Seminar 9

Extreme cu legături

1. Fie $f:(0,\infty)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + xz + yz$. Să se determine extremele locale ale funcției f condiționate de $xyz = 1$.

<u>Soluție.</u> $D \overset{not}{=} (0,\infty)^3 = (0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ mulțime deschisă.

Fie $g: D \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = xyz - 1$ și $A = \{(x,y,z)\in D \mid g(x,y,z)=0\}$.

f și g sunt funcții de clasă C^2 (pe D).

$$\text{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) =$$

$$= \text{rang}\left(yz \quad xz \quad xy\right) = 1 \quad \forall (x,y,z) \in D \supset A.$$

Fie $L: D \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$

$$= xy + yz + xz + \lambda(xyz - 1).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Scădem prima ecuație din a doua și obținem:

$x - y + \lambda z(x-y) = 0 \iff (x-y)(1+\lambda z) = 0 \iff x = y$ sau $\lambda z = -1$.

<u>Cazul I.</u> $x=y$.

$x+y+\lambda xy=0 \Leftrightarrow 2x+\lambda x^2=0 \Leftrightarrow x(2+\lambda x)=0 \underset{x\in(0,\infty)}{\Leftrightarrow} \lambda x=-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{\lambda}$.

Deoarece $x=y$ rezultă că $y=-\frac{2}{\lambda}$.

$y+z+\lambda yz=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\lambda}+z+\cancel{\lambda}\left(-\frac{2}{\cancel{\lambda}}\right)z=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\lambda}+z-2z=$

$=0 \Leftrightarrow z=-\frac{2}{\lambda}$.

$xyz=1 \Leftrightarrow -\frac{8}{\lambda^3}=1 \Leftrightarrow \lambda=-2$.

Deci $x=y=z=1$.

<u>Cazul II.</u> $\lambda z=-1$.

$\lambda z=-1 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{\lambda}$.

$x+z+\lambda xz=0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{\lambda}+\cancel{\lambda}x\left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}}\right)=0 \Leftrightarrow \cancel{x}-\frac{1}{\lambda}-\cancel{x}=$

$=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda}=0$, contradicție.

Singurul punct critic al funcției f cu legătura $g(x,y,z)=0$ este $(1,1,1)$.

$$d^2L(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1)\,dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1)\,dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1)\,dz^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(1,1,1)\,dx\,dy + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(1,1,1)\,dx\,dz + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(1,1,1)\,dy\,dz.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,z) = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 1-2z.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,z) = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 1-2y. \qquad \forall (x,y,z) \in D.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x,y,z) = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 1-2x.$$

$$d^2L(1,1,1) = -2(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz).$$

Diferențiem (formal) relația $xyz=1$ și obținem:

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0.$$

În punctul $(1,1,1)$ ultima egalitate devine:

$$dx + dy + dz = 0 \Leftrightarrow dz = -dx - dy.$$

Deci $d^2L(1,1,1)_{leg.} = -2\left(dx\,dy + dx(-dx-dy) +\right.$

$$\left.+ dy(-dx-dy)\right) = -2(\cancel{dx\,dy} - dx^2 - \cancel{dx\,dy} - dx\,dy - dy^2) =$$

$$= 2(dx^2 + dx\,dy + dy^2) = 2\left(\frac{1}{2}dx + dy\right)^2 + 2\cdot\frac{3}{4}dx^2.$$

Deci $d^2L(1,1,1)_{leg.}$ este formă pătratică pozitiv definită, i.e.

$(1,1,1)$ este punct de minim local al lui f cu legătura $g(x,y,z) = 0$ ◻

2. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xy+yz+zx$. Să se determine punctele de extrem local ale funcției f condiționate de relațiile $-x+y+z=1$ și $x-z=0$.

__Soluție.__ $\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă.

Fie $g_1, g_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_1(x,y,z)=-x+y+z-1$, $g_2(x,y,z)=$ $=x-z$ și $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0\}$.

Funcțiile f, g_1 și g_2 sunt de clasă C^2 (pe $\mathbb{R}^3$).

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} =$$

$$=\text{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \supseteq A.$$

Fie $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g_1(x,y,z)+\mu g_2(x,y,z)=$

$=xy+yz+zx+\lambda(-x+y+z-1)+\mu(x-z)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-\lambda+\mu=0 \\ x+z+\lambda=0 \\ y+x+\lambda-\mu=0 \\ -x+y+z=1 \\ x-z=0. \end{cases}$$

$x-z=0 \Leftrightarrow x=z.$

$x+z+\lambda=0 \Leftrightarrow 2x+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-2x$

$-x+y+z=1 \Leftrightarrow -\cancel{x}+y+\cancel{x}=1 \Leftrightarrow y=1.$

$$\left.\begin{array}{l} y+z-\lambda+\mu=0 \Leftrightarrow 1+x+2x+\mu=0 \Leftrightarrow 3x+\mu=-1. \\ y+x+\lambda-\mu=0 \Leftrightarrow 1+x-2x-\mu=0 \Leftrightarrow -x-\mu=-1. \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \mu=2$

$x=-1 \Rightarrow \lambda=2.$
$x=-1 \Rightarrow z=-1.$

Singurul punct critic al lui f cu legăturile $g_1(x,y,z)=0$ și $g_2(x,y,z)=0$ este $(-1,1,-1)$.

$$d^2L(-1,1,-1)=\frac{\partial^2L}{\partial x^2}(-1,1,-1)\,dx^2+\frac{\partial^2L}{\partial y^2}(-1,1,-1)\,dy^2+\frac{\partial^2L}{\partial z^2}(-1,1,-1)\,dz^2+$$
$$+2\frac{\partial^2L}{\partial x\partial y}(-1,1,-1)\,dx\,dy+2\frac{\partial^2L}{\partial y\partial z}(-1,1,-1)\,dy\,dz+$$
$$+2\frac{\partial^2L}{\partial x\partial z}(-1,1,-1)\,dx\,dz.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial^2L}{\partial x^2}(x,y,z)=0 & \frac{\partial^2L}{\partial x\partial y}(x,y,z)=1 \\ \frac{\partial^2L}{\partial y^2}(x,y,z)=0 & \frac{\partial^2L}{\partial y\partial z}(x,y,z)=1 \\ \frac{\partial^2L}{\partial z^2}(x,y,z)=0 & \frac{\partial^2L}{\partial x\partial z}(x,y,z)=1 \end{array}\right. \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$d^2L(-1,1,-1)=2(dx\,dy+dy\,dz+dx\,dz).$$

Diferențiem (formal) relațiile $-x+y+z=1$ și $x-z=0$ și obținem:

$$\begin{cases} -dx+dy+dz=0 \\ dx-dz=0 \Leftrightarrow dx=dz. \end{cases}$$

$$-dx+dy+dz=0 \Leftrightarrow \cancel{-dx}+dy+\cancel{dx}=0 \Leftrightarrow dy=0.$$

Deci $d^2L(-1,1,-1)_{leg.} = 2(dx\cdot 0+0\cdot dz+dx\cdot dx) = 2dx^2.$

Așadar $d^2L(-1,1,-1)_{leg.}$ este formă pătratică pozitiv definită, i.e. $(-1,1,-1)$ este punct de minim local al lui f cu legăturile $g_1(x,y,z)=0$ și $g_2(x,y,z)=0$. □

3. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+y$ și $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=y$. Arătați că $(0,0)$ este punct critic al lui f cu legătura $g(x,y)=0$ și nu este punct de extrem local al lui f cu legătura $g(x,y)=0$.

Soluție. Fie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}^2$ deschisă.

f și g sunt funcții de clasă C^2 (pe $\mathbb{R}^2$).

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\supset A.$$

Fie $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^3+y+\lambda y$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2=0 \\ 1+\lambda=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \lambda=-1 \\ y=0. \end{cases}$$

Deci $(0,0)$ este punct critic al lui f cu legătura $g(x,y)=0$.

Arătăm că $(0,0)$ nu este punct de extrem local al lui f cu legătura $g(x,y)=0$.

$f(x,0)=x^3<0=f(0,0)\ \forall x\in(-\infty,0)$.

$f(x,0)=x^3>0=f(0,0)\ \forall x\in(0,\infty)$.

Așadar $(0,0)$ nu este punct de extrem local al lui f cu legătura $g(x,y)=0$. □

4. Fie $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ 2x+2y+z=1\}$ și $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x+y+z$. Determinați punctele de extrem global ale funcției $f|_A$.

<u>Soluție.</u> A compactă (închisă și mărginită), $A\subset\mathbb{R}^3$; f continuă $\Longrightarrow f$ își atinge marginile pe A.

Fie $g_1,g_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, $g_2(x,y,z)=2x+2y+z-1$.

$\mathbb{R}^3$ deschisă

Funcțiile f, g_1 și g_2 sunt de clasă C^2 (pe $\mathbb{R}^3$).

$$\text{rang}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z)\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z)\end{pmatrix}=\text{rang}\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=2\ \forall (x,y,z)\in A.$$

Fie $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g_1(x,y,z)+\mu g_2(x,y,z)=$

$$= (x+y+z) + \lambda(x^2+y^2+z^2-1) + \mu(2x+2y+z-1).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\lambda x+2\mu=0 \\ 1+2\lambda y+2\mu=0 \\ 1+2\lambda z+\mu=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x=-2\mu-1 \\ 2\lambda y=-2\mu-1 \\ 2\lambda z=-\mu-1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-2\mu-1}{2\lambda}. \\ y=\frac{-2\mu-1}{2\lambda}. \\ z=\frac{-\mu-1}{2\lambda}. \\ x^2+y^2+z^2=1. \\ 2x+2y+z=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-2\mu-1)^2+(-2\mu-1)^2+(-\mu-1)^2}{4\lambda^2}=1 \\ \frac{-4\mu-2}{2\lambda}+\frac{-4\mu-2}{2\lambda}+\frac{-\mu-1}{2\lambda}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9\mu^2+10\mu+3}{4\lambda^2}=1 \\ \frac{-9\mu-5}{2\lambda}=1 \Leftrightarrow 2\lambda=-9\mu-5. \end{cases}$$

$$9\mu^2+10\mu+3=\underset{(2\lambda)^2}{\underset{\shortparallel}{4\lambda^2}} \Leftrightarrow 9\mu^2+10\mu+3=(-9\mu-5)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\mu^2+10\mu+3=81\mu^2+90\mu+25 \Leftrightarrow 72\mu^2+80\mu+22=0 \;\Big|:2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36\mu^2+40\mu+11=0.$$

$\Delta = 1600 - 1584 = 16.$

$\sqrt{\Delta} = 4.$

$$\mu_1 = \frac{-40+4}{72} = \frac{-36}{72} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{9\cdot\frac{1}{2}-5}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}.$$

$$\mu_2 = \frac{-40-4}{72} = \frac{-44}{72} = -\frac{11}{18} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\cancel{9}\cdot\frac{11}{\cancel{18}_2}-5}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$x_1 = \frac{-2\mu_1-1}{2\lambda_1} = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}-1}{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = 0.$$

$$y_1 = \frac{-2\mu_1-1}{2\lambda_1} = 0.$$

$$z_1 = \frac{-\mu_1-1}{2\lambda_1} = \frac{\frac{1}{2}-1}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1.$$

$$x_2 = \frac{-2\mu_2-1}{2\lambda_2} = \frac{\cancel{2}\cdot\left(-\frac{11}{\cancel{18}_9}\right)-1}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}} = \frac{\frac{11}{9}-1}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}.$$

$$y_2 = \frac{-2\mu_2-1}{2\lambda_2} = \frac{4}{9}.$$

$$z_2 = \frac{-\mu_2-1}{2\lambda_2} = \frac{\frac{11}{18}-1}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}} = \frac{-\frac{7}{18}}{\frac{1}{2}} = -\frac{7}{\cancel{18}_9}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{1} = -\frac{7}{9}.$$

Punctele critice ale lui f condiționate de A sunt:
$(0,0,1)$ și $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{7}{9}\right)$.

Deoarece $f|_A$ are măcar un punct de minim global și măcar un punct de maxim global rezultă că unul dintre cele două puncte critice este punct de minim global și celălalt este punct de maxim global.

$f(0,0,1)=1$.

$f\left(\frac{4}{9},\frac{4}{9},-\frac{7}{9}\right)=\frac{1}{9}$.

Deci $\left(\frac{4}{9},\frac{4}{9},-\frac{7}{9}\right)$ este punct de minim global al lui $f|_A$, iar $(0,0,1)$ este punct de maxim global al lui $f|_A$. □

5. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=2x^2+y^2+3z^2$. Determinați valorile extreme ale funcției f pe mulțimea $\overline{B}(0,1)$. $\left(\overline{B}(0,1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\}\right)$.

Soluție.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă} \\ \overline{B}(0,1) \text{ compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ își atinge marginile pe $\overline{B}(0,1)$.

Căutăm punctele de extrem global ale lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ în $B(0,1)$ și în $\partial B(0,1)$.

Notăm $h=f|_{B(0,1)}$.

$B(0,1)$ deschisă

h funcție de clasă C^2.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=0 \\ 2y=0 \\ 6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0. \end{cases}$$

Singurul posibil punct de extrem global al lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ situat în $B(0,1)$ este $(0,0,0)$.

Căutăm posibilele puncte de extrem global ale lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ din $\partial B(0,1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ $\left(=\overline{B}(0,1)\setminus B(0,1)\right)$.

Fie $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$.

$\mathbb{R}^3$ deschisă

f şi g sunt de clasă C^2 (pe $\mathbb{R}^3$).

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) =$$

$$=\operatorname{rang}\left(2x \quad 2y \quad 2z\right) = 1 \quad \forall (x,y,z)\in \partial B(0,1).$$

Fie $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z) =$

$=2x^2+y^2+3z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x+2\lambda x=0 \\ 2y+2\lambda y=0 \\ 6z+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(2+\lambda)=0 \\ 2y(1+\lambda)=0 \\ 2z(3+\lambda)=0 \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

Avem soluţiile: $\lambda_1=-1 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,-1,0),(0,1,0)\}$.

$\lambda_2=-2 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(-1,0,0),(1,0,0)\}$.

$\lambda_3=-3 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,0,-1),(0,0,1)\}$.

$f(0,0,0)=0$; $f(0,-1,0)=f(0,1,0)=1$;

$f(-1,0,0)=f(1,0,0)=2$; $f(0,0,-1)=f(0,0,1)=3$.

Valoarea maximă a lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ este 3, iar valoarea minimă a lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ este 0. $\square$