EXAMEN LUCRARE SCRISĂ

ALGEBRĂ an 1, sem. 1

19-ian-21, orele 10-13

• Această lucrare scrisă constă din 9 subiecte.
• Fiecare subiect valorează un punct.
• Se acordă un punct din oficiu.
• Pentru a obţine întreg punctajul, explicaţi în detaliu rezolvările dvs.
• Subiectele de examen depind de ***codul de examen*** calculat astfel. Formăm şirul de litere: nume, prenume 1, prenume 2 etc (in ordinea din C.I.). Transformăm primele 9 litere în cifre după regula:

$a, f, k, p, u, z \mapsto 1$
$b, g, l, q, v \mapsto 2$
$c, h, m, r, w \mapsto 3$
$d, i, n, s, x \mapsto 4$
$e, j, o, t, y \mapsto 5$

obţinând astfel numerele c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9 care reprezintă codul dvs. de examen. Dacă sunt mai puţin de 9 litere se repetă secvenţa anterioară (nume, prenumele 1, apoi prenumele 2 etc).

Exemplu: "Sam-Bârnă Maria Ioana" dă şirul ***sambarnam*** care dă codul de examen: $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $c_3 = 3$, $c_4 = 2$, $c_5 = 1$, $c_6 = 3$, $c_7 = 4$, $c_8 = 1$, $c_9 = 3$.

Exemplu: "Ţîru Ion" dă şirul ***tiruionti*** care dă codul de examen: $c_1 = 5,\ c_2 = 4,\ c_3 = 3,\ c_4 = 1,\ c_5 = 4,\ c_6 = 5,\ c_7 = 4,\ c_8 = 5,\ c_9 = 4$.

Subiectele de examen

1. Fie mulţimea
$$A = \{\widehat{a} \in \mathbb{Z}_n - \{\widehat{0}\} \mid a \in \mathbb{N},\ (a,n) \neq 1\}$$
unde notaţia (a,n) înseamnă c.m.m.d.c., iar n este numărul definit mai jos.
(i) Listaţi elementele lui A.
(ii) Verificaţi dacă relaţia $\sim$ pe A definită prin $x \sim y \Leftrightarrow xy \neq \widehat{0}$ este relaţie de echivalenţă.
Selectaţi varianta dvs.
$\mathbf{c_1 = 1} \mapsto n = 22.$
$\mathbf{c_1 = 2} \mapsto n = 12.$
$\mathbf{c_1 = 3} \mapsto n = 14.$
$\mathbf{c_1 = 4} \mapsto n = 15.$
$\mathbf{c_1 = 5} \mapsto n = 21.$

Soluţie. Se scrie A (lucru uşor de făcut). Pentru $n = 12$, $\sim$ nu este relaţie de echivalenţă ($\widehat{6} \not\sim \widehat{6}$). In celelalte variante $\sim$ este relaţie de echivalenţă cu două clase de echivalenţă (e.g. pentru $n = 14$, $\sim$ este relaţia de echivalenţă dată de partiţia $\{\widehat{2}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{8}, \widehat{10}, \widehat{12}\}, \{\widehat{7}\}$ a lui A). $\square$

2. Fie M submulţimea lui $\mathbb{Z}_{12}$ definită mai jos.
(i) Verificaţi dacă M este monoid faţă de înmultirea din $\mathbb{Z}_{12}$
(ii) In caz afirmativ, găsiţi elementele inversabile din M şi verificaţi dacă M este izomorf cu monoidul $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$.
Selectaţi varianta dvs.
$\mathbf{c_2 = 1} \mapsto M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{8}, \widehat{9}\}.$
$\mathbf{c_2 = 2} \mapsto M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{3}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{9}\}.$
$\mathbf{c_2 = 3} \mapsto M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{5}, \widehat{6}, \widehat{7}, \widehat{11}\}.$
$\mathbf{c_2 = 4} \mapsto M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{7}, \widehat{8}\}.$
$\mathbf{c_2 = 5} \mapsto M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{9}, \widehat{10}\}.$

Soluţie. Se arată că M e parte stabilă făcând tabla de înmulţire pentru M iar înmulţirea e asociativă pe $\mathbb{Z}_n$ (din curs). $U(M) = \mathbb{Z}_n \cap M$ (deoarece avem monoizi finiţi). In varianta 4, M are două elemente de pătrat nul, deci nu este izomorf cu $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$. La celelalte variante, M şi $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ au un număr diferit de elemente inversabile. $\square$

3. Fie σ permutarea definită mai jos. Calculaţi:
(i) descompunerea lui σ în produs de cicluri disjuncte,
(ii) ordinul lui σ,
(iii) signatura lui σ,
(iv) produsul $(134689)\sigma(134689)^{-1}$.
Selectaţi varianta dvs.
$\mathbf{c_3 = 1} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 8 & 2 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{c_3 = 2} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 1 & 8 & 3 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{c_3 = 3} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 5 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{c_3 = 4} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 5 & 6 & 3 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{c_3 = 5} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 9 & 7 & 1 & 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

Soluţie. Subiect uşor. Se aplică calculul explicat la curs şi seminar. De exemplu, la varianta 5 avem $\sigma = (1285)(3947)(6)$, $ord(\sigma) = [4,4] = 4$, σ este pară deoarece (1285), (3947) sunt impare, iar $(134689)\sigma(134689)^{-1} = (3295)(4167)$ cu formula din finalul Lecţiei 9.
$\square$

4. Considerăm grupurile: D_4 (grupul diedral al pătratului), Q (grupul cuaternionilor) şi grupul aditiv $\mathbb{Z}_8$. Fie G, H grupurile produs direct definite mai jos.
(i) Număraţi elementele de ordinul 2 din G.
(ii) Arătaţi că G nu este izomorf cu H.
Selectaţi varianta dvs.
$\mathbf{c_4 = 1} \mapsto G = D_4 \times D_4,\ H = Q \times Q.$
$\mathbf{c_4 = 2} \mapsto G = Q \times Q,\ H = D_4 \times Q.$
$\mathbf{c_4 = 3} \mapsto G = D_4 \times \mathbb{Z}_8,\ H = D_4 \times D_4.$
$\mathbf{c_4 = 4} \mapsto G = Q \times \mathbb{Z}_8,\ H = D_4 \times \mathbb{Z}_8.$
$\mathbf{c_4 = 5} \mapsto G = D_4 \times Q,\ H = Q \times \mathbb{Z}_8.$

Soluţie. Fie A, B două grupuri. Un element (x, y) din produsul direct $A \times B$ are ordinul 2 $\Leftrightarrow x, y$ au ordinul 1 sau 2 mai puţin cazul $(x, y) = (1, 1)$. De exemplu, D_4 are 5 elemente de ordinul 2, deci $G = D_4 \times D_4$ are $6 \cdot 6 - 1$ elemente de ordinul 2. Se arată că G nu este izomorf cu H numărând elementele de ordinul 2. $\square$

5. Fie funcţia

$$f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_{60}, +) \text{ dată prin } f(x) = \widehat{ax},\ x \in \mathbb{Z}$$

unde a este numărul definit mai jos.
(i) Arătaţi că f este morfism de grupuri.
(ii) Calculaţi $ker(f)$ şi $Im(f)$.
(iii) Ce se obţine dacă aplicăm lui f teorema fundamentală de izomorfism ?
Selectaţi varianta dvs.
$\mathbf{c_5 = 1} \mapsto a = 4.$
$\mathbf{c_5 = 2} \mapsto a = 6.$
$\mathbf{c_5 = 3} \mapsto a = 10.$
$\mathbf{c_5 = 4} \mapsto a = 12.$
$\mathbf{c_5 = 5} \mapsto a = 15.$

Soluţie. Să luăm $a = 4$. Se arată imediat că f este morfism. Apoi $ker(f) = (60/4)\mathbb{Z} = 15\mathbb{Z}$ deoarece 4 divide 60. Apoi $Im(f) = 4\mathbb{Z}_{60}$. Din TFI rezultă $\mathbb{Z}_{15} \simeq 4\mathbb{Z}_{60}$. La acest subiect am găsit multe "perle" de gen $ker(f) =< \widehat{15} >$

sau $ker(f) = \{15\}$, cu rezultatul absurd $\mathbb{Z}/ < \widehat{15} > \simeq 4\mathbb{Z}_{60}$ sau chiar "perlă mare" de gen $\mathbb{Z}/ < \widehat{15} > \simeq \mathbb{Z}_{60}$; e semn că cineva a "gândit" şi mulţi l-au urmat. $\square$

6. Verificaţi dacă mulţimea

$$\{ax + by \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

este ideal în inelul $\mathbb{Z}[i]$, unde numerele x, y sunt definite mai jos.

Selectaţi varianta dvs.

$\mathbf{c_6 = 1} \mapsto x = 5,\ y = 3 + i.$

$\mathbf{c_6 = 2} \mapsto x = 5,\ y = 1 - 2i.$

$\mathbf{c_6 = 3} \mapsto x = 13,\ y = 5 + i.$

$\mathbf{c_6 = 4} \mapsto x = 13,\ y = 2 + 3i.$

$\mathbf{c_6 = 5} \mapsto x = 13,\ y = 3 + 2i.$

Soluţie. Se arată uşor că $u - v \in I$ pentru orice $u, v \in I$. La verificarea condiţiei $au \in I$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}[i]$ şi $u \in I$ puţini studenţi au dus lucruri până la capăt. Variantele $1, 3$ dau ideal, celelalte nu. Să luăm de exemplu varianta 1. Făcând calculul pentru au (notaţii ca mai sus) e suficient să observăm că $5i = -3 \cdot 5 + 5(3 + i)$ şi $(3 + i)i = -2 \cdot 5 + 3(3 + i)$. Să luăm acum varianta 2. E suficient să observăm că $5i = (1/2) \cdot 5 - (5/2)(1 - 2i)$ şi că exprimarea unui număr complex sub forma $5b + (1 - 2i)c$ cu b, c reali este unică.

La acest subiect am văzut la corectură "acelaşi calcul" de foarte multe ori, semn al onestităţii vremurilor prezente. $\square$

7. Demonstraţi afirmaţia (λ) alocată dvs. mai jos.

(λ_1) Intr-un monoid finit orice element inversabil are o putere egală cu 1.

(λ_2) Pentru orice grup netrivial G, există un morfism netrivial de grupuri $\mathbb{Z} \to G$.

(λ_3) Orice două subgrupuri nenule ale lui $\mathbb{Z}$ au intersecţie nenulă.

(λ_4) Daca G, H sunt grupuri finite cu $|G|$, $|H|$ relativ prime, atunci există un singur morfism de grupuri $G \to H$.

(λ_5) Daca M, L sunt corpuri care nu au aceeaşi caracteristică, atunci nu există morfisme de inele $M \to L$.

Selectaţi varianta dvs.

$\mathbf{c_7 = 1} \mapsto \lambda_1.$

$\mathbf{c_7 = 2} \mapsto \lambda_2.$

$\mathbf{c_7 = 3} \mapsto \lambda_3.$

$\mathbf{c_7 = 4} \mapsto \lambda_4.$

$\mathbf{c_7 = 5} \mapsto \lambda_5.$

Soluţie. Se aplică teoria şi iese uşor. De exemplu.

(λ_1) Se aplică teorema lui Lagrange grupului $U(M)$ cu M monoid finit.

(λ_2) Se consideră morfismul $n \mapsto x^n$ cu $x \in G - \{1\}$ fixat.

(λ_3) Subgrupurile lui $\mathbb{Z}$ au forma $n\mathbb{Z}$.

(λ_4) Dacă $f : G \to H$ este un morfism de grupuri şi $x \in G$, atunci $ord(f(x))$ divide $|G|$ şi $|H|$.

(λ_5) Un morfism de inele care pleacă de la un corp este mereu injectiv deoarece nucleul este nul fiind ideal al unui corp.

Puţini studenţi au abordat acest subiect. $\square$

8. Găsiţi $d \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\{na + b \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap \{n'a' + b' \mid n' \in \mathbb{Z}\} = \{maa' + d \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

unde numerele a, b, a', b' sunt definite mai jos.
Selectaţi varianta dvs.
$\mathbf{c_8 = 1} \mapsto a = 11,\ b = 4,\ a' = 13,\ b' = 11.$
$\mathbf{c_8 = 2} \mapsto a = 11,\ b = 6,\ a' = 17,\ b' = 5.$
$\mathbf{c_8 = 3} \mapsto a = 11,\ b = 8,\ a' = 19,\ b' = 7.$
$\mathbf{c_8 = 4} \mapsto a = 13,\ b = 4,\ a' = 17,\ b' = 9.$
$\mathbf{c_8 = 5} \mapsto a = 13,\ b = 6,\ a' = 19,\ b' = 7.$

Soluţie. Se aplică ideile din Lecţia 12. Să luăm varianta 1. Practic dorim să rezolvâm sistemul de congruenţe $x \equiv_{11} 4$ şi $x \equiv_{13} 1$. Găsim soluţia $x = 37$ (unică modulo $11 \cdot 13$). Se putea da şi o soluţie elementară. La acest subiect foarte multe soluţiie au explicat lucrurile ”exact cu aceleaşi cuvinte” semn că in 2021 telepatia e foarte puternică. Soluţiile ”oneste” văzute la ex. 5,6,8 mi-a lăsat un gust cam amar. $\square$

9. Fie G grupul aditiv al şirurilor $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere întregi şi fie $f : G \to \mathbb{Z}$ un morfism de grupuri. Pentru $i \geq 1$, notăm cu e_i şirul cu toţi termenii nuli exceptând termenul de rang i care este egal cu 1 (e.g. e_1 este şirul $(1, 0, 0, ...)$). Arătaţi că mulţimea $\{i \geq 1 \mid f(e_i) \neq 0\}$ este finită.
Acest subiect dificil are o singură variantă.

Soluţie. Este ex. 73 din carte. $\square$

Vă doresc sănătate şi succes.