Tutoriat 7

Prop. 3.21.

Pentru orice φ, ψ, χ și orice $v \in V$:

- $\varphi \sim \psi \Rightarrow \varphi_v(\chi) \sim \psi_v(\chi)$

Dem: $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow Mod(\varphi) = Mod(\psi)$.

Fie $e \in Mod(\varphi) \Leftrightarrow e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1$.

- $e(v) = 1$ și $e^+(\chi) = 1 \Rightarrow e^+(\varphi_v(\chi)) = e^+(\psi_v(\chi)) = 1$
- $e(v) = 0$ și $e^+(\chi) = 0 \Rightarrow e^+(\varphi_v(\chi)) = e^+(\psi_v(\chi)) = 1$.
- $e(v) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$.
  - \+ dacă $e^+(\varphi)$ nu depinde de $e(v) \Rightarrow$
    $\Rightarrow e^+(\psi)$ nu depinde de $e(v)$ (altfel am avea un model pentru φ care nu model pentru ψ ↯).
    deci $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1$ și pentru $e(v) = 0 \Rightarrow$
    $\Rightarrow e^+(\varphi_v(\chi)) = e^+(\psi_v(\chi)) = 1$ pentru $e^+(\chi) = 0$.
  - \+ dacă $e^+(\varphi)$ depinde de $e(v) \Rightarrow$
    $\Rightarrow e^+(\psi)$ depinde de $e(v)$,
    deci $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 0$ pentru $e(v) = 0 \Rightarrow$
    $\Rightarrow e^+(\varphi_v(\chi)) = e^+(\psi_v(\chi)) = 0$ pentru $e^+(\chi) = 0$.
- $e(v) = 0$ și $e^+(\chi) = 1$ se tratează analog.

- $\models \varphi \Rightarrow \models \varphi_v(\chi)$

Dem:

• $\models \varphi \implies \models \varphi \vee (\mathcal{X})$

Dem: $\models \varphi \iff e^+(\varphi) = 1$ $(\forall)$ e. i.e. atât pentru $e(v) = 0$ cât şi pentru $e(v) = 1$ $\implies e^+(\varphi \vee (\mathcal{X})) = 1$ $(\forall)$ e i.e. atât pentru $e^+(\mathcal{X}) = 1$ cât şi pentru $e^+(\mathcal{X}) = 0$ $\implies$

$\implies \models \varphi \vee (\mathcal{X})$

• φ nesat. $\implies \varphi \vee (\mathcal{X})$ nesat.

Dem: φ nesat. $\iff e^+(\varphi) = 0$ $(\forall)$ e i.e. atât pentru $e(v) = 0$ cât şi pentru $e(v) = 1$ $\implies e^+(\varphi \vee (\mathcal{X})) = 0$ $(\forall)$ e. i.e. atât pentru $e^+(\mathcal{X}) = 1$ cât şi pentru $e^+(\mathcal{X}) = 0$ $\implies$

$\implies \varphi \vee (\mathcal{X})$ nesat.

Tutoriat 6:

• $\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \sim \neg \varphi_1 \vee \ldots \vee \neg \varphi_n$ (1)

• $\neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \sim \neg \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg \varphi_n$ (2)

• $e^+(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1 \iff e^+(\varphi_i) = 1$ $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$ (3)

Negația: $e^+(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 0 \iff e^+(\varphi_i) = 0$ pentru un $i \in \overline{1,n}$

• $e^+(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) = 1 \iff e^+(\varphi_i) = 1$ pentru un $i \in \overline{1,n}$ (4)

Negația: $e^+(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) = 0 \iff e^+(\varphi_i) = 0$ $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$

Prop 3.31

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$

1) $\Gamma \sim \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$

Sol: Fie $e \in Mod(\Gamma) \Leftrightarrow e^+(\varphi_i) = 1, i = \overline{1,n} \overset{③}{\Leftrightarrow} e^+(\varphi_1 \wedge \dots \varphi_n) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e \in Mod(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$

2) $\Gamma \vDash \psi \Leftrightarrow \vDash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \longrightarrow \psi$.

Sol: "$\Rightarrow$" Fie e o evaluare.

- dacă $e \in Mod(\Gamma) \Leftrightarrow e^+(\varphi_i) = 1, i = \overline{1,n}$ și $e^+(\psi) = 1$
(deoarece $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$) $\overset{③}{\Longrightarrow}$
$\Longrightarrow e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ și $e^+(\psi) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \longrightarrow \psi) = 1$.
- dacă $e \notin Mod(\Gamma) (\subseteq Mod(\psi)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^+(\varphi_i) = 0$ pentru un $i \in \overline{1,n} \overset{(3)}{\Longrightarrow}$
$\Leftrightarrow e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 0 \quad (0 \longrightarrow \text{orice}) \Rightarrow$
$\Rightarrow e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \longrightarrow \psi) = 1$

Deci $\vDash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \longrightarrow \psi$.

"$\Leftarrow$" Avem $\vDash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \longrightarrow \psi \Leftrightarrow e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \longrightarrow \psi) = 1 \ (\forall) e$

$\Leftrightarrow e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \longrightarrow e^+(\psi) = 1 \quad (\forall) e.$ ($\ast$)

Vrem $\Gamma \vDash \psi \Leftrightarrow Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.

Fie $e \in Mod(\Gamma) \Leftrightarrow e^+(\varphi_i) = 1, i = \overline{1,n} \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ ($\ast\ast$)

Dar știm că ($\ast$) are loc pentru orice evaluare, în particular și pentru modelele lui Γ. (am restrâns la modelele lui Γ).

Din ($\ast$) și ($\ast\ast$) $\Rightarrow e^+(\psi) = 1 \quad (1 \longrightarrow \overset{\text{doar}}{1}) \Leftrightarrow e \in Mod(\psi)$

Am obținut că $(\forall)\, e \in Mod(\Gamma) \Rightarrow e \in Mod(\psi)$

echivalent $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi) \Leftrightarrow \Gamma \vDash \psi$.

3) Γ nesat $\Longleftrightarrow$ $\vDash \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$.

Sol: Fie e o evaluare.

Γ nesat $\Longleftrightarrow$ $e(\varphi_i)=0$ pentru un $i\in\overline{1,n}$ $\Longleftrightarrow$

$\overset{\neg ③}{\Longleftrightarrow}$ $e^+(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)=0$. $\Longleftrightarrow$ $\neg e^+(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)=1$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $e^+(\neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n))=1$ $\overset{①}{\Longleftrightarrow}$ $e^+(\neg\varphi_1\vee\ldots\vee\neg\varphi_n)=1$.

Evaluarea a fost aleasă arbitrar $\Longrightarrow$ $\vDash\neg\varphi_1\vee\ldots\vee\neg\varphi_n$

4) Fie $\Delta=\{\psi_1,\ldots,\psi_k\}$, $k\in\mathbb{N}$. UASE:

1) $\Gamma\sim\Delta$

2) $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\sim\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k$

Dem: "$\Rightarrow$" $\Gamma\sim\Delta$ $\Leftrightarrow$ $Mod(\Gamma)=Mod(\Delta)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ [$e^+(\varphi_i)=1$, $i=\overline{1,n}$ $\Leftrightarrow$ $e^+(\psi_j)=1$, $j=\overline{1,k}$] (*)

Avem $e^+(\varphi_i)=1$ ~~și~~ $e^+(\psi_j)=1$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,k}$ $\Longleftrightarrow$

$\overset{③}{\Longleftrightarrow}$ $e^+(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)=1$ ~~și~~ $e^+(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)=1$ (*)

Fie $e\in Mod(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$ $\Leftrightarrow$ $e^+(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)=1$

Cu (*) avem că ~~$e\in Mod(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)$~~

~~Fie $e\in Mod(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)$~~ $\Leftrightarrow$ $e^+(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)=1$

~~Cu (*) avem că $e\in Mod(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$~~

"$\cancel{\Leftarrow}$" Analog.