Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 9

Aufgabe 2

a)

Zuerst sollten wir die Gleichung so umformen, dass nur noch ein x vorkommt:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \mid \div a \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && \mid -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && \mid + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && \mid \text{quad. Ergänzung} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Nun lässt sich die Gleichung nach x lösen:

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && \mid\sqrt{\ } \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} && \mid -\frac{b}{2a} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}
\end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \cdot \frac{2a}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \cdot (2a)^2 - \frac{c}{a} \cdot (2a)^2}}{2a} \\
&= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Damit wären wir bei der allbekannten Mitternachtsformel. Die sogenannte Diskriminante, $b^2 - 4ac$, welche unter der Wurzel steht, bestimmt die Anzahl der Lösungen (Nullstellen). Gilt $b^2 - 4ac < 0$, so gibt es keine Lösungen (Nullstellen) in $\mathbb{R}$, gilt $b^2 - 4ac = 0$ so gibt es genau eine Lösung (Nullstelle) in $\mathbb{R}$, da stets $\pm\sqrt{0} = 0$ gilt. Ist $b^2 - 4ac > 0$ so gibt es genau 2 Lösungen (Nullstellen) in $\mathbb{R}$.

b)

Hier lässt sich einfach $z = x^2$ substituieren. Dann lassen sich die Nullstellen dieses Polynoms in z wie in a) beschrieben finden:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \implies az^2 + bz + c = 0 \implies z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dann kann man wieder resubstituieren um die Nullstellen in des ursprünglichen Polynoms in x zu erhalten. Es gilt $x = \pm\sqrt{z}$. Seien z_1, z_2 die möglichen Nullstellen des Polynoms in z. Es gilt nun

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} \quad \text{und} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$$

Insofern das Polynom in x genau 4 Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt. Insgesamt lässt sich dies auch alles in einem schreiben:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

c)

Oft gibt es für Polynome dieser Form (quadratisch bzw. biquadratisch) weniger als 2 bzw 4 reelle Lösungen, da evtl. die Wurzel einer negativen Zahl gezogen wird. Wählt man jedoch $a, b, c \in \mathbb{C}$ und sucht nach komplexen Nullstellen, so wird man nach dem Fundamentalsatz der Algebra (IV 1.7) auch stets 2 bzw. 4, genauso viele wie der Grad des Polynoms, finden. Dies liegt grundlegend daran, dass die Gleichung $x = \sqrt{z}$ für $x, z \in \mathbb{C}$ stets in $\mathbb{C}$ lösbar ist, auch wenn $z \in \mathbb{R}$ mit $z < 0$, da $\sqrt{-1} = i$ gilt, wo i die imaginäre Einheit von $\mathbb{C}$ ist.