SUBIECTE EXAMEN - ALGEBRĂ, AN II. 12 IUNIE 2020

Exercitiul 1: Fie F un $\mathbb{Z}$-modul liber cu baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ şi $G :=$ $\mathbb{Z}$-submodulul lui F generat de elementele:

$$g_1 := 2f_1 + 3f_2;\ g_2 := 9f_1 + 9f_2 + 12f_3;\ g_3 := 10f_1 + 9f_2 + 12f_3.$$

(a) Calculaţi factorii invarianţi ai lui G in F si găsiţi o $\mathbb{Z}$-bază a lui G. (1.5 puncte)

(b) Cate elemente are grupul abelian factor $\frac{F}{G}$? (1 punct)

Exercitiul 2: Fie $f = X^4 + X^3 + X^2 + 2X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ şi $\zeta = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
a) Descompuneţi f ca produs de polinoame ireductibile in $\mathbb{Q}[X]$. (0.5 puncte)
b) Arătaţi că $\zeta + \zeta^{-1}$ şi $\zeta^2 + \zeta^{-2}$ sunt rădăcini pentru f si calculati $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. (0.5 puncte)
c) Calculaţi corpul de descompunere K a lui f peste $\mathbb{Q}$ si gradul extinderii $[K : \mathbb{Q}]$. (1 punct)
d) Calculaţi polinomul minimal peste $\mathbb{Q}$ al lui $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. (0.5 puncte)

Exercitiul 3: (a) Sa se calculeze explicit polinomul ciclotomic $\Phi_{196}(X)$. (1.5 puncte)

(b) Cat este gradul polinomului minimal peste $\mathbb{Q}$ al lui $\cos(\pi/98)$? (0.5 puncte)

(c) Dacă p e numar prim si n e numar natural, arataţi că $\Phi_{p^n}(1) = p$. (0.5 puncte)

(d) Cat este gradul polinomului minimal peste $\mathbb{Q}$ al lui $\sin(\pi/98)$? (Tema de vacanta)

Exercitiul 4: (a) Daţi un exemplu (si justificaţi) de corp cu 27 de elemente. (0.25 puncte)

(b) Fie K un corp cu 27 de elemente si $a \in K$. Arataţi că există x, $y \in K$ astfel incit $x^3 + y^5 = a$. Generalizare! (2.25 puncte)

Timp de lucru: 2 ore. Puteti folosi orice rezultat teoretic din curs sau seminar. Succes!

Prof. dr. Gigel Militaru

$\boxed{\text{Exercițiul 1}}$: Soluție:

a) Avem $\begin{cases} g_1 = 2f_1 + 3f_2 \\ g_2 = 9f_1 + 9f_2 + 12f_3 \\ g_3 = 10f_1 + 9f_2 + 12f_3 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 9 & 9 & 12 \\ 10 & 9 & 12 \end{pmatrix}}_{\stackrel{not}{=} A} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Forma diagonală pentru A: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d_1 = 1,\ d_2 = 3,\ d_3 = 12$ factorii invarianți ai lui G și F.

și $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 12 \\ 1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Avem $U \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = DV^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$, unde $V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

ceea ce conduce la

$\{u_1 := 2f_1 + 3f_2,\ u_2 := 3f_1 + 3f_2 + 4f_3,\ u_3 := f_1 + f_2 + f_3\}$

o bază pentru $\mathbb{Z}$-modulul F

și $\{v_1 = g_1 = 2f_1 + 3f_2,\ v_2 = g_2 = 2f_1 + 9f_2 + 12f_3,$

$v_3 = g_1 + g_3 = 12f_1 + 12f_2 + 12f_3\}$

$\mathbb{Z}$-bază pentru G.

b) Avem că $\frac{F}{G} \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$, deci are 36 elemente.

$\square$

SOLUTIE PROBLEMA 2 EXAMEN

Exerciţiu 0.1. *Fie* $f = X^4+X^3+X^2+2X-2 \in \mathbb{Q}[X]$, *şi* $\zeta = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
a) Descompuneţi f *ca produs de factori ireductibili peste* $\mathbb{Q}$.
b) Arătaţi că $\zeta+\zeta^{-1}$, *şi* $\zeta^2+\zeta^{-2}$ *sunt rădăcini pentru* f *şi calculaţi* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
c) Calculaţi corpul de descompunere K *al lui* f *peste* $\mathbb{Q}$ *şi gradul extinderii* $[K:\mathbb{Q}]$.
d) Calculaţi polinomul minimal peste $\mathbb{Q}$ *al lui* $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Soluţie: . *a) Avem:*

$$f = X^4+X^3-X^2+2X^2+2X-2$$
$$f = X^2\left(X^2+X-1\right)+2\left(X^2+X-1\right)$$
$$f = \left(X^2+2\right)\left(X^2+X-1\right)$$

Conform Eisenstein polinomul X^2+2 *este ireductibil. Pentru polinomul* X^2+X-1 *putem calcula rădăcinile sale:*

$$X^2+X-1=0 \Longleftrightarrow$$
$$X = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$$

Deci şi polinomul X^2+X-1 *este ireductibil. Prin urmare descompunerea în factori ireductibili peste* $\mathbb{Q}$ *este* $f = (X^2+2)(X^2+X-1)$.

b) Avem că $\zeta^5 = 1$ *şi* $\zeta \neq 1$ *deci:*

$$\zeta^4+\zeta^3+\zeta^2+\zeta+1=0$$

şi

$$\zeta^4 = \frac{1}{\zeta}; \quad \zeta^3 = \frac{1}{\zeta^2}$$

Iar $|\zeta| = 1$ *deci* $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ *de unde avem:*

$$\zeta+\zeta^4 = \zeta+\frac{1}{\zeta} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) := t$$
$$\zeta^2+\zeta^3 = \zeta^2+\frac{1}{\zeta^2} = \left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)^2-2 = t^2-2$$

În final:

$$\begin{gathered}\zeta^4+\zeta^3+\zeta^2+\zeta+1=0 \Longleftrightarrow \\ \left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)+\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)+1=0 \Longleftrightarrow t^2+t-1=0\end{gathered}$$

Deci $t=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\zeta+\zeta^{-1}$ *este rădăcină pentru* X^2+X-1 *deci şi pentru* f. *Ştiind că* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ *(*$\cos$ *este descrescătoare şi* $\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$*) avem:*

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Iar

$$\begin{aligned}\zeta^2+\zeta^{-2}=t^2-2&=4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2-2\\ &=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}-2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Ambele rădăcini pentru X^2+X-1 *deci şi pentru* f.

c) Avem că peste $\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$ *are loc descompunerea* $f=(X-t)(X-t^2+2)(X^2+2)$.

Polinomul X^2+2 *are rădăcinile* $\pm i\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$ *deci este ireductibil peste el şi* $\left[\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),i\sqrt{2}\right):\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)\right]=2$.

Prin urmare corpul de descompunere al lui f *este* $K=\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),i\sqrt{2}\right)$.

Gradul extinderii este:

$$\left[\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),i\sqrt{2}\right):\mathbb{Q}\right]=\left[\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),i\sqrt{2}\right):\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)\right]\cdot\left[\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right):\mathbb{Q}\right]=4$$

d) Avem $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ *deci lucrăm în primul cadran, adică:*

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)&=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)&=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\end{aligned}$$

Notăm $\alpha=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ *de unde avem:*

$$
\begin{aligned}
8\alpha^2 = 5 + \sqrt{5} \iff (8\alpha^2 - 5)^2 = 5 \iff \\
64\alpha^4 - 80\alpha + 25 = 5 \iff 64\alpha^4 - 80\alpha + 20 = 0 \\
16\alpha^4 - 20\alpha + 5 = 0
\end{aligned}
$$

Avem că $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ *este rădăcină pentru* $16X^4 - 20X + 5$*, iar acest polinom este ireductibil peste* $\mathbb{Q}$ *conform criteriului Eisenstein (pentru* 5*). Deci polinomul minimal al lui* $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ *este* $16X^4 - 20X + 5$ *cu grad* 4*.*