Miloșeanu Andreea
Mihoci Valentina

15.12.2021

Tutoriatul 9
Geometrie I
(exerciții)

1 Fie parabola $\mathcal{P}: y^2=8x$.

a) Scrieți ecuațiile tangentei și normalei în $M(2,4)$ la parabolă.

b) Determinați ecuația tangentei la parabolă paralelă cu dreapta $d: y=2x$.

c) Scrieți ecuațiile tangentelor la parabolă duse din punctul exterior $P(-1,1)$.

d) Să se scrie ecuația polarei lui $P(-1,1)$.

SOL. a) Verificăm poziția punctului $M(2,4)$ față de parabolă:

$$4^2=8\cdot 2 \Rightarrow 16=16 \checkmark \Rightarrow M(2,4)\in\mathcal{P}$$

Aplicăm procedeul de dedublare pentru a determina tangenta în $M(2,4)$ la parabolă.

$$yy_0=p(x+x_0) \Rightarrow 4y=4(x+2) \Rightarrow tg: y=x+2 \Rightarrow m_{tg}=1.$$

$$y^2=2px \Rightarrow 2p=8 \Rightarrow \boxed{p=4}$$

Știm că tangenta și normala în punctul $M(2,4)$ la parabolă sunt perpendiculare $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m_{tg}\cdot m_{norm}=-1 \Rightarrow m_{norm}=-\frac{1}{m_{tg}}=-1$$

Ecuația normalei în $M(2,4)$: $y-4=m_{norm}(x-2)$

$$y-4=-1(x-2) \Rightarrow d_n: y=-x+6.$$

b) Tangenta căutată este paralelă cu dreapta $d: y=2x \Rightarrow m_d=m_{tg}=2$

Aplicăm ecuația magică: $y=mx+\frac{p}{2m}$

$$tg: y=2x+\frac{4}{4} \Rightarrow tg: y=2x+1.$$

c) Verificăm poziția punctului $P(-1,1)$ față de parabolă: $1>-8 \Rightarrow P(-1,1)\in Ext\,\mathcal{P}$

Avem ecuația magică: $y=mx+\frac{p}{2m}$, $P(-1,1)\in$ ec. magice $\Rightarrow 1=-m+\frac{4}{2m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1=-m+\frac{2}{m}\Big/\cdot m \Rightarrow m=-m^2+2 \Rightarrow m^2+m-2=0,\ \Delta=9 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3$$

$$m_1=\frac{-1+3}{2}=1 \Rightarrow tg_1: y-1=x+1 \Rightarrow tg_1: y=x+2$$

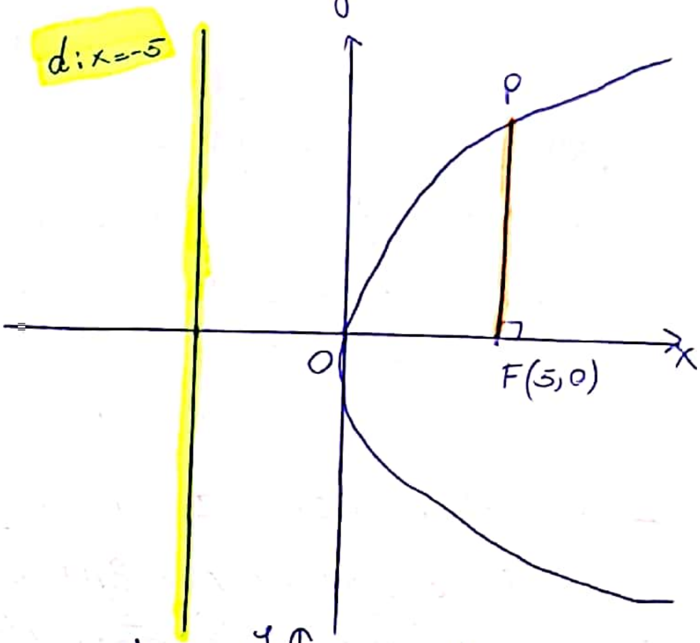
$$m_2=\frac{-1-3}{2}=-2 \Rightarrow tg_2: y-1=-2(x+1) \Rightarrow tg_2: y=-2x-1$$

d) Pentru ecuația polarei lui $P(-1,1)$ aplicăm dedublarea: $yy_0=p(x+x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d_0: y=4(x-1)$$

2. a) Fie parabola $P: y^2=20x$. Să se afle parametrul parabolei, coordonatele focarului, ecuația directoarei și lungimea semilatus rectum.

b) Aceeași cerință pentru parabola $P: x^2=4x$.



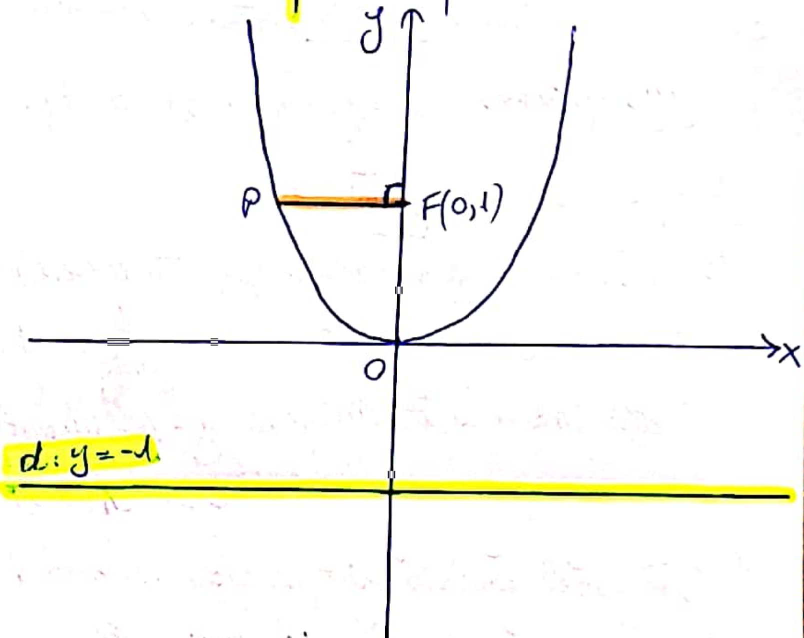
SOL. a) Avem $P: y^2=2\cdot 10\cdot x \Rightarrow p=10>0$

$F\left(\frac{p}{2},0\right) \Rightarrow F(5,0)$ focarul

$d: x=-\frac{p}{2} \Rightarrow d: x=-5$ directoarea

Deci axa Ox este transversă, iar $O(0,0)$ este vârful.

$PF=p=10$ lungimea semilatus rectum



b) Avem $P: x^2=2\cdot 2\cdot x \Rightarrow p=2>0$

$F\left(0,\frac{p}{2}\right) \Rightarrow F(0,1)$ focarul

$d: y=-\frac{p}{2} \Rightarrow d: y=-1$ directoarea

Deci axa Oy este transversă, iar $O(0,0)$ este vârful.

$PF=p=2$ lungimea semilatus rectum

Extra c) Să se scrie ecuația parabolei cu focarul $F(3,0)$ și directoarea $d: x=-3$.

Fie P parabola căutată. Observăm focarul și directoarea și ne dăm seama că avem o parabolă de tipul $P: y^2=2px$. Din condițiile date avem că $\frac{p}{2}=3 \Rightarrow p=6$.

Avem $P: y^2=12x$.

3. Fie parabola $P: y^2=4x$. Să se arate că tangenta în punctul $M(4,4)$ la parabolă este mediatoarea segmentului $[NF]$, unde F este focarul, iar N este proiecția lui M pe directoarea d.

SOL. Avem $P: y^2=4x \Rightarrow 2p=4 \Rightarrow p=2$ parametrul parabolei.

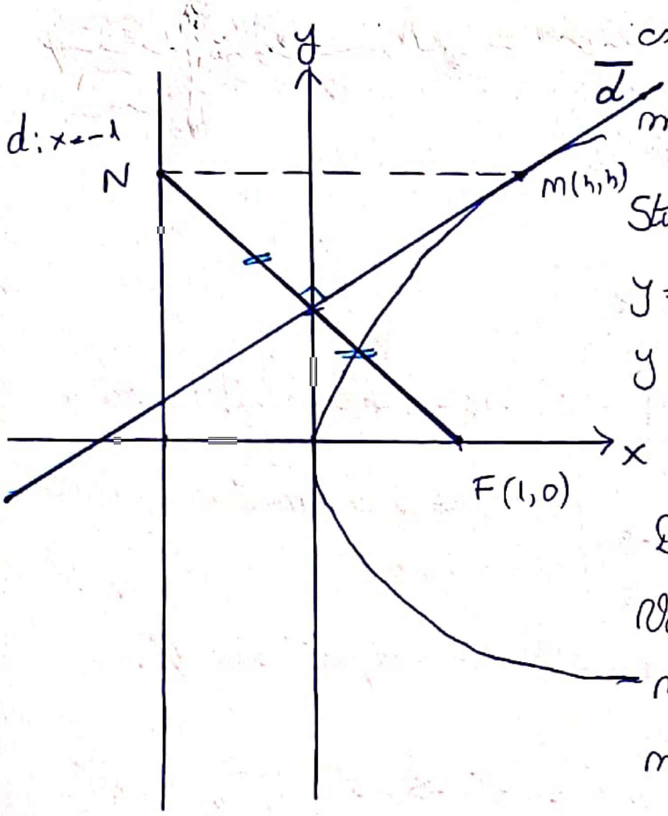
Deci focarul $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ este $F(1,0)$, iar directoarea este $d: x=-\frac{p}{2} \Rightarrow d: x=-1$.

Studiem poziția lui $M(4,4)$ față de parabolă $\Rightarrow 4^2=4\cdot 4$ ✓ $\Rightarrow M(4,4)\in P$

Pentru a determina tangenta în $M(4,4)$ aplicăm procedeul de dedublare:

$\overline{d}: yy_0=p(x+x_0) \Rightarrow \overline{d}: 4y=2(x+4) \Rightarrow \overline{d}: 2y=x+4 \Rightarrow \overline{d}: y=\frac{1}{2}\cdot x+2$

Fiindcă N este proiecția lui M pe directoarea $d \Rightarrow N\in d \Rightarrow x_N=-1$.



Avem $y_N=y_M=4$, $N(-1,4)$ $NF: \frac{y-4}{-4}=\frac{x+1}{2} \Rightarrow$

mij. $[NF]$ este $B=(0,2)$ $\Rightarrow NF: 2(y-4)=-4(x+1)$

$y-4=-2x-2$

Studiem intersecția $NF\cap\overline{d}$: $NF: y=-2x+2$

$\left.\begin{array}{l} y=-2x+2 \\ y=\frac{1}{2}x+2 \end{array}\right| \Rightarrow -2x+2=\frac{1}{2}x+2$

$\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot x=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \end{array}\right|$ obținem B.

Deci $B\in\overline{d}$, B - mij. $[NF]$ (1)

Vedem dacă $\overline{d}\perp NF$.

$\left.\begin{array}{l} m_{\overline{d}}=\frac{1}{2} \\ m_{FN}=-2 \end{array}\right| \Rightarrow m_{\overline{d}}\cdot m_{NF}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{d}\perp NF$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \overline{d}$ este mediatoarea lui $[NF]$.

4. Să se afle ecuația tangentei la parabola de focar $F(1,0)$ și directoare $d: x=-1$ în punctul de abscisă $x=4$ și ordonată pozitivă.

SOL. Fie $\mathcal{P}$ parabola căutată. Observăm focarul și directoarea și ne dăm seama că avem o parabolă de tipul $\mathcal{P}: y^2=2px$. Din condițiile date avem că $\frac{p}{2}=1 \Rightarrow p=2$.

Avem $\mathcal{P}: y^2=4x$.

Fie $M(4, y_0), y_0>0 \in \mathcal{P} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_0^2=4\cdot 4 \Rightarrow y_0=\pm 4 \\ y_0>0 \end{array}\right| \Rightarrow y_0=4.$

Știm că $M(4,4)\in\mathcal{P}$, deci aflăm tangenta la parabolă în acest punct prin dedublare.

$d: yy_0=p(x+x_0) \Rightarrow 4y=2(x+4) \Rightarrow 4y-2x-8=0 \Rightarrow d: x-2y+4=0.$

5. Fie conica $\Gamma: f(x,y)=5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$. Să se aducă la forma canonică, efectuând izometrii. Reprezentare grafică.

SOL. $\Gamma: f(x,y)=5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0.$

$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}=A^T,\ B=(-9,-9),\ c=9\in\mathbb{R}.$

$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-9\\ -9\end{matrix}}\\ \boxed{\begin{matrix}-9 & -9\end{matrix}} & 9\end{pmatrix}$

$\delta=\det A=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}=25-16=9\neq 0 \Rightarrow (\exists!)\,P_0$ centru

$\Delta=\det\tilde{A}=\begin{vmatrix}5 & 4 & -9\\ 4 & 5 & -9\\ -9 & -9 & 9\end{vmatrix}=-81\neq 0 \Rightarrow$ conică nedegenerată.

Avem o conică nedegenerată cu $\delta=9>0$, deci obținem o elipsă sau $\emptyset$.

Căutăm $P_0(x_0,y_0)$ centrul unic.

seria 10

$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=10x_0+8y_0-18=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=8x_0+10y_0-18=0\end{cases}$

$\begin{cases}5x_0+4y_0=9\\ 4x_0+5y_0=9\end{cases}$

seria 11

$AX_0=-B^T \Rightarrow \begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 9\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}5x_0+4y_0=9\\ 4x_0+5y_0=9\end{cases}$

Avem $\begin{cases}20x_0+16y_0=36\\ 20x_0+25y_0=45\end{cases} \xrightarrow{E_2-E_1} 9y_0=9 \Rightarrow y_0=1 \Rightarrow 5x_0+4\cdot 1=9$

$5x_0=5 \Rightarrow x_0=1$

Avem $P_0(1,1)$ centrul unic

Aplicăm translația T; $x = x' + x_0$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$T(\Gamma): x'^T A x' + \boxed{\frac{\Delta}{\delta}} = 0 \Rightarrow 5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 + \boxed{\frac{-81}{9}} = 0 \Rightarrow$$

$(\exists)$ căci avem centru unic $\Rightarrow 5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 \boxed{-9} = 0$.

Considerăm polinomul caracteristic asociat matricei $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 9\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) - 9(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 9) = 0.$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 9$ valori proprii

$V_{\lambda_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid AX = X\}$, $AX = X \Rightarrow (A - I_2)X = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x + 4y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = -x$

$V_{\lambda_1} = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle\{(1,-1)\}\rangle$.

$e_1' = \frac{1}{\|(1,-1)\|} \cdot (1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ versorul propriu pentru $\lambda_1 = 1$.

$V_{\lambda_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid AX = 9X\}$, $AX = 9X \Rightarrow (A - 9I_2)X = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -4x + 4y = 0$$

$\Rightarrow x = y$

$V_{\lambda_2} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle\{(1,1)\}\rangle$

$e_2' = \frac{1}{\|(1,1)\|} \cdot (1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ versorul propriu pentru $\lambda_2 = 9$.

Notăm $e_K = (l_K, m_K)$, $K = \overline{1,2}$ și avem $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det R = \frac{1}{2}(1+1) = 1$ ✓. Avem acum $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ pt. $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 9$.

Considerăm rotația $R: x' = Rx'' \Rightarrow R: \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x'' + y'') \end{cases}$

Conica devine $R(T(\Gamma))$: $x''^2 + 9y''^2 - 9 = 0 \Rightarrow x''^2 + 9y''^2 = 9 \,/ : 9 \Rightarrow$

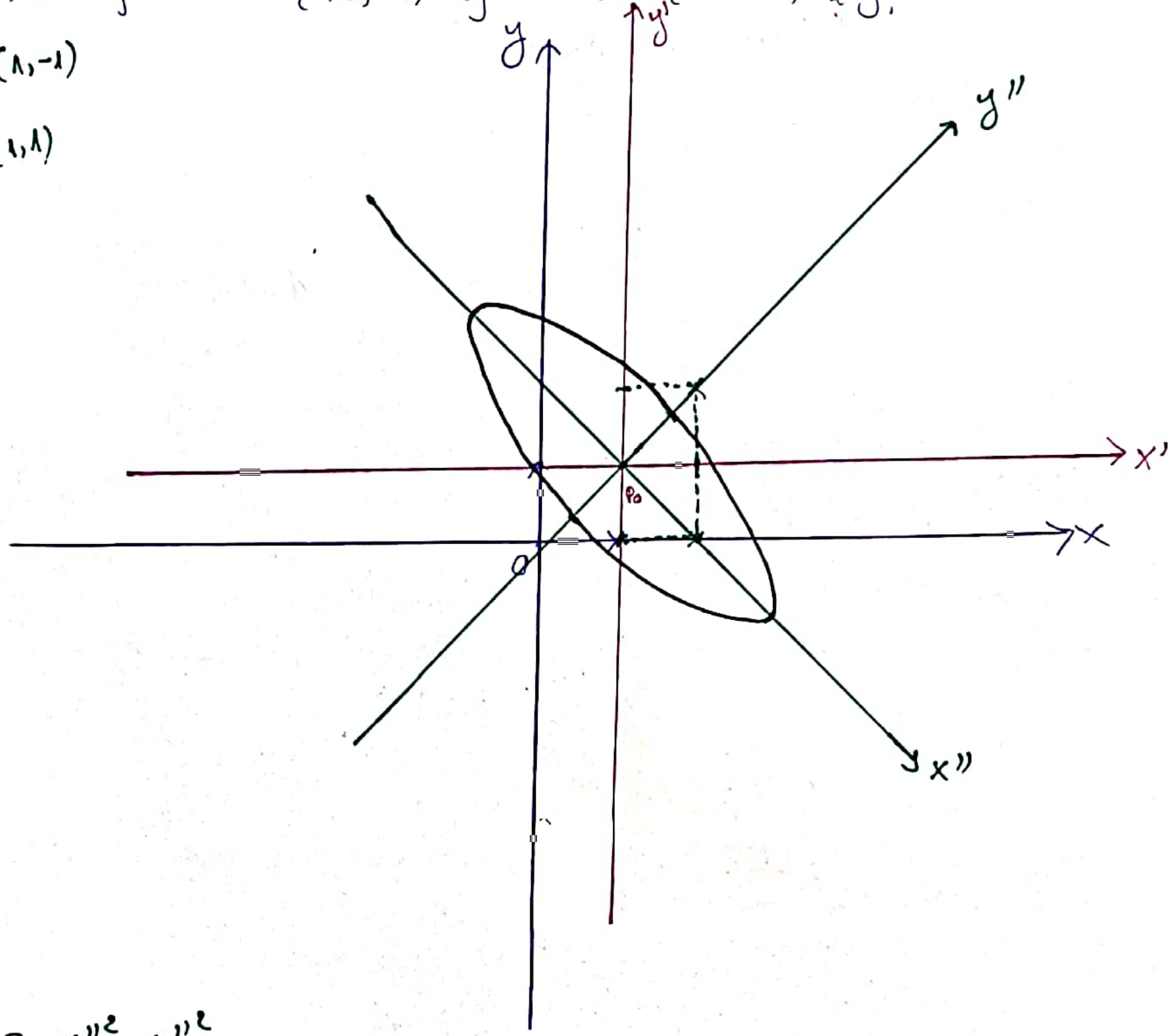
$$\Rightarrow \mathcal{E}: \frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{1} = 1$$

Izometria efectuată este : $X = RX'' + X_0$.
Se obţin următoarele schimbări de repere carteziene:

$\mathcal{R} = \{O, e_1, e_2\} \xrightarrow{T} \mathcal{R}' = \{P_0, e_1, e_2\} \xrightarrow{R} \mathcal{R}'' = \{P_0, e_1', e_2'\}$.

$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

$e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$



$\mathcal{E}: \frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{1} = 1$

$\hookrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$