12.03.24 (1)

ElemTN 3 - 312

• Determinați câtul și restul împărțirii lui -79 la 17.

$79 = 17\cdot 4 + 11 \Rightarrow$

$-79 = 17\cdot(-4) - 11 \Rightarrow$

$-79 = 17\cdot(-5) + 6$.

Evident, $0 \le 6 < 17 = |17|$.

Conform precizării de mai înainte din TIR, câtul împărțirii lui -79 la 17 e -5, iar restul acesteia e 6

Dar ~~79 la~~

ale lui -79 la -17? $q = 5$, $r = 6$

Dar ale lui -79 la -17?

• Câți pași are algoritmul lui Euclid?

$a = bq_0 + r_0$

$b = r_0 q_1 + r_1 < \frac{b}{2}$

$r_0 = r_1 q_2 + r_2$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3 < \frac{r_1}{2}$

$\vdots$

$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$

$n+3$: $r_n = r_{n+1} q_{n+2}$.

$n+2 \le b$

Dacă $r_0 > \frac{b}{2}$ atunci $q_1 = 1$, deci $\boxed{r_1 = b - r_0 < \frac{b}{2}}$

Dacă $r_0 \le \frac{b}{2}$ $\boxed{r_1 < r_0 < \frac{b}{2}}$

Mai general, $r_{j+2} \le \frac{r_j}{2}$.

Inductiv, $r_{2k+1} < \frac{b}{2^{k+1}}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $k \le [\log_2(\frac{n}{2} - 1)]$

Noi am vrea ca restul să devină 0.

Dacă $\frac{b}{2^{k+1}} \le 1$, atunci vom avea $r_{2k+1} = 0$.

$\Updownarrow$

$b \le 2^{k+1} \iff \boxed{k \geq \log_2 b - 1}$

Ca urmare, $r_{2[\log_2 b]+1} = 0$.

În consecință, algoritmul se termină cu certitudine după $2[\log_2 b] + 2$ pași.

Considerăm șirul $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 2$.

Def: Șirul $(F_n)_n$ poartă numele de șirul lui FIBONACCI.

Inductiv, $(F_n)_{n\geq1}$ e strict crescător.

Aplicăm alg. lui Euclid pt F_n și F_{n-1}:

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3}$

$\vdots$

$\cancel{F_2 = F_1 + F_0}$

$F_3 = F_2 + F_1$

$F_2 = 2F_1$.

are $n-1$ pași.

Ec. caract. $t^2 - t - 1 = 0$

$\iff t \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

Vom avea $F_n = At_1^n + Bt_2^n$

$\begin{cases} A + B = F_0 = 1 \\ At_1 + Bt_2 = F_1 = 1 \end{cases} \iff$

$A = \frac{t_2 - 1}{t_2 - t_1} \wedge B = \frac{1 - t_1}{t_2 - t_1}$

$\iff A = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \wedge B = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$.

Deci $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

$$\log_2 F_{n-1} \le \log_2 \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^n = -\log_2\sqrt5 + n\log_2\frac{1+\sqrt5}{2} \quad (3)$$

$$< n(\log_2(1+\sqrt5)-1) < n\log_2(1+\sqrt5).$$

---

637 ; 108.

$637 = 5\cdot108 + 97$

$108 = 1\cdot97 + 11$

$97 = 8\cdot11 + 9$

$11 = 9\cdot1 + 2$

$9 = 4\cdot2 + 1$

$4 = 4\cdot1.$

Variantă:

$637 = 6\cdot108 - 11$

$108 = -10(-11) - 2.$

$-11 = 6(-2) + 1$

$-2 = (-2)\cdot1$

$a = b\,c_0 + r_0 \to |r_0| \le \frac{|b|}{2}$

$b = r_0 c_1 + r_1 \to |r_1| \le \frac{|r_0|}{2} \le \frac{|b|}{4}$

$r_0 = r_1 c_2 + r_2 \to |r_2| \le \frac{|b|}{8}$

$r_{n-2} = r_{n-1}c_n + r_n \Rightarrow r_{n-1} | r_{n-2}$,

$r_{n-1} = r_n c_{n+1} + r_{n+1} \Rightarrow r_{n+1} | r_{n-1}$

$r_n = r_{n+1} c_{n+2}$ $\quad r_{n+1} | r_n$

$|r_{n+1}| \le \frac{|b|}{2^{n+2}}$

Ca să fim siguri de $r_{n+1} = 0$, ar. dacă

$2^{n+2} \ge |b| \Leftrightarrow n+2 \ge \log_2 |b|$ ($= \log_2 b$ pt $b \in \mathbb{N}^*$)

Ca urmare, ~~după~~ după $\log_2 b + 1$ pași

avem garanția că am ajuns la rest nul