Gruppe $\boxed{\mathbf{9}}$ Phil Pützstück, 377247
Lineare Algebra für Informatiker

Hausaufgabe 1

Aufgabe 4

a)
Da U_1 und U_2 beides Vektorräume sind, folgt sofort $0 \in U_1 \cap U_2$.
Seien nun $u, v \in U_1 \cap U_2$ gegeben. Wieder durch die VR-Eigenschaften von U_1, U_2 folgt:

$$u, v \in U_1 \cap U_2 \implies u, v \in U_1 \wedge u, v \in U_2 \implies u + v \in U_1 \wedge u + v \in U_2 \implies u + v \in U_1 \cap U_2$$

Sei nun $a \in K, u \in U_1 \cap U_2$. Analog folgt

$$u \in U_1 \cap U_2 \implies u \in U_1 \wedge u \in U_2 \implies au \in U_1 \wedge ua \in U_2 \implies au \in U_1 \cap U_2$$

Insgesamt erfüllt $U_1 \cap U_2$ die UVR-Kriterien.

b)
Gegenbeispiel. Sei $K = \mathbb{R}, V = R^2, U_1 = \langle(1, 0)\rangle, U_2 = \langle(0, 1)\rangle$.
Dann gilt $(1, 0), (0, 1) \in U_1 \cup U_2$, jedoch $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U_1 \cup U_2$.
Damit kann $U_1 \cup U_2$ kein UVR von V sein.

c)
Gegenbeispiel. Seien K, V, U_1, U_2 wie in b).
Dann gilt $0 \in U_1$ und $0 \in U_2$, da beides VR sind. Jedoch gilt dann $0 \notin U_1 \setminus U_2$.
Damit kann $U_1 \setminus U_2$ kein UVR von V sein.

d)
Gegenbeispiel. Seien K, V, U_1, U_2 wie in b).
Dann gilt $0_{U_1 \times U_2} = (0_{U_1}, 0_{U_2}) = ((0, 0), (0, 0)) \neq (0, 0) = 0_V$.
Damit kann $U_1 \times U_2$ kein UVR von V sein.

e)
Da U_1 und U_2 beides VR sind, folgt sofort $0 + 0 = 0 \in U_1 + U_2$.
Seien nun $u, v \in U_1 + U_2$ gegeben. Dann ist $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2$ mit $u_1, v_1 \in U_1,\ u_2, v_2 \in U_2$.
Es folgt durch die UVR-Eigenschaften von U_1, U_2 :

$$u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in U_1 + U_2$$

Sei nun $a \in K, u \in U_1 + U_2$ sodass $u = u_1 + u_2$ für $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$. Analog folgt:

$$au = a(u_1 + u_2) = au_1 + au_2 \in U_1 + U_2$$

Insgesamt erfüllt $U_1 + U_2$ die UVR-Kriterien.

Aufgabe 5

a)

Es ist $0_{\mathrm{Map}(M,K)} : M \to K, m \mapsto 0_K \in \mathrm{Map}(M,K)$. Denn es gilt:

$$\forall f \in \mathrm{Map}(M,K) : \forall m \in M : f(m) + 0(m) = f(m) + 0 = f(m)$$

und damit $f + 0 = f$ für alle $f \in \mathrm{Map}(M,K)$. Also haben wir schonmal eine 0 für $\mathrm{Map}(M,K)$.

Seien nun $f, g \in \mathrm{Map}(M,K), m \in M$. Dann ist offensichtlich $f(m), g(m) \in K$ also auch $f(m) + g(m) \in K$. Es folgt, da m beliebig:

$$(f+g)(m) \in K \implies (f+g) \in \mathrm{Map}(M,K)$$

Analog sei weiter $a \in K$, dann ist stets $(af)(m) = a \cdot f(m) \in K$ für $m \in M$.
Somit sind Addition und Skalierung wohldefiniert. Da diese beiden Verknüpfungen über die Bilder der Elemente von M, sprich, Elemente von K definiert sind, gelten automatisch Assoziativität, Kommutativität und Distributivität für diese dank der Körpereigenschaften.

Weiter definieren wir auf natürliche Weise negative: Sei $f \in \mathrm{Map}(M,K)$. Definieren $-f \in \mathrm{Map}(M,K)$ durch die Skalierung $(-1) \cdot f$. Es folgt:

$$\forall f \in \mathrm{Map}(M,K) \forall m \in M : f(m) + (-f)(m) = f(m) + (-1) \cdot f(m) = f(m) - f(m) = 0$$

Also insgesamt $f + (-f) = 0$.

Ebenso folgt wider mit der 1 aus K, da $f(m) \in K \forall m \in M$ gilt, dass:

$$\forall m \in M : (1 \cdot f)(m) = 1 \cdot f(m) = f(m)$$

Damit haben wir alle Eigenschaften durch zurückführen auf Eigenschaften von K gezeigt.

b)

Offensichtlich ist $0 \in \mathrm{Map}^{\mathrm{fin}}(M,K)$. Seien nun $f, g \in \mathrm{Map}^{\mathrm{fin}}(M,K)$.
Seien Ferner $F := \{m \in M \mid f(m) \neq 0\}, G := \{m \in M \mid g(m) \neq 0\}$.
Ferner gilt:

$$X := \{m \in M \mid (f+g)(m) \neq 0\} = (F \cup G) \setminus \{m \in M \mid f(m) = -g(m)\} \subseteq F \cup G$$

Da F, G endlich, also $F \cup G$ endlich ist auch $X \subseteq F \cup G$ endlich und damit auch $(f+g) \in \mathrm{Map}^{\mathrm{fin}}(M,K)$.

Ferner haben wir dass natürlich

$$a \cdot 0 = 0 \implies (af)(M \setminus F) = \{a \cdot f(m) \mid m \in M \setminus F\} = \{0\}$$

Insbesondere gilt also stets $\{m \in M \mid (af)(m) \neq 0\} \subseteq F$, d.h. es kann durch skalare Multiplikation niemals ein $m \in M$, welches vorher auf 0 abgebildet wurde, auf ein $0 \neq k \in K$ abgebildet werden. Wie gerade folgt dann $(af) \in \mathrm{Map}^{\mathrm{fin}}(M,K)$.