

Hausaufgabe 9

Aufgabe 5

Sie $\mathcal{G} := (N, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

Wir definieren die Grammatik $\mathcal{G}' := (N, \Sigma, P', S)$ mit

$$P' := P \cup \{S \rightarrow \alpha S \mid (S \rightarrow \alpha) \in P\} \cup \{S \rightarrow \varepsilon\}$$

Wir zeigen zuerst $L(\mathcal{G})^* \subseteq L(\mathcal{G}')$, also per Induktion über n , dass gilt:

$$w \in L(\mathcal{G})^n \implies w \in L(\mathcal{G}')$$

Sei also $n = 0$. Dann ist $w = \varepsilon$. Durch die Regel $(S \rightarrow \varepsilon) \in P'$ ist also $w \in L(\mathcal{G}')$. Sei nun $n = 1$. Dann ist $w \in L(\mathcal{G})$, also gilt $S \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}} w$. Wegen $P \subset P'$ folgt dann insbesondere auch $S \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}'} w$, also $w \in L(\mathcal{G}')$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ sodass $w \in L(\mathcal{G})^n \implies w \in L(\mathcal{G}')$ gegeben. Sei weiter $w \in L(\mathcal{G})^{n+1}$.

Dann ist $w = w_1 w_2$ mit $w_1 \in L(\mathcal{G})^n$ und $w_2 \in L(\mathcal{G})$. Folglich existieren Ableitungen sodass

$$S \xrightarrow{*} \alpha S \rightarrow \alpha \beta \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}} w_1 \quad \text{und} \quad S \xrightarrow{*} w_2$$

wobei $S \notin \beta$ und $(S \rightarrow \beta) \in P$. Dann gilt $(S \rightarrow \beta S) \in P'$, also existiert die Ableitung

$$S \xrightarrow{*} \alpha S \rightarrow \alpha \beta S \xrightarrow{*} w_1 w_2 = w$$

in \mathcal{G}' . Nach Prinzip der vollst. Induktion gilt nun $w \in L(\mathcal{G})^n \implies w \in L(\mathcal{G}')$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt auch sofort, dass $L(\mathcal{G})^* \subseteq L(\mathcal{G}')$.

Im folgenden sei $P_S := \{S \rightarrow \alpha S \mid (S \rightarrow \alpha) \in P\}$.

Wir zeigen nun $L(\mathcal{G}') \subseteq L(\mathcal{G})^*$, also per Induktion über n dass:

Wenn $w \in L(\mathcal{G}')$, $w \neq \varepsilon$ und die Ableitung von w benutzt genau n mal eine Regel $p \in P_S$, dann gilt $w \in L(\mathcal{G})^{n+1}$.

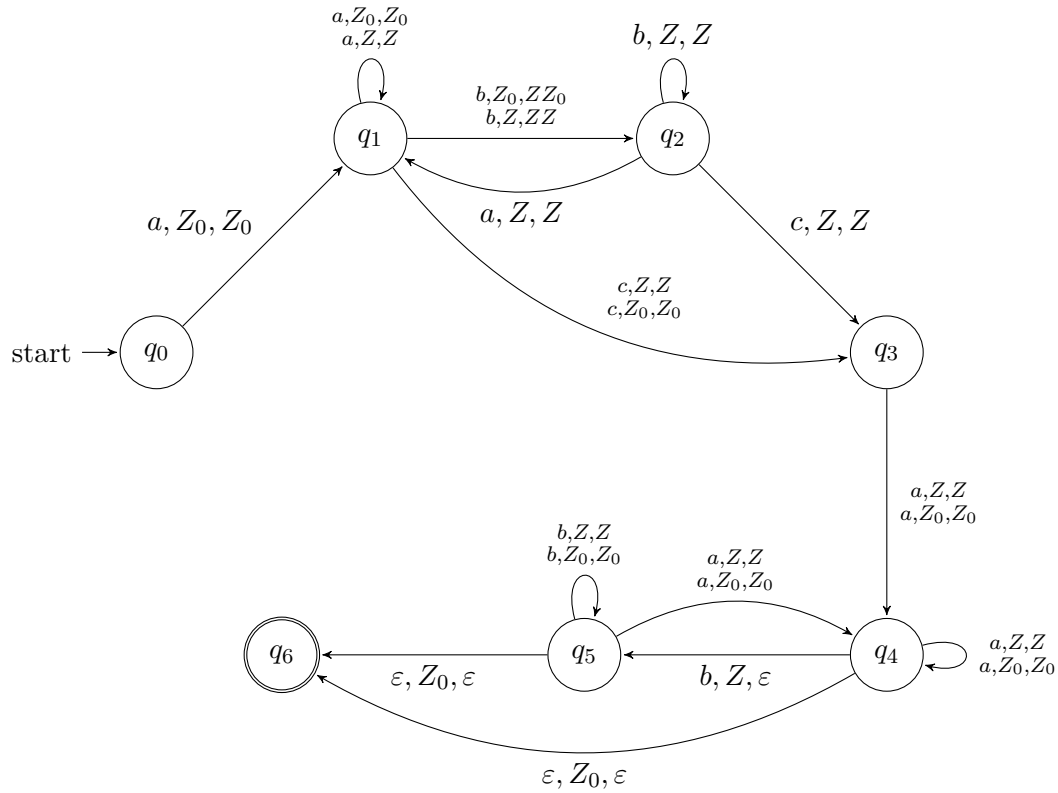
Sei also $n = 0$. Sei $w \in L(\mathcal{G}')$ mit $S \rightarrow \alpha \xrightarrow{*} w$ wobei $S \notin \alpha$. Dann folgt durch $\alpha \neq \varepsilon$, dass $S \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}} w$ und damit $w \in L(\mathcal{G})^1$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ gegeben, sodass die Behauptung für dieses gilt. Sei dann $w \in L(\mathcal{G}')$ sodass die Ableitung von w genau $n + 1$ mal eine der Regeln in P_S benutzt. Dann ist $w = w_1 w_2$ mit

$$S \xrightarrow{*} w_1 S \rightarrow w_1 \alpha \xrightarrow{*} w_1 w_2 = w \quad \text{wobei} \quad S \notin \alpha$$

Dabei ist o.B.d.A. $w_2 \neq \varepsilon$, sonst könnte man die letzten Regeln $\dots S \rightarrow \alpha S \rightarrow \alpha$ durch $\dots S \rightarrow \alpha$ austauschen und den Fall für n betrachten. Dann haben wir eine Ableitung $S \xrightarrow{*} w_1$ welche genau n mal eine Regel aus P_S benutzt, und eine Ableitung $S \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}} w_2$, welche genau 0 mal eine Regel aus P_S benutzt. Nach Voraussetzung und Basisfall gilt dann $w_1 \in L(\mathcal{G})^{n+1}$ und $w_2 \in L(\mathcal{G})$, also $w \in L(\mathcal{G})^{n+2}$. Nach Prinzip der vollst. Induktion gilt die Behauptung nun für $n \in \mathbb{N}$. Da insbesondere $\varepsilon \in L(\mathcal{G})^0$, folgt nun insgesamt, dass $L(\mathcal{G}') = L(\mathcal{G})^*$.

Aufgabe 6



Der Automat fügt ein Z in den Kellerspeicher für jedes vollständige Infix ab in u ein und entfernt ein Z aus dem Kellerspeicher für jedes vollständige ab in v .

Akzeptierender Lauf auf $acaa$:

$(q_0, Z_0, acaa) \rightarrow (q_1, Z_0, caa) \rightarrow (q_3, Z_0, aa) \rightarrow (q_4, Z_0, a) \rightarrow (q_4, Z_0, \varepsilon) \rightarrow (q_6, \varepsilon, \varepsilon)$

Akzeptierender Lauf auf $abaacabba$:

$(q_0, Z_0, abaacabba) \rightarrow (q_1, Z_0, baacabba) \rightarrow (q_2, ZZ_0, aacabba) \rightarrow (q_1, ZZ_0, acabba) \rightarrow (q_1, ZZ_0, cabba) \rightarrow (q_3, ZZ_0, abba) \rightarrow (q_4, ZZ_0, bba) \rightarrow (q_5, Z_0, ba) \rightarrow (q_5, Z_0, a) \rightarrow (q_4, Z_0, \varepsilon) \rightarrow (q_6, \varepsilon, \varepsilon)$

Aufgabe 7

Die Idee ist, eine Produktkonstruktion durchzuführen. Da wir nur einen PDA besitzen haben wir nicht das Problem, zwei Speicher gleichzeitig verwalten zu müssen. Wir lassen also ganz normal beide Automaten laufen und übernehmen den Speicher des PDA für den Speicher des Produkt-PDA's.

Sei also $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_{0_{\mathcal{A}}}, Z_0, F_{\mathcal{A}})$ der PDA und $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, \Sigma, \delta, q_{0_{\mathcal{B}}}, F_{\mathcal{B}})$ der DFA. Dann definiere den PDA

$$\mathcal{P} := (Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}}, \Sigma, \Gamma, \Delta', (q_{0_{\mathcal{A}}}, q_{0_{\mathcal{B}}}), Z_0, F')$$

wobei

$$\Delta' := \{((q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}), a, Z, (q'_{\mathcal{A}}, q'_{\mathcal{B}}), \gamma) \mid (q_{\mathcal{A}}, a, Z, q'_{\mathcal{A}}, \gamma) \in \Delta \wedge \delta(q_{\mathcal{B}}, a) = q'_{\mathcal{B}}\}$$

für $a \in \Sigma, Z \in \Gamma, \gamma \in \Gamma^*$. Weiter ist

$$F' := \{(f_{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{B}}) \mid f_{\mathcal{A}} \in F_{\mathcal{A}} \wedge f_{\mathcal{B}} \in F_{\mathcal{B}}\}$$

Aufgabe 8

Die Aussage stimmt nicht. Wir verwenden eckige Klammern zur Veranschaulichung.

Wir betrachten die Sprache $L := \{[{}^n(\square)^n]^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$.

Die Sprache der korrekten Klammerausdrücke in L ist dann $K = \{[{}^n(\square)^n]^n \mid \mathbb{N}_0\}$.

Durch folgende Regeln lässt sich eine kontextfreie Grammatik für L erstellen:

$$S \rightarrow AB \quad A \rightarrow [A[\square] \mid \varepsilon \quad B \rightarrow]B \mid \varepsilon$$

Sei nun K kontextfrei. Sei dann n gemäß Pumping-Lemma gegeben.

Wir betrachten $z = [{}^n(\square)^n]^n$. Das Pumping Lemma liefert die Zerlegung $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq n$ und $uv^kwx^ky \in K$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Fall 1: vwx liegt ganz im Präfix $[{}^n(\square)^n]^n$.

Dann folgt für uvw wegen $vx \neq \varepsilon$, dass zu wenig geöffnete Klammern am Anfang des Wortes stehen, (und/) oder nicht genug der $[\square]$ -Paare im Wort auftreten, da dann das Suffix $]^n$ ganz in y liegt. Es kann auch sein, dass uvw dann eines der $[\square]$ -Paare genau in der Mitte teilt, aber dann haben wir sofort zu wenig $[\square]$ -Paare. Es gilt also einer der Fälle:

$$uvw = [{}^m(\square)^n]^n, \quad uvw = [{}^n(\square)^m]^n, \quad uvw = [{}^m(\square)^p]^n$$

wobei $m, p < n$. In jedem Fall ist dann jedoch $uvw \notin K$.

Fall 2: vwx liegt ganz im Suffix $(\square)^n]^n$.

Dies ist analog zu Fall 1. Es muss für uvw einer der folgenden Fälle eintreten:

$$uvw = [{}^n(\square)^n]^m, \quad uvw = [{}^n(\square)^m]^n, \quad uvw = [{}^n(\square)^p]^m$$

wobei wieder $m, p < n$. Wieder folgt in jedem Fall $uvw \notin K$.

Insgesamt gilt in beiden Fällen $uvw \notin K$, obwohl uns das Pumping-Lemma $uv^kwx^ky \in K$ für $k \in \mathbb{N}_0$ versichert hat. Widerspruch! Damit ist K nicht kontextfrei.