Ungleichungen von Kraft & McMillan

Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

November 21, 2018

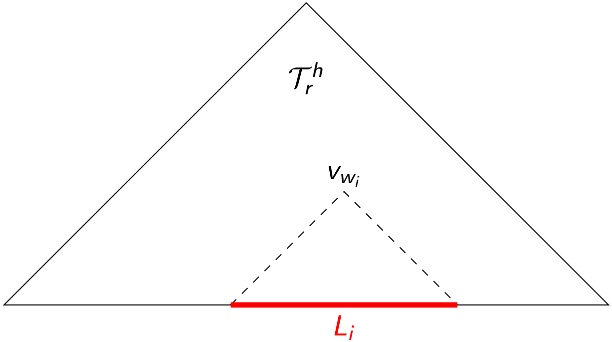
Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Zeige: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ Ungleichung gilt für Parameter

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Zeige: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ Ungleichung gilt für Parameter

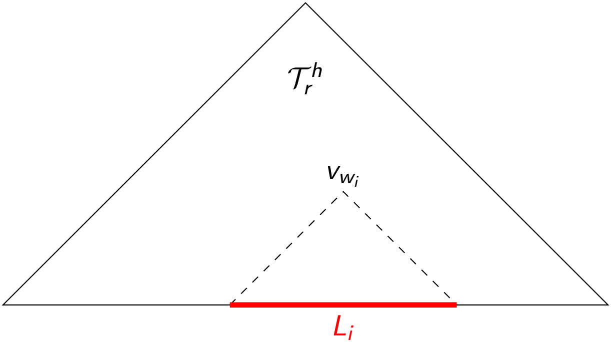
$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge height(v) = h\}$$



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Zeige: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ Ungleichung gilt für Parameter

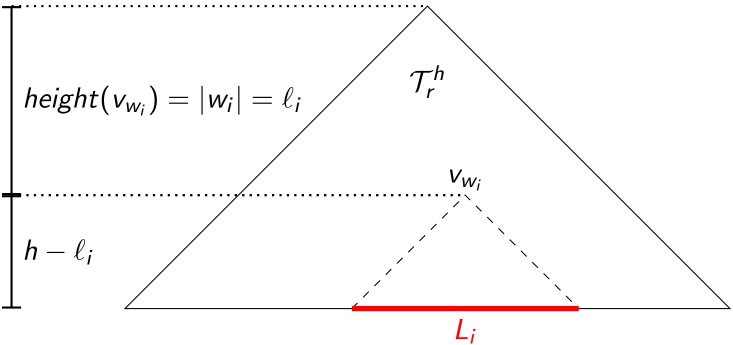
$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge height(v) = h\}$$



- Für $i, j \in [1, q] : i \neq j \implies L_i \cap L_j = \varnothing$

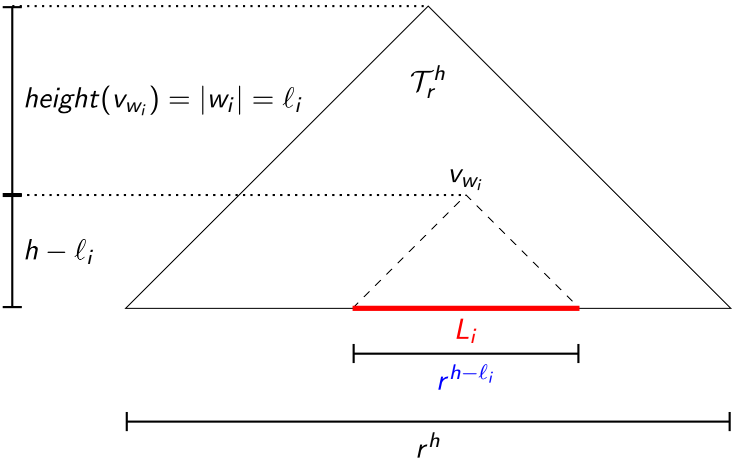
Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

- Anzahl dieser Blätter?



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

- Anzahl dieser Blätter? $|L_i| = r^{h-\ell_i}$



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

- $L_i \cap L_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
- $|L_i| = r^{h-\ell_i}$

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right|$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

- $L_i \cap L_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
- $|L_i| = r^{h-\ell_i}$

$$r^h \;\geq\; \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| \;=\; \sum_{i=1}^{q} |L_i| \;=\; \sum_{i=1}^{q} r^{h-\ell_i} \;=\; r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}}$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

- $L_i \cap L_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
- $|L_i| = r^{h-\ell_i}$

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-\ell_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1$$

$\square$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

- Beweis konstruktiv
- Untere Schranke für Wortlänge, Alphabetgröße

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

- Beweis konstruktiv
- Untere Schranke für Wortlänge, Alphabetgröße

- Bekannt: sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ eindeutig dekodierbar
- Schwächere Kriterien?

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer eindeutig dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \tag{1}$$

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer eindeutig dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \tag{1}$$

Richtung "(1) $\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$ existiert" durch Kraft.

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- Zu zeigen: $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$
- Betrachte K^n abhängig von Wortlängen für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- Finde aus Form von K^n konstante obere Schranke
- Dann muss $K \leq 1$, da sonst K^n für geeignetes n größer als jede Konstante

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Dann für jedes $i \in [1, q]^n$:

$$n \cdot \ell_{min} \leq \sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k} \leq n \cdot \ell_{max}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Dann für jedes $i \in [1, q]^n$:

$$n \cdot \ell_{min} \leq \sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k} \leq n \cdot \ell_{max}$$

Wir Wollen schreiben:

$$K^n = \sum_{j=n \cdot \ell_{min}}^{n \cdot \ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Ziel: K^n abschätzen durch Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Ziel: K^n abschätzen durch Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit Wortlängensumme j

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Ziel: K^n abschätzen durch Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{min}}^{n \cdot \ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit Wortlängensumme j
- Äquivalent: Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit $|w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}| = j$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Ziel: K^n abschätzen durch Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{min}}^{n \cdot \ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl $i \in [1,q]^n$ mit Wortlängensumme j
- Äquivalent: Anzahl $i \in [1,q]^n$ mit $|w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_n}| = j$
- $\mathcal{C}$ eindeutig dekodierbar $\Longrightarrow$ Jede Code-Sequenz aus eindeutiger Auswahl $i \in [1,q]^n$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Ziel: K^n abschätzen durch Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl $i \in [1,q]^n$ mit Wortlängensumme j
- Äquivalent: Anzahl $i \in [1,q]^n$ mit $|w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_n}| = j$
- $\mathcal{C}$ eindeutig dekodierbar $\Longrightarrow$ Jede Code-Sequenz aus eindeutiger Auswahl $i \in [1,q]^n$
- r^j Wörter mit Länge j, nicht alles Code-Sequenzen von $\mathcal{C}$
- Für jedes max. ein $i \in [1,q]^n \Longrightarrow N_j \leq r^j$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=nm}^{nM} N_j r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{N_j}{r^j}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=nm}^{nM} N_j r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{N_j}{r^j}$$

$$\leq \quad \sum_{j=nm}^{nM} 1 = (M-m)n + 1$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Mit $N_j \le r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=nm}^{nM} N_j r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{N_j}{r^j}$$

$$\le \quad \sum_{j=nm}^{nM} 1 = (M-m)n + 1$$

$$\Longrightarrow \frac{K^n}{n} \le (M-m) + 1$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

$$\frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r, Wortlängen ℓ fix.
- Damit auch m, M, K fix.

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

$$\frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r, Wortlängen ℓ fix.
- Damit auch m, M, K fix.
- $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$\frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r, Wortlängen ℓ fix.
- Damit auch m, M, K fix.
- $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
- Nach Analysis bekannt: nur möglich für $K \leq 1$.

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} = K \leq 1$$

$\square$