

Hausaufgabe 11

In den folgenden Aufgaben steht "Verkettung" für Addition, Subtraktion, Multiplikation, Skalierung oder Komponierung von Funktionen.

Aufgabe 1

a)

(i) Nach Skript ist jedes Polynom und $\ln x$ als Umkehrfunktion von e^x differenzierbar und Verkettung dieser Funktionen erhält dies. $|a - 1|$ ist hier nur eine konstante, deswegen ist f auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Mit VII 1.11 sowie der Produkt und Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= [x^\alpha \cdot \ln(x + |\alpha - 1|)]' \stackrel{\text{P}}{=} [x^\alpha]' \cdot \ln(x + |\alpha - 1|) + x^\alpha \cdot [\ln(x + |\alpha - 1|)]' \\ &\stackrel{\text{K}}{=} \alpha x^{\alpha-1} \cdot \ln(x + |\alpha - 1|) + x^\alpha \cdot \left(\frac{[x + |\alpha - 1|]'}{x + |\alpha - 1|} \right) \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \cdot \ln(x + |\alpha - 1|) + \frac{x^\alpha}{x + |\alpha - 1|}\end{aligned}$$

(ii) Nach Skript ist jedes Polynom, $\sin x$, $\cos x$ auf \mathbb{R} und jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Verkettung dieser Funktionen erhält Differenzierbarkeit, also ist g auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Mit Satz 1.7 und der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx} &= \left[\cos \left(\sin \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right) \right]' = \cos' \left(\sin \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right) \cdot \left[\sin \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right]' \\ &= -\sin \left(\sin \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right) \cdot \left(\sin' \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left[x^2 + \frac{1}{x} \right]' \right) \\ &= -\sin \left(\sin \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right) \cdot \left(\cos \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left([x^2]' + \left[\frac{1}{x} \right]' \right) \right) \\ &= -\sin \left(\sin \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right) \cdot \cos \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(2x - \frac{1}{x^2} \right)\end{aligned}$$

b)

(iii) Nach Skript ist jedes Polynom, $\sin x$, $\cos x$, e^x auf \mathbb{R} und jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Ebenso ist die Umkehrfunktion f^{-1} einer differenzierbaren, stetigen und injektiven Funktion f ebenfalls differenzierbar in den Punkten x wo $f'(x) \neq 0$ ist. Verkettung dieser Funktionen erhält Differenzierbarkeit.

Es ist \sqrt{x} die Umkehrfunktion des Polynoms x^2 und damit auch differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich. Analog dazu ist \arctan die Umkehrfunktion von $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ und damit auch differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich. Insgesamt ist also h auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Mit Satz 1.7, 1.10 und der Ketten und Quotientenregel folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= \left[\cos \left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x} \right) \right]' = -\sin \left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x} \right) \cdot \left[\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x} \right]' \\ &= -\sin \left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x} \right) \cdot \left(\frac{[e^x + \sqrt{1+x^2}]' \cdot (\arctan x) - (e^x + \sqrt{1+x^2}) \cdot [\arctan x]'}{(\arctan x)^2} \right) \\ &= -\sin \left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x} \right) \cdot \left(\frac{\left(e^x + \left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) \right) \cdot (\arctan x) - (e^x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \left(\frac{1}{\tan^{-1}(\arctan x)} \right)}{(\arctan x)^2} \right) \\ &= -\sin \left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x} \right) \cdot \left(\frac{\left(e^x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \cdot (\arctan x) - (e^x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} \right)}{(\arctan x)^2} \right) \\ &= -\sin \left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x} \right) \cdot \left(\frac{e^x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\arctan(x)} - \frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{(x^2+1) \arctan^2(x)} \right) \end{aligned}$$

(iv) Nach Skript ist e^x auf \mathbb{R} differenzierbar, also ist i auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Mit Satz 1.7 und der Kettenregel folgt:

$$\frac{di}{dx} = [\cosh x]' = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{1}{2} [e^x + e^{-x}]' = \frac{1}{2} ([e^x]' + [e^{(-1)x}]') = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

c) (v) Nach Skript ist jedes Polynom sowie e^x und $\ln x$ als dessen Umkehrfunktion differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich. Also ist auch j als Verkettung dieser differenzierbar.

Mit Satz VI 2.14, VII 1.7, 1.11 und der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dj}{dx} &= [x^x]' = [e^{x \ln(x)}]' = e^{x \ln(x)} \cdot [x \ln(x)]' = e^{x \ln(x)} \cdot ([x]' \cdot \ln(x) + [\ln(x)]' \cdot x) \\ &= e^{x \ln(x)} \cdot (1 \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot x) = e^{x \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) \\ &= x^x \cdot (\ln(x) + 1) \end{aligned}$$

(vi) Wie zuvor erwähnt sind alle Polynome, e^x , $\sin x$, $\cos x$ und auch $\ln x$ als Umkehrfunktion von e^x sowie \sqrt{x} als Umkehrfunktion von x^2 auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Damit ist k als Verkettung dieser Funktionen ebenfalls auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Mit Satz 1.7, 1.10, 1.11 und der Produkt und Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{dk}{dx} &= \left[\left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right)^{\sin x} \right]' = \left[\exp \left(\sin(x) \cdot \ln \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right) \right) \right]' \\
&= \exp \left(\sin(x) \cdot \ln \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right) \right) \cdot \left[\sin(x) \cdot \ln \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right) \right]' \\
&= \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right)^{\sin x} \cdot \left[\sin(x) \cdot \ln \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right) \right]' \\
&= \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right)^{\sin x} \cdot \left([\sin(x)]' \cdot \ln \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right) + \sin(x) \cdot \left[\ln \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right) \right]' \right) \\
&= \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right)^{\sin x} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right) + \sin(x) \cdot \frac{[1 + \sqrt{x} + x^2]'}{1 + \sqrt{x} + x^2} \right) \\
&= \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right)^{\sin x} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln \left(1 + \sqrt{x} + x^2 \right) + \sin(x) \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x}{1 + \sqrt{x} + x^2} \right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Der maximale reelle Def. Bereich ist $\left[-\frac{3}{2}, 3\right)$, da für $x < -\frac{3}{2}$ dann $3 - 2x < 0$ wäre und wir dann die Wurzel einer negativen Zahl ziehen würden. Des weiteren gilt für $x \geq 3$, dass $\sqrt{3 + 2x} - x \leq \sqrt{9} - 3 = 0$, und da der natürliche Logarithmus nur für $x > 0$ definiert ist, gibt dies eine Definitionslücke. Insgesamt ist also $D_f = \left[-\frac{3}{2}, 3\right)$.

Für die Nullstellen setzen wir $f = 0$:

$$\begin{aligned}
f = 0 &\implies \ln \left(\sqrt{3 + 2x} - x \right) = 0 \implies \exp \left(\ln \left(\sqrt{3 + 2x} - x \right) \right) = \exp(0) \\
&\implies \sqrt{3 + 2x} - x = 1 \implies \sqrt{3 + 2x} = x + 1 \implies 3 + 2x = x^2 + 2x + 1 \\
&\implies 2 = x^2 \implies x = \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Wir testen nun:

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{2}) &= \ln \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right) = \ln \left(\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{2} \right) = \ln(1) = 0 \\
f(-\sqrt{2}) &= \ln \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right) = \ln \left(\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2} \right) = \ln(2\sqrt{2} - 1) \neq 0
\end{aligned}$$

Also hat f eine Nullstelle bei $\sqrt{2} \in D_f$, aber nicht bei $-\sqrt{2}$.

Für mögliche Extrema bestimmen wir zuerst f' : Nach Satz 1.10 und wie in Aufgabe 1 bereits erwähnt sind $\ln x$, \sqrt{x} und jedes Polynom auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. f ist eine Verkettung dieser Funktionen und erhält damit die Differenzierbarkeit.

$$\frac{df}{dx} = \left[\ln(\sqrt{3+2x} - x) \right]' = \frac{[\sqrt{3+2x} - x]'}{\sqrt{3+2x} - x} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3+2x} - x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3+2x} - x}$$

Nun setzen wir $f' = 0$:

$$\begin{aligned} f' = 0 &\implies \frac{\frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3+2x} - x} = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1 = 0 \implies 1 = \sqrt{3+2x} \\ &\implies 3+2x = 1 \implies x = -1 \end{aligned}$$

Damit ist $x = -1$ ein möglicher Kandidat für Extrema von f .

Aufgabe 3

a) Da jedes Polynom und e^x sowie deren Komponierung auf ganz \mathbb{R} differenzierbar sind, ist auch f differenzierbar.

$$\begin{aligned} f' = \frac{df}{dx} &= \left[\exp(2x^4 - x^2 - 1) \right]' = \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot [2x^4 - x^2 - 1]' \\ &= \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (8x^3 - 2x) \end{aligned}$$

f' ist immernoch differenzierbar, da es wieder nur eine Verkettung von Polynomen und Exponentialfunktionen ist.

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{df'}{dx} = \left[\exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (8x^3 - 2x) \right]' \\ &= [\exp(2x^4 - x^2 - 1)]' \cdot (8x^3 - 2x) + \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot [8x^3 - 2x]' \\ &= \left(\exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (8x^3 - 2x) \right) \cdot (8x^3 - 2x) + \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (24x^2 - 2) \\ &= \exp(2x^4 - x^2 - 1)(64x^6 - 32x^4 + 28x^2 - 2) \end{aligned}$$

Wir setzen $f' = 0$. Da nach (III 3.21) stets $\exp(x) \neq 0$ ist und \mathbb{R} ein Körper, also ein Integritätsbereich mit Nullteilerfreiheit ist, genügt es hier das Polynom $8x^3 - 2x$ gleich 0 zu setzen. Weiterhin ist $8x^3 - 2x = x(8x^2 - 2)$ also ist $x = 0$ eine Nullstelle von $8x^3 - 2x$. Wir lösen also $8x^2 - 2$ mit der quadratischen Formel:

$$8x^2 - 2 = 0 \implies x = \frac{\pm\sqrt{-4 \cdot 8 \cdot (-2)}}{2 \cdot 8} = \frac{\pm\sqrt{64}}{16} = \frac{\pm 8}{16} = \pm \frac{1}{2}$$

Somit haben wir mögliche Extremalstellen $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}$. Wir überprüfen dies durch einsetzen in f'' . Wir verwenden wieder, dass stets $\exp(x) > 0$ (*):

$$\begin{aligned} f''(0) &= \exp(-1)(-2) \stackrel{*}{<} 0 \\ f''\left(\frac{1}{2}\right) &= \exp\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1\right)(1 - 2 + 7 - 2) = 4 \exp\left(-\frac{9}{8}\right) \stackrel{*}{>} 0 \\ f''\left(-\frac{1}{2}\right) &= \exp\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1\right)(1 - 2 + 7 - 2) = 4 \exp\left(-\frac{9}{8}\right) \stackrel{*}{>} 0 \end{aligned}$$

Also gilt nach (VII 2.9), dass $x_1 = 0$ eine strikte lokale Maximalstelle ist, und $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$ strikte lokale Minimalstellen sind. Weiterhin ist e^x sowie $2x^4 - x^2 - 1$ nach oben unbeschränkt, daher kann es kein globales Maximum geben. Durch $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^4 - x^2 - 1 = \infty$ sowie $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^4 - x^2 - 1 = \infty$ folgt auch $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f = \infty$. Da also f keine weiteren Extremalstellen besitzt und für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ bestimmt gegen ∞ divergiert, folgt, dass $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$ mit $f(x_3) = f(x_2) = \exp\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1\right) = \exp\left(-\frac{9}{8}\right)$ wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion (III 3.21) auch globale Minimalstellen von f sind.

b) Nach Satz 1.10 und wie zuvor erwähnt ist $\ln x$ auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Da also g eine Verkettung von Polynomen und dem natürlichen Logarithmus ist, ist auch g differenzierbar.

$$g' = \frac{dg}{dx} = [3 \ln(3x^2 + 1)]' = 3[\ln(3x^2 + 1)]' = 3 \left(\frac{[3x^2 + 1]'}{3x^2 + 1} \right) = \frac{18x}{3x^2 + 1}$$

Nach Skript ist jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar, also g'' .

$$g'' = \frac{dg'}{dx} = \left[\frac{18x}{3x^2 + 1} \right]' = \frac{[18x]'(3x^2 + 1) - (18x)[3x^2 + 1]'}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{54x^2 - 108x + 18}{(3x^2 + 1)^2}$$

Wir setzen also $g' = 0$:

$$g' = 0 \implies \frac{18x}{3x^2 + 1} = 0 \implies 18x = 0 \implies x_1 = 0$$

Es ist $0 \in D_g = [-1, 1]$, also überprüfen wir durch Einsetzen in g'' :

$$g''(0) = \frac{18}{1} = 18 > 0$$

Damit ist nach (VII 2.9) $x_1 = 0$ eine lokale strikte Minimalstelle von g . Wir überprüfen die Randwerte und den Wert von $g(0)$:

$$g(0) = 3 \ln(1) = 0$$

$$g(-1) = 3 \ln(4) > 0 \quad \text{und} \quad g(1) = 3 \ln(4) > 0$$

Da g keine weiteren Extremalstellen besitzt, folgt, dass $x_1 = 0$ mit $g(x_1) = 0$ auch das globale Minimum von g darstellt.

Aufgabe 4

a)

Da sowohl x^2 als auch $\ln x$ auf $(0, \infty)$ stetig und differenzierbar sind, ist auch f als Verkettung dieser im Definitionsbereich $[a, b] \subset (0, \infty)$ stetig und differenzierbar.

b)

Da $\ln x$ die Umkehrfunktion von e^x ist und e^x streng monoton steigend auf ganz \mathbb{R} ist, ist auch $\ln x$ streng monoton steigend auf ihrem Definitionsbereich (V 1.9). Weiterhin ist nach V 1.8 auch x^2 im Intervall $(0, \infty)$ streng monoton steigend. Es gilt also stets

$$\forall x, y \in [a, b], x < y: (\ln x < \ln y) \wedge (x^2 < y^2)$$

Daher folgt auch dass das Produkt der Funktionen streng monoton steigt. In unserem Fall ist $a+1$ ja eine Konstante, welche die Monotonie nicht beeinflusst. Daher ist f ebenfalls auf ihrem Definitionsbereich streng monoton steigend.

c)

Aus Aufgabenteil b) folgt, dass die Extremalstellen von f die Randwerte von f sind. Da f also streng monoton steigt gilt stets:

$$\forall x \in [a, b]: f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Damit ist a die globale Minimalstelle von f und b die globale Maximalstelle von f .

d)

Es ist

$$\begin{aligned} f' &= \left[x^2 \ln(x - a + 1) \right]' = [x^2]' \ln(x - a + 1) + x^2 [\ln(x - a + 1)]' \\ &= 2x \ln(x - a + 1) + \frac{x^2}{x - a + 1} \leq 2x \ln(x - a + 1) + x^2 \end{aligned}$$

Es sind x sowie x^2 und $\ln x$ streng monoton steigend auf $[a, b] \subset (0, \infty)$, also wählen wir den oberen Randwert, b , um eine von a, b abhängige obere Schranke der Ableitung von f zu erhalten:

$$\forall x \in [a, b]: f'(x) \leq 2x \ln(x - a + 1) + x^2 \leq 2b \ln(b - a + 1) + b^2$$

Sei also im folgenden $L(a, b) = 2b \ln(b - a + 1) + b^2$. Es folgt durch den Mittelwertsatz:

$$\forall x, y \in [a, b] \exists c \in [a, b]: \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = f'(c) \leq L \iff |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Aufgabe 5

Seien $x, y \in (a, b)$ gegeben. Es gelte o.B.d.A., dass $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert nun ein $c \in (a, b)$ sodass durch $\forall x \in (a, b): f'(x) > 0$ nun gilt:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0 \iff f(y) > f(x)$$

Damit ist f auf (a, b) streng monoton steigend.

Seien $x, y \in (a, b)$ gegeben. Es gelte o.B.d.A., dass $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert nun ein $c \in (a, b)$ sodass durch $\forall x \in (a, b): f'(x) = 0$ nun gilt:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) = 0 \iff f(y) = f(x)$$

Damit ist f auf (a, b) konstant.