Prof. Dr. Benjamin Stamm
Hassan Muhammad, M.Sc.
Andreas Smolenko, M.Sc.

Analysis für Informatiker | WS 2017/18
Hausaufgabenübung 1 | 09.10.2017
Abgabe: 16.10.2017, 09 Uhr,

(Rogowski → rechte Treppe → Treppenhaus 2.Stock → blauer Abgabekasten)

Hinweise zur Abgabe (bitte sorgfältig lesen!):

- Die Hausaufgaben sind in **Zweiergruppen innerhalb einer Kleingruppe** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben die **Matrikelnummern** und **Nummer der Kleingruppenübung** der Zweiergruppe an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können bei der Menge der Abgaben schnell verloren gehen!

Aufgabe 1. (Aussagenlogik)

Ein wichtiger Teil der Mathematik ist in der Lage Sätze des alltäglichen Gebrauchs in wohldefinierte logische Schlussfolgerungen zu transformieren. Analysieren Sie dafür das folgende einfache Beispiel.
Seien A, B, C und D Aussagen, die durch

$$\begin{aligned} A &= \text{“Andreas geht nach Berlin”}, \\ B &= \text{“Birte geht nach Berlin”}, \\ C &= \text{“Carla geht nach Stuttgart”}, \\ D &= \text{“Daniel geht nach Köln”} \end{aligned}$$

gegeben sind.
Verallgemeinern sie die folgenden Aussagen als logische Schlussfolgerungen:

a) Wenn Andreas nach Berlin geht, dann geht Carla nach Stuttgart und Daniel geht nach Köln.

b) Birte geht nur dann nach Berlin wenn Andreas nach Berlin geht.

c) Daniel geht nur dann und genau dann nach Köln wenn Birte nach Berlin geht.

d) Wenn Andreas nach Berlin geht, dann geht Daniel nach Köln, wenn Birte nicht nach Berlin geht.

e) Carla geht nur dann nach Stuttgart, wenn Daniel nicht nach Köln geht und wenn Daniel nach Köln geht, dann geht Birte nicht nach Berlin.

f) Eine notwendige Bedingung für Carla nach Stuttgart zu gehen ist, dass wenn Andreas nach Berlin und Daniel nach Köln gehen dann geht Birte nicht nach Berlin.

0,5 + 1+ 0,5 + 1 + 1 +1 Punkte

Aufgabe 2. (Aussagenlogik)
Die letzten Monate haben Sie einen Schatz gesucht. Die Kräfte des bösen Eroberers sind dicht hinter Ihnen. Sie haben endlich Ihr Ziel erreicht. Vor Ihnen befinden sich drei Behälter. Jeder Behälter beinhaltet einen Hinweis auf den Standort des Schatzes.

a) In der ersten Box steht: "Der Schatz ist nicht hier".

b) In der zweiten Box steht: "Der Schatz ist nicht hier".

c) In der dritten Box steht: "Der Schatz ist in der zweiten Box".

Eine Box beinhaltet den Schatz und die anderen beiden beinhalten Fallen, die Sie außer gefecht setzen. Nehmen Sie an, dass nur ein Hinweis wahr und die anderen beiden Hinweise falsch sind. Welche Box beinhaltet in diesem Fall den Schatz?

5 Punkte

Aufgabe 3. (Aussagenlogik)

Logikaussagen können dazu verwendet werden Argumente systematisch auf ihre logische Korrektheit zu prüfen. Betrachten Sie dazu die folgenden einfachen Beispiele.
Gegeben seien die folgenden Argumente:

(i) Nathan Hale sagt: ”Falls ich schuldig bin muss ich gehängt werden. Ich bin schuldig. Daher muss ich gehängt werden”.

(ii) Nathan Hale sagt: ”Falls ich schuldig bin muss ich gehängt werden. Ich bin nicht schuldig. Daher muss ich nicht gehängt werden”.

(iii) Nathan Hale sagt: ”Falls ich schuldig bin muss ich gehängt werden. Ich werde gehängt. Daher muss ich schuldig sein”.

(iv) Nathan Hale sagt: ”Falls ich schuldig bin muss ich gehängt werden. Ich werde nicht gehängt. Daher bin ich nicht schuldig”.

Nutzen Sie Logik und Wahrheitstabellen um den Wahrheitsgehalt aller Argumente zu bestimmen.

1 +1,5 +1 +1,5 Punkte

Aufgabe 4. (Peano Axiome)

Das Studium der Naturwissenschaften beinhaltet "Warum"-Fragen. Wir können zum Beispiel die Frage "Warum ist der Himmel blau?" oder "Warum ziehen sich Magneten an?" stellen. Um diese Fragen beantworten zu können muss man eine klare Basis für eine naturwissenschaftliche Kommunikation festlegen, die wir als eine Menge von wahren Aussagen akzeptieren und nutzen. Diese Postulate werden Axiome genannt und werden als Startpunkt für die Wissenschaft verwendet. In der Physik wird zum Beispiel in der klassischen Mechanik das Newtonsche Gesetz also Axiom angenommen und als wahr angesehen.

Die am ehesten bekannten Axiome können im Buch "Elemente" von Euklid nachgelesen werden. Dies Buch wurde von Studierenden der Mathematik zwei Millennia lang studiert. Euklid startet in seinem Buch damit, 10 einfache Axiome aufzulisten. Ein Beispiel dafür ist

> "Elemente, die demselben Element gleichen, sind auch untereinander gleich.".

Auf Grundlage dieser 10 Axiome bildet Euklid seine Theorie der euklidischen Geometrie auf. Jedes Ergebnis in diesem Buch ist eine Schlussfolgerung dieser einfachen 10 Grundaxiome.

Einen vergleichbaren Ansatz in der Zahlentheorie wurde vom italienischen Mathematiker Giuseppe Peano im 19. Jahrhundet gewählt. Dieser postulierte 9 Axiome auf deren Grundlage die Theorie der natürlichen Zahlen aufgebaut wird. Das Ziel dieser Aufgabe ist es die Peano Axiome durch Logik darzustellen.

Stellen Sie die folgende Liste von Axiomen als logische Aussagen dar. Erklären Sie alle Symbole, die sie nutzen. Sie dürfen die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die einfache Addition $+$ von Zahlen und das Vokabular der Mengentheorie, wie zum Beispiel $\in, \subset, \supset$, etc., nutzen.

a) 1 ist eine natürliche Zahl.

b) Jede natürliche Zahl gleicht sich selber.

c) Für alle natürlichen Zahlen x, y gilt, falls $x = y$ dann $y = x$.

d) Für alle natürlichen Zahlen x, y, z gilt, falls $x = y$ und $y = z$ dann $x = z$.

e) Falls y eine natürliche Zahl ist und für irgendein Objekt x die Gleichheit $x = y$ gilt, dann ist x auch eine natürliche Zahl.

f) Für jede natürliche Zahl x, ist $x + 1$ auch durch eine natürliche Zahl gegeben.

g) Für alle natürlichen Zahlen x, y gilt $x + 1 = y + 1$ nur dann und genau dann, wenn $x = y$.

h) Es existiert keine natürliche Zahl y, sodass $y + 1 = 1$.

i) Sei K eine Menge, sodass
   - 1 ist ein Element von K und
   - für jedes Element x von K ist $x + 1$ auch ein Element von K.

   Dann enthält die Menge K alle natürlichen Zahlen.

0,5 + 0,5 + 0,5 + 1 + 1+ 0,5 + 1 +0,5+ 1,5 Punkte