Gruppe $\boxed{\mathbf{3}}$
Formale Systeme und Automaten

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 4

Aufgabe 5

Aufgabe 6

a) Wir definieren q rekursiv wie folgt für ein $w \in \Sigma^*$

$$q(w) = \begin{cases} 0 & \text{für } w = \varepsilon \\ a + q(v) & \text{für } w = av \text{ mit } a \in \Sigma \text{ und } v \in \Sigma^* \end{cases}$$

b)

Wir zeigen $q(vw) = q(v) + q(w)$ für $v, w \in \Sigma^*$ mittels Induktion über v. Sei also w beliebig aber fest. Für $v = \varepsilon$ ist

$$q(vw) = q(\varepsilon w) = q(w) = 0 + q(w) = q(\varepsilon) + q(w) = q(v) + q(w)$$

Sei also nun v so dass $q(vw) = q(v) + q(w)$ (IV). Wir verlängern also v um ein Präfix $a \in \Sigma$:

$$q(avw) = a + q(vw) \overset{\text{IV}}{=} a + q(v) + q(w) = q(av) + q(w)$$

Folglich gilt für alle $v, w \in \Sigma^*$, dass $q(vw) = q(v) + q(w)$. Da wir aber mindestens im abelschen Monoid der natürlichen Zahlen (da hier $0 \in \mathbb{N}$) rechnen, ist die Addition kommutativ.
Folglich gilt für $v, w \in \Sigma^*$

$$q(vw) = q(v) + q(w) = q(w) + q(v) = q(wv)$$

$\square$

Aufgabe 7

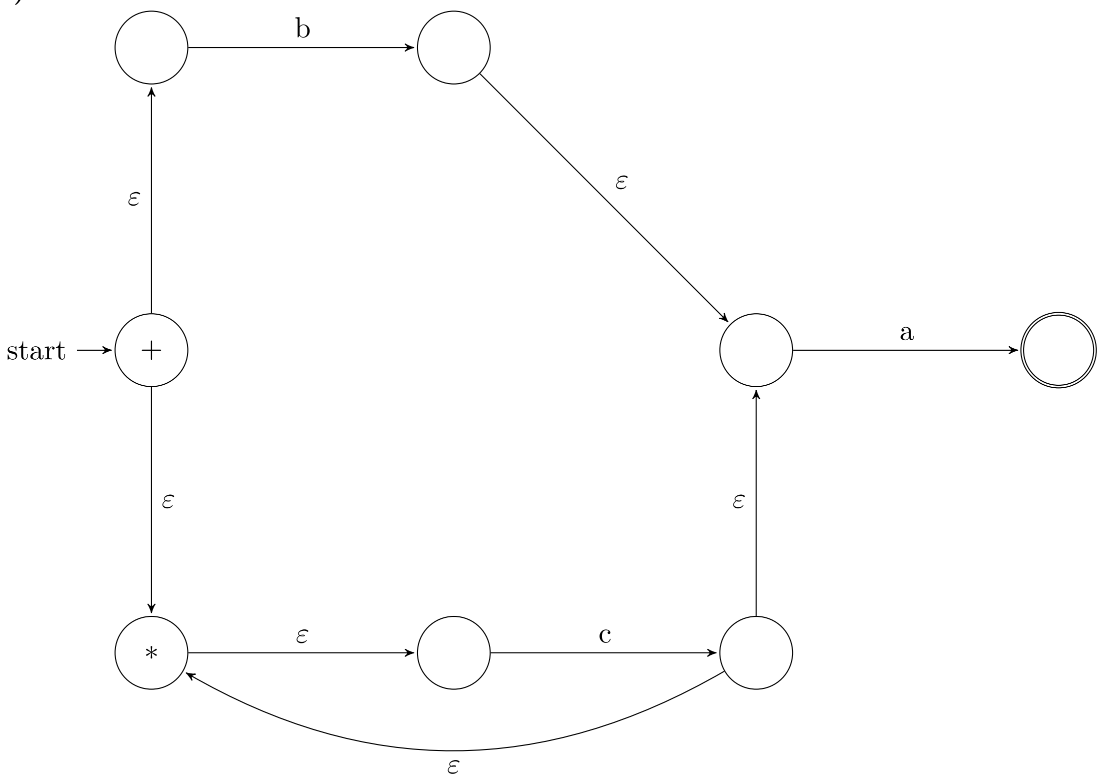
Es sei im Sinne der Lesbarkeit im folgenden Σ^* als $(\sum_{a \in \Sigma} a)^*$, also konkret $(a + b + c)^*$ zu interpretieren.

$$r_1 = (\Sigma\Sigma)^* \qquad r_2 = (c^*a + b^*a)^* + (c^* + b^*)$$

$$r_3 = \Sigma^*(ab(c + \Sigma^*bc) + bc\Sigma^*ab)\Sigma^* \qquad r_4 = (b + c)^* + (\Sigma^*bc\Sigma^*)$$

Aufgabe 8

a)



b)