

Hausaufgabe 9

Aufgabe 2

a)

Zuerst sollten wir die Gleichung so umformen, dass nur noch ein x vorkommt:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 && | \div a \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && | - \frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && | + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && | \text{quad. Ergänzung} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Nun lässt sich die Gleichung nach x lösen:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && | \sqrt{} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} && | - \frac{b}{2a} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \cdot \frac{2a}{2a}} = \frac{-b \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \cdot (2a)^2 - \frac{c}{a} \cdot (2a)^2}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Damit wären wir bei der allbekannten Mitternachtsformel. Die sogenannte Diskriminante, $b^2 - 4ac$, welche unter der Wurzel steht, bestimmt die Anzahl der Lösungen (Nullstellen). Gilt $b^2 - 4ac < 0$, so gibt es keine Lösungen (Nullstellen) in \mathbb{R} , gilt $b^2 - 4ac = 0$ so gibt es genau eine Lösung (Nullstelle) in \mathbb{R} , da stets $\pm\sqrt{0} = 0$ gilt. Ist $b^2 - 4ac > 0$ so gibt es genau 2 Lösungen (Nullstellen) in \mathbb{R} .

b)

Hier lässt sich einfach $z = x^2$ substituieren. Dann lassen sich die Nullstellen dieses Polynoms in z wie in a) beschrieben finden:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \implies az^2 + bz + c = 0 \implies z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dann kann man wieder resubstituieren um die Nullstellen in des ursprünglichen Polynoms in x zu erhalten. Es gilt $x = \pm\sqrt{z}$. Seien z_1, z_2 die möglichen Nullstellen des Polynoms in z . Es gilt nun

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} \quad \text{und} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$$

Insofern das Polynom in x genau 4 Nullstellen in \mathbb{R} besitzt. Insgesamt lässt sich dies auch alles in einem schreiben:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

c)