Gruppe $\boxed{9}$ Phil Pützstück, 377247
Lineare Algebra für Informatiker

Hausaufgabe 7

Aufgabe 40

a) Wir Entwickeln nach der 4. Spalte, dann nach der 2. :

$$\chi_A = \det(XE_4 - A) = \det \begin{pmatrix} X-7 & 0 & 12 & 0 \\ 16 & X-1 & -32 & 0 \\ -3 & 0 & X+5 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$= (X-1) \cdot \det \begin{pmatrix} X-7 & 0 & 12 \\ 16 & X-1 & -32 \\ -3 & 0 & X+5 \end{pmatrix} = (X-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} X-7 & 12 \\ -3 & X+5 \end{pmatrix}$$

$$= (X-1)^2(X^2 - 2X - 35 + 36) = (X-1)^4$$

Wir entwickeln nach der 4. Spalte, dann nach der 1. :

$$\chi_B = \det(XE_4 - B) = \det \begin{pmatrix} X-1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & X-4 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & X+2 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$= (X-1) \cdot \det \begin{pmatrix} X-1 & -2 & -6 \\ 0 & X-4 & -9 \\ 0 & 1 & X+2 \end{pmatrix} = (X-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} X-4 & -9 \\ 1 & X+2 \end{pmatrix}$$

$$= (X-1)^2(X^2 - 2X - 8 + 9) = (X-1)^4$$

b) Nach VL sind die EW eben genau die Nullstellen des Charakteristischen Polynoms. Folglich haben A und B beide nur den EW 1.

Wir haben

$$m_1(A) = m_1(\chi_A) = m_1((X-1)^4) = 4 = m_1(\chi_B) = m_1(B)$$

Weiter ist

$$g_1(A) = \dim \mathrm{Eig}_1(A) = \dim \mathrm{Sol}(A - E_4, =) = 4 - \mathrm{rk}(A - E_4)$$

Wir bestimmen also durch eine Spaltenumformung den Rang von $A - E_4$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -12 & 0 \\ -16 & 0 & 32 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.Sp + 2*1.Sp} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist damit rk $A - E_4 = 1$. Also $g_1(A) = 4 - 1 = 3$.

Wir gehen analog für rk $B - E_4$ vor :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Sp - 1.Sp,\ 3.Sp - 5*1.Sp} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.Sp - 3*2.Sp} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist offensichtlich rk $B - E_4 = 2$ also $g_1(B) = 4 - 2 = 2$.

c) Angenommen A ist ähnlich zu B. Dann gibt es $P \in \mathrm{GL}_4(K)$ mit $P^{-1}AP = B$. Es folgt:

$$P^{-1}AP = B \implies P^{-1}AP - P^{-1}E_4P = B - E_4 \implies P^{-1}(A - E_4)P = B - E_4$$

Damit ist also $A - E_4$ ähnlich zu $B - E_4$. Da Ähnlichkeit aber insbesondere Äquivalenz impliziert, muss

$$1 = \mathrm{rk} A - E_4 = \mathrm{rk} B - E_4 = 2$$

Dies ist aber offensichtlich falsch. Folglich sind A und B nicht ähnlich.

Aufgabe 41

Die (modifizierte) Linkmatrix entspricht hier der Standard-Linkmatrix, da jede der 4 Seiten mindestens auf eine andere verlinkt. Wir haben:

$$L := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Weiter ist $\mathrm{Eig}_1(L) = \mathrm{Sol}(L - E_4, 0)$. Wir lösen dies:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV,III} + \frac{1}{2}\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{II + IV, (-1)*I, (-1)*III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III-II, IV - }\frac{1}{2}\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right)$$

Folglich ist $\mathrm{Sol}(L - E_4, 0) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Der gefragte stochastische Vektor dazu ist dann $\begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix}$.