Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 9

Aufgabe 1

a)
Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist grundsätzlich für ganz $\mathbb{R}$ definiert. Wir können in der gegebenen Funktion nie durch 0 teilen noch die Wurzel einer negativen Zahl ziehen. Es folgt, dass der maximale Definitionsbereich der reellen Funktion $\exp(1 - 4x^2)$ durch $\mathbb{R}$ gegeben ist.

b) (i)
Das größte offene Intervall in dem die Funktion streng monoton steigend ist, ist $(-\infty, 0)$. Das größte offene Intervall in dem die Funktion streng monoton fallend ist, ist $(0, \infty)$.

(ii)
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gegeben.

Falls $x, y \in (-\infty, 0)$, dann gilt $1-4x^2 < 1-4y^2$ und da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist (III 3.21 c) auch $\exp(1-4x^2) < \exp(1-4y^2)$. Also ist $\exp(1-4x^2)$ streng monoton wachsend im Intervall $(-\infty, 0)$ (V 1.7a).

Falls $x, y \in (0, \infty)$, dann gilt $1 - 4x^2 > 1 - 4y^2$ und da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist (III 3.21 c) auch $\exp(1-4x^2) > \exp(1-4y^2)$. Also ist $\exp(1-4x^2)$ streng monoton fallend im Intervall $(-\infty, 0)$ (V 1.7b).

(iii)
Wenn man nun die Intervalle $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$ betrachtet, ändert sich nichts daran, dass f in diesen streng monoton wächst bzw. fällt, denn für $|x| > 0$ folgt $x^2 > 0^2 = 0$ und damit $1 - 4 \cdot 0^2 > 1 - 4x^2$, d.h. $f(0) > f(x)$ für $x \in (-\infty, 0)$ oder $x \in (0, \infty)$. Also bleibt f in beiden halboffenen Intervallen streng monoton steigend bzw. fallend. **EVTL. VERBESSERUNG**

c)

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt grundsätzlich $\exp(x) > 0$ (III 3.21 b), also kann die Exponentialfunktion keine Nullstellen besitzen. Damit kann die gegebene Funktion ebenfalls keine Nullstellen besitzen.

Da wir in Aufgabenteil b) festgestellt haben, dass f im Intervall $(-\infty, 0]$ streng monoton wächst und im Intervall $[0, \infty)$ streng monoton fällt, folgt, dass $\forall x \in \mathbb{R}\colon f(0) \geq f(x)$ gilt. Damit ist 0 eine Extremal- und insbesondere auch Maximalstelle von f. Hinzukommend kann es keine weiteren (lokalen) Maximal- bzw. Minimalstellen geben. Denn es folgt aus der strengen Monotonie:

Es gilt für jedes $x \in (-\infty, 0)$, dass $y, z \in (-\infty, 0)$ mit $y < x < z$ existieren. Analog gilt für jedes $x \in (0, \infty)$, dass $y, z \in (0, \infty)$ mit $y < x < z$ existieren.
Insgesamt gilt aber $\{0\} \cup (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R}$. Somit kann es abgesehen von 0 keine weiteren Extremalwerte für f geben.

Aufgabe 2

a)

Zuerst sollten wir die Gleichung so umformen, dass nur noch ein x vorkommt:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \mid \div a \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && \mid -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && \mid + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && \mid \text{quad. Ergänzung} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Nun lässt sich die Gleichung nach x lösen:

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && \mid \sqrt{} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} && \mid -\frac{b}{2a} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}
\end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \cdot \frac{2a}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \cdot (2a)^2 - \frac{c}{a} \cdot (2a)^2}}{2a} \\
&= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Damit wären wir bei der allbekannten Mitternachtsformel. Die sogenannte Diskriminante, $b^2 - 4ac$, welche unter der Wurzel steht, bestimmt die Anzahl der Lösungen (Nullstellen). Gilt $b^2 - 4ac < 0$, so gibt es keine Lösungen (Nullstellen) in $\mathbb{R}$, gilt $b^2 - 4ac = 0$ so gibt es genau eine Lösung (Nullstelle) in $\mathbb{R}$, da stets $\pm\sqrt{0} = 0$ gilt. Ist $b^2 - 4ac > 0$ so gibt es genau 2 Lösungen (Nullstellen) in $\mathbb{R}$.

b)

Hier lässt sich einfach $z = x^2$ substituieren. Dann lassen sich die Nullstellen dieses Polynoms in z wie in a) beschrieben finden:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \implies az^2 + bz + c = 0 \implies z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dann kann man wieder resubstituieren um die Nullstellen in des ursprünglichen Polynoms in x zu erhalten. Es gilt $x = \pm\sqrt{z}$. Seien z_1, z_2 die möglichen Nullstellen des Polynoms in z. Es gilt nun

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} \quad \text{und} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$$

Insofern das Polynom in x genau 4 Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt. Insgesamt lässt sich dies auch alles in einem schreiben:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

c)

Wählt man nun $a, b, c \in \mathbb{C}$ und sucht nach komplexen Nullstellen, so wird man nach dem Fundamentalsatz der Algebra (IV 1.7) auch stets mindestens eine finden. Dies liegt grundlegend daran, dass die Gleichung $x = \sqrt{z}$ für $x, z \in \mathbb{C}$ stets in $\mathbb{C}$ lösbar ist, auch wenn $z \in \mathbb{R}$ mit $z < 0$, da $\sqrt{-1} = i$ gilt, wo i die imaginäre Einheit von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 3

a)

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \varepsilon$. Da stets $x^2 > 0$ sowie $|x| > 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt (II 2.8 a4 und II 2.12), folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ |x - 0| < \delta \colon |f(x) - 0| = \left|\frac{x^2}{|x|}\right| = \frac{x^2}{|x|} < \frac{\delta^2}{\delta} = \delta = \varepsilon$$

Somit gilt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) Wir benutzen Polynomdivision (*) und die gegebenen Eigenschaften, dass stets $0 \leq x \leq 2$ (**), sowie die Betragssätze (II 2.12) (***). Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Es folgt:

$$\forall x \in [0, 1) \cup (1, 2],\ |x - 1| < \delta \colon |f(x) - 4| \overset{*}{=} |x^2 + 2x + 1 - 4| = |(x - 1)(x + 3)|$$

$$\overset{***}{=} |x - 1| \cdot |x + 3| < \delta|x + 3| \overset{**}{=} x\delta + 3\delta \overset{**}{\leq} 5\delta = \varepsilon$$

Somit gilt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$.

Aufgabe 4

Wir benutzen im folgenden, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt, insofern f an der Stelle x_0 definiert ist. Dies ist zu interpretieren als eine unendlich nahe Annäherung von x an x_0, was in diesen Fällen eben äquivalent zum Einsetzen von x_0 in f ist (Siehe Satz 1.6).

a)

Da f im Punkt -1 definiert ist, lässt sich $x \to -1$ durch Einsetzen von -1 unendlich nahe approximieren:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x-2} = \frac{3(-1)-1}{2(-1)-2} = \frac{-4}{-4} = 1$$

b)

Die gegebene Funktion lässt sich wie folgt umformen:

$$g(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} = \frac{1}{2-x} - \frac{12}{(2-x)(x^2+2x+4)} = \frac{x^2+2x+4-12}{(2-x)(x^2+2x+4)}$$

$$= \frac{(x-2)(x+4)}{-(x-2)(x^2+2x+4)} = -\frac{x+4}{x^2+2x+4}$$

Nun lässt sich 2 einsetzen, um 2 mit x unendlich nahe zu approximieren:

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} = \lim_{x\to 2} -\frac{x+4}{x^2+2x+4} = -\frac{2+4}{2^2+2\cdot 2+4} = -\frac{1}{2}$$

c)

Die gegebene Funktion lässt sich wieder umformen, sodass der Grenzwert wie in den vorherigen Aufgabenteilen durch Einsetzen bestimmt werden kann. Mit Polynomdivision folgt:

$$h(x) = \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$$

Dieses Polynom ist für $x = 1$ definiert. Somit gilt:

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$$

$$= 2(1)^3 - 4(1)^2 - 3(1) - 3 = -8$$

Aufgabe 5

(i)

Die gegebene Funktion lässt sich wie folgt umschreiben:

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x}{2x^4 + 1} = \frac{1 - \dfrac{2}{x^3}}{2 + \dfrac{1}{x^4}}$$

Wir zeigen, dass $\dfrac{c}{x^n}$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert.
Nach Beispiel 1.13 a) ist $f(x) = \frac{1}{x}$ konvergent gegen 0 (*). Nun lassen sich die Grenzwertsätze (Satz 1.5) anwenden (**). Für $\frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x} \overset{**}{=} \prod_{k=1}^{n} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \overset{*}{=} \prod_{k=1}^{n} 0 = 0$$

Damit ist $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ für $x \to \infty$ kovergent gegen 0. Sei nun ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir wissen $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$ konvergiert für $n \in \mathbb{N}$ (*), die konstante Funktion ist grundsätzlich konvergent und können wieder die Grenzwertsätze anwenden (**). Für $\dfrac{c}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = \lim_{x\to\infty} c \cdot \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to\infty} c \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = c \cdot 0 = 0$$

Insgesamt ist $\dfrac{c}{x^n}$ mit beliebigen $c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ für $x \to \infty$ konvegent gegen 0. Damit sind Nenner und Zähler unserer umgeformten Funktion ebenfalls konvergent und die Grenzwertsätze lassen sich wie folgt anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \dfrac{2}{x^3}}{2 + \dfrac{1}{x^4}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \dfrac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \dfrac{1}{x^4}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^4}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

(ii)

Dies lässt sich analog zu den Teilaufgaben aus Nr. 4 umformen, um dann durch Einsetzen, unendlich nahe zu approximieren. Die gegebene Funktion lässt sich wie folgt umformen:

$$g(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2-x} - \frac{4}{(2-x)(2+x)} = \frac{2+x-4}{(2-x)(2+x)} = -\frac{1}{2+x}$$

Die umgeformte Funktion ist für $x = 2$ definiert. Es folgt:

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2-x} - \frac{4}{4-x^2} = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{2+x} = -\frac{1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$