

מבוא לרשתות מחשבים - 236334 תרגיל בית 3 – חלק יבש – פתרון

מגשים

רוני נודלמן – 209120112

דניאל לחינו - 314968744

להלן תוצאות הרצת הסימולטור:

```
rony@rony-PC: ~/Workspace/technion/236334/hw3
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/hw3$ ./simulator 1000 10 1 1 0.9 0.8 0
1052 9005 1000.2222739435388 0.7331101354717582 10.478817265390727 112.60008080081133 876.41026574186
49 0.0007329472204026735 0.010476488614951844 0.11257505829865917 0.8762155058659863 1.77186040304875
08 0.9486862766859676 1.0517662197746498
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/hw3$ ./simulator 100000 10 1 1 0.9 0.8 0
99414 899378 100002.00460413093 118.27711149044072 1200.1857805352142 10964.11896404783 87719.4227480
5745 0.0011827474055010581 0.012001617220437563 0.10963899181271931 0.8771766435613422 1.874998888330
8006 1.0046849690336856 0.9941200718279737
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/hw3$ ./simulator 1000 10 15 1 0.75 0.5 0.25 0
7917 2047 1000.3860956272433 464.46932985306137 311.70471387457474 159.23532694408462 55.287698197240
87 9.689026758281832 0.46429006948745977 0.3115844124953931 0.15917387060867122 0.05526636009727366 0
.009685287311202382 0.03775139618711783 0.06769189917572087 7.913944460649496
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/hw3$ ./simulator 100000 10 15 1 0.75 0.5 0.25 0
796395 205335 100000.28114648577 46921.05299091374 31300.56049553868 15659.102357130068 5253.46903932
7132 866.0962635761332 0.4692092107439305 0.3130047249536023 0.15659058332237863 0.05253454269425072
0.008660938285837708 0.03611816903234291 0.06664937393576305 7.963927609697397
rony@rony-PC:~/Workspace/technion/236334/hw3$
```

נפתור את הסעיפים עבור הקלט הראשון:

$$T = 1000$$

$$\lambda = 10$$

$$\mu = 15$$

$$p_0 = 1$$

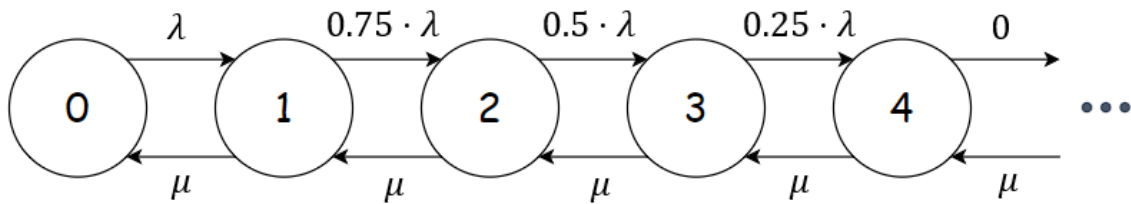
$$p_1 = 0.75$$

$$p_2 = 0.5$$

$$p_3 = 0.25$$

$$p_4 = 0$$

1. להלן דיאגרמת המצבים:



2. המערכת הינה יציבה כיוון שבכל זמן נתון מספר ההודעות שנמצאות בחוץ הינו סופי.

3. נחשב את הסתברויות המצבים:

$$\begin{cases} P_0 \cdot \lambda = P_1 \cdot \mu \\ P_1 \cdot 0.75 \cdot \lambda = P_2 \cdot \mu \\ P_2 \cdot 0.5 \cdot \lambda = P_3 \cdot \mu \\ P_3 \cdot 0.25 \cdot \lambda = P_4 \cdot \mu \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \end{cases}$$

נבטא את כל אחת מההסתברויות כפונקציה של P_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = P_0 \\ P_1 = P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu} \\ P_2 = P_1 \cdot \frac{0.75 \cdot \lambda}{\mu} = \overbrace{P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}}^{P_1} \cdot \frac{0.75 \cdot \lambda}{\mu} = P_0 \cdot 0.75 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \\ P_3 = P_2 \cdot \frac{0.5 \cdot \lambda}{\mu} = \overbrace{P_0 \cdot 0.75 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}^{P_2} \cdot \frac{0.5 \cdot \lambda}{\mu} = P_0 \cdot 0.75 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \\ P_4 = P_3 \cdot \frac{0.25 \cdot \lambda}{\mu} = \overbrace{P_0 \cdot 0.75 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}^{P_3} \cdot \frac{0.25 \cdot \lambda}{\mu} = P_0 \cdot 0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.25 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \end{array} \right.$$

נציב את ההסתברויות שקיבלנו לתוך המשוואה האחרונה ונקבל:

$$P_0 + \overbrace{P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}}^{P_1} + \overbrace{P_0 \cdot 0.75 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}^{P_2} + \overbrace{P_0 \cdot 0.75 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}^{P_3} + \overbrace{P_0 \cdot 0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.25 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}^{P_4} = 1$$

לאחר העברת אגפים נקבל:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + 0.75 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 0.75 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + 0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.25 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4} = \frac{54}{115} = 0.469$$

נעת נציב את ערכו של P_0 בכל אחת מההסתברויות ונקבל:

$$\begin{cases} P_0 = \frac{54}{115} = 0.469 \\ P_1 = \frac{36}{115} = 0.313 \\ P_2 = \frac{18}{115} = 0.156 \\ P_3 = \frac{6}{115} = 0.052 \\ P_4 = \frac{1}{115} = 0.008 \end{cases}$$

4. קצב ההגעה הממוצע של הודעות לחוצץ הינו:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda \cdot p_i \cdot P_i = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot P_i \\ &= 10 \cdot \left(1 \cdot \frac{54}{115} + 0.75 \cdot \frac{36}{115} + 0.5 \cdot \frac{18}{115} + 0.25 \cdot \frac{6}{115} + 0 \cdot \frac{1}{115} + 0 + \dots \right) \\ &= \frac{183}{23} = 7.956 \end{aligned}$$

5. לפי חוק ליטל מתקיים $\bar{N} = \bar{\lambda} \cdot \bar{T}$.
נחשב את \bar{N} :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P_i = 0 \cdot \frac{54}{115} + 1 \cdot \frac{36}{115} + 2 \cdot \frac{18}{115} + 3 \cdot \frac{6}{115} + 4 \cdot \frac{1}{115} + 5 \cdot 0 + \dots = \frac{94}{115} \\ &= 0.817 \end{aligned}$$

לכן מתקיים:

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{94}{115}}{\frac{183}{23}} = \frac{94}{915} = 0.102$$

6. כפי שראינו בתרגול, תוחלת זמן ההמתנה $\overline{T_W}$ מקיימת:

$$\overline{T_W} = \bar{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{94}{915} - \frac{1}{15} = \frac{11}{305} = 0.036$$

כעת, נפתור את הסעיפים עבור הקלט השני:

$$T = 1000$$

$$\lambda = 10$$

$$\mu = 1$$

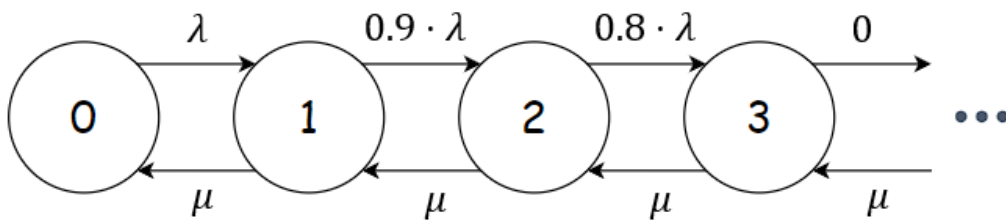
$$p_0 = 1$$

$$p_1 = 0.9$$

$$p_2 = 0.8$$

$$p_3 = 0$$

1. להלן דיאגרמת המצבים:



2. המערכת הינה יציבה כיוון שבכל זמן נתון מספר ההודעות שנמצאות בחוץ הינו סופי.

3. נחשב את הסתברויות המצבים:

$$\begin{cases} P_0 \cdot \lambda = P_1 \cdot \mu \\ P_1 \cdot 0.9 \cdot \lambda = P_2 \cdot \mu \\ P_2 \cdot 0.8 \cdot \lambda = P_3 \cdot \mu \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \end{cases}$$

נבטא את כל אחת מהסתברויות כפונקציה של P_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = P_0 \\ P_1 = P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu} \\ P_2 = P_1 \cdot \frac{0.9 \cdot \lambda}{\mu} = \overbrace{P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}}^{P_1} \cdot \frac{0.9 \cdot \lambda}{\mu} = P_0 \cdot 0.9 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \\ P_3 = P_2 \cdot \frac{0.8 \cdot \lambda}{\mu} = \overbrace{P_0 \cdot 0.9 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}^{P_2} \cdot \frac{0.8 \cdot \lambda}{\mu} = P_0 \cdot 0.9 \cdot 0.8 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \end{array} \right.$$

נציב את ההסתברויות שקיבלנו לתוך המשוואה האחרונה ונקבל:

$$P_0 + \overbrace{P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}}^{P_1} + \overbrace{P_0 \cdot 0.9 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}^{P_2} + \overbrace{P_0 \cdot 0.9 \cdot 0.8 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}^{P_3} = 1$$

לאחר העברת אגפים נקבל:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + 0.9 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3} = \frac{1}{821}$$

נעת נציב את ערכו של P_0 בכל אחת מההסתברויות ונקבל:

$$\begin{cases} P_0 = \frac{1}{821} = 0.0012 \\ P_1 = \frac{10}{821} = 0.0121 \\ P_2 = \frac{90}{821} = 0.1096 \\ P_3 = \frac{720}{821} = 0.8769 \end{cases}$$

4. קצב ההגעה הממוצע של הודעות לחוצץ הינו:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda \cdot p_i \cdot P_i = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot P_i \\ &= 10 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{821} + 0.9 \cdot \frac{10}{821} + 0.8 \cdot \frac{90}{821} + 0 \cdot \frac{720}{821} + 0 + \dots \right) = \frac{820}{821} \\ &= 0.9987 \end{aligned}$$

5. לפי חוק ליטל מתקיים $\bar{N} = \bar{\lambda} \cdot \bar{T}$.
נחשב את \bar{N} :

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P_i = 0 \cdot \frac{1}{821} + 1 \cdot \frac{10}{821} + 2 \cdot \frac{90}{821} + 3 \cdot \frac{720}{821} + 4 \cdot 0 + \dots = \frac{2350}{821} = 2.862$$

לכן מתקיים:

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{2350}{821}}{\frac{820}{821}} = \frac{235}{82} = 2.8658$$

6. כפי שראינו בתרגול, תוחלת זמן ההמתנה $\overline{T_W}$ מקיימת:

$$\overline{T_W} = \bar{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{235}{82} - \frac{1}{1} = \frac{153}{82} = 1.8658$$