01-02-2022 NUME ................................................GRUPA.........

# EXAMEN LA ANALIZA MATEMATICA I

**I.** 1) Fie

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|1 < x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \left\{\left(0, 2^{-n}\right) \;\big|\; n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Determinati interiorul, aderenta si multimea punctelor de acumulare ale multimii $A$. Decideti daca $A$ este inchisa, deschisa sau compacta. Decideti daca aderenta multimii $A$ este compacta. Justificati raspunsurile!

2) Aratati ca daca $A \subset \mathbb{R}^3$ este o multime conexa atunci aderenta multimii $A$ este o multime conexa.

**II.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{daca } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x} - x, & \text{daca } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Studiati continuitatea si derivabilitatea lui $f$.

2) Studiati uniform continuitatea functiei $f$ pe $\mathbb{R}$ si pe $(0, \infty)$.

**III.** 1) Pentru $n \geq 1$, fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{3n^2 - ne^{3x} + +e^{6x}}{3n^2 + e^{6x}}$$

Sa se studieze convergenta simpla si convergenta uniforma a sirului $(f_n)_{n\geq 1}$ pe $(-\infty, 0)$ si $[1, \infty)$.

2) Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un sir de functii reale definite pe $\mathbb{R}$ care converge uniform catre functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pentru $n \geq 1$, fie $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $h_n(x) = f_n(x) \cos(g(x))$.

Este adevarat ca sirul de functii $(h_n)_{n\geq 1}$ este uniform convergent pe $\mathbb{R}$? Justificati raspunsul!

**IV.** 1) Studiati convergenta seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+2}} \cdot \ln\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2}\right).$$

2) Studiati convergenta sirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea ca

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{cos \frac{1}{n}}{n^2 + n}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

**Nota.** Timpul de lucru este de 2 ore. Fiecare subiect se noteaza cu note de la 1 la 10. Nota obtinuta la aceasta lucrare este media aritmetica a celor 4 note. Toate raspunsurile trebuie justificate!

Rezolvarile trebuie scanate si trimise impreuna cu lista de subiecte sub forma unui **singur** fisier pdf la adresele radu-bogdan.munteanu@g.unibuc.ro si radu.munteanu@unibuc.ro.