Milostianu Andreea
Mihoci Valentina

5.01.2022

Tutoriatul 11
Geometrie I

1. Produs vectorial. Produs mixt.

Def. Fie $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} = (v_1, v_2, v_3) \in V_3$.
Produsul lor vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ este un vector definit prin $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

Obs. 1° Dacă $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ este un sistem liniar dependent, atunci $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$.

2° Dacă $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ este un sistem liniar independent, atunci sunt verificate următoarele proprietăți:

a) $\vec{u} \perp \vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{v} \perp \vec{u}\times\vec{v}$ ($\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt perpendiculari pe produsul lor vectorial).

b) $\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{v} & \vec{u}\cdot\vec{v} \\ \vec{u}\cdot\vec{v} & \vec{u}\cdot\vec{v} \end{vmatrix} = \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2 \sin^2\alpha$

(identitatea Lagrange), unde $\alpha \in [0, \pi]$ este unghiul dintre vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

c) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}\}$ formează un reper pozitiv orientat în V_3.

Obs. a) $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$ (produsul scalar este anticomutativ)

b) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$ (distributivitatea produsului vectorial față de adunarea vectorilor)

c) $a(\vec{u}\times\vec{v}) = (a\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(a\vec{v})$, $(\forall) a \in \mathbb{R}$

d) $\vec{0}\times\vec{u} = \vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}$

e) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$ (produsul vectorial nu este asociativ)

f) $\sum^{c}_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}} (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \vec{0}$ (identitatea Jacobi)

↳ sumă circulară

Def. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$. Produsul mixt $\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$ este un număr definit prin

$\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w} = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

Obs. $\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w} = \vec{w}\wedge\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$.

2. Coordonate cilindrice. Coordonate sferice

Def. Funcția $h: \mathcal{E}_3 - \{O\} \to \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, $h(P) = (r, \theta, z)$ este o bijecție, unde (r, θ) sunt coordonatele polare ale punctului P', proiecția ortogonală a lui $P(x, y, z)$ pe planul xOy. (r, θ, z) se numesc **coordonatele cilindrice**

Obs. a) Fie (r, θ, z) coordonatele cilindrice. Coordonatele carteziene sunt $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$.

b) Reciproc, fie date coordonatele carteziene (x, y, z) ale unui punct $P \neq O$. Determinăm coordonatele cilindrice: $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = z$. Pentru determinarea coordonatei unghiulare considerăm:

1°. Dacă $x \neq 0$, atunci $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

2°. Dacă $x = 0$, atunci $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$.

Def. Funcția $f: \mathcal{E}_3 - \{O\} \to \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$, $f(P) = (\rho, \theta, \varphi)$ este o bijecție, unde $\rho = \|\overrightarrow{OP}\|$, θ este unghiul orientat format de $[Ox$ și $OP')$, unde P' este proiecția ortogonală a lui P pe planul xOy și φ este unghiul orientat dintre $[Oz$ și $[OP$. (ρ, θ, φ) se numesc **coordonatele sferice**

Obs. a) Fie (ρ, θ, φ) coordonatele sferice. Coordonatele carteziene sunt $\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

b) Reciproc, fie date coordonatele carteziene (x, y, z) ale unui punct $P \neq O$. Determinăm coordonatele sferice: $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Pentru determinarea coordonatei θ considerăm:

1°. Dacă $x \neq 0$, atunci $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi$, $k \in \{0, 1, 2\}$,

2°. Dacă $x = 0$, atunci $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$.

3. Perpendiculara comună a două drepte necoplanare

Fie dreptele $d_1: \frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1} = t_1$ și $d_2: \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2} = t_2$

! d_1 și d_2 sunt necoplanare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x_2-x_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & y_2-y_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & z_2-z_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Există o unică dreaptă d care intersectează cele două drepte și este perpendiculară pe fiecare.
Fie $P_1(x_1+t_1\alpha_1, y_1+t_1\beta_1, z_1+t_1\gamma_1)$ și $P_2(x_2+t_2\alpha_2, y_2+t_2\beta_2, z_2+t_2\gamma_2)$.

$d = P_1P_2$ - unica perpendiculară comună a celor două drepte $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u_1} = \vec{0} \\ \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u_2} = \vec{0} \end{cases}$, unde

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1+t_2\alpha_2-t_1\alpha_1,\ y_2-y_1+t_2\beta_2-t_1\beta_1,\ z_2-z_1+t_2\gamma_2-t_1\gamma_1)$, iar $\vec{u_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ și $\vec{u_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Acest sistem cu necunoscutele t_1 și t_2 determină în mod unic cele două puncte P_1 și P_2, deci dreapta d.

Obs. Fie $\vec{N} = \vec{u_1} \times \vec{u_2}$ direcția perpendicularei comune. Fie planele π_1, π_2 determinate de punctele P_1, P_2 și direcțiile $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{N}$. Planele π_1 și π_2 trec prin P_1 și P_2 și au normala $\vec{N_1} = \vec{N} \times \vec{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$, respectiv $\vec{N_2} = \vec{N} \times \vec{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$.
Rezultă că perpendiculara comună este: $d = \pi_1 \cap \pi_2: \begin{cases} a_1(x-x_1)+b_1(y-y_1)+c_1(z-z_1) = 0 \\ a_2(x-x_2)+b_2(y-y_2)+c_2(z-z_2) = 0. \end{cases}$

4. Distanțe. Arii. Volume

4.1. Aria unui triunghi

Fie $\vec{u}, \vec{v}$ vectori necoliniari (liniar independenți) și produsul lor vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Utilizând identitatea lui Lagrange, rezultă că aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$, fiind unghiul format de cei doi vectori.
Fie $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ și $A_3(x_3, y_3, z_3)$ trei puncte distincte. Calculăm aria triunghiului $\Delta A_1A_2A_3$: $\mathcal{A}_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\|$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

dezvoltăm determinantul după prima linie

4.2. Distanța de la un punct la o dreaptă

Fie $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$ și $A_3(x_3,y_3,z_3)$ trei puncte distincte și d dreapta A_2A_3.

$\mathcal{A}_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\| = \frac{1}{2}\,dist(A_1,d)\cdot\|\overrightarrow{A_2A_3}\|$. Rezultă:

$$dist(A_1,d) = \frac{\|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\|}{\|\overrightarrow{A_2A_3}\|}.$$

4.3. Volumul tetraedrului

Fie $\{\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v} = \overrightarrow{A_1A_4}, \vec{w} = \overrightarrow{A_1A_3}\}$ un sistem liniar independent (reper în E_3).
Determinăm volumul paralelipipedului determinat de vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
Considerăm vectorul $\vec{v}\times\vec{w}$ perpendicular pe baza determinată de vectorii $\vec{v}, \vec{w}$. Fie $\alpha\in[0,\pi]$ unghiul format de vectorii $\vec{v}\times\vec{w}$ și $\vec{u}$. Volumul paralelipipedului este:

$$\mathcal{V}_{paralelipiped} = \mathcal{A}_{paralelogram}\cdot h = \|\vec{v}\times\vec{w}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot|\cos\alpha| = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = |\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}| =$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}\right| = |\Delta|$$

Volumul tetraedrului este $\mathcal{V}_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\mathcal{V}_{paralelipiped} = \frac{1}{6}|\Delta|$.

Punctele A_1, A_2, A_3, A_4 sunt coplanare $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

Obs Calculăm distanța dintre două drepte necoplanare. Fie dreptele necoplanare $d_1: \frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}$ și $d_2: \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2}$, $M_1(x_1,y_1,z_1)\in d_1$, $M_2(x_2,y_2,z_2)\in d_2$ și $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ vectorii directori. Considerăm paralelipipedul determinat de vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u_1}, \vec{u_2}$, având înălțimea $dist(d_1,d_2)$ și baza determinată de vectorii $\vec{u_1}, \vec{u_2}$, de arie $\|\vec{N}\| = \|\vec{u_1}\times\vec{u_2}\|$. $\mathcal{V}_{paralelipiped} = |(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u_1}, \vec{u_2})|$. Rezultă că

$$dist(d_1,d_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{N}|}{\|\vec{N}\|}.$$

4.4. Distanța dintre un punct și un plan

Fie $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$ și $A_4(x_4,y_4,z_4)$ patru puncte distincte necoplanare. Fie π planul determinat de punctele A_2, A_3, A_4, de ecuație $\overrightarrow{A_2A}\cdot\vec{N} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$, unde $\vec{N} = \overrightarrow{A_2A_3}\times\overrightarrow{A_2A_4} = (a,b,c)$.
Notăm $h = dist(A_1,\pi)$ înălțimea tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ de bază $A_2A_3A_4$, de arie $\frac{1}{2}\|\vec{N}\|$.

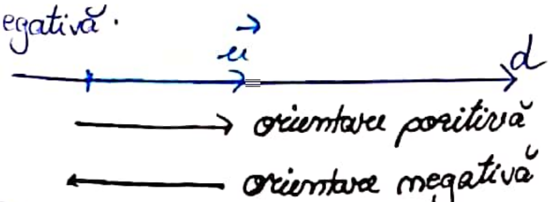
$$\mathcal{V}_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{\frac{1}{2}\|\vec{N}\|\,h}{3} = \frac{1}{6}|\Delta|, \text{ unde } \Delta = ax_1+by_1+cz_1+d.$$

Obținem $h = dist(A_1,\pi) = \dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

5. Unghiuri

5.1. Unghiul format de două drepte orientate

O dreaptă d în spațiu se numește **orientată** dacă alegem un vector director $\vec{u}$. O dreaptă d are două orientări: orientarea care corespunde sensului lui $\vec{u}$ este pozitivă, iar cea opusă este negativă.



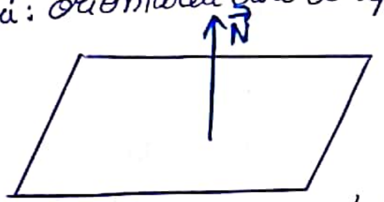
Fie dreptele orientate $d_1: \frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}$ și $d_2: \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2}$, cu vectorii directori $\vec{u_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ și $\vec{u_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Unghiul format de dreptele orientate d_1, d_2 este unghiul format de vectorii directori u_1, u_2, notat $\varphi \in [0, \pi]$ care verifică:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}}{\|\vec{u_1}\| \cdot \|\vec{u_2}\|} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}}$$

$$\left(\hat{\varphi} = \sphericalangle(d_1, d_2) = \sphericalangle(u_1, u_2) \in [0, \pi]\right)$$

5.2. Unghiul format de două plane orientate

Un plan π în spațiu se numește **orientat** dacă alegem un vector normal $\vec{N}$. Un plan π are două orientări: orientarea care corespunde sensului lui $\vec{N}$ este pozitivă, iar cea opusă este negativă.



↑ orientare pozitivă ; ↓ orientare negativă

Fie două plane orientate $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ și $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, cu vectorii normali $\vec{N_1} = (a_1, b_1, c_1)$ și $\vec{N_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Unghiul format de planele orientate π_1, π_2 este unghiul format de vectorii normali $\vec{N_1}, \vec{N_2}$, notat $\varphi \in [0, \pi]$ care verifică:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N_1} \cdot \vec{N_2}}{\|\vec{N_1}\| \cdot \|\vec{N_2}\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\left(\hat{\varphi} = \sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = \sphericalangle(\vec{N_1}, \vec{N_2}) \in [0, \pi]\right)$$

5.3. Unghiul format de o dreaptă orientată și un plan orientat

Fie dreapta orientată $d: \frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma}$, cu vectorul director $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ și planul orientat $\pi: ax + by + cz + d = 0$, cu vectorul normal $\vec{N} = (a, b, c)$. Unghiul format de dreapta orientată d și planul orientat π este unghiul format de dreapta d și proiecția sa ortogonală pe planul π, notat cu $\varphi \in [0, \pi]$.

Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{N}$ formează unghiul $\overline{\varphi} \in [0, \pi]$, care verifică:

$$\cos\overline{\varphi} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{N}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{N}\|} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \overline{\varphi}, & \overline{\varphi} \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \overline{\varphi} - \frac{\pi}{2}, & \overline{\varphi} \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$