Gruppe $\boxed{11}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 10

Aufgabe 1

a)

Für den Grenzwert $\lim_{x\downarrow 3} f(x)$ gilt stets $x > 3$ und damit $|x-3| = x-3 > 0$, also auch:

$$\lim_{x\downarrow 3} f(x) = \lim_{x\downarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\downarrow 3} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

Für den Grenzwert $\lim_{x\uparrow 3} f(x)$ gilt stets $x < 3$ und damit $x-3 < 0 < |x-3|$, also auch:

$$\lim_{x\uparrow 3} f(x) = \lim_{x\uparrow 3} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\uparrow 3} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

Da nun $\lim_{x\downarrow 3} f(x) \neq \lim_{x\uparrow 3} f(x)$ gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 3} f(x)$ nicht existiert und $f(x)$ nicht stetig ist.

b)

Da die Polynome x^2+5 und $1-3x$ für $x=-2$ wohldefiniert sind, lässt sich hier der Grenzwert durch Einsetzen individuell bestimmen. Daraus folgt auch, dass (wie bei prakitsch jedem Polynom) der Grenzwert $\lim_{x\to -2}$ existiert (1.6) und dann mit (1.10) gilt:

$$\lim_{x\uparrow -2} x^2+5 = \lim_{x\to -2} x^2+5 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow -2} 1-3x = \lim_{x\to -2} 1-3x$$

Es folgt also:

$$\lim_{x\uparrow -2} x^2+5 = (-2)^2+5 = 9 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow -2} 1-3x = 1-3(-2) = 7$$

Weiterhin ist gilt wie in a) für den Grenzwert $\lim_{x\uparrow -2} g(x)$, dass $x < -2$ und damit nach Konstruktion $g(x) = x^2+5$. Analog dazu gilt für $\lim_{x\downarrow -2}$, dass $x > -2$ und damit nach Konstruktion $g(x) = 1-3x$. Es folgt also

$$\lim_{x\uparrow -2} g(x) = \lim_{x\uparrow -2} x^2+5 = 9 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow -2} g(x) = \lim_{x\downarrow -2} 1-3x = 7$$

Da nun $\lim_{x\uparrow -2} g(x) \neq \lim_{x\downarrow -2} g(x)$ gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert $\lim_{x\to -2} g(x)$ nicht existiert und $g(x)$ nicht stetig ist.

c) Analog zu Beispiel 1.18 lässt sich begründen, dass $\lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$ und $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$ gilt:

Zu gegebenem $M > 0$ wähle $a = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$. Dann ist für $0 < x < a$:

$$\frac{1}{x^3} > \frac{1}{a^3} = M$$

Also gilt $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$. Analog dazu wählen wir zu gegebenm $M > 0$ wieder $b = -\frac{1}{\sqrt[3]{M}}$.
Dann ist für $b < x < 0$:

$$\frac{1}{x^3} < \frac{1}{b^3} = -M$$

Also gilt $\lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$.
Weiterhin gilt für $\lim_{x\downarrow 0} j(x)$ bzw. $\lim_{x\uparrow 0} j(x)$ stets $x \neq 0$ und damit auch

$$\lim_{x\downarrow 0} j(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{x\uparrow 0} j(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

Da nun $\lim\limits_{x\uparrow 0} j(x) \neq \lim\limits_{x\downarrow 0} j(x)$ gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} j(x)$ nicht existiert und $j(x)$ nicht stetig ist.

Aufgabe 2