

## Hausaufgabe 7

---

### Aufgabe 1

a)

Die Folge der Partialsummen lässt sich wie folgt darstellen:

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sum_{k=1}^n a_k$$

b)

Wir zeigen, dass die Folge  $s_n$  der Partialsummen monoton steigt. Man betrachte  $s_{n+1} - s_n$ :

$$s_{n+1} - s_n = \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right) - \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) = a_{n+1} + \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) - \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) = a_{n+1}$$

Wir wissen weiterhin, dass  $a_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Beweis (Induktion):

(IA)  $k = 1$ . Es gilt

$$\frac{3^1}{5^1 + 1} = \frac{3}{5} \geq 0$$

Also gilt die Aussage für  $k = 1$ .

(IS) Die Behauptung gelte für ein  $k \in \mathbb{N}$ .  $k \mapsto k + 1$ :

$$\frac{3^{k+1}}{5^{k+1} + 1} = \frac{3^k \cdot 3}{5^k \cdot 5 + 1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3^k}{5^k + \frac{1}{5}} \geq \frac{3}{5} \cdot \frac{3^k}{5^k + 1}$$

Wir wissen, dass  $\frac{3^k}{5^k + 1} \geq 0$ , also folgt auch  $\frac{3}{5} \cdot \frac{3^k}{5^k + 1} \geq 0$ . Insgesamt gilt also die Behauptung auch für  $k + 1$ .

Damit ist  $a_k$  stets größer 0 und es folgt  $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$ . Also ist  $s_n$  monoton wachsend.

c)

Es gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}: a_k = \frac{3^k}{5^k + 1} \leq \frac{3^k}{5^k} \leq \frac{1}{5^k} = \left( \frac{1}{5} \right)^k$$

d)

Da  $\frac{1}{5} \neq 1$  lässt sich die geometrische Summenformel (II Satz 3.5) wie folgt einsetzen:

$$\forall n \in \mathbb{N}: s_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{5} \right)^k = \frac{1 - \left( \frac{1}{5} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}}$$

Sei also  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{5} \right)^k$ . Durch  $\forall k \in \mathbb{N}: a_k \geq 0$  folgt  $|a_k| = a_k$ .

Weiterhin gilt  $\forall k \in \mathbb{N}: a_k = |a_k| \leq c_k$ . Da  $c_k$  nach Satz 3.5 (geometrische Reihe) konvergiert, folgt nach dem Minorantenkriterium (3.17), dass auch  $a_k$  konvergiert.

## Aufgabe 2

Wir wenden Partialbruchzerlegung auf den gegebenen Bruch an:

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \frac{a}{(2k+1)} + \frac{b}{(2k+5)} \iff 1 = a(2k+5) + b(2k+1)$$

Nun stellen wir nach  $k$  um:

$$1 = a(2k+5) + b(2k+1) = 2ak + 5a + 2bk + b = k(2a+2b) + (5a+b)$$

Somit haben wir nach Koeffizientenvergleich zwei Gleichungen:  $\text{II} := (2a+2b=0)$  und  $\text{III} := (5a+b=1)$ . Wir lösen dies durch addieren der Gleichungen:

$$\text{II} + \text{III} \cdot (-2) \implies 2a - 10a + 2b - 2b = 0 - 2 \iff -8a = -2 \iff a = \frac{1}{4}$$

Nun lässt sich  $a = \frac{1}{4}$  in die andere Gleichung einsetzen:

$$5 \cdot \frac{1}{4} + b = 1 \iff b = -\frac{1}{4}$$

Also gilt nach Prinzip der Partialbruchzerlegung nun

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \frac{1}{4(2k+1)} - \frac{1}{4(2k+5)}$$

Ebenso gilt also

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+1)} - \frac{1}{4(2k+5)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+1)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)}$$

Durch Indizesverschiebung erhalten wir

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+1)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)}$$

Dies entspricht einer teleskopischen Summe, also folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} &= \sum_{k=0}^1 \frac{1}{4(2k+5)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} \\ &= \sum_{k=0}^1 \frac{1}{4(2k+5)} = \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{20} + \frac{1}{28} = \frac{3}{35} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \frac{3}{35}$$

Also konvergiert die Reihe

$$(s_n)_{n \geq 2} := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)} \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{3}{35}$$

### Aufgabe 3

a)

Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} := (-1)^{k-1} \frac{2^k}{k^k}$ . Wir betrachten

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{\left( \frac{(-1)^k \cdot 2^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \right)}{\left( \frac{(-1)^{k-1} \cdot 2^k}{k^k} \right)} \right| = \frac{\left( \frac{2^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \right)}{\left( \frac{2^k}{k^k} \right)} = \frac{2^{k+1} \cdot k^k}{(k+1)^{k+1} \cdot 2^k} = \frac{2k^k}{(k+1)^{k+1}} \\ &= \frac{2}{k+1} \cdot \left( \frac{k}{k+1} \right)^k \stackrel{k \geq 0}{=} \frac{2}{k+1} \cdot \frac{1}{\left( \frac{k+1}{k} \right)^k} = \frac{2}{k+1} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k} \end{aligned}$$

Wir wissen aus Hausaufgabe 5, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{k} \right)^k = e^x \quad \text{also auch} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k} = \frac{1}{e}$$

Somit lassen sich die Grenzwertsätze wie folgt anwenden:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k+1} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k+1} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k} = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0$$

Damit gilt nun  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$  und nach dem Quotientenkriterium konvergiert die gegebene Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut. Offensichtlich konvergiert die Reihe dann auch (3.14).

b)

Wir wissen nach Skript und den letzten Hausaufgaben, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$  eine monoton fallende und reelle Nullfolge ist. Nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 3.12) folgt dann, dass  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$  konvergiert. Weiterhin gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Hinzukommend gilt

$$\forall k \geq 1: \sqrt{k} \leq k \iff \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$$

Somit lässt sich durch das Majorantenkriterium (Satz 3.17) folgendes schließen:

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} (d_k)_{k \in \mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  die harmonische Reihe. Wir wissen nach Satz 3.6, dass diese bestimmt gegen  $\infty$  divergiert. Weiterhin gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}: |a_k| = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k} = d_k \geq 0$$

Somit divergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right|$  ebenfalls. Also ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$  konvergent, aber nicht absolut konvergent.

c)

Es sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} := \frac{k^2}{2^k}$ . Es gilt:

$$\left| \frac{a^{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(k+1)^2}{\frac{2^{k+1}}{k^2}} \right| = \left| \frac{(k+1)^2 \cdot k^2}{2^{k+1}} \right| = \frac{(k+1)^2}{2 \cdot k^2} = \frac{k^2 + 2k + 1}{2k^2} = \frac{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}}{2}$$

Wir betrachten nun  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}}{2}$ . Da 1 und 2 Konstanten sind und  $x_k = \frac{2}{k}$  und  $y_k = \frac{1}{k^2}$  Nullfolgen sind (Bsp. 1.11), lassen sich die Limitenregeln wie folgt anwenden:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}}{2} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2}}{\lim_{k \rightarrow \infty} 2} = \frac{1 + 0 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

Daher gilt das Quotientenkriterium für die gegebene Reihe:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

und somit ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$  absolut konvergent. Offensichtlich ist die Reihe dann auch konvergent (Satz 3.16).

d)

e)

Die gegebene Reihe lässt sich wie folgt umformen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k}{4^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k}{4^k} \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\pi}{4} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\pi}{4} \right)^k}{k!}$$

Da  $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$  gilt, folgt nach Satz 3.19:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\pi}{4} \right)^k}{k!} = \exp \left( \frac{\pi}{4} \right) = e^{\pi/4}$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\left( \frac{\pi}{4} \right)^k}{k!} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\pi}{4} \right)^k}{k!}$$

Somit konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k}{4^k k!}$  generell und absolut gegen  $e^{\pi/4}$ .

## Aufgabe 4

Da  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergiert, muss nach Definition auch  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergieren. Nach Korollar 3.9 ist  $|a_k|$  also eine Nullfolge. Also existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass gilt:

$$\forall k > N: |a_k| < 1$$

Weiterhin gilt  $x^2 < x$  für  $|x| < 1$ , also ist  $|a_k|$  eine Majorante und es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass das Majorantenkriterium für  $a_k^2$  gilt:

$$\forall k > N: |a_k^2| \leq |a_k|$$

Damit gilt nach dem Majorantenkriterium, dass die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  absolut konvergiert und damit auch konvergiert.

## Aufgabe 5

$|e^x - s_n(x)|$  lässt sich wie folgt nach oben abschätzen. Wir benutzen den Satz 3.5 der geometrischen Reihe (G) und dass  $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  gilt (X):

$$\begin{aligned} |e^x - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| < \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{(n+1)!} \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x^k| \stackrel{(X)}{<} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \stackrel{(G)}{=} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Da  $e^x$  streng monoton wachsend ist (Satz 3.21) gilt außerdem:

$$\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): e^{-0.5} < e^x$$

Also lässt sich die gegebene Ungleichung nun wie folgt darstellen. Sei  $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ :

$$|e^x - s_n(x)| < \frac{2}{(n+1)!} \leq \frac{e^{-1/2}}{10^{16}} < \frac{e^x}{10^{16}}$$

Durch ausprobieren von ein paar Werten für  $n$  lässt sich dies schnell eingrenzen:

$$\frac{2}{(18+1)!} < \frac{e^{-1/2}}{10^{16}} < \frac{2}{(17+1)!}$$

Also kann die Gültigkeit dieser Ungleichung für alle  $n \geq 18$  gewährleistet werden.