Gruppe $\boxed{3}$
Formale Systeme und Automaten

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

# Hausaufgabe 8

---

## Aufgabe 5

**a)** $\langle_S a \langle_A a \langle_S \langle_B \langle_S \langle_A \rangle_A b \rangle_S ab \rangle_S \rangle_B b \rangle_S \rangle_A \rangle_S$ und $\langle_S \langle_A a \langle_S \langle_B ab \langle_S a \langle_A \rangle_A \rangle_S \rangle_B \rangle_S b \rangle_A b \rangle_S$

**b)** Sei also eine kontextfreie Grammatik $\mathcal{G} := \{N, T, S, P\}$ gegeben.
Wir konstruieren $\mathcal{G}' := (N, T \cup \{\langle_X, \rangle_X \mid X \in N\}, S, P')$. Für jede Produktionsregel $p \in P$ mit $p = X \to \alpha$, wobei $X \in N$ und $\alpha$ eine Satzform ist, haben wir eine Produktionsregel $p' = X \to \langle_X \alpha \rangle_X$ in $P'$. Damit wird wie in der Konstruktion der Baumkodierung nach jedem Ableitungsschritt bzw. um jede Ebene im Ableitungsbaum die entsprechende Klammerung hinzugefügt.

## Aufgabe 6

**a)** $\mathcal{G} := (\{Q_0, Q_1, Q_3\}, \{a, b\}, P, Q_0\}$ mit $P$ gegeben durch

$$Q_0 \to aQ_1 \mid bQ_3 \qquad Q_1 \to bQ_3 \mid b \qquad Q_3 \to aQ_1 \mid a$$

**b)** $\mathcal{G} := (\{Q_0, Q_1, Q_2\}, \{a, b\}, P, Q_0\}$ mit $P$ gegeben durch

$$Q_0 \to bQ_0 \mid aQ_1 \mid a \qquad Q_1 \to bQ_1 \mid aQ_2 \mid b \mid a \qquad Q_2 \to bQ_2 \mid aQ_0 \mid b$$

## Aufgabe 7

Wir wissen aus Tutoraufgabe 1, dass die kontextfreien Grammatiken unter Spiegelbild-bildung abgeschlossen sind. Für eine gegebene linkslineare Grammatik $\mathcal{G}$ können wir also die Grammatik $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}$ konstruieren. Offensichtlich ist diese dann rechtslinear, denn:
Für jede Produktionsregel $p$ der Form $N \to a$, mit $N$ als Nichtterminal und $a$ als Terminal haben wir auch die Produktionsregel $N \to a$ in $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}$.
Für jede Produktionsregel $p$ der Form $N \to Ba$ mit $N, B$ als Nichtterminal und $a$ als Terminal haben wir die Produktionsregel $N \to aB$ in $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}$. Da also $\mathcal{G}$ nur Produktionsregeln dieser Form enthalten kann, kann $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}$ nur Produktionsregeln enthalten, welche rechtslinear sind.
Damit ist also $L(\mathcal{G}^{\mathcal{R}})$ regulär, und damit auch $L(\mathcal{G}^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = L(\mathcal{G})$ regulär, da die regulären Sprachen unter Spiegelbild-bildung ebenfalls abgeschlossen sind.

Zu einer gegebenen regulären Sprache $L$ existiert eine rechtslineare Grammatik $\mathcal{G}$ sodass
$L = L(\mathcal{G}) \setminus \{\varepsilon\}$. Da für jede Sprache $K$ stets $(K^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = K$, also die Spiegelbild-Operation ihr eigenes Inverses ist, folgt nach oben stehendem Argument analog, dass dann $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}$ linkslinear ist.

Insgesamt erzeugen die linkslinearen Grammatiken genau die regulären Sprachen.

## Aufgabe 8

### a)

Angenommen, $L_1$ sei kontextfrei.
Sei $n \geq 1$ gemäß Pumping-Lemma gegeben. Wir betrachten $z = a^n b^n c^{n^2} \in L_1$.
Das Pumping-Lemma liefert die Zerlegung $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq n$.

**Fall 1:** $vwx = \sigma^n$ für $\sigma \in \{a, b\}$.
Es folgt nach Pumping-Lemma, dass auch $z_2 = uv^2wx^2y \in L_1$, jedoch haben wir dann $|z_2|_c < |z_2|_a \cdot |z_2|_b$, da $vx \neq \varepsilon$ und alle $c's$ in $y$ liegen. Dann ist jedoch $z_2 \notin L_1$. Widerspruch!

**Fall 2:** $vwx$ liegt ganz im Präfix $a^n b^n$ (und Fall 1 trifft nicht zu). Es folgt nach Pumping-Lemma, dass auch $z_0 = uwy \in L_1$, jedoch haben wir dann $|z_0|_c > |z_0|_a \cdot |z_0|_b$, da $vx \neq \varepsilon$ und alle $c's$ in $y$ liegen. Dann ist aber $z_0 \notin L_1$. Widerspruch!

**Fall 3:** $vwx$ liegt ganz im Suffix $b^n c^{n^2}$ (aber $vwx \neq b^n$). Es folgt nach dem Pumping-Lemma, dass auch $z_0 = uwy \in L_1$. Es sind alle $a's$ von $z_0$ in $u$. Wir haben also insgesamt die Gleichung

$$|z_0|_c = |z_0|_a \cdot |z_0|_b \iff n^2 - j = n \cdot (n - k)$$

für $j, k \in \mathbb{N}$ mit $j + k = |vwx| = n$. Andererseits folgt damit $n = n - k + \frac{j}{n} \implies j = nk$. Setzen wir dies nun in $j + k = n$ ein, folgt $k = \frac{n}{n+1}$. Da jedoch $n, k \in \mathbb{N}$ haben wir hiermit einen Widerspruch, da für $n > 0$ stets $\frac{n}{n+1} \notin \mathbb{N}$. Damit haben wir also $|z_0|_c \neq |z_0|_a \cdot |z_0|_b$ und $uwy \notin L_1$. Insgesamt ist also in jedem Fall $L_1$ nicht kontextfrei.

### b)

Angenommen $L_2$ sei kontextfrei.
Sei $n \geq 1$ gemäß Pumping-Lemma, gegeben. Wir betrachten $z = a^n b^{n+1} c^{n+2} \in L_2$.
Das Pumping-Lemma liefert die Zerlegung $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq n$.

**Fall 1:** $vwx$ liegt ganz im Präfix $a^n b^{n+1}$.
Es folgt nach Pumping-Lemma, dass auch $z_2 = uv^2wx^2y \in L_2$, jedoch haben wir dann mindestens ein $a$ oder $b$ mehr als in $z$. Wenn wir mindestens ein $b$ mehr haben, also $|z_2|_b > |z|_b$, dann folgt $|z_2|_b \not< |z_2|_c$, da alle $c's$ von $z_2$ in $y$ liegen. Wenn wir kein $b$ mehr haben, so müssen wir durch $vx \neq \varepsilon$ ein $a$ mehr haben, also $|z_2|_a > |z|_a$ und damit $|z_2|_a \not< |z_2|_b$. In beiden Fällen ist dann jedoch $z_2 \notin L_2$. Widerspruch!

**Fall 2:** $vwx$ liegt ganz im Suffix $b^{n+1} c^{n+2}$. Es folgt nach Pumping-Lemma, dass auch $z_0 = uwy \in L_2$, jedoch haben wir dann mindestens ein $b$ oder $c$ weniger als in $z$. Wenn also $|z_0|_b < |z|_b$, dann folgt $|z_0|_a \not< |z_0|_b$, da alle $a's$ von $z_0$ in $u$ sind. Wenn wir $|z_0|_c < |z|_c$, dann folgt $|z_0|_b \not< |z_0|_c$. In beiden Fällen ist dann jedoch $z_0 \notin L_2$. Widerspruch!