Gruppe $\boxed{3}$
Formale Systeme und Automaten

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 4

Aufgabe 5

a)

$$\begin{array}{llllll}
A: & \varepsilon \in L & & & & \\
B: & A \wedge (1): & x = \varepsilon, & y = \varepsilon, & z = \varepsilon & \implies abc \in L \\
C: & B \wedge (1): & x = a, & y = b, & z = c & \implies aabbcc \in L \\
D: & C \wedge (1): & x = aa, & y = bb, & z = cc & \implies aaabbbccc \in L \\
E: & D \wedge (2): & x = aaa, & y = bbb, & z = cc & \implies cbbbccaaa \in L
\end{array}$$

b) Sei

$$L' = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{cb^n c^{n-1} a^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{\varepsilon\}$$

Dann ist $L = L'$. Wir zeigen zuerst $L \subseteq L'$.

Wir führen Induktion über den Aufbau von L. Wir fangen mit der Basisregel an. Sei also $w = \varepsilon$. Dann gilt trivialerweise $w \in L'$.

Sei nun $w \in L \wedge w \in L'$ (IV). Wir überprüfen die Rekursionregeln:

Fall 1: Anwenden der Rekursionregel (1).
Dann ist $w = xyz$ mit $x = a^n, y = b^n$ und $z = c^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, da $w \in L'$ und Rekursionregel (1) diesen Aufbau von Wort benötigt. Durch anwenden der Rekursionregel (1) auf w erhalten wir ein w' und es folgt

$$w' = axbycz = aa^n bb^n cc^n = a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1} \in L'$$

Fall 2: Anwenden der Rekursionregel (2).
Dann ist $w = xyzc$ mit $x = a^n, y = b^n$ und $z = c^{n-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, da die Rekursionregel (2) benötigt, dass das gegebene Wort diese Form hat. Weiter ist ja nach (IV) auch $w \in L'$, also insgesamt $w = xyzc = a^n b^n c^{n-1} c = a^n b^n c^n$. Durch anwenden der Rekursionsregel (2) auf w erhalten wir ein w' und es folgt:

$$w' = cyzx = cb^n c^{n-1} a^n \in L'$$

Insgesamt folgt für jedes ableitbare Wort $w \in L$, dass auch $w \in L'$. Also $L \subseteq L'$.

Wir zeigen nun $L' \subseteq L$. Offensichtlich gilt $\varepsilon \in L'$ und $\varepsilon \in L$ nach Basisregel.
Wir notieren das anwenden der Rekursionregel auf ein wort w als $R_1(w)$ bzw. $R_2(w)$.
Wir führen Induktion über $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und zeigen, dass stets $a^n b^n c^n \in L$ sowie $cb^n c^{n-1} a^n \in L$

Sei also $n = 1$. Es gilt $a^n b^n c^n = abc = R_1(\varepsilon)$ und $\varepsilon \in L$ also auch $abc \in L$. Weiter ist $cb^n c^{n-1} a^n = cba = R_2(abc) = R_2(R_1(\varepsilon))$ also auch $cba \in L$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gegeben, sodass $a^n b^n c^n \in L$ (IV). Es folgt

$$a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1} = R_1(a^n b^n c^n) \quad \text{sowie} \quad cb^{n+1} c^n a^{n+1} = R_2(a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1}) = R_2(R_1(a^n b^n c^n))$$

Da $a^n b^n c^n \in L$ nach IV, folgt also auch $a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1} \in L$ sowie $cb^{n+1} c^n a^{n+1} \in L$. Nach Prinzip der vollständigen Induktion gilt also, dass $a^n b^n c^n \in L$ und $cb^n c^{n-1} a^n \in L$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Insgesamt gilt also nach Konstruktion von L', dass $L' \subseteq L$.

Aus beiden Induktionen folgt dann $L = L'$. $\square$

Aufgabe 6

a) Wir definieren q rekursiv wie folgt für ein $w \in \Sigma^*$

$$q(w) = \begin{cases} 0 & \text{für } w = \varepsilon \\ a + q(v) & \text{für } w = av \text{ mit } a \in \Sigma \text{ und } v \in \Sigma^* \end{cases}$$

b)

Wir zeigen $q(vw) = q(v) + q(w)$ für $v, w \in \Sigma^*$ mittels Induktion über v. Sei also w beliebig aber fest. Für $v = \varepsilon$ ist

$$q(vw) = q(\varepsilon w) = q(w) = 0 + q(w) = q(\varepsilon) + q(w) = q(v) + q(w)$$

Sei also nun v so dass $q(vw) = q(v) + q(w)$ (IV). Wir verlängern also v um ein Präfix $a \in \Sigma$:

$$q(avw) = a + q(vw) \overset{\text{IV}}{=} a + q(v) + q(w) = q(av) + q(w)$$

Folglich gilt für alle $v, w \in \Sigma^*$, dass $q(vw) = q(v) + q(w)$. Da wir aber mindestens im abelschen Monoid der natürlichen Zahlen (da hier $0 \in \mathbb{N}$) rechnen, ist die Addition kommutativ.
Folglich gilt für $v, w \in \Sigma^*$

$$q(vw) = q(v) + q(w) = q(w) + q(v) = q(wv)$$

$\square$

Aufgabe 7

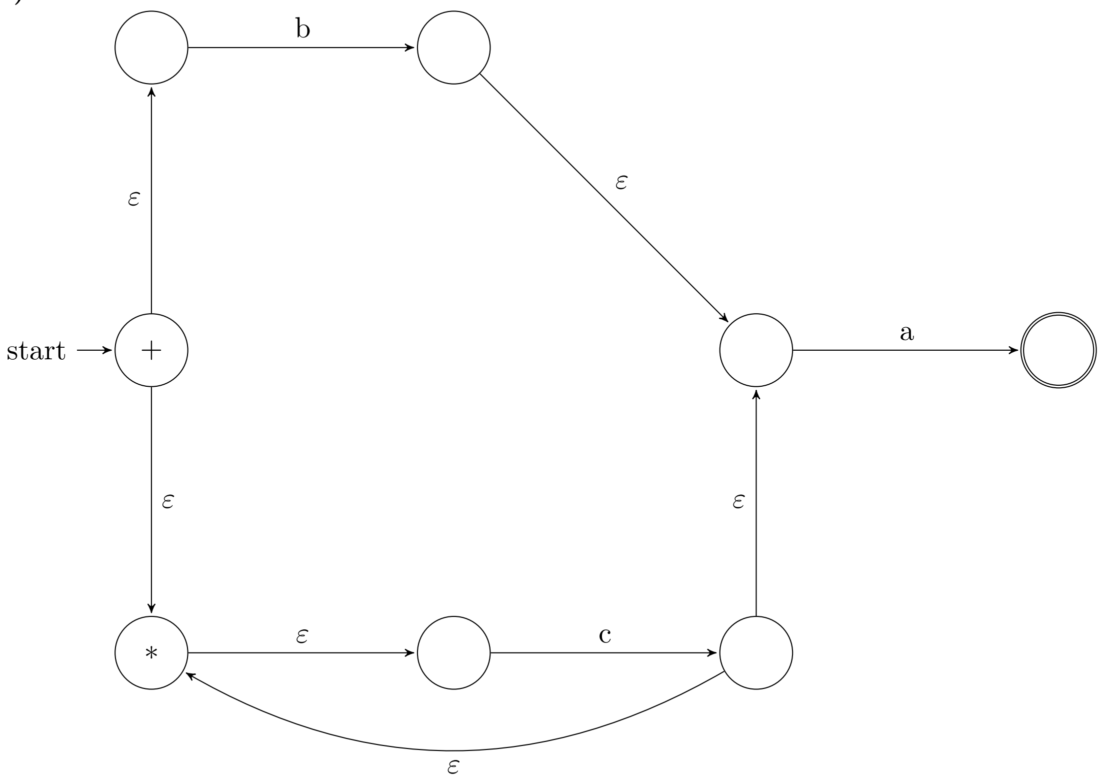
Es sei im Sinne der Lesbarkeit im folgenden Σ^* als $(\sum_{a \in \Sigma} a)^*$, also konkret $(a + b + c)^*$ zu interpretieren.

$$r_1 = (\Sigma\Sigma)^* \qquad r_2 = (c^* a + b^* a)^* + (c^* + b^*)$$

$$r_3 = \Sigma^*(ab(c + \Sigma^* bc) + bc\Sigma^* ab)\Sigma^* \qquad r_4 = (b + c)^* + (\Sigma^* bc \Sigma^*)$$

Aufgabe 8

a)



b)