מבוא לבינה מלאכותית – 236501
תרגיל בית 1 – פתרון

מגישים:

רוני נודלמן – 209120112

רן ברשינסקי – 208387324

משימה 1

לא קיים פתרון לבעיית המבוך המיוצגת ע"י $M_{example}$.
נראה כי כל הצעדים האפשריים מובילים למבוי סתום:
מצד אחד, אם הרובוט תחילה ילך קדימה הוא יתקע: הוא לא יוכל להמשיך לצעוד קדימה ומצד שני גם לא יוכל להסתובב ימינה ולא שמאלה בגלל הקיר משמאלו.
מצד שני, הרובוט יכול במצבו ההתחלתי לפנות ימינה אך לאחר מכן הוא יהיה חייב לפנות שמאלה בחזרה למצבו ההתחלתי. זאת משום שיש קיר שמונע ממנו להמשיך להסתובב ימינה ובגלל דופן המבוך הוא לא יוכל להמשיך ישר.

משימה 2

כן, קיימת בעיית מבוך כך שבגרף המצבים שלה קיימים מעגלים.
נראה כי בגרף המצבים של בעיית המבוך $M_{example}$ ייתכנו מעגלים.
תחילה, הרובוט יכול לפנות ימינה ולאחר מכן לפנות שמאלה בחזרה למצב ההתחלתי. כלומר התקבל מעגל היות והרובוט חזר לנקודת המוצא שלו. לכן, רצף האופרטורים שיוצר מעגל הוא:

$$rotate\_right \rightarrow rotate\_left$$

למעשה, בכל בעיה שבה הרובוט יכול לפנות ימינה או שמאלה ממצב מסוים, קיים מעגל. זאת כיוון שהוא יוכל לאחר הפנייה, לבצע פנייה בכיוון ההפוך. כלומר תתקבל פעולת $undo$.

משימה 3

לא, קיימים מרחבי חיפוש שבהם לא ניתן להגיע לבור.
נראה דוגמה למבוך שבו לא ניתן להגיע לבור:

3		4
1		2

מהמצב ההתחלתי הרובוט יוכל להסתובב ימינה או שמאלה. לאחר מכן, הוא יוכל שוב להסתובב ימינה או שמאלה ולהמשיך כך לנצח. כלומר בכל מצב, הרובוט יוכל תמיד לפנות ימינה או שמאלה.

משימה 6

1. הסיבה לשוני במחירי המסלולים הינה שהאלגוריתם BFS מחפש את המסלול בקצר ביותר, ללא התחשבות במחיר הקשתות. לעומת זאת, האלגוריתם UCS מחשב את המסלול הזול ביותר, עם התחשבות במחיר הקשתות. במבוכים 1,3 המסלול הקצר ביותר אינו המסלול הזול ביותר ולכן BFS מחזיר מסלול יקר יותר מהמסלול שאותו מחזיר UCS.
2. בבדי שמחיר המסלול המוחזר ע"י BFS יהיה זהה למחירו של המסלול המוחסר ע"י UCS, מחיר הקשתות בגרף צריך להיות אחיד. באופן זה, המסלול הקצר ביותר בהכרח יהיה גם הזול ביותר, היות ואין הבדל במחירי הקשתות.

משימה 8

1. נראה כי היוריסטיקה לא קבילה ע"י הדוגמה הבאה:

	3	
1		2
	4	

נגדיר את הסימונים הבאים:
s – המצב ההתחלתי
t – מצב המטרה
f – מחיר אופרטור ההתקדמות
r – מחיר אופרטור הסיבוב

הפתרון האופטימלי הינו הפעלת האופרטור r_R (סיבוב ימינה) פעם אחת ולכן:

$$h^*(s) = r$$

לפי הגדרת היוריסטיקה מתקיים:

$$h(s) = \Delta t \cdot f = 2 \cdot f$$

לכן אם הבעייה תוגדר כך שיתקיים $2 \cdot f > r$ אז יתקיים:

$$h(s) = 2 \cdot f > r = h^*(s)$$

כלומר נקבל כי היוריסטיקה אינה קבילה.
נגדיר כעת תנאי הכרחי ומספיק על מחיר אופרטור הסיבוב בבדי שהיוריסטיקה תהיה קבילה:

$$r \geq (k-1) \cdot f$$

כאשר k הינו אורך הרובוט.

משימה 9

1. נוכיח כי יוריסטיקה זו קבילה. כלומר נראה כי לכל מצב s מתקיים:

$$h(s) \leq h^*(s)$$

יהי s מצב כלשהו ונסמן ב-d את מרחק מנהטן בין מרכז הרובוט במצב s לבין מרכז הרובוט במצב המטרה. לפי הגדרת היוריסטיקה מתקיים:

$$h(s) = d \cdot f$$

נזכיר כי f הינו מחיר אופרטור ההתקדמות וכי r הוא מחיר אופרטור הסיבוב.
נניח כי המסלול האופטימלי ממצב s למצב המטרה דורש a צעדים קדימה ו-b צעדי סיבוב. כלומר מתקיים:

$$h^*(s) = a \cdot f + b \cdot r$$

כיוון שלאחר הפעלת אופרטור הסיבוב, מרכז הרובוט אינו משתנה, נסיק כי על מנת להגיע ממצב s למצב המטרה דרושים לפחות d צעדי התקדמות. בפרט, גם אם מבצעים את המסלול האופטימלי, כמות הפעלות אופרטור ההתקדמות יהיה לפחות d. כלומר מתקיים:

$$d \leq a$$

כיוון שמתקיים $b \cdot r \geq 0$ אז נקבל בסך הכל:

$$h(s) = d \cdot f \leq a \cdot f + b \cdot r = h^*(s)$$

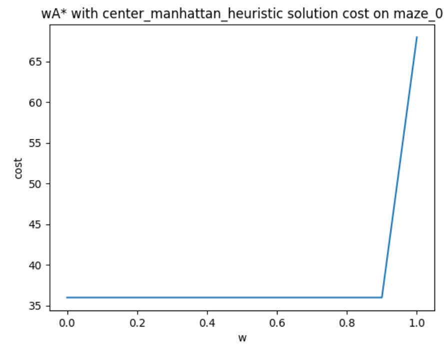
כלומר מתקיים $h(s) \leq h^*(s)$ ולכן היורסטיקה קבילה.

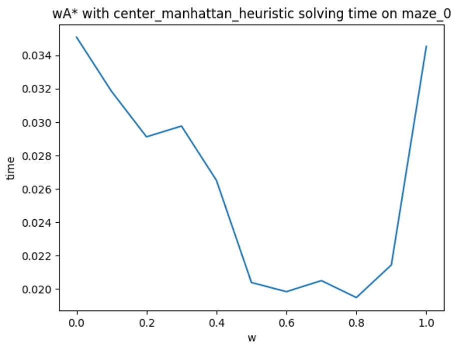
משימה 10

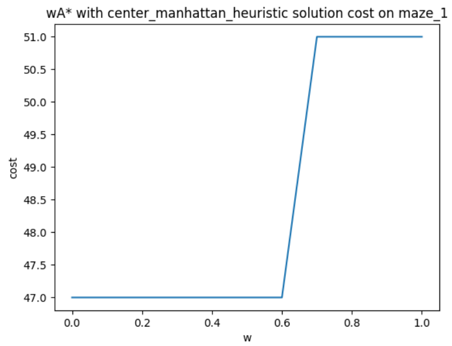
2. כפי שניתן לראות מהגדרת f:

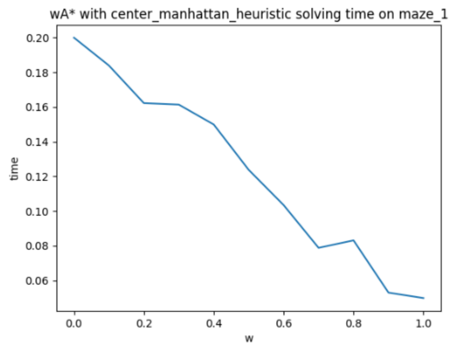
$$f = (1 - w) \cdot g + w \cdot h$$

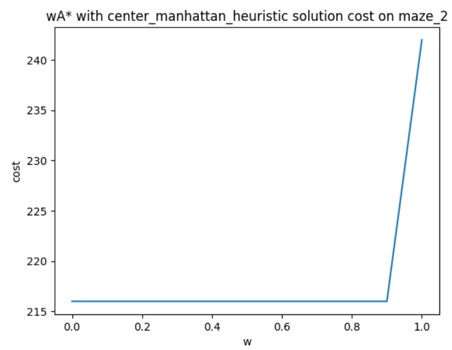
כאשר ערכו של w עולה, כך משקלה של היוריסטיקה עולה, ועל כן, אלגוריתם החיפוש נהפך ליותר חמדן. כלומר, האלגוריתם לא בהכרח מוצא פתרון אופטימלי וככל שערכו של w גבוה יותר כך עולים הסיכויים כי עלות הפתרון תהיה גבוהה יותר. בנוסף, זמן הריצה של האלגוריתם עשוי לפחות בכל שמעלים את ערכו של w. אולם, נזכיר כי לכל $w \leq 0.5$, האלגוריתם מחזיר פתרון אופטימלי.
אכן, ניתן לראות שתי מגמות אלו בגרפים המצורפים:

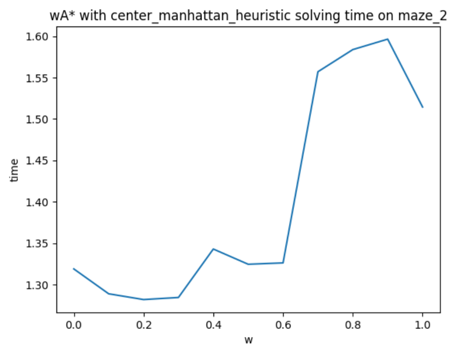












משימה 11

נראה כי לכל זוג מצבים מתקיים:

$$d(s,s')=d(\overline{s'},\bar{s})$$

נחלק לשני מקרים:

- <u>אם $d(s,s')$ סופי</u>:
קיימת סדרה a באורך d של אופרטורים $o_1,o_2,\dots,o_d$ כך שהמצב שאליו נגיע אם נפעילם על המצב s יהיה s' ועבורה מתקיים $cost(a)=d(s,s')$.
נגדיר סדרת אופרטורים חדשה a' באופן הבא:
לכל $i\in\{1,2,\dots,d\}$:
  - אם $o_i=forward$ אז נגדיר $o'_{d-i+1}=forward$
  - אם $o_i=rotate\_right$ אז נגדיר $o'_{d-i+1}=rotate\_left$
  - אם $o_i=rotate\_left$ אז נגדיר $o'_{d-i+1}=rotate\_right$
  - הוסף את o'_{d-i+1} לסדרה a'.

במילים פשוטות, הסדרה a' זהה לסדרה a פרט לכך שאופרטורי הסיבוב התהפכו וסדר האופרטורים התהפך גם הוא.
נשים לב כי מתקיים $cost(a)=cost(a')$.
בנוסף, הסדרה a', שאורכה d, מהווה סדרת מעברים חוקית ממצב $\overline{s'}$ אל המצב $\bar{s}$. כלומר קיבלנו חסם עליון על מחיר המסלול האופטימלי ממצב $\overline{s'}$ אל מצב $\bar{s}$.
לכן מתקיים:

$$d(s,s')\geq d(\overline{s'},\bar{s})$$

באופן דומה, קיימת סדרה a' של אופרטורים ממצב $\overline{s'}$ אל המצב $\bar{s}$ המקיימת $cost(a')=d(\overline{s'},\bar{s})$ ולכן נוכל לבנות סדרה a ממצב s אל מצב s', וכך נקבל חסם עליון על מחיר המסלול האופטימלי ממצב s אל מצב s'. כלומר מתקיים:

$$d(s,s')\leq d(\overline{s'},\bar{s})$$

לכן נקבל את השיוויון המבוקש:

$$d(s,s')=d(\overline{s'},\bar{s})$$

נחלק לשני מקרים:

- <u>אם $d(s,s')$ אינו סופי</u>:
בהכרח גם $d(\overline{s'},\bar{s})$ יהיה אינסופי, אחרת כמו שראינו קודם, נוכל לבנות סדרת אופרטורים חוקית ממצב s אל מצב s'. כלומר יתקיים בהכרח $d(\overline{s'},\bar{s})=\infty$.
לכן גם כאן נקבל את השיוויון המבוקש:

$$d(s,s')=d(\overline{s'},\bar{s})$$

משימה 12

1. היוריסטיקה $h(s)=g_{\overline{s_k^*}}(\overline{s_k})$ לא קבילה בהכרח.

התנאי שחייב להתקיים על h_{pre} כדי שהיוריסטיקה $h(s)$ תהיה קבילה הינו ש-h_{pre} תהיה עקבית.
כפי שלמדנו בהרצאה, אם h_{pre} לא עקבית אז בשלב החישוב המקדים ייתכן כי צומת $\overline{s_k}$ כלשהו יכנס לתור $close$ אך עבורו יתקיים $d\left(\overline{s_k^*},\overline{s_k}\right)<g_{\overline{s_k^*}}(\overline{s_k})$, כאשר $g_{\overline{s_k^*}}(\overline{s_k})$ הינו ערכו g של הצומת $\overline{s_k}$ בנקודת הזמן שבה הצומת $\overline{s_k}$ נכנס לתור $close$. בנוסף, ייתכן כי בשלב החיפוש

המקדים נפתח את הצומת $\overline{s_k^i}$ לפני שהערך g של הצומת $\overline{s_k}$ יספיק להתעדכן לערך $d\left(\overline{s_k^*},\overline{s_k}\right)$.
במקרה זה שלב החישוב המקדים יסתיים ועדיין יתקיים $d\left(\overline{s_k^*},\overline{s_k}\right) < g_{\overline{s_k^*}}(\overline{s_k})$.
מתקיים:

$$d\left(\overline{s_k^*},\overline{s_k}\right) < g_{\overline{s_k^*}}(\overline{s_k}) \overset{[*]}{\Rightarrow} d(s_k,s_k^*) < g_{\overline{s_k^*}}(\overline{s_k}) \overset{[**]}{\Rightarrow} d(s_k,s_k^*) < h(s)$$

[*] - לפי השיוויון שהוכחנו במשימה 11: $d\left(\overline{s_k^*},\overline{s_k}\right) = d(s_k,s_k^*)$.
[**] - לפי הגדרת $h(s)$.

במבוך שבו מתקיים $d(s_k,s_k^*) = d(s,s^*)$ (כלומר מבוך שבו קיצור הרובוט אינו משפיע על מחיר הפתרון האופטימלי מצומת s לצומת המטרה) נקבל כי מתקיים:

$$d(s,s^*) < h(s)$$

כלומר קיבלנו צומת s כלשהו שעבורו מתקיים שהערך היוריסטי עבורו גדול ממחיר הפתרון האופטימלי ממנו לצומת המטרה. לכן היוריסטיקה $h(s) = g_{\overline{s_k^*}}(\overline{s_k})$ לא קבילה בהכרח אם h_{pre} אינה עקבית.
לעומת זאת, כפי שראינו בהרצאה, אם h_{pre} היא עקבית, מובטח כי הערך g של כל צומת, שנכנס לתור $close$ בשלב החישוב המקדים, הינו אופטימלי. לכן בסיום שלב החישוב המקדים נקבל כי לכל צומת s מתקיים:

$$h(s) \overset{[*]}{=} g_{\overline{s_k^*}}(\overline{s_k}) \overset{[**]}{=} d\left(\overline{s_k^*},\overline{s_k}\right) \overset{[***]}{=} d(s_k,s_k^*) \overset{[****]}{\leq} d(s,s^*)$$

[*] - לפי הגדרת $h(s)$.
[**] - היוריסטיקה h_{pre} עקבית.
[***] - לפי השיוויון שהוכחנו במשימה 11: $d\left(\overline{s_k^*},\overline{s_k}\right) = d(s_k,s_k^*)$.
[****] - אי-שיוויון זה מתקיים לפני טענת העזר במשימה 17 סעיף 1.

כלומר קיבלנו כי לפי ההגדרה, היוריסטיקה $h(s) = g_{\overline{s_k^*}}(\overline{s_k})$ תהיה קבילה.

2. שימוש ביוריסטיקה לא קבילה אינו מבטיח קבלת פתרון לא אופטימלי.
כפי שראינו בסעיף קודם, אם h_{pre} אינה עקבית, ייתכן שצומת $\overline{s_k}$ יכנס לתור $close$ בשלב החישוב המקדים והערך g עבורו יהיה גבוה מהערך $d\left(\overline{s_k^*},\overline{s_k}\right)$. כלומר נקבל כי היוריסטיקה של הבעיה המקורית אינה קבילה. בשלב החישוב המקדים, לא בהכרח שרק צמתים על המסלול האופטימלי מפותחים ועל כן ייתכן כי הצומת $\overline{s_k}$ כלל אינו על מסלול אופטימלי מהצומת $\overline{s_k^*}$ אל הצומת $\overline{s_k^i}$. לכן הצומת s לא יהיה על מסלול אופטימלי מהצומת s^i אל הצומת s^*. כיוון שהיוריסטיקה של הבעיה המקורית הינה הערך $d\left(\overline{s_k^*},\overline{s_k'}\right)$ עבור צמתים ישיגים $\overline{s_k'}$ מהצומת $\overline{s_k^*}$, אז ייתכן כי הערך $d\left(\overline{s_k^*},\overline{s_k}\right)$ יהיה גבוה דיו בבדי שהצומת s_k כלל לא יפותח. כלומר בשלב פתרון הבעיה המקורית בכל זאת ימצא מסלול אופטימלי.

משימה 15

1. תחילה נוכיח טענת עזר:
אם קיימת סדרת אופרטורים שהפעלתה ממצב s מגיעה לבסוף למצב s', אז עבור אותה סדרת אופרטורים ניתן להגיע ממצב s_k למצב s'_k, לכל k קבוע, זוגי המקיים $k \le robot\_length - 3$.
<u>הוכחה:</u>
יהי o_i אופרטור כלשהו בסדרת האופרטורים ונניח כי אורך הרובוט בבעיה המקורית הינו l.
נחלק למקרים:

- $o_i = forward$: אם רובוט באורך l יכול לנוע קדימה (כלומר אין קיר מלפני ראש הרובוט), אז בוודאי שרובוט קצר יותר באורך $l - k$ יכול לנוע קדימה, שהרי אין קיר מלפני ראשו.
- $o_i = rotate$: אם רובוט באורך l יכול להסתובב (כלומר אין קירות מצדדיו), אזי בוודאי שרובוט קצר יותר באורך $l - k$ יכול להסתובב באותו הכיוון, שהרי אין קירות מצדדיו.

כלומר נוכל להפעיל את כל אחד מהאופרטורים בסדרה על הרובוט הקצר, בדיוק כפי שהפעלנו אותם על הרובוט המקורי, ולהגיע ממצב s_k למצב s'_k.

במילים אחרות, הטענה מוכיחה כי כל מסלול שניתן לבצע ע"י רובוט באורך מסוים, בוודאי שיהיה ניתן לבצעו ע"י רובוט קצר יותר.

כעת, נעבור להוכחה של הטענה המרכזית:
נניח כי קיים פתרון לבעיה המקורית ונניח בשלילה כי קיימים אף שני פתרונות.
כלומר קיימות שתי סדרות שונות של אופרטורים שמתחילות במצב s^i ומגיעות למצב s^*.
כפי שהוכחנו במשימה 11, קיימות שתי סדרות שונות של אופרטורים שמתחילות במצב $\overline{s^*}$ ומגיעות למצב $\overline{s^i}$. לפי טענת העזר, שתי סדרות אלו ניתנות להפעלה ממצב $\overline{s^*_k}$ כאשר יעדן הינו $\overline{s^i_k}$.
אולם, זוהי סתירה להנחה כי קיים מסלול יחיד בין $\overline{s^*_k}$ למצב $\overline{s^i_k}$.
לכן, אם קיים פתרון לבעיה המקורית, אז הוא יחיד.

2. נפריך את הטענה ע"י דוגמה נגדית.
להלן הבעיה המקורית:

	-1	4	-1	
-1	-1			-1
1				2
-1			-1	-1
	-1	3	-1	

ממצב התחלתי זה לא ניתן להפעיל אף אופרטור. לכן מתקיים:

$$h^*(s^i) = \infty$$

אולם, עבור $k = 2$ נקבל את הבעיה הבאה:

	-1		-1	
-1	-1	4		-1
	1		2	
-1		3	-1	-1
	-1		-1	

הפתרון האופטימלי לבעיה זו הינו סיבוב אחד לצד שמאל. לכן מתקיים:

$$h_k(s) = rotate\_cost$$

בנוסף, כך נראית הבעיה ההפוכה ממצב $\overline{s_k^*}$ אל המצב $\overline{s_k^i}$:

	-1		-1	
-1	-1	3		-1
	2		1	
-1		4	-1	-1
	-1		-1	

פתרון בעיה זו הוא יחיד, והינו ביצוע פנייה ימינה פעם אחת. לכן קיים מסלול יחיד בין המצב $\overline{s_k^*}$ למצב $\overline{s_k^i}$. כלומר תנאי השאלה מתקיימים אך מתקיים:

$$h_k(s) = rotate\_cost \neq \infty = h^*(s)$$

$$\Longrightarrow h_k(s) \neq h^*(s)$$

לכן הטענה אינה נכונה.

3. תחילה נוכיח טענת עזר:
בכל רגע של ריצת האלגוריתם A^*, קיים צומת $v \in open$ ששייך למסלול הפתרון האופטימלי של הבעיה המקורית.
<u>הוכחה:</u>
נניח בשלילה כי ברגע מסוים כל הצמתים בתור $open$ אינם שייכים למסלול הפתרון האופטימלי של הבעיה המקורית. לכן בעת סיום ריצת האלגוריתם, המסלול שיתקבל מצומת ההתחלה לצומת המטרה יכיל את אחד הצמתים שהיו באותו רגע בתור $open$, כלומר המסלול יכיל צומת שאינו שייך למסלול הפתרון האופטימלי. כלומר מצאנו מסלול פתרון ששונה ממסלול הפתרון האופטימלי. אולם בסעיף 1 במשימה זו, הוכחנו כי פתרון הבעיה המקורית הינו יחיד. זוהי סתירה, ולכן בכל רגע של ריצת האלגוריתם A^*, קיים צומת $v \in open$ ששייך למסלול הפתרון האופטימלי של הבעיה המקורית.

כעת, נניח בשלילה כי בזמן פתרון הבעיה המקורית עם היוריסטיקה h_k, האלגוריתם A^* פיתח צומת שאינו על מסלול הפתרון האופטימלי. נסמן צומת זה ב-u. לפי טענת העזר, ברגע הוצאת הצומת u מהתור $open$, קיים בתור זה גם צומת v ששייך למסלול האופטימלי. מתקיים:

$$f(u) \le f(v)$$
$$g(u) + h_k(u) \le g(v) + h_k(v)$$
$$h_k(u) \le g(v) + h_k(v) - g(u)$$

כיוון שהערכים $g(v), h_k(v), g(u)$ הינם סופיים, אז $h_k(u)$ גם הוא סופי.
בנוסף, מתקיים:

$$d(\overline{u_k}, \overline{s_k^i}) \overset{[*]}{=} d(s_k^i, u_k) \overset{[**]}{\le} d(s^i, u) \overset{[***]}{\le} g(u) \overset{[****]}{<} \infty$$

[*] - לפי הטענה שהוכחנו במשימה 11.

[**] - לפי טענת העזר מסעיף 1 במשימה זו.
[***] - ערכו של $g(u)$ ברגע הוצאת הצומת u מהתור $open$ בוודאי לא קטנה ממרחקו המינימלי מצומת ההתחלה.
[****] - כיוון שהצומת u היה בתור $open$ לא ייתכן כי סכום הקשתות מצומת ההתחלה ועד אליו הוא אינסופי.

לכן מתקיים $d(\overline{u_k}, \overline{s_k^i}) < \infty$.
לפי הגדרת היוריסטיקה מתקיים גם:

$$h_k(u) = d(\overline{s_k^*}, \overline{u_k})$$

כיוון שהערכים $d(\overline{s_k^*}, \overline{u_k}), d(\overline{u_k}, \overline{s_k^i})$ סופיים אז קיים מסלול מהצומת $\overline{s_k^*}$ לצומת $\overline{s_k^i}$ שעובר דרך הצומת $\overline{u_k}$.
אולם, כבר קיים מסלול מהצומת $\overline{s_k^*}$ לצומת $\overline{s_k^i}$, שנגזר מהמסלול האופטימלי של הבעיה המקורית.
הרי אם קיים מסלול אופטימלי לבעיה המקורית, ניתן להמירו למסלול מהצומת $\overline{s_k^*}$ לצומת $\overline{s_k^i}$ כפי שראינו לפי טענת העזר בסעיף 1 במשימה זו ובמשימה 11.
כיוון שהצומת u אינו שייך למסלול האופטימלי של הבעיה המקורית, אז מצאנו שני מסלולים שונים מהצומת $\overline{s_k^*}$ לצומת $\overline{s_k^i}$. אולם זוהי סתירה להנחה כי קיים מסלול יחיד בין צמתים אלו.
לכן בזמן פתרון הבעיה המקורית עם היוריסטיקה h_k, האלגוריתם A^* מפתח אך ורק צמתים על מסלול הפתרון האופטימלי.

4. נשים לב למספר פרטים:
   - נתון כי קיים מסלול יחיד בין הצומת $\overline{s_k^*}$ לצומת $\overline{s_k^i}$ וכן כי קיים פתרון לבעיה המקורית.
     לכן, לפי הטענה מסעיף 1 במשימה זו, נובע כי קיים פתרון יחיד לבעיה המקורית.
     כלומר, על פי הנתון מספר האופרטורים בפתרון זה הוא r.
     בנוסף, לפי סעיף 3 במשימה זו, כיוון שהאלגוריתם A^* עם היוריסטיקה h_k מפתח צמתים על מסלול הפתרון האופטימלי בלבד, אז כמות הצמתים המפותחים באלגוריתם הינה אורך מסלול הפתרון האופטימלי. לכן מתקיים:
     $$r = n_k$$
   - לפי הגדרת החישוב המקדים, כל צומת שנגיש מהצומת $\overline{s_k^*}$, יפותח בשלב החישוב המקדים. לכן מתקיים:
     $$a = m_k$$

זמן הריצה של האלגוריתם A^* עם היוריסטיקה h_k יהיה קטן יותר מזמן הריצה של האלגוריתם A^* עם היוריסטיקה $center\_manhattan$ אם יתקיים התנאי:

$$n_k + m_k < n_{manhattan}$$

על כן, לפי השיוויונות שהראינו לעיל, תנאי מספיק והכרחי לכך שזמן הריצה של האלגוריתם A^* עם היוריסטיקה h_k יהיה קטן יותר מזמן הריצה של האלגוריתם A^* עם היוריסטיקה $center\_manhattan$ הינו:

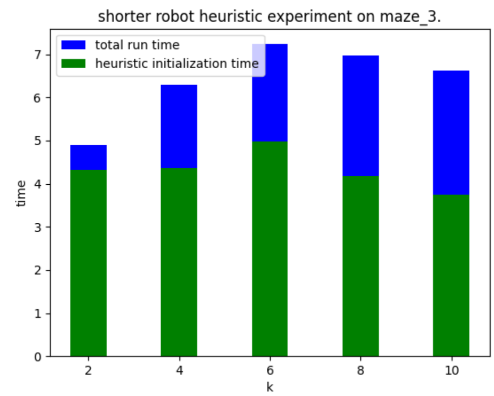
$$r + a < n_{manhattan}$$

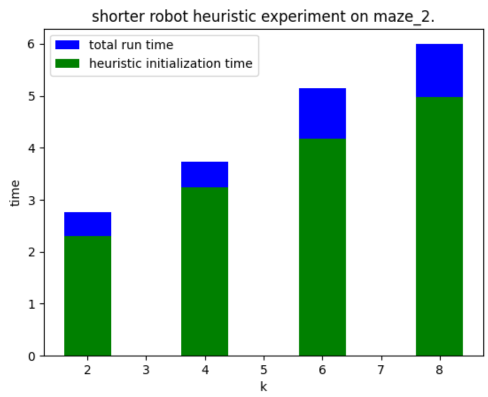
5. חסר

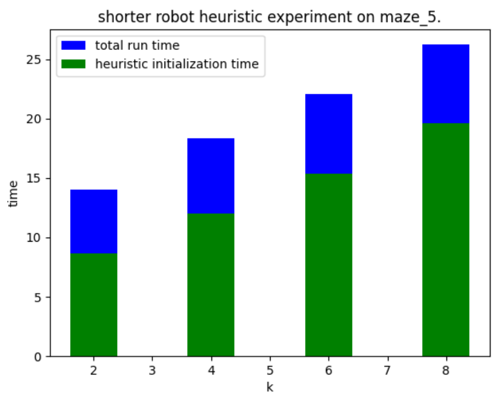
משימה 16

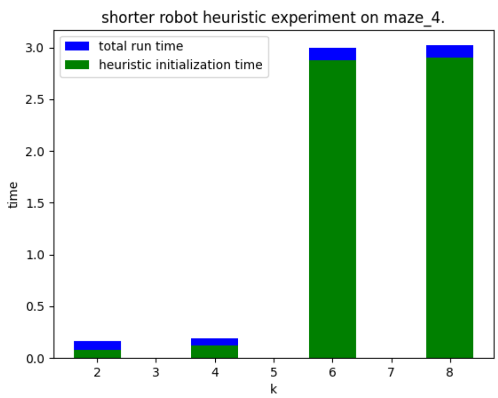
1. ניכר כי כאשר מריצים את האלגוריתם A^* עם היוריסטיקה h_k, זמן ריצת האלגוריתם (ללא החישוב המקדים) נמוך בהרבה בהשוואה לריצת האלגוריתם עם היוריסטיקה $center\_manhattan$.
אולם, כתלות במפה וכתלות בערכו של k, זמן החישוב המקדים בשימוש ביוריסטיקה h_k עלול להגדיל את זמן הריצה הכולל של האלגוריתם כך שבסך הכל הוא יתעלה על זמן הריצה של האלגוריתם A^* עם היוריסטיקה $center\_manhattan$.
2. באופן כללי, ככל שערכו של k גדל, כך גדל גם זמן פתרון בעיית המבוך. זאת כיוון שכאשר ערכו של k גדל, אורך הרובוט בשלב החישוב המקדים קטן ועל כן קיים יותר מצבים ישיגים מהמצב $\overline{s_k^*}$. לכן, שלב החישוב המקדים גורע יותר זמן.
בנוסף, לפי המימוש שלנו, הערך היוריסטי של מצבים שאינם ישיגים מהמצב $\overline{s_k^*}$ הינו ∞ ועל כן כאשר ערכו של k גדל, ייתכן כי בזמן חישוב הפתרון הבעיה המקורית, צמתים רבים יותר יפתחו היות וערך היוריסטיקה שלהם יהיה שונה מ-∞. גורם זה יגדיל אף יותר את זמן פתרון הבעיה.

4. ככל שערכו של k גדל, כך מספר המצבים הישיגים בשלב החישוב המקדים גדל. על כן, זמן ביצוע החישוב המקדים גדל בהתאם. בנוסף, ככל שערכו של k קטן יותר, כך גם קטן מספר המצבים הישיגים בשלב החישוב המקדים. כלומר, יהיו יותר צמתים עם הערך היוריסטי ∞, ועל כן פחות צמתים יפותחו בשלב חישוב הפתרון בבעיה המקורית (זאת כיוון שצומת עם ערך יוריסטי ∞ יהיה בעל העדיפות הנמוכה ביותר בתור $open$).
אכן ניתן לראות התנהגות זאת בגרפים הבאים:









משימה 17

1. נראה כי כאשר נמשיך להריץ את האלגוריתם IDA^* על רובוט ארוך יותר עם $new-limit$ כפי שנקבע באיטרציה הקודמת עבור רובוט קצר יותר, מובטח כי נקבל פתרון אופטימלי.

נשתמש בסימונים הבאים:
h^*_{orig} - מחיר הפתרון האופטימלי בבעיה המקורית.
h^*_{new} - מחיר הפתרון האופטימלי בבעיה החדשה שבה הרובוט ארוך יותר ב-2 יחידות.

<u>טענת עזר</u>
מתקיים $h^*_{orig} \leq h^*_{new}$
<u>הוכחה</u>
אם $h^*_{new} = \infty$ (לא קיים פתרון לבעיה החדשה) ואז בוודאי שהאי-שיוויון מתקיים.
אחרת, h^*_{new} הינו סופי (קיים פתרון לבעיה החדשה) ותהי סדרת אופרטורים O_{new} שמייצגת פתרון אופטימלי בבעיה החדשה עם הרובוט הארוך יותר. לכן מתקיים:

$$cost(O_{new}) = h^*_{new}$$

כפי שראינו מטענת העזר במשימה 15 סעיף 1, סדרה זו הינה חוקית עבור הבעיה המקורית עם הרובוט הקצר יותר. כלומר מצאנו סדרת אופרטורים חוקית שפותרת את הבעיה המקורית, ולכן מתקיים:

$$h^*_{orig} \leq cost(O_{new})$$

ולכן נקבל בסך הכל:

$$h^*_{orig} \leq cost(O_{new}) = h^*_{new}$$

לכן מתקיים $h^*_{orig} \leq h^*_{new}$.

כעת, נעבור להוכחה של הטענה המרכזית:
בכל איטרציה של IDA^* על הרובוט המקורי, מתקיים $f-limit \leq h^*_{orig}$. זאת כיוון שבכל איטרציה, ערכו של $f-limit$ יעלה, וכאשר ערכו יהיה שווה ל-h^*_{orig} אז באותה האיטרציה האלגוריתם IDA^* ימצא מצב מטרה, כאשר ערכו של f עבור מצב המטרה יהיה h^*_{orig}.
לכן, בסיום איטרציה כלשהי של האלגוריתם IDA^*, יתקיים $f-limit \leq h^*_{orig}$.
לפי טענת העזר שהוכחנו בהתחלה, מתקיים:

$$f-limit \leq h^*_{new}$$

לכן, כאשר נריץ את האלגוריתם IDA^* על הרובוט החדש, ונשתמש בערך $new-limit$, שערכו שווה ל-$f-limit$ מהאיטרציה הקודמת, מובטח כי נקבל פתרון אופטימלי. זאת כיוון שהערך $new-limit$ יגדל מאיטרציה לאיטרציה עד שערכו יהיה שווה ל-h^*_{new}, ובאיטרציה זו יתקבל פתרון אופטימלי.

2. תחילה נמיין את הרובוטים לפי אורכם בסדר עולה:

$$r_1, r_2, \dots, r_n$$

באשר $len(r_i) > len(r_{i-1})$ לכל $2 \leq i \leq n$.
לאחר מכן נריץ את האלגוריתם IDA^* על הרובוטים לפי המיון באופן הבא:

- עבור r_1, נקבע $f - limit = h(start)$ כאשר $h(start)$ הינו הערך היוריסטי של המצב ההתחלתי.
- עבור r_i, נקבע $f - limit = h^*_{i-1}$ כאשר h^*_{i-1} הינו מחיר הפתרון האופטימלי עבור r_{i-1}, כפי שנמצא בהרצת האלגוריתם עבור r_{i-1}.
אם $h^*_{i-1} = \infty$ (לא קיים פתרון עבור r_{i-1}) אז נפסיק את הרצת האלגוריתם ונחזיר כי אין פתרון לכל r_j כאשר $i \leq j \leq n$.

נסביר את נכונות האלגוריתם:

- אם מחיר הפתרון האופטימלי של רובוט באורך k הינו h^*, אז כפי שראינו בטענת העזר במשימה זו בסעיף 1, מחיר הפתרון האופטימלי של רובוט באורך גדול מ-k יהיה לפחות h^*. לכן, הערך $f - limit$ בתחילת הריצה של האלגוריתם IDA^* עבור r_i יהיה נמוך או שווה למחיר הפתרון האופטימלי עבור r_i ולכן מובטח כי נמצא פתרון אופטימלי עבור r_i.
- בנוסף, אם נקבע $f - limit$ קטן יותר בכל אחת מההרצות, לא ייתכן כי נקבל פתרון אופטימלי כבר באיטרציה הראשונה של כל אלגוריתם, שהרי מחיר הפתרון האופטימלי עבור r_i הינו לפחות מחיר הפתרון האופטימלי עבור r_{i-1}. על כן, באיטרציה הראשונה $f - limit$ לא יוכל להגיע למצב המטרה שהרי ערכו נמוך יותר ממחיר הפתרון האופטימלי עבור r_{i-1}.
- יתר על כן, אם נקבע $f - limit$ גדול יותר בכל אחת מההרצות, ייתכן כי יוחזר פתרון לא אופטימלי. מצב זה ייתכן כאשר מחיר הפתרון האופטימלי עבור r_i הינו זהה למחיר הפתרון האופטימלי עבור r_{i-1}. לכן, בהרצת IDA^* על הרובוט r_i, אם נתחיל עם $f - limit$ שגדול ממחיר הפתרון האופטימלי עבור r_i, ייתכן שיוחזר פתרון לא אופטימלי (זה נובע מרנדומליות בחירת הצמתים בכל איטרציה של $DFS - f$).