Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 8

Aufgabe 1

a)
Für w_1 gilt:

$$w_1 = \frac{2}{1-3i} = (2+0i)\cdot(1-3i)^{-1} = (2+0i)\cdot\left(\frac{1+3i}{1^2+3^2}\right) = (2+0i)\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i\right) = \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

Es folgt

$$\mathrm{Re}(w_1) = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(w_1) = \frac{3}{5}$$

Für w_2 gilt:

$$w_2 = \frac{1}{i} = (1+0i)\cdot(0+i)^{-1} = (1+0i)\cdot\left(\frac{0-i}{1}\right) = 0-i$$

Es folgt

$$\mathrm{Re}(w_2) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(w_2) = -1$$

Für w_3 gilt:

$$w_3 = \frac{1+it}{1-it}\cdot\frac{1+it}{1+it} = \frac{1-t^2+i2t}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\cdot\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$$

Es folgt

$$\mathrm{Re}(w_3) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(w_3) = \frac{2t}{1+t^2}$$

b) Nach Satz 1.6 lässt sich der Betrag $|z|$ wie folgt berechnen:

$$\left|\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = \frac{|(3+4i)(-1+2i)|}{|(-1-i)(3-i)|} = \frac{|3+4i|\cdot|-1+2i|}{|-1-i|\cdot|3-i|}$$
$$= \frac{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \frac{5}{2}$$

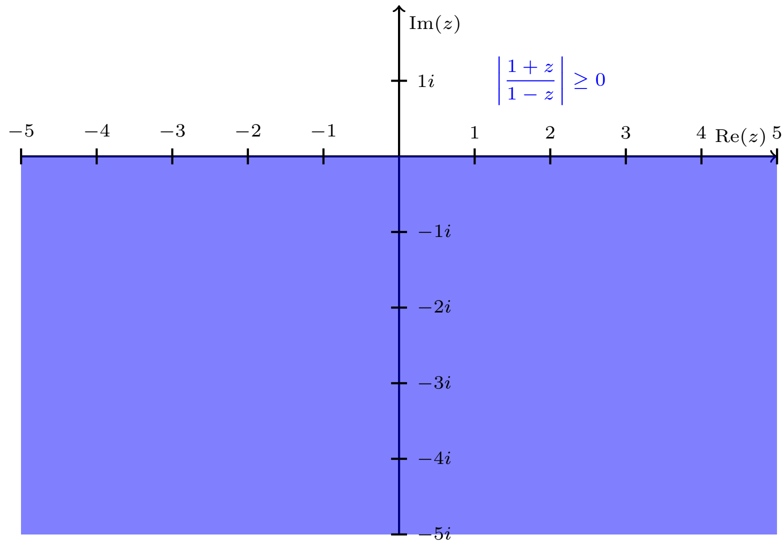
c) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $z = x+iy$. Es gilt

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \frac{|z+i|}{|z-i|} = \frac{|(x+iy)+i|}{|(x+iy)-i|} = \frac{|x+i(y+1)|}{|x+i(y-1)|} = \sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}} \le 1$$

Die lässt sich weiter umformen:

$$\sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}} \le 1 \iff \frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2} \le 1^2 = 1 \iff x^2+(y+1)^2 \le x^2+(y-1)^2$$
$$\iff (y^2+2y+1)-(y^2-2y+1) \le 0 \iff 4y \le 0 \iff y \le 0$$

Also ist die Ungleichung für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) \le 0$ erfüllt.



d) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x = \text{Re}(z)$ und $y = \text{Im}(z)$. Grundsätzlich ist $\frac{z+1}{z-1}$ für $x = 1$ und $y = 0$ schonmal nicht definiert, da wir dann durch 0 teilen würden. Wir gehen also für weiter Rechnungen davon aus, dass $x = 1 \wedge y = 0$ nicht eintreffen kann. Es gilt:

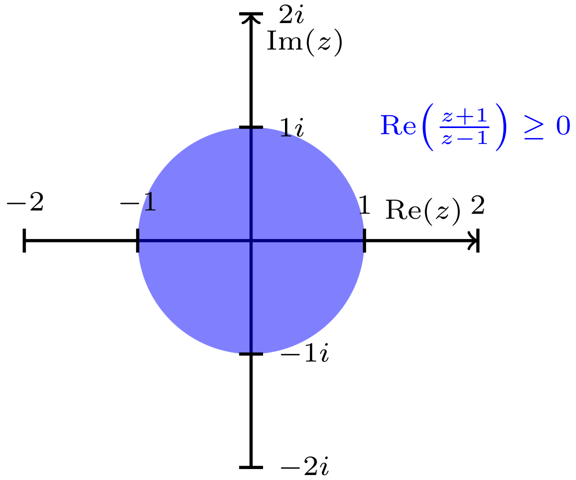
$$\text{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \text{Re}\left(\frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{1-x+iy}{1-x+iy}\right) = \text{Re}\left(\frac{-x^2+2iy-y^2+1}{x^2-2x+y^2+1}\right)$$

$$= \text{Re}\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2-2x+y^2+1} + i \cdot \frac{2y}{x^2-2x+y^2+1}\right) = \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} \geq 0$$

Weiterhin wissen wir, dass für alle $a \in \mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$, gilt und nehmen ja an, dass $\neg(x = 1 \wedge y = 0) \implies (x-1)^2 + y^2 > 0$ gilt. Es folgt also:

$$\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} \geq 0 \iff 1-x^2-y^2 \geq 0 \iff x^2+y^2 \leq 1 \iff \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2 \leq 1$$

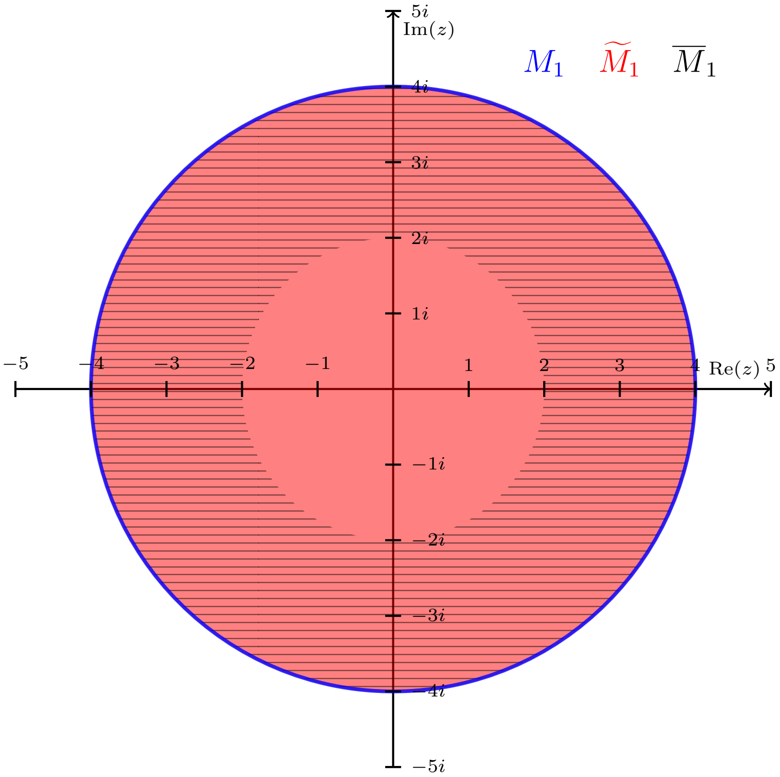
Dies entspricht einer typischen Kreisgleichung:



Jedoch ist die Gleichung für $z = 1 + 0i$ nicht definiert, und es ist $z = 1 + 0i$ nicht in der Lösungsmenge enthalten.

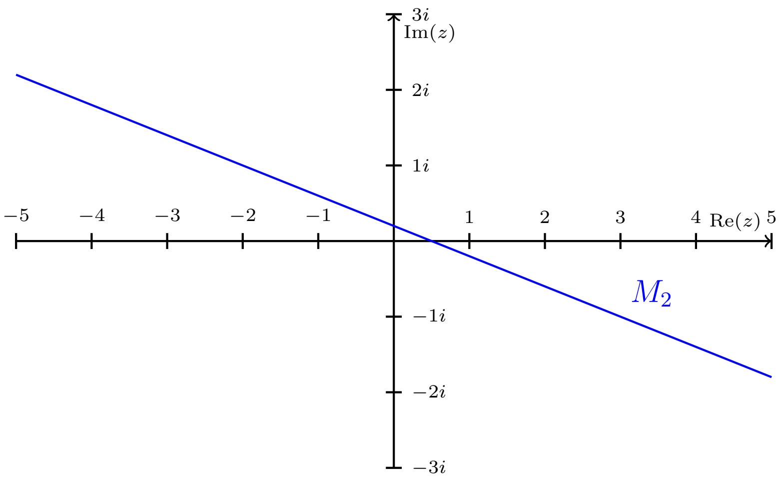
Aufgabe 2

a) Mit $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$ folgt



b) Dies lässt sich wie eine Grade darstellen, welche $\mathrm{Im}(z)$ in Relation zu $\mathrm{Re}(z)$ setzt:

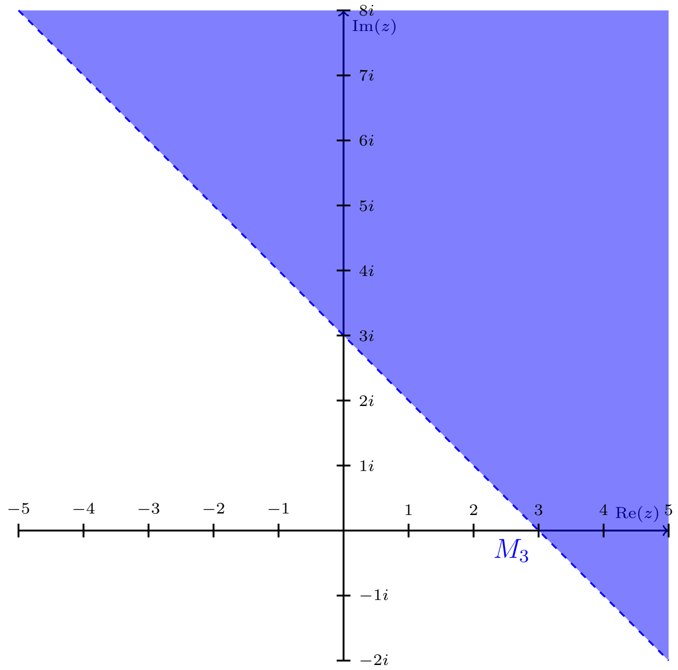
$$2\,\mathrm{Re}(z) + 5\,\mathrm{Im}(y) = 1 \iff \mathrm{Im}(z) = \frac{1 - 2\,\mathrm{Re}(z)}{5}$$



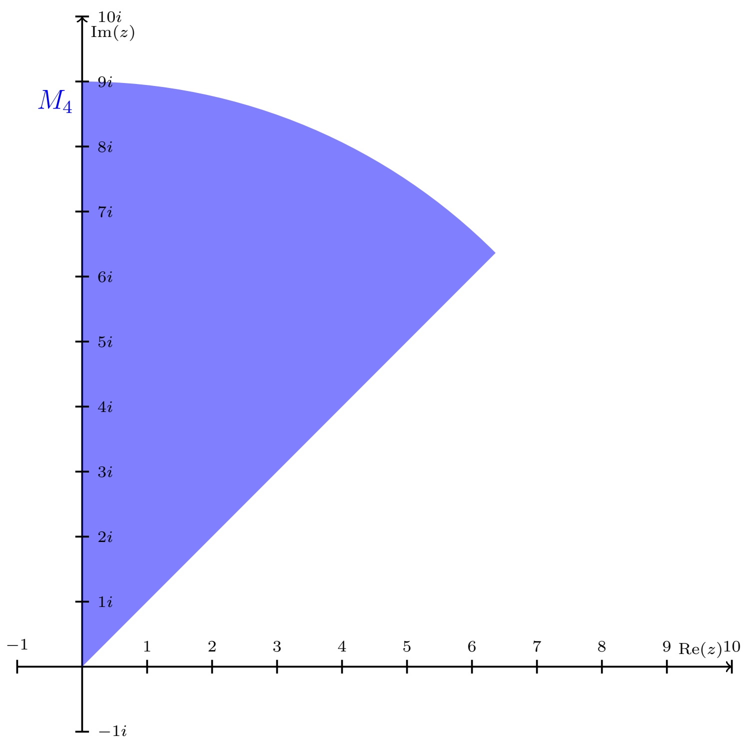
c)

$$\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) - 1 > 2 \iff \mathrm{Im}(z) > 3 - \mathrm{Re}(z)$$

Damit haben wir eine Geradengleichung. Alle werte "über" dieser gerade gehören zu M_3:



d) Aus $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ folgt, dass alle Elemente von M_4 schonmal im 1. Quadranten liegen müssen. Weiterhin muss $\mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z)$ gelten, also liegen alle Elemente von M_4 überhalb und auf der Geradengleichung $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$. Als letztes muss $|z| < 9$ gelten wordurch das ganze mit dem Radius 9 beschränkt wird, daher das runde Ende:



Aufgabe 3

Wir definieren:

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := 5i^{4n}\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \qquad (c_n)_{n\in\mathbb{N}} := 5i^{4n+1}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$
$$(d_n)_{n\in\mathbb{N}} := 5i^{4n+2}\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \qquad (e_n)_{n\in\mathbb{N}} := 5i^{4n+3}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$

Es gilt

$$\forall n\in\mathbb{N}\colon i^{4n} = (i^2\cdot i^2)^n = ((-1)(-1))^n = 1^n = 1$$

Es folgt

$$\forall n\in\mathbb{N}\colon i^{4n+1} = i^{4n}\cdot i = i$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\colon i^{4n+2} = i^{4n}\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\colon i^{4n+3} = i^{4n}\cdot i^3 = i^3 = -i$$

Weiterhin seien:

$$(w_n)_{n\in\mathbb{N}} := 4n \qquad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} := 4n+1$$
$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := 4n+2 \qquad (z_n)_{n\in\mathbb{N}} := 4n+3$$

Dann gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ stets:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n^3}\right) = 5i^{4n}\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = a_{w_n} \qquad c_n = i\cdot\left(1+\frac{1}{n^3}\right)5i^{4n+1}\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = a_{x_n}$$
$$d_n = -\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = 5i^{4n+2}\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = a_{y_n} \quad e_n = -i\cdot\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = 5i^{4n+3}\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = a_{z_n}$$

Folglich sind b_n, c_n, d_n und e_n alle Teilfolgen von a_n. Die Grenzwertsätze lassen sich wie folgt anwenden:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 1+0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} i + \lim_{n\to\infty} i\cdot\frac{1}{n^3} = i + \lim_{n\to\infty} i\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = i + i\cdot 0 = i$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} -1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = -1-0 = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} -i - \lim_{n\to\infty} i\cdot\frac{1}{n^3} = -i - \lim_{n\to\infty} i\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = -i - i\cdot 0 = -i$$

Also folgt für die Teilfolgen b_n, c_n, d_n, e_n von a_n:

$$\lim_{n\to\infty} b_n \neq \lim_{n\to\infty} c_n \neq \lim_{n\to\infty} d_n \neq \lim_{n\to\infty} e_n$$

Aufgabe 4

Durch Benutzung des Cauchyprodukts (*) sowie der geometrischen Summenformel (**) folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} z^i \cdot z^{k-i} \overset{*}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^i\right)$$

Da die geometische Summenformel für alle Körper definiert ist, hält sie auch insbesondere für $\mathbb{C}$. Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sum_{k=0}^{n} z^k$ also die Folge der Partialsummen von $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Nach der geom. Summenformel gilt dann, da $|z| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := z^{n+1}$. Die Folge a_n konvergiert gegen 0, wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}, N = N(\varepsilon)$ finden lässt sodass gilt:

$$\forall n \geq N\colon |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

Nach Satz 1.6 c) folgt $|a_n| = |z^{n+1}| = |z|^{n+1}$. Weiterhin ist $|z| \in \mathbb{R}$ und $|z| < 1$, also ist $|a_n| = |z|^{n+1}$ eine Nullfolge nach (III 1.14). Weiterhin ist eine Nullfolge nach Definition auch konvergent. Also lässt sich ein $N \in \mathbb{N}$ zu jedem ε finden, sodass die Nullfolge $|z|^{n+1}$ konvergiert. Für eben dieses $N = N(\varepsilon)$ folgt nun jedoch auch für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\forall n \geq N\colon |a_n - 0| = |a_n| = |z^{k+1}| = |z|^{k+1} < \varepsilon$$

Folglich konvergiert $a_n = z^{n+1}$ ebenfalls gegen 0.

Damit lässt sich nun mit Hilfe der Grenzwertsätze (Satz 2.4) folgern:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1-z^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} 1-z} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} z^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} z} = \frac{1-0}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

Insgesamt gilt also:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^i\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right)$$

$$= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$