**מבוא לבינה מלאכותית – 236501  
תרגיל בית 1 – פתרון**

מגישים:  
רוני נודלמן – 209120112  
רן ברשינסקי – 208387324

**משימה 1**

לא קיים פתרון לבעיית המבוך המיוצגת ע"י .  
נראה כי כל הצעדים האפשריים מובילים למבוי סתום:  
מצד אחד, אם הרובוט תחילה ילך קדימה הוא יתקע: הוא לא יוכל להמשיך לצעוד קדימה ומצד שני גם לא יוכל להסתובב ימינה ולא שמאלה בגלל הקיר משמאלו.  
מצד שני, הרובוט יכול במצבו ההתחלתי לפנות ימינה אך לאחר מכן הוא יהיה חייב לפנות שמאלה בחזרה למצבו ההתחלתי. זאת משום שיש קיר שמונע ממנו להמשיך להסתובב ימינה ובגלל דופן המבוך הוא לא יוכל להמשיך ישר.

**משימה 2**

כן, קיימת בעיית מבוך כך שבגרף המצבים שלה קיימים מעגלים.  
נראה כי בגרף המצבים של בעיית המבוך ייתכנו מעגלים.  
תחילה, הרובוט יכול לפנות ימינה ולאחר מכן לפנות שמאלה בחזרה למצב ההתחלתי. כלומר התקבל מעגל היות והרובוט חזר לנקודת המוצא שלו. לכן, רצף האופרטורים שיוצר מעגל הוא:  
למעשה, בכל בעיה שבה הרובוט יכול לפנות ימינה או שמאלה ממצב מסוים, קיים מעגל. זאת כיוון שהוא יוכל לאחר הפנייה, לבצע פנייה בכיוון ההפוך. כלומר תתקבל פעולת .

**משימה 3**

לא, קיימים מרחבי חיפוש שבהם לא ניתן להגיע לבור.  
נראה דוגמה למבוך שבו לא ניתן להגיע לבור:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

מהמצב ההתחלתי הרובוט יוכל להסתובב ימינה או שמאלה. לאחר מכן, הוא יוכל שוב להסתובב ימינה או שמאלה ולהמשיך כך לנצח. כלומר בכל מצב, הרובוט יוכל תמיד לפנות ימינה או שמאלה.

**משימה 6**

1. הסיבה לשוני במחירי המסלולים הינה שהאלגוריתם מחפש את המסלול בקצר ביותר, ללא התחשבות במחיר הקשתות. לעומת זאת, האלגוריתם מחשב את המסלול הזול ביותר, עם התחשבות במחיר הקשתות. במבוכים המסלול הקצר ביותר אינו המסלול הזול ביותר ולכן מחזיר מסלול יקר יותר מהמסלול שאותו מחזיר .
2. בכדי שמחיר המסלול המוחזר ע"י יהיה זהה למחירו של המסלול המוחסר ע"י , מחיר הקשתות בגרף צריך להיות אחיד. באופן זה, המסלול הקצר ביותר בהכרח יהיה גם הזול ביותר, היות ואין הבדל במחירי הקשתות.

**משימה 8**

1. נראה כי היוריסטיקה לא קבילה ע"י הדוגמה הבאה:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

נגדיר את הסימונים הבאים:  
 – המצב ההתחלתי  
 – מצב המטרה  
 – מחיר אופרטור ההתקדמות  
 – מחיר אופרטור הסיבוב  
  
הפתרון האופטימלי הינו הפעלת האופרטור (סיבוב ימינה) פעם אחת ולכן:  
לפי הגדרת היוריסטיקה מתקיים:  
לכן אם הבעייה תוגדר כך שיתקיים אז יתקיים:  
כלומר נקבל כי היוריסטיקה אינה קבילה.  
נגדיר כעת תנאי הכרחי ומספיק על מחיר אופרטור הסיבוב בכדי שהיוריסטיקה תהיה קבילה:  
כאשר הינו אורך הרובוט.

**משימה 9**

1. נוכיח כי יוריסטיקה זו קבילה. כלומר נראה כי לכל מצב מתקיים:  
   יהי מצב כלשהו ונסמן ב- את מרחק מנהטן בין מרכז הרובוט במצב לבין מרכז הרובוט במצב המטרה. לפי הגדרת היוריסטיקה מתקיים:  
   נניח כי המסלול האופטימלי מצב למצב המטרה דורש צעדים קדימה ו- צעדי סיבוב. כלומר מתקיים:  
   נזכיר כי הינו מחיר אופרטור ההתקדמות וכי הוא מחיר אופרטור הסיבוב.  
   כיוון שלאחר הפעלת אופרטור הסיבוב, מרכז הרובוט אינו משתנה, נסיק כי על מנת להגיע ממצב למצב המטרה דרושים לפחות צעדי התקדמות. בפרט, גם אם מבצעים את המסלול האופטימלי, כמות הפעלות אופרטור ההתקדמות יהיה לפחות . כלומר מתקיים:  
   כיוון שמתקיים וגם אז נקבל בסך הכל:  
   כלומר מתקיים ולכן היורסטיקה קבילה.

Chart

Description automatically generatedChart, line chart

Description automatically generated**משימה 10**

Chart, line chart

Description automatically generatedChart, histogram

Description automatically generatedChart, line chart

Description automatically generated

Chart, histogram

Description automatically generatedככל שאנחנו נותנים יותר משקל להיוריסטיקה, אז החיפוש נהיה יותר חמדני, ולכן כמות הזמן עד מציאת הפתרון יורדת, אך הפתרון נהיה פחות אופטימלי ולכן מחירו עולה. נזכר כי wA\* עם , זה הוא הפתרון האופטימלי.

**משימה 11**

נראה כי לכל זוג מצבים מתקיים:

נחלק לשני מקרים:

* אם סופי:  
  קיימת סדרה באורך של אופרטורים כך שהמצב שאליו נגיע אם נפעילם על המצב יהיה ועבורה מתקיים .  
  נגדיר סדרת אופרטורים חדשה באופן הבא:  
  לכל :
  + אם אז נגדיר
  + אם אז נגדיר
  + אם אז נגדיר
  + הוסף את לסדרה .

במילים פשוטות, הסדרה זהה לסדרה פרט לכך שאופרטורי הסיבוב התהפכו וסדר האופרטורים התהפך גם הוא.  
נשים לב כי מתקיים .  
בנוסף, הסדרה , שאורכה , מהווה סדרת מעברים חוקית ממצב אל המצב . כלומר קיבלנו חסם עליון על מחיר המסלול האופטימלי ממצב אל מצב .  
לכן מתקיים:  
באופן דומה, קיימת סדרה של אופרטורים ממצב אל המצב המקיימת ולכן נוכל לבנות סדרה ממצב אל מצב , וכך נקבל חסם עליון על מחיר המסלול האופטימלי ממצב אל מצב . כלומר מתקיים:  
לכן נקבל את השיוויון המבוקש:  
נחלק לשני מקרים:

* אם אינו סופי:  
  בהכרח גם יהיה אינסופי, אחרת כמו שראינו קודם, נוכל לבנות סדרת אופרטורים חוקית ממצב אל מצב . כלומר יתקיים בהכרח .  
  לכן גם כאן נקבל את השיוויון המבוקש:

**משימה 15**

1. תחילה נוכיח טענת עזר:  
   אם קיימת סדרת אופרטורים שהפעלתה ממצב מגיעה לבסוף למצב , אז עבור אותה סדרת אופרטורים ניתן להגיע ממצב למצב , לכל קבוע, זוגי המקיים .  
   הוכחה:  
   יהי אופרטור כלשהו בסדרת האופרטורים ונניח כי אורך הרובוט בבעיה המקורית הינו .  
   נחלק למקרים:

* : אם רובוט באורך יכול לנוע קדימה (כלומר אין קיר מלפני ראש הרובוט), אז בוודאי שרובוט קצר יותר באורך יכול לנוע קדימה, שהרי אין קיר מלפני ראשו.
* : אם רובוט באורך יכול להסתובב (כלומר אין קירות מצדדיו), אזי בוודאי שרובוט קצר יותר באורך יכול להסתובב באותו הכיוון, שהרי אין קירות מצדדיו.

כלומר נוכל להפעיל את כל אחד מהאופרטורים בסדרה על הרובוט הקצר, בדיוק כפי שהפעלנו אותם על הרובוט המקורי, ולהגיע ממצב למצב .

במילים אחרות, הטענה מוכיחה כי כל מסלול שניתן לבצע ע"י רובוט באורך מסוים, בוודאי שיהיה ניתן לבצעו ע"י רובוט קצר יותר.  
  
כעת, נעבור להוכחה של הטענה המרכזית:  
נניח כי קיים פתרון לבעיה המקורית ונניח בשלילה כי קיימים אף שני פתרונות.  
כלומר קיימות שתי סדרות שונות של אופרטורים שמתחילות במצב ומגיעות למצב .  
כפי שהוכחנו במשימה , קיימות שתי סדרות שונות של אופרטורים שמתחילות במצב ומגיעות למצב . לפי טענת העזר, שתי סדרות אלו ניתנות להפעלה ממצב כאשר יעדן הינו . אולם, זוהי סתירה להנחה כי קיים מסלול יחיד בין למצב .  
לכן, אם קיים פתרון לבעיה המקורית, אז הוא יחיד.

1. נפריך את הטענה ע"י דוגמה נגדית.  
   להלן הבעיה המקורית:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

ממצב התחלתי זה לא ניתן להפעיל אף אופרטור. לכן מתקיים:

אולם, עבור נקבל את הבעיה הבאה:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

*הפתרון האופטימלי לבעיה זו הינו סיבוב אחד לצד שמאל. לכן מתקיים:  
בנוסף, כך נראית הבעיה ההפוכה ממצב אל המצב :*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

*פתרון בעיה זו הוא יחיד, והינו ביצוע פנייה ימינה פעם אחת. לכן קיים מסלול יחיד בין המצב למצב . כלומר תנאי השאלה מתקיימים אך מתקיים:*

*לכן הטענה אינה נכונה.*

1. *תחילה נוכיח טענת עזר:  
   בכל רגע של ריצת האלגוריתם , קיים צומת ששייך למסלול הפתרון האופטימלי של הבעיה המקורית.  
   הוכחה:  
   נניח בשלילה כי ברגע מסוים כל הצמתים בתור אינם שייכים למסלול הפתרון האופטימלי של הבעיה המקורית. לכן בעת סיום ריצת האלגוריתם, המסלול שיתקבל מצומת ההתחלה לצומת המטרה יכיל את אחד הצמתים שהיו באותו רגע בתור , כלומר המסלול יכיל צומת שאינו שייך למסלול הפתרון האופטימלי. כלומר מצאנו מסלול פתרון ששונה ממסלול הפתרון האופטימלי. אולם בסעיף במשימה זו, הוכחנו כי פתרון הבעיה המקורית הינו יחיד. זוהי סתירה, ולכן בכל רגע של ריצת האלגוריתם , קיים צומת ששייך למסלול הפתרון האופטימלי של הבעיה המקורית.  
     
   כעת, נניח בשלילה כי בזמן פתרון הבעיה המקורית עם היוריסטיקה , האלגוריתם פיתח צומת שאינו על מסלול הפתרון האופטימלי. נסמן צומת זה ב-. לפי טענת העזר, ברגע הוצאת הצומת מהתור , קיים בתור זה גם צומת ששייך למסלול האופטימלי. מתקיים:*

*כיוון שהערכים הינם סופיים, אז גם הוא סופי.  
בנוסף, מתקיים:  
 - לפי הטענה שהוכחנו במשימה .*

*- לפי טענת העזר מסעיף במשימה זו.*

*- ערכו של ברגע הוצאת הצומת מהתור בוודאי לא קטנה ממרחקו המינימלי מצומת ההתחלה.  
 - כיוון שהצומת היה בתור לא ייתכן כי סכום הקשתות מצומת ההתחלה ועד אליו הוא אינסופי.  
  
לכן מתקיים .  
לפי הגדרת היוריסטיקה מתקיים גם:  
כיוון שהערכים סופיים אז קיים מסלול מהצומת לצומת שעובר דרך הצומת .  
אולם, כבר קיים מסלול מהצומת לצומת , שנגזר מהמסלול האופטימלי של הבעיה המקורית. הרי אם קיים מסלול אופטימלי לבעיה המקורית, ניתן להמירו למסלול מהצומת לצומת כפי שראינו לפי טענת העזר בסעיף במשימה זו ובמשימה .  
כיוון שהצומת אינו שייך למסלול האופטימלי של הבעיה המקורית, אז מצאנו שני מסלולים שונים מהצומת לצומת . אולם זוהי סתירה להנחה כי קיים מסלול יחיד בין צמתים אלו.  
לכן בזמן פתרון הבעיה המקורית עם היוריסטיקה , האלגוריתם מפתח אך ורק צמתים על מסלול הפתרון האופטימלי.*

1. *התנאי ההכרחי והמספיק הוא .*

*הסבר:*

*לפי סעיף 1 במשימה הנוכחית מתקיים כי יש פתרון יחיד לבעיה המקורית ולכן מספר האופרטורים בה הוא r, ובנוסף לפי סעיף 3 של המשימה הנוכחית מתקיים כי מספר הצמתים שמפתח A\* עם היוריסטיקה הוא מספר המצבים בפתרון האופטימלי, כלומר מספר האופרטורים בפתרון האופטימלי ולכן שהוא מספר הצמתים שמפתח A\* עם היורסיטקה הוא r, כלומר .*

*לפי אופן ביצוע חישוב המקדים, כל צומת שנגיש מ הוא גם מפותח. ומכיוון ש- a זה מספר המצבים הניגשים מ , ו זה מספר הצמתים שפותחו בשלב המקדים, אז .*

*מכיוון ש- , לפי התנאי שלנו, אז גם מתקיים כי , ומכיוון שזמן ההריצה של האלגוריתמים לינארי למספר הצמתים שפותחו, אז גם מתקיים שהזמן של האלגוריתם החדש יהיה קטן יותר מהזמן של אלגוריתמם עם היוריסטיקה .*

**משימה 16**

1. *כאשר בוחנים את זמן הפתרון של הבעיה המקורית (ללא החישוב המקדים), ניכר כי A\* עם ההיוריסטיקה הוא הרבה יותר טוב.*

*אבל כתלות המפה וערך של ה- k החישוב המקדים יכול להוות אחוז גבוה מכלל הריצה ובכך לגרום לכך שהשימוש בהיורסטיקה החדשה תיקח יותר זמן בהשוואה להיורסיטה .*

1. *ככל שה- k גדול יותר, כך זמן החיפוש גדל. הסיבה לכך היא שככל ה- k גדול יותר, אז יש יותר מצבים ישיגים מהמצב , ולכן שלב הקידום המקדים גורע יותר זמן.*

*בנוסף אנחנו הגדרנו שאם מצב לא ישיג אז הערך ההיורסטי שלו יהיה אינסוף, ולכן ככל ה- k גדול יותר, אז יש פחות מצבים שהערך היורסטי שלהם הוא אינסוף והם לא יפתחו, ולכן יש יותר מצבים שיפתחו גם בשלב חיפוש פתרון הבעיה המקורית, וגם זה מגדיל את זמן החיפוש.*

Chart, bar chart

Description automatically generated*4.*

Chart, bar chart

Description automatically generatedChart, bar chart

Description automatically generatedChart, bar chart

Description automatically generated

*ככל שה- k גדל, אז גודל הרובוט בחישוב המקדים יהיה קטן יותר ולכן יהיו יותר מצבים ישיגים, ולכן החישוב המקדים ייקח יותר זמן.*

**משימה 17**

1. נניח כי ההיורסטיקה של כל המצבים היא 0.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

2. נריץ את הרובוט הקצר ביותר עם . ונקבל בסיום פתרון שערכו cost.

כעת נריץ את הרובוט הבא בתור באורכו עם , וכך נעשה גם לשאר הרובוטים באופן ממויין לפי אורכם.

אם מצאנו לרובוט באורך מסויים פתרון אופטימלי במחיר של cost, אז ברור שהפתרון האופטימלי של רובוט גדול יותר באותו מפה יהיה לפחות במחיר cost. כלומר, הערך ההתחלתי של כל רובוט בסדרת ההרצות החל מהרצה השנייה, הינה חסם תחתון הדוק ביותר.

לכן, אם נתחיל ב קטן יותר, אז אנחנו בטוח לא נמצא את הפתרון האופטימלי ובכך אנחנו מבזבזים את הזמן.

מצד שני, יתכן שמחיר הפתרון האופטימלי ברובוט הנוכחי יהיה זהה למחיר שהתקבל בהרצה של האורך הרובוט הקודם, ולכן אתחול של שגדול מ- cost, יגרום לכך שנפתח אולי מצבים נוספים מיותרים, ולכן הזמן לא יהיה אופטימלי.