Facultatea de Matematica si Informatica
Universitatea din Bucuresti

23 Ianuarie 2020

Examen final, Varianta A

Disciplina: Ecuatii cu derivate partiale
Tipul examinarii: Examen
Nume student: ______________________________
Seria 32, grupa: ______________________
Timp de lucru : 3 ore

Nu uitati sa va scrieti numele si prenumele in rubrica Nume student.

Acest examen contine 5 probleme (toate obligatorii).

Verificati foile cu subiecte fata-verso !

Examenul este individual. La sfarsitul examenului nu uitati sa aduceti foaia cu subiectele o data cu lucrarea scrisa pentru a le capsa impreuna. Astfel, corectura se va face mai usor.
Pentru elaborarea lucrarii scrise puteti folosi ca unic material ajutator o foaie format A4 care sa contina doar notiuni teoretice. Exercitiile rezolvate sunt excluse ca material ajutator.

Pentru redactare tineti cont de urmatoarele sugestii:

- Daca folositi o teorema fundamentala, rezultat cunoscut, etc **indicati** acest lucru si explicati cum se poate aplica rezultatul respectiv.
- **Organizati-va munca** intr-un mod coerent pentru a avea toti de castigat ! Incercati ca la predarea lucrarii fiecare problema sa fie redactata in ordinea aparitiei pe foaia cu subiecte. Ideal ar fi ca si subpunctele sa fie redactate in ordine. Daca nu stiti a rezolva un anumit subpunct scrieti numarul subpunctului si lasati liber.
- Raspunsurile corecte dar argumentate incomplet (din punct de vedere al calculelor/explicatiilor) vor primi punctaj partial.

Barem (cu bonus): P1 (2p) + P2 (1.5p)+ P3 (2.5p) +P4 (2p) + P5 (2p)+ 1 oficiu= **11p** (Se pleaca din nota 11).

Rezultatele le veti primi in cel mai scurt timp posibil pe e-mailul sefului de grupa. Pentru orice nelamuriri scrieti-mi la adresa cristian.cazacu@fmi.unibuc.ro.

Problema 1. *(2p).*

1). Calculati $\operatorname{div}(|x| \cdot \nabla v(x))$, *unde* $v : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $v(x) := |x|^{-\frac{4}{3}}$.

2). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ *are loc* $|v|^p \in L^1(B_1(0))$, *unde* $B_1(0)$ *este bila unitate din* $\mathbb{R}^4$.

3). Sa se determine pentru ce valori $p \geq 1$ *are loc* $|v|^p \in L^1(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_1(0)})$.

4). Dati exemplu de o functie strict subarmonica ($-\Delta u < 0$) *pe* $\mathbb{R}^2$ *care sa se anuleze pe dreapta* $x + 3y = 0$.

5). Consideram functia $u : B_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *data de*

$$u(x) = \left(\ln \frac{2}{|x|}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, x_2),$$

unde $B_1(0)$ *este bila unitate din* $\mathbb{R}^2$ *centrata in origine. Aratati ca*

$$-\Delta u(x) = \frac{u(x)}{4|x|^2 \ln^2(\frac{2}{|x|})}, \quad \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Problema 2. *(1.5p). Se considera problema la limita*

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{xx}(x,y) + 2u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ u(0,y) = \sin(2\pi y),\ u(1,y) = e^{-2\sqrt{2}\pi} \sin(2\pi y), & y \in (0,1). \end{cases}$$

1). Determinati solutia problemei (1) *cautand-o in variabile separate sub forma* $u(x,y) = A(x)B(y)$.

*2). * Aratati (folosind eventual metoda energetica) ca* (1) *are cel mult o solutie de clasa* C^2.

Problema 3. *(2.5p). Consideram urmatoarea problema de tip "unde"*

$$(2) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - 3u_{tx}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

unde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ *sunt functii date.*

1). Aratati ca daca $u = u(x,t)$ *este o functie de clasa* C^2 *atunci* u *verifica*

$$(\partial_t + \partial_x)(u_t(x,t) - 4u_x(x,t)) = u_{tt}(x,t) - 3u_{tx}(x,t) - 4u_{xx}(x,t),$$

pe domeniul sau de definitie.

2). Rezolvati problema cu valori initiale satisfacuta de u *in* (2) *(scrieti forma generala a lui* u*) reducand-o la rezolvarea a doua ecuatii de transport (una omogena si alta neomogena).*

3). Folosind conditiile la $t = 0$ *deduceti solutia* u *a problemei* (2) *in cazul particular* $f(x) = \sin x$ *si* $g(x) = e^{-x}$.

Problema 4. *(2p). Consideram problema Cauchy*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \frac{e^t}{e^t+1}u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

1). Gasiti o functie $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel incat functia $v(x,t) := u(x,t)\phi(t)$ sa verifice ecuatia caldurii

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t > 0. \tag{4}$$

2). Scrieti problema Cauchy verificata de v si calculati $v(0, \frac{1}{2})$.

3). $\star$ Determinati explicit solutia problemei (3).

Problema 5. *(2p). Fie functia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \inf_{y \in \{-1,1\}} |x-y|$.*

1). Explicitati functia f si faceti graficul functiei f.

2). Sa se determine punctele de derivabilitate ale lui f pe intervalul (-1,1).

3). Definiti spatiul $H^1(-1,1)$ si dati exemplu de 2 norme echivalente pe $H^1(-1,1)$. Argumentati echivalenta normelor.

4). Argumentati ca $f \in H^1(-1,1)$ si calculati norma lui f in $H^1(-1,1)$ (precizati inainte norma cu care lucrati).

5). Determinati $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel incat functia $z : (0,1) \to \mathbb{R}$, $z(x) = x^\alpha$ sa apartina lui $W^{1,3}(0,1)$.

*6). * Determinati $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel incat functia $z : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $z(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^3}$ sa apartina lui $H^1(1,\infty)$.*

$\boxed{\text{EDP}}$

$\boxed{\text{Pb 1}}$ $\quad v:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R} \qquad v(x)=|x|^{-\frac{4}{3}}$

1) $\operatorname{div}\left(|x|\cdot\nabla v(x)\right)=?$

$$\nabla v(x)=\nabla\left(|x|^{-\frac{4}{3}}\right)=-\frac{4}{3}|x|^{-\frac{4}{3}-2}\cdot x=$$

$$=-\frac{4}{3}x\cdot|x|^{-\frac{10}{3}}$$

$$|x|\cdot\nabla v(x)=-\frac{4}{3}x\cdot|x|^{-\frac{10}{3}+1}=\frac{-4}{3}x\cdot|x|^{-\frac{7}{3}}$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{-4}{3}x\cdot|x|^{-\frac{7}{3}}\right)=\frac{-4}{3}\operatorname{div}\left(x\cdot|x|^{-\frac{7}{3}}\right)=$$

$$=\frac{-4}{3}\left(n+\frac{-7}{3}\right)|x|^{-\frac{7}{3}}$$

2) $v(x)\in L^1(B_1(0))$

$$\int_{B_1(0)}|x|^{-\frac{4}{3}}dx \xrightarrow{\text{co-arie}} \int_0^1\int_{\partial B(0,s)}|x|^{-4/3}\,d\sigma\,ds \xrightarrow{|x|=s}$$

$$=\int_0^1\int_{\partial B_0(s)}s^{-4/3}\,d\sigma\,ds=\int_0^1 s^{-4/3}\,|\partial B_0(s)|\,ds=\int_0^1 s^{-4/3}\cdot s^{\overset{4}{\overset{\parallel}{5-1}}}\,ds$$

$$=\int_0^1 s^{-4/3}s^4\,ds=\int_0^1 s^{8/3}\,ds=\frac{s^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}}\Bigg|_0^1=\frac{s^{\frac{11}{3}}}{\frac{8}{3}}\Bigg|_0^1<\infty\ ??$$

e mereu finită, cred că a uitat să pună p
sau a greșit funcția

4)

$$u=-(x+3y)^2=-x^2+6xy+y^2$$

$$\left.\begin{aligned}u_x&=-2x+6y\\u_{xx}&=-2\\u_y&=-2y\\u_{yy}&=-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \Delta u=u_{xx}+u_{yy}=-2-2=-4<0$$

5) $u(x)=\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad n\to$ presupun că e $\mathbb{R}^5$

Formulă: $\Delta u(x)=g''(|x|)+\frac{\overset{5}{\overset{\parallel}{n}}-1}{|x|}\cdot g'(|x|)$

unde $g(|x|)=u(x)$

$$g'(|x|)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{1}{\frac{\cancel{2}}{\cancel{|x|}}}\cdot\frac{-\cancel{2}}{|x|^{\cancel{2}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|x|}\cdot\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$g''(|x|)=\frac{-1}{2}\left(\ \right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-1}{|x|^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|x|}\cdot\frac{-1}{2}\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\frac{\cancel{2}}{\cancel{|x|}}}\cdot\frac{-\cancel{2}}{|x|^{\cancel{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|x|^2}\left(\ \right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{|x|^2}\left(\ \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{|x|^2}\left[\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$\Delta u(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{|x|^2}\cdot[\,\cdots\,] + \frac{4}{|x|}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{|x|}\left(\ \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{|x|^2}\underbrace{\left[\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{-\frac{3}{2}} - 8\ln\left(\frac{2}{|x|}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}_{\alpha}$$

$$\alpha = -7\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{-1} =$$

$$= {}^{\ln\frac{2}{|x|})}\frac{-7}{\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{|x|}\right)\ln\left(\frac{2}{|x|}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= {}^{\ln\frac{2}{|x|})}\frac{-7\ln\frac{2}{|x|} - 1}{\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{2}{|x|}\right)} = \frac{-7\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^2 - \ln\frac{2}{|x|}}{\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)^2}$$

??

Pb 3

1 $(\partial_t + \partial_x)(u_t(x,t) - 4u_x(x,t)) =$

$= u_{tt}(x,t) - 4u_{x,t}(x,t) + u_{t,x}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) =$

$= u_{tt} - 3u_{tx} - 4u_{xx}$

2 Fie $v(x,t) = (u_t - 4u_x)(x,t) =$

$= u_t(x,t) - 4u_x(x,t)$

v verifică o ec. de transport omogenă

$$\begin{cases} v_t(x,t) + v_x(x,t) = 0 \\ v(x,0) = u_t(x,0) - 4u_x(x,0) = \\ \qquad = g(x) - 4f'(x) \end{cases}$$

v este constant pe direcția $(1,1)$

$v(x,t) = v\left(t(1,1) + (x-t,0)\right) = v(x-t,0)$

$= g(x-t) - 4f'(x-t)$

u verifică ec. de transport neomogenă

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 4u_x(x,t) = g(x-t) - 4f'(x-t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$