Examen[1] la algebră, sem. I, seria 10
23.01.2017

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Problema 1. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$.

(1) Descompuneţi σ în produs de cicli disjuncţi. **(5 p.)**

(2) Aflaţi σ^{2017}. **(5 p.)**

(3) Există $x \in S_6$ cu proprietatea că $x^2 = \sigma$? **(10 p.)**

Problema 2. Fie grupul abelian $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ subgrupul său şi $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ grupul factor.

(1) Determinaţi toate subgrupurile lui $\langle \widehat{\frac{1}{6}} \rangle$, unde $\widehat{\frac{1}{6}} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. **(5 p.)**

(2) Este subgrupul $\langle \widehat{\frac{5}{7}}, \widehat{\frac{8}{9}} \rangle$ ciclic? În caz afirmativ, determinaţi un generator pentru acest subgrup. **(10 p.)**

(3) Se poate introduce o structură de inel unitar pe grupul factor $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$? **(10 p.)**

Problema 3. Fie idealul $I = (X^2, X^3)$ al inelului de polinoame $\mathbb{R}[X]$.

(1) Daţi un exemplu de polinom care aparţine idealului I şi are exact 4 termeni şi un exemplu de polinom care nu aparţine idealului I şi are exact 4 termeni. **(5 p.)**

(2) Este adevărat că $I = (X^3)$? Dar că $I = (X^2)$? **(5 p.)**

(3) Aflaţi idealele inelului $\mathbb{R}[X]/I$ şi determinaţi, până la un izomorfism, inelele factor ale lui $\mathbb{R}[X]/I$. **(5 pct.)**

(4) Are loc izomorfismul de inele $\mathbb{R}[X]/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$? **(5 pct.)**

(5) Determinaţi o structură de inel pe mulţimea produs cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc următorul izomorfism de inele $\mathbb{R}[X]/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. **(10 pct.)**

(6) Calculaţi $U(\mathbb{R}[X]/I)$ şi arătaţi că $U(\mathbb{R}[X]/I) \simeq (\mathbb{R}^\times, \cdot) \times (\mathbb{R}, +)$. **(10 pct.)**

Problema 4. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 4 \end{cases}$$

(10 pct.)

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 5 puncte din oficiu. Timp de lucru 3 ore. Succes!**