

Ungleichungen von Kraft & McMillan

Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

November 4, 2018

Inhalt

Bäume

Ungleichung von Kraft

Ungleichung von McMillan

Motivation

- ▶ Gesehen, dass eindeutig bzw. sofort dekodierbare Codes sehr nützlich sind.
- ▶ Wann bzw. unter welchen Bedingungen existieren diese?
- ▶ Insbesondere: Wortlängen und Größe des Code-Alphabets
- ▶ Ungleichungen setzen diese Aspekte in Relation

Überblick

- ▶ Graphen und Bäume: Wiederholung und Definitionen
- ▶ Zusammenhang Codes und Bäume
- ▶ Ungleichung von Kraft
- ▶ Ungleichung von McMillan
- ▶ Interpretationen / Ausblick

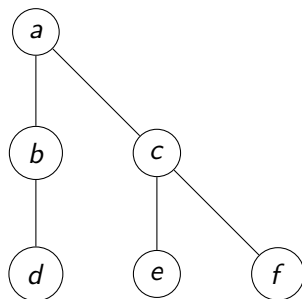
Bäume

Baum $T = (V, E)$.

Knotenmenge $V(T) := V$.

Kantenmenge $E(T) := E$.

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend



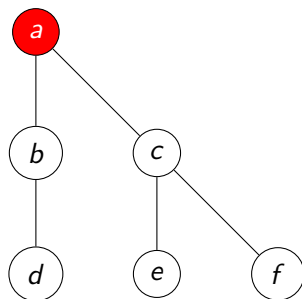
Bäume

Baum $T = (V, E)$.

Knotenmenge $V(T) := V$.

Kantenmenge $E(T) := E$.

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend
- ▶ eindeutige Wurzel $root(T)$



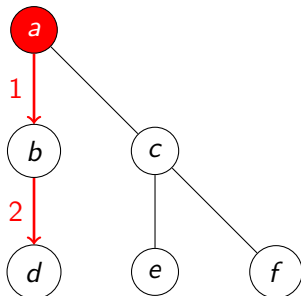
Bäume

Baum $T = (V, E)$.

Knotenmenge $V(T) := V$.

Kantenmenge $E(T) := E$.

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend
- ▶ eindeutige Wurzel $root(T)$
- ▶ Höhe $height(v)$, $v \in V$



$height(d) = 2$

Bäume

Baum $T = (V, E)$.

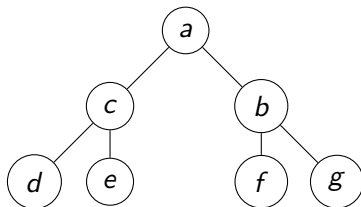
Knotenmenge $V(T) := V$.

Kantenmenge $E(T) := E$.

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend
- ▶ eindeutige Wurzel $root(T)$
- ▶ Höhe $height(v)$, $v \in V$

Nenne T r -är wenn jeder Knoten mit Ausnahme von Blättern genau $r \in \mathbb{N}$ Kinder hat.

2-är bzw. binär



Teilbäume und Ordnung von Knoten

T, T' gewurzelte Bäume.

- ▶ Schreibe $T' \leq T$ wenn T' Teilgraph von T .

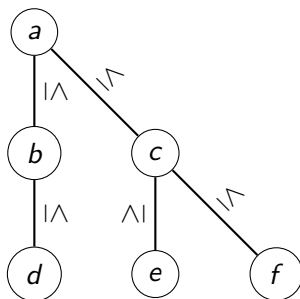
Teilbäume und Ordnung von Knoten

T, T' gewurzelte Bäume.

- ▶ Schreibe $T' \leq T$ wenn T' Teilgraph von T .
- ▶ Schreibe $T' \leq_r T$ wenn $T' \leq T$ und T, T' r -är.

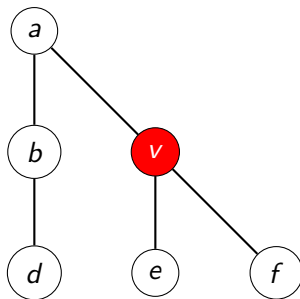
Teilbäume und Ordnung von Knoten

Für $v, v' \in T$ schreiben wir $v' \leq v$, genau dann, wenn der eindeutige Pfad von $\text{root}(T)$ zu v den Knoten v' besucht.
Hier $\text{root}(T) = a$



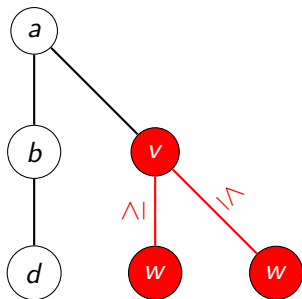
Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $\text{root}(T) \neq v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T)$, $v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".



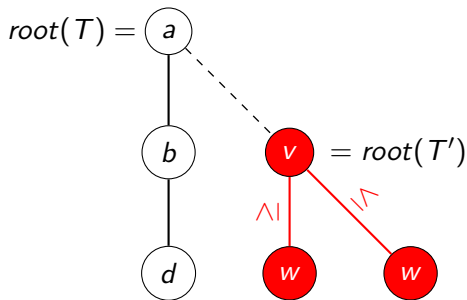
Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $\text{root}(T) \neq v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T)$, $v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".



Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $\text{root}(T) \neq v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T)$, $v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".

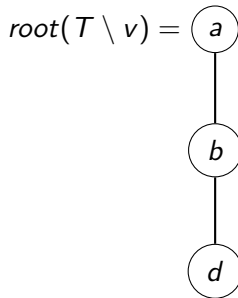


Definiere $T \setminus v := T \setminus T'$, wobei $T' \leq T$ der Teilbaum von T mit Wurzel $v \in V(T) \setminus \{\text{root}(T)\}$ ist.

Insbesondere ist $T \setminus v$ wieder ein gewurzelter Baum.

Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $root(T) \neq v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T)$, $v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".

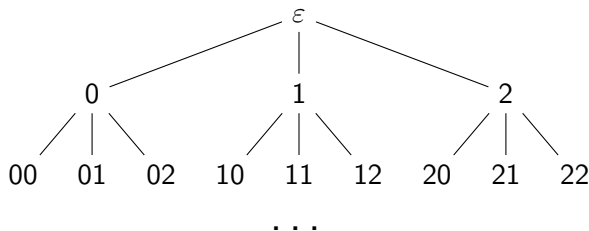


Definiere $T \setminus v := T \setminus T'$, wobei $T' \leq T$ der Teilbaum von T mit Wurzel $v \in V(T) \setminus \{root(T)\}$ ist.

Insbesondere ist $T \setminus v$ wieder ein gewurzelter Baum.

Code als Baum

Sei \mathcal{C} ein Code über dem Code-Alphabet $\{0, 1, 2\}$.
 \mathcal{C} als Teilmenge von $V(T)$, wobei T :



Code als Baum

Seien $h, r \in \mathbb{N}$, $A := [0, r - 1]$ das Code-Alphabet eines r -ären Codes \mathcal{C} mit maximaler Wortlänge $h \in \mathbb{N}$. Dann ist $W := \bigcup_{i \in [0, h]} A^i$ die Menge aller Wörter über A mit maximaler Länge h . Definiere gewurzelten r -ären Baum \mathcal{T}_r^h der Höhe h durch:

$$V(\mathcal{T}_r^h) := \{v_w \mid w \in W\}$$

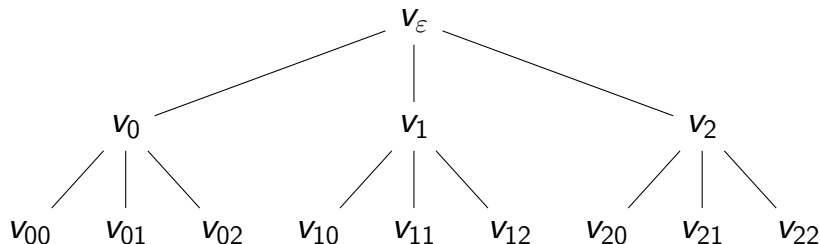
$$E(\mathcal{T}_r^h) := \{(v_w, v_{w'}) \mid w, w' \in W, wx = w', x \in A\}$$

$$\text{root}(\mathcal{T}_r^h) := v_\epsilon$$

Insbesondere \mathcal{T}_r^h eindeutig durch r, h bestimmt.
(Bis auf Bijektionen des Code-Alphabets).

Bemerkungen zu \mathcal{T}_r^h

Betrachte \mathcal{T}_3^2 :

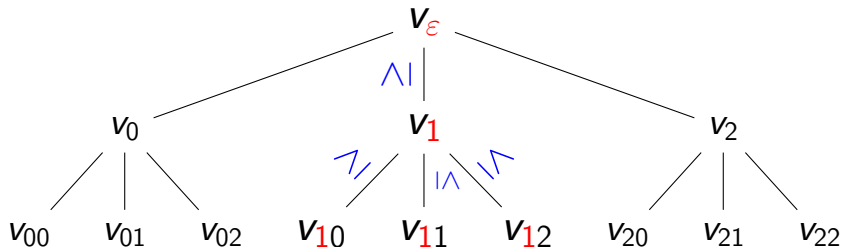


Wir haben:

- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $\text{height}(v_w) = |w|$.

Bemerkungen zu \mathcal{T}_r^h

Betrachte \mathcal{T}_3^2 :



Wir haben:

- ▶ Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $\text{height}(v_w) = |w|$.
- ▶ Für $v_w, v_{w'} \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $v_w \leq v_{w'} \iff w \sqsubseteq w'$.

Inhalt

Bäume

Ungleichung von Kraft

Ungleichung von McMillan

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer sofort dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer sofort dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- ▶ Anzahl Code-Wörter $q > 1$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer sofort dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- ▶ Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- ▶ Wortlängen l aufsteigend sortiert und $l_1 > 0$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer sofort dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- ▶ Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- ▶ Wortlängen l aufsteigend sortiert und $l_1 > 0$
- ▶ Code-Alphabet von \mathcal{C} ist $[0, r - 1]$

Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r_k} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \implies "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

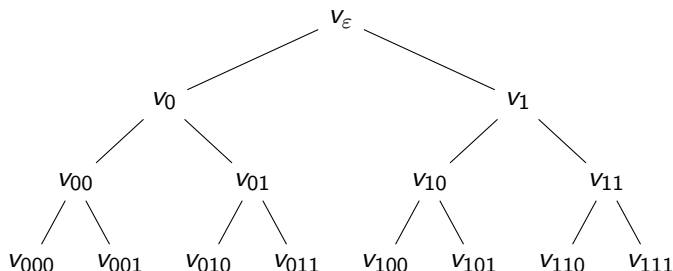
Am Beispiel $q = 3$, $r = 2$, $l = (1, 2, 3)$. Betrachte \mathcal{T}_2^3 :

Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte \mathcal{T}_2^3 :

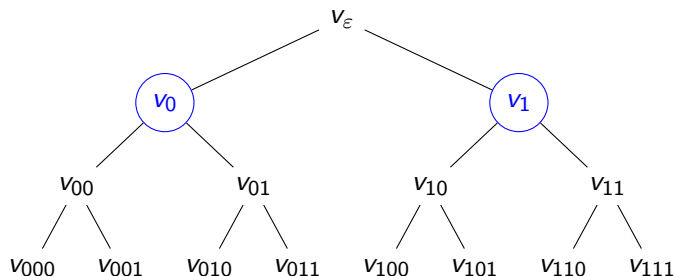


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte \mathcal{T}_2^3 :



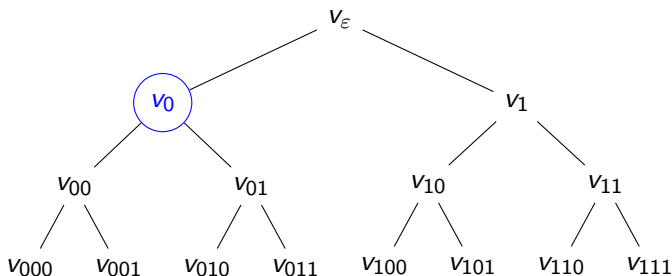
Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte \mathcal{T}_2^3 :

$w_1 = 0$,



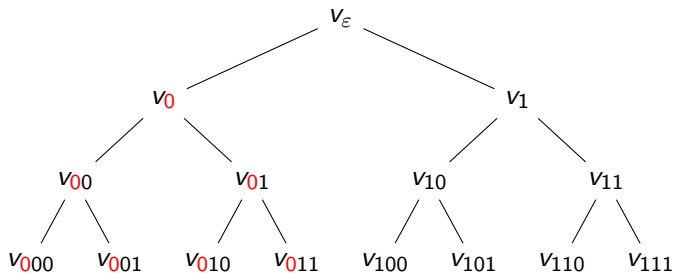
Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte \mathcal{T}_2^3 :

$w_1 = 0$,

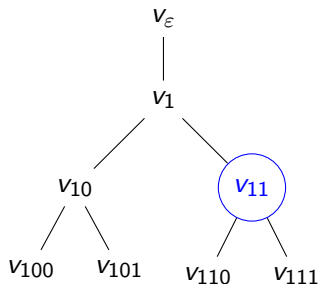


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$:
 $w_1 = 0$, $w_2 = 11$,

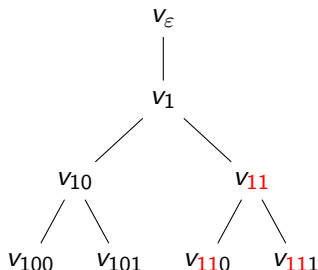


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$:
 $w_1 = 0, w_2 = \textcolor{red}{11}$,

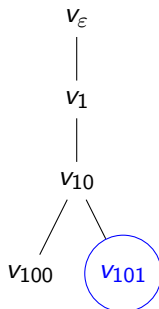


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$:
 $w_1 = 0, w_2 = 11, w_3 = 101$



Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \implies "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

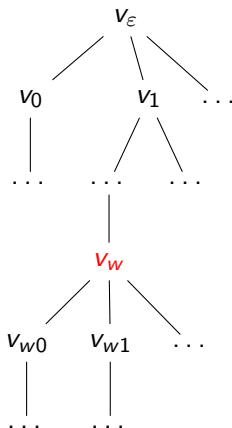
Nach [JJ00]: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. $w_1 = 0, w_2 = 11, w_3 = 101$

- ▶ $q = 3$ Wörter über Alphabet $[0, r - 1] = [0, 1] = \{0, 1\}$.
- ▶ Wortlängen $|w_1| = l_1, |w_2| = l_2, |w_3| = l_3$ eingehalten.
- ▶ Präfixcode $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\} = \{0, 11, 101\}$ konstruiert.

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

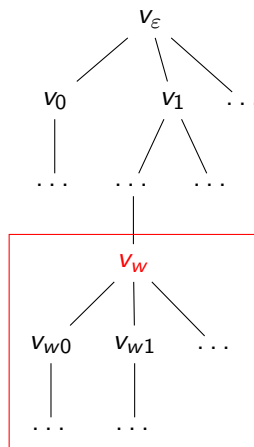


Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

\mathcal{T}_r^h :

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

Setze $h := l_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

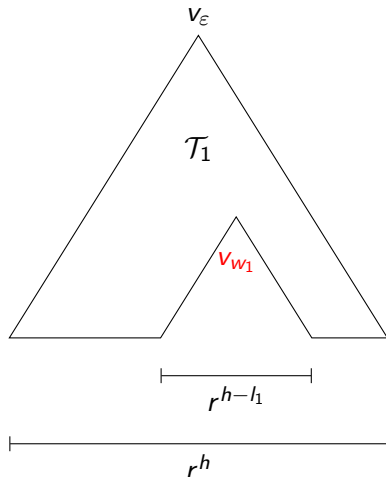


Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

Setze $h := l_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

\mathcal{T}_1 hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.

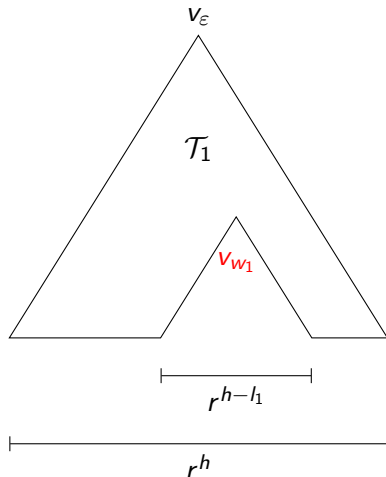


Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

\mathcal{T}_1 hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$
Blätter.

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$



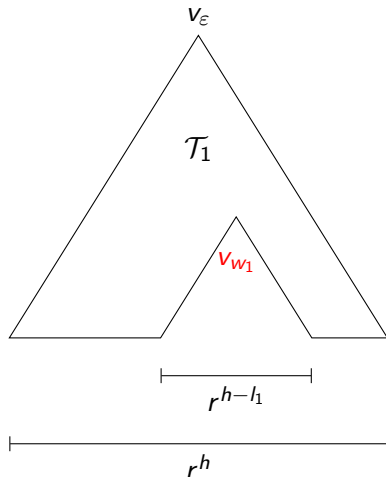
Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

\mathcal{T}_1 hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$
Blätter.

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$



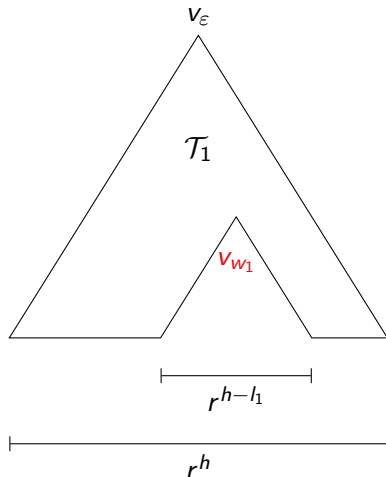
Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

\mathcal{T}_1 hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$
Blätter.

Weiter gilt:

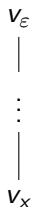
$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right) \geq 0$$



Ungleichung von Kraft: " \implies "

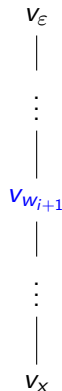
Sei nun $i \in [1, q - 1]$ sodass $\mathcal{C} = \{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = l_j$ ist, und \mathcal{T}_i noch mindestens 1 Blatt v_x hat.



Ungleichung von Kraft: " \implies "

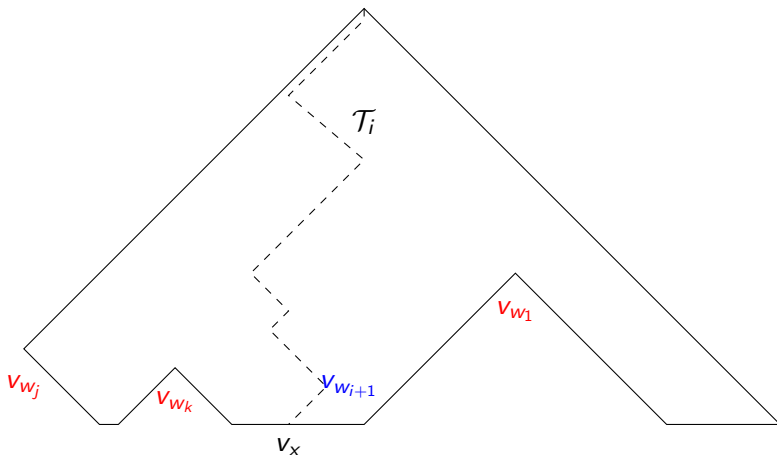
Sei nun $i \in [1, q-1]$ sodass $\mathcal{C} = \{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = l_j$ ist, und \mathcal{T}_i noch mindestens 1 Blatt v_x hat.

- ▶ \mathcal{T}_i zusammenhängend
- ▶ also ex. $v_w \in V(\mathcal{T}_i)$ mit $\text{height}(v_w) = l_{i+1} \leq h$
- ▶ Setze $w_{i+1} := w$.



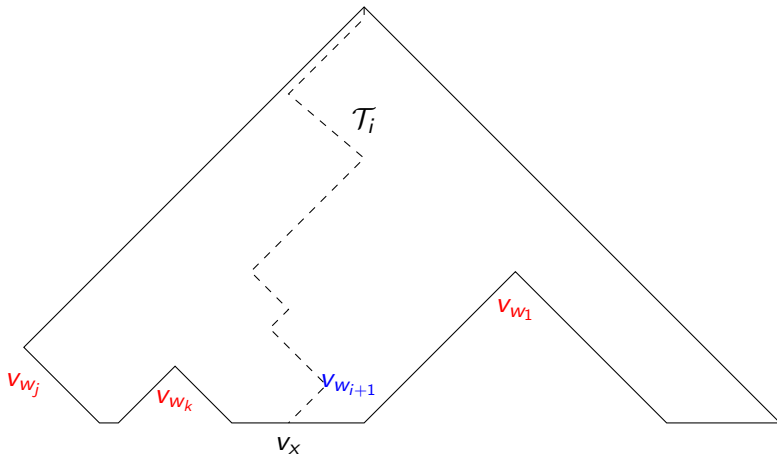
Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Sei $j \in [1, i]$. Wir haben bereits alle Knoten $v_w \geq v_{w_j}$ im Schritt $\mathcal{T}_j := \mathcal{T}_{j-1} \setminus v_{w_j}$ gelöscht. Da wir $v_{w_{i+1}}$ aus \mathcal{T}_i gewählt haben, kann also **nicht** $v_{w_j} \leq v_{w_{i+1}}$ gelten.



Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).



Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.

Dann hat \mathcal{T}_{i+1} immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$$\mathcal{T}_i \text{ hat nach Konstruktion } r^h - \sum_{k=1}^i r^{h-l_k} \text{ Blätter}$$

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.

Dann hat \mathcal{T}_{i+1} immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

\mathcal{T}_{i+1} hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k}$$

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\leq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\leq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.

Dann hat \mathcal{T}_{i+1} immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

\mathcal{T}_{i+1} hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-l_k}$$

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\leq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\leq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.

Dann hat \mathcal{T}_{i+1} immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

\mathcal{T}_{i+1} hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-l_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\leq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\leq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.

Dann hat \mathcal{T}_{i+1} immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

\mathcal{T}_{i+1} hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-l_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right) \geq 0$$

Blätter. Somit können wir einen Präfix-Code \mathcal{C} unter den gegebenen Bedingungen konstruieren. Dieser ist nach [JJ00] auch sofort dekodierbar.

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

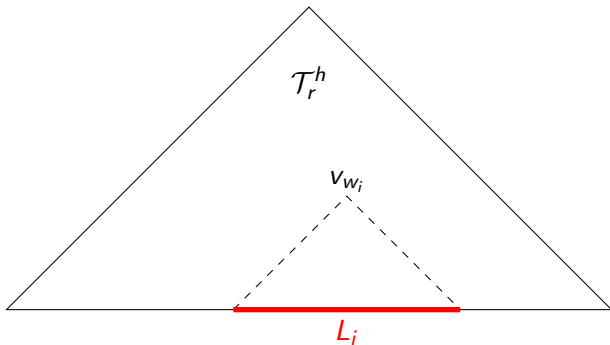
Nun zeigen wir, dass wenn \mathcal{C} sofort dekodierbar, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Nun zeigen wir, dass wenn \mathcal{C} sofort dekodierbar, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.

Betrachte für $i \in [1, q]$ die Menge der Blätter unter v_{w_i} :

$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge \text{height}(v) = h\}$$



Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Sei o.E. $i < j$, $v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j} .

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Sei o.E. $i < j$, $v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j} . Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Sei o.E. $i < j$, $v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j} . Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Sei o.E. $i < j$, $v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j} . Dann gilt:

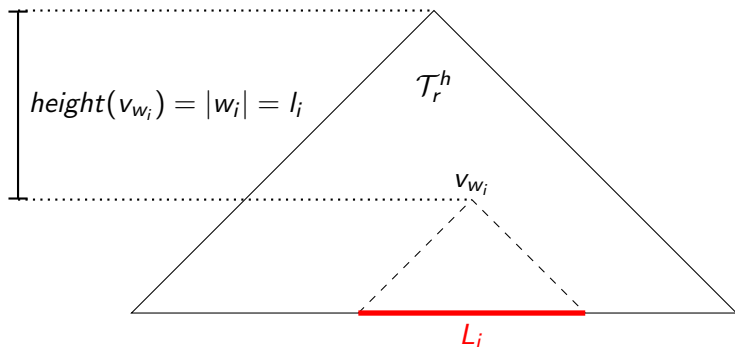
$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w \implies w_i \sqsubseteq w_j$$

Widerpruch, denn $w_i, w_j \in \mathcal{C}$ und \mathcal{C} ist Präfix-Code!

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

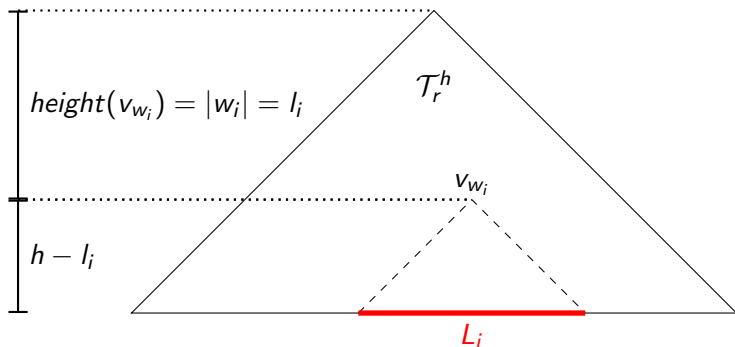
Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

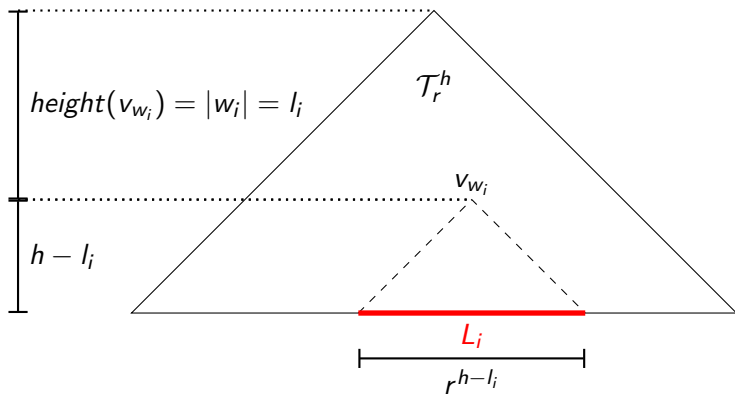
Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right|$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i|$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$
$$\iff \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

Dies war zu zeigen.



Review of Kraft or smth.

Wir haben also gezeigt [...]

- ▶ Nach [JJ00] bekannt, dass sofort dekodierbar \implies eindeutig dekodierbar
- ▶ Jedoch vorraussetzungen für letzteres **nicht** schwächer:

Inhalt

Bäume

Ungleichung von Kraft

Ungleichung von McMillan

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer eindeutig dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \quad (1)$$

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer eindeutig dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \quad (1)$$

Richtung "(1) $\implies \mathcal{C}$ existiert" folgt sofort mit Kraft.

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- ▶ Betrachte K^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- ▶ Betrachte K^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ K^n als Summe abhängig von Wahl von n Wortlängen aus I .

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- ▶ Betrachte K^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ K^n als Summe abhängig von Wahl von n Wortlängen aus I .
- ▶ Fasse Auswahlen (Indextupel) mit selbem Summand zusammen und summiere über möglichen Wertebereich

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- ▶ Betrachte K^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ K^n als Summe abhängig von Wahl von n Wortlängen aus I .
- ▶ Fasse Auswahlen (Indextupel) mit selbem Summand zusammen und summiere über möglichen Wertebereich
- ▶ Nun finde aus Form von K^n konstante obere Schranke

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r_k^l} \leq 1$
- ▶ Betrachte K^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ K^n als Summe abhängig von Wahl von n Wortlängen aus I .
- ▶ Fasse Auswahlen (Indextupel) mit selbem Summand zusammen und summiere über möglichen Wertebereich
- ▶ Nun finde aus Form von K^n konstante obere Schranke
- ▶ Dann muss $K \leq 1$, da sonst K^n für geeignetes n größer als jede Konstante

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Wir müssen also zeigen, dass $K \leq 1$, wobei

$$K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Wir müssen also zeigen, dass $K \leq 1$, wobei

$$K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Wir müssen also zeigen, dass $K \leq 1$, wobei

$$K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{r^{l_{i_k}}}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Wir müssen also zeigen, dass $K \leq 1$, wobei

$$K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{r^{l_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Wir müssen also zeigen, dass $K \leq 1$, wobei

$$K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1, q]^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{r^{l_{i_k}}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}}$$

Werden Summe über Auswahl an Wortlängen noch oft brauchen, definiere:

$$\mathcal{S} : [1, q]^n \rightarrow \mathbb{N}, \quad i \mapsto \sum_{k=1}^n l_{i_k}$$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

$$[1, q]^n = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$i = (3, 1) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_{i_1} + l_{i_2} = l_3 + l_1 = 5 + 1$$

$$i = (2, 3) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_2 + l_3 = 3 + 5$$

$$i = (2, 2) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_2 + l_2 = 3 + 3$$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

$$[1, q]^n = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$i = (3, 1) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_{i_1} + l_{i_2} = l_3 + l_1 = 5 + 1 = 6$$

$$i = (2, 3) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_2 + l_3 = 3 + 5$$

$$i = (2, 2) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_2 + l_2 = 3 + 3 = 6$$

Also auch selber Wert bei unterschiedlichen Indextupeln.

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

- ▶ Summe minimal 3, maximal 15.
- ▶ Fasse Indextupel mit gleicher Summe $j \in [3, 15]$ zusammen

$$N_6 := \mathcal{S}^{-1}(\{\textcolor{red}{6}\}) = \{i \in [1, 3]^2 \mid \mathcal{S}(i) = \textcolor{red}{6}\} = \{ \underbrace{(1, 3)}_{l_1+l_3=\textcolor{red}{6}}, \overbrace{(3, 1)}^{l_3+l_1=\textcolor{red}{6}}, \underbrace{(2, 2)}_{l_2+l_2=\textcolor{red}{6}} \}$$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

- ▶ Summe minimal 3, maximal 15.
- ▶ Fasse Indextupel mit gleicher Summe $j \in [3, 15]$ zusammen

$$N_6 := \mathcal{S}^{-1}(\{6\}) = \{i \in [1, 3]^2 \mid \mathcal{S}(i) = 6\} = \{ \underbrace{(1, 3)}_{l_1+l_3=6}, \overbrace{(3, 1)}^{l_3+l_1=6}, \underbrace{(2, 2)}_{l_2+l_2=6} \}$$

$$N_{\textcolor{red}{j}} := \mathcal{S}^{-1}(\textcolor{red}{j}) = \{i \in [1, q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = \textcolor{red}{j}\}$$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

► Betrachte Alphabet $[0, 1], \mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

► Betrachte Alphabet $[0, 1], \mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$

► Zu $i \in [1, q]^n$ eindeutige Code-Sequenz $\mathcal{W}(i) = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$.

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

► Betrachte Alphabet $[0, 1]$, $\mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$

► Zu $i \in [1, q]^n$ eindeutige Code-Sequenz $\mathcal{W}(i) = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(N_6) &= \{\mathcal{W}(t) \mid t \in N_6\} = \{\mathcal{W}(t) \mid t \in \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}\} \\ &= \{w_1 w_3, w_3 w_1, w_2 w_2\} = \{011111, 111110, 100100\}\end{aligned}$$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

► Betrachte Alphabet $[0, 1]$, $\mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$

► Zu $i \in [1, q]^n$ eindeutige Code-Sequenz $\mathcal{W}(i) = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(N_6) &= \{\mathcal{W}(t) \mid t \in N_6\} = \{\mathcal{W}(t) \mid t \in \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}\} \\ &= \{w_1 w_3, w_3 w_1, w_2 w_2\} = \{011111, 111110, 100100\}\end{aligned}$$

Da N_6 gerade die Indextupel Wortlängensumme 6:

$$\forall i \in N_6 : |\mathcal{W}(i)| = 6 \quad \text{und} \quad \mathcal{W}(N_6) \subseteq \{0, 1\}^6$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1, q]} l_k$, längste $M := \max_{k \in [1, q]} l_k$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1, q]} l_k$, längste $M := \max_{k \in [1, q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel $i \in [1, q]^n$.

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1, q]} l_k$, längste $M := \max_{k \in [1, q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel $i \in [1, q]^n$. Definiere für $j \in [nm, nM]$:

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j) = \{i \in [1, q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = j\}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1, q]} l_k$, längste $M := \max_{k \in [1, q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel $i \in [1, q]^n$. Definiere für $j \in [nm, nM]$:

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j) = \{i \in [1, q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = j\}$$

$$\mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1, q]} l_k$, längste $M := \max_{k \in [1, q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel $i \in [1, q]^n$. Definiere für $j \in [nm, nM]$:

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j) = \{i \in [1, q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = j\}$$

$$\mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

\mathcal{C} eindeutig dekodierbar $\implies \mathcal{W}$ injektiv, da $i \in [1, q]^n$ die eindeutige Kombination von Codewörtern aus \mathcal{C} für $\mathcal{W}(i)$.

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$j \in [nm, nM]$ zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

► \mathcal{W} injektiv $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$j \in [nm, nM]$ zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

- ▶ \mathcal{W} injektiv $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$
- ▶ $|\mathcal{W}(i)| = j$ für $i \in N_j$ nach Konstruktion

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$j \in [nm, nM]$ zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

- ▶ \mathcal{W} injektiv $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$
- ▶ $|\mathcal{W}(i)| = j$ für $i \in N_j$ nach Konstruktion
- ▶ $\mathcal{W}(N_j) \subseteq [0, r-1]^j \implies |\mathcal{W}(N_j)| \leq |[0, r-1]^j|$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$j \in [nm, nM]$ zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

- ▶ \mathcal{W} injektiv $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$
- ▶ $|\mathcal{W}(i)| = j$ für $i \in N_j$ nach Konstruktion
- ▶ $\mathcal{W}(N_j) \subseteq [0, r-1]^j \implies |\mathcal{W}(N_j)| \leq |[0, r-1]^j|$
- ▶ $|N_j| \leq r^j$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Recap:

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

► $|N_j| \leq r^j$ Anzahl der $i \in [1, q]^n$ mit gleichem $\mathcal{S}(i)$.

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

- ▶ $|N_j| \leq r^j$ Anzahl der $i \in [1, q]^n$ mit gleichem $\mathcal{S}(i)$.
- ▶ Fasse zusammen via N_j , summiere über $[nm, nM]$

$$K^n = \sum_{j=nm}^{nM} |N_j| r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{|N_j|}{r^j}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

- ▶ $|N_j| \leq r^j$ Anzahl der $i \in [1, q]^n$ mit gleichem $\mathcal{S}(i)$.
- ▶ Fasse zusammen via N_j , summiere über $[nm, nM]$

$$K^n = \sum_{j=nm}^{nM} |N_j| r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{|N_j|}{r^j} \leq \sum_{j=nm}^{nM} 1 = (M - m)n + 1$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}, \quad K^n \leq (M - m)n + 1$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}, \quad K^n \leq (M - m)n + 1 \implies \frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- ▶ Code \mathcal{C} gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r , Wortlängen l fix.
- ▶ Damit auch m, M, K fix.
- ▶ $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}, \quad K^n \leq (M - m)n + 1 \implies \frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- ▶ Code \mathcal{C} gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r , Wortlängen l fix.
- ▶ Damit auch m, M, K fix.
- ▶ $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
- ▶ Nach Analysis bekannt: nur möglich für $K \leq 1$.

$$\implies \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} = K \leq 1$$



Review of McMillan or smth.

[...]