Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 11

In den folgenden Aufgaben steht "Verkettung" für Addition, Subtraktion, Multiplikation, Skalierung oder Komponierung von Funktionen.

Aufgabe 1

a)

(i) Nach Skript ist jedes Polynom und $\ln x$ als Umkehrfunktion von e^x differenzierbar und Verkettung dieser Funktionen erhält dies. $|a-1|$ ist hier nur eine konstante, deswegen ist f auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.
Mit VII 1.11 sowie der Produkt und Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} = [x^\alpha \cdot \ln(x+|\alpha-1|)]' &\overset{\text{P}}{=} [x^\alpha]' \cdot \ln(x+|\alpha-1|) + x^\alpha \cdot [\ln(x+|\alpha-1|)]' \\ &\overset{\text{*K}}{=} \alpha x^{\alpha-1} \cdot \ln(x+|\alpha-1|) + x^\alpha \cdot \left(\frac{[x+|\alpha-1|]'}{x+|\alpha-1|}\right) \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \cdot \ln(x+|\alpha-1|) + \frac{x^\alpha}{x+|\alpha-1|}\end{aligned}$$

(ii) Nach Skript ist jedes Polynom, $\sin x$, $\cos x$ auf $\mathbb{R}$ und jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Verkettung dieser Funktionen erhält Differenzierbarkeit, also ist g auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.
Mit Satz 1.7 und der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx} &= \left[\cos\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right)\right]' = \cos'\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left[\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right]' \\ &= -\sin\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\sin'\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \cdot \left[x^2+\frac{1}{x}\right]'\right) \\ &= -\sin\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\left[x^2\right]' + \left[\frac{1}{x}\right]'\right)\right) \\ &= -\sin\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \cos\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

b)

(iii) Nach Skript ist jedes Polynom, $\sin x$, $\cos x$, e^x auf $\mathbb{R}$ und jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Ebenso ist die Umkehfunktion f^{-1} einer differenzierbaren, stetigen und injektiven Funktion f ebenfalls differenzierbar in den Punkten x wo $f'(x) \neq 0$ ist. Verkettung dieser Funktionen erhält Differenzierbarkeit.
Es ist $\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion des Polynoms x^2 und damit auch differenzierbar auch ihrem Definitionsbereich. Analog dazu ist arctan die Umkehrfunktion von $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ und damit auch differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich. Insgesamt ist also h auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.
Mit Satz 1.7, 1.10 und der Ketten und Quotientenregel folgt:

$$\frac{dh}{dx} = \left[\cos\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\right]' = -\sin\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right) \cdot \left[\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right]'$$

$$= -\sin\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right) \cdot \left(\frac{\left[e^x + \sqrt{1+x^2}\right]' \cdot (\arctan x) - (e^x + \sqrt{1+x^2}) \cdot [\arctan x]'}{(\arctan x)^2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right) \cdot \left(\frac{\left(e^x + \left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\right) \cdot (\arctan x) - (e^x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \left(\frac{1}{\tan^{-1}(\arctan x)}\right)}{(\arctan x)^2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right) \cdot \left(\frac{\left(e^x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \cdot (\arctan x) - (e^x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{(\arctan x)^2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right) \cdot \left(\frac{e^x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\arctan(x)} - \frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{(x^2+1)\arctan^2(x)}\right)$$

(iv) Nach Skript ist e^x auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, also ist i auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.
Mit Satz 1.7 und der Kettenregel folgt:

$$\frac{di}{dx} = [\cosh x]' = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left([e^x]' + [e^{(-1)x}]'\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

c) (v) Nach Skript ist jedes Polynom sowie e^x und $\ln x$ als dessen Umkehrfunktion differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich. Also ist auch j als Verkettung dieser differenzierbar.
Mit Satz VI 2.14, VII 1.7, 1.11 und der Kettenregel folgt:

$$\frac{dj}{dx} = [x^x]' = \left[e^{x\ln(x)}\right]' = e^{x\ln(x)} \cdot [x\ln(x)]' = e^{x\ln(x)} \cdot ([x]' \cdot \ln(x) + [\ln(x)]' \cdot x)$$

$$= e^{x\ln(x)} \cdot (1 \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot x) = e^{x\ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1)$$

$$= x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

(vi) Wie zuvor erwähnt sind alle Polynome, e^x, $\sin x$, $\cos x$ und auch $\ln x$ als Umkehrfunktion von e^x sowie $\sqrt{x}$ als Umkehrfunktion von x^2 auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Damit ist k als Verkettung dieser Funktionen ebenfalls auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Mit Satz 1.7, 1.10, 1.11 und der Produkt und Kettenregel folgt:

$$\frac{dk}{dx} = \left[\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\right]' = \left[\exp\left(\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right)\right]'$$

$$= \exp\left(\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right)\cdot\left[\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'$$

$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left[\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'$$

$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left([\sin(x)]'\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\left[\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'\right)$$

$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\frac{[1+\sqrt{x}+x^2]'}{1+\sqrt{x}+x^2}\right)$$

$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x}{1+\sqrt{x}+x^2}\right)$$

Aufgabe 2

Der maximale reelle Def. Bereich ist $\left[-\frac{3}{2},3\right)$, da für $x<-\frac{3}{2}$ dann $3-2x<0$ währe und wir dann die Wurzel einer negativen Zahl ziehen würden. Des weiteren gilt für $x\geq 3$, dass $\sqrt{3+2x}-x\leq\sqrt{9}-3=0$, und da der natürliche Logarithmus nur für $x>0$ definiert ist, gibt dies eine Definitionslücke. Insgesamt ist also $D_f=\left[-\frac{3}{2},3\right)$.

Für die Nullstellen setzen wir $f=0$:

$$f=0 \implies \ln\left(\sqrt{3+2x}-x\right)=0 \implies \exp\left(\ln\left(\sqrt{3+2x}-x\right)\right)=\exp(0)$$

$$\implies \sqrt{3+2x}-x=1 \implies \sqrt{3+2x}=x+1 \implies 3+2x=x^2+2x+1$$

$$\implies 2=x^2 \implies x=\pm\sqrt{2}$$

Wir testen nun:

$$f(\sqrt{2})=\ln\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)=\ln\left(\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}-\sqrt{2}\right)=\ln(1)=0$$

$$f(-\sqrt{2})=\ln\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)=\ln\left(\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{2}\right)=\ln(2\sqrt{2}-1)\neq 0$$

Also hat f eine Nullstelle bei $\sqrt{2}\in D_f$, aber nicht bei $-\sqrt{2}$.

Für mögliche Extrema bestimmen wir zuerst f': Nach Satz 1.10 und wie in Aufgabe 1 bereits erwähnt sind $\ln x$, $\sqrt{x}$ und jedes Polynom auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. f ist eine Verkettung dieser Funktionen und erhält damit die Differenzierbarkeit.

$$\frac{df}{dx} = \left[\ln\left(\sqrt{3+2x} - x\right)\right]' = \frac{[\sqrt{3+2x} - x]'}{\sqrt{3+2x} - x} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3+2x} - x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3+2x} - x}$$

Nun setzen wir $f' = 0$:

$$f' = 0 \implies \frac{\frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3+2x} - x} = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1 = 0 \implies 1 = \sqrt{3+2x}$$

$$\implies 3 + 2x = 1 \implies x = -1$$

Damit ist $x = -1$ ein möglicher Kandidat für Extrema von f.

Aufgabe 3

a) Da jedes Polynom und e^x sowie deren Komponierung auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, ist auch f differenzierbar.

$$f' = \frac{df}{dx} = \left[\exp(2x^4 - x^2 - 1)\right]' = \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot \left[2x^4 - x^2 - 1\right]'$$

$$= \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (8x^3 - 2x)$$

f immernoch differenzierbar, da es wieder nur eine Verkettung von Polynomen und Exponentialfunktionen ist.

$$f'' = \frac{df'}{dx} = \left[\exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (8x^3 - 2x)\right]'$$

$$= [\exp(2x^4 - x^2 - 1)]' \cdot (8x^3 - 2x) + \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot [8x^3 - 2x]'$$

$$= \Big(\exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (8x^3 - 2x)\Big) \cdot (8x^3 - 2x) + \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (24x^2 - 2)$$

$$= \exp(2x^4 - x^2 - 1)(64x^6 - 32x^4 + 28x^2 - 2)$$

Wir setzen $f' = 0$. Da nach (III 3.21) stets $\exp(x) \neq 0$ ist und $\mathbb{R}$ ein Körper, also ein Integritätsbereich mit Nullteilerfreiheit ist, genügt es hier das Polynom $8x^3 - 2x$ gleich 0 zu setzen. Weiterhin ist $8x^3 - 2x = x(8x^2 - 2)$ also ist $x = 0$ eine Nullstelle von $8x^3 - 2x$. Wir lösen also $8x^2 - 2$ mit der quadratischen Formel:

$$8x^2 - 2 = 0 \implies x = \frac{\pm\sqrt{-4 \cdot 8 \cdot (-2)}}{2 \cdot 8} = \frac{\pm\sqrt{64}}{16} = \frac{\pm 8}{16} = \pm\frac{1}{2}$$

Somit haben wir mögliche Extremalstellen $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}$. Wir überprüfen dies durch einsetzen in f''. Wir verwenden wieder, dass stets $\exp(x) > 0$ (*):

$$f''(0) = \exp(-1)(-2) \overset{*}{<} 0$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1\right)(1 - 2 + 7 - 2) = 4\exp\left(-\frac{9}{8}\right) \overset{*}{>} 0$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1\right)(1 - 2 + 7 - 2) = 4\exp\left(-\frac{9}{8}\right) \overset{*}{>} 0$$

Also gilt nach (VII 2.9), dass $x_1 = 0$ eine strikte lokale Maximalstelle ist, und $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$ strikte lokale Minimalstellen sind. Weiterhin ist e^x sowie $2x^4 - x^2 - 1$ nach oben unberschränkt, daher kann es kein globales Maximum geben. Durch $\lim_{x\to-\infty} 2x^4 - x^2 - 1 = \infty$ sowie $\lim_{x\to\infty} 2x^4 - x^2 - 1 = \infty$ folgt auch $\lim_{x\to-\infty} f = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} f = \infty$. Da also f keine weiteren Extremalstellen besitzt und für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ bestimmt gegen ∞ divergiert, folgt, dass $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$ mit $f(x_3) = f(x_2) = \exp\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1\right) = \exp\left(-\frac{9}{8}\right)$ wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion (III 3.21) auch globale Minimalstellen von f sind.

b) Nach Satz 1.10 und wie zuvor erwähnt ist $\ln x$ auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Da also g eine Verkettung von Polynomen und dem natürlichen Logarithmus ist, ist auch g differenzierbar.

$$g' = \frac{dg}{dx} = [3\ln(3x^2+1)]' = 3[\ln(3x^2+1)]' = 3\left(\frac{[3x^2+1]'}{3x^2+1}\right) = \frac{18x}{3x^2+1}$$

Nach Skript ist jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich differnzierbar, also g''.

$$g'' = \frac{dg'}{dx} = \left[\frac{18x}{3x^2+1}\right]' = \frac{[18x]'(3x^2+1) - (18x)[3x^2+1]'}{(3x^2+1)^2} = \frac{54x^2 - 108x + 18}{(3x^2+1)^2}$$

Wir setzen also $g' = 0$:

$$g' = 0 \implies \frac{18x}{3x^2+1} = 0 \implies 18x = 0 \implies x_1 = 0$$

Es ist $0 \in D_g = [-1, 1]$, also überprüfen wir durch Einsetzen in g'':

$$g''(0) = \frac{18}{1} = 18 > 0$$

Damit ist nach (VII 2.9) $x_1 = 0$ eine lokale strikte Minimalstelle von g. Wir überprüfen die Randwerte und den Wert von $g(0)$:

$$g(0) = 3\ln(1) = 0$$

$$g(-1) = 3\ln(4) > 0 \qquad \text{und} \qquad g(1) = 3\ln(4) > 0$$

Da g keine weitern Extremalstellen besitzt, folgt, dass $x_1 = 0$ mit $g(x_1) = 0$ auch das globale Minimum von g darstellt.

Aufgabe 4

a)
Da sowohl x^2 als auch $\ln x$ auf $(0, \infty)$ stetig und differenzierbar sind, ist auch f als Verkettung dieser im Definitionsbereich $[a, b] \subset (0, \infty)$ stetig und differenzierbar.

b)
Da $\ln x$ die Umkehrfunktion von e^x ist und e^x streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$ ist, ist auch $\ln x$ streng monoton steigen auf ihrem Definitionsbereich (V 1.9). Weiterhin ist nach V 1.8 auch x^2 im Intervall $(0, \infty)$ streng monoton steigend. Es gilt also stets

$$\forall x, y \in [a, b], x < y \colon (\ln x < \ln y) \wedge (x^2 < y^2)$$

Daher folgt auch dass das Produkt der Funktionen streng monoton steigt. In unserem Fall ist $a+1$ ja eine Konstante, welche die Monotonie nicht beeinflusst. Daher ist f ebenfalls auf ihrem Definitionsbereich streng monoton steigend.

c)
Aus Aufgabenteil b) folgt, dass die Extremalstellen von f die Randwerte von f sind. Da f also streng monoton steigt gilt stets:

$$\forall x \in [a, b] \colon f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Damit ist a die globale Minimalstelle von f und b die globale Maximalstelle von f.

d)
Es ist

$$\begin{aligned} f' &= \left[x^2 \ln(x - a + 1)\right]' = [x^2]' \ln(x - a + 1) + x^2 [\ln(x - a + 1)]' \\ &= 2x \ln(x - a + 1) + \frac{x^2}{x - a + 1} \leq 2x \ln(x - a + 1) + x^2 \end{aligned}$$

Es sind x sowie x^2 und $\ln x$ streng monoton steigend auf $[a, b] \subset (0, \infty)$, also wählen wir den oberen Randwert, b, um eine von a, b abhängige obere Schranke der Ableitung von f zu erhalten:

$$\forall x \in [a, b] \colon f'(x) \leq 2x \ln(x - a + 1) + x^2 \leq 2b \ln(b - a + 1) + b^2$$

Sei also im folgenden $L(a, b) = 2b \ln(b - a + 1) + b^2$. Es folgt durch den Mittelwertsatz:

$$\forall x, y \in [a, b] \; \exists c \in [a, b] \colon \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = f'(c) \leq L \iff |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Aufgabe 5

Seien $x, y \in (a, b)$ gegeben. Es gelte o.B.d.A., dass $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert nun ein $c \in (a, b)$ sodass durch $\forall x \in (a, b) \colon f'(x) > 0$ nun gilt:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0 \iff f(y) > f(x)$$

Damit ist f auf (a, b) streng monoton steigend.

Seien $x, y \in (a, b)$ gegeben. Es gelte o.B.d.A., dass $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert nun ein $c \in (a, b)$ sodass durch $\forall x \in (a, b) \colon f'(x) = 0$ nun gilt:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) = 0 \iff f(y) = f(x)$$

Damit ist f auf (a, b) konstant.