Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$ Tobias Riedel, 379133
Analysis für Informatiker Phil Pützstück, 377247

Hausaufgabe 5

Aufgabe 1

Seien M_1 und M_2 zwei abzählbare Mengen. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $M_1 \neq \varnothing$ und $M_2 \neq \varnothing$. Da M_1 und M_2 abzählbar sind, existieren injektive Abbildungen $f_1 \colon M_1 \to \mathbb{N}$ und $f_2 \colon M_2 \to \mathbb{N}$. Sei nun $C = A \dot{\cup} B$. Wir definieren

$$f_3 \colon C \to \mathbb{N} \colon c \mapsto \begin{cases} 2 \cdot f_1(c) & \text{falls } c \in A \\ 2 \cdot f_2(c) + 1 & \text{falls } c \in B \end{cases}$$

Wir unterscheiden nun für beliebig aber feste $a, b \in C$ folgende Fälle:

Fall 1: $a, b \in A$:
Da f_1 injektiv ist, muss $f_1(x) \neq f_1(y)$ gelten. Somit auch $2 \cdot f_1(x) \neq 2 \cdot f_1(y) \Leftrightarrow f_3(x) \neq f_3(y)$

Fall 2: $a, b \in B$:
Dies ist analog zu Fall 1. Es muss gelten: $2 \cdot f_2(x) + 1 \neq 2 \cdot f_2(y) + 1 \Leftrightarrow f_3(x) \neq f_3(y)$

Fall 3: $a \in A \wedge b \in B$
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist dieser Fall analog zum Fall $a \in B \wedge b \in A$. Da f_1 und f_2 beide auf $\mathbb{N}$ abbilden, folgt mit $M_1 = \{x \mid \text{x ist gerade}\}$ und $M_2 = \{x \mid \text{x ist ungerade}\}$:

$$\forall c \in C \colon 2 \cdot f_1(c) \in M_1 \quad \text{sowie} \quad \forall c \in C \colon 2 \cdot f_2(c) + 1 \in M_2$$

Da eine natürliche Zahl nicht gerade und ungerade gleichzeitig sein kann, folgt nach Konstruktion von f_3 :

$$f_3(a) \neq f_3(b)$$

Somit gilt für jeden Fall, bzw. $\forall a \in A, b \in B \colon f_3(a) \neq f_3(b)$. Also ist f_3 injektiv. Daher gibt es eine injektive Abbildung $f_3 \colon C \to \mathbb{N}$. Nach Definition ist dann die Vereinigung zweier disjunkter abzählbarer Mengen ebenfalls abzählbar.

Da $\mathbb{Q}^\complement := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, folgt $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^\complement = \mathbb{R}$. Somit auch $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^\complement = \varnothing$. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist und die Vereinigung zweier disjunkter abzählbarer Mengen wie gerade bewiesen ebenfalls abzählbar ist, muss $\mathbb{Q}^\complement$ überabzählbar sein, da sonst folgen würde, dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist:

$$\begin{aligned} & (\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^\complement) \wedge (\mathbb{R} \text{ überabzählbar}) \wedge (\mathbb{Q} \text{ abzählbar}) \\ \Longrightarrow \; & (\mathbb{Q} \text{ nicht abzählbar} \vee \mathbb{Q}^\complement \text{ nicht abzählbar}) \wedge (\mathbb{Q} \text{ abzählbar}) \\ \Longrightarrow \; & (\mathbb{Q}^\complement \text{ nicht abzählbar}) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{3\sqrt{n}+1}$

Nach den Limitenregeln lässt sich der Grenzwert wie folgt bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{3\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}}{3+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}}{3+0} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}}{3} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/6}}}{3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}$$

Somit ist der Grenzwert der Folge $\frac{1}{3}$. Da die Folge einen Grenzwert besitzt, konvergiert sie auch gegen diesen.

b) $a_n = n \cdot \left(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}\right)$

Durch Umformungen erhält man:

$$n\left(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}\right) = \frac{n}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}$$

Wir gehen nach dem Sandwich-Lemma und definieren vorerst:

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := \frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}} \quad \text{und} \quad (c_n)_{n\in\mathbb{N}} := \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}$$

Also gilt stets $b_n \leq a_n \leq c_n$. Wir wissen nach 1.6, dass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ gilt. Außerdem folgt analog zu Beispiel 1.11, dass $\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}$ unbeschränkt nach oben ist und damit b_n gegen 0 konvergiert; Zu jedem $C \in \mathbb{R}$ mit $C > 0$ gibt es ein $N = \lceil C^2 \rceil \in \mathbb{N}$ sodass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N\colon \sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1} \geq \sqrt{n^3} \geq \sqrt{n} \geq \sqrt{N} \geq \sqrt{C^2} = C$$

Also ist $(b^{-1})_{n\in\mathbb{N}} := \sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}$ nach oben unbeschränkt. Weiterhin lässt sich durch Induktion zeigen, dass $(b^{-1})_n$ monoton steigt: Sei $A(n) := \left(\forall n \in \mathbb{N}\colon (b^{-1})_{n+1} \geq (b^{-1})_n\right)$

(IA) Es gilt $\sqrt{2^3+2}+\sqrt{2^3+1} \geq \sqrt{1^3+2}+\sqrt{1^3+1}$. Also gilt $A(1)$.

(IS) Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. $n \mapsto n+1$:

$$\sqrt{(n+2)^3+2}+\sqrt{(n+2)^3+1} \geq \sqrt{(n+1)^3+2}+\sqrt{(n+1)^3+1}$$

Nach Prinzip der vollständigen Induktion gilt nun $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$. Somit ist $\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}$ monoton steigend und unbeschränkt, und der Kehrwert, b_n, geht dann für $n \mapsto \infty$ gegen 0. Es folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ und $\forall n \in \mathbb{N}\colon b_n \leq a_n \leq c_n$, also gilt nach Sandwich-Lemma nun auch:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}\right) = 0$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2nz+z^2}{n^2}\right)^n$
Zuerst zeigen wir eine Umformung:

$$\left(\frac{n^2+2nz+z^2}{n^2}\right)^n = \left(\frac{(n+z)^2}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n+z}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n}$$

Somit folgt nun durch den Hinweis und die Grenzwertgesetze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2nz+z^2}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z\cdot e^z = e^{2z}$$

Es folgt, dass die Folge gegen e^{2z} konvergiert, da wie gezeigt e^{2z} der Grenzwert ist und somit die Folge auch gegen diesen konvergiert.

Aufgabe 3

a) Sei $A(n) := \left(\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n \geq \frac{1}{3}\right)$

(IA) Wir zeigen, dass die Aussage für $n=1$ gilt: $a_1 := 1 \geq \dfrac{1}{3}$. Also gilt $A(1)$.

(IS) Es gelte nun $A(n)$ für ein $n\in\mathbb{N}$, d.h. $a_n \geq \frac{1}{3}$. Nun für $n\mapsto n+1$:

$$a_n \geq \frac{1}{3} \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{4a_n}{3a_n+3} \geq \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{3}+3} = \frac{1}{3}$$

Somit gilt nach Prinzip der Induktion $\forall n\in\mathbb{N}\colon A(n)$. a_n ist also nach unten beschränkt.
b) Wir zeigen nun durch Induktion, dass a_n monoton fallend ist.
Sei $A(n) := (\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n \geq a_{n+1})$:

(IA) $n=1$. Es gilt $a_1 := 1$ und $a_2 = \frac{4}{6}$. Da $1 > \frac{4}{6}$ gilt nun $A(1)$.

(IS) Es gelte $A(n)$ für ein $n\in\mathbb{N}$. $n\mapsto n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{4a_n}{3a_n+3} \overset{a_n\,\geq\,\frac{1}{3}}{\geq} \frac{4\left(\frac{4a_n}{3a_n+3}\right)}{3\left(\frac{4a_n}{3a_n+3}\right)+3} = \frac{4a_{n+1}}{3a_{n+1}+3} = a_{n+2}$$

Somit gilt nach Prinzip der vollständigen Induktion $\forall n\in\mathbb{N}\colon A(n)$. Damit ist a_n monoton fallend und beschränkt. Also konvergiert a_n.

c) Da a_n monoton fallend ist, gilt nun $\forall n\in\mathbb{N}\colon 1\geq a_n \geq \frac{1}{3}$. Es folgt:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{4L}{3L+3}$$

Wir lösen also nach L:

$$L = \frac{4L}{3L+3} \Longleftrightarrow 3L^2 - L = 0$$

Durch die Mitternachtsformel erhalten wir also:

$$\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 3\cdot 0}}{2\cdot 3} = \frac{1\pm 1}{6} \Longrightarrow L_1 = 0, L_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Da jedoch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq \frac{1}{3}$ gilt, kann L_1 für unseren Fall ignoriert werden. Somit ist

$$L = L_2 = \frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 4

Wir zeigen zunächst die Identitäten:

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1^2+2\sqrt{5}+5}{2^2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{1^2-2\sqrt{5}+5}{2^2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Nun die Induktion:
(IA) Wir zeigen dass a_0 hält, also für $n = 0$:

$$
\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{2} = 1
$$

Da $n_0 := 1$, gilt unsere Annahme nun für $n = 0$.

(IS) Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $y := \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $n \mapsto n+1$:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x^{n+2}-y^{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x^2x^n - y^2y^n\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left((x+1)\cdot x^n - (y+1)\cdot y^n\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(x^{n+1}+x^n-y^{n+1}-y^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(x^{n+1}-y^{n+1}+x^n-y^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(x^{n+1}-y^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(+x^n-y^n) = a_n + a_{n-1}
\end{aligned}
$$

Da nach Definition $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ gilt die Aussage $A(n)$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion nun für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Da die Fibonacci-folge eine Summe aus natürlichen Zahlen ist, ist $a_n \geq 1$. Somit:

$$
\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)} \tag{2}
$$

Für den Grenzwert L folgt durch $n \mapsto \infty$:

$$
L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \overset{(2)}{\Longrightarrow} L = 1+\frac{1}{L} \implies L^2-L-1=0
$$

Die vorgegebene Grenzwert erfüllt genau diese Eigenschaft:

$$
L^2-L-1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \overset{(1)}{=} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 0
$$

Da zu jeder Folge immer nur ein Grenzwert existiert (Satz 1.7), gilt nun

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}
$$