TEORIA MĂSURII

SEMINAR 6

Aplicație:

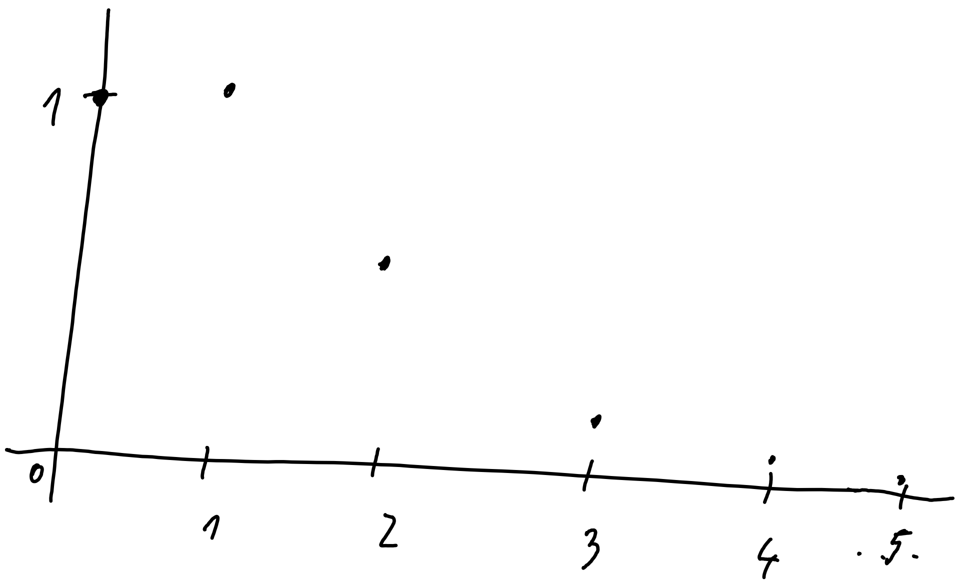
$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$

$$\mu(A) = |A|$$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad f(n) = \dfrac{1}{n!}$

$$\int_{\mathbb{N}} f(n)\, d\mu(n) = ?$$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \chi_{\{n\}}$$



$G_f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

$$\chi_{\{j\}}(i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$f_3 = \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} \cdot \chi_{\{i\}} = \frac{1}{0!} \cdot \chi_{\{0\}} + \frac{1}{1!} \cdot \chi_{\{1\}} + \frac{1}{2!} \cdot \chi_{\{2\}} + \frac{1}{3!} \cdot \chi_{\{3\}}$$

$$f_3(2) = \frac{1}{2!} = f(2)$$

$$f_3(4) = 0$$

$$f_3(n) \leq f(n), \quad (\forall)\, n$$

$$f_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \cdot \chi_{\{i\}}$$

$$(\forall)\ x \in \mathbb{N}$$

$$f_m(x) \leq f_{m+1}(x)$$

De ce? Fiindcă:

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{x!}, & x \leq m \\ 0, & x > m \end{cases}$$

şi

$$f_{m+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x!}, & x \leq m+1 \\ 0, & x > m+1 \end{cases}$$

$$(\forall)\ x \in \mathbb{N} \text{ fixat}$$

$$\lim_{m \to \infty} f_m(x) = f(x)$$

$$\begin{array}{cccccc} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_x(x), & f_{x+1}(x), & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{x!} & \frac{1}{x!}, & \frac{1}{x!}, \ldots \end{array}$$

$$f_n \xrightarrow{\text{simplu}} f$$

$$f_n \le f_{n+1}$$

$f_n \ge 0$, $(\forall)\, n$ (i.e. $f_n(x) \ge 0$, $(\forall)\, n, x$)

Din T.C.M.

$$\int_{\mathbb{N}} f = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{N}} f_n$$

f_n funcție simplă

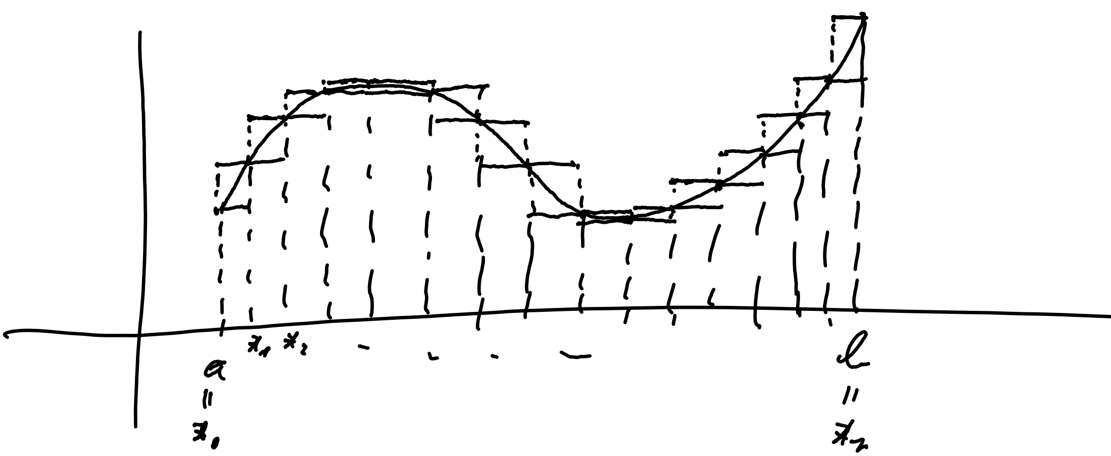
$$\int_{\mathbb{N}} f_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \cdot \mu(\{i\})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{m!}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = e$$

Riemann $\Longrightarrow$ Lebesgue



$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mărginită

$\mathcal{P}_n = (a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b)$

Sume Darboux:

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \inf f([x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

inferioară

$$S(f, P_n) = \text{—''— } \sup \text{ —''—}$$

superioară

$$s(f, P_n) \leq S(f, P_n)$$

P_m rafinare a lui P_n

(conține toate punctele lui P_n
și eventual altele)

$$s(f, P_n) \leq s(f, P_m) \leq S(f, P_m) \leq$$
$$\leq S(f, P_n)$$

Fie P, Q două diviziuni

$$s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq$$
$$\leq S(f, Q)$$

Integrala Riemann (-Darboux)

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{P\in\mathcal{D}([a,b])} s(f,P)$$

(diviziuni ale lui $[a,b]$)

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{P\in\mathcal{D}([a,b])} S(f,P)$$

În cazul în care

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \quad ,$$

spunem că f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$

și $\int_a^b f$ e valoarea comună

Integrabilitatea Riemann (caracterizare cu ε)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită
f este integrabilă Riemann $\iff$

$\iff$ $(\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)\ P \in \mathcal{D}([a,b])$ a.î.

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

Teoremă (Legătura dintre integralele Riemann și Lebesgue)

(Th. 2.5.4 / Cohn)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită. Atunci

(a) f e integrabilă Riemann dacă și numai dacă f e continuă a.p.t.

(b) Dacă f e integrabilă Riemann, atunci f e integrabilă Lebesgue și integralele coincid.

Demonstrație:

(b) f integrabilă Riemann

Folosim criteriul Darboux, deci

$(\forall)\, n \in \mathbb{N} \quad (\exists)\, Q_n \in \mathcal{D}([a,b])$ a.î.

$$S(f, Q_n) - s(f, Q_n) < \frac{1}{n}$$

Fie $P_n = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$

Deci $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_n \subseteq \dots$

și $S(f, P_n) - s(f, P_n) < \frac{1}{n}$

Fie $g_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g_n(x) = \inf f([x_{i-1}^n, x_i^n])$,
unde $x \in (x_{i-1}^n, x_i^n]$

$P_n = \{a = x_0^n, x_1^n, \dots x_m^n = b\}$

g_n măsurabilă, $(\forall) n$ (chiar funcție simplă)

$$\int_{[a,b]} g_n(x)\, d\lambda(x) = s(f, P_n)$$

$$g_n(x) \le g_{n+1}(x), \ (\forall) x \in [a, b]$$

$$g_n(x) \le f(x), \ (\forall) x \in [a, b]$$

Fie $x \in [a, b]$ $g_n(x)$ monoton și mărginit $\Rightarrow$ $(\exists)\, g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$

Mai mult, $g_n \nearrow g$

g_n, f, g mărginită inferior de $h \in \mathbb{R}$,

$$(g_n - h) \nearrow (g - h)$$

$$g_n - h \ge 0$$

$$g - h \ge 0$$

$$f(x) \ge h, (\forall) x$$

$$(f - h)(x) = f(x) - h \ge 0$$

Din T. C. M.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} (g_n - h)\,dx = \int_{[a,b]} (g - h)\,dx$$

g_n, g, f mărginite superior de $K \in \mathbb{R}$

$$\int_{[a,b]} (g_n - h) \leq (K-h)\cdot(b-a) < \infty$$

$$g - h \geq 0$$

În consecință, $\int_{[a,b]} (g-h)\,dx < (K-h)(b-a) < \infty$,

adică $g-h$ integrabilă

$$\int_{[a,b]} |h|\,dx = |h|\cdot(b-a) < \infty,$$

deci funcția constantă h e integrabilă.

Prin urmare, g e integrabilă Lebesgue

Mai mult

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,l]} g_n \, dx - h \cdot (l - 0) =$$

$$= \int_{[0,l]} g \, dx - h \cdot (l - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_{[0,l]} g_n \, dx = \int_{[0,l]} g \, dx$$

Analog

$$h_n(x) = \sup_{x \in (x_{i-1}, x_i]} f([x_{i-1}, x_i])$$

$$h_n(x) \geq h_{n+1}(x)$$

$h_n \searrow h$

$h_n \geq f$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,l]} h_n \, dx = \int_{[0,l]} h$$

$$\int_{[a,b]} h_n \, d\lambda = S(f, P_n)$$

$$g_n \leq g \leq f \leq h \leq h_n$$

$$\int_{[a,b]} (h - g) \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{[a,b]} (h_n - g_n) \, d\lambda =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \Big(\underbrace{S(f, P_n) - s(f, P_n)}_{< \frac{1}{n}} \Big) = 0$$

Prin urmare $\left.\begin{array}{l} \int_{[a,b]} (h - g) = 0 \\ h \geq g \Rightarrow h - g \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow$

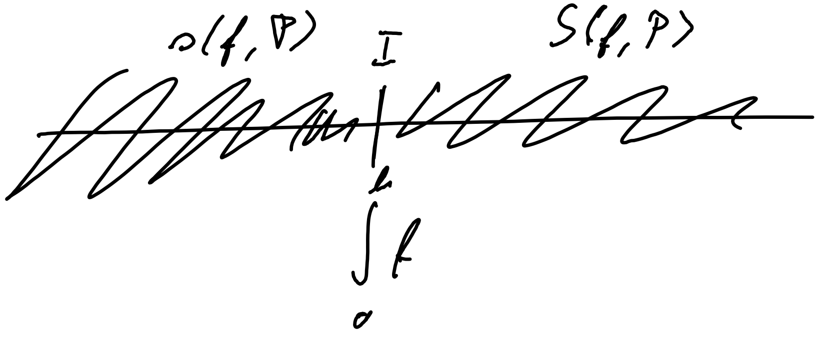
$\Rightarrow h = g$ a.p.t.

$$\left.\begin{array}{l} g \le f \le h \\ g = h \text{ a.p.t.} \end{array}\right| \Rightarrow g = f = h \text{ a.p.t.}$$

<u>Atunci f e integrabilă</u> și $\int_{[a,b]} f\,dx = \int_{[a,b]} g\,dx = \int_{[a,b]} h\,dx$

(Vezi lemă la final)

Dar $I = \int_{[a,b]} h\,dx = \int_{[a,b]} g\,dx = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$



<u>Lemă</u> Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spațiu cu măsură completă

Fie $g : X \to \mathbb{R}$ măsurabilă și

$f : X \to \mathbb{R}$

$f = g \quad \mu\text{-a.p.t.}$

Atunci f e măsurabilă

În plus, dacă g e integrabilă Lebesgue, atunci și f este integrabilă și integralele coincid.

<u>Dem</u>: Fie $N \subseteq X$, $\mu(N) = 0$

a.î. $f(x) = g(x)$, $(\forall)\, x \in X \setminus N$

Fie $t \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}((-\infty, t)) = \left(f^{-1}((-\infty, t)) \cap (X \setminus N)\right) \cup$$

$$\cup \left(f^{-1}((-\infty, t)) \cap N\right)$$

$f = g$ pe $X \setminus N$, deci

$f^{-1}((-\infty, t)) \cap (X \setminus N) =$

$= g^{-1}((-\infty, t)) \cap (X \setminus N)$
măsurabilă

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}((-\infty, t)) \cap N \subseteq N \\ \mu(N) = 0 \\ (X, \mathcal{A}, \mu) \text{ sp. măs. complet.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f^{-1}((-\infty, t)) \cap N$ măsurabilă

Prin urmare,

$f^{-1}((-\infty, t))$ măsurabilă ca
reuniune de măsurabile

Lemă: Fie $\varphi \geq 0$ fct. măsurabilă și $N \in \mathcal{A}$ a.î. $\mu(N) = 0$

Atunci $\int_N \varphi = 0$

Fie $f_n = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^n \cdot \chi_{A_i^n}$

funcții simple pozitive a.î.

$f_n \nearrow \varphi$

$$\int_N \varphi = \int_X \varphi \cdot \chi_N$$

$$f_n \cdot \chi_N = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^n \cdot \chi_{A_i^n \cap N} \nearrow \varphi \cdot \chi_N$$

$$\int_X f_n \cdot \chi_N = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i \cdot \underbrace{\mu(A_i^n \cap N)}_{\leq \mu(N) = 0} = 0$$

Din T. C. M.

$$\int_X \varphi \cdot \chi_N = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \cdot \chi_N = 0$$

Am demonstrat Lema!

- f integrabilă:

$$\int_X |f| = \int_{X \setminus N} |f| + \int_N |f|$$

$$= \int_{X \setminus N} |f| = \int_{X \setminus N} |g|$$

$$= \int_{X \setminus N} |g| + \int_N |g|$$

$$= \int_X |g| < \infty,$$

căci g integrabilă

- integralele coincid

Ca mai sus,

$$\int_X f^+ = \int_X g^+$$

$$\int_X f^- = \int_X g^-$$

Scad $\Rightarrow$ $\int_X f = \int_X g$ $\square$