Gruppe $\boxed{\mathbf{3}}$
Formale Systeme und Automaten

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 5

Aufgabe 5

Wir berechnen: $r_Q(q_0, q_0)$. Mit $x = q_1$ erhalten wir:

$$r_Q(q_0,q_0) = r_{\{q_0\}}(q_0,q_0) + r_{\{q_0\}}(q_0,q_1) r_{\{q_0\}}(q_1,q_1)^* r_{\{q_0\}}(q_1,q_0)$$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_0, q_0)$. Mit $x = q_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_0,q_0) &= r_\varnothing(q_0,q_0) + r_\varnothing(q_0,q_0) r_\varnothing(q_0,q_0)^* r_\varnothing(q_0,q_0) \\ &= (a+\varepsilon) + (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^*(a+\varepsilon) \\ &= a^* \end{aligned}$$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$. Mit $x = q_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_0,q_1) &= r_\varnothing(q_0,q_1) + r_\varnothing(q_0,q_0) r_\varnothing(q_0,q_0)^* r_\varnothing(q_0,q_1) \\ &= (b+c) + (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^*(b+c) \\ &= (b+c) + a^*(b+c) \\ &= a^*(b+c) \end{aligned}$$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$. Mit $x = q_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_1,q_1) &= r_\varnothing(q_1,q_1) + r_\varnothing(q_1,q_0) r_\varnothing(q_0,q_0)^* r_\varnothing(q_0,q_1) \\ &= \varepsilon + a(a+\varepsilon)^*(b+c) \\ &= \varepsilon + aa^*(b+c) \end{aligned}$$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$. Mit $x = q_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_1,q_0) &= r_\varnothing(q_1,q_0) + r_\varnothing(q_1,q_0) r_\varnothing(q_0,q_0)^* r_\varnothing(q_0,q_0) \\ &= a + a(a+\varepsilon)^*(a+\varepsilon) \\ &= a + aa^* \\ &= aa^* \end{aligned}$$

Durch Rückeinsetzen erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} r_Q(q_0,q_0) &= r_{\{q_0\}}(q_0,q_0) + r_{\{q_0\}}(q_0,q_1) r_{\{q_0\}}(q_1,q_1)^* r_{\{q_0\}}(q_1,q_0) \\ &= a^* + a^*(b+c)(\varepsilon + aa^*(b+c))^* aa^* \\ &= a^* + a^*(b+c)(aa^*(b+c))^* aa^* \end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Angenommen, L_1 ist regulär. Wir wählen n zu L_1 gemäß Pumping-Lemma und betrachten das Wort $w = a^n b^n c^{2n} \in L_1$. Das Pumping-Lemma liefert Zerlegung

$$w = xyz \quad \text{mit} \quad |xy| \leq n \quad \text{und} \quad y \neq \varepsilon \quad \text{sowie} \quad xz = xy^0z \in L_1$$

Wegen $|xy| \leq n$ und $y \neq \varepsilon$ gilt $x = a^j$ mit $j \geq 0$ und $y = a^k$ mit $k > 0$.
Jedoch:

$$xz = a^{n-k}b^n c^{2n} \notin L_1 \quad \text{weil} \quad k > 0 \Longrightarrow n - k + n \neq 2n$$

Dies führt also zu einem Widerspruch. Folglich ist L_1 nicht regulär.

b) Angenommen, L_2 ist regulär. Wir wählen n zu L_2 gemäß Pumping-Lemma und betrachten das Wort $w = b^n a^{n+1} \in L_2$. Das Pumping-Lemma liefert Zerlegung

$$w = xyz \quad \text{mit} \quad |xy| \leq n \quad \text{und} \quad y \neq \varepsilon \quad \text{sowie} \quad xy^3z \in L_2$$

Wegen $|xy| \leq n$ und $y \neq \varepsilon$ gilt $x = b^j$ mit $j \geq 0$ und $y = b^k$ mit $k > 0$.
Jedoch:

$$xy^3z = a^{n+2k}b^{n+1} \notin L_2 \quad \text{weil} \quad k > 0 \Longrightarrow 2k \geq 2 \Longrightarrow n + 2k \not< n + 1$$

Dies führt also zu einem Widerspruch. Folglich ist L_2 nicht regulär.

Aufgabe 7

Zuerst bilden teilen wir die Zustände in Endzustände und nicht-Endzustände:

$$\mathcal{B}_1 := \{q_0, q_1, q_5\} \qquad \mathcal{B}_2 := \{q_2, q_3, q_4\}$$

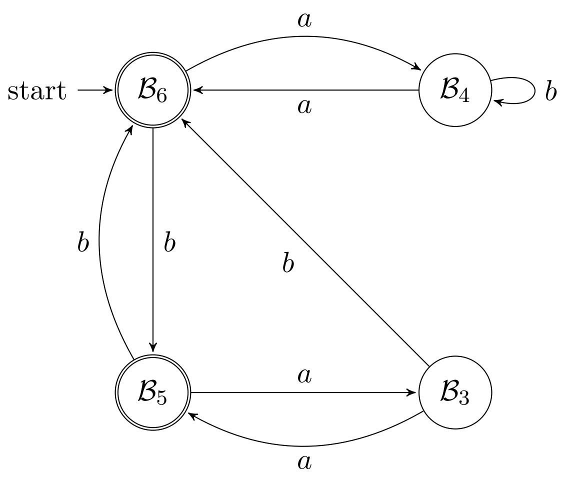
Wir verfeinern $\mathcal{B}_2$ bzgl der b-Transition und $\mathcal{B}_1$:

$$\mathcal{B}_1 := \{q_0, q_1, q_5\} \qquad \mathcal{B}_3 := \{q_2\} \qquad \mathcal{B}_4 := \{q_3, q_4\}$$

Wir verfeinern $\mathcal{B}_1$ bzgl. der a-Transition und $\mathcal{B}_3$:

$$\mathcal{B}_5 := \{q_1\} \qquad \mathcal{B}_6 := \{q_0, q_5\} \qquad \mathcal{B}_3 := \{q_2\} \qquad \mathcal{B}_4 := \{q_3, q_4\}$$

Es lässt sich nun keine Zustandsmenge noch weiter verfeinern. Der minimale DFA ist dann:



Aufgabe 8