Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 11

Aufgabe 1

a)

(i) Mit (VII 1.11) folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= [x^\alpha \cdot \ln(x + |\alpha - 1|)]' = [x^\alpha]' \cdot \ln(x + |\alpha - 1|) + x^\alpha \cdot [\ln(x + |\alpha - 1|)]' \\
&= \alpha x^{\alpha-1} \cdot \ln(x + |\alpha - 1|) + x^\alpha \cdot \left(\frac{[x + |\alpha - 1|]'}{x + |\alpha - 1|} \right) \\
&= \alpha x^{\alpha-1} \cdot \ln(x + |\alpha - 1|) + x^\alpha \cdot \frac{1}{x + |\alpha - 1|}
\end{aligned}$$

(ii) Es ist $g(x) = \cos\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right)$ nicht für $x = 0$ definiert, da sonst durch 0 geteilt werden würde. cos und sin sind wie Polynome sonst für ganz $\mathbb{R}$ definiert, also ist $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Definitionsbereich von g. Weiterhin sind nach (VI 2.2) $\cos, \sin$ und Polynome, sowie rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich stetig. Also ist g stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mit der Kettenregel und (VII 1.5, 1.7) folgt nun:

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dx} &= \left[\cos\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right)\right]' = \cos'\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left[\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right]' \\
&= -\sin\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\sin'\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left[x^2 + \frac{1}{x}\right]'\right) \\
&= -\sin\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\left[x^2\right]' + \left[\frac{1}{x}\right]'\right)\right) \\
&= -\sin\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \cos\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

b)

(iii)

$$\frac{dh}{dx}=\left[\cos\left(\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\right]'=-\sin\left(\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\cdot\left[\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right]'$$

$$=-\sin\left(\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\cdot\left(\frac{\left[e^x+\sqrt{1+x^2}\right]'\cdot(\arctan x)-(e^x+\sqrt{1+x^2})\cdot[\arctan x]'}{(\arctan x)^2}\right)$$

$$=-\sin\left(\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\cdot\left(\frac{\left(e^x+\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\right)\cdot(\arctan x)-(e^x+\sqrt{1+x^2})\cdot\left(\frac{1}{\tan^{-1}(\arctan x)}\right)}{(\arctan x)^2}\right)$$

$$=-\sin\left(\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\cdot\left(\frac{\left(e^x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot(\arctan x)-(e^x+\sqrt{1+x^2})\cdot\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{(\arctan x)^2}\right)$$

(iv)

$$\frac{di}{dx}=[\cosh x]'=\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]'=\frac{1}{2}\left[e^x+e^{-x}\right]'=\frac{1}{2}\left([e^x]'+[e^{(-1)x}]'\right)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$$

c)

(v)

$$\frac{dj}{dx}=[x^x]'=\left[e^{x\ln(x)}\right]'=e^{x\ln(x)}\cdot[x\ln(x)]'=e^{x\ln(x)}\cdot([x]'\cdot\ln(x)+[\ln(x)]'\cdot x)$$
$$=e^{x\ln(x)}\cdot(1\cdot\ln(x)+\frac{1}{x}\cdot x)=e^{x\ln(x)}\cdot(\ln(x)+1)$$

(vi)

$$\frac{dk}{dx}=\left[\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\right]'=\left[\exp\left(\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right)\right]'$$
$$=\exp\left(\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right)\cdot\left[\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'$$
$$=\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left[\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'$$
$$=\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left([\sin(x)]'\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\left[\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'\right)$$
$$=\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\frac{[1+\sqrt{x}+x^2]'}{1+\sqrt{x}+x^2}\right)$$
$$=\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x}{1+\sqrt{x}+x^2}\right)$$

Aufgabe 2

Der maximal Def. Bereich ist $\left[-\frac{3}{2}, 3\right)$, da für $x < -\frac{3}{2}$ dann $3 - 2x < 0$ währe und wir dann die Wurzel einer negativen Zahl ziehen würden. Des weiteren gilt für $x \geq 3$,
dass $\sqrt{3+2x} - x \leq \sqrt{9} - 3 = 0$, und da der natürliche Logarithmus nur für $x > 0$ definiert ist, gibt dies eine Definitionslücke. Insgesamt ist also $D_f = \left[-\frac{3}{2}, 3\right)$.

Für die Nullstellen setzen wir $f = 0$:

$$f = 0 \implies \ln\left(\sqrt{3+2x} - x\right) = 0 \implies \exp\left(\ln\left(\sqrt{3+2x} - x\right)\right) = \exp(0)$$
$$\implies \sqrt{3+2x} - x = 1 \implies \sqrt{3+2x} = x + 1 \implies 3 + 2x = x^2 + 2x + 1$$
$$\implies 2 = x^2 \implies x = \pm\sqrt{2}$$

Wir testen nun:

$$f(\sqrt{2}) = \ln\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) = \ln\left(\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{2}\right) = \ln(1) = 0$$

$$f(-\sqrt{2}) = \ln\left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) = \ln\left(\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2}\right) = \ln(2\sqrt{2} - 1) \neq 0$$

Also hat f eine Nullstelle bei $\sqrt{2} \in D_f$, aber nicht bei $-\sqrt{2}$.

Für Extrema bestimmen wir zuerst f':

$$\frac{df}{dx} = \left[\ln\left(\sqrt{3+2x} - x\right)\right]' = \frac{\left[\sqrt{3+2x} - x\right]'}{\sqrt{3+2x} - x} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3+2x} - x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3+2x} - x}$$

Für die Extrema setzen wir $f' = 0$:

$$f' = 0 \implies \frac{\frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3+2x} - x} = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1 = 0 \implies 1 = \sqrt{3+2x}$$
$$\implies 3 + 2x = 1 \implies x = -1$$

Wir prüfen $x = -1$ auf die hinreicheinde Bedingung der Extremalstelle und bestimmten f'':

$$f'' = \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3+2x} - x}\right]'$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1\right]' \cdot \left(\sqrt{3+2x} - x\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3+2x-1}}\right) \cdot \left[\sqrt{3+2x} - x\right]'}{\left(\sqrt{3+2x} - x\right)^2}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2x+3} - x}{\sqrt{(2x+3)^3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}} - 1\right)^2}{\left(\sqrt{2x+3} - x\right)^2}$$

Es gilt nun:

$$f''(-1) = \frac{-\frac{\sqrt{-2+3} + 1}{\sqrt{(-2+3)^3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{-2+3}} - 1\right)^2}{\left(\sqrt{-2+3} + 1\right)^2} = \frac{-\frac{1+1}{1} - 0^2}{4} = -\frac{1}{2} < 0$$

Damit ist $x = -1$ eine strikte lokale Maximalstelle von f.

Aufgabe 3