Examen la Algebră II [1]
an I, sem. II, seria 11
25.06.2022

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Subiectul 1. a) Daţi exemplu, dacă există, de un corp care are exact 5 elemente nilpotente. **(1 pct.)**
b) Fie $f = (X_1^2 + X_2X_3)(X_2^2 + X_1X_3)(X_3^2 + X_1X_2) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$. Să se arate că f este polinom simetric şi să se determine gradul polinomului g care are proprietatea că $f = g(s_1, s_2, s_3)$, unde s_1, s_2, s_3 sunt polinoamele simetrice fundamentale în X_1, X_2, X_3. **(2 pct.)**
c) Există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc simultan relaţiile $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 3$, $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 = 2$ şi $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 3$? **(2 pct.)**
d) Considerăm idealele principale I_1, I_2, I_3 din $\mathbb{Q}[X]$ generate de polinoamele $X^{132} - 1$, $X^{165} - 1$ şi respectiv, $X^{121} - 1$. Calculaţi un generator pentru idealul $(I_1 + I_2) \cap I_3$. **(2 pct.)**
e) Determinaţi numărul de polinoame monice ireductibile neasociate în divizibilitate din descompunerea în factori ireductibili a polinomului $P(X) = X^{60} + 4X^{30} + 8$ în $\mathbb{R}[X]$. Aceeaşi întrebare pentru $P(X)$ văzut ca polinom în $\mathbb{Z}_2[X]$. **(3 pct.)**

Subiectul 2. a) Daţi exemplu, dacă există, de polinom de grad 2022 cu coeficienţi reali, care are 6 termeni si exact 25 de rădăcini reale, socotite cu tot cu multiplicităţi. **(3 pct.)**
b) Considerăm polinomul $P(X) = X^{25}$. Demonstraţi că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}^*$, polinomul $P(X+\alpha)-P(X)$ nu are rădăcini reale. **(3 pct.)**
c) Determinaţi toate polinoamele $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, $n \geq 2$, care au toţi coeficienţii reali şi nenuli astfel încât polinomul $P(X) - P_1(X) \cdot P_2(X) \cdot \ldots \cdot P_{n-1}(X)$ este un polinom constant, unde $P_1(X) = a_1X + a_0$, $P_2(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$, $\ldots$, $P_{n-1}(X) = a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$. **(4 pct.)**

Subiectul 3. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi considerăm inelul $A = \mathbb{Z}[\varepsilon]$ împreună cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire a numerelor complexe.
a) Determinaţi $U(A)$. **(3 pct.)**
b) Să se demonstreze că există o structură de inel pe mulţimea $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ astfel încât să aibă loc următorul izomorfism de inele $A/3A \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. **(3 pct.)**
c) Există o infinitate de numere naturale nenule d astfel încât idealul dA să nu fie maximal? Dacă da, construiţi o astfel de mulţime de numere naturale nenule. **(4 pct.)**

Subiectul 4. a) Daţi exemplu de inel A, care nu e corp, şi are exact 6 elemente inversabile. Fie $R = \underbrace{A \times A \cdots \times A}_{25 \text{ ori}}$. Calculaţi numărul de ideale şi ideale maximale ale lui R. **(3 pct.)**
b) Fie polinomul $P(X) = X^3 - 3X + a$, unde a este un număr real. Să se determine toate numerele reale a astfel încât idealul generat de polinomul $P(X)$ în inelul $\mathbb{R}[X]$ să fie conţinut în cel mult 2 ideale maximale. **(3 pct.)**
c) Determinaţi toate idealele I din $\mathbb{R}[X]$ pentru care inelele $\mathbb{R}[X]/I$ şi $\mathbb{R}$ sunt izomorfe. **(4 pct.)**

[1] **Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate. Aveţi un punct din oficiu. Succes!**

Rezolvări

Subiectul 1. a) Se ştie că $\mathcal{N}(A) \subset D(A)$ şi $D(A) \cap U(A) = \emptyset$. Într-un corp, toate elementele nenule sunt inversabile, avem un singur divizor al lui zero (pe 0), şi implicit un element nilpotent (tot pe 0), deci nu există corpuri cu exact 5 elemente nilpotente.

b) Polinomul f este simetric dacă $\sigma^*(f) = f$, $(\forall)\ \sigma \in S_3$. S_3 este generat de două permutări, de exemplu $\sigma_1 = (1\ 2)$ şi $\sigma_2 = (1\ 2\ 3)$, deci este suficient să arătăm că $\sigma_1^*(f) = f$ şi $\sigma_2^*(f) = f$. Într-adevăr

$$\sigma_1^*(f) = f(X_2, X_1, X_3) = (X_2^2 + X_1X_3)(X_1^2 + X_2X_3)(X_3^2 + X_2X_1) = f(X_1, X_2, X_3),$$

iar

$$\sigma_2^*(f) = f(X_2, X_3, X_1) = (X_2^2 + X_3X_1)(X_3^2 + X_2X_1)(X_1^2 + X_2X_3) = f(X_1, X_2, X_3),$$

deci f este polinom simetric şi conform Teoremei fundamentale a polinoamelor simetrice, există un unic $g(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$ astfel încât $f = g(s_1, s_2, s_3)$. Observăm că f este omogen, de grad 6 şi $\mathrm{LT}_{<_{\mathrm{lex}}}(f) = X_1^4X_2X_3$. Conform algoritmului de determinare a lui f scriem mai întâi toate monoamele de grad 6 în X_1, X_2, X_3 de forma $X_1^aX_2^bX_3^c$ care sunt mai mici sau egale lexicografic decât $\mathrm{LM}_{<_{\mathrm{lex}}}(f) = X_1^4X_2X_3$ şi au $a \geq b \geq c$. Acestea sunt, în ordine descrescătoare: $X_1^4X_2X_3$, $X_1^3X_2^3$, $X_1^3X_2^2X_3$ şi $X_1^2X_2^2X_3^2$. Monoamele corespunzătoare în s_1, s_2, s_3 sunt, în ordine, $s_1^3s_3$, s_2^3, $s_1s_2s_3$ şi s_3^2, deci conform algoritmului $g(s_1, s_2, s_3) = as_1^3s_3 + bs_2^3 + cs_1s_2s_3 + ds_3^2$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Mai mult, ştim că $a = \mathrm{LC}<_{\mathrm{lex}}(f) = 1$, deci polinomul $g(Y_1, Y_2, Y_3) = Y_1^3Y_3 + bY_2^3 + cY_1Y_2Y_3 + dY_3^2$. Observăm că gradul monomului $Y_1^3Y_3$ este 4 şi este mai mare strict decât cel al monoamelor $Y_2^3, Y_1Y_2Y_3, Y_3^2$, prin urmare, fără să mai calculăm b, c, d putem spune că $\mathrm{grad}(g) = 4$.

c) Conform relaţiilor lui Viète, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sunt rădăcinile polinomului $P(t) = t^3 - 3t^2 + 2t - 3$. Ca să determinăm natura rădăcinilor lui $P(t)$ calculăm discriminantul lui $P(t)$. Observăm că rădčinile lui $P(t+1)$ sunt $\alpha_1+1, \alpha_2+1, \alpha_3+1$, iar

$$P(t+1) = (t+1)^3 - 3(t+1)^2 + 2(t+1) - 3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - 3t^2 - 6t - 3 + 2t + 2 - 3 = t^3 - t - 3.$$

Discriminantul acestui polinom este $-4 \cdot (-1)^3 - 27 \cdot (-3)^2 < 0$, deci $P(t+1)$ are exact o rădăcină reală (celelalte două sunt complexe, nereale, conjugate una celeilalte). Asta înseamnă că $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nu pot fi toate reale.

d) Am arătat la seminar că c.m.m.d.c$(X^n - 1, X^m - 1) = X^{(n,m)} - 1$. Prin urmare

$$I_1 + I_2 = (X^{132} - 1) + (X^{165} - 1) = (X^{(132,165)} - 1) = (X^{33} - 1),$$

iar

$$(I_1 + I_2) \cap I_3 = (X^{33} - 1) \cap (X^{121} - 1) = (h(X)),$$

unde $h(X)$ este cel mai mic multiplu comun al polinoamelor $X^{33} - 1$ şi $X^{121} - 1$. Folosind proprietatea (de la divizibilitate din $K[X]$, vezi curs) c.m.m.d.c$(f, g)\cdot$ c.m.m.m.c$(f, g) = f \cdot g$, obţinem că

$$h(X) = \frac{(X^{33} - 1)(X^{121} - 1)}{X^{(33,121)} - 1} = \frac{(X^{33} - 1)(X^{121} - 1)}{X^{11} - 1} = (X^{22} + X^{11} + 1)(X^{121} - 1),$$

deci generatorul idealului $(I_1 + I_2) \cap I_3$ este polinomul $(X^{22} + X^{11} + 1)(X^{121} - 1)$.

e) Observăm că pentru polinomul $P(X)$ avem $P(a) = a^{60} + 4a^{30} + 8 > 0, (\forall) a \in \mathbb{R}$, deci $P(X)$ nu are rădăcini reale. Asta înseamnă că polinomul $P(X)$ are toate rădăcinile complexe, nereale, conjugate două câte două. Cum $P(X) = X^{60} + 4X^{30} + 8 = (X^{30} - (-2 + 2i))(X^{30} - (-2 - 2i))$, rezultă că rădăcinile lui $P(X)$ sunt simple, ceea ce înseamnă că polinoamele din descompunerea în factori ireductibili din $\mathbb{R}[X]$ sunt de gradul 2, monice şi oricare două neasociate în divizibilitate. Deci numărul căutat este 30.

În $\mathbb{Z}_2[X]$ polinomul $P(X) = X^{60} + \widehat{4}X^{30} + \widehat{8} = X^{60}$. Singurul polinom monic care apare în descompunerea în factori ireductibili a lui $P(X)$ în $\mathbb{Z}_2[X]$ este X, deci numărul căutat este 1.

Subiectul 2. a) Dacă ar exista un astfel de polinom $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, atunci cum are gradul 2022 şi are exact 25 de rădăcini reale ar rezulta că

$$P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_{25}) \cdot F(X),$$

unde $a_1, \ldots, a_{25} \in \mathbb{R}$, iar $F(X) \in \mathbb{R}[X]$ are grad $2022 - 25 = 1997$ şi nu are nicio rădăcină reală. Ştim (vezi cursul cu demonstraţia Teoremei fundamentale a algebrei) că orice polinom de grad impar cu coeficienţi reali are cel puţin o rădăcină reală, deci un astfel de $F(X)$ nu există, şi prin urmare nu există un polinom $P(X)$ cu proprietăţile din enunţ.

b) Fie β o rădăcină a polinomului de grad 24, $F(X) = P(X+\alpha) - P(X)$ (o astfel de rădăcină există conform Teoremei fundamentale a algebrei). Observăm că $\beta \neq 0$, altfel $P(\alpha) = P(0) = 0$, adică $\alpha^{25} = 0$, de unde $\alpha = 0$, contradicţie cu ipoteza. Deoarece β este rădăcina lui F atunci $F(\beta) = 0$, de unde $P(\beta + \alpha) = P(\beta)$, deci $(\beta + \alpha)^{25} = \beta^{25}$ şi împărţind cu β (am arătat că $\beta \neq 0$) obţinem că $(1 + \frac{\alpha}{\beta})^{25} = 1$. Cum $\alpha \neq 0$ rezultă că $1 + \frac{\alpha}{\beta} \neq 1$. Însă ecuaţia $x^{25} = 1$ are o singură soluţie reală (pe 1) deci, cum $1 + \frac{\alpha}{\beta} \neq 1$, rezultă că $1 + \frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{R}$, deci $\beta \notin \mathbb{R}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$), ceea ce trebuia demonstrat.

c) Deoarece polinomul $P(X) - P_1(X) \cdot P_2(X) \cdot \ldots \cdot P_{n-1}(X)$ este constant, atunci $\text{grad}(P) = \text{grad}(P_1 \cdots P_{n-1})$, adică $n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ (deoarece $a_i \in \mathbb{R}^*$ pentru orice i implică $\text{grad}(P_i) = i$ şi $\text{grad}(P) = n$), de unde $n(n-3) = 0$. Cum $n \geq 2$ rezultă că $n = 3$ este singura posibilitate. Din condiţia $P(X) - P_1(X) \cdot P_2(X) = c$, cu $c \in \mathbb{R}$, obţinem egalitatea

$$a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = (a_1X + a_0)(a_2X^2 + a_1X + a_0) + c,$$

de unde obţinem sistemul de ecuaţii $a_3 = a_1a_2$, $a_2 = a_1^2 = a_0a_2$, $a_1 = 2a_1a_0$ şi $a_0 = a_0^2 + c$. Conform ipotezei $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^*$, deci din a treia ecuaţie rezultă că $a_0 = \frac{1}{2}$. Înlocuind:

în a patra ecuaţie pe a_0 obţinem că $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$;

în a doua ecuaţie pe a_0, obţinem că $\frac{1}{2}a_2 = a_1^2$, de unde $a_2 = 2a_1^2$;

în prima ecuaţie pe a_0 şi a_2, obţinem că $a_3 = 2a_1^3$.

Deci, polinoamele căutate sunt de forma $P(X) = 2a_1X^3 + 2a_1X^2 + a_1X + \frac{1}{2}$ cu $a_1 \in \mathbb{R}^*$.

Subiectul 3. a) Vezi subiectul de algebră dat pe 22 mai 2022 la proba scrisă la MateInfoUB (rezolvarea lui e pe site).

b) Reamintesc că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ şi că are loc izomorfismul de inele $\mathbb{Z}[\varepsilon] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$. Avem (vezi seminar pentru detaliile izomorfismelor de mai jos)

$$\frac{A}{3A} = \frac{\mathbb{Z}[\varepsilon]}{3\mathbb{Z}[\varepsilon]} \cong \frac{\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2+X+1)}}{3\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2+X+1)}} \cong \frac{\mathbb{Z}[X]}{(3, X^2 + X + 1)} \cong \frac{\frac{\mathbb{Z}[X]}{(3)}}{\frac{(3,X^2+X+1)}{(3)}} \cong \frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(X^2 + X + \widehat{1})}.$$

În $\mathbb{Z}_3[X]$ polinomul $X^2 + X + \widehat{1} = X^2 - \widehat{2}X + \widehat{1} = (X - \widehat{1})^2$. Structura de inel pe mulţimea $\mathbb{Z}_3[X]/(X^2 + X + \widehat{1}) = \left\{ \widehat{aX + b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ (care este în bijecţie cu $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ via $\widehat{aX + b} \mapsto (a, b)$) este dată de operaţiile de adunare

$$\widehat{aX + b} + \widehat{cX + d} = \widehat{(a + c)X + (b + d)}$$

şi înmulţire

$$\widehat{aX + b} \cdot \widehat{cX + d} = \widehat{acX^2 + (ad + bc)X + bd} = \widehat{(ad + bc - ac)X + (bd - ac)},$$

unde pentru stabilirea ultimei egalităţi am folosit că $\widehat{X^2} = -\widehat{X} - \widehat{1}$. Prin urmare, structura de inel pe $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ via bijecţia de mai sus este dată de operaţiile

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \qquad \text{şi} \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ad + bc - ac, bd - ac).$$

c) Observăm în particular din punctul anterior că idealul $3A$ nu este maximal, deoarece $A/3A \cong \mathbb{Z}_3[X]/((x-\widehat{1})^2)$, care nu este corp. Prin urmare, căutăm $d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $X^2 + X + \widehat{1}$ să aibă rădăcini în $\mathbb{Z}_d[X]$ şi atunci $A/dA \cong \mathbb{Z}_d[X]/(X^2 + X + \widehat{1})$ nu este corp. Luând, de exemplu, $d = k(k+1)+1$ pentru $k \in \mathbb{N}^*$, obţinem că $\widehat{k} \in \mathbb{Z}_d$ este rădăcină a polinomului $X^2 + X + \widehat{1} \in \mathbb{Z}_d[X]$ şi prin urmare dA nu este ideal maximal. Deci, există o infinitate de astfel de numere naturale nenule d.

Subiectul 4. a) $A = (\mathbb{Z}_{14}, +, \cdot)$ nu e corp (14 nu e prim) si $|U(\mathbb{Z}_{14})| = \varphi(14) = 6$. Inelul A are 4 ideale şi 2 ideale maximale. Cum idealele lui R sunt de forma $I_1 \times \cdots \times I_{25}$ cu fiecare I_j ideal al lui A, atunci R are 4^{25} ideale. Idealele maximale ale lui R sunt de forma $M_1 \times A \times \cdots \times A$, respectiv $A \times M_2 \times A \times \cdots \times A$, ..., respectiv $A \times \cdots \times A \times M_{25}$, unde $M_1, \ldots, M_{25}$ sunt ideale maximale ale lui A. Deci, R are $\underbrace{2+2+\ldots+2}_{\text{de 25 ori}} = 50$ ideale maximale.

b) În $\mathbb{R}[X]$ idealele maximale sunt generate de polinoame de gradul 1, respectiv gradul 2 cu discriminantul negativ. Idealul generat de $P(X) = X^3 - X + a$ este conţinut doar în idealele generate de polinoame divizori ai lui, prin urmare dacă este conţinut în cel mult 2 ideale maximale, nu trebuie să aibă 3 rădăcini reale şi distincte. Deci, discriminantul lui $P(X)$, care este $-4 \cdot (-1)^3 - 27a^2$ trebuie să fie ≤ 0. Deci $4 - 27a^2 \leq 0$ implică $27a^2 \geq 4$, de unde $|a| \geq \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

c) Deoarece $\mathbb{R}[X]/I \cong \mathbb{R}$, care este corp, rezultă că I este ideal maximal al lui $\mathbb{R}[X]$. Ştim de la curs că idealele maximale din $\mathbb{R}[X]$ sunt generate de polinoame ireductibile, iar în $\mathbb{R}[X]$ polinoamele ireductibile sunt cele de grad 1 sau cu 2 cu discriminantul negativ. Din TFI (Teorema fundamentală de izomorfism) rezultă imediat că idealele generate de polinoame de gradul 1 verifică. Pentru idealele generate de polinoame de grad 2 $X^2 + aX + b$ cu discriminant negativ ($a^2 - 4b$) se poate observa, tot cu TFI, că $\mathbb{R}[X]/(X^2 + aX + b) \cong \mathbb{C}$. Cum inelele $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ nu sunt izomorfe (justificaţi!) rezultă că singurele ideale care satisfac condiţiile din enunţ sunt idealele generate de polinoame de gradul 1.