

## Hausaufgabe 8

---

### Aufgabe 1

a)

Für  $w_1$  gilt:

$$w_1 = \frac{2}{1-3i} = (2+0i) \cdot (1-3i)^{-1} = (2+0i) \cdot \left( \frac{1+3i}{1^2+3^2} \right) = (2+0i) \cdot \left( \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i \right) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Es folgt

$$\operatorname{Re}(w_1) = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(w_1) = \frac{3}{5}$$

Für  $w_2$  gilt:

$$w_2 = \frac{1}{i} = (1+0i) \cdot (0+i)^{-1} = (1+0i) \cdot \left( \frac{0-i}{1} \right) = 0-i$$

Es folgt

$$\operatorname{Re}(w_2) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(w_2) = -1$$

Für  $w_3$  gilt:

$$w_3 = \frac{1+it}{1-it} \cdot \frac{1+it}{1+it} = \frac{1-t^2+i2t}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i \cdot \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

Es folgt

$$\operatorname{Re}(w_3) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(w_3) = \frac{2t}{1+t^2}$$

b) Nach Satz 1.6 lässt sich der Betrag  $|z|$  wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)} \right| &= \frac{|(3+4i)(-1+2i)|}{|(-1-i)(3-i)|} = \frac{|3+4i| \cdot |-1+2i|}{|-1-i| \cdot |3-i|} \\ &= \frac{\sqrt{3^2+4^2} \sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} \sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

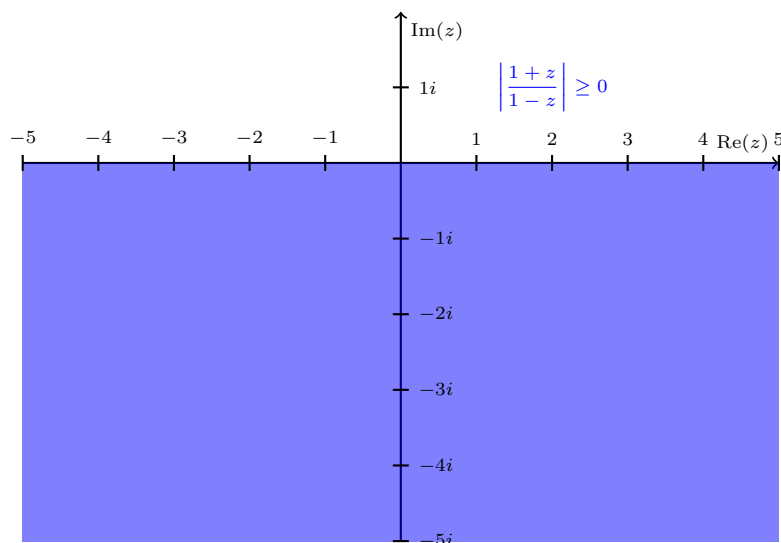
c) Sei  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $z = x + iy$ . Es gilt

$$\left| \frac{z+i}{z-i} \right| = \frac{|z+i|}{|z-i|} = \frac{|(x+iy)+i|}{|(x+iy)-i|} = \frac{|x+i(y+1)|}{|x+i(y-1)|} = \sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}} \leq 1$$

Die lässt sich weiter umformen:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}} \leq 1 &\iff \frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2} \leq 1^2 = 1 \iff x^2+(y+1)^2 \leq x^2+(y-1)^2 \\ &\iff (y^2+2y+1) - (y^2-2y+1) \leq 0 \iff 4y \leq 0 \iff y \leq 0 \end{aligned}$$

Also ist die Ungleichung für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Im}(z) \leq 0$  erfüllt.



d) Es seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{1-x+iy}{1-x+iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-x^2+2iy-y^2+1}{x^2-2x+y^2+1}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2-2x+y^2+1} + i \cdot \frac{2y}{x^2-2x+y^2+1}\right) = \frac{1-x^2-y^2}{x^2-2x+y^2+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Es ist  $y^2 \geq 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ . Also gilt

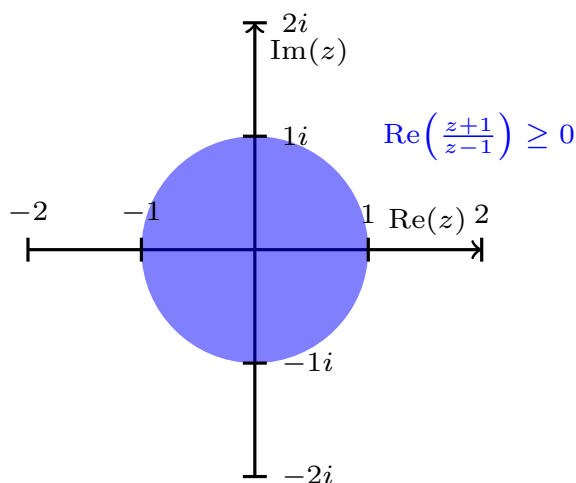
$$(x^2 - 2x + 1 \geq 0 \implies x^2 - 2x + y^2 + 1 \geq 0) \iff ((x-1)^2 \geq 0 \implies x^2 - 2x + y^2 + 1 \geq 0)$$

Da  $(x-1)^2 \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, ist der Nenner des Quotienten nie negativ.

Also gilt

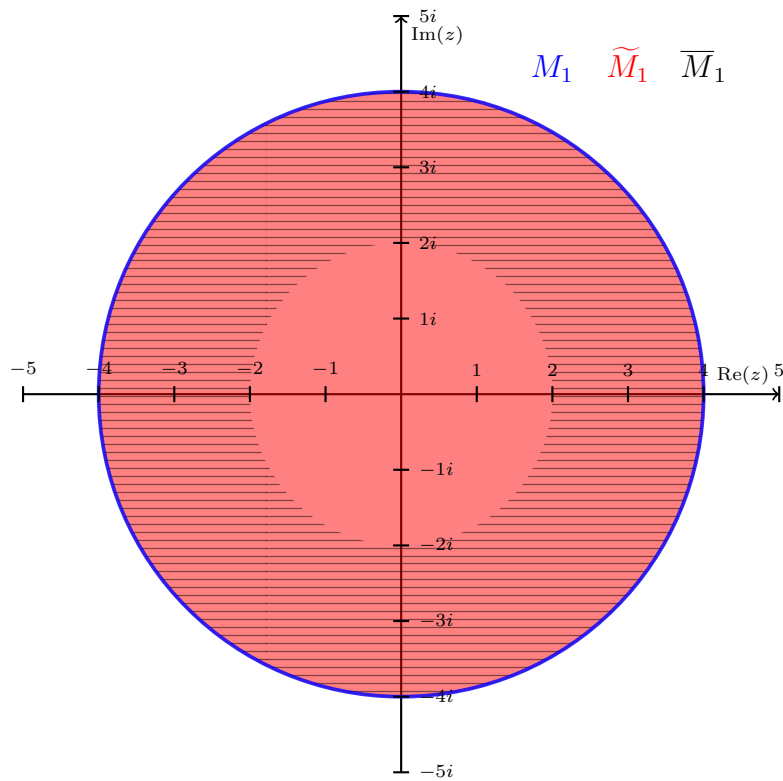
$$\frac{1-x^2-y^2}{x^2-2x+y^2+1} \geq 0 \iff x^2+y^2 \leq 1 \iff \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \leq 1$$

Dies entspricht einer typischen Kreisgleichung:



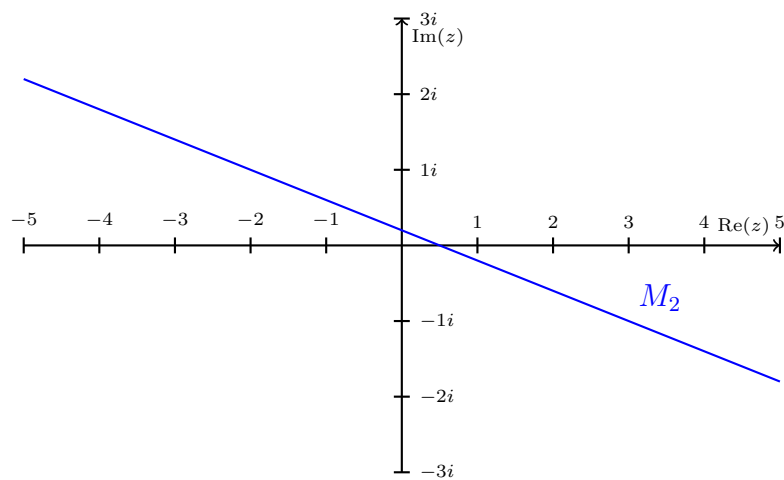
## Aufgabe 2

a) Mit  $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$  folgt



b) Dies lässt sich wie eine Gerade darstellen, welche  $\operatorname{Im}(z)$  in Relation zu  $\operatorname{Re}(z)$  setzt:

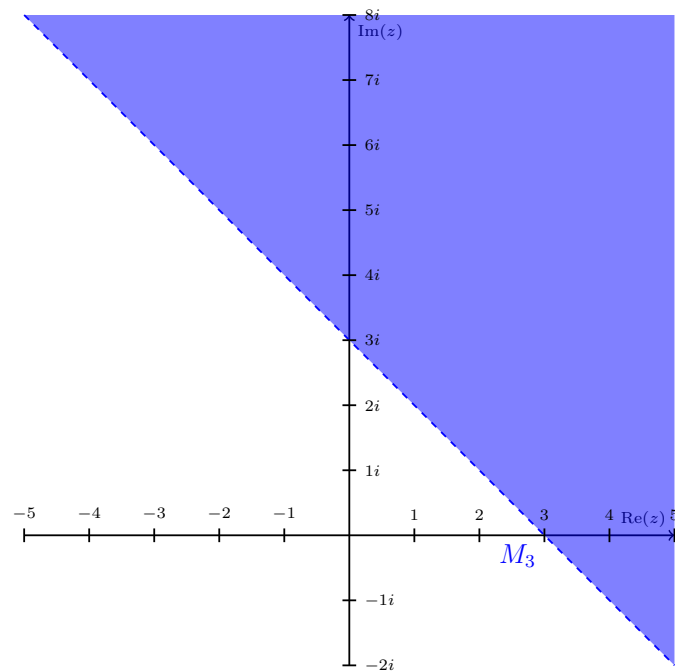
$$2 \operatorname{Re}(z) + 5 \operatorname{Im}(y) = 1 \iff \operatorname{Im}(z) = \frac{1 - 2 \operatorname{Re}(z)}{5}$$



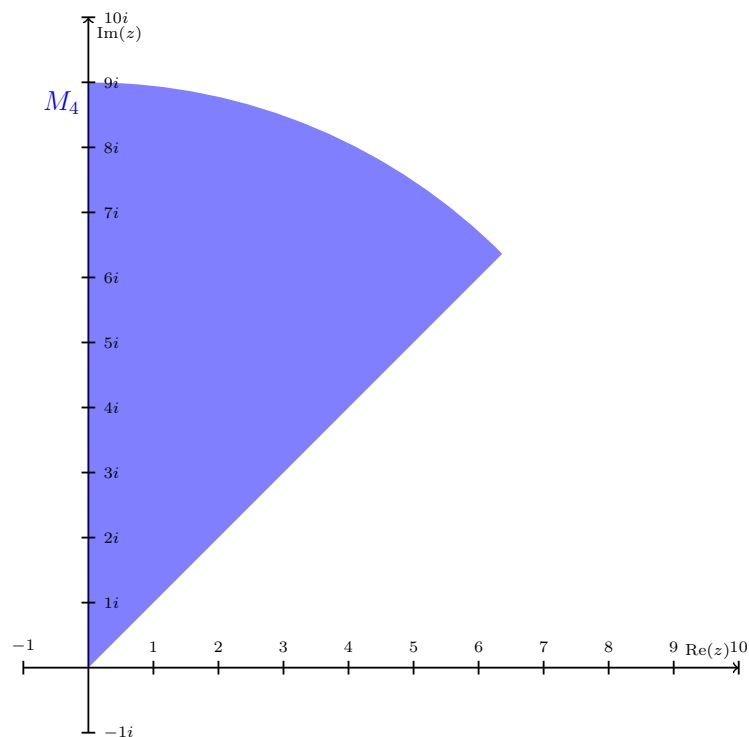
c)

$$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) - 1 > 2 \iff \operatorname{Im}(z) > 3 - \operatorname{Re}(z)$$

Damit haben wir eine Geradengleichung. Alle Werte "über" dieser Gerade gehören zu  $M_3$ :



d) Aus  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  folgt, dass alle Elemente von  $M_4$  schonmal im 1. Quadranten liegen müssen. Weiterhin muss  $\operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)$  gelten, also liegen alle Elemente von  $M_4$  überhalb und auf der Geradengleichung  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)$ . Als letztes muss  $|z| < 9$  gelten wodurch das ganze mit dem Radius 9 beschränkt wird, daher das runde Ende:



### Aufgabe 3

Wir definieren:

$$\begin{aligned}(b_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 5i^{4n} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) & (c_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 5i^{4n+1} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \\(d_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 5i^{4n+2} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) & (e_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 5i^{4n+3} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}: i^{4n} = (i^2 \cdot i^2)^n = ((-1)(-1))^n = 1^n = 1$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}: i^{4n+1} &= i^{4n} \cdot i = i \\ \forall n \in \mathbb{N}: i^{4n+2} &= i^{4n} \cdot i^2 = i^2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}: i^{4n+3} &= i^{4n} \cdot i^3 = i^3 = -i\end{aligned}$$

Weiterhin seien:

$$\begin{aligned}(w_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 4n & (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 4n + 1 \\ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 4n + 2 & (z_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= 4n + 3\end{aligned}$$

Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  stets:

$$\begin{aligned}b_n &= \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = 5i^{4n} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = a_{w_n} & c_n &= i \cdot \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) 5i^{4n+1} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = a_{x_n} \\ d_n &= -\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = 5i^{4n+2} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = a_{y_n} & e_n &= -i \cdot \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) 5i^{4n+3} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = a_{z_n}\end{aligned}$$

Folglich sind  $b_n, c_n, d_n$  und  $e_n$  alle Teilfolgen von  $a_n$ . Die Grenzwertsätze lassen sich wie folgt anwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 1 + 0 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} i + \lim_{n \rightarrow \infty} i \cdot \frac{1}{n^3} = i + \lim_{n \rightarrow \infty} i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = i + i \cdot 0 = i \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} -1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = -1 - 0 = -1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} e_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} -i - \lim_{n \rightarrow \infty} i \cdot \frac{1}{n^3} = -i - \lim_{n \rightarrow \infty} i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = -i - i \cdot 0 = -i\end{aligned}$$

Also folgt für die Teilfolgen  $b_n, c_n, d_n, e_n$  von  $a_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$$

## Aufgabe 4