

## Hausaufgabe 13

---

### Aufgabe 1

Wir zerlegen das Intervall  $[1, b]$  wie im Hinweis durch die Folge  $x_i = b^{\frac{i}{n}}$ . Da  $\frac{1}{x}$  auf dem Intervall  $[1, \infty)$  streng monoton fallend ist, lässt sich die Obersumme wie folgt bilden:

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{1}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b^{-\frac{i-1}{n}} \left( b^{\frac{i}{n}} - b^{\frac{i-1}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b^{\frac{i-(i-1)}{n}} - b^{\frac{i-1-(i-1)}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( b^{\frac{1}{n}} - b^0 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( b^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Auf die gegebene Folge lässt sich nun der Satz von l'Hopital anwenden, da sowohl die Exponentialfunktion als auch  $\frac{1}{n}$  stetig auf  $\mathbb{R}$  sind. Weiterhin gilt nach Skript dann auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1 = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(b)}{n}\right) = \exp(0) = 1$$

Also wenden wir l'Hopital und überprüfen, ob der Grenzwert der Ableitungen existiert:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1 \right]'}{\left[ \frac{1}{n} \right]'} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) \ln(b)}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) \ln(b) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(b)}{n}\right) \ln(b) = \exp(0) \ln(b) = \ln(b)\end{aligned}$$

Nach l'Hopital gilt nun auch:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(\frac{\ln(b)}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(b)$$

Da dies also für eine Obersumme gilt, gilt es auch für das Infimum der Obersummen und aufgrund der Äquivalenz ebenso für das Supremum der Untersummen. Insgesamt gilt also:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln(b)$$

## Aufgabe 2

a) Da  $\forall x \in [a, b]: m \leq f(x) \leq M$ , sowie  $\forall x \in [a, b]: g(x) \geq 0$ , folgt auch:

$$\forall x \in [a, b]: mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

Nach Skript Satz 1.5 folgt durch betrachtung von  $mg(x)$ ,  $Mg(x)$  und  $f(x)$  als eigene Funktion:

$$m \int_a^b g(x) dx = \int_a^b mg(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b Mg(x) dx = M \int_a^b g(x) dx$$

b)

Es sei eine Zerlegung  $Z$  des Intervalls  $[a, b]$  in  $n \in \mathbb{N}$  Teile gegeben, welche wir jeweils mit  $Z_i$  indizieren. Wir notieren  $\Omega(\varphi, i) := \max\{\varphi(x) \mid x \in [Z_{i-1}, Z_i]\}$  und bilden nun eine Obersumme. Es folgt durch die Gegebenheiten der Aufgabe, dass  $\forall x \in [a, b]: m \leq f(x) \leq M$ :

$$\begin{aligned} m \sum_{i=1}^n \Omega(g, i)(Z_i - Z_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n m \Omega(g, i)(Z_i - Z_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \Omega(f, i) \Omega(g, i)(Z_i - Z_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M \Omega(g, i)(Z_i - Z_{i-1}) = M \sum_{i=1}^n \Omega(g, i)(Z_i - Z_{i-1}) \end{aligned}$$

Da dies für jede beliebige Zerlegung gilt, gilt es auch für das Infimum der Obersummen, sowie das Supremum der Untersummen, da  $f$ ,  $g$  und  $f \cdot g$  integrierbar sind. Es gilt also:

$$m \int_a^b g(x) dx = m \cdot O(g) \leq O(f \cdot g) = \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \cdot O(g) = M \int_a^b g(x) dx$$

## Aufgabe 3

a) Die Exponentialfunktion ist differenzierbar, integrierbar und stetig auf  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^\infty 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \int_0^b 1 dx - \int_0^b \frac{1}{z} dz \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (x - \ln(|z|))_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (x - \ln(e^x + e^{-x}))_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (b - \ln(e^b + e^{-b}) - (0 - \ln(e^0 + e^{-0}))) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (b - \ln(e^b + e^{-b}) + \ln(2)) = \ln(2) + \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\exp(b - \ln(e^b + e^{-b}))) \\ &= \ln(2) + \lim_{b \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{e^b}{e^b + e^{-b}}\right) = \ln(2) + \lim_{b \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{1 + e^{-2b}}\right) = \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{1 + 0}\right) \\ &= \ln(2) + \ln(1) = \ln(2) \end{aligned}$$

Da der Grenzwert  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ln(2)$  existiert, gilt nun auch

$$\int_0^\infty 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ln(2)$$

b) Nach Skript Satz 2.13 gilt  $\lim_{a \rightarrow 0} \ln(a) = -\infty$ , also ist  $\ln(x)$  für  $x \rightarrow 0$  bestimmt divergent gegen  $-\infty$  (\*). Daher gilt, dass für  $\alpha \leq -1$  das gegebene uneigentliche Integral nicht existiert: Wir unterteilen das Integral bei  $c = 1$ , da  $x^\alpha$  für  $\alpha < 0$  in  $x_0 = 0$  nicht definiert ist, also zwei uneigentliche Integrationsgrenzen hat:

$$\int_0^\infty x^\alpha dx = \int_0^1 x^\alpha dx + \int_1^\infty x^\alpha dx$$

Wir betrachten zuerst das Integral  $\int_0^1 x^\alpha dx$  für  $\alpha = -1$ :

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \ln(1) - \ln(a)$$

Da der Grenzwert nicht existiert (s.o.), existiert auch das uneigentliche Integral nicht für  $\alpha = -1$ . Wir betrachten zunächst das Integral  $\int_0^1 x^\alpha dx$ :

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 x^\alpha dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{1^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

Für  $\alpha < -1$  ist  $\alpha+1 < 0$ , d.h.  $\lim_{a \rightarrow 0} a^{\alpha+1}$  existiert nicht und divergiert bestimmt gegen unendlich. Also kann das gegebene uneigentliche Integral schonmal nicht für  $\alpha \leq -1$  existieren. Für  $0 > \alpha > -1$  gilt jedoch:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{1^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) = \frac{1^{\alpha+1} - 0^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Und damit auch

$$\forall 0 > \alpha > -1: \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$$

Wir überprüfen also nun ob auch das Integral  $\int_1^\infty x^\alpha dx$  für  $0 > \alpha > -1$  existiert:

$$\int_1^\infty x^\alpha dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^\alpha dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\exp((\alpha+1) \ln(b)) - 1}{\alpha+1}$$

Nach Skript gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$  sowie  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ , weiterhin gilt  $\alpha+1 > 0$ , daher existiert der Grenzwert nicht und es gilt:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\exp((\alpha+1) \ln(b)) - 1}{\alpha+1} = \infty$$

Zusammenfassend existiert das Integral  $\int_0^1 x^\alpha dx$  nicht für  $\alpha \leq -1$ , und das Integral  $\int_1^\infty x^\alpha dx$  nicht für  $0 > \alpha > -1$ . Daher existiert das Integral  $\int_0^\infty x^\alpha dx$  für kein  $\alpha < 0$ .

## Aufgabe 4

a) Dies ist eine lineare DGL. Es ist  $a(x) = -\frac{1}{2}$  und  $b(x) = \frac{3}{2}$ . Dann gilt

$$y' = a(x)y + b(x) = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = (3 - y)\frac{1}{2}$$

Wir definieren

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) = \exp\left(\frac{x_0 - x}{2}\right)$$

sowie

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt = y_0 + \int_{x_0}^x \frac{3}{2 \exp\left(\frac{x_0 - t}{2}\right)} dt$$
$$y_0 + \left(\frac{3}{\exp\left(\frac{x_0 - t}{2}\right)}\right) \Big|_{x_0}^x = y_0 + \frac{3}{\exp\left(\frac{x_0 - x}{2}\right)} - 3$$

Dann ist nach Skript

$$\psi(x) = \varphi(x) \cdot u(x) = \exp\left(\frac{x_0 - x}{2}\right) \cdot \left(y_0 + \frac{3}{\exp\left(\frac{x_0 - x}{2}\right)} - 3\right)$$
$$= \exp\left(\frac{x_0 - x}{2}\right) \cdot (y_0 - 3) + 3$$

Das Vektorfeld ist nun wie folgt:

b) Diese DGL ist nicht linear, aber separierbar. Wir teilen wieder mit  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ ,  $g(y) = \frac{1-y^2}{y}$ . Wir bestimmen zuerst  $F(x)$ , sodass  $F(x_0) = 0$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{t}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{-2t}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln(|1-t^2|) \Big|_{x_0}^x \\ &= -\frac{\ln(|1-x^2|) - \ln(|1-x_0^2|)}{2} \end{aligned}$$

Da nur der Definitionsbereich  $(-1, 1)$  relevant für  $y(x)$ , sowie  $x_0 \in (-1, 1)$  ist, gilt sowohl  $|1-x_0^2| = 1-x_0^2$  als auch  $|1-x^2| = 1-x^2$  für unseren Zweck. Damit haben wir

$$F(x) = -\frac{\ln(1-x^2) - \ln(1-x_0^2)}{2}$$

Wir bestimmen nun  $H(z)$ , sodass  $H(y_0) = 0$ :

$$H(z) = \int_{y_0}^z \frac{1}{g(t)} dt = \int_{y_0}^z \frac{t}{1-t^2} dx \stackrel{\text{s.o.}}{=} -\frac{\ln(|1-z^2|) - \ln(|1-y_0^2|)}{2}$$

Es ist  $y_0 \in (0, 1)$ , also gilt  $|y_0| = y_0$ . Damit haben wir

$$H(z) = -\frac{\ln(|1-z^2|) - \ln(1-y_0^2)}{2}$$

Nach Skript gilt nun:

$$\begin{aligned} H(y(x)) &= F(x) \\ \iff -\frac{\ln(|1-y(x)^2|) - \ln(1-y_0^2)}{2} &= -\frac{\ln(1-x^2) - \ln(1-x_0^2)}{2} \\ \iff \ln(1-y(x)^2) - \ln(1-y_0^2) &= \ln(1-x^2) - \ln(1-x_0^2) \\ \iff \ln\left(\frac{1-y(x)^2}{1-y_0^2}\right) &= \ln\left(\frac{1-x^2}{1-x_0^2}\right) \\ \iff \frac{1-y(x)^2}{1-y_0^2} &= \frac{1-x^2}{1-x_0^2} \\ \iff 1-y(x)^2 &= \frac{(1-x^2)(1-y_0^2)}{1-x_0^2} \\ \iff y(x) &= \pm \sqrt{1 - \frac{(1-x^2)(1-y_0^2)}{1-x_0^2}} \end{aligned}$$

Das Vektorfeld ist dann: