Subiect pentru examenul scris la algebră, grupa 104

Numele şi prenumele ....

Subiectul 1: 15 puncte

5 p a) Definește rangul unei matrice cu elemente într-un corp.

5 p b) Enunță teorema fundamentală a polinoamelor simetrice și explică toate noțiunile care apar în enunț.

5 p c) Dă exemplu de aplicație biliniară, alternată. Justifică exemplul.

Subiectul 2: 25 puncte

10 p a) Rezolvă în **C** ecuația: $X^3 + 18\,X + 15 = 0$.

15 p b) Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculează valorile proprii ale lui A. Determină apoi forma canonică Jordan a lui A.

Subiectul 3: 20 puncte

5 p a) În maxim 6 rânduri, descrie modul de construcție a produsului tensorial a două spații vectoriale.

15 p b) Enunță și demonstrează regula lui Cramer referitoare la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare.

Subiectul 4: 20 puncte

5 p a) Calculează determinatul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

15 p b) Considerăm polinomul $P = X^3 + \hat{2}\,X^2 + \hat{3} \in \boldsymbol{Z}_7[X]$.

Găsește o matrice $A \in M_3(\boldsymbol{Z}_7)$ astfel ca *P*(*A*) = 0.

Pentru matricea găsită, notăm $T = \{f(A) |\, f \in \boldsymbol{Z}_7\,[X]\,\}$. Demonstrează că *T* este subspațiu vectorial peste corpul $\boldsymbol{Z}_7$ în $M_3(\boldsymbol{Z}_7)$ și calculează dimensiunea lui *T.*

Arată apoi că *T* este corp, în raport cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire a matricelor. Câte elemente are acest corp?