

## Hausaufgabe 5

---

### Aufgabe 5

**Wir berechnen:**  $r_Q(q_0, q_0)$ . Mit  $x = q_1$  erhalten wir:

$$r_Q(q_0, q_0) = r_{\{q_0\}}(q_0, q_0) + r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)^*r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$$

**Wir berechnen:**  $r_{\{q_0\}}(q_0, q_0)$ . Mit  $x = q_0$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_0, q_0) &= r_{\emptyset}(q_0, q_0) + r_{\emptyset}(q_0, q_0)r_{\emptyset}(q_0, q_0)^*r_{\emptyset}(q_0, q_0) \\ &= (a + \varepsilon) + (a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^*(a + \varepsilon) \\ &= a^* \end{aligned}$$

**Wir berechnen:**  $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$ . Mit  $x = q_0$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_0, q_1) &= r_{\emptyset}(q_0, q_1) + r_{\emptyset}(q_0, q_0)r_{\emptyset}(q_0, q_0)^*r_{\emptyset}(q_0, q_1) \\ &= (b + c) + (a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^*(b + c) \\ &= (b + c) + a^*(b + c) \\ &= a^*(b + c) \end{aligned}$$

**Wir berechnen:**  $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$ . Mit  $x = q_0$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_1, q_1) &= r_{\emptyset}(q_1, q_1) + r_{\emptyset}(q_1, q_0)r_{\emptyset}(q_0, q_0)^*r_{\emptyset}(q_0, q_1) \\ &= \varepsilon + a(a + \varepsilon)^*(b + c) \\ &= \varepsilon + aa^*(b + c) \end{aligned}$$

**Wir berechnen:**  $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$ . Mit  $x = q_0$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_1, q_0) &= r_{\emptyset}(q_1, q_0) + r_{\emptyset}(q_1, q_0)r_{\emptyset}(q_0, q_0)^*r_{\emptyset}(q_0, q_0) \\ &= a + a(a + \varepsilon)^*(a + \varepsilon) \\ &= a + aa^* \\ &= aa^* \end{aligned}$$

Durch Rückeinsetzen erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} r_Q(q_0, q_0) &= r_{\{q_0\}}(q_0, q_0) + r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)^*r_{\{q_0\}}(q_1, q_0) \\ &= a^* + a^*(b + c)(\varepsilon + aa^*(b + c))^*aa^* \\ &= a^* + a^*(b + c)(aa^*(b + c))^*aa^* \end{aligned}$$

## Aufgabe 6

a) Angenommen,  $L_1$  ist regulär. Wir wählen  $n$  zu  $L_1$  gemäß Pumping-Lemma und betrachten das Wort  $w = a^n b^n c^{2n} \in L_1$ . Das Pumping-Lemma liefert Zerlegung

$$w = xyz \quad \text{mit} \quad |xy| \leq n \quad \text{und} \quad y \neq \varepsilon \quad \text{sowie} \quad xz = xy^0z \in L_1$$

Wegen  $|xy| \leq n$  und  $y \neq \varepsilon$  gilt  $x = a^j$  mit  $j \geq 0$  und  $y = a^k$  mit  $k > 0$ .

Jedoch:

$$xz = a^{n-k} b^n c^{2n} \notin L_1 \quad \text{weil} \quad k > 0 \implies n - k + n \neq 2n$$

Dies führt also zu einem Widerspruch. Folglich ist  $L_1$  nicht regulär.

b) Angenommen,  $L_2$  ist regulär. Wir wählen  $n$  zu  $L_2$  gemäß Pumping-Lemma und betrachten das Wort  $w = b^n a^{n+1} \in L_2$ . Das Pumping-Lemma liefert Zerlegung

$$w = xyz \quad \text{mit} \quad |xy| \leq n \quad \text{und} \quad y \neq \varepsilon \quad \text{sowie} \quad xy^3z \in L_2$$

Wegen  $|xy| \leq n$  und  $y \neq \varepsilon$  gilt  $x = b^j$  mit  $j \geq 0$  und  $y = b^k$  mit  $k > 0$ .

Jedoch:

$$xy^3z = a^{n+2k} b^{n+1} \notin L_2 \quad \text{weil} \quad k > 0 \implies 2k \geq 2 \implies n + 2k \not\leq n + 1$$

Dies führt also zu einem Widerspruch. Folglich ist  $L_2$  nicht regulär.

## Aufgabe 7

Zuerst bilden wir die Zustände in Endzustände und nicht-Endzustände:

$$\mathcal{B}_1 := \{q_0, q_1, q_5\} \quad \mathcal{B}_2 := \{q_2, q_3, q_4\}$$

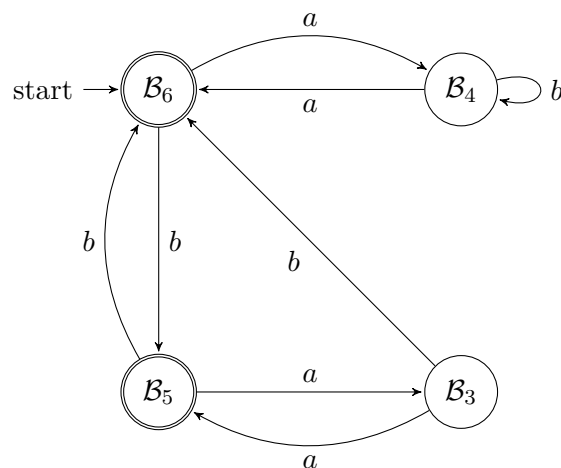
Wir verfeinern  $\mathcal{B}_2$  bzgl. der  $b$ -Transition und  $\mathcal{B}_1$ :

$$\mathcal{B}_1 := \{q_0, q_1, q_5\} \quad \mathcal{B}_3 := \{q_2\} \quad \mathcal{B}_4 := \{q_3, q_4\}$$

Wir verfeinern  $\mathcal{B}_1$  bzgl. der  $a$ -Transition und  $\mathcal{B}_3$ :

$$\mathcal{B}_5 := \{q_1\} \quad \mathcal{B}_6 := \{q_0, q_5\} \quad \mathcal{B}_3 := \{q_2\} \quad \mathcal{B}_4 := \{q_3, q_4\}$$

Es lässt sich nun keine Zustandsmenge noch weiter verfeinern. Der minimale DFA ist dann:



## Aufgabe 8

a)

Der Satz von Nerode besagt:  $\text{index}(L) < \infty \Rightarrow L$  ist regulär.

Somit folgt:  $L$  ist nicht regulär  $\Rightarrow \text{index}(L) = \infty$

Wir zeigen das  $L$  nicht regulär und somit der Index von  $L$  unendlich ist.

### Beweis durch Widerspruch

Angenommen  $L$  ist Regulär.

Wähle  $n$  zu  $L$  gemäß Pumping Lemma und betrachte  $w = b^n a a b^n$ .

Pumping Lemma liefert Zerlegung:

$w = xyz$  mit  $|xy| \leq n$  und  $y \neq \varepsilon$  und  $xz \in L$ .

Wegen  $|xy| \leq n$  und  $y \neq \varepsilon$  gilt  $x = b^j$  mit  $j \geq 0$  und  $y = b^k$  mit  $k > 0$ .

Aber  $xz = b^n - k a a b^n \notin L$ , weil  $n-k < n$ .

### Widerspruch!

Somit ist der Index von  $L$  unendlich.

### Trennende Wörter ficken Sebastian in den Arsch!

b)

Wir Definieren  $v \in \{a, b\}^*$  und im Sinne der Lesbarkeit:

$$p := |v|_{ab} = |v|_{ba}, \quad q := |v|_{ab} > |v|_{ba}, \quad r := |v|_{ab} < |v|_{ba}$$

Wir beginnen mit einigen Beobachtungen zu  $\sim_k$ :

$$||v|_{ab} - |v|_{ba}| \leq 1$$

$$\varepsilon \in p, ab \in q, ba \in r$$

$$\varepsilon \not\sim_k ab \text{ (mit } x = b, \text{ denn } \varepsilon b \in K \text{ und } abb \notin K)$$

$$\varepsilon \not\sim_k ba \text{ (mit } x = a, \text{ denn } \varepsilon a \in K \text{ und } baa \notin K)$$

$$ab \not\sim_k ba \text{ (mit } x = a, \text{ denn } aba \in K \text{ und } baa \notin K)$$

Behauptung:

Die  $\sim_K$ -Klassen sind:  $p/k, q/k, r/k$

Da ein beliebiges  $v$  immer genau eine Eigenschaft der drei Äquivalenzklassen erfüllen muss, zeigt dies, dass  $p/k, q/k, r/k$  alle Äquivalenzklassen von  $K$  sind.

Somit folgt auch  $\text{index}(K) = 3$ .

Trennende Wörter  $x \in \{a, b\}^*$  :

Das trennende Wort  $x$  von  $pq$  ist  $ab$

Das trennende Wort  $x$  von  $pr$  ist  $ba$

Das trennende Wort  $x$  von  $qr$  ist  $a$