

## Hausaufgabe 10

---

### Aufgabe 1

a)

Für den Grenzwert  $\lim_{x \downarrow 3} f(x)$  gilt stets  $x > 3$  und damit  $|x - 3| = x - 3 > 0$ , also auch:

$$\lim_{x \downarrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{x - 3}{x - 3} = 1$$

Für den Grenzwert  $\lim_{x \uparrow 3} f(x)$  gilt stets  $x < 3$  und damit  $x - 3 < 0 < |x - 3|$ , also auch:

$$\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \uparrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{-(x - 3)}{x - 3} = -1$$

Da nun  $\lim_{x \downarrow 3} f(x) \neq \lim_{x \uparrow 3} f(x)$  gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  nicht existiert und  $f(x)$  nicht stetig ist.

b)

Da die Polynome  $x^2 + 5$  und  $1 - 3x$  für  $x = -2$  wohldefiniert sind, lässt sich hier der Grenzwert durch Einsetzen individuell bestimmen. Daraus folgt auch, dass (wie bei praktisch jedem Polynom) der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow -2}$  existiert (1.6) und dann mit (1.10) gilt:

$$\lim_{x \uparrow -2} x^2 + 5 = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 5 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -2} 1 - 3x = \lim_{x \rightarrow -2} 1 - 3x$$

Es folgt also:

$$\lim_{x \uparrow -2} x^2 + 5 = (-2)^2 + 5 = 9 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -2} 1 - 3x = 1 - 3(-2) = 7$$

Weiterhin gilt wie in a) für den Grenzwert  $\lim_{x \uparrow -2} g(x)$ , dass  $x < -2$  und damit nach

Konstruktion  $g(x) = x^2 + 5$ . Analog dazu gilt für  $\lim_{x \downarrow -2} g(x)$ , dass  $x > -2$  und damit nach Konstruktion  $g(x) = 1 - 3x$ . Es folgt also

$$\lim_{x \uparrow -2} g(x) = \lim_{x \uparrow -2} x^2 + 5 = 9 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -2} g(x) = \lim_{x \downarrow -2} 1 - 3x = 7$$

Da nun  $\lim_{x \uparrow -2} g(x) \neq \lim_{x \downarrow -2} g(x)$  gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$  nicht existiert und  $g(x)$  nicht stetig ist.

c) Analog zu Beispiel 1.18 lässt sich begründen, dass  $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$  und  $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$  gilt:

Zu gegebenem  $M > 0$  wähle  $a = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$ . Dann ist für  $0 < x < a$ :

$$\frac{1}{x^3} > \frac{1}{a^3} = M$$

Also gilt  $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$ . Analog dazu wählen wir zu gegebenem  $M > 0$  wieder  $b = -\frac{1}{\sqrt[3]{M}}$ .

Dann ist für  $b < x < 0$ :

$$\frac{1}{x^3} < \frac{1}{b^3} = -M$$

Also gilt  $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$ .

Weiterhin gilt für  $\lim_{x \downarrow 0} j(x)$  bzw.  $\lim_{x \uparrow 0} j(x)$  stets  $x \neq 0$  und damit auch

$$\lim_{x \downarrow 0} j(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \uparrow 0} j(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

Da nun  $\lim_{x \uparrow 0} j(x) \neq \lim_{x \downarrow 0} j(x)$  gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} j(x)$  nicht existiert und  $j(x)$  nicht stetig ist.

## Aufgabe 2

a)

Es gilt für  $x, y \in [0, 2]$  stets  $|x - y| \leq \max[0, 2] = 2$ , ebenso  $|x^2 - y^2| < \max[0, 2^2] = 4$ .

Wir wählen also  $L = 2$ . Es folgt:

$$\forall x, y \in [0, 2]: |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| \leq L \cdot |x - y| = |2x - 2y| \leq 4$$

Dies gilt, da stets  $x^2 = x \cdot x \leq 2 \cdot x$  für  $x \in [0, 2]$ . Damit ist  $f$  im Intervall  $[0, 2]$  Lipschitz-stetig.

b)

Wäre  $f$  im Intervall  $[0, 1]$  Lipschitz-stetig (Widerspruchsannahme), so gäbe es ein  $L \in \mathbb{R}, L \geq 0$  sodass gilt:

$$\forall x, y \in [0, 1]: |f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$$

Sei nun  $x = 2y \in [0, 1]$ . Wir formen die das Lipschitz-Kriterium leicht um. Es müsste gelten:

$$\forall y \in \left[0, \frac{1}{2}\right], x \in [0, 1], x = 2y: \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{\sqrt{2y} - \sqrt{y}}{2y - y} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{y}} \leq L$$

Es lässt sich jedoch zu jedem  $M > 0$  ein  $a = \frac{1}{M^2}$  wählen, sodass für  $0 < x < a$  gilt:

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{x} > \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{a}} = M$$

Es gilt also  $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{2} - 1}{x} = \infty$ , damit wäre die Funktion im gegebenen Intervall für  $x = 2y$  nach oben unbeschränkt. Dies stellt einen Widerspruch dar, da sonst  $L$  eine obere Schranke für eine nach oben unbeschränkte Funktion darstellen würde. Damit haben wir ein Gegenbeispiel gezeigt, folglich ist  $f$  nicht Lipschitz-stetig.

c)

Es sei eine Lipschitz-stetige Funktion  $f$  mit Definitionsbereich  $D$  und Lipschitzkonstante  $L \in \mathbb{R}$ ,  $L \geq 0$  gegeben. Es gilt also:

$$\forall x, y \in D: |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir nun  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ . Es folgt:

$$\forall x, y \in D, |x - y| < \delta: |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon$$

Damit ist  $f$  für jeden Häufungspunkt  $y \in D$  stetig, also ist  $f$  stetig.

### Aufgabe 3

a)

Es sei eine beliebige Folge  $x_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  gegeben. Die Exponentialfunktion ist stets größer 0 und streng monoton steigend (III 3.21). Weiterhin gilt:

$$\exp(0) = 1 \quad \text{und} \quad \exp(-1) = \frac{1}{e} < 1 \quad \text{also durch strenge Monotonie} \quad \forall x < 0: \exp(x) < 1$$

Weiterhin gilt stets  $x^2 \geq 0$  und  $\frac{-1}{x^2} < 0$  für  $x \neq 0$ . Daher folgt also für  $x \neq 0$ :

$$0 < \left| \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \left| x \cdot \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \right| < |x|$$

Da  $f(0) = 0$  gilt dann auch:

$$0 \leq |f(x_n)| \leq |x_n|$$

Es gilt jedoch nach Konstruktion von  $x_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0$$

Somit folgt mit dem Sandwich Lemma, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = 0$ . Weiterhin gilt nach Definition auch  $f(0) = 0$ , also folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 = f(0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

Damit ist  $f$  stetig in 0.

b)

Da  $\mathbb{R}$  dicht ist, folgt, dass 0 ein Häufungspunkt von  $\mathbb{R}$  ist.

Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $\delta = \varepsilon$ . Mit  $\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq \sin(x) \leq 1$  (\*) folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - 0| < \delta: |f(x) - f(0)| = |f(x)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \stackrel{*}{\leq} |x| < \delta = \varepsilon$$

Damit ist  $f$  stetig in 0.

## Aufgabe 4

a)

Sei als Abkürzung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \cos(x) - x$ , da  $\cos$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist.

Für  $a = 0 < b = 2\pi$  gilt:

$$f(a) = \cos(0) - 0 = 1 > \frac{1}{2} = h(0) \quad \text{und} \quad f(b) = \cos(2\pi) - 2\pi = 1 - 2\pi < \frac{1}{2} = h(\pi)$$

Sei nun  $m = \min\{f(x) \mid x \in [0, 2\pi]\}$  sowie  $M = \max\{f(x) \mid x \in [0, 2\pi]\}$ .

Es folgt, dass  $m \leq f(b) = 1 - 2\pi$  und  $M \geq f(a) = 1$ , also auch  $[1 - 2\pi, 1] \subseteq [m, M]$ .

Weiterhin gilt nach Zwischenwertsatz (2.9 b) nun  $f([a, b]) = [m, M]$ .

Da aber  $\frac{1}{2} \in [1 - 2\pi, 1] \subseteq [m, M]$  ist und  $f$  stetig ist, gilt also:

$$\exists c \in (a, b): f(c) = \frac{1}{2} = h(c)$$

Damit gibt es mindestens eine Lösung für die Gleichung  $h(x) = \cos(x) - x = f(x)$ .

b)

Wir definieren  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) - f(x - 1)$ . Es gilt:

$$g(0) = f(0) - f(-1) = f(0) - f(1) \quad \text{und} \quad g(1) = f(1) - f(0)$$

Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

**Fall 1:**  $f(0) > f(1)$ :

Dann gilt  $g(0) = f(0) - f(1) > 0$  und  $g(1) = f(1) - f(0) < 0$ . Da  $f$  stetig ist gibt es also nach Zwischenwertsatz ein  $x \in (0, 1)$  sodass  $g(x) = f(x) - f(x - 1) = 0$ , also  $f(x) = f(x - 1)$  gilt.

**Fall 2:**  $f(1) > f(0)$ :

Dies ist analog zu Fall 1:

$$(g(0) < 0) \wedge (g(1) > 0) \wedge (f \text{ stetig}) \implies \exists x \in (0, 1): g(x) = 0 \implies f(x) = f(x - 1)$$

**Fall 3:**  $f(1) = f(0)$ :

Damit ist die Aussage schon bewiesen, da  $1 \in [0, 1]$  und dann  $f(1) = f(1 - 1) = f(0)$  gilt.

Insgesamt gibt es stets mindestens ein  $x \in [0, 1]$ , sodass  $f(x) = f(x - 1)$  gilt.