Gruppe $\boxed{11}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

# Hausaufgabe 13

---

## Aufgabe 1

Wir nutzen aufgrund der Äquivalenz hier die Untersumme und zerlegen das Intervall $[1, b]$ wie im Hinweis durch die Folge $x_i = b^{\frac{i}{n}}$. Es folgt:

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b^{-\frac{i-1}{n}} \left(b^{\frac{i}{n}} - b^{\frac{i-1}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b^{\frac{i-(i-1)}{n}} - b^{\frac{i-1-(i-1)}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(b^{\frac{1}{n}} - b^0\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(b^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}}$$

Auf die gegebene Folge lässt sich nun der Satz von l'Hopital anwenden, da sowohl die Exponentialfunktion als auch $\frac{1}{n}$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind. Weiterhin gilt nach Skript auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1 = \exp(0) - 1 = 0$$

Also versuchen wir l'Hopital anzuwenden und überprüfen, ob der Grenzwert der Ableitungen existiert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1\right]'}{\left[\frac{1}{n}\right]'} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right)\ln(b)}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right)\ln(b) = \exp(0)\ln(b) = \ln(b)$$

Nach l'Hopital gilt nun auch:

$$\ln(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

## Aufgabe 2

**a)** Da $\forall x \in [a,b] \colon m \leq f(x) \leq M$, sowie $\forall x \in [a,b] \colon g(x) \geq 0$, folgt auch:

$$\forall x \in [a,b] \colon mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

Nach Skript Satz 1.5 folgt durch betrachtung von $mg(x), Mg(x)$ und $f(x)$ als eigene Funktion:

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x = M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

**b)** Da die Stammfunktionen von $f, g, f \cdot g$ existieren, muss also eine Zerlegungssumme folgender Form existieren:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

für ein $n \in \mathbb{N}, n \to \infty$, eine reelle Folge $x$ mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ und eine reelle Folge $h_i \in g([x_{i-1}, x_i])$.

Ebenso muss die Zerlegugssumme für $f \cdot g$ existieren:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i h_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

mit der zusätzlichen reellen Folgen $k_i \in f([x_{i-1}, x_i])$. Es gilt nun:

$$\forall x \in [a,b] \colon f(x) \geq m \implies \forall i \in [1,n] \colon \forall x \in f([y_{i-1}, y_i]) \colon x \geq m \implies \forall i \in [1,n] \colon k_i \geq m$$

$$\implies m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} mh_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} k_i h_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

Analog gilt:

$$\forall x \in [a,b] \colon f(x) \leq M \implies \forall i \in [1,n] \colon \forall x \in f([x_{i-1}, x_i]) \colon x \leq M \implies \forall i \in [1,n] \colon k_i \leq M$$

$$\implies \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} k_i h_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} Mh_i(x_i - x_{i-1}) = M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

## Aufgabe 3

**a)** Die Exponentialfunktion ist differenzierbar, integrierbar und stetig auf $\mathbb{R}$.

$$\int_0^\infty 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left( \int_0^b 1 \, \mathrm{d}x - \int_0^b \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \right) = \lim_{b\to\infty} \left(x - \ln(|z|)\right)_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left(x - \ln(e^x + e^{-x})\right)_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(b - \ln(e^b + e^{-b}) - (0 - \ln(e^0 + e^{-0}))\right)$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left(b - \ln(e^b + e^{-b}) + \ln(2)\right) = \ln(2) + \lim_{b\to\infty} \ln\left(\exp\left(b - \ln(e^b + e^{-b})\right)\right)$$
$$= \ln(2) + \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{e^b}{e^b + e^{-b}}\right) = \ln(2) + \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{1}{1 + e^{-2b}}\right) = \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{1+0}\right)$$
$$= \ln(2) + \ln(1) = \ln(2)$$

Da der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \ln(2)$ existiert, gilt nun auch

$$\int_0^\infty 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \ln(2)$$

**b)** Nach Skript Satz 2.13 gilt $\lim_{a\to 0} \ln(a) = -\infty$, also ist $\ln(x)$ für $x \to 0$ bestimmt divergent gegen $-\infty$ (*). Daher gilt, dass für $\alpha \leq -1$ das gegebene uneigentliche Integral nicht existiert: Wir unterteilen das Integral bei $c = 1$, da $x^\alpha$ für $\alpha < 0$ in $x_0 = 0$ nicht definiert ist, also zwei uneigentliche Integrationsgrenzen hat:

$$\int_0^\infty x^\alpha \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x + \int_1^\infty x^\alpha \, \mathrm{d}x$$

Wir betrachten zuerst das Integral $\int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x$ für $\alpha = -1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \ln(1) - \ln(a)$$

Da der Grenzwert nicht existiert (s.o.), existiert auch das uneigentliche Integral nicht für $\alpha = -1$. Wir betrachten zunächst das Integral $\int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x$:

$$\int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \int_a^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\Bigg|_a^1 = \lim_{a\to 0} \left(\frac{1^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)$$

Für $\alpha < -1$ ist $\alpha + 1 < 0$, d.h. $\lim\limits_{a\to 0} a^{\alpha+1}$ existiert nicht und divergiert bestimmt gegen unendlich. Also kann das gegebene uneigentliche Integral schonmal nicht für $\alpha \leq -1$ existieren.
Für $0 > \alpha > -1$ gilt jedoch:

$$\lim_{a\to 0} \left(\frac{1^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = \frac{1^{\alpha+1} - 0^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Und damit auch

$$\forall 0 > \alpha > -1 \colon \int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}$$

Wir überprüfen also nun ob auch das Integral $\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$ für $0 > \alpha > -1$ existiert:

$$\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1} = \lim_{b\to\infty} \frac{\exp(\alpha + 1 \ln(b)) - 1}{\alpha + 1}$$

Nach Skirpt gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ sowie $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, weiterhin gilt $\alpha + 1 > 0$, daher existiert der Grenzwert nicht und es gilt:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\exp((\alpha + 1)\ln(b)) - 1}{\alpha + 1} = \infty$$

Zusammenfassnd existiert das Integral $\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$ nicht für $\alpha \leq -1$, und das Integral $\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$ nicht für $0 > \alpha > -1$. Daher existiert das Integral $\int_0^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$ für kein $\alpha < 0$.

## Aufgabe 4