

## Hausaufgabe 6

---

### Aufgabe 1

Wir zeigen zuerst, dass  $a_n$  nach unten durch  $\sqrt{x}$  beschränkt ist: Sei  $A(n) := a_n \geq \sqrt{x}$

(IA) Für  $a_0 = 1$  folgt  $a_0 \geq \sqrt{1}$  und für  $a_0 = x > 1$  folgt  $a_0 \geq \sqrt{x}$ . Also gilt  $A(1)$ .

(IS) Es gelte  $A(n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$ .  $n \mapsto n+1$ : Zu zeigen ist  $a_{n+1} \geq \sqrt{x}$ :

$$a_{n+1} \geq \sqrt{x} \iff a_n^2 + x \geq 2a_n\sqrt{x} \iff (a_n - \sqrt{x})^2 \geq 0$$

Letzteres ist stets erfüllt, da  $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$  gilt. Es folgt nun nach dem Prinzip der vollständigen Induktion  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Also ist  $a_n$  mit  $\sqrt{x}$  nach unten beschränkt.

Zu zeigen ist nun, dass  $a_n$  monoton fällt, also  $a_{n+1} - a_n \leq 0$ :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right) - a_n = \frac{a_n}{2} - \frac{x}{2a_n} - \frac{2a_n}{2} = x - (a_n)^2 \stackrel{a_n \geq \sqrt{x}}{\leq} x - (\sqrt{x})^2 = 0$$

Da nun stets  $a_{n+1} - a_n \leq 0$  gilt, ist  $a_n$  monoton fallend und damit nach 1.4 auch nach oben beschränkt, also insgesamt beschränkt. Der Grenzwert dieser rekursiven Folge lässt sich wie folgt bestimmen:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( L + \frac{x}{L} \right)$$

Wir lösen nach  $L$  auf:

$$L = \frac{1}{2} \left( L + \frac{x}{L} \right) \iff L^2 = x \iff L = \pm \sqrt{x}$$

Da  $a_n$  jedoch von unten durch  $\sqrt{x}$  beschränkt ist gilt stets  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \not\leq -\sqrt{x}$ , d.h.  $a_n$  kann niemals  $-\sqrt{x}$  erreichen. Somit kommt für uns als Lösung nur  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{x}$  in Frage, da es nach Satz 4.13 (Kapitel 2) nur genau eine positive reelle Zahl  $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$  mit  $n \in \mathbb{N}$  gibt. Also konvergiert  $a_n$  gegen  $\sqrt{x}$ .

b) Für  $c = 1$  folgt durch  $\forall n \in \mathbb{N}_0: a_n \geq \sqrt{x} \implies a_n \geq 0$ , dass folgendes stets gilt:

$$\begin{aligned} |(a_n - \sqrt{x})^2| &\leq 2a_n|a_n - \sqrt{x}|^2 \iff \left| \frac{a_n^2 - 2a_n\sqrt{x} + x}{2a_n} \right| \leq |a_n - \sqrt{x}|^2 \\ \iff \left| \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right) - \sqrt{x} \right| &\leq |a_n - \sqrt{x}|^2 \iff |a_{n+1} - \sqrt{x}| \leq 1 \cdot |a_n - \sqrt{x}|^2 \end{aligned}$$

Somit existiert ein  $c = 1 > 0$ , sodass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: |a_{n+1} - \sqrt{x}| \leq c \cdot |a_n - \sqrt{x}|^2$$

Also konvergiert  $a_n$  quadratisch gegen  $\sqrt{x}$ .

## Aufgabe 2

Für  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \frac{1}{(n+1)^2}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$ . Zu  $\varepsilon > 0$  wählt man ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} - 1$ . Es folgt:

$$\forall n \geq n_0: \left| \frac{1}{(n+1)^2} - 0 \right| = \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{(n_0+1)^2} < \frac{1}{\left( \left( \sqrt{1/\varepsilon} - 1 \right) + 1 \right)^2} = \varepsilon$$

Es folgt nach Definition 1.5 dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

## Aufgabe 3

a)

Wir wählen zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass  $2^{(N-1)} > \varepsilon^{-1}$  gilt. Seien nun  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m, n \geq N$  gegeben. Es lässt sich in diesem Fall ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $n \geq m$ . Somit gilt  $n = m + k$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Es folgt nun durch die Dreiecksungleichung (\*) und die Gegebenheit der Aufgabe (\*\*):

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a_{m+k}| = \left| \sum_{i=1}^k a_{m+i-1} - a_{m+i} \right| \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^k |a_{m+i-1} - a_{m+i}| \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \sum_{i=1}^k 2^{-(m+i-1)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{m+i-1}} < \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \frac{1}{\varepsilon^{-1}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also gilt das Cauchy-Kriterium, da zu jedem  $\varepsilon$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $2^{-(N-1)} < \varepsilon$  existiert, sodass gilt:

$$\forall m, n \geq N: |a_m - a_n| < \varepsilon$$

b)

Für  $b_n = \frac{8n^2 - 5}{4n^2 + 7}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 5}{4n^2 + 7} = 2$ . Wir wählen ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > n_0(\varepsilon)$ :

$$n_0(\varepsilon) := \begin{cases} \left\lceil \left( \sqrt{\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{7}{4}} \right) \right\rceil & \text{falls } \varepsilon < \frac{19}{11} \\ 2 & \text{falls } \varepsilon \geq \frac{19}{11} \end{cases}$$

Es folgt für  $\varepsilon < \frac{19}{11}$ :

$$\forall n \geq n_0: |b_n - 2| = \left| \frac{8n^2 - 5}{4n^2 + 7} - 2 \right| < \left| \frac{8 \left( \sqrt{\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{7}{4}} \right)^2 - 5}{4 \left( \sqrt{\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{7}{4}} \right)^2 + 7} - 2 \right| = \left| \frac{2 \left( \frac{19}{\varepsilon} \right) - 19}{\frac{19}{\varepsilon}} - 2 \right| = \varepsilon$$

Und für  $\varepsilon \geq \frac{19}{11}$ :

$$\forall n \geq n_0: |b_n - 2| \leq \left| \frac{8(n_0)^2 - 5}{4(n_0)^2 + 7} - 2 \right| < \left| \frac{8(2)^2 - 5}{4(2)^2 + 7} - 2 \right| = \frac{19}{23} < \varepsilon$$

Somit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ .

## Aufgabe 4

a) Für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  existiert nach Definition ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass gilt:

$$\forall m, n \geq N: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Da jedoch  $|b_n - b_m| \leq |a_n - a_m|$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt, also insbesondere auch für  $m, n \geq N$ , folgt durch die Transitivität von Ungleichungen:

$$\forall m, n \geq N: |b_n - b_m| < \varepsilon$$

Also existiert zu jedem  $\varepsilon$  ein  $N$  sodass  $|b_n - b_m| < \varepsilon$  für alle  $m, n \geq N$  gilt. Somit ist auch  $b_n$  eine Cauchy-Folge.

b) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gegebene Cauchy-Folge. Nach Definition existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass mit der Dreiecksungleichung gilt:

$$\forall m, n \geq N: |a_m| - |a_n| < |a_m - a_n| < \varepsilon \iff |a_m| < |a_n| + \varepsilon$$

Da dies für alle  $m, n \geq N$  gilt, folgt es auch insbesondere für  $n = N$ :

$$\forall m \geq N: |a_m| \leq |a_N| + \varepsilon$$

Somit ist  $a_n$  für alle  $n \geq N$  durch  $|a_N| + \varepsilon$  beschränkt. Die endliche Anzahl an Werten von  $a_m$  für  $m < N$  haben ein Maximum  $M$ , sodass  $\forall n < N: a_n < M$  gilt. Es folgt also:

$$\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq \max(\{|a_m|: m \in \mathbb{N} \wedge m < N\} \cup \{|a_N| + \varepsilon\})$$

Also entweder ist das Maximum des Bildes von  $a_n$  über alle  $n < N$  größer als  $|a_N| + \varepsilon$  und somit die Schranke der Folge, oder  $|a_N| + \varepsilon$  bleibt die Schranke. In jedem Fall ist dann jede Cauchy-Folge beschränkt.

c) Da  $a_n$  eine Cauchy-Folge ist, existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass  $|a_m - a_n| < \varepsilon$  für alle  $m, n \geq N$  gilt. Umgeschrieben muss also gelten

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_0: |a_{N+i} - a_{N+j}| < \varepsilon$$

Inbesondere muss dies also auch als Spezialfall für  $n, k \in \mathbb{N}, n \geq N$  und  $m = n + k$  gelten:

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, n \geq N: |a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

Folglich gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass für beliebige  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\forall n \geq N: |a_{n+k} - a_n| = |b_n^{(k)}| < \varepsilon$$

Also ist auch  $b_n^{(k)}$  für beliebige  $k \in \mathbb{N}$  eine Cauchy-Folge.