GEOMETRIE

SEMINAR 8

OMOTETII și INVERSIUNI

Exc! $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (3x-2,\ 3y+4)$.

(a) Arătați că f este o omotetie. Calculați centrul și puterea ei

(b) Fie $d: 3x+y-1=0$. Calculați $f(d)$

(c) Fie $d': x+2y+4=0$. Calculați $f(d')$.

Rez.: (a) $f(x,y) = k(x,y) + (1-k)(x_P, y_P)$ $\quad$ $k=$ puterea, $P=(x_P, y_P)=$ centrul

$$= (3x-2,\ 3y+4)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} kx + (1-k)x_P = 3x-2 \\ ky + (1-k)y_P = 3y+4 \end{cases} \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{(k-3)}_{=0}x + \underbrace{(1-k)x_P+2}_{=0} = 0 \\ \underbrace{(k-3)}_{=0}y + \underbrace{(1-k)y_P-4}_{=0} = 0 \end{cases} \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$k=3$, $x_P=1$, $y_P=-2$

$P=(1,-2)$

(b) $3\cdot 1 + (-2) - 1 = 0$ ✓ $\Rightarrow P \in d \Rightarrow f(d) = d$.

(c) Metoda 1

$1 + 2\cdot(-2) + 4 \neq 0 \Rightarrow P \notin d' \Rightarrow f(d') =$ dreaptă paralelă cu d'

Vrem să determinăm ec. dreptei $f(d')$.

Considerăm $A \in d'$, $A = (0,-2)$.

$A' = f(0,-2) = (-2,-2) \in f(d')$

$v=$ vector director al lui d', $v = (2,-1)$

$$f(d'): \frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{-1}$$

$$-x-2 = 2y+4$$

$$\boxed{x+2y+6=0}$$

Metoda 2: $f(x,y) = (x',y') \in f(d')$

$$d' \ni (x,y) = f^{-1}(x',y')$$

Dacă punem în loc de (x,y) în ec. dreptei d' componentele lui f^{-1}, obținem ec. lui $f(d')$.

$$f(x,y) = (3x-2, 3y+4)$$

$3x-2 = x'$ | $3y+4=y'$

$3x = x'+2$

$x = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}$ | $y = \frac{1}{3}y' - \frac{4}{3}$

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}\right)$$

$$f(d'): \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 2\left(\frac{1}{3}y - \frac{4}{3}\right) + 4 = 0 \quad / \cdot 3$$

$$x+2+2y-8+12=0$$

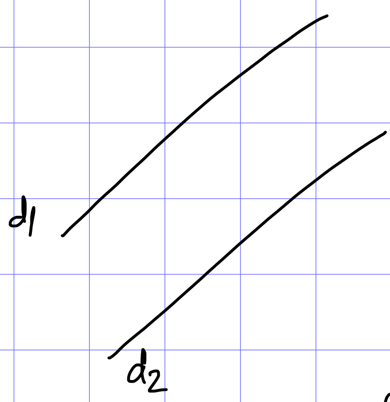
$$\boxed{x+2y+6=0}$$

Exc 2 Considerăm dreptele $d_1: 2x-3y+2=0$

$d_2: 2x-3y-1=0$.

Găsiți o omotetie a.î. $f(d_1) = d_2$

Obs: $d_1 \parallel d_2$ (altfel, nu ar exista o omotetie pentru care $f(d_1)=d_2$)



METODA 1:

$$2x-3y+2=0$$

$$(x',y') = k(x,y) + (1-k)(x_p,y_p)$$

$$2x'-3y'-1=0$$

$$\begin{cases} 2x-3y+2=0 \\ 2\left(kx+(1-k)x_p\right) - 3\left(ky+(1-k)y_p\right) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y+2=0 \\ 2kx - 3ky + \left[2(1-k)x_p - 3(1-k)y_p - 1\right] = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ 2kx - 3k\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) + \left[2(1-k)x_p - 3(1-k)y_p - 1\right] = 0 \end{cases}$$

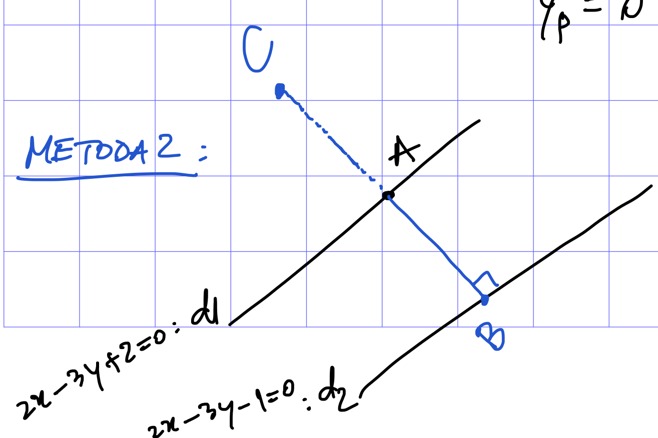
$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ \cancel{2kx} - \cancel{2kx} - 2k + \left[2(1-k)x_p - 3(1-k)y_p - 1\right] = 0 \end{cases}$$

Alegem $k = -\frac{1}{2}$

$x_p = 0$

$y_p = 0$

METODA 2:



Vrem $f(d_1) = d_2$

Fixăm $A \in d_1$

Calculăm $B \in d_2$ a.î. $AB \perp d_2$

Construim $C \in AB$ a.î. $A =$ mijlocul lui CB

Atunci $H_{C,2}(A) = B$

$$\left.\begin{array}{l} H_{C,2}(d_1) \ni B \\ H_{C,2}(d_1) \parallel d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow H_{C,2}(d_1) = d_2$$

... începem calculele ...

Alegem $A = (-1, 0) \in d_1$.

$v = (2, -3) =$ normala la d_1 (și la d_2)

$d' \ni A$, $d' \perp d_1$ ($d' \perp d_2$). $d': \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-3}$

$d': 3x + 2y + 3 = 0$

$$\{B\} = d' \cap d_2 : \begin{cases} 3x + 2y + 3 = 0 & / \cdot 3 \\ 2x - 3y - 1 = 0 & / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 6y + 9 = 0 \\ 4x - 6y - 2 = 0 \end{cases}$$

$13x + 7 = 0$

coord. lui B

$$\boxed{x = \frac{-7}{13}} \qquad y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\boxed{y = \frac{-27}{39}} \qquad = \frac{-14}{39} - \frac{1}{3} = \frac{-27}{39} = \frac{-9}{13}$$

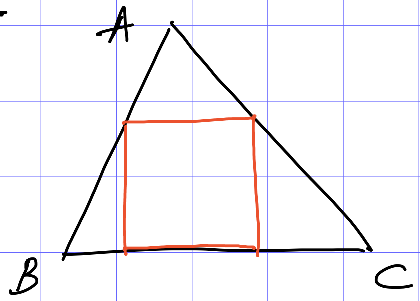
$A =$ mijlocul lui CB

$$-1 = \frac{x_C + \frac{-7}{13}}{2} \quad ; \quad 0 = \frac{y_C + \frac{-9}{13}}{2}$$

$$C = (x_C, y_C) = \left(\frac{-19}{13}, \frac{9}{13} \right)$$

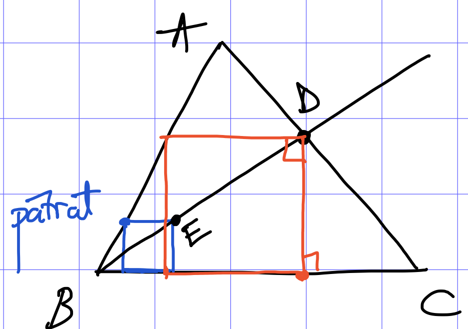
$H_{C,2}$ este omotetia căutată.

Exc 3) Considerăm ascuțitunghic ABC.
Folosind omotetii, arătați că există un pătrat înscris în acest triunghi.



Dați o construcție cu rigla și compasul pentru acest pătrat.

Rezolvare:



Considerăm omotetia $H_{B,\frac{|BD|}{|BE|}}$.

$H_{B,\frac{|BD|}{|BE|}}$ (pătratul albastru) = pătratul roșu

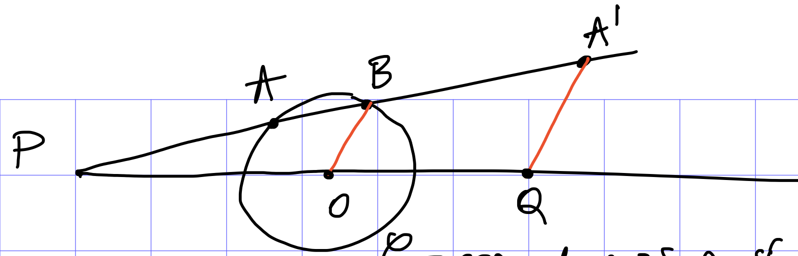
rezultă din asemănări de triunghiuri

Obs: Construcția descrisă mai sus se poate face cu rigla și compasul.

TEMĂ: exc. 8.4

Exc 8.5 Fie $I_{P,k}$ inversiunea de centru P și putere k.
Dați o demonstrație geometrică și una algebrică pentru faptul că imaginea prin $I_{P,k}$ a unui cerc care nu trece prin P este tot cerc.

Demo. geometrică:



$\mathcal{C}$ = cerc de rază r și centru O care nu trece prin P

Alegem un punct $A \in \mathcal{C}$. PA intersectează cercul $\mathcal{C}$ într-un al doilea punct B

$$A' = I_{P,k}(A) \Longrightarrow |PA|\cdot|PA'| = k$$

$\alpha = |\rho_{\mathcal{C}}(P)| = |PA|\cdot|PB|$ (o constantă care nu depinde de modul în care l-am ales pe A)

Construim paralela prin A' la BO, care intersectează PO în Q

Deci $\Delta POB \sim \Delta PQA'$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\overset{r}{|OB|}}{|QA'|} = \frac{|PB|}{|PA'|} = \frac{\overbrace{|PB|\cdot|PA|}^{\alpha}}{\underbrace{|PA'|\cdot|PA|}_{k}}$$

Obținem: $|QA'| = \dfrac{r\cdot k}{\alpha}$ $\longleftarrow$ valoare care nu depinde de modul în care l-am ales pe A.

Deci oricum l-am alege pe A, A' se află pe cercul de centru Q și rază $\dfrac{rk}{\alpha}$.

Mai rămâne de văzut că Q nu depinde de alegerea lui A.

$$\frac{|PO|}{|PQ|} = \frac{|PB|}{|PA'|} = \frac{|PB||PA|}{|PA'|\cdot|PA|} = \frac{\alpha}{k}$$ $\longleftarrow$ nu depinde de A

$|PQ| = \dfrac{k}{\alpha}|PO| \Longrightarrow Q$ nu depinde de alegerea lui A

Concluzie: $I_{P,k}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_{Q, \frac{rk}{\alpha}}$.

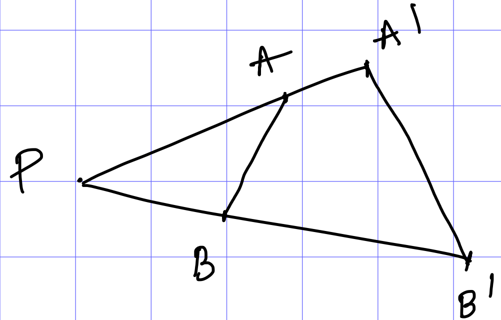
Demonstrația algebrică: TEMĂ

(folosim condiția cu determinant pt 4 puncte conciclice)

Exc 8.6 Fie $I_{P,k}$. Demonstrați că pentru orice puncte A, B diferite de P, dacă notăm $A' = I_{P,k}(A)$, $B' = I_{P,k}(B)$, atunci

$$|A'B'| = \frac{k\,|AB|}{|PA|\cdot|PB|}.$$

Rezolvare: $|PA|\cdot|PA'| = k = |PB|\cdot|PB'| \Rightarrow \frac{|PA|}{|PB'|} = \frac{|PB|}{|PA'|} \Rightarrow \triangle PAB \sim \triangle PB'A'$



$$\Downarrow$$

$$\frac{|AB|}{|B'A'|} = \frac{|PA|}{|PB'|} = \frac{|PB|}{|PA'|}$$

$$\Downarrow$$

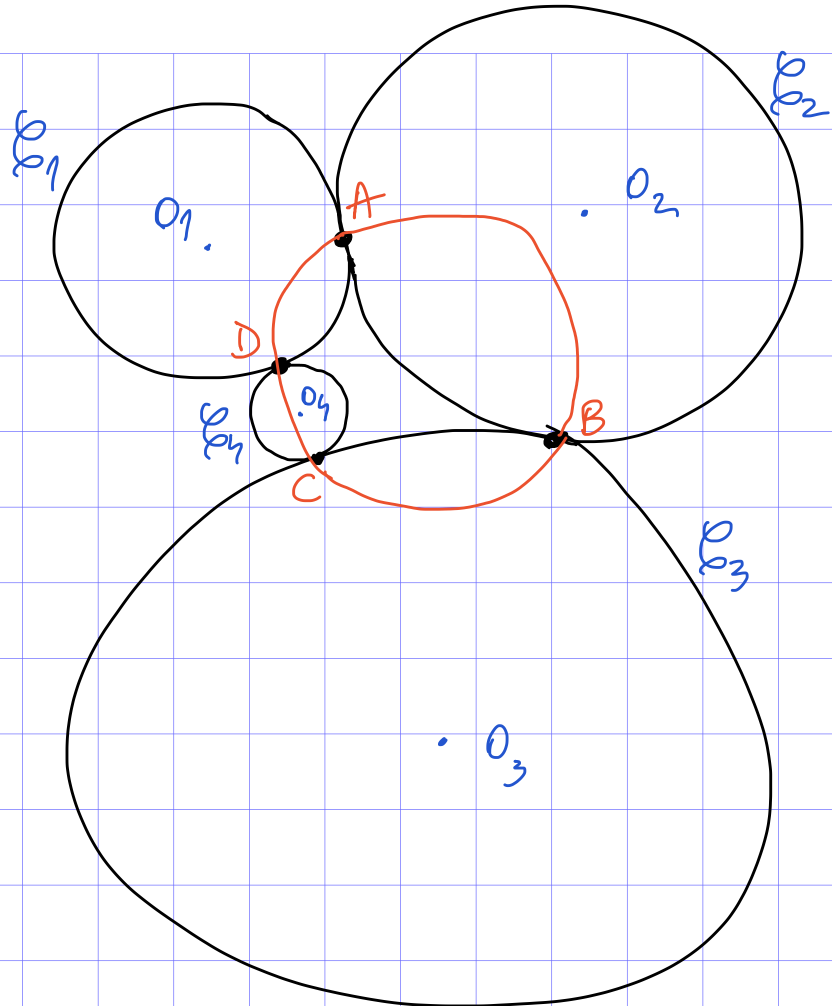
$$|A'B'| = \frac{|PB'|\cdot|AB|}{|PA|}$$

$$\Downarrow$$

$$|A'B'| = \frac{|PB'|\cdot|PB|\cdot|AB|}{|PA|\cdot|PB|} = \frac{k\,|AB|}{|PA|\cdot|PB|}$$

Exc 8.7 Considerăm 4 cercuri în plan, tangente 2 câte 2, ca în desenul de mai jos.

Demonstrați că cele 4 puncte de tangență sunt conciclice.



Vrem să demonstrăm că A, B, C, D sunt conciclice.

Considerăm inversiunea $I_{A,k}$.

Desenul se transformă în:

$\mathcal{C}_1' = I_{A,k}(\mathcal{C}_1) =$ dreaptă

$\mathcal{C}_2' = I_{A,k}(\mathcal{C}_2) =$ dreaptă

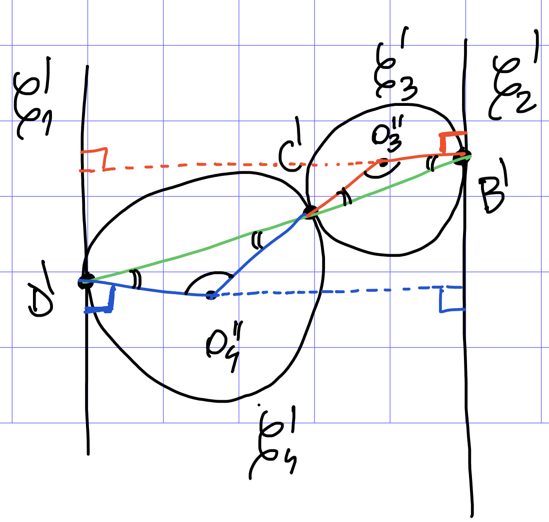
$\mathcal{C}_3' = I_{A,k}(\mathcal{C}_3) =$ cerc

$\mathcal{C}_4' = I_{A,k}(\mathcal{C}_4) =$ cerc

$B' = I_{A,k}(B)$

$C' = I_{A,k}(C)$

$D' = I_{A,k}(D)$



Prin urmare, A, B, C, D conciclice $\Longleftrightarrow$ B', C', D' coliniare

$O_3'' =$ centrul lui $\mathcal{C}_3'$

$O_4'' =$ centrul lui $\mathcal{C}_4'$

$\Delta D'O_4''C'$, $\Delta B'O_3''C'$ sunt isoscele

D' = punct de tangență $\Rightarrow D'O_4'' \perp$ dreapta $\mathcal{E}_1'$

Similar, $B'O_3'' \perp$ dreapta $\mathcal{E}_2'$

$\Rightarrow m(\widehat{D'O_4''C'}) = m(\widehat{B'O_3''C'})$

C' = punct de tangență $\Rightarrow O_4'', C', O_3''$ coliniare

Obținem, mai departe, din că unghiurile $\widehat{D'C'O_4''}$ și $\widehat{B'C'O_3''}$ sunt egale

deducem că D', C', B' coliniare.

TEMĂ: Exc 8.8 și Exc 8.9