

Hausaufgabe 8

Aufgabe 1

a)

Für w_1 gilt:

$$w_1 = \frac{2}{1-3i} = (2+0i) \cdot (1-3i)^{-1} = (2+0i) \cdot \left(\frac{1+3i}{1^2+3^2} \right) = (2+0i) \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i \right) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Es folgt

$$\operatorname{Re}(w_1) = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(w_1) = \frac{3}{5}$$

Für w_2 gilt:

$$w_2 = \frac{1}{i} = (1+0i) \cdot (0+i)^{-1} = (1+0i) \cdot \left(\frac{0-i}{1} \right) = 0-i$$

Es folgt

$$\operatorname{Re}(w_2) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(w_2) = -1$$

Für w_3 gilt:

$$w_3 = \frac{1+it}{1-it} \cdot \frac{1+it}{1+it} = \frac{1-t^2+i2t}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i \cdot \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)$$

Es folgt

$$\operatorname{Re}(w_3) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(w_3) = \frac{2t}{1+t^2}$$

b) Nach Satz 1.6 lässt sich der Betrag $|z|$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)} \right| &= \frac{|(3+4i)(-1+2i)|}{|(-1-i)(3-i)|} = \frac{|3+4i| \cdot |-1+2i|}{|-1-i| \cdot |3-i|} \\ &= \frac{\sqrt{3^2+4^2} \sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} \sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

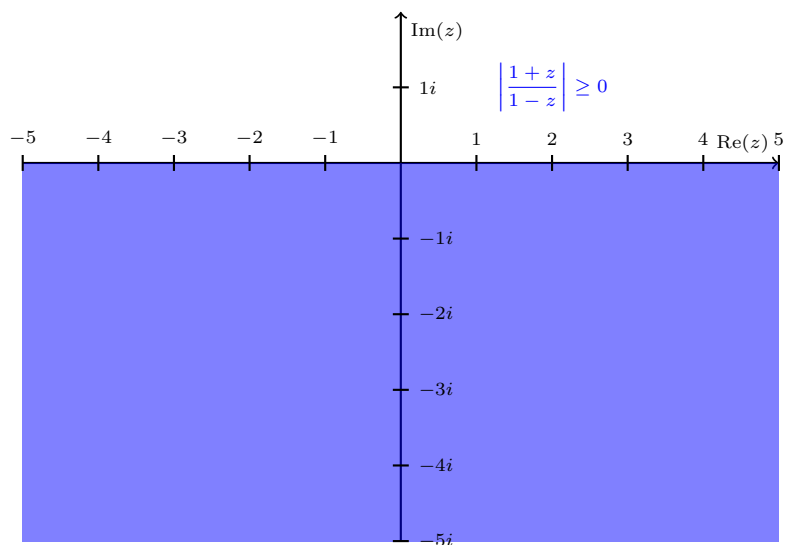
c) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $z = x + iy$. Es gilt

$$\left| \frac{z+i}{z-i} \right| = \frac{|z+i|}{|z-i|} = \frac{|(x+iy)+i|}{|(x+iy)-i|} = \frac{|x+i(y+1)|}{|x+i(y-1)|} = \sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}} \leq 1$$

Die lässt sich weiter umformen:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}} \leq 1 &\iff \frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2} \leq 1^2 = 1 \iff x^2+(y+1)^2 \leq x^2+(y-1)^2 \\ &\iff (y^2+2y+1) - (y^2-2y+1) \leq 0 \iff 4y \leq 0 \iff y \leq 0 \end{aligned}$$

Also ist die Ungleichung für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) \leq 0$ erfüllt.



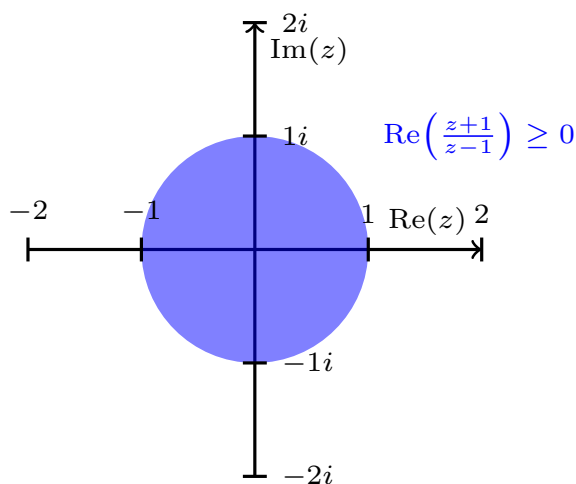
d) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x = \operatorname{Re}(z)$ und $y = \operatorname{Im}(z)$. Grundsätzlich ist $\frac{z+1}{z-1}$ für $x = 1$ und $y = 0$ schonmal nicht definiert, da wir dann durch 0 teilen würden. Wir gehen also für weiter Rechnungen davon aus, dass $x = 1 \wedge y = 0$ nicht eintreffen kann. Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{1-x+iy}{1-x+iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-x^2+2iy-y^2+1}{x^2-2x+y^2+1}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2-2x+y^2+1} + i \cdot \frac{2y}{x^2-2x+y^2+1}\right) = \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Weiterhin wissen wir, dass für alle $a \in \mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$, gilt und nehmen an, dass $\neg(x = 1 \wedge y = 0) \implies (x-1)^2 + y^2 > 0$ gilt. Es folgt also:

$$\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} \geq 0 \iff 1-x^2-y^2 \geq 0 \iff x^2+y^2 \leq 1 \iff \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \leq 1$$

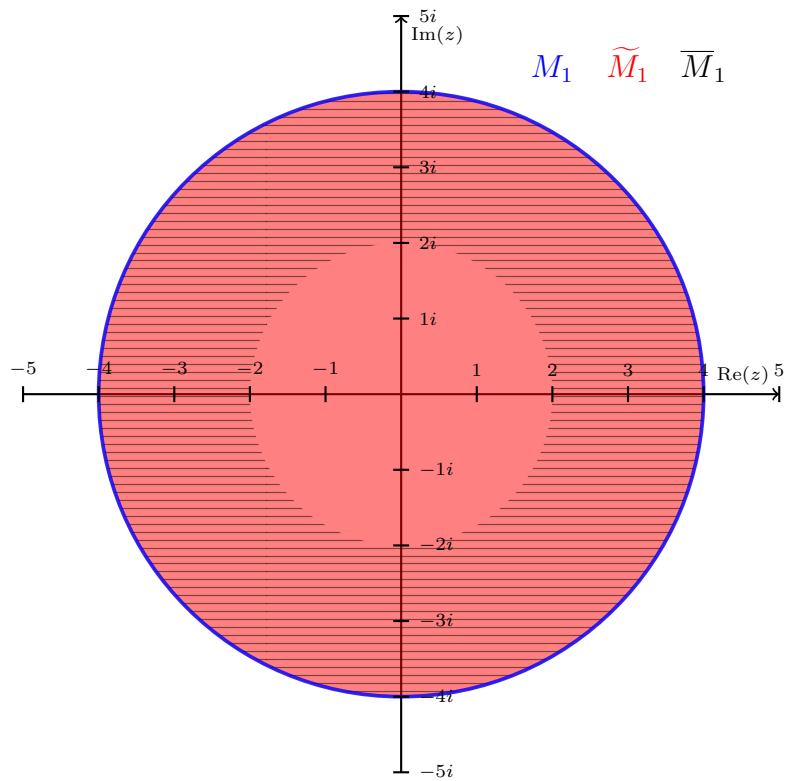
Dies entspricht einer typischen Kreisgleichung:



Jedoch ist die Gleichung für $z = 1 + 0i$ nicht definiert, und es ist $z = 1 + 0i$ nicht in der Lösungsmenge enthalten.

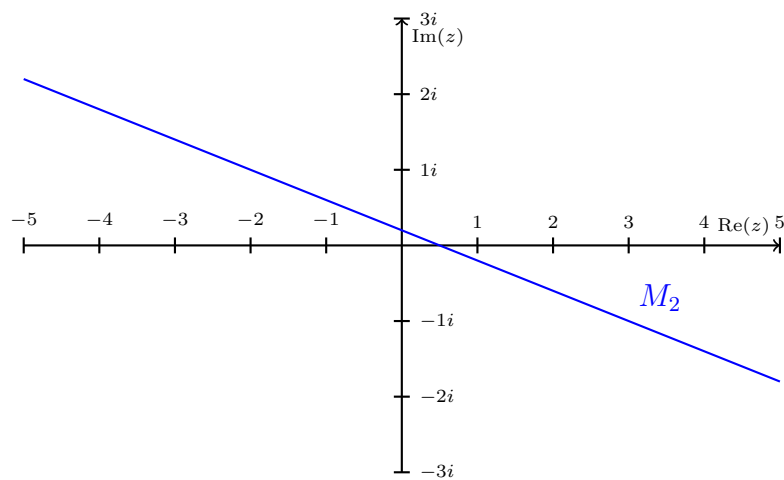
Aufgabe 2

a) Mit $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$ folgt



b) Dies lässt sich wie eine Gerade darstellen, welche $\operatorname{Im}(z)$ in Relation zu $\operatorname{Re}(z)$ setzt:

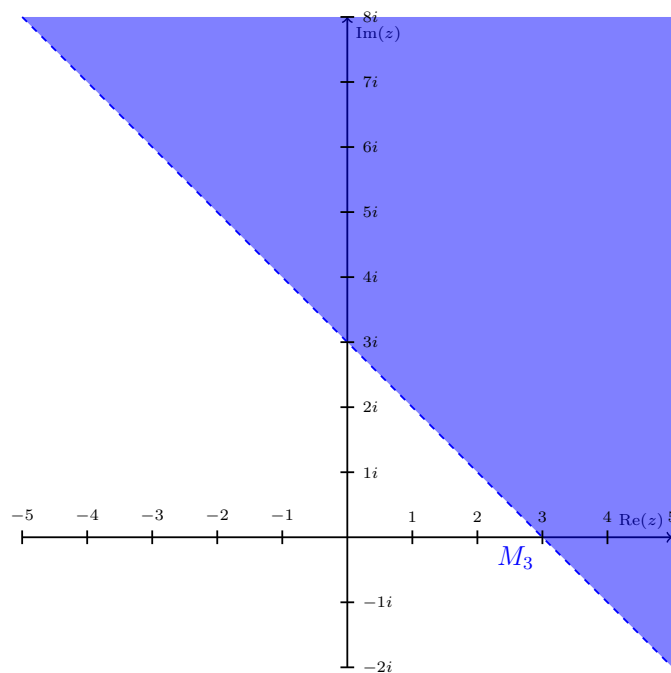
$$2 \operatorname{Re}(z) + 5 \operatorname{Im}(y) = 1 \iff \operatorname{Im}(z) = \frac{1 - 2 \operatorname{Re}(z)}{5}$$



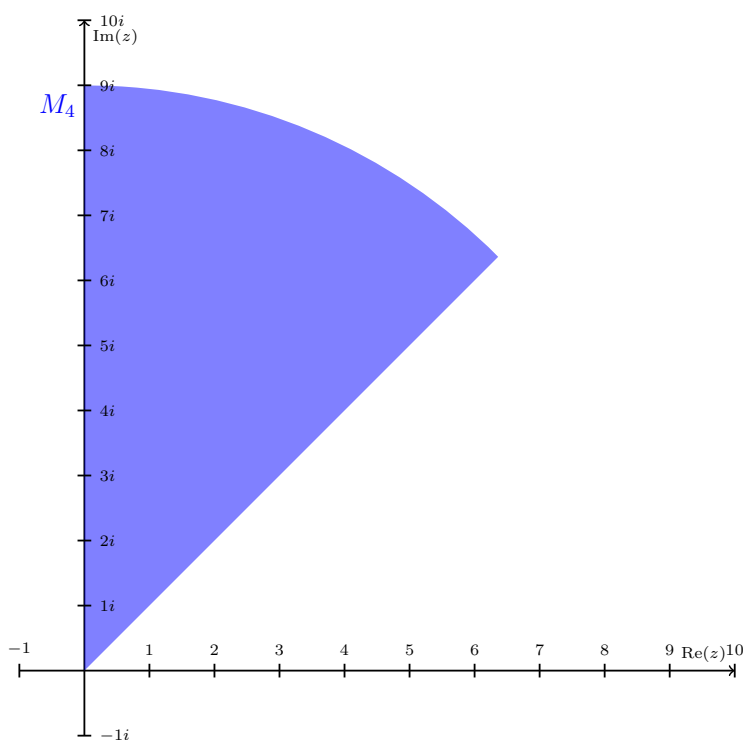
c)

$$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) - 1 > 2 \iff \operatorname{Im}(z) > 3 - \operatorname{Re}(z)$$

Damit haben wir eine Geradengleichung. Alle Werte "über" dieser Gerade gehören zu M_3 :



d) Aus $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ folgt, dass alle Elemente von M_4 schonmal im 1. Quadranten liegen müssen. Weiterhin muss $\operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)$ gelten, also liegen alle Elemente von M_4 überhalb und auf der Geradengleichung $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)$. Als letztes muss $|z| < 9$ gelten wodurch das ganze mit dem Radius 9 beschränkt wird, daher das runde Ende:



Aufgabe 3

Wir definieren:

$$\begin{aligned}(b_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 5i^{4n} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) & (c_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 5i^{4n+1} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \\(d_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 5i^{4n+2} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) & (e_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 5i^{4n+3} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}: i^{4n} = (i^2 \cdot i^2)^n = ((-1)(-1))^n = 1^n = 1$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}: i^{4n+1} &= i^{4n} \cdot i = i \\ \forall n \in \mathbb{N}: i^{4n+2} &= i^{4n} \cdot i^2 = i^2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}: i^{4n+3} &= i^{4n} \cdot i^3 = i^3 = -i\end{aligned}$$

Weiterhin seien:

$$\begin{aligned}(w_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 4n & (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 4n + 1 \\ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 4n + 2 & (z_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 4n + 3\end{aligned}$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ stets:

$$\begin{aligned}b_n &= \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = 5i^{4n} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = a_{w_n} & c_n &= i \cdot \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) 5i^{4n+1} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = a_{x_n} \\ d_n &= -\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = 5i^{4n+2} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = a_{y_n} & e_n &= -i \cdot \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) 5i^{4n+3} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = a_{z_n}\end{aligned}$$

Folglich sind b_n, c_n, d_n und e_n alle Teilfolgen von a_n . Die Grenzwertsätze lassen sich wie folgt anwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 1 + 0 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} i + \lim_{n \rightarrow \infty} i \cdot \frac{1}{n^3} = i + \lim_{n \rightarrow \infty} i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = i + i \cdot 0 = i \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} -1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = -1 - 0 = -1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} e_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} -i - \lim_{n \rightarrow \infty} i \cdot \frac{1}{n^3} = -i - \lim_{n \rightarrow \infty} i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = -i - i \cdot 0 = -i\end{aligned}$$

Also folgt für die Teilfolgen b_n, c_n, d_n, e_n von a_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$$

Aufgabe 4

Durch Benutzung des Cauchyprodukts (*) sowie der geometrischen Summenformel (**) folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k z^i \cdot z^{k-i} \stackrel{*}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^i \right)$$

Da die geometrische Summenformel für alle Körper definiert ist, hält sie auch insbesondere für \mathbb{C} . Sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sum_{k=0}^n z^k$ also die Folge der Partialsummen von $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Nach der geom. Summenformel gilt dann, da $|z| < 1$:

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := z^{n+1}$. Die Folge a_n konvergiert gegen 0, wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, $N = N(\varepsilon)$ finden lässt sodass gilt:

$$\forall n \geq N: |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

Nach Satz 1.6 c) folgt $|a_n| = |z^{n+1}| = |z|^{n+1}$. Weiterhin ist $|z| \in \mathbb{R}$ und $|z| < 1$, also ist $|a_n| = |z|^{n+1}$ eine Nullfolge nach (III 1.14). Weiterhin ist eine Nullfolge nach Definition auch konvergent. Also lässt sich ein $N \in \mathbb{N}$ zu jedem ε finden, sodass die Nullfolge $|z|^{n+1}$ konvergiert. Für eben dieses $N = N(\varepsilon)$ folgt nun jedoch auch für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\forall n \geq N: |a_n - 0| = |a_n| = |z^{k+1}| = |z|^{k+1} < \varepsilon$$

Folglich konvergiert $a_n = z^{n+1}$ ebenfalls gegen 0.

Damit lässt sich nun mit Hilfe der Grenzwertsätze (Satz 2.4) folgern:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - z} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} z} = \frac{1 - 0}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$$

Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^i \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right) \\ &= \frac{1}{1 - z} \cdot \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{(1 - z)^2} \end{aligned}$$