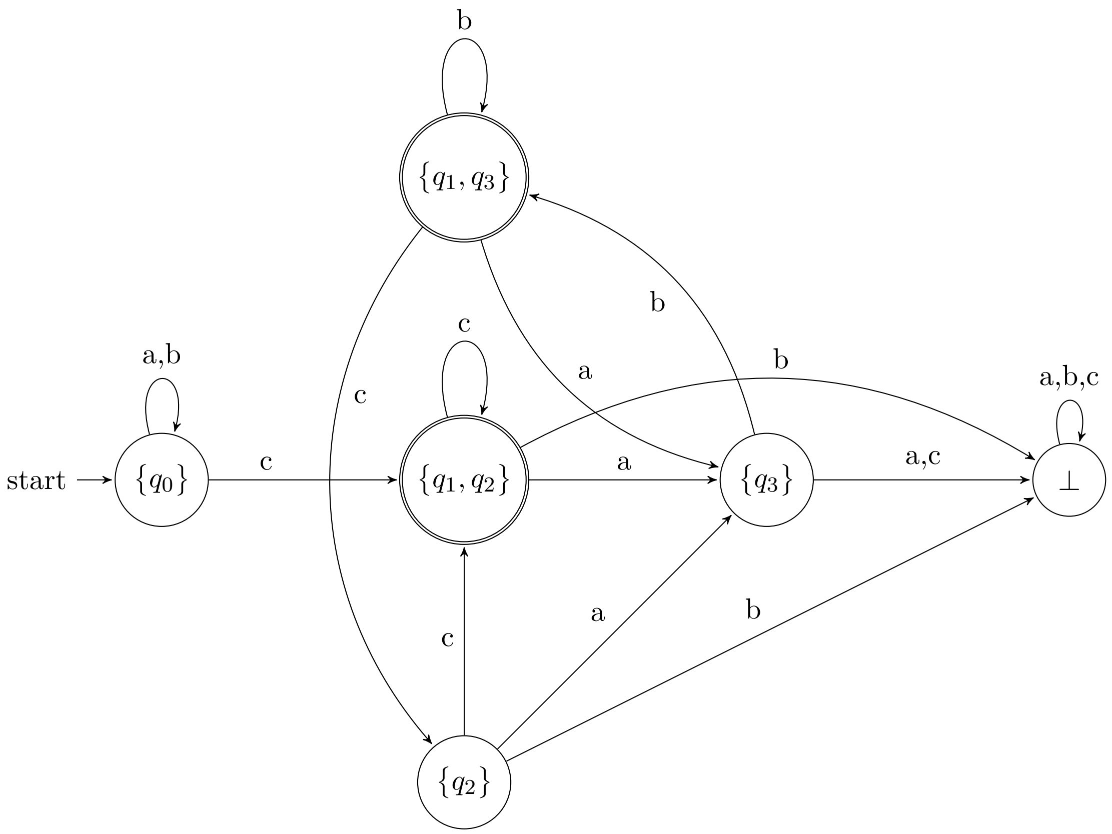
Gruppe $\boxed{\mathbf{3}}$
Formale Systeme und Automaten

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 3

Aufgabe 5



Aufgabe 6

Es sei o.B.d.A ein DFA $\mathcal{A}$ gegeben (sonst machen wir den gegebenen Automaten zum DFA nach Methoden der Vorlesung).

Es sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Wir definieren den ε-NFA $\mathcal{B} := (Q', \Sigma', \Delta, q_0, F')$ mit

$$Q' := Q \mathbin{\dot\cup} \{(q, \varepsilon) \mid q \in Q\} \qquad \Sigma' := \Sigma \mathbin{\dot\cup} \{\varepsilon\} \qquad F' := \{(q, \varepsilon) \mid q \in F)$$

$$\Delta := \{(q, a, q') \mid \exists q, q' \in Q, a \in \Sigma : \delta(q, a) = q'\} \mathbin{\dot\cup} \Delta_{Q \to \varepsilon} \mathbin{\dot\cup} \Delta_\varepsilon$$

Wobei

$$\Delta_{Q \to \varepsilon} := \{(q, \varepsilon, (q', \varepsilon)) \mid \exists q, q' \in Q, a \in \Sigma : \delta(q, a) = q'\}$$
$$\Delta_\varepsilon := \{((q, \varepsilon), a, (q', \varepsilon)) \mid \exists q, q' \in Q, a \in \Sigma : \delta(q, a) = q'\}$$

Die Idee ist, dass wir in jedem Zustand $q \in Q$ von $\mathcal{A}$ die Möglichkeit bieten, durch eine ε-Transition zu dem nächsten Zustand zu kommen. Da wir dies jedoch nur einmal machen dürfen (Es ex. genau 1 Lücke pro Wort), gehen wir dann zu einer Kopie der Zustände aus Q, hier mit (q, ε) betitelt über, in denen diese ε-Transitionen nicht mehr möglich sind. Sobald wir uns einmal in diesem Bereich der ε-Zustände befinden verhält sich der Automat wie vorher und akzeptiert die Kopien der eigentlichen Endzustände.

Wir zeigen $L(\mathcal{B}) \subseteq (L(\mathcal{A}))^-$.
Sei ein $w \in L(\mathcal{B})$ gegeben. Dann existiert ein Lauf l von $\mathcal{B}$ auf w sodass $l = (q_0, \sigma_1, r_1, \sigma_2, r_2, \cdots, \sigma_n, r_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in (\Sigma')^n$ und $r \in (Q')^n$. Weiter existiert dann ein $i \in [1, n]_\mathbb{N}$ sodass $\sigma_i = \varepsilon$ sowie $\forall j \in [1, i-1] : r_j \in Q$ (also in den originalen Zuständen) und $\forall j \in [i, n] : r_j \in (Q' \setminus Q)$ (also in den ε-Kopien). Ferner gilt $r_n \in F'$ und damit $r_n = (q, \varepsilon)$ für ein $q \in F$. Nach Konstruktion von $\mathcal{B}$ folgt aus $(r_{i-1}, \varepsilon, r_i) \in \Delta$, wobei $r_i = (q, \varepsilon)$ für ein $q \in Q$, dass ein $a \in \Sigma$ mit $\delta(r_{i-1}, a) = q$ existiert. Nach Konstruktion von Δ gibt es also einen Lauf auf $\mathcal{A}$ über $w' = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{i-1}, a, \sigma_{i+1}, \cdots, \sigma_n)$, sodass das ε an der Stelle i des Laufes über w durch a ersetzt wird. Folglich ist nach Definition $w = (w')^-_i$, also $w \in (L(\mathcal{A}))^-$. $\square$

Wir zeigen nun $(L(\mathcal{A}))^- \subseteq L(\mathcal{B})$. Sei ein $w \in (L(\mathcal{A}))^-$ gegeben. Dann gilt $w = u^-_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq |u|$ und $u \in L(\mathcal{A}) \setminus \{\varepsilon\}$. Wir haben also einen Lauf $l = (q_0, u_1, r_1, u_2, r_2, \cdots, u_n, r_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion von Δ gibt es dann einen Lauf k von $\mathcal{B}$ auf w sodass
$k = (q_0, u_1, r_1, \cdots, u_{i-1}, r_{i-1}, \varepsilon, r'_i, u_{i+1}, r'_{i+1}, \cdots, u_n, r'_n)$ für $r'_i = (r_i, \varepsilon) \in Q' \setminus Q$ und $r'_n \in F'$.
Folglich gilt $w \in L(\mathcal{B})$. $\square$

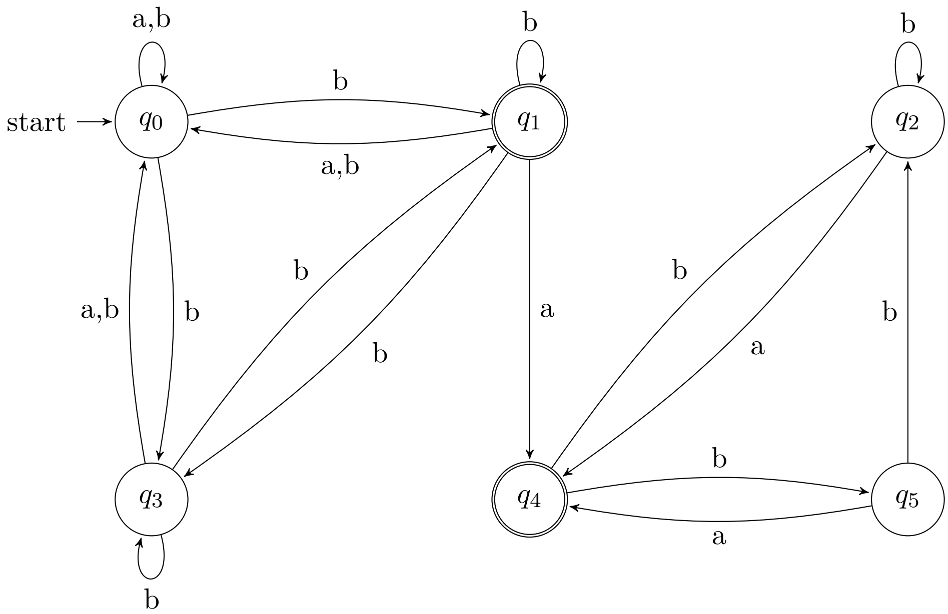
Insgesamt gilt also $L(\mathcal{B}) = (L(\mathcal{A}))^-$. Da die von ε-NFA's erkannten Sprachen zu den FA-erkennbaren Sprachen gehören, folgt, dass FA-erkennbare Sprachen unter Lückenbildung abgeschlossen sind.

Aufgabe 7

a)

	von q_0	von q_1	von q_2	von q_3	von q_4	von q_5
mit a	-	q_0	-	q_0	-	q_4
mit b	q_0, q_1	q_0, q_1, q_3	-	q_0, q_1, q_3	q_2	q_2

b)



Aufgabe 8

Es gibt einen Automaten $\mathcal{A}$, welcher binäre, durch 3 teilbare Zahlen erkennt (Bsp 1.19 Skript). Des weiteren wissen wir, dass es einen FA gibt welcher alle Wörter akzeptiert, in denen ein gegebenes Symbol weniger als eine feste Grenze (hier 42) vorkommt (HA02). So ein FA $\mathcal{B}$ soll im folgenden alle Wörter mit höchstens 42 Einsen erkennen. Zu guter letzt haben wir einen FA zur Erkennung Infixen in der letzten Abgabe definiert bzw gezeigt, dass diese Sprache FA-erkennbar ist (HA02 Nr9). Der FA $\mathcal{C}$ soll dies hier für das Infix 101010 tun.

Wir haben also, dass $L := L(\mathcal{A}), K := L(\mathcal{B})$ und $M := L(\mathcal{C})$ FA-erkennbar sind. Nach Satz 2.40 folgt nun, dass ebenso $\overline{M}, L \cap K$ und $(\overline{M}) \cup (L \cap K)$ FA-erkennbar sind. Dies ist für ein Wort $w \in \{0,1\}^*$ logisch zu interpretieren als

$$(w \in \overline{M}) \vee (w \in L \cap K) \;\equiv\; \neg(w \in M) \vee (w \in L \wedge w \in K) \;\equiv\; w \in M \implies (w \in L \wedge w \in K)$$

Dies entspricht eben genau der Aussage; Wenn 101010 als Infix in w vorkommt ($w \in M$), dann muss w höchstens 42 Einsen haben ($w \in K$) und durch 3 teilbar sein ($w \in L$).

Insgesamt ist dies also FA-erkennbar.