Examen

2 Iunie 2018

Timp de lucru 2h30. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Mult succes !

Exercițiul 1 10p

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Poisson de parametru $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și verificați dacă acesta este deplasat, consistent și eficient.

b) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1 \,|\, X_1 > 0)$. Este acesta consistent ?

c) Verificați dacă estimatorul aflat la punctul b) este sau nu nedeplasat.

Exercițiul 2 10p

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$ unde $\theta \in (0,1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de talie n din populația dată de repartiția lui X.

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului $\tilde{\theta}$ și determinați legea lui limită.

Exercițiul 3 10p

Calculați marginea Rao-Cramer pentru familia $\mathcal{N}(\mu, 1)$ unde μ este necunoscut. Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor și verificați dacă este eficient.

Exercițiul 4 10p

Considerăm următorul eșantion de talie 20 dintr-o populație Bernoulli de parametru $\theta \in (0,1)$:

`0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0`

a) Găsiți estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ și determinați informația lui Fisher $I(\theta)$.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{V}_\theta[X_1]$. Este acesta nedeplasat? Dar consistent? Justificați răspunsul.

c) Construiți un interval de încredere pentru $\hat{\theta}$ de nivel 95%.

2 iun 2018

1 ✓ 2 ✓ (feb 2017?)

3. Marginea Rao - Cramer pt $\mathcal{N}(\mu, 1)$

2 iun 2018

=> 1. $x_1, \dots, x_n$ eşantion de talie n dintr-o pop Pois de param. $\theta > 0$.

a) Estimat. de verosimilitate max. $\hat{\theta}$: deplasat, consistent, eficient.

4. $L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f_X(x) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta)$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta} \frac{1}{x_i!} \theta^{x_i} \Rightarrow l(\theta, x_1, \dots, x_n) = -n\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) + \ln(\theta) \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} l(\theta, x_1, \dots, x_n)$

$\frac{\partial}{d\theta} l(\theta, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{d\theta}\left(-n\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) + \ln(\theta) \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

=

$$= -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \; \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\theta^2} \sum_{1 \le i \le n} x_i \le 0 \Rightarrow \hat{\theta}_n \text{ punct de maxim, cum ce vaiem.}$$

$\left[-n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \frac{1}{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \Rightarrow \left[\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right]\right]$

Deplasare:

=> $\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\hat{\theta}_n = \overline{X}_n} = \frac{\sum X_i}{n}$

$b_\theta(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}] - \theta$

$\cancel{\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[x_i] = \dots}$ $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{1 \le i \le n} \mathbb{E}[X_i] \overset{(*)}{=}$

$\overset{(*)}{=} \frac{1}{n} \cdot n\theta = \theta \Leftrightarrow b_\theta(\hat{\theta}_n) = 0$

(*) Pentru o populaţie Poisson(θ), $\mathbb{E}_\theta[X] = Var_\theta(X) = \theta$.

Consistenţă:

$\hat{\theta}_n$ consistent $\Leftrightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$

Cum $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n \overset{LNM}{\Longrightarrow} \hat{\theta}_n \to \theta$.

LSMM

$\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X]$

LTMM

$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}[X]$

Optim: $I(\theta) = \frac{1}{\theta}$; MiRC $= \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\theta}} = \frac{\theta}{n}$

$Var(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta}{n}$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n$ este de dispersie minimă, deoarece varianţa sa atinge limita inf. Rao-Cramer $\Rightarrow \hat{\theta}_n$ optim (eficient).

iunie 2018

2. $\mathbb{P}(X=k)=A(k+1)\theta^k$, $\theta\in(0,1)$, $A\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$

a) $\mathbb{P}$ e funcție de probabilitate, deci $1=\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X=k)=A\sum_{k\geq 0}(k+1)\theta^k$

Fie $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{k\geq 0}x^k=\frac{1}{1-x}$. Atunci $f'(x)=\sum_{k\geq 1}kx^{k-1}=\sum_{k\geq 0}(k+1)x^k=$
$=\left(\frac{1}{1-x}\right)^2=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow 1=A\cdot f(\theta)=\frac{A}{(1-\theta)^2}$ i.e. $A=(1-\theta)^2$ și $\mathbb{P}(X=k)=(1-\theta)^2(k+1)\theta^k$, $k\geq 0$.

$E[X]=\sum_{k\geq 0}k(k+1)\theta^k(1-\theta)^2=(1-\theta)^2\theta\sum_{k\geq 1}k(k+1)\theta^{k-1}=(1-\theta)^2\theta f''(\theta)=$
$=(1-\theta)^2\theta\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'(\theta)=\frac{2\theta(1-\theta)^2}{(1-\theta)^3}=\frac{2\theta}{1-\theta}$

Similar, $E[X^2]=\sum_{k\geq 0}k^2(k+1)\theta^k(1-\theta)^2=\frac{2\theta}{1-\theta}+\frac{6\theta^2}{(1-\theta)^2}=\frac{(1-\theta)2\theta+6\theta}{(1-\theta)^2}=\frac{2\theta-2\theta^2+6\theta}{(1-\theta)^2}$
$=\frac{-2\theta^2+8\theta}{\cdots}=\frac{2(\theta^2+4\theta)}{\cdots}$

$Var(X)=E[X^2]-E^2[X]=\frac{6\theta}{(1-\theta)^2}+\frac{2\theta}{1-\theta}-\frac{4\theta^2}{(1-\theta)^2}=\frac{2\theta}{(1-\theta)^2}$

b) Pentru metoda momentelor:

$E[X]=\overline{X}_n$ i.e. $\frac{2\hat{\theta}_n}{1-\hat{\theta}_n}=\overline{X}_n\Rightarrow\overline{X}_n=(2+\overline{X}_n)\tilde{\theta}_n\Leftrightarrow\tilde{\theta}_n=\frac{\overline{X}_n}{2+\overline{X}_n}$.

$\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta}_n=0)=\mathbb{P}_\theta(\overline{X}_n=0)=\mathbb{P}_\theta(\sum X_i=0)=\mathbb{P}_\theta(X_i=0,1\leq i\leq n)\overset{iid}{=}(\mathbb{P}_\theta(X_1=0))^n=$
$=A^n=(1-\theta)^{2n}$

c) $L(\theta;x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\leq i\leq n}\mathbb{P}_\theta(X_i=x_i)=\prod(1-\theta)^2(x_i+1)\theta^{x_i}=(1-\theta)^{2n}\theta^{\sum x_i}\prod(1+x_i)$

$\Rightarrow l(\theta;x_1,\dots,x_n)=2n\log(1-\theta)+(\sum x_i)\log\theta+\sum\log(1+x_i)$

$\frac{\partial l}{\partial\theta}=-\frac{2n}{1-\theta}+\frac{\sum x_i}{\theta}=0\Leftrightarrow 2n\theta=-\theta\sum x_i+\sum x_i\Leftrightarrow\hat{\theta}_n(\overline{X}_n+2)=\overline{X}_n\Leftrightarrow$

$\hat{\theta}_n=\frac{\overline{X}_n}{2+\overline{X}_n}=\tilde{\theta}_n$; $\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}=-\frac{2n}{(1-\theta)^2}-\frac{\sum x_i}{\theta^2}\leq 0$

$\hat{\theta}_n-\theta=\frac{\overline{X}_n}{2+\overline{X}_n}=1-\theta-\frac{2}{2+\overline{X}_n}\xrightarrow{P}1-\theta-\frac{2}{2+E[X]}=1-\theta-\frac{2}{2+\frac{2\theta}{1-\theta}}=1-\theta-1-\theta=0$

2 iun 2018

1 ✓ 2 ✓ (feb 2017?)

3. Marginea Rao - Cramer pt $\mathcal{N}(\mu, 1)$

Vezi lab $\overline{XII}$ $MiRC = \frac{1}{n}$

Met. momentelor:

$X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mu$. Punem $\tilde{\mu}_n = \overline{X_n}$

$Var_\mu(\tilde{\mu}_n) = Var_\mu(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \cdot n Var(X_1) = \frac{1}{n} = MiRC \Rightarrow$ estimator ef.

4. a) 011 011 011 0011111 0000

Est. veros. max $\mathcal{E}$ $\mathcal{I}$

$X_1, \dots, X_n \sim Bern(\theta)$ $[n = 20]$

$\mathbb{P}_\theta(X_i = x_i) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$

$$L(\theta; x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n - \sum x_i} =$$

$$= (1-\theta)^n \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum x_i}$$

$$l(\theta; x_1, \dots, x_n) = \sum x_i \ln\theta + n \ln(1-\theta) - (\sum x_i) \ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n}{1-\theta} + \frac{\sum x_i}{1-\theta} = \sum x_i \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}\right) - \frac{n}{1-\theta}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{X_n}$$

$$\hat{\theta}_{20} = \frac{11}{20} = 0.55$$

$\mathcal{I}(\theta)$:

$$\log P_\theta(x) = x \ln\theta + \ln(1-\theta) - x \ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial^2 \log P_\theta(x)}{\partial \theta^2} = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{x}{(1-\theta)^2}$$

$$\text{Deci } \mathcal{I}_1(\theta) = -\mathbb{E}\left[-\frac{x}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{x}{(1-\theta)^2}\right]$$

$$= \frac{\mathbb{E}[x]}{\theta^2} + \frac{1}{(1-\theta)^2} - \frac{\mathbb{E}[x]}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{(1-\theta)^2} - \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

$$\Rightarrow J_n(\hat{\theta}) = \frac{n}{\theta(1-\theta)} \Rightarrow J_n(\hat{\theta}) = \frac{20}{\frac{11}{20} \cdot \frac{9}{20}} = \frac{8000}{99}$$