Temă 1-2

ONUȚU RADU-CONSTANTIN

Gr. 113

1. (i) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(ii) $X \cap Y = \{7, 8, 9\}$

(iii) $X \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$

(iv) $Y - \{4, 5, 6, 8, 9\} = \{3, 7\}$

Sol.:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	X	X	Y	Y	X	Y	XY	XY	XY
motiv	iv	iv	iv	iii	iii	iii	ii	ii	ii

Cf. tabelului $\Rightarrow X = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$

$Y = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

2. $f : \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \to \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \times \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

$f(X) = (X \cup \{4, 5\}, X \cap \{1, 2, 3\})$

Sol.:

Pt. simplitate voi scrie direct ex.: $\{1, 2\} = 12$

$\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 234, 1234\}$

~~$f(\emptyset)=(\{4,5\},\emptyset)$~~ ~~$f(\{1\})=(\{1,4,5\},\{1\})$~~

$A=\{\{4,5\},\{1,4,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\},\{1,2,4,5\},$
$\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$

$B=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$Im(f)=\cancel{(A,B)}\ A\times B$

$f(\{1,2,3\})=(\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3\})$
$f(\{1,2,3,4\})=(\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3\})$ $\Big| \Rightarrow f(\{1,2,3\})=f(\{1,2,3,4\})$ dar $\{1,2,3\}\neq\{1,2,3,4\}$ $\Rightarrow f$ este non-injectivă

$A\neq \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \Rightarrow Im(f)\neq$ codomeniu $\Rightarrow f$ este non-surjectivă
codomeniu $= \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\times\mathcal{P}(\{1,2,3\})$

3.4. $M=\{n\leq 259 \mid n\in\mathbb{N}^*\}$; $card(M)=259$

$M_2=\{n\leq 259 \mid 2|n, n\in\mathbb{N}^*\}$; $card(M_2)=129$

$M_5=\{n\leq 259 \mid 5|n, n\in\mathbb{N}^*\}$; $card(M_5)=51$

$M_7=\{n\leq 259 \mid 7|n, n\in\mathbb{N}^*\}$; $card(M_7)=37$

Trebuie să aflu: $card(M)-card(M_2\cup M_5\cup M_7)$

$|M_2\cup M_5\cup M_7|=|M_2|+|M_5|+|M_7|-|M_2\cap M_5|-|M_2\cap M_7|-$
$-|M_5\cap M_7|+|M_2\cap M_5\cap M_7|$

$M_2\cap M_5 \Leftrightarrow M_{10}$; $card(M_{10})=25$ $\quad M_2\cap M_7 \Leftrightarrow M_{14}$; $card(M_{14})=18$

$M_5 \cap M_7 \Leftrightarrow M_{35}$; $card(M_{35}) = 7$; $M_2 \cap M_5 \cap M_7 \Leftrightarrow M_{70}$; card($M_{70}$)

$|M_2 \cup M_5 \cup M_7| = 129 + 51 + 37 - 25 - 18 - 7 = \cancel{167} \overset{+3}{170}$

$|M| - |M_2 \cup M_5 \cup M_7| = 259 - \overset{170}{\cancel{167}} = \cancel{92}\ 89$

5. $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = (x-\sqrt{2})^2 + (y - \frac{1}{7})^2$

Pp. că f este non-injectivă $\Rightarrow$ pt $\forall\, x, y, u, v \in \mathbb{Z}$ cu $f(x,y) = f(u,v)$ atunci $x \neq u$ și $y \neq v$

$(x-\sqrt{2})^2 + (y-\frac{1}{7})^2 = (u-\sqrt{2})^2 + (v - \frac{1}{7})^2$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - \frac{2}{7}y + \frac{1}{49} = u^2 - 2\sqrt{2}u + 2 + v^2 - \frac{2}{7}v + \frac{1}{49}$

$x^2 - u^2 + y^2 - v^2 - \frac{2}{7}y + \frac{2}{7}v = 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}u$

$= 2\sqrt{2}(x-u) \,\Big|\cdot \frac{1}{x-u} \quad x \neq u$

$\frac{x^2 - u^2 + y^2 - v^2 - \frac{2}{7}y + \frac{2}{7}v}{x-u} = 2\sqrt{2}$ Fals deoarece membrul stâng este un nr. rațional, iar membrul drept este unul irațional.

$\Rightarrow$ pp. făcută este falsă, deci f este injectivă

3. Fie $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = (x-\sqrt{2})^2 + (y - \frac{1}{7})^2 = AB^2$, unde

$A(x_A, y_A)$

$B(\sqrt{2}, \frac{1}{7})$

Fie $\mathcal{C}(B, BC)$, unde $C(x_C, y_C)$ este al 10-lea cel mai îndepărtat punct de coordonate întregi de centru.

Cf. ex. 5 f este injectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists\, D(x_D, y_D)$ ($x_D, y_D \in \mathbb{Z}$ și $x_D \neq x_C, y_D \neq y_C$) a.î.:

$$\cancel{AB^2 = DB^2 \Leftrightarrow AB = DB}$$

$$CB^2 = DB^2 \Leftrightarrow CB = DB$$

În concluzie, $\mathcal{C}(B, BC)$ are exact 10 pct. de coordonate întregi datorită injectivității funcției f.

(Acest caz se poate generaliza pt. un cerc cu exact n pct. de coordonate întregi.)

Tema 4

[redacted]

Ex. 113

16. Fie tabla

$\{1, 2\}$

$*$	1	2
1	1	2
2	2	1

(1)

$(1*1)*1 = 1*(1*1) \Leftrightarrow 1*1 = 1*1$ A

$(1*1)*2 = 1*(1*2) \Leftrightarrow 1*2 = 1*2$ A

$(1*2)*1 = 1*(2*1) \Leftrightarrow 2*1 = 1*2 \Leftrightarrow 2 = 2$ A

$(2*1)*1 = 2*(1*1) \Leftrightarrow 2*1 = 2*1$ A

$(1*2)*2 = 1*(2*2) \Leftrightarrow 2*2 = 1*1 \Leftrightarrow 1 = 1$ A

$(2*1)*2 = 2*(1*2) \Leftrightarrow 2*2 = 2*2$ A

$(2*1)*1 = 2*(1*1) \Leftrightarrow 2*1 = 2*1$ A

$(2*2)*2 = 2*(2*2) \Leftrightarrow 1*2 = 2*1 \Leftrightarrow 2 = 2$ A

Fie tabla

$\{1, 2\}$

$*$	1	2
1	1	2
2	2	2

(2)

$(1*1)*1 = 1*(1*1) \Leftrightarrow 1*1 = 1*1$ A

$(1*1)*2 = 1*(1*2) \Leftrightarrow 1*2 = 1*2$ A

$(1*2)*1 = 1*(2*1) \Leftrightarrow 2*1 = 1*2 \Leftrightarrow 2 = 2$ A

$(2*1)*1 = 2*(1*1) \Leftrightarrow 2*1 = 2*1$ A

$(1*2)*2 = 1*(2*2) \Leftrightarrow 2*2 = 1*2 \Leftrightarrow 2 = 2$ A

$(2*1)*2 = 2*(1*2) \Leftrightarrow 2*2 = 2*2$ A

$(2*1)*1 = 2*(1*1) \Leftrightarrow 2*1 = 2*1$ A

$(2*2)*2 = 2*(2*2) \Leftrightarrow 2*2 = 2*2$ A

Fie tabla $\{1, 2\}$

$*$	1	2
1	2	1
2	1	1

(3)

$(1*1)*1 = 1*(1*1) \Leftrightarrow 2*1 = 1*2 \Leftrightarrow 1 = 1$ A

$(1*1)*2 = 1*(1*2) \Leftrightarrow 2*2 = 1*1 \Leftrightarrow 1 = 2$ F

$(1*1)*2 \neq 1*(1*2) \Rightarrow$ Tabla (3) nu este semigrup pe $\{1, 2\}$

Fie tabla $\{1, 2\}$

$*$	1	2
1	2	2
2	1	1

(4)

$(1*1)*1 = 1*(1*1) \Leftrightarrow 2*1 = 1*2 \Leftrightarrow 1 = 2$ F

$(1*1)*1 \neq 1*(1*1) \Rightarrow$ Tabla (4) nu este semigrup pe $\{1, 2\}$

În concluzie, doar tablele (1) și (2) sunt semigrupuri pe $\{1, 2\}$

18. Submonoizi de ordinul 3 al lui $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ trebuie să fie parte stabilă și să conțină el. neutru „$\hat{1}$", iar asociativitatea are loc pe înmulțirea claselor de resturi.

$M_4 = (\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}, \cdot)$ - submonoid (parte stabilă)
din ex. 30

$(\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}\}, \cdot)$ - submonoid (parte stabilă)

$(\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}\}, \cdot)$ - submonoid (parte stabilă)

$(\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{5}\}, \cdot)$ - submonoid (parte stabilă)

$M_5 = (\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}, \cdot)$ - submonoid (parte stabilă: $\hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{2} \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$)
din ex. 30 $(\{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}, \cdot)$ - submonoid (parte stabilă: $\hat{3} \cdot \hat{5} = \hat{3} \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$)

20. $A = \{ \frac{a}{2b+1} \mid a, b \in \mathbb{N} \}$

$(A, \cdot)$ - monoid

Fie $\frac{a}{2b+1} \in A$ şi $\frac{c}{2d+1} \in A$

$$\frac{a}{2b+1} \cdot \frac{c}{2d+1} = \frac{ac}{4bd+2b+2d+1} = \frac{(ac)}{2(2bd+b+d)+1} \in A$$

$ac \in \mathbb{N}$

$2bd+b+d \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow A$ e parte stabilă

$\frac{a}{2b+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A \subset \mathbb{Q}$

„$\cdot$" este asociativă pe $\mathbb{Q}$ $\Big| \Rightarrow$ „$\cdot$" este asociativă pe A

A admite el. neutru 1 pt. $a = 1$ şi $b = 0$

$\Rightarrow (A, \cdot)$ monoid

Fie $x \in A$ şi $x' \in A$ a.î. $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$

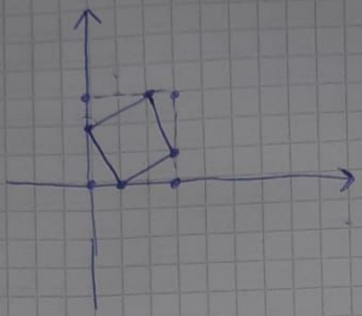
$$\frac{a}{2b+1} \cdot x' = x' \cdot \frac{a}{2b+1} = 1$$

$$x' = \frac{2b+1}{a} \Rightarrow U(A) = \{ a \in \mathbb{N}^*, a = 2k+1, k \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \}$$

Tema 5

[redacted]

G. 113

21. 

sim(F) = $\langle P \rangle$, unde P este pătratul cu vârfurile (0,0), (3,0), (3,3), (0,3)

Dacă aplic o rotație lui P pot ajunge la același pătrat.

22. $(\mathbb{Z}_n, +)$, $n < 22$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}_{22}, +)$ dacă:

$\forall \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow [\hat{a} + (-\hat{b})] \in \mathbb{Z}_n$

$\left.\begin{array}{l} \hat{a} \in \mathbb{Z}_n \\ (-\hat{b}) \in \mathbb{Z}_n \end{array}\right| \Rightarrow [\hat{a} + (-\hat{b})] \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow$ pt. $\forall n < 22 \Rightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$ subgr. al lui $(\mathbb{Z}_{22}, +)$

Subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{22}$ sunt: $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_{21}$

23. ~~$(\mathbb{Z}_n, \cdot)$~~ $(\mathbb{Z}_n - \{\hat{0}\}, \cdot)$, $n < 23$ și n nr. prim $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n - \{\hat{0}\}$

$\left.\begin{array}{l} \hat{a} \in \mathbb{Z}_n - \{\hat{0}\} \\ n \text{ nr. prim} \Rightarrow \hat{b}^{-1} \in \mathbb{Z}_n - \{\hat{0}\} \end{array}\right| \Rightarrow (\hat{a} \cdot \hat{b}^{-1}) \in \mathbb{Z}_n - \{\hat{0}\} \Rightarrow (\mathbb{Z}_n - \{\hat{0}\}, \cdot)$ subgr. al lui $(\mathbb{Z}_{23} - \{\hat{0}\}, \cdot)$

Subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{23} - \{\hat{0}\}$ sunt: $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_{17}, \mathbb{Z}_{19}$.