GEOMETRIE

SEMINAR 11

PARABOLA

Exc 11.1 $\mathcal{P}: \quad y^2 = 2x$

(a) Determinați focarul și dreapta directoare

(b) Scrieți ecuațiile tangentelor la $\mathcal{P}$ în punctele $(3, -\sqrt{6}), (8, 4)$.

(c) Scrieți ec. tg. la $\mathcal{P}$ din punctele $(2,5), (-2,-3), (-\alpha, 0), \alpha > 0$.

Rezolvare: (a) în forma canonică $\mathcal{P}: \; y^2 = 2px$

$$d: \; x = -\frac{p}{2}, \qquad F\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

în cazul nostru, $p = 1$.

$$d: \; x = -\frac{1}{2}, \qquad F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

(b) $(-\sqrt{6})^2 = 2 \cdot 3 \; \checkmark \Longrightarrow (3, -\sqrt{6}) \in \mathcal{P}$

$4^2 = 2 \cdot 8 \; \checkmark \Longrightarrow (8, 4) \in \mathcal{P}$

deci tangentele se obțin prin metoda dedublării

cazul nostru, $p = 1$

$t: \; y \cdot y_P = (x_P + x)$

$P(x_P, y_P)$

$$t_1: \; -\sqrt{6}\,y = x + 3$$

$$t_2: \; 4y = x + 8$$

(c) Dacă punctul este în interiorul parabolei $(y^2 < 2px)$ atunci nu există tangente din punct la parabolă.

Altfel, există.

<u>Obs</u>: toate punctele date în enunțul (c) sunt în exteriorul parabolei.

$(2,5)$. Ec parametrică a unei drepte prin $(2,5)$: $(2,5)+t(u,v)$, $t\in\mathbb{R}$

punctele de pe dreaptă au forma $(2+tu,\ 5+tv)$, $t\in\mathbb{R}$

Punem cond. ca inters. dreptei cu P să fie punct dublu.

Punctul $\in P \Rightarrow (5+tv)^2 = 2(2+tu)$

$$25+10tv+t^2v^2 = 4+2tu$$

$$v^2t^2+(10v-2u)t+21=0$$

are sol. dublă dacă $\Delta=0$.

$$(10v-2u)^2-4v^2\cdot 21=0$$

Obs: tangentele la parabolă nu pot fi orizontale, dacă parabola este în forma canonică. Deci putem presupune (pentru a simplifica calculele) că $v=1$.

$$(10-2u)^2-84=0$$

$$4u^2-40u+100-84=0$$

$$4u^2-40u+16=0$$

$$u^2-10u+4=0 \Rightarrow u=\frac{10\pm\sqrt{84}}{2}=5\pm\sqrt{21}$$

Am obținut tangentele: $t_{1,2}:\ (2,5)+t(5\pm\sqrt{21},\ 1)$, $t\in\mathbb{R}$

Pentru punctul $(-2,-3)$, se aplică exact aceeași metodă.

La fel pt. $(-\alpha, 0)$, $\alpha > 0$: Considerăm dreptele: $(-\alpha, 0) + t(u, v)$

$t \in \mathbb{R}$

Punctul $(-\alpha + tu, tv)$ de pe dreaptă este și pe parabola $\mathcal{P}$ (punct dublu)

$$t^2 v^2 = -2\alpha + 2tu$$
$$v^2 t^2 - 2ut + 2\alpha = 0$$

$$\Delta = 4u^2 - 4 \cdot 2\alpha \cdot v^2$$
$$= 4(u^2 - 2\alpha v^2) = 0$$

La fel, putem alege $v = 1$ (pentru că dreapta tangentă nu poate fi orizontală)

Obținem: $u^2 - 2\alpha = 0$

$$u = \pm\sqrt{2\alpha}$$

$$t_{1,2} : (-\alpha, 0) + t(\pm\sqrt{2\alpha}, 1), \; t \in \mathbb{R}.$$

Exc 11.2 Determinați, analitic și sintetic, locul geometric al punctelor din care tangentele la o parabolă sunt $\perp$.

Rez.: (vom face la fel ca la elipsă și hiperbolă)

Considerăm parabola în forma canonică $y^2 = 2px$

Pentru un $P \in \mathcal{P}$, $P = (u, v) \in \mathcal{P} \Rightarrow v^2 = 2pu$

tangenta în $P = (u, v)$ la $\mathcal{P}$: $vy = p(u + x)$

Dar $v \neq 0$ $\qquad y = \frac{p}{v}x + \frac{pu}{v}$

$$m = \frac{p}{v}, \quad n = \frac{pu}{v} = \frac{2pu}{2v} = \frac{v^2}{2v} = \frac{v}{2}$$

$$m \cdot n = \frac{p}{v} \cdot \frac{v}{2} = \frac{p}{2} \Longrightarrow n = \frac{p}{2m}$$

(m nu este 0, pentru că dreapta tg. nu e oriz.)

Considerăm acum $P = (x_P, y_P)$ în afara parabolei, din care tangentele $t_{1,2}$ la parabolă sunt $\perp$.

$$t_{1,2}: \ y = m_{1,2}x + \frac{p}{2m_{1,2}} \Longleftrightarrow \underbrace{2m_{1,2}^2 x - 2m_{1,2}y + p = 0}_{\text{coord lui } P(x_P, y_P) \text{ verifică ambele}}$$

$\{P\} = t_1 \cap t_2$. Deci $2m_{1,2}^2 x_P - 2m_{1,2} y_P + p = 0$

Dar $t_1 \perp t_2$, adică $m_1 \cdot m_2 = -1$

Cu relațiile Viète: $m_1 \cdot m_2 = \frac{p}{2x_P} = -1$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_P = -\frac{p}{2}}$$

Deci $P \in$ dreptei directoare a parabolei.

Exc 11.3 Determinați locul geometric al proiecțiilor focarului unei parabole pe tangentele la acea parabolă.

Rez.: $\mathcal{P}: y^2 = 2px$. $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

$P(x_P, y_P) \in \mathcal{P}$. $t_P: y_P \cdot y = p(x_P + x)$

$$\boxed{t_P: px - y_P \cdot y + px_P = 0}$$

Căutăm d_P a.i. $F \in d_P$ și $d_P \perp t_P$.

$$d_P: y_P \cdot x + p \cdot y + c = 0$$

pe c îl aflăm din $F \in d_P$: $y_P \cdot \frac{p}{2} + p \cdot 0 + c = 0$

$$c = -\frac{py_P}{2}$$

intersecția lor este proiecția lui F pe t_P.

$$\boxed{d_P: y_P \cdot x + p \cdot y - \frac{py_P}{2} = 0}$$

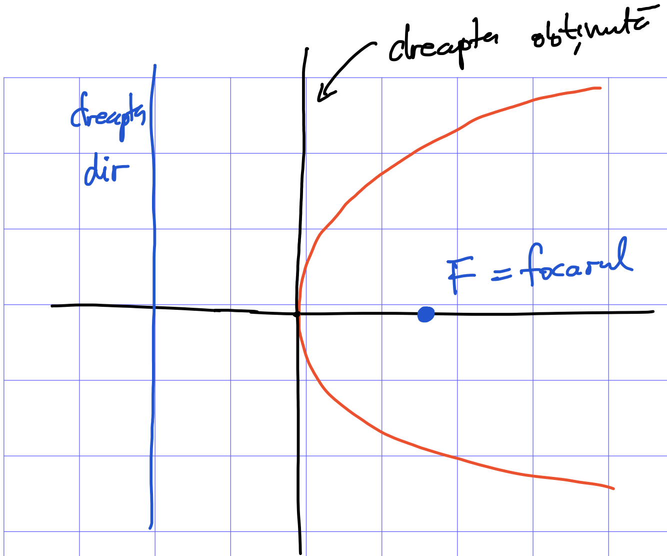
$$\begin{cases} px - y_P y + px_P = 0 & / \cdot p \\ y_P x + py - \frac{py_P}{2} = 0 & / \cdot y_P \end{cases}$$

$$p^2 x + p^2 x_P + y_P^2 x - \frac{py_P^2}{2} = 0$$

$$\underbrace{(p^2 + y_P^2)}_{\neq 0} x = \frac{py_P^2}{2} - p^2 x_P = \frac{p}{2}\underbrace{\left(y_P^2 - 2px_P\right)}_{=0,\ \text{deoarece } P \in \mathcal{P}} = 0$$

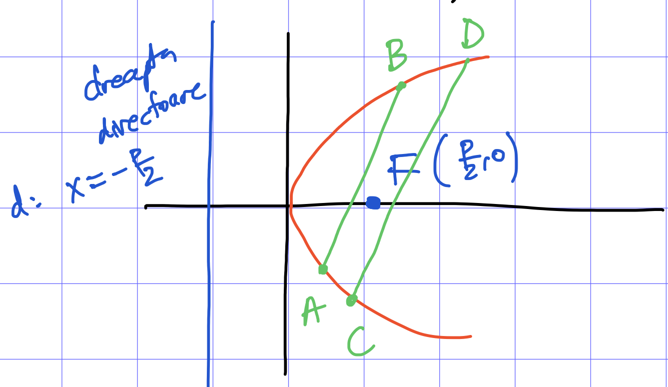
Deci $x = 0$.

Concluzie: Locul geometric căutat este dreapta tangentă la vf. parabolei.



Exc 11.4 Fie $\mathcal{P}$ o parabolă în plan și $A, B, C, D \in \mathcal{P}$ a.î. $AB \parallel CD$. Demonstrați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor AB și CD este $\perp$ pe dreapta directoare a lui $\mathcal{P}$.

demo.: Luăm $\mathcal{P}$ în forma canonică: $\mathcal{P}: y^2 = 2px$



Cazul 1:

$A(x_A, -\sqrt{2px_A})$

$B(x_B, \sqrt{2px_B})$

$C(x_C, -\sqrt{2px_C})$

$D(x_D, \sqrt{2px_D})$

$x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0$ (numai unul din cele 4 poate fi 0)

$$M = \text{mijl. lui } AB = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{-\sqrt{2px_A} + \sqrt{2px_B}}{2} \right)$$

$$N = \text{mijl. lui } CD = \left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{-\sqrt{2px_C} + \sqrt{2px_D}}{2} \right)$$

Vrem să demonstrăm că $MN \perp d \iff MN$ orizontală $\iff$

(unde $d: x = -\frac{p}{2}$ este verticală)

$$\Longleftrightarrow \quad y_M = y_N \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-\sqrt{2px_A}+\sqrt{2px_B}}{2} = \frac{-\sqrt{2px_C}+\sqrt{2px_D}}{2} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{x_B}-\sqrt{x_A} = \sqrt{x_D}-\sqrt{x_C}$$

vrem să demonstrăm.

Folosim acum $AB \parallel CD$,

adică $\left(x_B - x_A,\ \sqrt{2px_B}+\sqrt{2px_A}\right) \parallel \left(x_D - x_C,\ \sqrt{2px_D}+\sqrt{2px_C}\right)$,

adică
$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & \sqrt{2p}\left(\sqrt{x_B}+\sqrt{x_A}\right) \\ x_D - x_C & \sqrt{2p}\left(\sqrt{x_D}+\sqrt{x_C}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_B - x_A & \sqrt{x_B}+\sqrt{x_A} \\ x_D - x_C & \sqrt{x_D}+\sqrt{x_C} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \left(\sqrt{x_B}+\sqrt{x_A}\right)\left(\sqrt{x_B}-\sqrt{x_A}\right) & \sqrt{x_B}+\sqrt{x_A} \\ \left(\sqrt{x_D}+\sqrt{x_C}\right)\left(\sqrt{x_D}-\sqrt{x_C}\right) & \sqrt{x_D}+\sqrt{x_C} \end{vmatrix} = 0$$

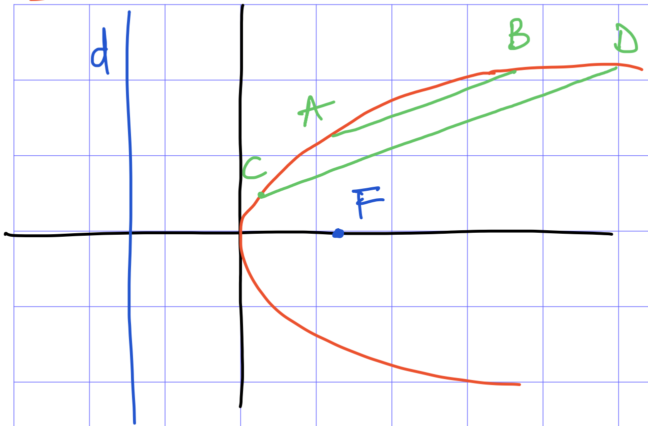
$$\Longleftrightarrow \left(\sqrt{x_B}+\sqrt{x_A}\right)\left(\sqrt{x_D}+\sqrt{x_C}\right) \begin{vmatrix} \sqrt{x_B}-\sqrt{x_A} & 1 \\ \sqrt{x_D}-\sqrt{x_C} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_B}+\sqrt{x_A} = 0 \quad \times \\ \text{SAU} \\ \sqrt{x_D}+\sqrt{x_C} = 0 \quad \times \\ \text{SAU} \\ \left(\sqrt{x_B}-\sqrt{x_A}\right) - \left(\sqrt{x_D}-\sqrt{x_C}\right) = 0 \end{cases}$$

nu se pot verifica, pentru că cel mult unul dintre x_A, x_B, x_C, x_D poate fi 0

$\Longrightarrow$ rămâne $\sqrt{x_B}-\sqrt{x_A} = \sqrt{x_D}-\sqrt{x_C}$, adică exact ce voiam ✓

Cazul 2:



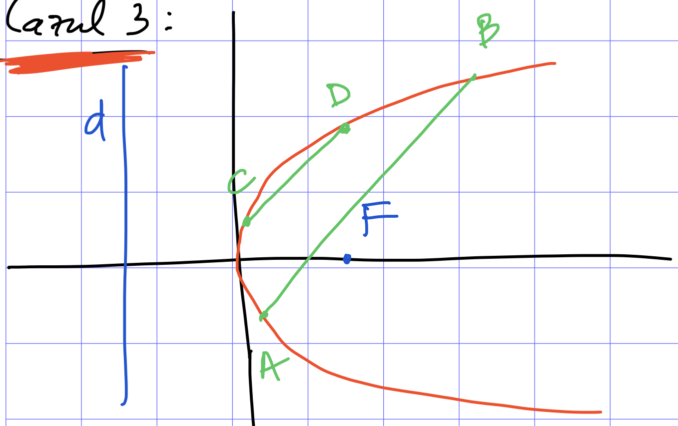
$A(x_A, \sqrt{2px_A})$

$B(x_B, \sqrt{2px_B})$

$C(x_C, \sqrt{2px_C})$

$D(x_D, \sqrt{2px_D})$

Cazul 3:



$A(x_A, -\sqrt{2px_A})$

$B(x_B, \sqrt{2px_B})$

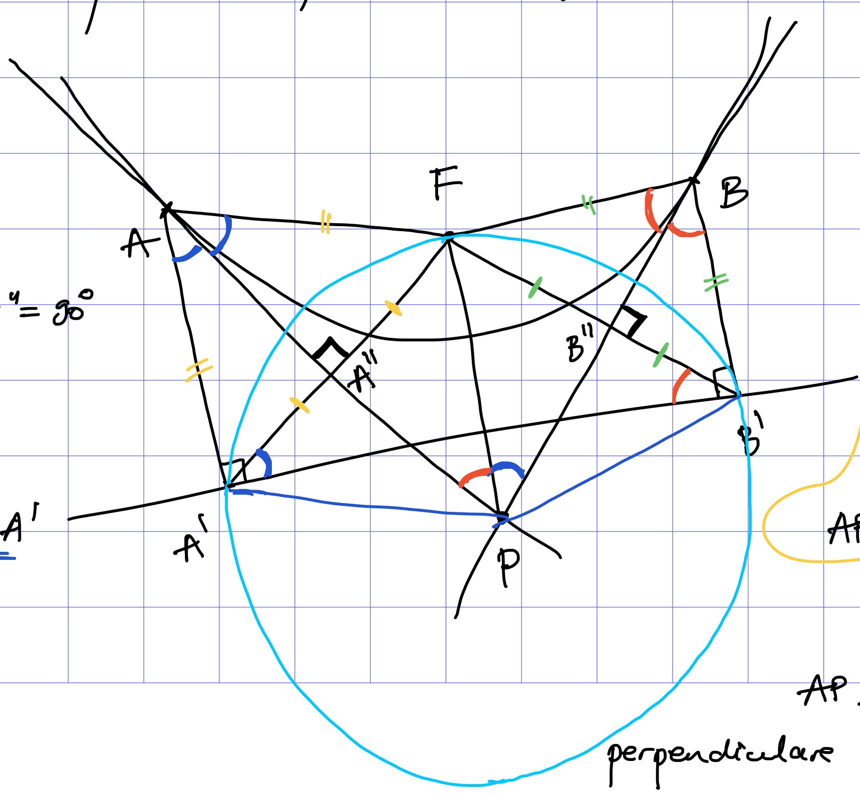
$C(x_C, \sqrt{2px_C})$

$D(x_D, \sqrt{2px_D})$

în cazurile 2 și 3 metoda de rezolvare e exact aceeași, se schimbă numai niște semne

---

Exc 11.5 (a) Demonstrați că dacă tangentele în punctele A și B la o parabolă cu focar F se intersectează în punctul P, atunci $\Delta AFP \sim \Delta PFB$.



$AF = AA'$

$BF = BB'$

$\sphericalangle A''AA' + \sphericalangle AA'A'' = 90^\circ$

$\sphericalangle AA'B' = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\sphericalangle A''A'B' = \sphericalangle A''AA'$

$\Delta AA'F$, $\Delta BB'F$ isoscele

AP, BP bisectoare

$\Downarrow$

$AP \perp A'F$, $BP \perp B'F$

perpendiculare pe mijloacele lui $A'F$ resp. $B'F$

Deducem că P este centrul cercului circumscris $\Delta FA'B'$ (este intersecția a 2 mediatoare)

Ne uităm la coarda FB' în acest cerc.

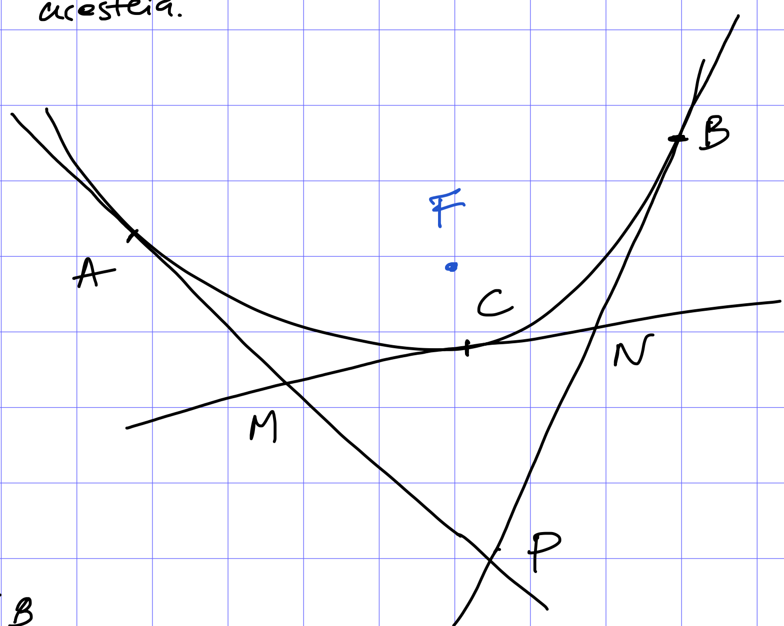
$$\sphericalangle FA'B' = \frac{1}{2} \sphericalangle FPB' = \sphericalangle FPB'' = \sphericalangle FPB$$

Similar (folosind coarda FA'), obținem: $\sphericalangle FB'A' = \sphericalangle FPA$

$\Rightarrow \Delta AFP \sim \Delta PFB$ ✓

(b) Demonstrați că cercul circumscris unui Δ format din intersecția a 3 tangente la o parabolă trece prin focarul acesteia.

A, B, C punctele de tangență, cu C "între" A și B



Vrem să demo. că $F \in$ cercului circumscris lui MNP, adică patrulaterul $FMPN$ inscriptibil.