Gruppe $\boxed{\textbf{14}}$
Datenstrukturen und Algorithmen

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 2

Aufgabe 1

a)

Es sei f eine gegebene Funktion. Da $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 1 \cdot f(n) = f(n)$ existiert eine konstante $0 < c = 1 < \infty$ und ein $n_0 = 0$ sodass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot f(n)$$

Damit haben wir nach Definition $f \in \mathcal{O}(f) \iff f \sqsubseteq f$. Also ist $\sqsubseteq$ reflexiv.

Ferner seien nun weiter Funktionen g, h gegeben. Es gilt nach Definition:

$$(f \sqsubseteq g) \wedge (g \sqsubseteq h) \implies (f \in \mathcal{O}(g)) \wedge (g \in \mathcal{O}(h))$$

$$\implies (\exists c, n_0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)) \wedge (\exists c', n_0' : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot h(n))$$

Sei nun $n' := \max\{n_0, n_0'\}$. Dann folgt weiter:

$$\exists c, c' : \forall n \geq n' : f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \wedge \quad g(n) \leq c' \cdot h(n)$$

$$\implies \exists c, c' : \forall n \geq n' : f(n) \leq c \cdot g(n) \leq c(c' \cdot h(n))$$

$$\implies \exists c, c' : \forall n \geq n' : f(n) \leq (c \cdot c') \cdot h(n))$$

$$\implies f \in \mathcal{O}(h) \iff f \sqsubseteq h$$

Wir haben also gezeigt, dass für beliebige Funktionen f, g, h gilt:

$$f \sqsubseteq g \wedge g \sqsubseteq h \implies f \sqsubseteq h$$

Damit ist $\sqsubseteq$ reflexiv und transitiv, also eine Quasiordnung $\square$

b)

Es gilt:

$$0 \sqsubseteq 4 \sqsubseteq 2^{9000} \sqsubseteq \log(n) \sqsubseteq n \cdot \log(n) \sqsubseteq n \cdot \sqrt{n} \sqsubseteq n^2 \sqsubseteq \sum_{i=0}^{n} \frac{14i^2}{1+i} \sqsubseteq n^2 \cdot \log(n) \sqsubseteq \frac{n^3}{2} \sqsubseteq n^3 \sqsubseteq 2^n \sqsubseteq n! \sqsubseteq n^n$$

Aufgabe 2

TODO

Aufgabe 3

a)

Es sei eine Funktion $g(n)$ gegeben. Wir notieren im Sinne der Lesbarkeit

$$o_1 := o(g(n) \qquad \mathcal{O}_1 := \mathcal{O}(g(n)) \qquad \Theta_1 := \Theta(g(n)) \qquad \Omega_1 := \Omega(g(n))$$

Behauptung: Es gilt $o_1 = \mathcal{O}_1 \setminus \Theta_1$ (1)
Beweis:

$$\begin{aligned} o_1 &:= \{f \mid \forall c > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < c \cdot g(n)\} \\ &= \{f \mid \forall c > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < cg(n) \\ &\qquad \wedge \quad \neg(\exists c_1, c_2 > 0, n_0 : \forall n \geq n_0 : c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n))\} \\ &= \mathcal{O}_1 \setminus \Theta_1 \end{aligned}$$

□

Weiter wissen wir, dass $\Theta_1 := \mathcal{O}_1 \cap \Omega_1$ (2)
Ferner ist sind die Mengenoperationen $\cap$ und $\setminus$ distributiv zueinander (3)

$$\begin{aligned} o_1 \cap \Omega_1 &\overset{(1)}{=} (\mathcal{O}_1 \setminus \Theta_1) \cap \Omega_1 \overset{(3)}{=} (\mathcal{O} \cap \Omega_1) \setminus (\Theta_1 \cap \Omega_1) \overset{(2)}{=} (\mathcal{O} \cap \Omega_1) \setminus \Theta_1 \\ &\overset{(2)}{=} \Theta_1 \setminus \Theta_1 = \varnothing \end{aligned}$$

□

b) Wir geben ein Gegenbeispiel. Es seien

$$g(n) = 0 \qquad f(n) = n \qquad h(n) = n^2$$

Damit gilt $f(n) \in \Omega(g(n))$, da für $c = 1 > 0$ und $n_0 = 1$ stets $c \cdot g(n) = 0 \leq f(n)$ gilt.
Weiter ist auch $f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$, da für $c = 1$ und $n_0 = 1$ stets $f(n) \leq c \cdot h(n)$ gilt.

Wir nehmen nun an, es gelte $g(n) \in \Theta(h(n))$. Also auch $g(n) \in \Omega(h(n))$. Daraus folgt, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass ab einem beliebigem Punkt stets $c \cdot h(n) = cn^2 \leq 0 = g(n)$ gilt. Dies kann offensichtlich nur für $c = 0$ gelten, jedoch muss $c > 0$ erfüllt sein. Damit haben wir einen Widerspruch. Also kann die Aussage nicht stimmen. □

Aufgabe 4