Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 12

Aufgabe 1

a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h\sin(h)|}{h} = \left\{\begin{array}{ll} \lim\limits_{h\to 0}|\sin(h)| & \text{für } h \geq 0 \\ \\ \lim\limits_{h\to 0} -|\sin(h)| & \text{für } h < 0 \end{array}\right\} = 0$$

Da nun der Grenzwert existiert (da er von beiden Seiten gleich ist), folgt Differenzierbarkeit von f in x_0.

b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-\sin(0)}{h} = \left\{\begin{array}{ll} \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1 & \text{für } h \geq 0 \\ \\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 & \text{für } h < 0 \end{array}\right\}$$

Da nun also der rechtsseitige Grenzwert ungleich dem linksseitigem ist, existiert der Grenzwert nicht. Es ist also g in x_0 nicht differenzierbar.

c)

$$\lim_{h\to 0}\frac{j_n(x_0+h)-j(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{j_n(h)-\sin^n(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{j_n(h)}{h}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin^n(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\sin^{n-1}(h)\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 0\cdot 1 & \text{für } h \geq 0 \\ \\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 & \text{für } h < 0 \end{array}\right\} = 0$$

Da nun der Grenzwert existiert (da er von beiden Seiten gleich ist), folgt Differenzierbarkeit von f in x_0.

Aufgabe 2

a) Es sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

b) Es sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gegeben. Es gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x-x+h}{(x^2+hx)h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x^2+hx} = -\frac{1}{x^2}$$

c) Es sei $n = 1$. Es gilt für gegebenes $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{k_n(x+h) - k_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

Also gilt die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei nun ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben sodass die Behauptung gilt, also $k(x) = x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Es folgt für $n+1$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{k_{n+1}(x+h) - k_{n+1}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{n+1} - x^{n+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} h^k\right) - x^{n+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} h^k}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} h^{k-1} = \lim_{h\to 0} \binom{n+1}{1} x^n h^0 + \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} h^{k-1}$$

$$= (n+1)x^n + \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} 0^{k-1} = (n+1)x^n$$

Der Differenzenquotient existiert dann also auch für k_{n+1} und ist ein Skalar von k_n, welche ebenfalls differenzierbar ist. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion existiert nun also der Differenzenquotient von k_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Mit der geometrischen Summe lässt sich herleiten:

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a-b) a^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k = (a-b) a^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 - \frac{b}{a}}$$

$$= (a-b) a^{n-1} \frac{\left(\frac{a^n - b^n}{a^n}\right)}{\left(\frac{a-b}{a}\right)} = (a-b) a^{n-1} \frac{a(a^n - b^n)}{a^n(a-b)} = a^n - b^n$$

Damit folgt nun für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{x^n - (x+h)^n}{x^n (x+h)^n}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x - (x+h)) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} (x+h)^k}{h x^n (x+h)^n} = \lim_{h\to 0} - \sum_{k=0}^{n-1} x^{-k-1} (x+h)^{k-n}$$

$$= - \sum_{k=0}^{n-1} x^{-(n+1)} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

Also existiert der Differenzenquotient von $j_n(x)$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3

a) Mit partieller Integration (gekz. P) sowie der Gleichung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x &\overset{\mathrm{P}}{=} \cos(x)\sin(x) - \int -\sin(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \cos(x)\sin(x) + \int 1 - \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \cos(x)\sin(x) + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \cos(x)\sin(x) + x - \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
& \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x &&= \cos(x)\sin(x) + x - \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x &&= \cos(x)\sin(x) + x \\
\Longleftrightarrow\quad & \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x &&= \frac{\cos(x)\sin(x) + x}{2}
\end{aligned}$$

Als Probe folgt mit der Produktregel und der oben genannten Gleichung:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\cos(x)\sin(x) + x}{2}\right]' &= \frac{1}{2}[\cos(x)\sin(x)]' + \frac{1}{2}[x]' \\
&= \frac{1}{2}(-\sin(x)\sin(x) + \cos(x)\cos(x)) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1 - \sin^2(x) + \cos^2(x)) \\
&= \cos^2(x)
\end{aligned}$$

Daher ist also $\dfrac{\cos(x)\sin(x) + x}{2}$ eine Stammfunktion von $\cos^2(x)$.

b) Nach IV 2.13 gilt $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Es folgt mit der Substitutionsregel (gekz. S):

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{S}}{=} -2\ln(|\cos(x)|)$$

Als Probe folgt mit der Kettenregel und wieder der Gleichung:

$$[-2\ln(|\cos(x)|)]' = \frac{-2[|\cos(x)|]'}{\cos(x)} = \frac{2\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(2x)}{\cos^2(x)}$$

Damit ist $-2\ln(\cos(x))$ eine Stammfunktion von $\dfrac{\sin(2x)}{\cos^2(x)}$.

c)

$\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{(3e^x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$ Wir substituieren mit $u = 3e^x + 1$, woraus sich auch $e^{2x} = \dfrac{(u-1)^2}{9}$ ergibt.

Weiterhin gilt nun $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = [3e^x+1]' = 3e^x \iff \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{3e^x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{3\frac{u-1}{3}} = \dfrac{\mathrm{d}u}{u-1}$. Wir lösen also:

$$\int \frac{(u-1)^2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^3}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \frac{1}{9}\int \frac{u-1}{\sqrt{u^3}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{9}\left(\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u - \int \frac{1}{\sqrt{u^3}}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{9}\left(2\sqrt{u} + \frac{2}{\sqrt{u}}\right)$$

Nun resubstituieren wir $u = 3e^x + 1$ und erhalten damit:

$$\int \frac{e^2x}{\sqrt{(3e^x+1)^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left(2\sqrt{3e^x+1} + \frac{2}{\sqrt{3e^x+1}}\right)$$

$$= \frac{6e^x+4}{9\sqrt{3e^x+1}}$$

Als Probe folgt mit der Kettenregel:

$$\left[\frac{6e^x+4}{9\sqrt{3e^x+1}}\right]' = \frac{6}{9}\left[\frac{e^x}{\sqrt{3e^x+1}}\right]' + \frac{4}{9}\left[\frac{1}{\sqrt{3e^x+1}}\right]'$$

$$= \frac{6}{9}\left(\frac{[e^x]'\sqrt{3e^x+1} - e^x\left[\sqrt{3e^x+1}\right]'}{\left(\sqrt{3e^x+1}\right)^2}\right) + \frac{4}{9}\left(-\frac{[3e^x+1]'}{2\sqrt{(3e^x+1)^3}}\right)$$

$$= \frac{6}{9}\left(\frac{e^x\sqrt{3e^x+1} - \dfrac{3e^{2x}}{2\sqrt{3e^x+1}}}{3e^x+1}\right) + \frac{4}{9}\left(-\frac{3e^x}{2\sqrt{(3e^x+1)^3}}\right)$$

$$= \frac{6}{9}\left(\frac{e^x}{\sqrt{3e^x+1}} - \frac{3e^{2x}}{2\sqrt{(3e^x+1)^3}}\right) + \frac{4}{9}\left(-\frac{3e^x}{2\sqrt{(3e^x+1)^3}}\right)$$

$$= \frac{6e^x}{9\sqrt{3e^x+1}} - \frac{18e^{2x}}{18\sqrt{(3e^x+1)^3}} - \frac{12e^x}{18\sqrt{(3e^x+1)^3}}$$

$$= \frac{2e^x}{3\sqrt{3e^x+1}} - \frac{3e^{2x}+2e^x}{3\sqrt{(3e^x+1)^3}}$$

$$= \frac{2e^x(3e^x+1) - 3e^{2x} - 2e^x}{3\sqrt{(3e^x+1)^3}}$$

$$= \frac{e^{2x}}{3\sqrt{(3e^x+1)^3}}$$

Damit ist $\dfrac{6e^x+4}{9\sqrt{3e^x+1}}$ eine Stammfunktion von $\dfrac{e^{2x}}{3\sqrt{(3e^x+1)^3}}$.

Aufgabe 4

a)

$$\int \frac{\sqrt{3}}{5x} + e^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{5}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int e^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}\ln(|x|)}{5} + \frac{e^{4x}}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Wir machen die Probe durch differenzieren:

$$\left[\frac{\sqrt{3}\ln(|x|)}{5} + \frac{e^{4x}}{4} + C\right]' = \frac{\sqrt{3}}{5}[\ln(|x|)]' + e^{4x} = \frac{\sqrt{3}}{5x} + e^{4x}$$

b)

$$\int \frac{3}{7}x^8 + \frac{25}{3}x^4 - 2x^3\,\mathrm{d}x = \frac{3}{7}\int x^3\,\mathrm{d}x + \frac{25}{3}\int x^4\,\mathrm{d}x - 2\int x^3\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{21}x^9 + \frac{5}{3}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Wir machen die Probe durch differenzieren:

$$\left[\frac{3}{21}x^9 + \frac{5}{3}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + C\right]' = \frac{3}{7}x^8 + \frac{25}{3}x^4 - 2x^3$$

c)

$$\int \cos(3x)+7x^4-\frac{4}{x}\,\mathrm{d}x = \int \cos(3x)\,\mathrm{d}x+7\int x^4\,\mathrm{d}x-4\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\,\mathrm{d}x+\frac{7}{5}x^5-4\ln(|x|)$$
$$= \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{7}{5}x^5 - 4\ln(|x|) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Wir machen die Probe durch differenzieren:

$$\left[\frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{7}{5}x^5 - 4\ln(|x|) + C\right]' = \cos(3x) + 7x^4 - \frac{4}{x}$$