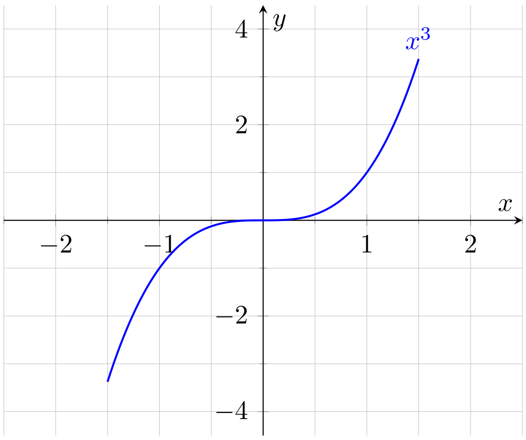
Gruppe $\boxed{\mathbf{11}}$
Analysis für Informatiker

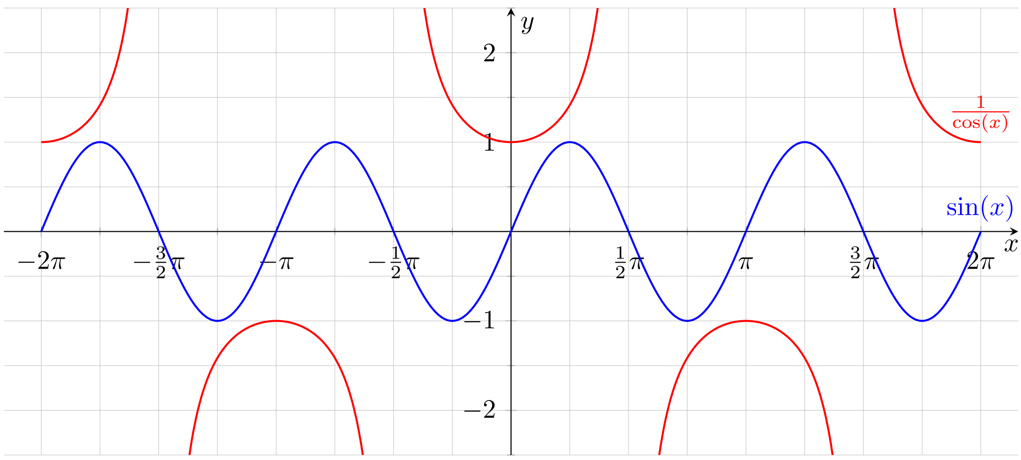
Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247

Hausaufgabe 2

Aufgabe 1

a)





Hinweis zur Notation und Wortwahl. Es werden folgende Definitionen angenommen:

- Abbildung $f\colon$ Definitionsbereich $\mapsto$ Zielbereich.
- Wertebereich bzw. Wertemenge ist die Menge angenommener Werte der Funktion.
- (Wertebereich $\subseteq$ Zielbereich) ist stets erfüllt.
- Bsp. $\sin(x)$: Zielbereich ist $\mathbb{R}$, Wertebereich ist $[-1, 1]$

b)

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$, Wertebereich $\mathbb{R}$
- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$, Wertebereich $[-1, 1]$
- $h\colon \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} | \cos(x) = 0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$, Wertebereich $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

c)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv, d.h. f ist injektiv und surjektiv, da jede parallele zur x-Achse genau einen Schnittpunkt mit dem Graphen von f hat. Jeder Wert im Zielbereich $\mathbb{R}$ wird mindesten und höchstens einmal getroffen. Somit ist der Wertebereich gleich dem Zielbereich.

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv. Es werden nur Werte im Wertebereich $[-1, 1]$ getroffen, welcher hier eine echte Teilmenge des Zielbereiches $\mathbb{R}$ ist. Weiterhin werden die Werte des Wertebereichs unendlich oft getroffen:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \sin(x) = \sin(x + 2n\pi)$$

Dies ist auch an der wiederholenden Wellenform des Graphen zu erkennen.

d)

Bijektive Abbildungen, Wertebereich ist notwendigerweise gleich dem Zielbereich:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
- $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$
- $h : [0, \pi] \to \mathbb{R} \setminus (-1, 1), x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$

Aufgabe 2

a)

$i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ i(x) := |x|$
ist surjektiv, da $i(-x) = |-x| = x = |x| = i(x)$ gilt, und somit jeder Wert (außer 0) im Zielbereich $\mathbb{N}_0$ zwei mal getroffen wird. Daraus folgt Surjektivität, aber keine Injektivität.

b)

$j\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ j(x) := 3x - 7$
ist injektiv, da $3x - 7$ einer Geraden mit Steigung $3 \neq 0$ entspricht. Somit kann jeder Wert des Wertebereiches höchstens auf einen Wert des Definitionsbereiches zurückgeführt werden. Es können jedoch nicht alle Werte des Zielbereiches getroffen werden, z.B. 1:

$$3x - 7 = 1 \implies 3x = 8 \implies x = \frac{3}{8} \notin \mathbb{Z}$$

Daraus folgt, dass j nicht surjektiv sein kann.

c)

$k\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ k(x) := 3x - 7$
ist bijektiv, da es sich wieder um eine Gerade nicht parallel zur x-Achse handelt und somit Injektivität folgt. Hinzukommend kann nun jedoch auch jeder Wert des Zielbereiches mindestens einmal getroffen werden. Es gilt für eine beliebige rationale Zahl $c = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$:

$$3x - 7 = \frac{a}{b} \implies 3x = \frac{a}{b} + 7 \implies x = \frac{a}{3b} + \frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$$

Somit ist der Wertebereich gleich dem Zielbereich und jede rationale Zahl wird genau einmal von $k\colon \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$ getroffen.

d)

$\sin(x)$ wäre ein solche Abbildung, wie in Aufgabe 1 bereits beschrieben. Der Wertebereich von $\sin(x)$ entspricht $[-1, 1]$, also dem Zielbereich der gesuchten Funktion, woraus automatisch Surjektivität folgt. Wie schon bereits erklärt ist $\sin(x)$ jedoch nicht injektiv.

Aufgabe 3

a)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ zwei beliebige ungerade Zahlen. Diese lassen sich nach Definition (siehe Vorlesung) als $a = 2m + 1$ und $b = 2n + 1$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ schreiben. Nun gilt:

$$a + b = (2m + 1) + (2n + 1) = 2(m + n + 1)$$

Also kann man $a + b$ in der Form $2x$, $x \in \mathbb{Z}$ schreiben, wobei hier $x = m + n + 1$ ist. Somit folgt nach Definition, dass $a + b$ gerade ist. Kurz auch:

$$(a \in U) \land (b \in U) \Rightarrow (a + b) \in G$$

wobei $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x\}$ die Menge aller geraden und $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x + 1\}$ die Menge aller ungeraden Zahlen ist.

b)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ zwei beliebige ganze Zahlen mit unterschiedlicher Parität, d.h nur eine von beiden ist ungerade, die andere gerade. Nehmen wir ohne Verlust an Allgemeinheit an, a sei gerade und b sei ungerade. Nach Definition folgt $a = 2m$ und $b = 2n + 1$ für $m, n \in \mathbb{Z}$. Nun gilt:

$$a + b = 2m + (2n + 1) = 2(m + n) + 1$$

Also kann man $a + b$ in der Form $2x + 1$, $x \in \mathbb{Z}$ schreiben, wobei hier $x = m + n$ ist. Somit folgt nach Definition, dass $a + b$ ungerade ist. Kurz auch:

$$(a \in G) \land (b \in U) \Rightarrow (a + b) \in U$$

wobei die Mengen G und U wie in Aufgabenteil a definiert sind.

Aufgabe 4

Theorem 1. Hier liegt der Fehler im vorletzten Schritt.
Da $a = b$ gilt ist somit $a^2 - ab = a^2 - a^2 = 0$. Jedoch wird im vorletzten Schritt durch diesen Ausdruck geteilt, um zum endgültigen Ergebnis zu kommen.

$$\begin{aligned} &\implies 2(a^2 - ab) = a^2 - ab \qquad | \div (\mathbf{a^2 - ab}) \\ &\implies 2\frac{a^2 - ab}{a^2 - ab} = 1 \implies 2 = 1. \end{aligned}$$

Somit würde der Schritt eigentlich wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} &\implies 2(0) = 0 \qquad | \div \mathbf{0} \\ &\implies \cdots \end{aligned}$$

Dies ist in unserem Zahlensystem nicht erlaubt, und somit ein Fehler im Beweis, was zu einem falschen Ergebnis führt.

Theorem 2. Hier liegt der Fehler schon in der Annahme. Man kann nicht das zu beweisende annehmen um eben dieses zu beweisen. Weiterhin sind die Folgepfeile in der falschen Richtung, kurzfassend steht geschrieben:

$$\sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{15} \implies \cdots \implies 48 < 49$$

So könnte evtl. ein Beweis für $48 < 49$ aussehen, jedoch nicht andersherum. Für einen korrekten Beweis könnte man die wahre Aussage $48 < 49$ annehmen, und dann daraus durch umformen das zu zeigende herleiten:

$$48 < 49 \implies \cdots \implies \sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{15}$$

Theorem 3. Hier liegt der Fehler in der Fallunterscheidung am Ende. Es wird zwischen den Fällen $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$ sowie $(x < 0) \wedge (y < 0)$ unterschieden. Jedoch fehlt der Fall, in dem x und y eine unterschiedliche Parität besitzen, also z.B. $(x \leq 0) \wedge (y > 0)$. Dadurch fehlt die Betrachtung eines Falles, welcher die Hypothese widerlegen würde. Es würde unter Betrachtung dieses Falles gelten:

$$f(x) = f(y) \implies -x = y$$

was einer Kontradiktion entspricht. Somit ist die Funktion $f(x) = |x|$ **nicht** injektiv, wie bereits in Aufgabe 2a gezeigt.

Aufgabe 5

a)

Induktionsanfang
Die Annahme gelte für das kleinste $n \in \mathbb{N}$, also für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = (2 \cdot 1 - 1) = 1 = 1^2$$

Induktionsvoraussetzung
Somit gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für ein beliebig aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + (2n+1) = (n+1)^2\end{aligned}$$

Induktionsprinzip
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage nun für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

b)

Induktionsanfang
Die Annahme gelte für das kleinste $n \in \mathbb{N}$, also für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{4}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

Induktionsvoraussetzung
Somit gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für ein beliebig aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

Induktionsprinzip
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage nun für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

c)

Induktionsanfang
Die Annahme gelte für das kleinste $n \in \mathbb{N}_0$, also für $n = 0$:

$$\prod_{k=0}^{0} \left(1 + x^{2^k}\right) = 1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{1-x^{2^{0+1}}}{x-1}$$

Induktionsvoraussetzung
Somit gilt $\prod\limits_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}) = \dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{x-1}$ für ein beliebig aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$

$$\prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + x^{2^k}\right) = \left(\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right)\right) \left(1 + x^{2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \cdot \left(1 + x^{2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1^2 - \left(x^{2^{n+1}}\right)^2}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x}$$

Induktionsprinzip
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage nun für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$