מבוא לרשתות מחשבים - 236334
תרגיל בית 3 – חלק יבש – פתרון

<u>מגישים</u>

רוני נודלמן – 209120112

דניאל לחינו - 314968744

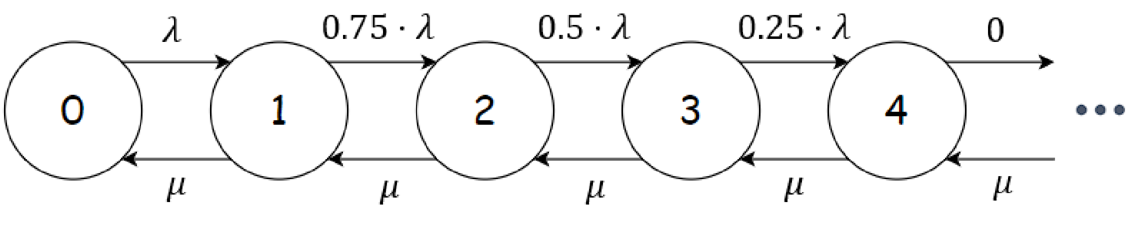
להלן תוצאות הרצת הסימולטור עבור שני הקלטים הנתונים. כל קלט הורץ פעם אחת עם $T = 1000$ ופעם אחת עם $T = 100,000$.

```
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/236334-hw3$ python3.8 simulator.py 100000 10 15 1 0.75 0.5 0.25 0
795551 202902 100000.09185404281 47081.63378960446 31297.274472528094 15627.492351206223 5141.184161644004 852.5070790600319 0.4708159054326012 0.312972
45724742606 0.15627477996735895 0.05141179439262841 0.008525062959985338 0.035783226859967904 0.06651799578460507 7.955502692549151
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/236334-hw3$ python3.8 simulator.py 100000 10 1 1 0.9 0.8 0
100050 900565 100000.40987789839 124.65566256312215 1240.1719437141237 10955.410870129293 87680.17140149185 0.0012465515162920643 0.012401668605442591 0
.10955365966505509 0.8767981202132102 1.8622219365375958 0.9982490703792968 1.0004958991884347
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/236334-hw3$ python3.8 simulator.py 1000 10 15 1 0.75 0.5 0.25 0
7860 2073 999.6425704720187 469.16917151063683 308.04945873722704 158.83404617304814 55.21417896014063 8.375715090966086 0.4693369263866994 0.3081596040
790559 0.15889083845043603 0.05523392119452174 0.008378709889286906 0.03745414114074143 0.06749025432078651 7.862810400610096
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/236334-hw3$ python3.8 simulator.py 1000 10 1 1 0.9 0.8 0
947 9004 999.963323726132 1.8470684232904024 14.19348923749376 103.89727293429496 880.0254931310528 0.0018471361693624215 0.014194009820885235 0.1039010
8363889368 0.8800577703708586 1.968266377187328 1.053895842241567 0.9470347337052559
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/236334-hw3$
```

נפתור את הסעיפים עבור הקלט הראשון:

$T = 1000$
$\lambda = 10$
$\mu = 15$
$p_0 = 1$
$p_1 = 0.75$
$p_2 = 0.5$
$p_3 = 0.25$
$p_4 = 0$

1. להלן דיאגרמת המצבים:



2. המערכת הינה יציבה כיוון שבכל זמן נתון מספר ההודעות שנמצאות בחוצץ הינו סופי.

3. נחשב את הסתברויות המצבים:

$$\begin{cases} P_0 \cdot \lambda = P_1 \cdot \mu \\ P_1 \cdot 0.75 \cdot \lambda = P_2 \cdot \mu \\ P_2 \cdot 0.5 \cdot \lambda = P_3 \cdot \mu \\ P_3 \cdot 0.25 \cdot \lambda = P_4 \cdot \mu \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \end{cases}$$

נבטא את כל אחת מההסתברויות כפונקציה של P_0:

$$\begin{cases} P_0 = P_0 \\ P_1 = P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu} \\ P_2 = P_1 \cdot \frac{0.75 \cdot \lambda}{\mu} = \overbrace{P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}}^{P_1} \cdot \frac{0.75 \cdot \lambda}{\mu} = P_0 \cdot 0.75 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \\ P_3 = P_2 \cdot \frac{0.5 \cdot \lambda}{\mu} = \overbrace{P_0 \cdot 0.75 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}^{P_2} \cdot \frac{0.5 \cdot \lambda}{\mu} = P_0 \cdot 0.75 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \\ P_4 = P_3 \cdot \frac{0.25 \cdot \lambda}{\mu} = \overbrace{P_0 \cdot 0.75 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}^{P_3} \cdot \frac{0.25 \cdot \lambda}{\mu} = P_0 \cdot 0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.25 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \end{cases}$$

נציב את ההסתברויות שקיבלנו לתוך המשוואה האחרונה ונקבל:

$$P_0 + \overbrace{P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}}^{P_1} + \overbrace{P_0 \cdot 0.75 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}^{P_2} + \overbrace{P_0 \cdot 0.75 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}^{P_3} + \overbrace{P_0 \cdot 0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.25 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}^{P_4} = 1$$

לאחר העברת אגפים נקבל:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + 0.75 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 0.75 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + 0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.25 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4} = \frac{54}{115} = 0.469$$

כעת נציב את ערכו של P_0 בכל אחת מההסתברויות ונקבל:

$$\begin{cases} P_0 = \frac{54}{115} = 0.469 \\ P_1 = \frac{36}{115} = 0.313 \\ P_2 = \frac{18}{115} = 0.156 \\ P_3 = \frac{6}{115} = 0.052 \\ P_4 = \frac{1}{115} = 0.008 \end{cases}$$

4. קצב ההגעה הממוצע של הודעות לחוצץ הינו:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda \cdot p_i \cdot P_i = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot P_i = 10 \cdot \left(1 \cdot \frac{54}{115} + 0.75 \cdot \frac{36}{115} + 0.5 \cdot \frac{18}{115} + 0.25 \cdot \frac{6}{115} + 0 \cdot \frac{1}{115} + 0 + \cdots\right) = \frac{183}{23} = 7.956$$

5. לפי חוק ליטל מתקיים $\bar{N} = \bar{\lambda} \cdot \bar{T}$.
נחשב את $\bar{N}$:

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P_i = 0 \cdot \frac{54}{115} + 1 \cdot \frac{36}{115} + 2 \cdot \frac{18}{115} + 3 \cdot \frac{6}{115} + 4 \cdot \frac{1}{115} + 5 \cdot 0 + \cdots = \frac{94}{115} = 0.817$$

לכן מתקיים:

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{94}{115}}{\frac{183}{23}} = \frac{94}{915} = 0.102$$

6. כפי שראינו בתרגול, תוחלת זמן ההמתנה $\overline{T_W}$ מקיימת:

$$\overline{T_W} = \bar{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{94}{915} - \frac{1}{15} = \frac{11}{305} = 0.036$$

7. להלן תוצאות הסימולטור לאחר הרצתו עם הקלט הנתון (פרט לכך ש- $T = 100{,}000$ וזאת על מנת להקטין את ההשפעה של האקראיות):

```
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/236334-hw3$ python3.8 simulator.py 100000 10 15 1 0.75 0.5 0.25 0
795551 202902 100000.09185404281 47081.63378960446 31297.274472528094 15627.492351206223 5141.184161644004 852.5070790600319 0.4708159054326012 0.312972
45724742606 0.15627477996735895 0.05141179439262841 0.008525062959985338 0.035783226859967904 0.06651799578460507 7.955502692549151
```

אכן ניתן לראות כי הוא מסכים עם החישובים התיאורתיים.

הסתברויות המצבים לפי הסימולטור:

$$\begin{cases} P_0 = 0.4708 \\ P_1 = 0.3129 \\ P_2 = 0.1562 \\ P_3 = 0.0514 \\ P_4 = 0.0085 \end{cases}$$

ממוצע קצב הגעת ההודעות לחוצץ לפי הסימולטור:

$$\overline{\lambda_A} = 7.9555$$

תוחלת זמן השהייה (כולל את זמן ההמתנה ואת זמן השירות) לפי הסימולטור:

$$\bar{T} = 0.0357 + 0.0665 = 0.1022$$

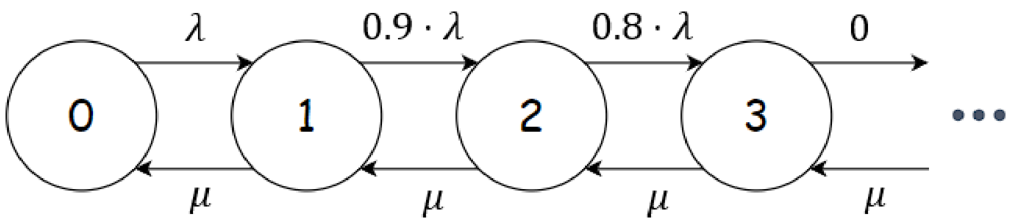
תוחלת זמן ההמתנה לפי הסימולטור:

$$\overline{T_W} = 0.0357$$

כעת, נפתור את הסעיפים עבור הקלט השני:

$$T = 1000$$
$$\lambda = 10$$
$$\mu = 1$$
$$p_0 = 1$$
$$p_1 = 0.9$$
$$p_2 = 0.8$$
$$p_3 = 0$$

1. להלן דיאגרמת המצבים:



2. המערכת הינה יציבה כיוון שבכל זמן נתון מספר ההודעות שנמצאות בחוצץ הינו סופי.

3. נחשב את הסתברויות המצבים:

$$\begin{cases} P_0 \cdot \lambda = P_1 \cdot \mu \\ P_1 \cdot 0.9 \cdot \lambda = P_2 \cdot \mu \\ P_2 \cdot 0.8 \cdot \lambda = P_3 \cdot \mu \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \end{cases}$$

נבטא את כל אחת מההסתברויות כפונקציה של P_0:

$$\begin{cases} P_0 = P_0 \\ P_1 = P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu} \\ P_2 = P_1 \cdot \frac{0.9 \cdot \lambda}{\mu} = \overbrace{P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}}^{P_1} \cdot \frac{0.9 \cdot \lambda}{\mu} = P_0 \cdot 0.9 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \\ P_3 = P_2 \cdot \frac{0.8 \cdot \lambda}{\mu} = \overbrace{P_0 \cdot 0.9 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}^{P_2} \cdot \frac{0.8 \cdot \lambda}{\mu} = P_0 \cdot 0.9 \cdot 0.8 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \end{cases}$$

נציב את ההסתברויות שקיבלנו לתוך המשוואה האחרונה ונקבל:

$$P_0 + \overbrace{P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}}^{P_1} + \overbrace{P_0 \cdot 0.9 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}^{P_2} + \overbrace{P_0 \cdot 0.9 \cdot 0.8 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}^{P_3} = 1$$

לאחר העברת אגפים נקבל:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + 0.9 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3} = \frac{1}{821}$$

כעת נציב את ערכו של P_0 בכל אחת מההסתברויות ונקבל:

$$\begin{cases} P_0 = \frac{1}{821} = 0.0012 \\ P_1 = \frac{10}{821} = 0.0121 \\ P_2 = \frac{90}{821} = 0.1096 \\ P_3 = \frac{720}{821} = 0.8769 \end{cases}$$

4. קצב ההגעה הממוצע של הודעות לחוצץ הינו:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda \cdot p_i \cdot P_i = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot P_i$$
$$= 10 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{821} + 0.9 \cdot \frac{10}{821} + 0.8 \cdot \frac{90}{821} + 0 \cdot \frac{720}{821} + 0 + \cdots\right) = \frac{820}{821}$$
$$= 0.9987$$

5. לפי חוק ליטל מתקיים $\bar{N} = \bar{\lambda} \cdot \bar{T}$.

נחשב את $\bar{N}$:

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P_i = 0 \cdot \frac{1}{821} + 1 \cdot \frac{10}{821} + 2 \cdot \frac{90}{821} + 3 \cdot \frac{720}{821} + 4 \cdot 0 + \cdots = \frac{2350}{821} = 2.862$$

לכן מתקיים:

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{2350}{821}}{\frac{820}{821}} = \frac{235}{82} = 2.8658$$

6. כפי שראינו בתרגול, תוחלת זמן ההמתנה $\overline{T_W}$ מקיימת:

$$\overline{T_W} = \bar{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{235}{82} - \frac{1}{1} = \frac{153}{82} = 1.8658$$

7. להלן תוצאות הסימולטור לאחר הרצתו עם הקלט הנתון (פרט לכך ש- $T = 100{,}000$ וזאת על מנת להקטין את ההשפעה של האקראיות):

```
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/236334-hw3$ python3.8 simulator.py 100000 10 1 1 0.9 0.8 0
100050 900565 100000.40987789839 124.65566256312215 1240.1719437141237 10955.410870129293 87680.17140149185 0.0012465515162920643 0.012401668605442591 0
.10955365966505509 0.8767981202132102 1.8622219365375958 0.9982490703792968 1.0004958991884347
```

אכן ניתן לראות כי הוא מסכים עם החישובים התיאורתיים.

הסתברויות המצבים לפי הסימולטור:

$$\begin{cases} P_0 = 0.0012 \\ P_1 = 0.0124 \\ P_2 = 0.1095 \\ P_3 = 0.8767 \end{cases}$$

ממוצע קצב הגעת ההודעות לחוצץ לפי הסימולטור:

$$\overline{\lambda_A} = 1.0004$$

תוחלת זמן השהייה (כולל את זמן ההמתנה ואת זמן השירות) לפי הסימולטור:

$$\bar{T} = 1.8622 + 0.9982 = 2.8604$$

תוחלת זמן ההמתנה לפי הסימולטור:

$$\overline{T_W} = 1.8622$$