- SEMINAR 12 - GEOMETRIE -

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformare ortogonală

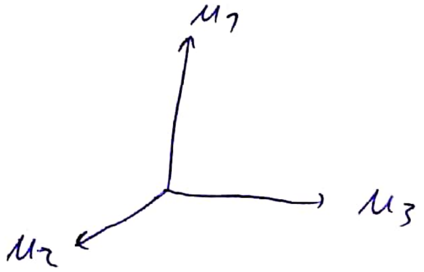
$\text{Spec } f \subseteq \{-1, 1\}$

$|\text{Spec } f| = 1$

• $\text{Spec } f = \{1\}$ → și ordinul de multiplicitate al lui $\lambda = 1$ este 1.

$\Rightarrow \exists u_1 \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\|u_1\| = 1$ și $f(u_1) = u_1$

Fie $u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\{u_1, u_2, u_3\}$ să fie bază ortonormată în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.



$f(\langle\{u_2, u_3\}\rangle) = \langle\{u_2, u_3\}\rangle$

$f(u_2) = a_{22}u_2 + a_{32}u_3$

$f(u_3) = a_{23}u_2 + a_{33}u_3$

$\{u_1, u_2, u_3\} \xrightarrow{f} \{u_1, u_2, u_3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

• Dacă $Spec(f) = \{-1\} \Rightarrow \exists u_1 \in \mathbb{R}^3$, $\|u_1\| = 1$ a.î. $f(u_1) = -u_1$.

Fie $u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\{u_1, u_2, u_3\}$ bază ortonormată în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

$f(\langle\{u_2, u_3\}\rangle) = \langle\{u_2, u_3\}\rangle$

(dacă $u \perp v \Rightarrow f(u) \perp f(v)$ când f e ortogonală)

$\{u_1, u_2, u_3\} \xrightarrow{f} \{u_1, u_2, u_3\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\pi = \langle\{u_2, u_3\}\rangle$

$s_\pi(u_1) = -u_1$
$s_\pi(u_2) = u_2$
$s_\pi(u_3) = u_3$

$(s_\pi \circ f)(u_1) = s_\pi(-u_1) = u_1$
$(s_\pi \circ f)(u_2) = s_\pi(\cos\theta \cdot u_2 + \sin\theta \cdot u_3) = \cos\theta \cdot u_2 + \sin\theta \cdot u_3$
$(s_\pi \circ f)(u_3) = (-\sin\theta)\, u_2 + \cos\theta \cdot u_3$

$\{u_1, u_2, u_3\} \xrightarrow{s_\pi \circ f} \{u_1, u_2, u_3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$s_\pi \circ f = R_\theta \mid s_\pi$ la stânga

$\Rightarrow f = s_\pi \circ R_\theta$.

Dacă f este diagonalizabilă

I toate $\begin{cases} \to \text{răd } 1 \to \text{ident} \\ \to \text{răd } -1 \to -\text{ident} \end{cases}$

II $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ $\Rightarrow \exists \{u_1, u_2, u_3\}$ bază ortonormată în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

a.î. $f(u_1) = u_1$
$f(u_2) = u_2$
$f(u_3) = -u_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{deci } f = S_{<\{u_1, u_2\}>}$$

III $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ $\Rightarrow \exists$ o bază ortonormată pt. care

$f(u_1) = -u_1$
$f(u_2) = -u_2$
$f(u_3) = u_3$

deci $f = S_{<\{u_3\}>} = R_\pi$ față de u_3.

Def

Fie $(V_{/\mathbb{R}}, <,>)$ spațiu vectorial euclidian
$f \in End_{\mathbb{R}}(V)$

Spunem că f este endomorfism simetric dacă

$\forall x, y \in V \quad <f(x), y> = <x, f(y)>$

Prop

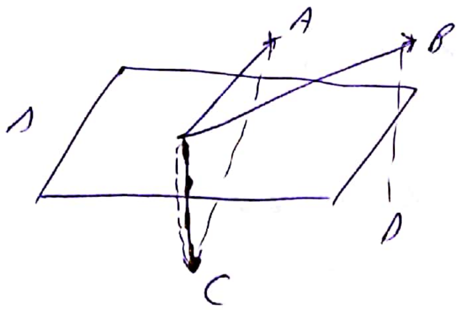
$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza ortonormată în V

$A \to$ matricea asociată lui $f \in End(V)$ și baza $\mathcal{B}$

f sim $\Leftrightarrow$ ${}^{T}A = -A$.

Dem

$\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$



sim. dată de un plan

$\langle s(\overline{OA}), \overline{OB} \rangle = \langle \overline{OA}, s(\overline{OB}) \rangle$

$$\frac{\langle s(\overline{OA}), \overline{OB} \rangle}{\|\overline{OA}\| \cdot \|\overline{OB}\|} = \frac{\langle \overline{OA}, s(\overline{OB}) \rangle}{\|\overline{OA}\| \cdot \|\overline{OB}\|} \Leftrightarrow \sphericalangle(s(\overline{OA}), \overline{OB}) = \sphericalangle(\overline{OA}, s(\overline{OB}))$$

$\triangle COB \equiv \triangle AOD$
$\left| \begin{array}{l} [AO] \equiv [CO] \\ [DO] \equiv [BO] \\ (AD) \equiv [BC] \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} s(A) = C \\ s(D) = B \end{array} \right| \Rightarrow [AD] \equiv [BC]$

$s_p = \Delta + id_{\mathbb{R}^3}$

$\mathcal{B}_c \xrightarrow[A]{\Delta} \mathcal{B}_c \qquad \mathcal{B}_c \xrightarrow[C]{p} \mathcal{B}_c$

$$\left.\begin{array}{l} 2C = A + I_3 \\ 2C^T = A^T + I_3 = A + I_3 \end{array}\right| \Rightarrow C^T = C \Rightarrow p \text{ endomorfism simetric}$$

Simetriile și proiecțiile sunt simetrice.

<u>Ex 1</u>

Fie $f \in End(V)$ simetric

$\lambda_1, \lambda_2 \in Spec(f)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

și $v_1 \in V_{\lambda_1} \setminus \{0\}$, $v_2 \in V_{\lambda_2} \setminus \{0\}$

$v_1 \perp v_2$

---

f End. sim $\Rightarrow \langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle \Rightarrow$

~~$\langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \Rightarrow$~~

$\langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \Rightarrow$

$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \Rightarrow$

$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$

Ex 2

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = (x_1 + 2x_2 - 4x_3,\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3,\ -4x_1 - 2x_2 + x_3)$

a) Să se arate că f este Endom. sim. al spațiului vect. euclidian $(\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \langle\ \rangle)$

b) Să se det. o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ în care matricea asociată lui f să aibă forma diagonală și să se determine această matrice.

a) $B_c \xrightarrow{f} B_c$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A^T \Rightarrow f \in \text{sim}(\mathbb{R}^3)$$

b) $(\text{Tr} A = 0)$

$\lambda_{1,2} = -3$

$\lambda_3 = 6$

$V_{\lambda_{1,2}} = \langle \{(1,-2,0), (0,2,1)\} \rangle$

din $V_{\lambda_{1,2}} = 2 = 3-1$

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$

$u_2' = (0,2,1) - \frac{-4}{5}(1,-2,0) = \frac{1}{5}(4,2,5)$

$u_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(4,2,5) \Rightarrow \{u_1, u_2\}$ reper ortonormat în $V_{\lambda_{1,2}}$

$V_{\lambda_3} = \{ x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 6x \}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6x_2 \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 = 6x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 2 & -8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad rg\, M = 2$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4x_2 \\ -4x_1 - 5x_3 = 2x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1 - 4x_3 = 16x_2 \\ -4x_1 - 5x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

$$-9x_3 = 18x_2 \Rightarrow \boxed{x_3 = -2x_2}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_3 + 4x_2 = -2x_2 + 4x_2 = 2x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2x_2}$$

$V_{\lambda_3} = \langle (2, 1, -2) \rangle$

$u_3 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$ $\qquad \{u_3\}$ reper ortonormat în V_{λ_3}.

$R' = \{u_1, u_2, u_3\}$ reper ortonormat în $\mathbb{R}^3$.

$R' \xrightarrow{f} R'$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ex 3

$(V/\mathbb{R}, \langle\,\rangle)$

$Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică

$\Rightarrow \exists!\ g: V\times V \to \mathbb{R}$ formă biliniară și simetrică

a.î. $Q(x) = g(x,x),\ \forall x \in V$

g biliniară

$\langle,\rangle$ formă biliniară simetrică, nedegenerată $\Big/ \Rightarrow \exists!\ f \in End(V)$ a.î. $\forall x, y \in V\ \ g(x,y) = \langle f(x), y\rangle$

$g(x,y) = g(y,x) \Rightarrow \langle f(x), y\rangle = \langle f(y), x\rangle$

$\Rightarrow f$ este endomorfism simetric

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază ortonormată în $(V/\mathbb{R}, \langle,\rangle)$

$Q \xrightarrow{B} A$

$B \xrightarrow[C]{f} B$

$a_{ij} = g(e_i, e_j) = \langle f(e_i), e_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, e_j\rangle =$

$= \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\delta_{kj} = c_{ji} = c_{ij}\ (C = C^T) \Rightarrow \boxed{A = C}$

(în bază ortonormată)

Ex 4

$Q: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Să se determine o bază ortonormată în care Q are forma canonică și să se precizeze această formă.

SOL: Se diagonalizează matricea asociată lui Q.

$$Q(x) = g(x, x) = \langle f(x), x \rangle$$

$\lambda_1 = 1$, $n_1 = 3$

$\lambda_2 = -3$, $n_2 = 1$

$R_C \xrightarrow[A]{f} R_C$

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

$Q \xrightarrow{R_C} A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fie $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ reper ortonormat în $\mathbb{R}^4$, format din vectori proprii.

$R \xrightarrow[D]{f} R$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2$$

unde $x = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 + y_4 v_4$

$V_{\lambda_2} \to v_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$

$V_{\lambda_1} \to$ prin observație $\to (1, 1, 0, 0) - u_1$

$(0, 0, 1, 1) - u_2$

$u_1 \perp u_2$.

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)$

$x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ ec. lui V_{λ_1}

$(1, 1, 0, 0) \in V_{\lambda_1}$ zere exemplu

$V_3 = v_1 \times v_2 \times v_4$ ($v_3 \perp$ hiperplanul $\langle v_1, v_2, v_4 \rangle$)

$$v_3 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}$$

e_1, e_2, e_3, e_4 - din baza canonica

$$V_3 = \frac{1}{4}\left(-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$V_3 = \frac{1}{4}(-2, 2, -2, 2) = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$$

avem $\|v_3\| = 1.$