Milostanu Andreea
Mihoci Valentina

22.12.2021

# Tutoriatul 10
(ca nota din examen)
Geometrie I
(exerciții)

**1.** Fie conica $\Gamma: f(x,y)=x^2-4xy+4y^2-6x+2y+1=0$. Să se aducă la forma canonică, efectuând izometrii. Reprezentare grafică.

SOL. $f(x,y)=x^2-4xy+4y^2-6x+2y+1=0$

$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ $\quad B=(-3 \;\; 1)$ $\quad c=1\in\mathbb{R}$

$\delta=\det A=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0 \Rightarrow$ conica nu are centru unic

$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-3\\ 1\end{matrix}}\\ \boxed{\begin{matrix}-3 & 1\end{matrix}} & 1\end{pmatrix}$

$\Delta=\det\tilde{A}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ -2 & 4 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{vmatrix}=\cancel{4}+6+6-36-1-\cancel{4}=5-30=$

$=-25\neq 0 \Rightarrow$ conica este nedegenerată

Ne așteptăm să obținem o parabolă.

Considerăm polinomul caracteristic asociat matricei $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

$P(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow \lambda^2-Tr(A)\cdot\lambda+\det A=0$

$\lambda^2-5\lambda+0=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-5)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1=5,\ \lambda_2=0.$

Aflăm versorii proprii asociați fiecărei valori proprii.

$\underline{\lambda_1=5}$ $\quad V_{\lambda_1}=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid Ax=5x\} \Rightarrow Ax=5x \Rightarrow (A-5I_2)x=0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-4x-2y=0\\ -2x-y=0\end{cases} \Rightarrow y=-2x$

$V_{\lambda_1}=\{(x,-2x) \mid x\in\mathbb{R}\}=\langle\{(1,-2)\}\rangle$

$e_1'=\frac{1}{\|(1,-2)\|}\cdot(1,-2)=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$ versor propriu corespunzător lui $\lambda_1=5$

$\underline{\lambda_2=0}$
$V_{\lambda_2}=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid Ax=0\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x-2y=0\\ -2x+4y=0\end{cases} \Rightarrow x=2y$

$V_{\lambda_2}=\{(2y,y) \mid y\in\mathbb{R}\}=\langle\{(2,1)\}\rangle$ $\quad e_2'=\frac{1}{\|(2,1)\|}\cdot(2,1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(2,1)$ versor propriu cores. lui $\lambda_2=0$.

Avem matricea $R=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; $\det R=\frac{1}{5}(1+4)=1$ ✓. $\Rightarrow$ nu inversăm coloanele între ele

Fie rotația $R$: $X=RX' \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt5}(x'+2y') \\ y=\frac{1}{\sqrt5}(-2x'+y') \end{cases}$

Forma diagonală a lui $A$ este $\rightarrow \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$R(\Gamma): 5x'^2-\frac{6}{\sqrt5}(x'+2y')+\frac{2}{\sqrt5}(-2x'+y')+1=0$

$$5x'^2-\frac{6}{\sqrt5}x'-\frac{12}{\sqrt5}y'-\frac{4}{\sqrt5}x'+\frac{2}{\sqrt5}y'+1=0$$

$$5x'^2-\frac{10}{\sqrt5}x'-\frac{10}{\sqrt5}y'+1=0 \,/:5$$

$$\underbrace{x'^2-2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot x'}-\frac{2}{\sqrt5}y'+\frac{1}{5}=0$$

$$\underbrace{\left(x'-\frac{1}{\sqrt5}\right)}_{=x''}^2-\frac{2}{\sqrt5}y'=0$$

și $y''=y'$.

Fie translația $T$: $x'=x''+RX_0$, $X_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ 0\end{pmatrix}$

Izometria efectuată este $X=RX''+RX_0$

$RX_0=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt5\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1/\sqrt5\\ -2/\sqrt5\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix} \Rightarrow M_0=\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$

Se obțin următoarele schimbări de reper cartezian:

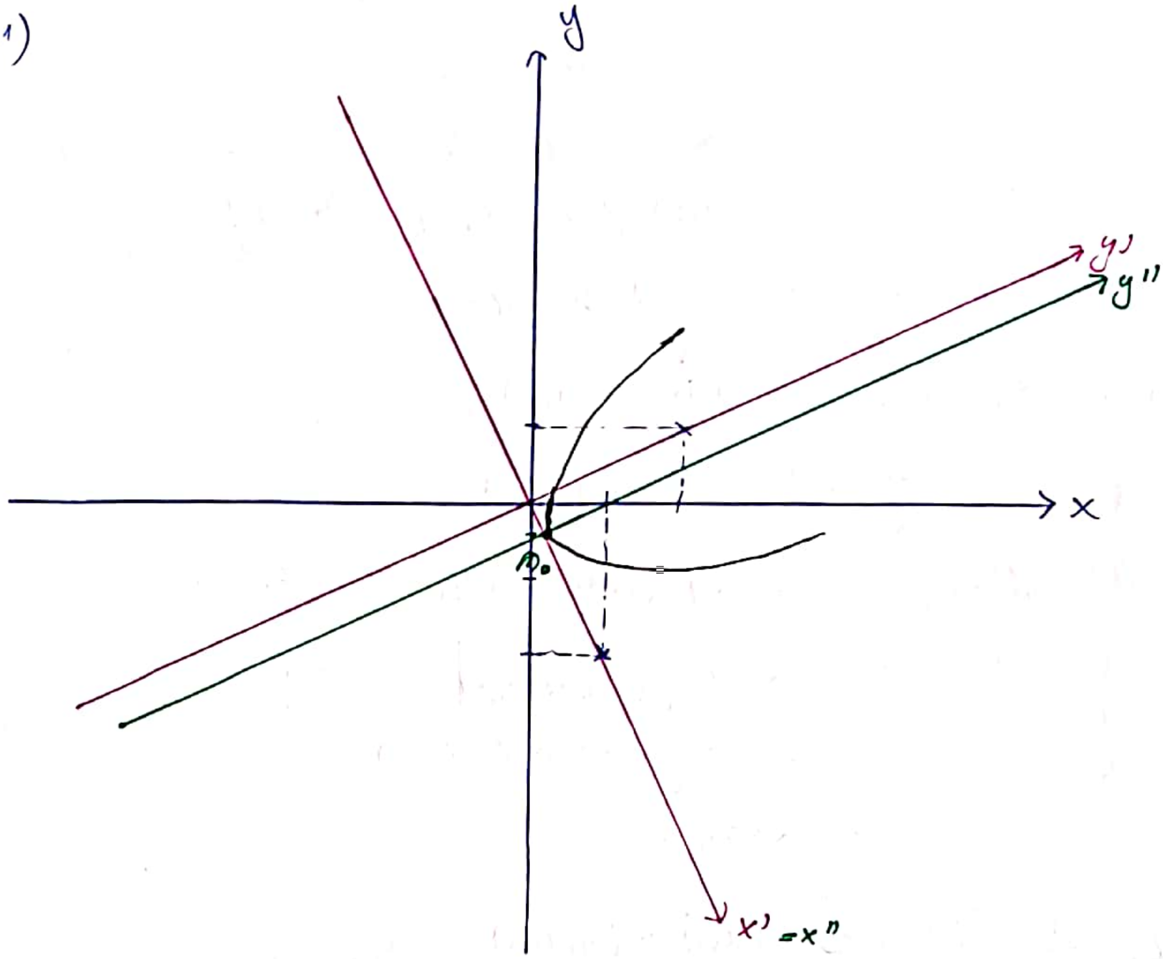
$\mathcal{R}=\{O,e_1,e_2\} \xrightarrow{R} \mathcal{R}'=\{O,e_1',e_2'\} \xrightarrow{T} \{M_0,e_1',e_2'\}$

$P$: $x''^2-\frac{2}{\sqrt5}y''=0 \Rightarrow x''^2=\frac{2}{\sqrt5}y'' \Rightarrow p=\frac{1}{\sqrt5}$

$e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$

$e_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$

$m_0 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$




**2.** Se consideră punctele $A(1,3,0)$, $B(-3,-2,1)$, $C(\alpha,1,-3)$, $D(7,-2,3)$.

a) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $A, B, C, D$ să fie coplanare.

b) Pentru $\alpha$ găsit la punctul a), să se scrie ecuația planului $(ABCD)$.

SOL. $A,B,C,D$ coplanare $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -10a - 50 = 0$

$\Rightarrow a = -5 \in \mathbb{R}$

b) Avem $C(-5,1,-3)$.

Aflăm $\vec{AC} = (-6,-2,-3)$ și $\vec{AB} = (2,-5,1)$ doi vectori directori ai planului.

Presupunem că planul trece prin $A(1,3,0)$:

$(ABCD): \begin{vmatrix} x-1 & -6 & 2 \\ y-3 & -2 & -5 \\ z & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(x-1) \cancel{-6(y-3)} + 30z + 4z - 15(x-1) \cancel{+6(y-3)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -17(x-1) + 34z = 0 \Rightarrow -17x + 34z + 17 = 0 \ /:(-17)$

$\Rightarrow (ABCD): x - 2y - 1 = 0$

3. Să se scrie ecuația planului $\pi$ unde:

a) planul $\pi$ conține dreptele $d_1: \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4}$ și $d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-4}{7}$.

b) planul $\pi$ trece prin $M(1,1,1)$ și conține dreapta $d: \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{6}$.

c) planul $\pi$ este paralel cu planul $xOy$ și trece prin punctul $M(2,1,5)$.

d) planul $\pi$ care trece prin $M(1,-1,2)$ și $\pi \perp d$, $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{-1}$.

e) planul $\pi$ paralel cu $\pi': x-y+z=1$ și $M(1,1,2)\in\pi$.

SOL. a) $d_1: \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4} \Rightarrow \vec{u}_{d_1}=(2,1,4)$

$d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-4}{7} \Rightarrow \vec{u}_{d_2}=(1,3,7)$

Se observă că $O(0,0,0)\in d_1$, deci $O(0,0,0)\in\pi$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 1 & 3 \\ z & 4 & 7 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 7x+4y+6z-z-12x-14y=0$$

$-5x-10y+5z=0 \;/:(-5)$

$\pi: x+2y-z=0$

b) $d: \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{6} \Rightarrow \vec{u}_d=(4,1,6)$

Se observă că $N(1,2,0)\in d$. Aflăm $\vec{MN}=(0,1,-1)$ un alt vector director al planului $\pi$.

$$M(1,1,1)\in\pi \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & 4 & 0 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-1 & 6 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -(x-1)+4(z-1)-6(x-1)+4(y-1)=0$$

$-7(x-1)+4(y-1)+4(z-1)=0$

$\pi: -7x+4y+4z=1$

c) ecuația planului $xOy$ este $z=0$, deci $N_{xOy}=(0,0,1)$

$\pi \parallel xOy \Rightarrow N_\pi=N_{xOy}=(0,0,1)$

$\left.\begin{array}{l} N_\pi=(0,0,1) \\ M(2,1,5)\in\pi \end{array}\right| \Rightarrow \pi: 0(x-2)+0(y-1)+1\cdot(z-5)=0$

$\pi: z=5.$

d) $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{-1} \Rightarrow \vec{u}_d=(2,5,-1)$ $\quad \pi\perp d \Rightarrow \vec{N}_\pi=\vec{u}_d=(2,5,-1)$

$\underset{(1,-1,2)}{M}\in\pi \Rightarrow \pi: 2(x-1)+5(y+1)-(z-2)=0$

$\pi: 2x+5y-z=-5$

e) $\pi': x-y+z=1 \Rightarrow \vec{N_{\pi'}}=(1,-1,1)$

$\pi \parallel \pi' \Rightarrow \vec{N_\pi}=\vec{N_{\pi'}}=(1,-1,1)$ $\quad \Rightarrow m(1,1,2)\in\pi$

$\pi: 1\cdot(x-1) - 1(y-1) + 1\cdot(z-2)=0$

$\pi: x-y+z=2$

**5.** Să se afle ecuația dreptei d unde:

a) $P(1,1,1)\in d$ și vectorul director al lui d este $\vec{u}=(4,3,2)$.

b) $P(2,-7,15)\in d$ și dreapta d este paralelă cu axa $Ox$.

c) $P(2,-7,15)\in d$ și dreapta d este paralelă cu dreapta $d': \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+3}{6}$.

d) $m(1,2,0)\in d$ și dreapta d este paralelă cu dreapta $d': \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

e) $m(1,2,3)\in d$ și dreapta d este perpendiculară pe planul $\pi: 2x+y-z+1=0$.

SOL. a) $\left.\begin{array}{l} P(1,1,1)\in d \\ \vec{u}=(4,3,2)\end{array}\right| \Rightarrow d: \frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{2}$

b) Deoarece dreapta d este paralelă cu $Ox$, înseamnă că $\vec{u_d}=\vec{i}=(1,0,0)$.

$\left.\begin{array}{l} P(2,-7,15)\in d \\ \vec{u_d}=(1,0,0)\end{array}\right| \Rightarrow d: \frac{x-2}{1}=\frac{y+7}{0}=\frac{z-15}{0} \Leftrightarrow d: \begin{cases} y=-7 \\ z=15 \end{cases}$

c) $d': \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+3}{6} \Rightarrow \vec{u_{d'}}=(4,-7,6)$ și $d\parallel d' \Rightarrow \vec{u_d}=\vec{u_{d'}}=(4,-7,6)$.

$\left.\begin{array}{l} P(2,-7,15)\in d \\ \vec{u_d}=(4,-7,6)\end{array}\right| \Rightarrow d: \frac{x-2}{4}=\frac{y+7}{-7}=\frac{z-15}{6}$

d) $d\parallel d' \Rightarrow \vec{u_d}=\vec{u_{d'}}$, dar $d': \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$. Căutăm direcția lui d'.

Notăm $z=t\in\mathbb{R}$ nec. secundară a sistemului $\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=1-t \end{cases}$ (+)

$3x=2-t \Rightarrow x=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot t$

$y=1-x=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot t=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot t$

$z=t$

Direcția lui d' este dată de coef. lui t $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u_{d'}}=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)=\frac{1}{3}(-1,1,3) \Rightarrow \vec{u_d}=\vec{u_{d'}}=(-1,1,3)$

$\left.\begin{array}{l} M(1,2,0)\in d \\ \vec{u_d}=(-1,1,3) \end{array}\right| \Rightarrow d: \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{3}$

c) $\pi: 2x+y-z+1=0 \Rightarrow \vec{N_\pi}=(2,1,-1)$.

$d\perp\pi \Rightarrow \vec{u_d}=\vec{N_\pi}=(2,1,-1)$

$\left.\begin{array}{l} M(1,2,3)\in d \\ \vec{u_d}=(2,1,-1) \end{array}\right| \Rightarrow d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$

5. Fie dreapta $d: \begin{cases} 2x-3y+z-1=0 \\ x+3z=0 \end{cases}$.

a) Determinați vectorul director al dreptei d prin două metode.

b) Verificați dacă dreapta d este perpendiculară pe planul $\pi$, $\pi: 4x-2y+2z-3=0$.

SOL. a) M1 $\boxed{z \overset{\text{not.}}{=} t}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1-t \\ x=-3t \end{cases}$ $\boxed{x=-3t}$

$3y=2x-1+t \Rightarrow 3y=-6t-1+t \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}t}$

Direcția lui d este dată de coeficienții lui t: $\vec{u_d}=(-3,-\frac{5}{3},1)=-\frac{1}{3}(9,5,-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u_d}=(9,5,-3)$.

M2 Avem două planuri $\begin{cases} \pi_1: 2x-3y+z=1 \Rightarrow \vec{N_{\pi_1}}=(2,-3,1) \\ \pi_2: x+3z=0 \Rightarrow \vec{N_{\pi_2}}=(1,0,3) \end{cases}$

$\vec{u_d}=\vec{N_{\pi_1}}\times\vec{N_{\pi_2}}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-9,-5,3)=-1\cdot(9,5,-3)$

Extra ecuația parametrică a lui d este: $d: \begin{cases} x=-3t \\ y=-\frac{5}{3}t-\frac{1}{3} \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{-3}=t \\ \frac{y+\frac{1}{3}}{-\frac{5}{3}}=t \\ \frac{z}{1}=t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow d: \frac{x}{-3}=\frac{y+\frac{1}{3}}{-\frac{5}{3}}=\frac{z}{1}$ ecuația canonică

b) $\pi: 4x-2y+2z-3=0 \Rightarrow \vec{N_\pi}=(4,-2,2)$.

Din punctul a) știm că $\vec{u_d}=(9,5,-3)$.

$d\perp\pi \Leftrightarrow \vec{N_\pi}=\vec{u_d}$, ceea ce nu este adevărat pe exemplul nostru $\Rightarrow d\not\perp\pi$

**6.** Fie dreapta $d: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$. Aflați planul $\pi$ a.î. $d\subset\pi$ și $P_1(1,1,1)\in\pi$.

SOL. $d: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3} \Rightarrow \vec{u_d}=(1,2,3)$.

Obs. că $P_2(0,0,1)\in d$, însă $\left.\begin{matrix} d\subset\pi \\ P_1\in\pi\end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} P_1P_2\subset\pi \\ \vec{P_1P_2}=(-1,-1,0)\end{matrix}$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z-1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -3(x-1)-2(z-1)+(z-1)+3(y-1)=0$$

$$-3x+\cancel{3}-z+1+3y-\cancel{3}=0$$

$$\pi: -3x+3y-z+1=0 \Rightarrow \pi: 3x-3y+z-1=0$$

sau $\vec{N_\pi}=\vec{u_d}\times\vec{P_1P_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(3,-3,1)$

$\left.\begin{matrix} \vec{N_\pi}=(-3,3,1) \\ P_1(1,1,1)\in\pi\end{matrix}\right| \Rightarrow \pi: 3(x-1)-3(y-1)+1\cdot(z-1)=0$

$\pi: 3x-3y+z-1=0$

**7.** Fie dreptele $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ și $d_2: \begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0\end{cases}$. Să se arate că $d_1\perp d_2$.

SOL. $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3} \Rightarrow \vec{u_{d_1}}=(1,-2,3)$

$\begin{cases} 3x+y=5t-1 \;/\cdot 3 \\ 2x+3y=8t-3\end{cases}, z\overset{not.}{=}t\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 9x+3y=15t-3 \\ 2x+3y=8t-3 \quad \ominus\end{cases}$

$7x=7t \Rightarrow \boxed{x=t}$

$\boxed{y}=5t-1-3t=\boxed{-1+2t}$, $\boxed{z=t}$

$\vec{u_{d_2}}=(1,2,1)$

$d_1\perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u_{d_1}}\cdot\vec{u_{d_2}}=0 \Rightarrow \vec{u_{d_1}}\cdot\vec{u_{d_2}}=1-4+3=0 \checkmark \Rightarrow d_1\perp d_2$