EXAMEN LUCRARE SCRISĂ

ALGEBRĂ an 1, sem. 1

19-ian-21, orele 10-13

• Vă rog, daţi acum un email cu mesajul ***particip la examen*** pe adresa

`tiberiu_dumitrescu2003@yahoo.com`

• Această lucrare scrisă constă din 9 subiecte.
• Fiecare subiect valorează un punct.
• Se acordă un punct din oficiu.
• Pentru a obţine întreg punctajul, explicaţi în detaliu rezolvările dvs.
• Subiectele de examen depind de ***codul de examen*** calculat astfel. Formăm şirul de litere: nume, prenume 1, prenume 2 etc (in ordinea din C.I.). Transformăm primele 9 litere în cifre după regula:

$a, f, k, p, u, z \mapsto 1$
$b, g, l, q, v \mapsto 2$
$c, h, m, r, w \mapsto 3$
$d, i, n, s, x \mapsto 4$
$e, j, o, t, y \mapsto 5$

obţinând astfel numerele c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9 care reprezintă codul dvs. de examen. Dacă sunt mai puţin de 9 litere se repetă secvenţa anterioară (nume, prenumele 1, apoi prenumele 2 etc).

Exemplu: "Sam-Bârnă Maria Ioana" dă şirul ***sambarnam*** care dă codul de examen: $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $c_3 = 3$, $c_4 = 2$, $c_5 = 1$, $c_6 = 3$, $c_7 = 4$, $c_8 = 1$, $c_9 = 3$.

Exemplu: "Ţîru Ion" dă şirul ***tiruionti*** care dă codul de examen: $c_1 = 5$, $c_2 = 4$, $c_3 = 3$, $c_4 = 1$, $c_5 = 4$, $c_6 = 5$, $c_7 = 4$, $c_8 = 5$, $c_9 = 4$.

• Scrieţi rezolvările cu pix/stilou cu pastă/cerneală albastră sau neagră pe foi de hârtie albă (preferabil neliniată) ca la un examen obişnuit. Incercaţi să obţineţi un contrast bun.
• Pe prima foaie scrieţi clar ***numele*** (ca in C.I.), ***grupa*** şi ***codul de examen***.
• Fotografiaţi lucrarea şi strângeţi toate pozele într-un fişier ***pdf*** purtând numele dvs. (e.g. Moraru.pdf).
• De la adresa dvs. "unibuc" (sau altă adresă), trimiteţi acest fişier prin email la ambele adrese:

`tiberiu_dumitrescu2003@yahoo.com`
`radu.popescu@fmi.unibuc.ro`

Ora limită pentru trimitere **13.15** (data 19-ian-21).

Subiectele de examen

1. Fie mulţimea
$$A = \{\widehat{a} \in \mathbb{Z}_n - \{\widehat{0}\} \mid a \in \mathbb{N},\ (a,n) \neq 1\}$$
unde notaţia (a,n) înseamnă c.m.m.d.c., iar n este numărul definit mai jos.

(i) Listaţi elementele lui A.

(ii) Verificaţi dacă relaţia $\sim$ pe A definită prin $x \sim y \Leftrightarrow xy \neq \widehat{0}$ este relaţie de echivalenţă.

Selectaţi varianta dvs.

$\mathbf{c_1} = \mathbf{1} \mapsto n = 22.$
$\mathbf{c_1} = \mathbf{2} \mapsto n = 12.$
$\mathbf{c_1} = \mathbf{3} \mapsto n = 14.$
$\mathbf{c_1} = \mathbf{4} \mapsto n = 15.$
$\mathbf{c_1} = \mathbf{5} \mapsto n = 21.$

2. Fie M submulţimea lui $\mathbb{Z}_{12}$ definită mai jos.

(i) Verificaţi dacă M este monoid faţă de înmultirea din $\mathbb{Z}_{12}$

(ii) In caz afirmativ, găsiţi elementele inversabile din M şi verificaţi dacă M este izomorf cu monoidul $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$.

Selectaţi varianta dvs.

$\mathbf{c_2} = \mathbf{1} \mapsto M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{8}, \widehat{9}\}.$
$\mathbf{c_2} = \mathbf{2} \mapsto M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{3}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{9}\}.$
$\mathbf{c_2} = \mathbf{3} \mapsto M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{5}, \widehat{6}, \widehat{7}, \widehat{11}\}.$
$\mathbf{c_2} = \mathbf{4} \mapsto M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{7}, \widehat{8}\}.$
$\mathbf{c_2} = \mathbf{5} \mapsto M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{9}, \widehat{10}\}.$

3. Fie σ permutarea definită mai jos. Calculaţi:

(i) descompunerea lui σ în produs de cicluri disjuncte,

(ii) ordinul lui σ,

(iii) signatura lui σ,

(iv) produsul $(134689)\sigma(134689)^{-1}$.

Selectaţi varianta dvs.

$\mathbf{c_3} = \mathbf{1} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 8 & 2 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{c_3} = \mathbf{2} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 1 & 8 & 3 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{c_3} = \mathbf{3} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 5 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{c_3} = \mathbf{4} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 5 & 6 & 3 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{c_3} = \mathbf{5} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 9 & 7 & 1 & 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

4. Considerăm grupurile: D_4 (grupul diedral al pătratului), Q (grupul cuaternionilor) şi grupul aditiv $\mathbb{Z}_8$. Fie G, H grupurile produs direct definite mai jos.
(i) Număraţi elementele de ordinul 2 din G.
(ii) Arătaţi că G nu este izomorf cu H.
Selectaţi varianta dvs.
$\mathbf{c_4 = 1} \mapsto G = D_4 \times D_4,\ H = Q \times Q.$
$\mathbf{c_4 = 2} \mapsto G = Q \times Q,\ H = D_4 \times Q.$
$\mathbf{c_4 = 3} \mapsto G = D_4 \times \mathbb{Z}_8,\ H = D_4 \times D_4.$
$\mathbf{c_4 = 4} \mapsto G = Q \times \mathbb{Z}_8,\ H = D_4 \times \mathbb{Z}_8.$
$\mathbf{c_4 = 5} \mapsto G = D_4 \times Q,\ H = Q \times \mathbb{Z}_8.$

5. Fie funcţia

$$f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_{60}, +) \text{ dată prin } f(x) = \widehat{ax},\ x \in \mathbb{Z}$$

unde a este numărul definit mai jos.
(i) Arătaţi că f este morfism de grupuri.
(ii) Calculaţi $ker(f)$ şi $Im(f)$.
(iii) Ce se obţine dacă aplicăm lui f teorema fundamentală de izomorfism ?
Selectaţi varianta dvs.
$\mathbf{c_5 = 1} \mapsto a = 4.$
$\mathbf{c_5 = 2} \mapsto a = 6.$
$\mathbf{c_5 = 3} \mapsto a = 10.$
$\mathbf{c_5 = 4} \mapsto a = 12.$
$\mathbf{c_5 = 5} \mapsto a = 15.$

6. Verificaţi dacă mulţimea

$$\{ax + by \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

este ideal în inelul $\mathbb{Z}[i]$, unde numerele x, y sunt definite mai jos.
Selectaţi varianta dvs.
$\mathbf{c_6 = 1} \mapsto x = 5,\ y = 3 + i.$
$\mathbf{c_6 = 2} \mapsto x = 5,\ y = 1 - 2i.$
$\mathbf{c_6 = 3} \mapsto x = 13,\ y = 5 + i.$
$\mathbf{c_6 = 4} \mapsto x = 13,\ y = 2 + 3i.$
$\mathbf{c_6 = 5} \mapsto x = 13,\ y = 3 + 2i.$

7. Demonstraţi afirmaţia (λ) alocată dvs. mai jos.
(λ_1) Intr-un monoid finit orice element inversabil are o putere egală cu 1.
(λ_2) Pentru orice grup netrivial G, există un morfism netrivial de grupuri $\mathbb{Z} \to G$.
(λ_3) Orice două subgrupuri nenule ale lui $\mathbb{Z}$ au intersecţie nenulă.
(λ_4) Daca G, H sunt grupuri finite cu $|G|$, $|H|$ relativ prime, atunci există un singur morfism de grupuri $G \to H$.
(λ_5) Daca M, L sunt corpuri care nu au aceeaşi caracteristică, atunci nu există morfisme de inele $M \to L$.
Selectaţi varianta dvs.
$\mathbf{c_7 = 1} \mapsto \lambda_1.$
$\mathbf{c_7 = 2} \mapsto \lambda_2.$
$\mathbf{c_7 = 3} \mapsto \lambda_3.$
$\mathbf{c_7 = 4} \mapsto \lambda_4.$
$\mathbf{c_7 = 5} \mapsto \lambda_5.$

8. Găsiţi $d \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\{na + b \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap \{n'a' + b' \mid n' \in \mathbb{Z}\} = \{maa' + d \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

unde numerele a, b, a', b' sunt definite mai jos.

Selectaţi varianta dvs.

$\mathbf{c_8} = \mathbf{1} \mapsto a = 11,\ b = 4,\ a' = 13,\ b' = 11.$
$\mathbf{c_8} = \mathbf{2} \mapsto a = 11,\ b = 6,\ a' = 17,\ b' = 5.$
$\mathbf{c_8} = \mathbf{3} \mapsto a = 11,\ b = 8,\ a' = 19,\ b' = 7.$
$\mathbf{c_8} = \mathbf{4} \mapsto a = 13,\ b = 4,\ a' = 17,\ b' = 9.$
$\mathbf{c_8} = \mathbf{5} \mapsto a = 13,\ b = 6,\ a' = 19,\ b' = 7.$

9. Fie G grupul aditiv al şirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere întregi şi fie $f : G \to \mathbb{Z}$ un morfism de grupuri. Pentru $i \geq 1$, notăm cu e_i şirul cu toţi termenii nuli exceptând termenul de rang i care este egal cu 1 (e.g. e_1 este şirul $(1, 0, 0, ...)$). Arătaţi că mulţimea $\{i \geq 1 \mid f(e_i) \neq 0\}$ este finită.

Acest subiect dificil are o singură variantă.

Numele: [redacted]

Grupa: 113

Cod examen: [redacted]

1. $A = \{ \hat{a} \in \mathbb{Z}_m - \{\hat{0}\} \mid a \in \mathbb{N}, (a, m) \neq 1 \}$

$c_1 = 1 \Rightarrow m = 22$

$A = \{ \hat{a} \in \mathbb{Z}_{22} - \{\hat{0}\} \mid a \in \mathbb{N}, (a, 22) \neq 1 \}$

i) Listați elem lui A

$A = \{ \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}, \hat{10}, \hat{11}, \hat{12}, \hat{14}, \hat{16}, \hat{18}, \hat{20} \}$

ii) pe A avem relația $x \sim y \Leftrightarrow xy \neq \hat{0}$

Verificați dacă $\sim$ - rel. de echivalență.

„$\sim$" este relație de echivalență $\Leftrightarrow$

- reflexivă $\Leftrightarrow x \sim x \; \forall x \in A$
- simetrică $\Leftrightarrow x \sim y \Rightarrow y \sim x \; \forall x, y \in A$
- tranzitivă $\Leftrightarrow x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim \hat{z}$

$\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4}$

$\hat{4} \cdot \hat{4} = \hat{16}$

$\hat{6} \cdot \hat{6} = \hat{36} = \hat{14}$

$\hat{8} \cdot \hat{8} = \hat{64} = \hat{20}$

$\hat{10} \cdot \hat{10} = \hat{100} = \hat{12}$

$\hat{11} \cdot \hat{11} = \hat{121} = \hat{11}$

$\hat{12} \cdot \hat{12} = \hat{144} = \hat{12}$

$\hat{14} \cdot \hat{14} = \hat{196} = \hat{20}$

$\hat{16} \cdot \hat{16} = \hat{256} = \hat{14}$

$\hat{18} \cdot \hat{18} = \hat{324} = \hat{16}$

$\hat{20} \cdot \hat{20} = \hat{400} = \hat{4}$

$\Rightarrow \sim$ este reflexivă

$x \sim y \Rightarrow xy \neq \hat{0}$

$y \sim x \Rightarrow yx \neq 0$

$xy = yx \; \forall x, y \in A \Rightarrow$ „$\sim$" este simetrică

$x \sim y \Rightarrow xy \neq \hat{0} \quad (\forall)\, x,y \in A$

$y \sim z \Rightarrow yz \neq \hat{0} \quad (\forall)\, y,z \in A$

Dacă $xy \neq \hat{0}$ și $yz \neq \hat{0} \Rightarrow xz \neq \hat{0}$

$x \neq \hat{0}$ și $y \neq \hat{0}$ $\quad y \neq \hat{0}$ și $z \neq \hat{0}$, dar $xz \neq \hat{0}$

2. $c_2 = 1 \Rightarrow M = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}, \hat{9}\}$

i) M - monoid față de înmulțirea pe $\mathbb{Z}_{12}$

$(M, \cdot)$ - monoid $\Leftrightarrow$ „$\cdot$" asoc și „$\cdot$" are element neutru.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{x}(\hat{y}\cdot\hat{z}) = \hat{x}\cdot(\widehat{y\cdot z}) = \widehat{x\cdot y\cdot z} \quad (\forall)\, x,y,z \in M \\ (\hat{x}\cdot\hat{y})\cdot\hat{z} = \widehat{xy}\cdot\hat{z} = \widehat{xyz} \quad (\forall)\, x,y,z \in M \end{array}\right\} \Rightarrow \text{„}\cdot\text{" asociativă}$$

$(\exists)\, \hat{e} \in M$ a.î. $\hat{x}\cdot\hat{e} = \hat{e}\cdot\hat{x} = \hat{x} \quad (\forall)\, x \in M$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{x}\cdot\hat{e} = \hat{x} \Leftrightarrow \hat{x}\cdot\hat{e} - \hat{x} = \hat{0} \Rightarrow \hat{x}(\hat{e} - 1) = \hat{0} \quad (\forall)\, x \in M \Rightarrow \hat{e} = \hat{1} \\ \hat{e}\cdot\hat{x} = \hat{x} \Leftrightarrow e\cdot\hat{x} - \hat{x} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{x}(e-1) = \hat{0} \quad (\forall)\, x \in M \Rightarrow \hat{e} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ „$\cdot$" admite element neutru.

$\Rightarrow (M, \cdot)$ - monoid.

ii) Găsiți elem inversabile din M.

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{0}$
$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$
$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{9}$	$\hat{0}$	$\hat{9}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{9}$

Din tabla înmulțirii $\Rightarrow \hat{1}$ este singurul element inversabil

Tabla înmulțirii lui $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

$\hat{1}, \hat{5}$ - elem. inversabile în $\mathbb{Z}_6$ $\Rightarrow$ table diferite $\Rightarrow (M, \cdot) \not\cong \mathbb{Z}_6$

Nu sunt izomorfe.

3. $c_3 = 1 \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 8 & 2 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

i) descompunerea lui σ în cicluri disjuncte:

$\sigma = (1\,7)(2\,6)(3\,4\,5\,8) \quad \sigma \in S_9$

ii) $\operatorname{ord}(\sigma)$ = cmmmc al lungimilor ciclurilor

$\operatorname{ord}(\sigma) = [2, 2, 4] = 4$

iii) $\operatorname{sgn}(\sigma)$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{nr. transpoziții}} = (-1)^5 = -1 \Rightarrow \sigma$ impară

$\sigma = (1\,7)(2\,6)(3\,4\,5\,8) = (1\,7)(2\,6)(3\,4)(4\,5)(5\,8)$ σ are 5 transpoziții

iv) $(1\,3\,4\,6\,8\,9)\,\sigma\,(1\,3\,4\,6\,8\,9)^{-1} =$

$= (1\,3\,4\,6\,8\,9)(1\,7)(2\,6)(3\,4\,5\,8)(9\,8\,6\,4\,3\,1) =$

$= (2\,8)(3\,7)(4\,6\,5\,9)$

Am calculat folosind: $2 \to 2 \to 2 \to 6 \to 6 \to 8$ etc.

4. Considerăm D_4, Q, $(\mathbb{Z}_8, +)$ - grup aditiv

$c_4 = 4 \Rightarrow G = Q \times \mathbb{Z}_8 \qquad H = D_4 \times \mathbb{Z}_8$

i) Numărați elementele de ordin 2 din G.

$G = Q \times \mathbb{Z}_8$ unde Q - grupul cuaternionilor $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

$\mathbb{Z}_8 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}\}$

$H = D_4 \times \mathbb{Z}_8$ unde $D_4 = \{I, R, R^2, R^3, S, RS, R^2S, R^3S\}$

În $\mathbb{Z}_8$ elementul de ordin 2 este $\hat{4}$.

În Q elementul de ordin 2 este -1.

Ordinul elementului unui produs direct - cmmmc dintre ordinele elementelor.

$ord(\hat{0}) = 1$ și $ord(1) = 1$

Deci elem. de ordin 2 din G sunt: $(-1, \hat{4}), (1, \hat{4}), (-1, \hat{0})$: 3 elemente.

ii) Arătați că G nu e izomorf cu H.

D_4 are 5 elemente de ordin 2: $R^2, S, RS, R^2S, R^3S \Rightarrow 5$ elemente.

Grupurile produs direct $Q \times \mathbb{Z}_8$ și $D_4 \times \mathbb{Z}_8$ nu au același nr. de elemente de ordin 2, așadar nu pot fi izomorfe.

5. $c_5 = 2 \Rightarrow a = 6$

$f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_{60}, +) \quad f(x) = \widehat{6x} \quad x \in \mathbb{Z}$

i) f - morfism de grupuri $\Leftrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$ și $f(0) = \hat{0}$

$f(x+y) = \widehat{6(x+y)} = \widehat{6x + 6y} = \widehat{6x} + \widehat{6y} = f(x) + f(y)$ $\Big\} \Rightarrow f$ - morfism.

$f(0) = \widehat{6 \cdot 0} = \hat{0}$

ii) $Ker(f)$ - ? , $Im(f)$ - ?

$Ker(f) = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = \hat{0}\}$

$f(x) = \hat{0} \Leftrightarrow \widehat{6x} = \hat{0} \Rightarrow 6x = 60k \Leftrightarrow x = 10k \Rightarrow$

$\Rightarrow Ker\, f = \{10k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 10\mathbb{Z}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{Z}_{60} \mid (\exists)\, x \in \mathbb{Z}$ a.î. $f(x) = y\}$

f - surjecție - clar. $\Rightarrow Im(f) = \mathbb{Z}_{60}$

iii) Aplicând T.F.i. $\Rightarrow \mathbb{Z}/_{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{Z}/_{10\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_{30} \Leftrightarrow \mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_{30}$

6. $c_6 = 4 \Rightarrow x = 13 \quad y = 2+3i$.

$\{ax + by \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ideal în $\mathbb{Z}[i]$

$I = \{13a + (2+3i)b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ideal în $\mathbb{Z}[i]$

I se numește ideal al lui $\mathbb{Z}[i]$ dacă $x - y \in I \quad (\forall) x, y \in I$

$\alpha \cdot x \in I \quad (\forall) \alpha \in \mathbb{Z}[i], x \in I$

$x, y \in I$

$x = 13a + (2+3i)b \quad a, b \in \mathbb{Z}$

$y = 13c + (2+3i)d \quad c, d \in \mathbb{Z}$

$x - y = 13a + (2+3i)b - 13c - (2+3i)d =$

$= 13(a-c) + (2+3i)(b-d) \in I$ deoarece $a - c \in \mathbb{Z} \; (\forall) a, c \in \mathbb{Z}$

$b - d \in \mathbb{Z} \; (\forall) b, d \in \mathbb{Z}$

$\alpha \cdot x = \alpha(13a + (2+3i)b) =$

$= \alpha \cdot 13a + \alpha(2+3i)b$

Fie $\alpha \in \mathbb{Z}[i] \Rightarrow \alpha = c + di \; \Big\} \Rightarrow c, d \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha \cdot x = (c + di) \cdot 13a + (c + di)(2+3i)b =$

$= 13ac + 13adi + 2bc + 3bci + 2bdi - 3bd =$

$= 13ac + 2bc - 3bd + 13adi + 3bci + 2bdi =$

$= (13ac + 2bc - 3bd) + (13ad + 3bc + 2bd)i$

$\mathbb{Z}[i]$ - comutativ $\Rightarrow$ ideal bilateral (putem demonstra $\alpha x \alpha \in I$

$\alpha x \alpha = \alpha(13a + (2+3i)b)\alpha = (13\alpha a + \alpha b(2+3i))\alpha =$

$= 13\alpha^2 a + \alpha^2 b(2+3i) \in I \quad (\forall) \alpha \in \mathbb{Z}[i]$ și $x \in \mathbb{Z}$

$\alpha^2 a \in \mathbb{Z} \qquad (c+di)^2 = c^2 - d^2 \in \mathbb{Z} \; (\forall) c, d \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \{13a + (2+3i)b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ - ideal în $\mathbb{Z}[i]$

7. $c_7 = 2 \Rightarrow \lambda_2$

Pentru orice grup netrivial G există un morfism netrivial de grupuri $\mathbb{Z} \to G$.

Fie G - un grup netrivial

$\forall x \in G$, $x \neq 1$ definim $f: \mathbb{Z} \to G$

$f(1) = x \quad x \in G$

$f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = x \cdot x = x^2$

Prin inducție vom obține $f(n) = x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Așadar $(\forall)$ G netrivial $(\exists)$ un morfism netrivial $\mathbb{Z} \to G$

8. $c_8 = 4 \Rightarrow a = 13 \quad b = 4 \quad a' = 17 \quad b' = 9$

Găsiți $d \in \mathbb{N}$ a.î. $\{13m + 4 \mid m \in \mathbb{Z}\} \cap \{17m' + 9 \mid m' \in \mathbb{Z}\} = \{221m + d \mid m \in \mathbb{Z}\}$

Dacă scriem în limbaj de congruențe $\Rightarrow$ (lema chineză a resturilor)

$$\begin{cases} d \equiv_{13} 4 \Rightarrow a_1 = 13 \\ d \equiv_{17} 9 \Rightarrow a_2 = 17 \end{cases} \quad a = a_1 \cdot a_2 = 221 \quad \begin{cases} b_1 = 17 \\ b_2 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 \equiv_{13} 4 \Leftrightarrow c_1 = 4 \\ c_2 \equiv_{17} 9 \Leftrightarrow c_2 = 9 \end{cases}$$

$d = b_1 \cdot c_1 \cdot 4 + b_2 \cdot c_2 \cdot 9$

$d = 17 \cdot 4 \cdot 4 + 13 \cdot 9\ 9$

$d = 272 + 1053$

$d = 1325 \equiv_{221} 220$