Geometrie II - curs 6

· Transformare afină: $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ a.î. $\forall n, \forall P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}_1$ $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, avem

$$\tau(\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n) = \alpha_1 \tau(P_1) + \dots + \alpha_n \tau(P_n)$$

· Dacă fixăm repere carteziene în $\mathcal{A}_1$, respectiv $\mathcal{A}_2$, o funcție $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este transformare afină $\Leftrightarrow$ expresia lui τ în coordonate este de forma $AX+B$

· translații: $\tau(X) = X + B$

· omotetii: $\Omega \in \mathcal{A}$, $\lambda \in K^*$, $H_\lambda^\Omega(P) = P' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega P'} = \lambda \overrightarrow{\Omega P}$

· proiecții: $\mathcal{A}$ spațiu afin, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ subspațiu, $V \subset dir(\mathcal{A})$ subspațiu vectorial complementar direcției lui $\mathcal{A}'$ (adică $dir(\mathcal{A}) = dir(\mathcal{A}') \oplus V$)

Definim proiecția pe $\mathcal{A}'$ paralelă cu direcția V ca fiind funcția $pr : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ dată prin:

$pr(P) = P' \Leftrightarrow P' \in \mathcal{A}'$ și $\overrightarrow{PP'} \in V$

· verificați că funcția definită astfel este transformare afină

· exemplu: În $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ scriem explicit proiecția π:
→ pe dreapta (d): $x = y = z$
→ paralelă cu direcția (V): $x+y+z=0$

$dir(d) \cap V = \{(0,0,0)\}$

$(t,t,t) \in V \Leftrightarrow 3t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$P' \in d$, $\overrightarrow{PP'} \in V$

$P' \in d \Leftrightarrow P' = (t_0, t_0, t_0)$

$\overrightarrow{PP'} = (t_0 - x_0, t_0 - y_0, t_0 - z_0)$

$\overrightarrow{PP'} \in V \Leftrightarrow 3t_0 - (x_0 + y_0 + z_0) = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}$

$\tau(x_0, y_0, z_0) = (x', y', z') = \left(\frac{x_0+y_0+z_0}{3}, \frac{x_0+y_0+z_0}{3}, \frac{x_0+y_0+z_0}{3}\right)$

$\tau(x_0, y_0, z_0) = AX + B$

$\tau(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{3}(x_0+y_0+z_0, x_0+y_0+z_0, x_0+y_0+z_0)$

- simetrie față de un subspațiu dat, paralelă cu o direcție complementară direcției subspațiului dat: $s(P) = 2\,pr(P) - P$

$s^2 = id_A$

Spații afine euclidiene

- $K = \mathbb{R}$

· Se numește spațiu afin euclidian un spațiu afin (peste $\mathbb{R}$) a.î. pe direcția sa am fixat un produs scalar.

· structura euclidiană canonică: $A = \mathbb{R}^n$ cu structura afină canonică pe care am fixat produsul scalar canonic:

$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

· produsul scalar pe spațiul vectorial V:

o aplicație $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- liniaritate în primul argument

$\langle \alpha u_1 + \beta u_2, v \rangle = \alpha \langle u_1, v \rangle + \beta \langle u_2, v \rangle,$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u_1, u_2, v \in V$

- simetrie.

$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V$

· pozitiv definire:

$\langle v, v \rangle \geq 0, \forall v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0_V$

• Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrică ($A = {}^tA$). Spunem că A este pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n > 0$,

unde $\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}$

Spunem că A este negativ definită $\Leftrightarrow -A$ este pozitiv definită $\Leftrightarrow (-1)^k \Delta_k > 0, \forall k = \overline{1,n}$

· Dacă $\langle , \rangle : V \times V \to K$ biliniară, A = matricea ei în raport cu o bază dată, atunci $\langle , \rangle$ simetrică $\Leftrightarrow A = {}^tA$

· Pentru $K = \mathbb{R}$, $\langle , \rangle$ este pozitiv definită $\Leftrightarrow A$ este matrice pozitiv definită.

· $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = \det(1) = 1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A$ pozitiv definită

- $(V, \langle , \rangle)$ spațiu vectorial euclidian. Se numește:
  · norma unui vector v, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
  · unghiul între vectorii nuli u, v

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

· O bază $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ a lui V s.n. bază ortonormată $\Leftrightarrow \begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\} \\ \|e_i\| = 1, \forall i = \overline{1,n} \end{cases}$

Algoritmul Gram-Schmidt. Fie $(V, \langle , \rangle)$ spațiu vectorial euclidian. Fie $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ bază a lui V. Atunci putem construi recursiv o bază ortonormată $\{e_1, \dots, e_n\}$ a lui V astfel:

- $e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1$
- Presupunem deja construiți $e_1, \dots, e_{k-1}$

Construim $g_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, e_j \rangle e_j$

$$e_k = \frac{1}{\|g_k\|} g_k$$

Demonstrăm că $\langle e_k, e_j \rangle = 0, \ \forall j < k$

Este suficient să arătăm că $\langle g_k, e_i \rangle = 0$

(dacă $\langle g_k, e_i \rangle = \langle \|g_k\| e_k, e_i \rangle = \|g_k\| (\langle e_k, e_i \rangle)$

$$\langle g_k, e_i \rangle = \langle f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, e_j \rangle e_j, e_i \rangle$$

$$= \langle f_k, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle =$$

$$= \langle f_k, e_i \rangle - \langle f_k, e_i \rangle \langle e_i, e_i \rangle = \langle f_k, e_i \rangle - \langle f_k, e_i \rangle$$

$= 0$

Curs 4 – Geometrie

Def: S.n. spațiu afin euclidian, un spațiu afin $\mathcal{E}/\mathbb{R}$ pe care am fixat un produs scalar $\langle , \rangle : dir(\mathcal{E}) \times dir(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$

Exemplu: $\mathbb{R}^n$ cu structură euclidiană canonică:
$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Observații:

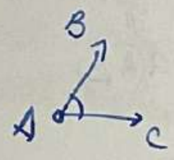
Fie $\mathcal{E}$ un spațiu euclidian:

- definim distanța între 2 puncte $P, Q \in \mathcal{E}$ prin

$$d(P, Q) \overset{def}{=} \|\overrightarrow{PQ}\| \quad (\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle})$$

- dacă A, B, C puncte distincte definim unghiul $\widehat{BAC}$ prin

$$\cos(\widehat{BAC}) := \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|}$$



Exemplu: În $\mathbb{R}^3$ cu structură euclidiană canonică fie punctele

$$A = (1, 2, 4) \quad B = (1, 0, 1) \quad C = (1, 2, 3)$$

- $d(A, B) = ?$ $\quad \overrightarrow{AB} = (0, -2, -3)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

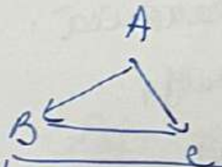
- $\widehat{BAC}$: $\quad \overrightarrow{AC} = (0, 0, -1)$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle (0, -2, -3), (0, 0, -1) \rangle = 0 + 0 + (-3)(-1) = 3$$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{0^2+0^2+(-1)^2} = 1 \qquad \cos(\widehat{BAC}) = \frac{3}{1\cdot\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

Obs: În orice spațiu euclidian are loc teorema cosinusului i.e. $\forall$ A, B, C avem

$$d(B,C)^2 = d^2(A,C) + d^2(A,B) - 2\,d(A,B)\,d(A,C)\cos\widehat{BAC}$$



$\boxed{\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}}$

$\vec{BC} = \vec{AC}-\vec{AB}$:

$d^2(B,C) = \|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC}-\vec{AB}\| =$

$= \langle \vec{AC}-\vec{AB}, \vec{AC}-\vec{AB} \rangle$

$\overset{\text{biliniaritate}}{=} \langle \vec{AC}, \vec{AC} \rangle - \langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle - \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle + \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle$ – simetrice

$= \underbrace{\|\vec{AC}\|^2}_{= d(A,C)} - \underbrace{2\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle}_{= \|\vec{AB}\|\,\|\vec{AC}\|\cos(\widehat{BAC})} + d^2(A,B) = d^2(A,C) + d^2(A,B)$

(R) $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} d(A,B) = d(A',B'),\ d(A,C) = d(A',C'), \\ d(B,C) = d(B',C') \\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'},\ \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'},\ \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} \end{cases}$

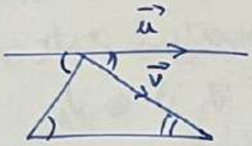
Cazuri congruență:

- (LUL) $d(A,B) = d(A',B')$, $d(A,C) = d(A',C')$ și $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$
- (ULU) $d(A,B) = d(A',B')$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ și $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$
- (LLL) $d(A,B) = d(A',B')$ $d(B,C) = d(B',C')$, $d(A,C) = d(A',C')$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

LUL ULU



$$\cos(\hat{\ }) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$\dim(\mathcal{E}_1) = \dim(\mathcal{E}_2)$

Def: Fie $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ spații euclidiene. O funcție $f: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ s.n. izometrie dacă păstrează distanțele

- bij
- apl afină
- păstrează distanța, $d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$ $\forall P, Q \in \mathcal{E}_1$

păstrează unghiurile

Teoremă (Teorema fundamentală a geometriei euclidiene)

Dacă $f: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ este izometrie, atunci f este bijectivă, afină, iar urma ei liniară păstrează produsul scalar (în particular, unghiurile)

Dem: Injectivitate Fie P, Q cu $f(P) = f(Q)$

$$\Rightarrow d(f(P), f(Q)) = 0 \xRightarrow{f = \text{izom}} d(P,Q) = 0 \Rightarrow P = Q$$

Q (Întrebare)

$\exists\, (X, d_1), (Y, d_2)$, $f: X \to Y$ a.î. $d_1(x_1, x_2) = d_2(f(x_1), f(x_2))$ $(\forall x_1, x_2 \in X)$

a.î. f nu e surjectivă?

$$\Big(X = Y = \mathbb{N} \quad d(x,y) = |x - y| \quad f(x) = x + 13$$

$$d(f(x), f(y)) = |x + 13 - (y + 13)| = |x - y| = d(x,y) \Big)$$

Lemă: $f : (V_1, \langle , \rangle_1) \to (V_2, \langle , \rangle_2)$ o funcție care păstrează produsul scalar $(\langle , \rangle)$ i.e.

$$\langle v_1, v_2 \rangle_1 = \langle f(v_1), f(v_2) \rangle_2$$ Atunci f este liniară!

Remarcă: dacă încercăm să slăbim enunțul la „f păstrează normele", enunțul este FALS!

$$\| v \| = \| f(v) \| \quad \forall v \in V_1$$

Exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = |x|$

$\| x \| = |x|$ nu e liniară și este apl normată

Dem: Arăt că $\forall v_1, v_2 \in V_1$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha f(v_1) - \beta f(v_2) = 0$$

$$\iff \langle f(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha f(v_1) - \beta f(v_2), f(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha f(v_1) - \beta f(v_2) \rangle = 0$$

dar

$$\langle \cancel{f}(\alpha v_1 + \beta v_2), \cancel{f}(\alpha v_1 + \beta v_2) \rangle - \alpha \langle \cancel{f}(\alpha v_1 + \beta v_2), \cancel{f}(v_1) \rangle -$$
$$- \beta \langle \cancel{f}(\alpha v_1 + \beta v_2), \cancel{f}(v_2) \rangle - \alpha \langle \cancel{f}(v_1), \cancel{f}(\alpha v_1 + \beta v_2) \rangle +$$
$$\alpha^2 \langle \cancel{f}(v_1), \cancel{f}(v_1) \rangle + \alpha\beta \langle \cancel{f}(v_1), \cancel{f}(v_2) \rangle -$$
$$- \beta \langle \cancel{f}(v_2), \cancel{f}(\alpha v_1 + \beta v_2) \rangle + \alpha\beta \langle \cancel{f}(v_2), \cancel{f}(v_1) \rangle +$$
$$+ \beta^2 \langle \cancel{f}(v_2), \cancel{f}(v_2) \rangle = \langle \underbrace{(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha v_1 - \beta v_2}_{=0}, (\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha v_1 - \beta v_2 \rangle$$

→ a șters f-urile de pe tablă

$$= 0$$

Încheierea demonstrației: Fixând $O \in \mathcal{E}_1$, deducem că urma lui f în raport cu O este liniară, deoarece se păstrează produsul scalar (pt că f păstrează unghiurile, teorema cosinusului). Deci f afină, f injectivă, $\dim(\mathcal{E}_1) = \dim(\mathcal{E}_2) \Rightarrow f$ surjectivă

~~$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uniform cont $\overset{?}{\Rightarrow} f$ monotonă~~

~~$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ $\quad x = y + t^2 \Rightarrow$~~

~~$t \in \mathbb{R}^*$ $\quad f(t^2) = (f(t))^2 > 0$~~

Q (Întrebare)

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ morfism de corpuri rezultă $f = id_{\mathbb{C}}$ sau $f(z) = \overline{z}, \forall z \in \mathbb{C}$?

$$f(a+bi) = \underset{a}{\underset{\shortparallel}{f(a)}} + \underset{b}{\underset{\shortparallel}{f(b)}}(\pm i)$$

$$f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = -1$$

$$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \ ?$$

Exemple de izometrii

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ izom cu structura euclidiană canonică

f afină $\Rightarrow f(X) = AX + B$, $A \in Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ = matricea unei liniare = transformare ortogonală $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{A^T A = I_2}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A^T A = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$ $\xrightarrow{\exists \alpha \text{ a.î.}}$ $a = \cos\alpha \quad b = \sin\alpha$

$\xrightarrow{\exists \beta \text{ a.î.}}$ $c = \cos\beta \quad d = \sin\beta$

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0$

$\alpha - \beta = \pm\frac{\pi}{2}$; (1) $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\sin\beta = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -1}$$

(2) $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(\alpha) = -\sin\alpha$

$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1}$$

$A \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R}) \quad A \cdot {}^TA = I_3 \Leftrightarrow \det A = \pm 1$

<u>Conv</u>: A cu $A \cdot {}^TA = I_3$ și $\det(A) = 1$ "rotație"

$\deg P_A = 3 \Rightarrow P_A$ are ≥ 1 răd reală

$\alpha, \beta, \bar{\beta}$

$P_A(x) = \det(x I_3 - A)$

$P_A(0) = \det A = 1$

$x^3 \ldots\ldots + a_0$

$\alpha, \beta, \bar{\beta}$

$\beta\bar{\beta} = |\beta|^2$