Seminar geometrie I - 4 oct 2017

Grup

$G \neq \emptyset$ „+": $G \times G \to G$

Def. Spunem că $(G,+)$ este grup dacă:

1) $\forall x,y,z \in G$ $(x+y)+z = x+(y+z)$
2) $\exists\, \theta \in G$ a.î. $\forall x \in G$ $x+\theta = \theta + x = x$
3) $\forall x \in G$ $\exists x' \in G$ a.î. $x+x' = x'+x = \theta$

Exemple: $(\mathbb{R},+), (\mathbb{Z},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{C},+)$

$n \in \mathbb{N}$ $M = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det A \neq 0\}$

$(M,\cdot)$ este grup comutativ

$K \neq \emptyset$ „·", „+": $K \times K \to K$

Corp

Def. Spunem că $(K,+,\cdot)$ este corp dacă:

1) $(K,+)$ este grup abelian
2) $(K^*,\cdot)$ este grup
3) $\forall x,y,z \in K$ $\left.\begin{array}{l} x(y+z) = xy+xz \\ (y+z)x = yx+zx \end{array}\right| \Rightarrow$

→ „·" este distributivă față de „+" (la stg. și la dr.)

Exemple: $(\mathbb{R},+,\cdot), (\mathbb{Q},+,\cdot), (\mathbb{C},+,\cdot)$

p este nr. prim $\Rightarrow (\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ este corp

Spații vectoriale

Def. Fie $\underbrace{K}_{\text{scalari}}$ un corp și $\underbrace{V \neq \emptyset}_{\text{vectori}}$

„+": $V \times V \to V$

„·": $K \times V \to V$

Spunem că $(V,+,\cdot)$ este K-sp vectorial dc:

1) $(V,+)$ grup comutativ
2) $\forall \alpha \in K, \forall x,y \in V, \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ *(adunarea vectorilor)
3) $\forall \alpha,\beta, \forall x \in V$ $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
4) $\forall \alpha,\beta \in K, \forall x \in V$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
5) $\forall x \in V$ $1_K \cdot x = x$

Exemplu

Ex1) Consider $(K,+,\cdot)$ este K-sp vectorial

Ex2) Fie K corp, $n \in \mathbb{N}^*$

$K^n = \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{\text{„n" ori}} = \{(x_1,\ldots,x_n) / x_1,\ldots,x_n \in K\}$

„+": $K^n \times K^n \to K^n$

$(x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$

„·": $K \times K^n \to K^n$

$\alpha(x_1,\ldots,x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$

Atunci $(K^n,+,\cdot)$ este K-sp. vectorial

1) ① $(K^n,+)$ grup comutativ

(A) Fie $x,y,z \in K^n$ $\underline{(x+y)+z = x+(y+z)}$

$(x+y)+z = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) + z =$

$= ((x_1+y_1)+z_1, (x_2+y_2)+z_2, \ldots, (x_n+y_n)+z_n)$ | $\Rightarrow (x+y)+z = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2, \ldots, x_n+y_n+z_n) = x+(y+z)$

dar „+" este asociativă în K

② Comutativitate

Fie $x,y \in K^n$ $\underline{x+y = y+x}$

$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$ | $\Rightarrow x+y = (y_1+x_1, \ldots, y_n+x_n) = y+x$

dar „+" în K este comutativă

③ Element neutru

$x + 0_{K^n} = 0_{K^n} + x = x$

fie $0_{K^n} = (0,\ldots,0)$; $x \in K^n$

$x + 0_{K^n} = (x_1+0, x_2+0, \ldots, x_n+0)$ | $\Rightarrow x + 0_{K^n} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$

dar știu că 0 este el neutru în K

④ fie $x \in K^n$, $x' \in K^n$ pentru care $x+x' = 0_{K^n}$

$0_{K^n} = x+x' = (x_1+x_1', x_2+x_2', \ldots, x_n+x_n') \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1+x_1' = 0_3 \Rightarrow x_1' = -x_1$

$x_n + x_n' = 0 \Rightarrow x' = (-x_1, \ldots, -x_n)$; $(\forall) x \in K^n (\exists) x' \in K^n$ pt care $x+x' = 0_{K^n}$

2) fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $x,y \in K^n$

$\forall \alpha \in K$ $\forall x,y \in V$ $\underline{\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y}$

$\alpha(x+y) = \alpha(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) = (\alpha(x_1+y_1), \ldots, \alpha(x_n+y_n)) =$

$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n)$ (K corp)

Def. $\stackrel{\text{}}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \ldots, \alpha y_n) = \alpha x + \alpha y$

3) $\forall \alpha,\beta \in K$ $\forall x \in V$ $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

$(\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2, \ldots, (\alpha+\beta)x_n) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n) =$

$= \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha x + \beta x$

4) $\forall \alpha,\beta \in K$ $\forall x \in V$ $\underline{\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x}$

fie $\alpha,\beta \in K$

$x \in K^n$

$\alpha(\beta x) = \alpha(\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n) =$

$= (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \ldots, \alpha(\beta x_n)) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \ldots, (\alpha\beta)x_n)$

$= \alpha\beta x$

dar K-corp $\Rightarrow$ · este asociativă

5) Fie $x \in K^n$

$1_K \cdot x = (1_K x_1, \ldots, 1_K x_n) = (x_1, \ldots, x_n) = x$

Ex3) Fie K un corp, $m,n \in \mathbb{N}^*$
Atunci $(M_{m,n}(K),+,\cdot)$ este K-sp. vectorial

Ex4) Fie K un corp, $n \in \mathbb{N}$, $K_n[X]=\{f \in K[X] \mid \text{grad } f \le n\}$
$(K_n[X],+,\cdot)$ - este K-sp. vectorial
$,,\cdot": K \times K[X] \to K[X]$
$\alpha \cdot (\beta_0+\beta_1 X+\ldots+\beta_n X^n)=(\alpha\beta_0+\alpha\beta_1 X+\ldots+\alpha\beta_n X^n)$

Ex5) Fie K corp, $A \ne \emptyset$ $\mathcal{F}_A=\{f:A\to K \mid f \text{ funcție}\}$
op. int
$,,+": \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_A$
$f+g: A \to K$
$(f+g)(x)=\underbrace{f(x)+g(x)}_{\in K}$
op. ext
$,,\cdot": K \times \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_A$
$\alpha \cdot f: A \to K$
$(\alpha \cdot f)(x)=\alpha f(x)$
Atunci $(\mathcal{F}_A,+,\cdot)$ este K spațiu vectorial

1. $(\mathcal{F}_A,+)$ corp
(A) Fie $f,g,h \in \mathcal{F}_A$
$(f+g)+h=f+(g+h)$

Fie $x \in A$
$((f+g)+h)(x)=(f+g)(x)+h(x)=[f(x)+g(x)]+h(x)$ dar adunarea în K e asociativă $\Rightarrow$
$\Rightarrow ((f+g)+h)(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$
$(f+(g+h))(x)=f(x)+(g+h)(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x \in A \Rightarrow [(f+g)+h](x)=(f+(g+h))(x) \Rightarrow$ funcțiile sunt egale (au același domeniu și codomeniu)

(C) $f+g=g+f \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow (f+g)(x)=(g+f)(x)$

(N) $\theta: A \to K$ $\theta(x)=0$
$f+\theta=f=\theta+f(c) \Leftrightarrow (f+\theta)(x)=f(x) \Leftrightarrow \forall x \in A$
$\Leftrightarrow f(x)+0=f(x)$, $\forall x \in A \Leftrightarrow f(x)=f(x), \forall x \in A$

(S) Fie $f \in \mathcal{F}_A$
Căutăm $f' \in \mathcal{F}_A$ a.î. $f'+f=\theta \Leftrightarrow \forall x \in A\ (f'+f)(x)=\theta(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ pt $\forall x \in A$ $f'(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow$ pt $\forall x \in A$ $-f(x)=f'(x)$
$f': A \to K$, $f'(x)=-f(x)$ $\forall f \in \mathcal{F}_A\ \exists f' \in \mathcal{F}_A$ a.î. $f'+f=\theta$

2. Fie $\alpha \in K$ $x \in A$ $f,g \in \mathcal{F}$
$[\alpha(f+g)](x)=\alpha(f+g(x))=\alpha(f(x)+g(x))=\alpha f(x)+\alpha g(x)=$
$=(\alpha f+\alpha g)(x)$

3. $\alpha,\beta \in K$ $x \in A$ $f \in \mathcal{F}_A$
$[(\alpha+\beta)f](x)=(\alpha+\beta)f(x)=\alpha f(x)+\beta f(x)=(\alpha f)(x)+(\beta f)(x)=$
$=(\alpha f+\beta f)(x)$

4. Fie $\alpha,\beta \in K$ $x \in A$ $f \in \mathcal{F}_A$
$[\alpha(\beta f)](x)=\alpha(\beta f)(x)=\alpha(\beta f)(x)=$
$=(\alpha(\beta f))(x)=[(\alpha\beta)f](x)$

5. $(1\cdot f)(x)=f(x)$

vectori
Fie V/K un spațiu vectorial
scalari
$W=V\times V$ (perechi de vectori)
$,,+": W \times W \to W$
$(u,v)+(x,y)=(u+x,v+y)$
$,,\cdot": \mathbb{C} \times W \to W$ înmulțirea cu $\mathbb{C}$
$(a+bi)(u,v)=(a\cdot u-bv, av+bu) \mid^* (a+bi)(u+vi)$
Atunci $(W,+,\cdot)$ este $\mathbb{C}$ sp. vectorial

2) Fie $\alpha=a+bi \in \mathbb{C}$, $(x,y)(z,t) \in W$
$\alpha((x,y)+(z,t))=\alpha((x+z,y+t))=(a+bi)(x+z,y+t)=$
$=\cancel{(a+bi)(x,y)+}=(a(x+z)-b(y+t), a(y+t)+b(x+z))=$
$=(ax+az-by-bt, ay+at+bx+bz)$ -
$(a+bi)(x,y)+(a+bi)(z,t)=(ax+ay, ay+bx)+$
$+(az-bt, at+bz)=(ax+az-by-bt, ay+at+bx+bz)$

3) Fie $(a+bi),(c+di) \in \mathbb{C}$
$(x,y) \in W$
$[(a+bi)+(c+di)](x+y)=$
$=((a+c)x-(b+d)y, (a+b)y+(b+d)x)$
$=(ax+cx-by-dy, ay+by+bx+dx)$
$(a+bi)(x,y)+(c+di)(x,y)=$
$=(ax-by, ay+bx)+(cx-dy, cy+dy)$ $\Rightarrow$
$=(ax+cx-by-dy, ay+cy+bx+dx)$

4) $(a+bi)[(c+di)(x,y)]=(a+bi)$
$[(cx-dy, cy+dx)]=$
$=(a(cx-dy)-b(cy+dx), a(cy+dx)+$
$+b(cx-dy))=(acx-ady-bcy-bdx,$
$acy+adx+bcx-bdy)=$
$=[(a+bi)(c+di)](x,y)=((ac-bd, ad+bc)(x,y)$
$=(x(ac-bd)-y(ad+bc), x(ad+bc)+y(ac-bd))$
$=(acx-bdx-ady-bcy, adx+bcx+acy-bdy)$

5) Fie $(x,y) \in W$
$(1,0)(x,y)=(1\cdot x-0\cdot y, 1\cdot y+0\cdot x)=$
$=(x,y)$

Scanned by CamScanner

Def. Fie V un K spațiu vectorial, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in V$ și $a^1, \dots, a^n \in k$. Elementul $a^1 x_1 + \dots + a^n x_n$ din V s.n. combinație liniară a vectorilor $x_1, \dots, x_n$ (cu scalarii $a^1, \dots, a^n$)

Notație: $\sum_{i=1}^{n} a^i \cdot x_i = a^i \cdot x_i$

$\downarrow$

notația lui Einstein = = notația indicelui mut

Def. Fie V un spațiu vectorial $/K$ și S o submulțime în V. S se numește sistem de generatori pt V, dacă orice vector din V se poate scrie ca o combinație liniară de vectori din S, cu coeficienți în K.

Deci, $\forall x \in V$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_1, \dots, x_n \in S$ $\exists a^1, \dots, a^n \in K$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{n} a^i x_i$

Exemplu: Fie V sp. vectorial $/K$. Atunci V este sistem de generatori pt V.

Exemplu: Fie K^n, ca sp. vect. $/K$. Atunci $S := \{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)\}$ este sistem de generatori pt K^n.

În adevăr, fie $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Atunci $x = x_1 \cdot (1,0,\dots,0) + x_2 \cdot (0,1,0,\dots,0) + \dots + x_n (0,\dots,0,1)$.

Caz particular: $S = \{(1,0),(0,1)\}$ este sistem de generatori pt. $\mathbb{R}^2$ (ca sp. vectorial)

Exercițiu: Arătați că $S = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ este sistem de generatori pt $\mathbb{R}^2$.

Propoziție Fie V un K-sp. vectorial și S un sistem de generatori pt V. Fie $S' \supset S$. $S' \subset V$. Atunci S' este de asemenea sistem de generatori pt V.

Exemplu. Fie $V = M_{m \times n}(K)$ ca sp. vectorial$/K$. Notăm $E_{ij} = i\begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ - & 1 & \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ (toate elem 0, fără $a_{ij} = 1$)

Arătați că $\{E_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ este sistem de gen. pt V.