \left(1 - e^{-\frac{\theta}{2}\cdot x^2}\right)' = \left(1 - e^{-\frac{\theta x^2}{2}}\right)' =$$

$$= 1' - \left(e^{-\frac{\theta x^2}{2}}\right)' = 0 - \left[e^{-\frac{\theta x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{\theta x^2}{2}\right)'\right] = 0 - \left[e^{-\frac{\theta x^2}{2}} \cdot \frac{-\theta}{2}(x^2)'\right] =$$

$$= 0 - \left(e^{-\frac{\theta x^2}{2}} \cdot \frac{-\theta}{2} \cdot 2x\right) = -\left(\frac{-2x\theta e^{-\frac{\theta x^2}{2}}}{2}\right) = x\theta e^{-\frac{\theta x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad f_\theta(x) = x\theta e^{-\frac{\theta x^2}{2}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

b) $\theta = 3 \Rightarrow$ Vrem să gen. 3 val. aleatoare din rep. lui $X_1 \sim f_\theta(x)$

$u_1 = 0{,}537$, $u_2 = 0{,}477$, $u_3 = 0{,}102$. $\Rightarrow$ din rep. unif. pe $[0,1]$

Vom folosi met. inversă, bazată pe Th. de universalitate a rep. unif.

Sol: Cum $\theta = 3 \Rightarrow$ pentru $y \in (0,1)$ vom avea funcția de repartiție

$$F_3(x) = y \Leftrightarrow \left(1 - e^{-\frac{3}{2}x^2}\right) = y \Leftrightarrow -e^{-\frac{3}{2}x^2} = y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{3}{2}x^2} = 1 - y \;\Big|\ln \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 = \ln(1-y) \Leftrightarrow -3x^2 = 2\ln(1-y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{2}{3}\ln(1-y) \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{2}{3}\ln(1-y)}$$

Deci $F_3^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{2}{3}\ln(1-y)}$, pentru $y \in (0,1)$.

Cum $u \sim \mathrm{Unif}([0,1])$, avem că $F_3^{-1}(u) \sim f_3$. Așadar, este suficient să ne folosim de valorile u_1, u_2 și u_3 date.

$$F_3^{-1}(0{,}537) = \sqrt{-\frac{2}{3}\ln(1 - 0{,}537)} = \sqrt{-\frac{2}{3}\ln(0{,}463)} \approx \sqrt{-0{,}66 \cdot (-0{,}77)}$$

$$\approx \sqrt{0{,}5082}$$

$$\approx 0{,}7128$$

$$F_3^{-1}(0,477) = \sqrt{-\frac{2}{3}\ln(1-0,477)} \approx \sqrt{-0,66\cdot\ln(0,523)} \approx \sqrt{-0,66\cdot(-0,6\ldots}$$

$$\approx \sqrt{0,42768} \approx 0,6539.$$

$$F_3^{-1}(0,102) = \sqrt{-\frac{2}{3}\ln(1-0,102)} \approx \sqrt{-0,66\cdot\ln(0,898)} \approx \sqrt{0,0706} \approx$$

$$\approx 0,2657.$$

e) estim. de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_m$ a lui θ

Sol scriem fct. de verosimilitate.

$$L(\theta|X) = \prod_{i=1}^{m} f_\theta(x_i)$$

$$f_\theta(x_i) = \theta x e^{-\frac{\theta x^2}{2}}$$

$$L = \prod_{i=1}^{m} \theta x_i e^{-\frac{\theta x_i^2}{2}}$$

Logaritmând, obținem $\ln L(\theta|X) = \ln\left(\prod_{i=1}^{m} \theta x_i e^{-\frac{\theta x_i^2}{2}}\right) = \sum \ln\left(\theta x_i e^{-\frac{\theta x_i^2}{2}}\right)$

$$\ln L(\theta|X) = \sum_{i=1}^{m} \ln\theta + \sum_{i=1}^{m} \ln x_i + \sum_{i=1}^{m} \ln\left(e^{-\frac{\theta x_i^2}{2}}\right)$$

$$\ell'' = m\ln\theta + \sum_{i=1}^{m} \ln x_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta x_i^2}{2}$$

$$= m\ln\theta + \sum_{i=1}^{m} \ln x_i - \frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

Calculăm ecuația $\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = 0.$

Avem: $m\cdot\frac{1}{\theta} + \left(\sum_{i=1}^{m} \ln x_i\right)' - \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 0$

$$m\cdot\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 0$$

$$\frac{m}{\theta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \Rightarrow \frac{m}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{2} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{2m}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$$

d) rep. lui X_1^2, $\mathbb{E}[X_1^1]$, $Var(X_1^2)$

Sol:

$F_\theta(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = 1 - e^{-\frac{\theta}{2}x^2}$

$\mathbb{P}(X_1^2 \leq x)$ $\overset{}{=}$

Vom folosi $\mathbb{P}(X_1 \leq \sqrt{x}) = 1 - e^{-\frac{\theta}{2}x}$ $\Rightarrow$ $f_{X_1^2}(x) = (1 - e^{-\frac{\theta}{2}x})'$

$f_{X_1^2}(x) = \underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{\frac{\theta}{2}}} e^{-\underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{\frac{\theta}{2}}}x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{X_1^2}(x) \sim Exp(\alpha)$, cu $\alpha = \frac{\theta}{2}$

$\mathbb{E}[X_1^1] = \mathbb{E}[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\theta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\theta e^{-\frac{\theta x^2}{2}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,dx =$

$= \int_0^{\infty} \theta x e^{-\frac{\theta x^2}{2}}\,dx = -e^{-\frac{\theta x^2}{2}}\Big|_0^{\infty} = 1.$

$\int \theta x e^{-\frac{\theta x^2}{2}}\,dx \; \frac{\text{s.v. } u = -\frac{\theta x^2}{2}}{dx = -\frac{1}{\theta x}du} \; - \int e^u\,du = -e^u = -e^{-\frac{\theta x^2}{2}}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_1^1] = 1.$

Cum $X_1^2 \sim Exp\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow Var(X_1^2) = Var\left(Exp\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{1}{2^2 \cdot \theta^2} = \frac{1}{4\theta}$

f) $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d.} N(0, Var(\hat{\theta}_n))$

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$\mathbb{E}[X] = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[X]^2 = 1.$

$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\theta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \theta x e^{-\frac{\theta x^2}{2}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,dx =$

$= \int_0^{\infty} x^3 \theta e^{-\frac{\theta x^2}{2}}\,dx = \frac{2}{\theta}$

$\Rightarrow Var(\hat{\theta}_n) = \frac{2}{\theta} - 1 = \frac{2-\theta}{\theta}$

$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{2-\theta}{\theta}\right)$

g) $\hat{\theta}_m$ asimptotic eficient

$\hat{\theta}_m$ asimpt. eficient dc- $var(\hat{\theta}_m) = MiRC$.

$var(\hat{\theta}_m) \overset{f)}{=} \frac{2-\theta}{\theta}$

$S_m(\theta) = m\, S_1(\theta)$.

Calc. $S_1(\theta)$.

$$S_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial \ln f_\theta(x_1)}{\partial \theta}\right)^2\right] = -\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial^2 \ln f_\theta(x_1)}{\partial \theta^2}\right]$$

$$\ln f_\theta(x_1) = \ln\left(\theta x e^{-\frac{\theta x^2}{2}}\right) = \ln\theta + \ln x + \ln e^{-\frac{\theta x^2}{2}}$$
$$= \ln\theta + \ln x - \frac{\theta x^2}{2}$$

$$\frac{\partial \ln f_\theta(x_1)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} - \frac{x^2}{2} + 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_\theta(x_1)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta^2} \Rightarrow S_1(\theta) = -\mathbb{E}_\theta\left[-\frac{1}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^2}$$

$$S_m(\theta) = m \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{m}{\theta^2}$$

$$\left.\begin{aligned} MiRC &= \frac{1}{S_m(\theta)} = \frac{\theta^2}{m} \\ var(\hat{\theta}_m) &= \frac{2-\theta}{\theta} \end{aligned}\right\} MiRC \neq var(\hat{\theta}_m) \Rightarrow \hat{\theta}_m \text{ nu este eficient.}$$

Scanned with CamScanner