Gruppe **14**
Datenstrukturen und Algorithmen

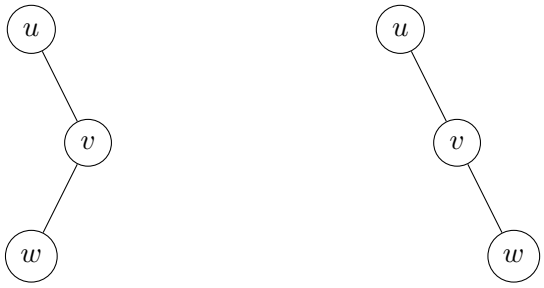
Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 3

Aufgabe 1

a)
Es sei ein Binärbaum $\mathcal{B}$ der Höhe h gegeben. Um eine maximale Anzahl an inneren Knoten zu enthalten, sollte er eine maximale Anzahl an Knoten enthalten, also vollständig sein. Damit enthält $\mathcal{B}$ nach Skript $2^{h+1} - 1$ Knoten. Die Knoten in Ebene h sind nach alle Blätter von $\mathcal{B}$, alle anderen Knoten haben den maximalen out-degree von 2. Da Blätter keine inneren Knoten sind, ergibt sich also $(2^{h+1} - 1) - 2^h = 2^h - 1$ für die Anzahl der inneren Knoten von $\mathcal{B}$. □

b)
Es sei ein Binärbaum $\mathcal{B}$ gegeben sodass ein Knoten v einen out-degree von 1 hat und dieses Kind ein Blatt von $\mathcal{B}$ ist. Wir nennen diesen Nachfolger hier mal w. Unabhängig davon, ob w ein linkes oder rechtes Kind ist, würde die Preorder-Traversierung $(\cdots, v, w, \cdots)$ und die Postorder-Traversierung $(\cdots, w, v, \cdots)$ lauten. Durch diese fehlende Information, ob ein gegebenes "Einzelkind" ein linkes oder rechtes ist, lässt sich der Baum nicht vollständig von den Traversierungen rekonstruieren. Wir geben ein kleines Beispiel:



Beide Binärbäume haben eine Preorder-Traversierung von (u, v, w) und eine Postorder-Traversierung von (w, v, u). □

c)

Es sei ein Binärbaum $\mathcal{B}$ und dessen Inorder-Traversierung $i = (i_0, \cdots, i_n)$ sowie Mirror-Linearisierung $l = (l_0, \cdots, l_m)$ für $m, n \in \mathbb{N}$ gegeben. Nach Definition ist l_0 die Wurzel von $\mathcal{B}$.
Dann gibt es ein $k \in [0, n]$ mit $i_k = l_0$ sodass $(i_0, \cdots, i_{k-1})$ den linken, und $(i_{k+1}, \cdots, i_n)$ den rechten Teilbaum der Wurzel darstellen. Weiter ist dann i_n der rechteste Knoten von $\mathcal{B}$. Es existiert weiter ein $j \in [0, m]$ mit $l_j = i_n$, sodass $(l_1, \cdots l_j)$ die Preorder-Traversierung des rechten Teilbaumes von $\mathcal{B}$ darstellt. Dieser Teilbaum ist wie bekannt dann eindeutig bestimmt. Dies lässt sich nun rekursiv fortführen indem wir l_{j+1} als Wurzel des linken Teilbaums betrachten und wie für $\mathcal{B}$ vorgehen, insofern $j \neq n$, also $\mathcal{B}$ überhaupt einen linken Teilbaum besitzt. Mit dieser Methode lässt sich ein gegebener Binärbaum eindeutig aus seiner Mirror-Linearisierung und Inorder-Traversierung rekonstruieren.

Aufgabe 2

Der gegebene Algorithmus ist in gewisser Weise ein Variante des bekannten Depth-First-Search. Wir besuchen jeden Knoten nur genau einmal, denn:
Sobald ein Knoten v besucht wird, werden alle von ihm aus erreichbaren Knoten besucht, also

$$M := \{v' \in V \mid v' \neq v \wedge \exists(v_0, v_1, \cdots, v_n) : v_0 = v \wedge v_n = v' \wedge \forall i \in [1, n] : (v_{i-1}, v_i) \in E\}$$

Da der Algorithmus auf einem azyklischem Graphen arbeitet, gilt $v \notin M$, man kann also nicht wieder zu v zurückkommen, während man seine Nachfolger besucht. Sobald man dann alle Nachfolger $v' \in M$ besucht hat, wird durch eine Member-Variable angegeben dass v schon besucht wurde. Da ein Knoten beliebig viele Vorgänger bzw. eingehende Kanten haben kann, könnte man im weiteren Verlauf des Algorithmus nochmal bei v vorbeikommen. Jedoch wird zu Beginn von `visit(`v`)` überprüft, ob v schon besucht wurde. Somit wird jeder Knoten eines DAG von dem gegebenen Algorithmus genau einmal besucht.

Aufgabe 3

a)

Ja, alle 5 Operationen liegen in der Komplexitätsklasse $\mathcal{O}(1)$ (konstante Laufzeit, unabhängig von n).

`isEmpty()` überprüft in einem Schritt ob `first` leer ist.

`enqueueFront()` fügt ein Element als neues `first` Element ein und verkettet das ehemalige erste mit dem neuen.

`enqueueBack()` fügt ein Element als neues `last` Element ein und verkettet das ehemalige mit dem neuen.

`dequeueFront()` entfernt das derzeitige `first` Element und setzt `first` auf das ehemalige zweite der Schlange.

`dequeBack()` ist analog zu `dequeFront()`.

b)

Die Laufzeit der fünf Operationen auf einem unbeschränktem Array ist nicht konstant, da für den Befehl `dequeFront()` zuerst das erste Element gelöscht werden muss und dann alle anderen Element verschoben werden müssen um die Umsetzung mit nur einem last-Zeiger zu ermöglichen.

c)

Die Operationen `add()` und `contains()` liegen in $\mathcal{O}(n)$ da Sie beide das ganze Set durchgehen müssen um zu überprüfen ob ein Element enthalten ist oder nicht.
Wobei `contains()` noch eine extra Zeiteinheit braucht um das Element hinzuzufügen, dennoch bleibt die Operation in $\mathcal{O}(n)$.
Ob die Aussage korrekt ist kommt auf die Funktionsweise von `union()` an, da die Frage ist, ob doppelte Element gelöscht werden müssen oder nicht.
Falls sie nicht gelöscht werden müssen bleibt auch `union()` in $\mathcal{O}(n)$. Ansonsten bräuchte die Operation n^2 Schritte und läge somit in $\mathcal{O}(n^2)$.

d)

Fallunterscheidung:

Fall 1: Doppelte Elemente müssen nicht gelöscht werden:
Durch Implemtierung mit verketteten Listen die man einfach aneinanderhängt braucht die Operation `union()` nur eine Operation und liegt somit in $\mathcal{O}(1)$.

Fall 2: Doppelte Elemente müssen gelöscht werden:
In diesem Fall ist einen Implementierung in konstanter Laufzeit nicht möglich, da für jedes Element aus set2, set1 ganz durchlaufen werden muss.

Aufgabe 4

a)

Die Speicherkomplexität ist in beiden Fällen gleich da das Array vorher schon mit k+1 Einträgen angelegt werden muss.

b)

B(n,k) = 2 (Beide einsen sin direkt am Anfang hintereinander).
W(n,k) = n (Die ganze Liste muss durchgegangen werden).

Die Anzahl an Permutationen der List ist $\frac{n!}{2}$. Die Anzahl an Permutationen der Liste sodass die 2te 1 an Index $i \in [0, n-1]$ steht, ist $i(n-2)!$. Da wir von einem Laplaceraum ausgehen ist jedes Ereignis gleichwahrscheinlich. Wir müssen die Liste immer bis zur 2ten 1 durchgehen, also $(i+1)$ Operationen durchführen. Es folgt:

$$A(n,k) = \frac{2}{n!}\sum_{i=1}^{n}(i+1)i(n-2)! = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{2(n+1)(n+2)}{3(n-1)} \approx \frac{2}{3}n$$

c)

```
1  int tmp, z;
2  for (i in l)
3      tmp = i
4      z = 0
5      for (j in l)
6          if (tmp == j)
7              z++
8      if (z > 1)
9          return true
10 return false
```

Dieser Algorithmus hat eine konstante Speicherkomplexität in dem Worst-Case, da er unabhängig von n immer nur zwei Werte speichern muss. Die Asymtotische Komplexität des Algorithmus im Worst-Case ist in $\mathcal{O}(n^2)$(wenn nur die If-Abfragen als Operationen gelten).

d)

```
if (l.length <= 2)
    return l.first

nums[] = 0^n

for (i in l)
    nums[i]++

max = 0
maxNum = 0
current = 0

while (current < n)
    if (nums[current] > maxNum)
        maxNum = nums[index]
        max = current

    ++current

return max
```

Der Algorithmus hat eine lineare Laufzeit da er genau 2n If-Abfragen durchführt in jedem Fall außer `l.length <= 2` durchführt. Außerdem ist der Platzbedarf $n+3 \leq n \cdot (\log n - 1) + 4 \log n$ in allen Fällen.

```
if (l.length <= 2)
    return l.first

maxNum = 0
maxOccurences = 0

for (i in l)
    occurrences = 0

    for (j in l)
        if (i == j)
            occurrences++

    if (occurences > m)
        macOccurences = occurences
        maxNum = i

return maxNum
```

Der Speicherbedarf ist in allen Fällen konstant und somit kleiner $4 \log n < 5 \log n$.