Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 13

Aufgabe 1

Wir zerlegen das Intervall $[1, b]$ wie im Hinweis durch die Folge $x_i = b^{\frac{i}{n}}$. Da $\frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[1, \infty)$ streng monoton fallend ist, lässt sich die Obersumme wie folgt bilden:

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b^{-\frac{i-1}{n}} \left(b^{\frac{i}{n}} - b^{\frac{i-1}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b^{\frac{i-(i-1)}{n}} - b^{\frac{i-1-(i-1)}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(b^{\frac{1}{n}} - b^0\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(b^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}}$$

Auf die gegebene Folge lässt sich nun der Satz von l'Hopital anwenden, da sowohl die Exponentialfunktion als auch $\frac{1}{n}$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind. Weiterhin gilt nach Skript dann auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1 = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(b)}{n}\right) = \exp(0) = 1$$

Also wenden wir l'Hopital und überprüfen, ob der Grenzwert der Ableitungen existiert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1\right]'}{\left[\frac{1}{n}\right]'} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right)\ln(b)}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right)\ln(b) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(b)}{n}\right)\ln(b) = \exp(0)\ln(b) = \ln(b)$$

Nach l'Hopital gilt nun auch:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(b)$$

Da dies also für eine Obersumme gilt, gilt es auch für das Infimum der Obersummen und aufgrund der Äquivalenz ebenso für das Supremum der Untersummen. Insgesamt gilt also:

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(b)$$

Aufgabe 2

a) Da $\forall x \in [a,b]\colon m \leq f(x) \leq M$, sowie $\forall x \in [a,b]\colon g(x) \geq 0$, folgt auch:

$$\forall x \in [a,b]\colon mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

Nach Skript Satz 1.5 folgt durch betrachtung von $mg(x), Mg(x)$ und $f(x)$ als eigene Funktion:

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x = M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

b)

Es sei eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ in $n \in \mathbb{N}$ Teile gegeben, welche wir jeweils mit Z_i indizieren. Wir notieren $\Omega(\varphi, i) := \max\{\varphi(x) \mid x \in [Z_{i-1}, Z_i]\}$ und bilden nun eine Obersumme. Es folgt durch die Gegebenheiten der Aufgabe, dass $\forall x \in [a,b]\colon m \leq f(x) \leq M$:

$$m\sum_{i=1}^{n}\Omega(g,i)(Z_i - Z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m\Omega(g,i)(Z_i - Z_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\Omega(f,i)\Omega(g,i)(Z_i - Z_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} M\Omega(g,i)(Z_i - Z_{i-1}) = M\sum_{i=1}^{n}\Omega(g,i)(Z_i - Z_{i-1})$$

Da dies für jede beliebige Zerlegung gilt, gilt es auch für das Infimum der Obersummen, sowie das Supremum der Untersummen, da f, g und $f \cdot g$ integrierbar sind. Es gilt also:

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = m \cdot O(g) \leq O(f \cdot g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M \cdot O(g) = M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3

a) Die Exponentialfunktion ist differenzierbar, integrierbar und stetig auf $\mathbb{R}$.

$$\int_0^\infty 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b 1\,\mathrm{d}x - \int_0^b \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\right) = \lim_{b\to\infty}\left(x - \ln(|z|)\right)_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(x - \ln(e^x + e^{-x})\right)_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(b - \ln(e^b + e^{-b}) - (0 - \ln(e^0 + e^{-0}))\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(b - \ln(e^b + e^{-b}) + \ln(2)\right) = \ln(2) + \lim_{b\to\infty}\ln\left(\exp\left(b - \ln(e^b + e^{-b})\right)\right)$$

$$= \ln(2) + \lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{e^b}{e^b + e^{-b}}\right) = \ln(2) + \lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{1}{1 + e^{-2b}}\right) = \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{1+0}\right)$$

$$= \ln(2) + \ln(1) = \ln(2)$$

Da der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \ln(2)$ existiert, gilt nun auch

$$\int_0^\infty 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \ln(2)$$

b) Nach Skript Satz 2.13 gilt $\lim_{a\to 0} \ln(a) = -\infty$, also ist $\ln(x)$ für $x \to 0$ bestimmt divergent gegen $-\infty$ (*). Daher gilt, dass für $\alpha \leq -1$ das gegebene uneigentliche Integral nicht existiert: Wir unterteilen das Integral bei $c = 1$, da x^α für $\alpha < 0$ in $x_0 = 0$ nicht definiert ist, also zwei uneigentliche Integrationsgrenzen hat:

$$\int_0^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$$

Wir betrachten zuerst das Integral $\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$ für $\alpha = -1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \ln(1) - \ln(a)$$

Da der Grenzwert nicht existiert (s.o.), existiert auch das uneigentliche Integral nicht für $\alpha = -1$. Wir betrachten zunächst das Integral $\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$:

$$\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \int_a^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \Bigg|_a^1 = \lim_{a\to 0} \left(\frac{1^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

Für $\alpha < -1$ ist $\alpha+1 < 0$, d.h. $\lim\limits_{a\to 0} a^{\alpha+1}$ existiert nicht und divergiert bestimmt gegen unendlich. Also kann das gegebene uneigentliche Integral schonmal nicht für $\alpha \leq -1$ existieren.
Für $0 > \alpha > -1$ gilt jedoch:

$$\lim_{a\to 0} \left(\frac{1^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) = \frac{1^{\alpha+1} - 0^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Und damit auch

$$\forall 0 > \alpha > -1\colon \int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}$$

Wir überprüfen also nun ob auch das Integral $\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$ für $0 > \alpha > -1$ existiert:

$$\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} = \lim_{b\to\infty} \frac{\exp(\alpha + 1 \ln(b)) - 1}{\alpha+1}$$

Nach Skirpt gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ sowie $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, weiterhin gilt $\alpha + 1 > 0$, daher existiert der Grenzwert nicht und es gilt:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\exp((\alpha+1)\ln(b)) - 1}{\alpha+1} = \infty$$

Zusammenfassnd existiert das Integral $\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$ nicht für $\alpha \leq -1$, und das Integral $\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$ nicht für $0 > \alpha > -1$. Daher existiert das Integral $\int_0^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$ für kein $\alpha < 0$.

Aufgabe 4

a) Dies ist eine lineare DGL. Es ist $a(x) = -\frac{1}{2}$ und $b(x) = \frac{3}{2}$. Dann gilt

$$y' = a(x)y + b(x) = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = (3-y)\frac{1}{2}$$

Wir definieren

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) = \exp\left(\frac{x_0 - x}{2}\right)$$

sowie

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{3}{2\exp\left(\frac{x_0-t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$y_0 + \left(\frac{3}{\exp(\frac{x_0-t}{2})}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = y_0 + \frac{3}{\exp(\frac{x_0-x}{2})} - 3$$

Dann ist nach Skript

$$\psi(x) = \varphi(x)\cdot u(x) = \exp\left(\frac{x_0-x}{2}\right)\cdot\left(y_0 + \frac{3}{\exp(\frac{x_0-x}{2})} - 3\right)$$

$$= \exp\left(\frac{x_0-x}{2}\right)\cdot(y_0-3) + 3$$

Das Vektorfeld ist nun wie folgt:

b) Diese DGL ist nicht linear, aber seperierbar. Wir teilen wieder mit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $g(y) = \frac{1-y^2}{y}$.
Wir bestimmen zuerst $F(x)$, sodass $F(x_0) = 0$:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{-2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln(|1-t^2|)\Big|_{x_0}^{x}$$

$$= -\frac{\ln(|1-x^2|) - \ln(|1-x_0^2|)}{2}$$

Es gilt $x_0 \in (-1,1)$ und damit auch $|1-x_0^2| = 1-x_0^2$. Es gilt also:

$$F(x) = -\frac{\ln(|1-x^2|) - \ln(1-x_0^2)}{2}$$

Wir bestimmen nun $H(z)$, sodass $H(y_0) = 0$:

$$H(z) = \int_{y_0}^{z} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{y_0}^{z} \frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{s.o.}}{=} -\frac{\ln(|1-z^2|) - \ln(|1-y_0^2|)}{2}$$

Es ist $y_0 \in (0,1)$, also gilt $|y_0| = y_0$. Damit haben wir

$$H(z) = -\frac{\ln(|1-z^2|) - \ln(1-y_0^2)}{2}$$

Weiterhin ist der Werteberich von f gleich $(0,1)$, daher gilt auch $|1-y(x)^2| = 1-y(x)^2$.
Mit Skript folgt:

$$\begin{aligned}
H(y(x)) &= F(x) \\
\iff -\frac{\ln(|1-y(x)^2|) - \ln(1-y_0^2)}{2} &= -\frac{\ln(|1-x^2|) - \ln(1-x_0^2)}{2} \\
\iff \ln(1-y(x)^2) - \ln(1-y_0^2) &= \ln(|1-x^2|) - \ln(1-x_0^2) \\
\iff \ln\left(\frac{1-y(x)^2}{1-y_0^2}\right) &= \ln\left(\frac{|1-x^2|}{1-x_0^2}\right) \\
\iff \frac{1-y(x)^2}{1-y_0^2} &= \frac{|1-x^2|}{1-x_0^2} \\
\iff 1-y(x)^2 &= \frac{(|1-x^2|)(1-y_0^2)}{1-x_0^2} \\
\iff y(x) &= \pm\sqrt{1-\frac{|1-x^2|(1-y_0^2)}{1-x_0^2}}
\end{aligned}$$

Das Vektorfeld ist dann: