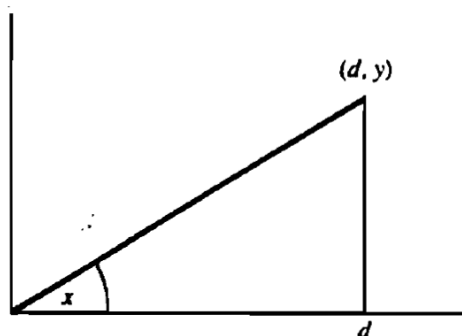


Test la Statistică

1. Fie X o v.a. asociată unui unghi aleator a cărei distribuție este $U(0, \frac{\pi}{2})$.

Pentru fiecare X se poate construi triunghiul drept ca în figura de mai jos, unde Y este cateta care se opune unghiului aleator construit. Pentru o constantă fixă d determinați distribuția lui Y și media lui Y .



2. Fie X o v.a. cu $f(x) = \frac{4}{\beta^3 \sqrt{\pi}} x^2 e^{\frac{-x^2}{\beta^2}}$, $0 < x < \infty$, $\beta > 0$.

- Verificați dacă f este o densitate de probabilitate și calculați $E(X)$ și $Var(X)$.
- Ilustrați grafic în R funcția f
- Folosiți R pentru a calcula $P(1 < X < 3)$ și $P(1 < X < 3 | X > 2)$
- Folosiți R pentru a reprezenta grafic o aproximare a funcției de repartiție a lui X pe intervalul $(1,3)$.

3. Fie X o v.a. cu densitatea f o funcție pară, i.e. $f(-x) = f(x)$.

- Arătați că X și $-X$ au aceeași distribuție
- Arătați că funcția generatoare de momente $M_X(t)$ este simetrică față de 0.
- Dați un exemplu de o astfel de distribuție și ilustrați densitatea f în R.

4. Fie X o v.a. cu densitatea de probabilitate $f(x) = \frac{2x}{c^2} 1_{(0,c)}$. Construiți funcția generatoare de momente $M_X(t)$ a lui X și apoi calculați $E(X)$ și $Var(X)$.

5. Un punct aleator (X,Y) este distribuit uniform în pătratul cu vârfurile în $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ și respectiv $(-1,1)$, cu X și Y independente.

- Arătați că $f(x,y) = \frac{1}{4}$ în interiorul pătratului.

b) Determinați, prin simulare, probabilitatea $P(|X + Y| < 2)$ și apoi comparați cu rezultatul teoretic

6. Fie \bar{X} media de selecție a unui eșantion cu 100 observații extrase dintr-o populație cu medie μ și dispersie $\sigma^2 = 9$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $P(a < \bar{X} - \mu < b) > 0.9$.

Construiți în R 10^3 eșantioane ca mai sus(alegeți voi repartiția!) și verificați pentru câte dintre ele $a < \bar{X} - \mu < b$.

7. Construiți estimatori pentru parametrul θ folosind, metoda verosimilității maxime și metoda momentelor(acolo unde este posibil) pentru o v.a. X dată prin:

a) $f(x; \theta) = \frac{x}{9\theta^2} e^{-\frac{x}{3\theta}}, x > 0, \theta > 0$.

b) $f(x) = \frac{\theta}{4} * 1_{(0,1)} + (1 - \frac{\theta}{2}) * 1_{[1,2)} + \frac{\theta}{4} * 1_{[2,3)}$

c) $f(x) = \frac{1}{3} (5 - 2\theta)^{\frac{1}{2}(3-x)(2-x)} * (\theta - 1)^{\frac{1}{2}(x-1)(4-x)}, x = 1, 2, 3, 1 \leq \theta \leq \frac{5}{2}$

Verificați, în R, faptul că estimatorul obținut este bun comparând cu rezultatele obținute printr-o metodă numerică.