

## Hausaufgabe 9

---

### Aufgabe 1

a)

Die Exponentialfunktion  $\exp(x)$  ist grundsätzlich für ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Wir können in der gegebenen Funktion nie durch 0 teilen noch die Wurzel einer negativen Zahl ziehen. Es folgt, dass der maximale Definitionsbereich der reellen Funktion  $\exp(1 - 4x^2)$  durch  $\mathbb{R}$  gegeben ist.

b) (i)

Das größte offene Intervall in dem die Funktion streng monoton steigend ist, ist  $(-\infty, 0)$ . Das größte offene Intervall in dem die Funktion streng monoton fallend ist, ist  $(0, \infty)$ .

(ii)

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$  gegeben.

Falls  $x, y \in (-\infty, 0)$ , dann gilt  $1 - 4x^2 < 1 - 4y^2$  und da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist (III 3.21 c) auch  $\exp(1 - 4x^2) < \exp(1 - 4y^2)$ . Also ist  $\exp(1 - 4x^2)$  streng monoton wachsend im Intervall  $(-\infty, 0)$  (V 1.7a).

Falls  $x, y \in (0, \infty)$ , dann gilt  $1 - 4x^2 > 1 - 4y^2$  und da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist (III 3.21 c) auch  $\exp(1 - 4x^2) > \exp(1 - 4y^2)$ . Also ist  $\exp(1 - 4x^2)$  streng monoton fallend im Intervall  $(-\infty, 0)$  (V 1.7b).

(iii)

Wenn man nun die Intervalle  $(-\infty, 0]$  und  $[0, \infty)$  betrachtet, ändert sich nichts daran, dass  $f$  in diesen streng monoton wächst bzw. fällt, denn für  $|x| > 0$  folgt  $x^2 > 0^2 = 0$  und damit  $1 - 4 \cdot 0^2 > 1 - 4x^2$ , d.h.  $f(0) > f(x)$  für  $x \in (-\infty, 0)$  oder  $x \in (0, \infty)$ . Also bleibt  $f$  in beiden halboffenen Intervallen streng monoton steigend bzw. fallend.

c)

Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt grundsätzlich  $\exp(x) > 0$  (III 3.21 b), also kann die Exponentialfunktion keine Nullstellen besitzen. Damit kann die gegebene Funktion ebenfalls keine Nullstellen besitzen.

Da wir in Aufgabenteil b) festgestellt haben, dass  $f$  im Intervall  $(-\infty, 0]$  streng monoton wächst und im Intervall  $[0, \infty)$  streng monoton fällt, folgt, dass  $\forall x \in \mathbb{R}: f(0) \geq f(x)$  gilt. Damit ist 0 eine Extremal- und insbesondere auch Maximalstelle von  $f$ . Hinzukommend kann es keine weiteren (lokalen) Maximal- bzw. Minimalstellen geben. Denn es folgt aus der strengen Monotonie:

Es gilt für jedes  $x \in (-\infty, 0)$ , dass  $y, z \in (-\infty, 0)$  mit  $y < x < z$  existieren. Analog gilt für jedes  $x \in (0, \infty)$ , dass  $y, z \in (0, \infty)$  mit  $y < x < z$  existieren.

Insgesamt gilt aber  $\{0\} \cup (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R}$ . Somit kann es abgesehen von 0 keine weiteren Extremalwerte für  $f$  geben.

## Aufgabe 2

a)

Zuerst sollten wir die Gleichung so umformen, dass nur noch ein  $x$  vorkommt:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 & | \div a \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 & | - \frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} & | + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} & | \text{quad. Ergänzung} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Nun lässt sich die Gleichung nach  $x$  lösen:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} & | \sqrt{\phantom{x}} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} & | - \frac{b}{2a} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \cdot \frac{2a}{2a}} = \frac{-b \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \cdot (2a)^2 - \frac{c}{a} \cdot (2a)^2}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Damit wären wir bei der allbekannten Mitternachtsformel. Die sogenannte Diskriminante,  $b^2 - 4ac$ , welche unter der Wurzel steht, bestimmt die Anzahl der Lösungen (Nullstellen). Gilt  $b^2 - 4ac < 0$ , so gibt es keine Lösungen (Nullstellen) in  $\mathbb{R}$ , gilt  $b^2 - 4ac = 0$  so gibt es genau eine Lösung (Nullstelle) in  $\mathbb{R}$ , da stets  $\pm\sqrt{0} = 0$  gilt. Ist  $b^2 - 4ac > 0$  so gibt es genau 2 Lösungen (Nullstellen) in  $\mathbb{R}$ .

b)

Hier lässt sich einfach  $z = x^2$  substituieren. Dann lassen sich die Nullstellen dieses Polynoms in  $z$  wie in a) beschrieben finden:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \implies az^2 + bz + c = 0 \implies z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dann kann man wieder resubstituieren um die Nullstellen in des ursprünglichen Polynoms in  $x$  zu erhalten. Es gilt  $x = \pm\sqrt{z}$ . Seien  $z_1, z_2$  die möglichen Nullstellen des Polynoms in  $z$ . Es gilt nun

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} \quad \text{und} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$$

Insofern das Polynom in  $x$  genau 4 Nullstellen in  $\mathbb{R}$  besitzt. Insgesamt lässt sich dies auch alles in einem schreiben:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

c)

Wählt man nun  $a, b, c \in \mathbb{C}$  und sucht nach komplexen Nullstellen, so wird man nach dem Fundamentalsatz der Algebra (IV 1.7) auch stets mindestens eine finden. Dies liegt grundlegend daran, dass die Gleichung  $x = \sqrt{z}$  für  $x, z \in \mathbb{C}$  stets in  $\mathbb{C}$  lösbar ist, auch wenn  $z \in \mathbb{R}$  mit  $z < 0$ , da  $\sqrt{-1} = i$  gilt, wo  $i$  die imaginäre Einheit von  $\mathbb{C}$  ist.

### Aufgabe 3

a)

Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $\delta = \varepsilon$ . Da stets  $x^2 > 0$  sowie  $|x| > 0$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt (II 2.8 a4 und II 2.12), folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, |x - 0| < \delta: |f(x) - 0| = \left| \frac{x^2}{|x|} \right| = \frac{x^2}{|x|} < \frac{\delta^2}{\delta} = \delta = \varepsilon$$

Somit gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

b)

Wir benutzen Polynomdivision (\*) und die gegebenen Eigenschaften, dass stets  $0 \leq x \leq 2$  (\*\*), sowie die Betragssätze (II 2.12) (\*\*\*). Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wähle  $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ . Es folgt:

$$\forall x \in [0, 1) \cup (1, 2], |x - 1| < \delta: |f(x) - 4| \stackrel{*}{=} |x^2 + 2x + 1 - 4| = |(x - 1)(x + 3)|$$

$$\stackrel{***}{=} |x - 1| \cdot |x + 3| < \delta |x + 3| \stackrel{**}{=} x\delta + 3\delta \leq 5\delta = \varepsilon$$

Somit gilt  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ .

### Aufgabe 4

Wir benutzen im folgenden, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt, insofern  $f$  an der Stelle  $x_0$  definiert ist. Dies ist zu interpretieren als eine unendlich nahe Annäherung von  $x$  an  $x_0$ , was in diesen Fällen eben äquivalent zum Einsetzen von  $x_0$  in  $f$  ist (Siehe Satz 1.6).

a)

Da  $f$  im Punkt  $-1$  definiert ist, durch Einsetzen von  $-1$  in  $f$  berechnen:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x - 2} = \frac{3(-1) - 1}{2(-1) - 2} = \frac{-4}{-4} = 1$$

b)

Die gegebene Funktion lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} = \frac{1}{2-x} - \frac{12}{(2-x)(x^2+2x+4)} = \frac{x^2+2x+4-12}{(2-x)(x^2+2x+4)} \\ &= \frac{(x-2)(x+4)}{-(x-2)(x^2+2x+4)} = -\frac{x+4}{x^2+2x+4} \end{aligned}$$

Nun lässt sich 2 einsetzen, um den Grenzwert zu berechnen:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} = \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{x+4}{x^2+2x+4} = -\frac{2+4}{2^2+2 \cdot 2+4} = -\frac{1}{2}$$

c)

Die gegebene Funktion lässt sich wieder umformen, sodass der Grenzwert wie in den vorherigen Aufgabenteilen durch Einsetzen bestimmt werden kann. Mit Polynomdivision folgt:

$$h(x) = \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$$

Dieses Polynom ist für  $x = 1$  definiert. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3 \\ &= 2(1)^3 - 4(1)^2 - 3(1) - 3 = -8 \end{aligned}$$

## Aufgabe 5

(i)

Die gegebene Funktion lässt sich wie folgt umschreiben:

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x}{2x^4 + 1} = \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^4}}$$

Wir zeigen, dass  $\frac{c}{x^n}$  mit  $c \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  für  $x \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert.

Nach Beispiel 1.13 a) ist  $f(x) = \frac{1}{x}$  konvergent gegen 0 (\*). Mit den Grenzwertsätzen (Satz 1.5), welche nach Bemerkung (1.14) auch für  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  gelten, lässt sich einfach mit Induktion zeigen, dass  $\lim_{x \rightarrow \infty} \prod g(x) = \prod \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  gilt (\*\*). Für  $\frac{1}{x^n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{x} \stackrel{**}{=} \prod_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \stackrel{*}{=} \prod_{k=1}^n 0 = 0$$

Damit ist  $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  für  $x \rightarrow \infty$  konvergent gegen 0. Sei nun ein beliebiges  $c \in \mathbb{R}$  gegeben. Wir wissen  $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$  konvergiert für  $n \in \mathbb{N}$  (\*), die konstante Funktion ist grundsätzlich konvergent und können wieder die Grenzwertsätze anwenden (\*\*). Für  $\frac{c}{x^n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} c \cdot \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} c \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = c \cdot 0 = 0$$

Insgesamt ist  $\frac{c}{x^n}$  mit beliebigen  $c \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  für  $x \rightarrow \infty$  konvergent gegen 0. Damit sind Nenner und Zähler unserer umgeformten Funktion ebenfalls konvergent und die Grenzwertsätze lassen sich wie folgt anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^4}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

(ii)

Dies lässt sich analog zu den Teilaufgaben aus Nr. 4 umformen, um dann durch Einsetzen unendlich nahe zu approximieren und den Grenzwert zu berechnen. Die gegebene Funktion lässt sich wie folgt umformen:

$$g(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2-x} - \frac{4}{(2-x)(2+x)} = \frac{2+x-4}{(2-x)(2+x)} = -\frac{1}{2+x}$$

Die umgeformte Funktion ist für  $x = 2$  definiert. Es folgt:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2-x} - \frac{4}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2+x} = -\frac{1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$