Gruppe $\boxed{\textbf{14}}$
Datenstrukturen und Algorithmen

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 5

Aufgabe 1

a)

Wir zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ stets $T(n) \in \mathcal{O}(n)$.

Sei $n \in [2, 15]_\mathbb{N}$. Dann ist

$$T(n) = 1 \leq n \log_2 n$$

Also existiert ein $c = 1 > 0$ sodass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$.

Sei nun ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, sodass für alle $n' \in \mathbb{N}$ mit $n' < n$ ein $c > 0$ existiert für das $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ ist (IV). Es folgt:

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + n \quad \overset{\text{IV}}{\leq} \quad 2c_1\left(\frac{n}{4}\log_2\frac{n}{4}\right) + c_2\left(\frac{n}{2}\log_2\frac{n}{2}\right) + n$$

$$= c_1\frac{n}{2}(\log_2 n - 2) + c_2\frac{n}{2}(\log_2 n - 1) + n \quad \leq \quad c\frac{n}{2}(\log_2 n - 2 + \log_2 n - 1) + n$$

$$= c\frac{n}{2}(2\log_2 n - 3) + n = cn\log_2 n - \frac{n}{2} \leq cn\log_2 n$$

wobei c_1, c_2 die Konstanten gemäß von (IV) sind und $c := \max\{c_1, c_2\}$. Folglich gilt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ein $c > 0$ gibt, sodass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ ist. Folglich ist $T(n) \in \mathcal{O}(n \log_2 n)$. $\square$

b)

Sei $n \in [1, 3]_\mathbb{N}$. Dann ist

$$T(n) = 1 \geq \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{n}{3}}$$

Also existiert ein $c = \frac{1}{3} > 0$ sodass $T(n) \geq c \cdot 3^{\frac{n}{3}}$.

Sei nun ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, sodass für alle $n' \in \mathbb{N}$ mit $n' < n$ ein $c > 0$ existiert für das $T(n) \geq c \cdot 3^{\frac{n}{3}}$ ist (IV). Es folgt:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) \quad \overset{\text{IV}}{\geq} \quad c_1 3^{\frac{n-1}{3}} + c_2 3^{\frac{n-2}{3}} + c_3 3^{\frac{n-3}{3}}$$

$$3c \cdot 3^{\frac{n-3}{3}} = c \cdot 3^{\frac{3}{n}}$$

wobei c_1, c_2, c_3 die Konstanten gemäß von (IV) sind und $c := \min\{c_1, c_2, c_3\}$. Folglich gilt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $c > 0$ gibt, sodass $T(n) \geq c \cdot 3^{\frac{n}{3}}$ ist. Foglich ist $T(n) \in \Omega(3^{\frac{n}{3}})$. $\square$

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4