Gruppe $\boxed{\mathbf{11}}$ Tobias Riedel, 379133
Analysis für Informatiker Phil Pützstück, 377247

Hausaufgabe 4

Aufgabe 1

a) $M_1 = \{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
Diese Menge besitzt sowohl Supremum als auch Infimum, da $(-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nur zwei Werte annehmen kann:

Proposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(-1)^n = 1$ falls n gerade, und $(-1)^n = -1$ für n ungerade:
Beweis (direkt). Wir betrachten zwei Fälle:
Fall 1: n gerade. So gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Es folgt:

$$(-1)^n = (-1)^{2k} \overset{4.16}{=} ((-1)^2)^k = 1^k = 1$$

Fall 2: n ungerade. So gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k + 1$. Es folgt:

$$(-1)^n = (-1)^{2k+1} \overset{4.16}{=} (-1)^{2k} \cdot (-1) \overset{4.16}{=} ((-1)^2)^k \cdot (-1) = 1^k \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$\square$

Da jede natürliche Zahl entweder gerade oder ungerade ist, kann$(-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ somit nur die Werte 1 und -1 annehmen. Daraus folgt, dass $M_1 = \{1 + (-1), 1 + 1\} = \{0, 2\}$.
Nach Definition 4.1 ist $s = 2$ nun eine obere Schranke von M_1, da $\forall m \in M_1 \colon s \geq m$ gilt.
Wir zeigen nun, dass s die kleinstmögliche obere Schranke von M_1 ist:
Sei $s' \in \mathbb{N}$ eine weitere obere Schranke von M_1. Somit muss $s' \geq 2$ gelten, da $2 \in M_1$.
Für $s' = 2$ folgt $s' = s$. Für $s' > 2$ folgt $s' > s$
Somit ist jede beliebige andere obere Schranke von M_1 in $\mathbb{N}$ entweder größer oder gleich s:

$$\forall s' \in \{x \in \mathbb{R} \mid \forall m \in M_1 \colon x \geq m\} \colon s' \geq s = 2$$

Nach Definition 4.3 ist s nun Supremum von M_1. Außerdem ist $s \in M_1$. Es folgt nach 4.4, dass $s = 2$ Supremum und Maximum von M_1 ist:

$$\sup M_1 = \max M_1 = 2$$

Analog dazu gilt, dass 0 Infimum und Minimum von M_1 ist:
$\forall m \in M_1 \colon 0 \leq m$ gilt, also ist $i = 0$ eine untere Schranke von M_1. Sei nun i' eine weiter untere Schranke von M_1. Somit muss $i' \leq 0$ gelten.
Für $i' = 0$ folgt $i' = i$. Für $i' < 0$ folgt $i' < i$. Also ist jede beliebige andere untere Schranke von M_1 kleiner oder gleich i:

$$\forall i' \in \{x \in \mathbb{R} \mid \forall m \in M_1 \colon x \leq m\} \colon i' \leq i = 0$$

Nach Definition 4.3 ist i nun Infimum von M_1. Außerdem ist $i \in M_1$. Es folgt nach 4.4, dass $i = 0$ Infimum und Minimum von M_1 ist:

$$\inf M_1 = \min M_1 = 0$$

b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 > 0\}$
Durch quadratische Ergänzung lässt sich die Ungleichung wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 \geq 0 \quad &\iff \quad \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} \geq 0 \\ &\iff \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \\ &\iff \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq -\frac{3}{4} \\ &\iff \quad \frac{4}{3} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq -1 \end{aligned}$$

Nach Satz 2.8 b4) gilt $\forall r \in \mathbb{R},\, r \neq 0\colon r^2 > 0$. Da für unsere Gleichung $x \in \mathbb{R}$ ist, folgt auch $\left(x + \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}$. Hinzukommend gilt $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a > 0, b > 0\colon a \cdot b > 0$. Unsere Ungleichung lässt sich in eben dieser Form schreiben:

$$q \cdot r > 0 \geq -1 \quad \text{mit} \quad q = \frac{4}{3} > 0,\ r = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > 0,\ x \neq -\frac{1}{2},\ q, r, x \in \mathbb{R}$$

Wir betrachten zwei Fälle für $x \in \mathbb{R}$:
Fall 1: $x \neq -\dfrac{1}{2}$. Somit ist $\left(x + \frac{1}{2}\right) \neq 0$, Satz 2.8 b4 hält und es folgt nach oben stehendem Weg, dass

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq -\frac{1}{2}\colon\ \frac{4}{3} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \geq -1$$

Fall 2: $x = -\dfrac{1}{2}$. Es folgt:

$$\frac{4}{3} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot 0 = 0 \geq -1$$

Damit ist die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, da $M_2 = \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ jedoch nicht beschränkt ist, kann $M_2 = \mathbb{R}$ weder Supremum noch Infimum besitzen.

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 9\}$
Nach Satz 4.13 und analog zu Beispiel 4.9 existiert genau ein $x > 0$ mit $x^2 = 9$.
Für das Supremum s von M_3 kann wie in Beispiel 4.5 e) weder $s^2 > 9$ noch $s^2 < 9$ gelten:
Wir führen den Beweis trotzdem einmal durch:

Fall 1: $s^2 < 9$. Somit ist $s \in M_3$. Nach Korollar 4.12 gibt es zu jedem $a, b \in \mathbb{R}$ ein $q \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, sodass $a < q < b$ gilt. Folglich gibt es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $s < q < 3 = |\sqrt{9}|$.
Nun folgt aus Satz 2.8 b4):

$$s < q < 3 \iff s^2 < q^2 < 9$$

Somit gibt es ein weiteres Element $q \in M_3$, welches größer als s ist. Also kann s im Fall $s^2 < 9$ keine obere Schranke von M_3 sein.

Fall 2: $s^2 > 9$. Für $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ ist

$$(s-h)^2 = s^2 - 2sh + h^2 > s^2 - 2sh$$

$$\text{also} \quad (s-h)^2 > 9, \quad \text{falls} \quad s^2 - 2sh > 9 \Longleftrightarrow h < \frac{s^2-9}{2s}.$$

$$\text{Mit} \quad h_0 := \frac{s^2-9}{4s} \quad \text{gilt für} \quad r := s - h_0 \quad \text{somit} \quad (r < s) \wedge (r^2 > 9).$$

Daher lässt sich zu jedem s mit $s^2 > 9$ eine kleinere obere Schranke r finden.

Somit muss für das Supremum $s^2 = 9$ gelten. Da es nach Satz 4.13 nur eine positive Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 9$ gibt, gilt nun $s = |\sqrt{9}| = 3$. Da $3 \notin M_3$, existiert für M_3 kein Maximum.

Die Existenz des Infimums $i = -|\sqrt{9}| = -3$ ist analog zu beweisen und geht daraus hervor, dass

$$x < -3 \iff -x > 3 \iff x^2 > 9 \notin M_3$$

Analog zum Supremum Fall 1, gibt es durch Korollar 4.12 für $i > -3$ immer ein $q \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit $-3 < q < i$, wodurch i keine untere Schranke von M_3 ist.
Weiterhin kann $i < -3$ ebenfalls nicht gelten, da sich analog zu Fall 2 vom Supremum dann eine größere untere Schranke $r \in \mathbb{Q}$ finden lässt:

$$r := i + \frac{9-i^2}{4i} \quad \text{mit} \quad (i < r) \wedge (r^2 > 9)$$

Somit muss $\inf M_3 = -3$ gelten. Wieder gibt es kein Minimum, da $-3 \notin M_3$.

d) $M_4 = \{2^{-m} + n^{-1} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Nach Korollar 2.9 d4) und Satz 2.8 b3) folgt für $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq n \overset{2.9\text{ d4}}{\iff} 1^{-1} = 1 > n^{-1} \quad \text{und} \quad n > 0 \overset{2.8\text{ b3}}{\iff} n^{-1} > 0$$

Somit folgt $1 \geq n^{-1} > 0$. Weiterhin für $m \in \mathbb{N}$:

$$2 \leq 2^m \overset{2.9\text{ d4}}{\iff} 2^{-1} \geq (2^m)^{-1} \overset{4.16}{=} 2^{-m} \quad \text{und} \quad 2^m > 0 \overset{2.8\text{ b3}}{\iff} 2^{-m} > 0$$

Somit folgt $2^{-1} \geq 2^{-m} > 0$. Also nun:

$$0 < 2^{-m} + n^{-1} \leq 1 + 2^{-1} \overset{4.16}{=} 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Also ist $s = \dfrac{3}{2}$ nach Definition das Supremum von M_4. Denn:
(S.1) Es gilt $\forall m \in M_4 \colon s \geq m$. Also ist $\dfrac{3}{2}$ eine obere Schranke.
(S.2) Sei s' eine weiter obere Schranke von M_4. Dann muss $s' \geq \dfrac{3}{2}$ gelten, da $\dfrac{3}{2} \in M_4$. Es folgt:

$$s' > \frac{3}{2} \implies s' > s \quad \text{und} \quad s' = \frac{3}{2} \implies s' = s$$

Also wäre s' immer größer oder gleich s, was s nach Definition zum Supremum macht.
Durch $s = \dfrac{3}{2} \in M_4$ gilt dann $s = \sup M_4 = \max M_4$.

Weiterhin ist $i = 0$ das Infimum von M_4. Denn:

(I.1) Es gilt $\forall m \in M_4 \colon i \leq m$. Also ist 0 eine untere Schranke.

(I.2) Sei i' eine weiter untere Schranke von M_4. Es folgt für $i' > 0$ nach 4.12:

$$\exists a, b \in \mathbb{N} \colon i' > \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} > 0$$

Durch $\forall n \in \mathbb{N} \colon 2^n > n$ folgt nach Korollar 2.9 d4) $\forall n \in \mathbb{N} \colon 2^{-n} < n^{-1}$.
Somit lassen sich einfach $m, n \in \mathbb{N}$ für ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{N}$ bestimmen, welche ein kleineres Element als q in M_4 darstellen. Zum Beispiel folgt mit $m = b$ und $n = 4^b \in \mathbb{N}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \colon \frac{a}{b} > (2^{-m} + n^{-1}) \in M_4 = 2^{-b} + (4^b)^{-1} > 0$$

Somit gibt es zu jedem $i' > 0$ ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $i' > q > 0$ und dazu wiederum ein $m \in M_4$ mit $i' > q > m > 0$. Also kann $i' > 0$ keine untere Schranke von M_4 sein.

Ist $i' < 0$, so gilt $i' < i$, also ist i' keine größere untere Schranke als i.

Somit ist $i = 0 = \inf M_4$ nach Definition des Infimums(4.3). M_4 hat kein Minimum, da $0 \notin M_4$.

Aufgabe 2

(i) $p = \sup A \iff (\forall a \in A \colon p \geq a) \wedge (\forall \epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0 \colon \exists x \in A \colon x > p - \epsilon)$

Zuerst zeigen wir die Richtung "$\implies$".
Es folgt nach Definition des Supremums, dass p eine obere Schranke sein muss:

$$p = \sup A \implies \forall a \in A \colon p \geq a$$

Da $\mathbb{Q}$ nach 4.12 dicht in $\mathbb{R}$ ist, und $A \subset \mathbb{R}$, lässt sich zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0$ ein $x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ finden, sodass $p > x > p - \epsilon$ gilt. Nach Beschränktheit von Teilmengen der reellen Zahlen folgt

$$A \subset \mathbb{R} \colon \forall a \in \mathbb{R} \colon \inf A \leq a \leq \sup A \implies a \in A$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: $p - \epsilon \geq \inf A$.
Nach Dichte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (4.12) lässt sich also ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $p > x > p - \epsilon > \inf A$ finden, also $p = \sup A > x > \inf A$. Daraus folgt $x \in A$, da auch $x \in \mathbb{Q}$ und $A \subset \mathbb{R}$ gelten.

Fall 2: $p - \epsilon < \inf A$.
Analog zu Fall 1 existiert ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $p = \sup A > x > \inf A > p - \epsilon$. Daraus folgt wieder, dass $x \in A$, da $x \in \mathbb{Q}$ und $A \subset \mathbb{R}$.

Wir haben gezeigt, dass wenn $p = \sup A$ gilt, p eine obere Schranke von A ist und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in A$ mit $p > x > p - \epsilon$ existiert.

Nun zeigen wir die Richtung "$\impliedby$".
Gegeben ist, dass p eine obere Schranke von A ist. Wir zeigen, dass p die kleinstmögliche obere Schranke von A ist, also $p = \sup A$: Sei p' eine weiter obere Schranke von A. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $p' \geq p$. Dann ist p immernoch die kleinstmögliche obere Schranke von A.

Fall 2: $p' < p$. Es ist gegeben, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in A$ mit $x > p - \epsilon$ existiert. Durch $p' < p$ folgt $p - p' > 0$. Sei nun also $\epsilon = p - p'$. Es folgt nach Gegebenheit, dass ein $x \in A$ mit $x > p - \epsilon = p - (p - p') = p'$ existiert. Somit kann p' keine obere Schranke von A sein.

Wir haben nun beide Richtungen der Äquivalenz gezeigt. Somit ist das zu Zeigende bewiesen: p ist genau dann das Supremum von A, wenn p eine obere Schranke von A ist und es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in A$ mit $x > p - \epsilon$ gibt. □

(ii) $A \subset B \implies (\sup A \leq \sup B) \wedge (\inf A \geq \inf B)$

Wir zeigen zuerst $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$:
Beweis (Kontraposition). Wir nehmen an, es gelte $\sup A > \sup B$. Da das Supremum die kleinste obere Schranke darstellt, folgt nun, dass mindestens ein Element in A größer als alle anderen in B ist. Das bedeutet aber wiederum, dass eben dieses Element nicht in B vertreten ist, also kann A keine Teilmenge von B sein:

$$\sup A > \sup B \implies \exists a \in A \colon \forall b \in B \colon a > b \implies \exists a \in A \colon a \notin B \implies A \not\subset B$$

Somit nach Prinzip der Kontraposition bewiesen:

$$(\sup A > \sup B \implies A \not\subset B) \overset{\text{Kontrapos.}}{\iff} (A \subset B \implies \sup A \leq \sup B)$$

Nun zeigen wir analog dazu $A \subset B \implies \inf A \geq \inf B$:
Beweis (Kontraposition). Wir nehmen an, es gelte $\inf A < \inf B$. Nach dem gleichen Prinzip wie zuvor folgt nun:

$$\inf A < \inf B \implies \exists a \in A \colon \forall b \in B \colon a < b \implies \exists a \in A \colon a \notin B \implies A \not\subset B$$

Somit ist wieder nach dem Prinzip der Kontraposition bewiesen:

$$(\inf A < \inf B \implies A \not\subset B) \overset{\text{Kontrapos.}}{\iff} (A \subset B \implies \inf A \geq \inf B)$$

Also nun:

$$\begin{aligned} &(A \subset B \implies \sup A \leq \sup B) \wedge (A \subset B \implies \inf A \geq \inf B) \\ \iff &(A \subset B \implies (\sup A \leq \sup B) \wedge (\inf A \geq \sup B)) \end{aligned}$$

□

(iii) $\lambda \geq 0 \implies (\inf \lambda A = \lambda \inf A) \wedge (\sup \lambda A = \lambda \sup A)$

Wir zeigen zuerst $\lambda \geq 0 \implies \sup \lambda A = \lambda \sup A$:
Für $\lambda = 0$ folgt:

$$\lambda \sup A = 0 \cdot \sup A = 0 = \sup \{0\} = \sup \{0 \cdot x \mid x \in A\} = \sup \lambda A$$

Für $\lambda > 0$ folgt:

$$\begin{aligned} s = \sup A &\iff \forall a \in A \colon s \geq a \\ &\iff \forall a \in A \colon \lambda s \geq \lambda a \\ &\iff \forall a \in \lambda A \colon \lambda s \geq a \\ &\iff \lambda s = \sup \lambda A \\ &\iff \lambda \sup A = \sup \lambda A \end{aligned}$$

In beiden Fällen folgt, dass $\sup \lambda A = \lambda \sup A$.

Analog dazu lässt sich zeigen, dass $\lambda \geq 0 \implies \inf \lambda A = \lambda \inf A$. Wir unterscheiden zwei Fälle.
Fall 1: $\lambda = 0$. Es folgt:

$$\lambda \inf A = 0 \cdot \inf A = 0 = \inf \{0\} = \inf \{0 \cdot x \mid x \in A\} = \inf \lambda A$$

Fall 2: $\lambda > 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned} i = \inf A &\iff \forall a \in A\colon i \leq a \\ &\iff \forall a \in A\colon \lambda i \leq \lambda a \\ &\iff \forall a \in \lambda A\colon \lambda i \leq a \\ &\iff \lambda i = \inf \lambda A \\ &\iff \lambda \inf A = \inf \lambda A \end{aligned}$$

In beiden Fällen folgt, dass $\inf \lambda A = \lambda \inf A$
Wir haben nun gezeigt, dass $\lambda \geq 0 \implies (\inf \lambda A = \lambda \inf A) \wedge (\sup \lambda A = \lambda \sup A)$ $\square$

(iv) $\sup A + B = \sup A + \sup B$

$$\begin{aligned} s = \sup A + \sup B \quad &\iff \quad \forall a \in A, \forall b \in B\colon s \geq a + b \\ &\iff \quad \forall x \in \{a + b \mid a \in A, b \in B\}\colon s \geq x \\ &\iff \quad \forall x \in A + B\colon s \geq x \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\sup A + \sup B$ eine obere Schranke von $A + B$ ist. Sei nun s' eine andere obere Schranke von $A + B$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $s' > s$. Es folgt, dass s immernoch die kleinste obere Schranke von $A + B$ ist.

Fall 2: $s' < s$.
Dann exisitert ein $\epsilon > 0$ mit $s - \epsilon = s'$. Es folgt, dass $s' = (\sup A - \frac{\epsilon}{2}) + (\sup B - \frac{\epsilon}{2})$.
Nach Nr 2 (i) folgt nun, dass ein $x \in A$ mit $\sup A > x > \sup A - \frac{\epsilon}{2}$ und ein $y \in B$ mit $\sup B > y > \sup B - \frac{\epsilon}{2}$ existiert. Also:

$$s' < (x + y) \in A + B$$

Folglich kann s' keine obere Schranke von $A + B$ sein. Somit ist s die kleinstmögliche obere Schranke von $A + B$, das Supremum: $\sup A + \sup B = \sup A + B$. $\square$

(v) $\sup_{x \in A}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x)$
Wir definieren zur Leserlichkeit:

$$S_f := \sup_{x \in A}(f(x)) \qquad S_g := \sup_{x \in A}(g(x)) \qquad S_{f+g} := \sup_{x \in A}(f(x) + g(x))$$

Der wesentlich Unterschied ist, dass f und g für S_{f+g} immer an dem gleichen $x \in A$ ausgewertet werden, während S_f und S_g unabhängig voneinander bestimmt werden.
Es seien $a, b \in A$ gegeben sodass $f(a) = S_f$ und $g(b) = S_g$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $a = b$
Es folgt, dass auch $g(a) = S_g$ ist. Somit ist das Supremum von f und g das Bild von a unter der jeweiligen Funktion. Es folgt:

$$\forall x \in A\colon f(a) + g(a) \geq f(x) + g(x) \implies S_f + S_g = S_{f+g}$$

Fall 2: $a \neq b$
Es folgt, dass $g(a) \leq S_g$ bzw. $f(b) \leq S_f$. Somit gilt:

$$g(a) \leq S_g \implies f(a) + g(a) \leq S_f + S_g \quad \text{und} \quad f(b) \leq S_f \implies f(b) + g(b) \leq S_f + S_g$$

oder generell:

$$\forall x \in A\colon f(x) + g(x) \leq S_f + S_g \iff S_{f+g} \leq S_f + S_g$$

Somit gilt für alle Fälle, dass $S_{f+g} \leq S_f + S_g$. □

Aufgabe 3

Zu zeigen: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
Beweis (indirekt). Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
Also gibt es teilerfremde $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ (insbesondere sind nicht a und beide gerade) sodass gilt:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \iff \frac{a^2}{b^2} = 2 \iff a^2 = 2b^2$$

Daraus folgt, dass a^2 gerade ist.

Lemma Wenn a^2 gerade ist, so ist auch a gerade.
Beweis (Kontraposition). Wir nehmen an a ist ungerade. Somit gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2k+1$.

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Somit ist a^2 auch ungerade. Also ist a^2 nicht gerade wenn a nicht gerade ist. Es folgt:

$$(a \text{ ungerade} \implies a^2 \text{ ungerade}) \overset{\text{Kontrapos.}}{\iff} (a^2 \text{ gerade} \implies a \text{ gerade})$$

□

Somit wissen wir nun, dass a auch gerade ist. Also gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2k$ und $a^2 = 4k^2$.
Aus vorheriger Gleichung folgt:

$$a^2 = 2b^2 \iff 4k^2 = 2b^2 \iff 2k^2 = b^2$$

Somit ist b^2 gerade. Wir wissen aber nach dem Lemma, dass nun b ebenfalls gerade sein muss. Wir haben jedoch angenommen, dass a und b teilerfremd sind, insbesondere, dass nicht beide gerade sind. Somit ergibt sich ein Widerspruch (und man könnte dieses $\frac{a}{b}$ unendlich oft nach dem gleichen Schema kürzen). Somit muss unsere Annahme, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ falsch sein. Es folgt, das $\sqrt{2}$ irrational ist, also $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Aufgabe 4

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, gibt es für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ ein $r \in \mathbb{Q}$ sodass $x < r < y$.
Aus $r < y$ folgt weiterhin $y - r > 0$, also auch $\frac{y-r}{2} > 0$. Durch die archimedische Eigenschaft von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ (Satz 4.10) existiert nun ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n \cdot \frac{y-r}{2} > 1 \iff \frac{y-r}{2} > \frac{1}{n} \iff y > r + \frac{2}{n}$$

Durch $x < r$ sowie $2 > \sqrt{2}$ (4.14 b) folgt dann:

$$y > r + \frac{2}{n} > r + \frac{\sqrt{2}}{n} > x$$

Somit gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ sodass:

$$s = r + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{Q}^{\complement}, \quad x < s < y$$

Dies zeigt, dass die irrationalen Zahlen $\mathbb{Q}^{\complement}$ dicht in $\mathbb{R}$ sind. $\square$