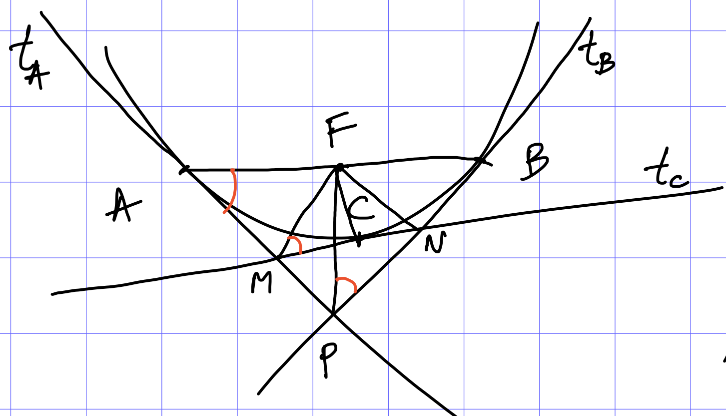
GEOMETRIE
SEMINAR 12

Continuarea Exc 11.5 : (b) Demonstrați că cercul circumscris al $\triangle$ determinat de 3 tangente la o parabolă trece prin focarul parabolei



Vrem să demonstrăm că F, M, P, N conciclice, adică FMPN patrulater inscriptibil.

Folosim punctul (a) al Exc pentru t_A și t_B : obținem : $\sphericalangle FAP \equiv \sphericalangle FPB$

Folosim din nou (a) pentru t_A și t_C : obținem $\sphericalangle FAM \equiv \sphericalangle FMN$

Dar $\sphericalangle FAP \equiv \sphericalangle FAM$

$\Longrightarrow$ $\sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle FPN$ $\Downarrow$ FMPN inscriptibil. ✓

(c) Descrieți o metodă de a construi focarul și dreapta directoare ale unei parabole, dacă avem date 4 tangente la parabolă.

Rez.: Folosim punctul (b) al Exc: alegem 3 drepte din cele 4, ele determină 3 puncte de inters $\xrightarrow{(b)}$ cerc care trece prin focarul parabolei.
C_1

Apoi, alegem altă combinație de 3 drepte și obținem alt cerc C_2 care trece și el prin focar.

$C_1 \cap C_2$ = două puncte. Unul dintre acestea era "marcat" de la început, fiind intersecție de 2 drepte.

Celălalt este focarul F.

Apoi, luăm simetricul lui F față de 2 dintre drepte.
Obținem punctele F' și F''.
Atunci, ("cf. unui exc. din SEMINAR") $F'F''$ = dreapta directoare

---

ADUCEREA CONICELOR LA FORMA CANONICĂ

Pentru următoarele conice, precizați-le tipul, și dacă sunt nedegenerate, aduceți-le la o formă canonică, aflați un reper în care au acea formă, și desenați-le (aproximativ).

(b) $\Gamma: x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0.$

$\Gamma: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right)$$

$\det A = \delta$ ($\delta \neq 0 \Rightarrow$ centru unic) ; $\det \tilde{A} = \Delta$ ($\Delta \neq 0 \Rightarrow$ nedegenerată)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ \hline -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Delta = 4 + 6 + 6 - 36 - 1 - 4$$
$$= 16 - 36 - 5$$
$$= -25 \neq 0 \quad \text{(nedegenerată)}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-2)^2 = 0 \implies \Gamma \text{ nu este conică cu centru unic}$$

REM.: elipsa şi hiperbola au centru unic
parabola NU are centru

Concluzie: Γ este parabolă.

Diagonalizăm $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Aflăm valorile proprii: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4 = 0$$
$$\lambda(\lambda - 5) = 0$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 0$.

Mai departe, determinăm o bază ortonormală de vectori proprii.

pentru $\lambda_1 = 5$: $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - 2y = 5x \\ -2x + 4y = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$

Un vector propriu este $(1, -2)$.

$$\|(1,-2)\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right). \quad (\|v_1\| = 1)$$

pentru $\lambda_2=0$: $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-2y=0 \\ -2x+4y=0\end{cases}$

Un vector propriu este $(2,1)$

$$\|(2,1)\| = \sqrt{5}$$

$$v_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right). \qquad \left(\|v_2\|=1\right)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \frac{1+4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} > 0$$

$\checkmark$ deci schimbarea de reper

de la $R = \left((0,0), \{(1,0),(0,1)\}\right)$

la $R' = \left(\underset{O'}{(0,0)}, \left\{\underset{v_1}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)}, \underset{v_2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}\right\}\right)$

păstrează orientarea.

$X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ = coord. în reperul R

$X' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ = coord. în reperul R'

Atunci, $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} X' \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$

acum înlocuim în ec. lui Γ de la început.

Vom avea (în reperul R')

$$\Gamma: \left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 4\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 -$$

$$- 6\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 1 = 0$$

$$\Gamma: \quad \frac{1}{5}\left[x'^2 + 4x'y' + 4y'^2 + 8x'^2 - 4x'y' + 16y'x' - 8y'^2 + 16x'^2 - 16x'y' + 4y'^2\right] -$$

$$-\frac{10}{\sqrt5}x' - \frac{10}{\sqrt5}y' + 1 = 0$$

$$\Gamma: \quad 5x'^2 - \frac{10}{\sqrt5}x' - \frac{10}{\sqrt5}y' + 1 = 0$$

Acum formăm pătrate.

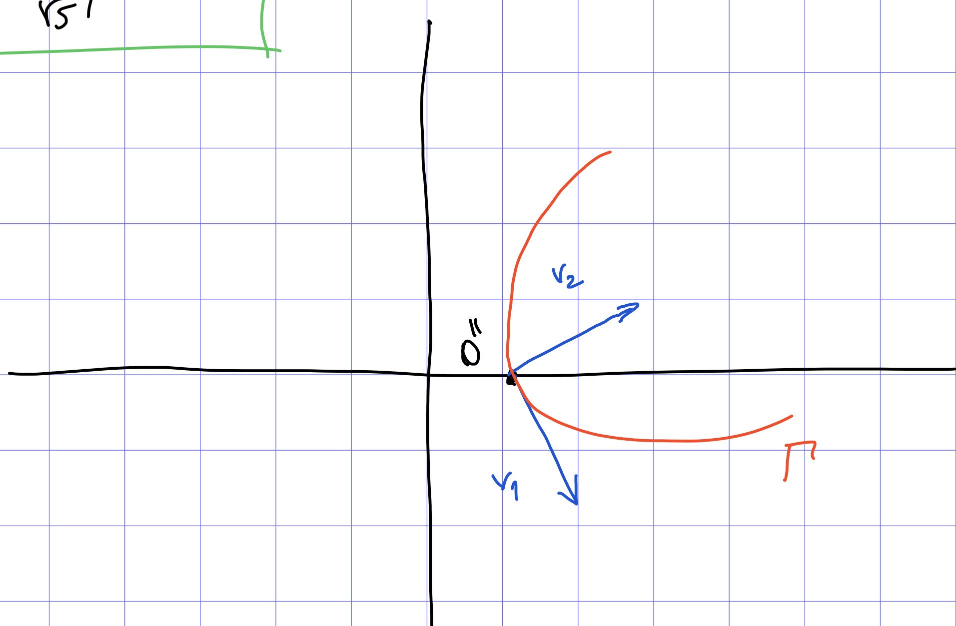
$$\Gamma: \quad 5\left(x' - \frac{1}{\sqrt5}\right)^2 \cancel{- 5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2} - \frac{10}{\sqrt5}y' \cancel{+1} = 0$$

$$\Gamma: \quad 5\left(x' - \frac{1}{\sqrt5}\right)^2 - \frac{10}{\sqrt5}y' = 0$$

Acum, facem s.v. $\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{\sqrt5} \\ y'' = y'. \end{cases}$

$$\Gamma: \quad 5x''^2 - \frac{10}{\sqrt5}y'' = 0 \quad \text{în Reperul } R'' = \left(O''\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ 0\end{pmatrix}, \left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{-2}{\sqrt5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\right\}\right).$$

$$\boxed{\Gamma: \quad x''^2 - \frac{2}{\sqrt5}y'' = 0.}$$



(c) $\Gamma: 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 2y + 4 = 0$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ \hline -4 & 1 & 4 \end{array}\right) \qquad \Delta = \det \tilde{A} = 36 - 8 - 8 - 48 - 3 - 16$$

$$= 4 - 48 - 3$$

$$= -47 \neq 0 \quad \text{nedegenerată}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{centru unic}$$

$$> 0 \Rightarrow \text{elipsă}$$

Centrul $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ verifică ecuația $AX_0 = -b$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_0 + 2y_0 = 4 & / \cdot 3 \\ 2x_0 + 3y_0 = -1 & / \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_0 + 6y_0 = 12 \\ -4x_0 - 6y_0 = 2 \end{cases}$$

$$5x_0 = 14 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{14}{5}}$$

$$y_0 = \frac{1}{2}(4 - 3x_0) = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{42}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-22}{5} = \frac{-11}{5}$$

$$\boxed{y_0 = \frac{-11}{5}}$$

$$\text{Centrul } X_0 = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{-11}{5} \end{pmatrix}$$

Facem schimbarea de variabilă: $X' = X - \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{-11}{5} \end{pmatrix}$

În reperul $R' = \left(O' = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{11}{5} \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$ vom avea:

$$\Gamma: \ {}^tX' A X' + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

$$\Gamma: \ 3x'^2 + 4x'y' + 3y'^2 + \frac{-47}{5} = 0$$

Acum trebuie să diagonalizăm $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$$

Avem valorile proprii $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$

Căutăm vectori proprii coresp. valorilor proprii λ_1, λ_2.

$$A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x' + 2y' = 0 \\ 2x' - 2y' = 0 \end{cases}$$

Alegem vectorul propriu $(1,1)$. $\|(1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Alegem $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Alegem $v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

este v.p. coresp. lui λ_2.

La valori proprii distincte corespund vectori proprii ortogonali, deci e suficient să alegem v_2 cu

$\|v_2\|=1$ și $v_2 \perp v_1$.

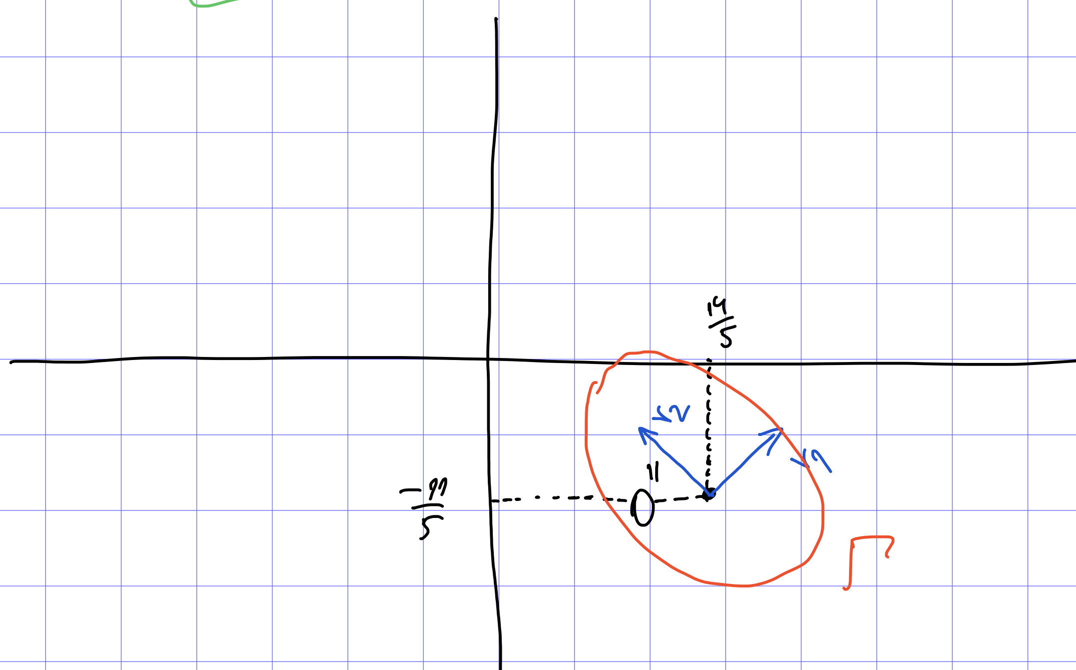
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{vmatrix} = \frac12 - \left(-\frac12\right) = 1 > 0$$, deci s.v. nu schimbă orientarea.

s.v. $$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} X''$$

Obținem reperul $$R'' = \left(O'' = O' = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{11}{5} \end{pmatrix}, \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}} \right\} \right)$$

În acest reper, $\Gamma: 5x''^2 + y''^2 - \frac{47}{5} = 0$

$$\boxed{\Gamma: \frac{x''^2}{\frac{47}{25}} + \frac{y''^2}{\frac{47}{5}} - 1 = 0}$$



(f) $\Gamma: x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x - 4y - 2 = 0$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ \hline 1 & -2 & -2 \end{array}\right).$$ $$\Delta = \det\tilde{A} = \cancel{4} \cancel{-4} \cancel{-4} + 2 \cancel{-4} \cancel{+8}$$
$= 2 \neq 0$ nedegenerată

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}. \qquad \delta = \det A = -2-4 = -6 \neq 0 \text{ centru unic}$$
$$< 0 \text{ hiperbolă}$$

$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ centrul (unic) verifică ec. $AX_0 = -b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 = -1 \\ 2x_0 - 2y_0 = 2 \end{cases}$$

$$3x_0 = 1 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{y_0 = \frac{-2}{3}} \Rightarrow X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \text{ centrul hiperbolei}$$

$$X' = X - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.$$

Obținem reperul $R' = \left(O' = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

$$\Gamma : \underline{{}^tX'AX'} + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

Diagonalizăm $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 - 4 = 0$$
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$
$$(\lambda+3)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -3$$

Acum căutăm vectori proprii coresp. celor 2 v.p. :

pentru λ_1 :
$$A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 2y' = 2x' \\ 2x' - 2y' = 2y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x' + 2y' = 0 \\ 2x' - 4y' = 0 \end{cases}$$

Alegem vectorul propriu $(2,1)$. $\|(2,1)\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$$v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right). \qquad \|v_1\| = 1.$$

Pentru λ_2: facem la fel, sau, mai simplu, alegem $v_2 \perp v_1$
$\|v_2\| = 1$

și atunci v_2 va fi vector propriu coresp. v.p. $\lambda_2 = -3$

Putem lua $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \frac{-4-1}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5} < 0$$

ce facem?

Avem 2 variante: inversam v_1 cu v_2

SAU

înmulțim v_2 cu -1.

$$-v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$R'' = \left\{ O'' = O' = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \left(v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, -v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right) \right\} = \text{reper pozitiv orientat} \checkmark$$

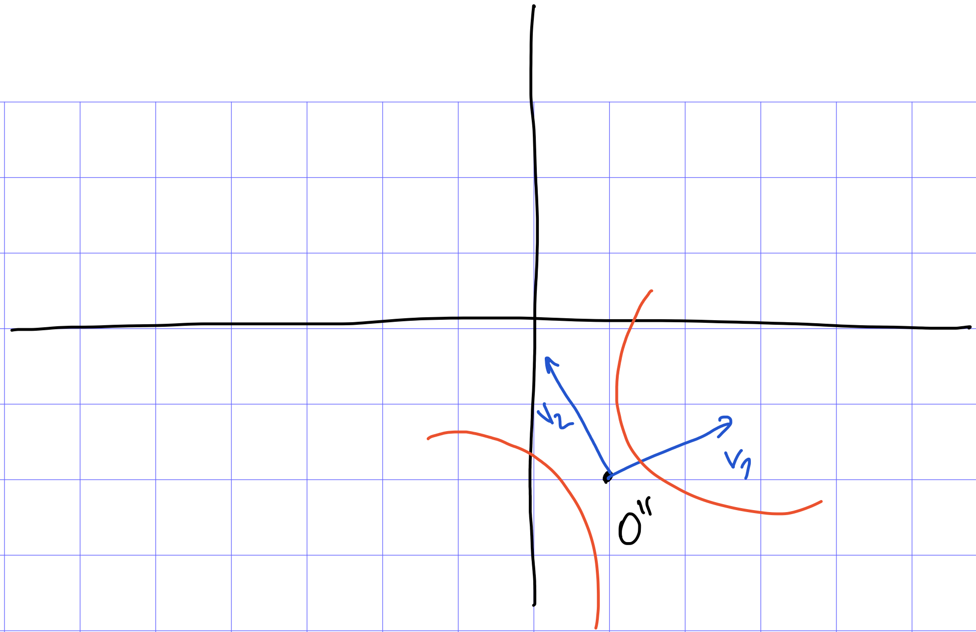
în acest reper R'', avem:

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = X''$$

$$\Gamma: \ 2x''^2 - 3y''^2 + \frac{2}{-6} = 0$$

$$\Gamma: \ 2x''^2 - 3y''^2 - \frac{1}{3} = 0 \quad / \cdot 3$$

$$\Gamma: \ 6x''^2 - 9y''^2 - 1 = 0$$

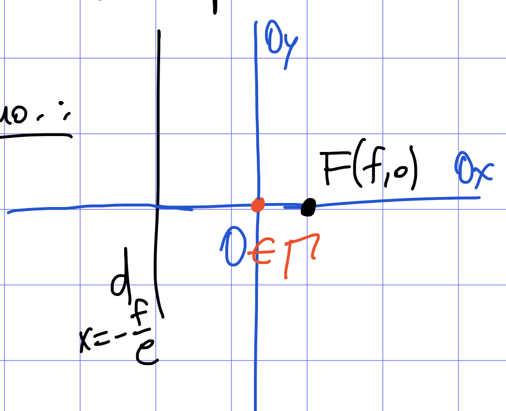


Prop. 12.1 Fie d o dreaptă, $F \notin d$, $e > 0$.

Atunci, mulțimea $\Gamma = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{|PF|}{dist(P,d)} = e \right\}$

este o conică nedegenerată, mai exact o elipsă de excentricitate e dacă $0 < e < 1$, parabolă dacă $e = 1$ și hiperbolă de excentricitate e dacă $e > 1$.

<u>demo.:</u>



Considerăm segmentul $\perp$ din F pe d. Γ conține un singur punct de pe acest segment.

Considerăm un sistem de axe în care acest punct este originea, iar dreapta $\perp$ din F pe d este axa Ox.

$F(f,0)$, $f \in \mathbb{R}$ și $d: x = -\dfrac{f}{e}$

$$P(x,y) \in \Gamma \iff |PF|^2 = e^2 \operatorname{dist}(P,d)^2$$

$$(x-f)^2 + y^2 = e^2\left(x + \frac{f}{e}\right)^2$$

$$x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2x^2 + 2efx + f^2$$

$$(1-e^2)x^2 - 2\underbrace{f(1+e)}_{=:p}x + y^2 = 0$$

Avem: $\Gamma = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1-e^2)x^2 - 2px + y^2 = 0\}$

din forma aceasta rezultă exact ce vrem să arătăm. ✓