Curs geometrie - II

Orice geometrie studiază noțiunile și proprietățile varieate la acțiunea unui grup de transformări numit grup fundamental

1. Geometrie afină (∥ și incidentă: ∩)
   (grupul fundamental = gr. afin)
2. Geometrie euclidiană (∥, ∩, distanță, ⊥)
   (grupul fundamental = gr. izometric)
3. Geometrie proiectivă
   (grupul fundamental = gr. proiectiv)

Noțiuni de algebră liniară

Spații vectoriale

Def. - sp. vectorial

$(K,+,\cdot)$ - corp comutativ, $V \neq \emptyset$

Spunem că V este un spațiu vectorial peste corpul K dacă $(\exists)$ $+ : V\times V \to V$ (lege internă)

$\cdot : K \times V \to V$ (lege externă)

a.î.
1) $(V,+)$ grup abelian
2) $a\cdot(b\cdot x) = (ab)x$
3) $(a+b)x = ax+bx$
4) $a(x+y) = ax+ay$
5) $1_K \cdot x = x$, $(\forall)\, a,b \in K$ (scalari)
   $(\forall)\, x,y \in V$ (vectori)

Def. - subsp. vectorial

$(V,+,\cdot)/K$ sp. vectorial, $V' \subset V$ submulțime nevidă

V' s.n. subsp. vectorial $\Leftrightarrow$

1) este închis la adunarea vectorilor
   i.e. $(\forall)\, x,y \in V' \Rightarrow x+y \in V'$
2) —— // —— " " cu scalari
   i.e. $(\forall)\, a \in K$ $(\forall)\, x \in V' \Rightarrow ax \in V'$

Prop. (Caracterizare)

$(V,+,\cdot)/K$ - sp. vectorial, $V' \subset V$, $V' \neq \emptyset$

$V' \subset V$ subsp. vectorial $\Leftrightarrow (\forall)\, x,y \in V'$ $(\forall)\, a,b \in A$ $ax+by \in V'$

Def. $(V,+,\cdot)/K$ - sp. vectorial, $S \subset V$, $S \neq \emptyset$

$\langle S \rangle = \{x \in V \mid \exists\, x_1,\dots,x_n \in S,\ a_1,\dots,a_n \in K$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\}$

(Combinații liniare finite de vectori din S, cu scalari din K)

$\langle S \rangle$ = acoperirea liniară a lui S

OBS.
a) $\langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$
b) $S \subset \langle S \rangle$
c) $\langle S \rangle$ = cel mai mic subsp. vectorial al lui V care conține S

Def. $(V,+,\cdot)/K$ sp. vectorial, $S \subset V$, $S \neq \emptyset$

a) S s.n. sistem de generare pt $V \Leftrightarrow \langle S \rangle = V$

b) V s.n. sp. vect. finit generat $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ un sistem de generatori finit

Exemple

1) $(\mathbb{R}[X],+,\cdot)/\mathbb{R}$ nu este sp. vect. finit generat
   $S = \{1, x, x^2, \dots\}$
   $\langle S \rangle = \mathbb{R}[X]$
2) $(\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad} P \leq n\}$ finit generat
   $S = \{1, x, \dots, x^n\}$
   $\langle S \rangle = \mathbb{R}_n[X]$

Def. $(V,+,\cdot)/K$ sp. vectorial, $S \subset V$, $S \neq \emptyset$

a) S s.n. sistem liniar independent $\Leftrightarrow$
$(\forall)\, x_1,\dots,x_n \in S$ a.î. $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$
$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0_K$
$(\forall)\, a_1,\dots,a_n \in K$

b) S s.n. sistem liniar dependent $\Leftrightarrow$
$\exists\, x_1,\dots,x_n \in S$
$\exists\, a_1,\dots,a_n \in K$, nu toți nuli a.î.
$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0_V$

Prop. $(V,+,\cdot)/K$ sp. vectorial $x \in V$, $x \neq 0_V$
$\Rightarrow \{x\}$ este un sistem liniar indep.

Demonstrație

Fie $a \in K$ a.î. $ax = 0_V$. Dem că $a = 0_K$

Pp prin reducere la absurd că $a \neq 0_K \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, a^{-1}$

$a\cdot x = 0_V \Rightarrow \underbrace{a^{-1}a}_{1_K}\cdot x = a^{-1}\cdot 0_V \Rightarrow x = 0_V$ Contradicție $(x \neq 0_V)$

Pp este falsă $\Rightarrow a = 0_K$

Prop. $(\forall)$ submulțime nevidă a unui sistem liniar independent este sistem liniar independent.

Demonstrație

$(V,+,\cdot)/K$ sp. vect., $S \subset V$, S = sistem liniar i.

Fie $S' \subset S$, $S' \neq \emptyset$

$(\forall)\, x_1,\dots,x_n \in S' \subset S$ a.î. $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0_V \Rightarrow$
$(\forall)\, a_1,\dots,a_n \in K$ $a_1 + \dots + a_n = 0_K$

Prop. $(\forall)$ suprамulțime a unui sistem liniar dependent este un sistem liniar dependent

Demonstrație

Fie $(V,+,\cdot)/K$ sp vectorial, $S=$ sistem LD

Fie $x\in V\setminus S$. Dem că $S\cup\{x\}=$ sist. LD

$S=$ sist. LD : $\exists\, x_1,\dots,x_n\in S$
$a_1,\dots,a_n\in K$, nu toți nuli

a.î. $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0_V \Leftrightarrow$
$a_1x_1+\dots+a_nx_n+0_K\cdot x=0_V$

$\Rightarrow S\cup\{x\}$ este sistem LD

Prop. $(\forall)$ suprамulțime a unui sistem de generatori

Demonstrație

$(V,+,\cdot)/K$ – sp. vectorial, $S\subset V$ submulț. $\neq\emptyset$

$<S>=V$

Fie $x\in V\setminus <S>$. Dem. că $<S\cup\{x\}>$

$<S>=V\Rightarrow\forall\, v\in V,\ \exists\ x_1,\dots,x_n\in S$
$a_1,\dots,a_n\in K$

$v=a_1x_1+\dots+a_nx_n$
$v=a_1x_1+\dots+a_nx_n+0_K x$

Deci $<S\cup\{x\}>=V$

Def. $(V,+,\cdot)/K$ – sp vectorial, $B\subset V$ submulț. $\neq\emptyset$

a) B s.n. bază $\Leftrightarrow$ 1) B este sistem Li
2) B este sistem de generatori

b) O bază generată se numește reper

Exemple

1) $(K,+,\cdot)/K$ $\quad\{1_K\}$ sau $\{x\}$ – bază, $x\neq 0_K$

$y\in K\Rightarrow y=1_K\cdot y$

$\{1_K\}$ sist. gen.

dar $\{1_K\}$ sist. L.i. $\Rightarrow\{1_K\}$ bază

2) $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)/\mathbb{R}$ $\quad B=\{(1,0);(0,1)\}$ – bază canonică

a) SLi

Fie $a,b\in\mathbb{R}$ a.î. $a_{\mathbb{R}_1}+a_{\mathbb{R}_2}=0_{\mathbb{R}^2}\Rightarrow$

$a(1,0)+b(0,1)=(0,0)\Rightarrow(a,0)+(0,b)=(0,0)\Rightarrow$

$\Rightarrow(a,b)=(0,0)\Rightarrow a=b=0_{\mathbb{R}}$

b) sist. gen.

$(\forall)\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$
$(x_1,0)+(0,x_2)$
$x_1(1,0)+x_2(0,1)$

$x=x_1e_1+x_2e_2$

$B=\{e_1,e_2\}$ bază

3) $(\mathbb{R}_2[x],+,\cdot)/\mathbb{R}$, $B=\{1,x,x^2\}$ bază

a) SLi

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ a.î. $a\cdot 1+bx+cx^2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow a=b=c=0$

b) S. gen.

$(\forall)\ P\in\mathbb{R}_2[x]$
$a_2x^2+a_1x+a_0 1\in <B>$

B. bază

4) $(M_{n,m}(\mathbb{R}),+,\cdot)$, $M_{n,m}(\mathbb{R})\equiv\mathbb{R}^{n\cdot m}$

$E_{ij}=i\begin{pmatrix}0&\dots&0\\ \vdots&1&\\ 0&\dots&0\end{pmatrix}$

$B=\{E_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ bază canonică

5) $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 2x-y=0\}$ (dreaptă care trece prin origine)

$2x=y$

$V\ni(x,y)=(x,2x)=x(1,2)$

$\{(1,2)\}$ – sistem de generatori
dar $(1,2)\neq 0_{\mathbb{R}^2}\Rightarrow\{(1,2)\}$ sist. Li $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow B=\{(1,2)\}$ bază în V

6) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z=0\}$
(plan care trece prin origine)

$x+y+z=0\Rightarrow z=-x-y$

$V\ni(x,y,z)=(x,y,-x-y)=(x,0,-x)+$
$+(0,y,-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow B=\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ sist. gen. pt V

$B=$ SLi

Fie $a,b\in K$ a.î. $a(1,0,-1)+b(0,1,-1)=$
$=(a,b,-a-b)=(0,0,0)\Rightarrow a=b=0_{\mathbb{R}}\ (0,0,0)$

Deci B – e bază

Problemă

$(V,+,\cdot)/K$ – finit generat

$(\forall)$ bază a lui V are același cardinal

$n\quad |B|=\text{card}(B)=n=\dim_K V$

TEOREMA SCHIMBULUI

$(V,+,\cdot)/K$ sp. vectorial finit generat

Fie $\{x_1,\dots,x_n\}$ sistem de generatori
$\{y_1,\dots,y_n\}$ sist. liniar indep.

$\Rightarrow\{y_1,\dots,y_n\}$ – sistem generatori

Demonstrație

$<\{x_1,\dots,x_n\}> = V$

$y_1 \in V \Rightarrow \exists a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ a.î. $y_1 = a_1x_1+\dots+a_nx_n$

dacă $a_1=\dots=a_n=0_K \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{0, y_2,\dots,y_n\}$ SLI - contradicție

Putem pp. $a_1 \neq 0_K \Rightarrow x_1 = a_1^{-1}(y_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n)$

$<\{x_1,\dots,x_n\}> = <\{y_1, x_2,\dots,x_n\}> = V$

$y_2 \in V \Rightarrow y_2 = b_1y_1 + a_2x_2+\dots+a_nx_n$

Pp $a_2 = a_n = 0_K \Rightarrow y_2 = b_1y_2$

a) $b_1 = 0_K \Rightarrow y_2 = 0_V$ ✗

b) $b_1 \neq 0_K$

$y_2 = b_1y_1 \Leftrightarrow$

$b_1y_1 - y_2 + 0_K\cdot y_3 + \dots + 0_K\cdot y_n = 0 \Rightarrow$

$\{y_1, y_2,\dots,y_n\}$ SLD ✗

$\Rightarrow \exists$ un scalar dintre $a_2,\dots,a_n$ nenul

Fie $a_2 \neq 0_K \Rightarrow x_2 = a_2^{-1}(y_2 - b_1y_1 - a_3x_3)$

$<\{x_1,x_2,\dots,x_n\}> = <\{y_1,y_2,\dots,y_n\}> = V$

$\Rightarrow \{y_1,\dots,y_n\}$ = sist. de gen.

Prop. cardinalul(∀) sist. (finit) de generatori ≥ cardinalul(∀) sist. (finit) liniar indep.

Demonstrație

Fie $S = \{x_1,\dots,x_n\}$, $<S> = V$

Considerăm $\{y_1,\dots,y_{n+1}\}$. Dem. că este sist. LD

1) $\{y_1,\dots,y_n\}$ este SLI $\xrightarrow{T.\,Sch.}$

$\{y_1,\dots,y_n\}$ sist. de generatori $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{y_1,\dots,y_n,y_{n+1}\}$ este sist. de generatori (supra mulțime)

2) $\{y_1,\dots,y_n\}$ - sist. liniar dependent

$\Rightarrow \{y_1,\dots,y_n,y_{n+1}\}$ sist. lin. dep. (supramulț.)

TEOREMĂ $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp vectorial finit generat

(∀) B_1, B_2 bază $\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

Demonstrație

Fie B_1,B_2 baze

B_1 s. de generatori, B_2 s. liniar indep. $\Big\} \xrightarrow{Prop} |B_1| \geq |B_2|$

B_2 s. de generatori, B_1 s. liniar indep. $\Big\} \Rightarrow |B_2| \geq |B_1| \Rightarrow |B_1|=|B_2|=n=\dim_K V$

OBS. $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$

n = nr. max de vectori L.I.

n = nr. min de vectori care form. sist. de gen.

OBS. $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$

$B = \{v_1,\dots,v_n\} \subset V$

Dem. af. sunt echivalente:

a) B - bază

b) B - sist. LI

c) B - sist. de generatori

Proprietăți

(∀) sistem (finit) de vectori LI se poate completa la o bază

Demonstrație

$S = \{x_1,\dots,x_m\}$ sist LI, $n = \dim_K V$

$m \leq n$

1) $n = m \xrightarrow{OBS} S$ bază

2) $m < n$

Fie un $x \in V \setminus <S>$ $\quad <S> \subseteq V$

$S \cup \{x\}$ este SLI

(x nu e combinație liniară a vectorilor $x_1,\dots,x_m$ din S)

Repetăm raționamentul și după un nr. finit de pași obținem un sistem LI care generează V-ul.

Prop.

Din orice sist. de gen. (finit) care conține cel puțin un vector nenul se poate extrage o bază.

Demonstrație

M1 Fie $S \subset V$, $<S> = V$

Parcurgem mulțimea S și eliminăm vectorii din S care sunt combinații liniare ale celorlalți vectori (sau sunt liniar dep. de ceilalți). După un nr. finit de pași am obț. o submulț. în S care este sist LI și sist. de generatori.

M2 Formăm toate submulț lui S (submulț. sunt în nr finit) care conțin vect. LI. Alegem submulțimea cu card maxim. Aceasta este baza.

OBS Prop. $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $V' \subset V$ subsp. vect. Dacă $\dim V' = \dim V$, atunci $V' = V$

Demonstrație

$\dim V' = \dim V = n$

$B = \{e_1,\dots,e_n\}$ bază în $V' \subset V$

B. SLI în V. Se poate extinde la o bază în V

$|B| = \dim_K V \Rightarrow B$ bază pt V

$<B> = V' = V$

Prop. $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V

$\Rightarrow (\forall)\ x \in V,\ \exists!\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

(coordonatele sau componentele lui x în raport cu reperul $\mathbb{R}$ a.î.

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Demonstrație

$\langle B \rangle = \underset{\underset{x}{\Psi}}{V} \Rightarrow \exists\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ a.î.

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Pp. abs. $\exists\ x_1', \dots, x_n \in \mathbb{K}$ a.î. $x = x_1' e_1 + \dots + x_n' e_n$

$\Rightarrow x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x_1' e_1 + \dots + x_n' e_n \Rightarrow x_1 - x_1' = a$

$(x_1 - x_1')e_1 + \dots + (x_n - x_n')e_n = a \overset{RSLI}{\Longrightarrow} x_n - x_n' = 0_V$

Aplicații:

Ex1 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_0 = \{(1,0), (0,1)\}$ reperul canonic

a) $\mathbb{R} = \{(1,1), (2,3)\}$ reper în $\mathbb{R}^2$

b) $x = (-1, 2)$

Să se afle coordonatele lui x în raport cu $\mathbb{R}$

SOL. a) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$|R| = 2$

Dem că $\mathbb{R}$ SLI

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a(1,1) + b(2,3) = (0,0)$

$(a+2b, a+3b) = (0,0)$