Examen la analiză matematică[1]
an I, sem. I - seria 10
22.01.2021

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. a) Fie $A = ([-5,1]\bigcap \cup\mathbb{Q})\cap\left\{\frac{2n+1}{n+1}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$ o submulţime a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Determinaţi interiorul, aderenţa, mulţimea punctelor de acumulare şi frontiera mulţimii A. Decideţi dacă mulţimea A este compactă sau conexă. Justificaţi!

b) Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{2n+3}+\frac{3}{3n+7}+....+\frac{n}{n^2+(n^2-n+1)}\right).$$

Subiectul 2. a) Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)....(x+n)}$$

în funcţie de valorile parametrului $x\in(0,\infty)$.

b) Studiaţi convergenţa şirului $\left(\frac{n!}{(\frac{2}{7}+1)(\frac{2}{7}+2)....(\frac{2}{7}+n)}\right)_{n>0}$ şi calculaţi limita acestuia (în caz că aceasta există).

Subiectul 3. Considerăm funcţia $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)\arctan\frac{1}{x-2}+\frac{\sin(5x-10)}{x-2}+x, & \text{dacă } x\in[0,2)\cup(2,\infty),\\ 7, & \text{dacă } x=2.\end{cases}$$

i) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

ii) Studiaţi uniform continuitatea funcţiei f.

Subiectul 4. Considerăm şirul de funcţii $f_n:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$f_n(x)=\frac{nxe^{x+1}}{1+n+x},$$

pentru orice $x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbb{N}^*$.

Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului $(f_n)_{n\geq1}$.

Subiectul 5. Fie $f_n, g_n:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ funcţii definite prin

$$f_n(x)=\int_0^1|x^n-t^n|\,dt,\text{pentru orice } x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}\ \text{ şi}$$

,

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valoreaza 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!**

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{dacă } \ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x - x^2, & \text{dacă } \ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i) Determinaţi

$$\inf_{x \in [0,1]} f_n(x) \ \text{ şi } \ \sup_{x \in [0,1]} f_n(x).$$

ii) Determinaţi numărul $n \in \mathbb{N}$ pentru care funcţia g_n are cel puţin un punct în care este derivabilă.