Facultatea de Matematica-Informatica
Universitatea din Bucuresti

6 Februarie 2018

Examinare

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale
Tipul examinarii: Examen scris
Nume student: ______________________________
Grupa 321
Timp de lucru: 3 ore

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest examen contine 4 probleme (toate obligatorii).

Verificati foile cu subiecte fata-verso !

Examenul este individual. La sfarsitul examenului nu uitati sa aduceti foaia cu subiectele o data cu lucrarea scrisa pentru a le capsa impreuna. Astfel, corectura se va face mai usor.
Pentru elaborarea lucrarii scrise puteti folosi ca unic material ajutator o foaie format A4 care sa contina doar notiuni teoretice. Exercitiile rezolvate sunt excluse ca material ajutator.

Pentru redactare tineti cont de urmatoarele sugestii:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **indicati** acest lucru si explicati cum se poate aplica rezultatul respectiv.
- **Organizati-va munca** intr-un mod coerent pentru a avea toti de castigat ! Incercati ca la predarea lucrarii fiecare problema sa fie redactata in ordinea aparitiei pe foaia cu subiecte. Nu amestecati rezolvarile problemelor ! Ideal ar fi ca si subpunctele sa fie redactate in ordine. Daca nu stiti a rezolva un anumit subpunct scrieti numarul subpunctului si lasati liber.
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Barem: P1 (2.5p) + P2 (2.5p)+ P3 (2.5p) +P4 (2p) + 1p oficiu= **10.5p**.

Rezultatele le veti primi in principiu in ziua respectiva sau in ziua urmatoare. Pentru orice nelamuriri scrieti-mi la adresa cristian.cazacu@fmi.unibuc.ro.

Problema 1. *(2.5p). Fie functia* $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan |x|$, $x = (x_1, \ldots, x_5)$.

1). Sa se scrie formula operatorului Laplacian Δ *pentru functii cu simetrie radiala din* $\mathbb{R}^5$.

2). Calculati $\Delta f(x)$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^5$.

3). Aratati ca

$$\operatorname{div}\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = \frac{5}{|x|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^7 \setminus \{0\}.$$

Consideram functia $u : B_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *data de*

$$u(x) = \frac{|x|^{-\frac{8}{5}}}{|x|^2 + 1}, \quad x = (x_1, \ldots, x_4),$$

unde $B_1(0)$ *este bila unitate din* $\mathbb{R}^4$ *centrata in origine.*

4). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ *are loc* $u \in L^p(B_1(0))$.

5). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ *are loc* $u \in L^p(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_1(0)})$.

Problema 2. *(2.5p) Fie* $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 4\}$ *si* $\partial\Omega$ *frontiera lui* Ω. *Fie problema*

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} -\Delta u(x, y) = 3\cos y, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

1). Aratati ca problema (1) *are cel mult o solutie* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

2). Gasiti constanta C *astfel incat functia* $v(x, y) = C(x^2 + y^2)$ *sa verifice* $-\Delta v = 3$ *in* Ω.

3). Folosind principiul de maxim pentru functii armonice sa se determine solutia problemei

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} -\Delta u(x, y) = 3, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

4). Folosind principiul de maxim pentru functii sub/super armonice sa se arate ca solutia problemei (1) *verifica*

$$|u(x, y)| \leq 3, \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

5). Aratati ca solutia u a problemei (1) *este para, i.e.* $u(-x, -y) = u(x, y)$ *pentru orice* $(x, y) \in \Omega$.

6). Calculati $\nabla u(0, 0)$.

Problema 3. *(2.5p). Consideram urmatoarea problema de tip "unde"*

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - 2u_{xx}(x, t) = 1, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

unde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ *sunt functii date. Consideram*

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{t^2}{2}.$$

1). Scrieti ecuatia satisfacuta de v.

2). Aratati ca pentru orice functie w de clasa C^2 avem

$$w_{tt}(x,t) - 2w_{xx}(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) w.$$

3). Pentru v de mai sus notam

$$z(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \sqrt{2}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Gasiti ecuatia satisfacuta de z.

4). Gasiti forma generala a functiei z.

5). Cu z determinat anterior rezolvati ecuatia

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sqrt{2}\frac{\partial v}{\partial x} = z(x,t)$$

si scrieti forma generala a lui v.

6). Folosind conditiile asupra lui v la $t = 0$ din enunt obtineti pe v si apoi deduceti solutia u a problemei (3).

Problema 4. *(2p) Se considera problema Dirichlet*

$$(4) \qquad \begin{cases} -(e^x u'(x))' + u = \ln\big(\cos^2 x + 1\big), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

1). Consideram aplicatia biliniara $a(\cdot,\cdot) : H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ data de

$$a(u,v) := \int_0^1 e^x u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx.$$

2). Aratati ca $a(\cdot,\cdot)$ este continua si coerciva. Argumentati pe scurt ca $a(\cdot,\cdot)$ este bine definita.

3). Aratati ca $a(\cdot,\cdot)$ defineste un produs scalar pe $H_0^1(0,1)$.

4). Aratati ca $a(\cdot,\cdot)$ induce o norma pe $H_0^1(0,1)$ echivalenta cu norma standard din $H^1(0,1)$.

5). Definiti notiunea de solutie slaba pentru problema (4).

6). Argumentati ca exista o unica solutie slaba $u \in H_0^1(0,1)$ pentru (4).