

# Ungleichungen von Kraft & McMillan

Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

November 4, 2018

# Inhalt

## Bäume

Ungleichung von Kraft

Ungleichung von McMillan

# Motivation

- ▶ Gesehen, dass eindeutig bzw. sofort dekodierbare Codes sehr nützlich sind.
- ▶ Wann bzw. unter welchen Bedingungen existieren diese?
- ▶ Insbesondere: Wortlängen und Größe des Code-Alphabets
- ▶ Ungleichungen setzen diese Aspekte in Relation

# Überblick

- ▶ Graphen und Bäume: Wiederholung und Definitionen
- ▶ Zusammenhang Codes und Bäume
- ▶ Ungleichung von Kraft
- ▶ Ungleichung von McMillan
- ▶ Interpretationen / Ausblick

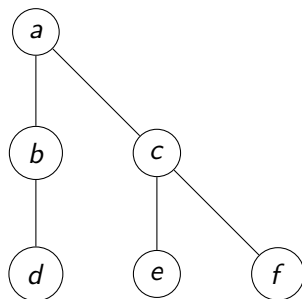
# Bäume

Baum  $T = (V, E)$ .

Knotenmenge  $V(T) := V$ .

Kantenmenge  $E(T) := E$ .

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend



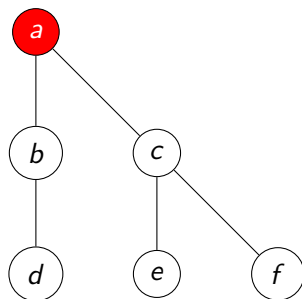
# Bäume

Baum  $T = (V, E)$ .

Knotenmenge  $V(T) := V$ .

Kantenmenge  $E(T) := E$ .

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend
- ▶ eindeutige Wurzel  $root(T)$



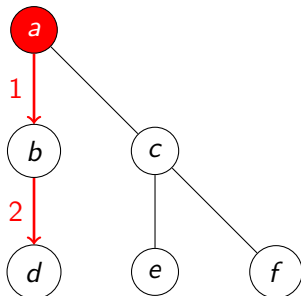
# Bäume

Baum  $T = (V, E)$ .

Knotenmenge  $V(T) := V$ .

Kantenmenge  $E(T) := E$ .

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend
- ▶ eindeutige Wurzel  $root(T)$
- ▶ Höhe  $height(v)$ ,  $v \in V$



$height(d) = 2$

# Bäume

Baum  $T = (V, E)$ .

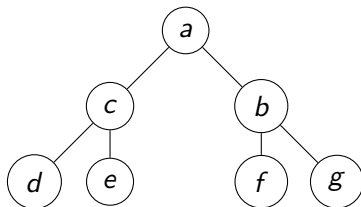
Knotenmenge  $V(T) := V$ .

Kantenmenge  $E(T) := E$ .

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend
- ▶ eindeutige Wurzel  $root(T)$
- ▶ Höhe  $height(v), v \in V$

Nenne  $T$   $r$ -är wenn jeder Knoten mit Ausnahme von Blättern genau  $r \in \mathbb{N}$  Kinder hat.

2-är bzw. binär





# Teilbäume und Ordnung von Knoten

$T, T'$  gewurzelte Bäume.

- ▶ Schreibe  $T' \leq T$  wenn  $T'$  Teilgraph von  $T$ .

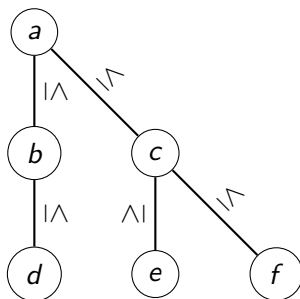
# Teilbäume und Ordnung von Knoten

$T, T'$  gewurzelte Bäume.

- ▶ Schreibe  $T' \leq T$  wenn  $T'$  Teilgraph von  $T$ .
- ▶ Schreibe  $T' \leq_r T$  wenn  $T' \leq T$  und  $T, T'$   $r$ -är.

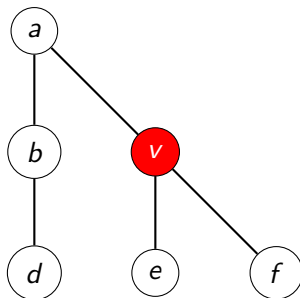
# Teilbäume und Ordnung von Knoten

Für  $v, v' \in T$  schreiben wir  $v' \leq v$ , genau dann, wenn der eindeutige Pfad von  $\text{root}(T)$  zu  $v$  den Knoten  $v'$  besucht.  
Hier  $\text{root}(T) = a$



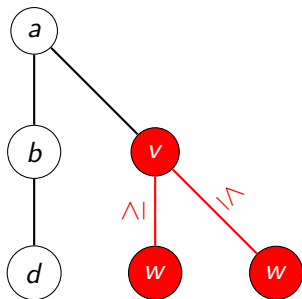
## Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei  $\text{root}(T) \neq v \in V(T)$ . Wir wollen  $v$  und seine "Nachfolger"  $w \in V(T)$ ,  $v \leq w$  von  $T$  inklusive Kanten "ausschneiden".



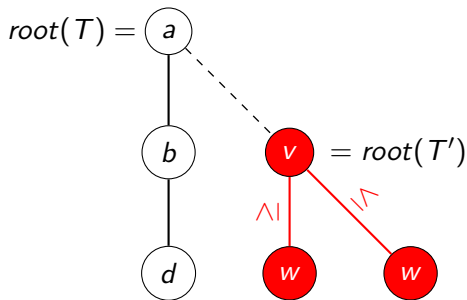
## Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei  $\text{root}(T) \neq v \in V(T)$ . Wir wollen  $v$  und seine "Nachfolger"  $w \in V(T)$ ,  $v \leq w$  von  $T$  inklusive Kanten "ausschneiden".



## Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei  $\text{root}(T) \neq v \in V(T)$ . Wir wollen  $v$  und seine "Nachfolger"  $w \in V(T)$ ,  $v \leq w$  von  $T$  inklusive Kanten "ausschneiden".

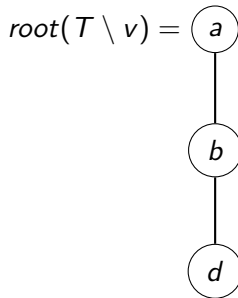


Definiere  $T \setminus v := T \setminus T'$ , wobei  $T' \leq T$  der Teilbaum von  $T$  mit Wurzel  $v \in V(T) \setminus \{\text{root}(T)\}$  ist.

Insbesondere ist  $T \setminus v$  wieder ein gewurzelter Baum.

## Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei  $root(T) \neq v \in V(T)$ . Wir wollen  $v$  und seine "Nachfolger"  $w \in V(T)$ ,  $v \leq w$  von  $T$  inklusive Kanten "ausschneiden".

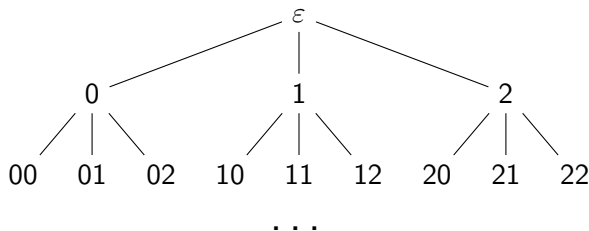


Definiere  $T \setminus v := T \setminus T'$ , wobei  $T' \leq T$  der Teilbaum von  $T$  mit Wurzel  $v \in V(T) \setminus \{root(T)\}$  ist.

Insbesondere ist  $T \setminus v$  wieder ein gewurzelter Baum.

# Code als Baum

Sei  $\mathcal{C}$  ein Code über dem Code-Alphabet  $\{0, 1, 2\}$ .  
 $\mathcal{C}$  als Teilmenge von  $V(T)$ , wobei  $T$ :





## Code als Baum

Seien  $h, r \in \mathbb{N}$ ,  $A := [0, r - 1]$  das Code-Alphabet eines  $r$ -ären Codes  $\mathcal{C}$  mit maximaler Wortlänge  $h \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $W := \bigcup_{i \in [0, h]} A^i$  die Menge aller Wörter über  $A$  mit maximaler Länge  $h$ . Definiere gewurzelten  $r$ -ären Baum  $\mathcal{T}_r^h$  der Höhe  $h$  durch:

$$V(\mathcal{T}_r^h) := \{v_w \mid w \in W\}$$

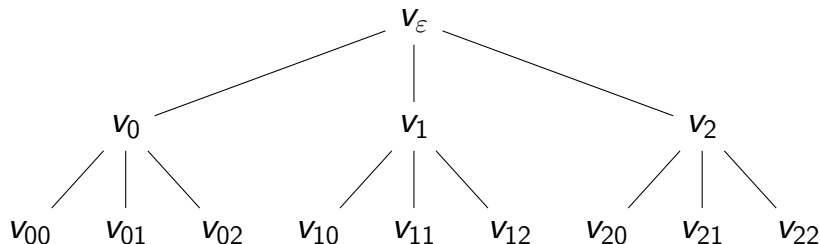
$$E(\mathcal{T}_r^h) := \{(v_w, v_{w'}) \mid w, w' \in W, wx = w', x \in A\}$$

$$\text{root}(\mathcal{T}_r^h) := v_\epsilon$$

Insbesondere  $\mathcal{T}_r^h$  eindeutig durch  $r, h$  bestimmt.  
(Bis auf Bijektionen des Code-Alphabets).

## Bemerkungen zu $\mathcal{T}_r^h$

Betrachte  $\mathcal{T}_3^2$ :

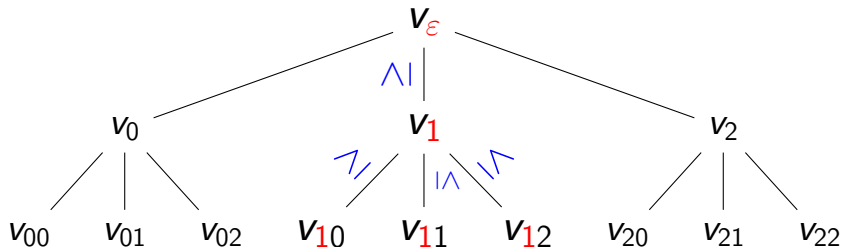


Wir haben:

- Für  $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$  gilt  $\text{height}(v_w) = |w|$ .

## Bemerkungen zu $\mathcal{T}_r^h$

Betrachte  $\mathcal{T}_3^2$ :



Wir haben:

- ▶ Für  $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$  gilt  $\text{height}(v_w) = |w|$ .
- ▶ Für  $v_w, v_{w'} \in V(\mathcal{T}_r^h)$  gilt  $v_w \leq v_{w'} \iff w \sqsubseteq w'$ .

# Inhalt

Bäume

**Ungleichung von Kraft**

Ungleichung von McMillan

# Ungleichung von Kraft

Seien  $q, r \in \mathbb{N}$ ,  $l \in \mathbb{N}^q$ . Dann existiert ein  $r$ -ärer sofort dekodierbarer Code  $\mathcal{C}$  mit Wortlängen  $l$  genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

# Ungleichung von Kraft

Seien  $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$ . Dann existiert ein  $r$ -ärer sofort dekodierbarer Code  $\mathcal{C}$  mit Wortlängen  $l$  genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter  $q > 1$

# Ungleichung von Kraft

Seien  $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$ . Dann existiert ein  $r$ -ärer sofort dekodierbarer Code  $\mathcal{C}$  mit Wortlängen  $l$  genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- ▶ Anzahl Code-Wörter  $q > 1$
- ▶ Wortlängen  $l$  aufsteigend sortiert und  $l_1 > 0$

# Ungleichung von Kraft

Seien  $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$ . Dann existiert ein  $r$ -ärer sofort dekodierbarer Code  $\mathcal{C}$  mit Wortlängen  $l$  genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- ▶ Anzahl Code-Wörter  $q > 1$
- ▶ Wortlängen  $l$  aufsteigend sortiert und  $l_1 > 0$
- ▶ Code-Alphabet von  $\mathcal{C}$  ist  $[0, r - 1]$



## Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Rightarrow$ "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r_k} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$  existiert".

## Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\implies$ "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$  existiert".

Nach [JJ00]:  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar  $\iff \mathcal{C}$  Präfixcode.

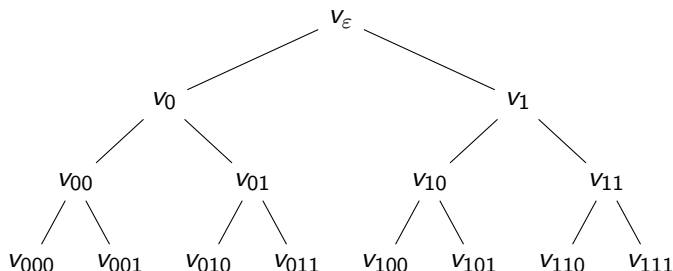
Am Beispiel  $q = 3$ ,  $r = 2$ ,  $l = (1, 2, 3)$ . Betrachte  $\mathcal{T}_2^3$  :

## Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Rightarrow$ "

Richtung "  $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$  existiert".

Nach [JJ00]:  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar  $\iff \mathcal{C}$  Präfixcode.

Am Beispiel  $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$ . Betrachte  $\mathcal{T}_2^3$  :

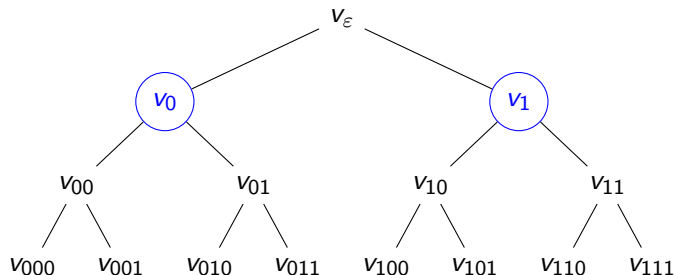


## Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Rightarrow$ "

Richtung "  $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$  existiert".

Nach [JJ00]:  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar  $\iff \mathcal{C}$  Präfixcode.

Am Beispiel  $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$ . Betrachte  $\mathcal{T}_2^3$  :



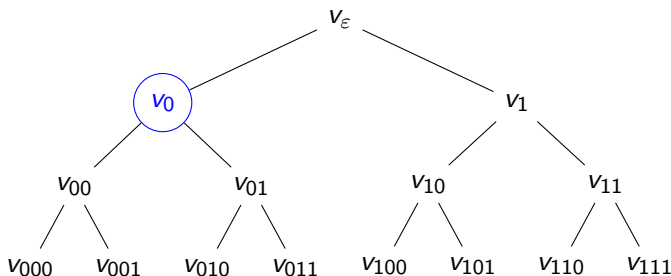
## Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Rightarrow$ "

Richtung "  $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$  existiert".

Nach [JJ00]:  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar  $\iff \mathcal{C}$  Präfixcode.

Am Beispiel  $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$ . Betrachte  $\mathcal{T}_2^3$  :

$w_1 = 0$ ,



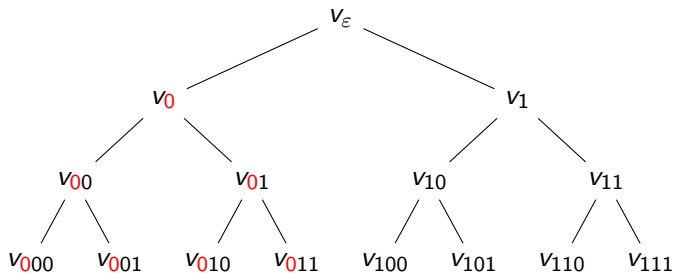
## Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Rightarrow$ "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$  existiert".

Nach [JJ00]:  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar  $\iff \mathcal{C}$  Präfixcode.

Am Beispiel  $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$ . Betrachte  $\mathcal{T}_2^3$  :

$w_1 = 0$ ,

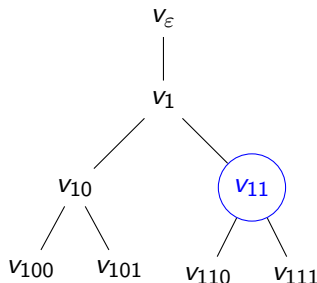


## Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Rightarrow$ "

Richtung "  $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$  existiert".

Nach [JJ00]:  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar  $\iff \mathcal{C}$  Präfixcode.

Am Beispiel  $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$ . Betrachte  $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$ :  
 $w_1 = 0$ ,  $w_2 = 11$ ,

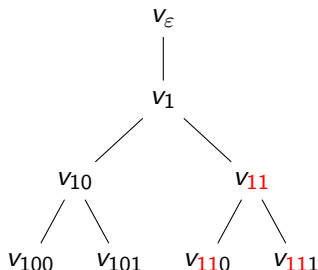


## Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Rightarrow$ "

Richtung "  $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$  existiert".

Nach [JJ00]:  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar  $\iff \mathcal{C}$  Präfixcode.

Am Beispiel  $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$ . Betrachte  $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$ :  
 $w_1 = 0, w_2 = \textcolor{red}{11}$ ,





## Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\implies$ "

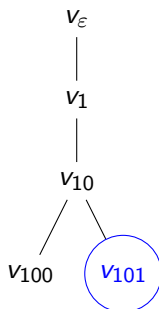
Richtung "  $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$  existiert".

Nach [JJ00]:  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar  $\iff \mathcal{C}$  Präfixcode.

Am Beispiel  $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$ . Betrachte

$(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$ :

$w_1 = 0, w_2 = 11, w_3 = 101$



## Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\implies$ "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$  existiert".

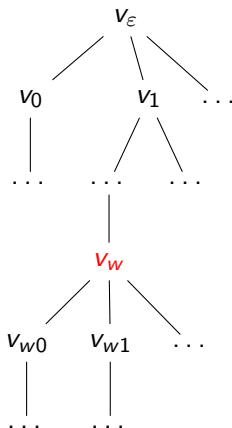
Nach [JJ00]:  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar  $\iff \mathcal{C}$  Präfixcode.

Am Beispiel  $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$ .  $w_1 = 0, w_2 = 11, w_3 = 101$

- ▶  $q = 3$  Wörter über Alphabet  $[0, r - 1] = [0, 1] = \{0, 1\}$ .
- ▶ Wortlängen  $|w_1| = l_1, |w_2| = l_2, |w_3| = l_3$  eingehalten.
- ▶ Präfixcode  $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\} = \{0, 11, 101\}$  konstruiert.

# Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

Sei also  $i = 1$ . Wähle Knoten  $v_w$  der Höhe  $l_1 > 0$  beliebig und setze  $w_i = w_1 := w$ .

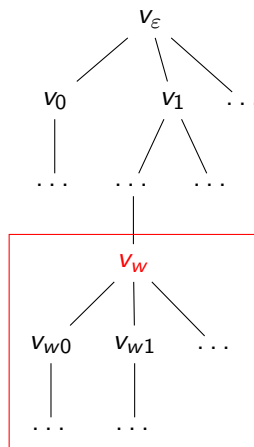


# Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

$\mathcal{T}_r^h$ :

Sei also  $i = 1$ . Wähle Knoten  $v_w$  der Höhe  $l_1 > 0$  beliebig und setze  $w_i = w_1 := w$ .

Setze  $h := l_q$  (max. Wortlänge) und  $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$ ,  $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$ .

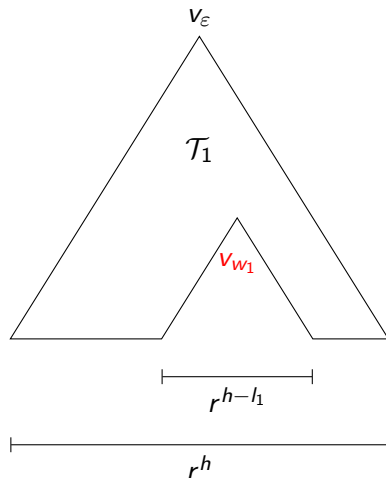


# Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

Sei also  $i = 1$ . Wähle Knoten  $v_w$  der Höhe  $l_1 > 0$  beliebig und setze  $w_i = w_1 := w$ .

Setze  $h := l_q$  (max. Wortlänge) und  $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$ ,  $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$ .

$\mathcal{T}_1$  hat dann noch  $r^h - r^{h-l_1}$  Blätter.

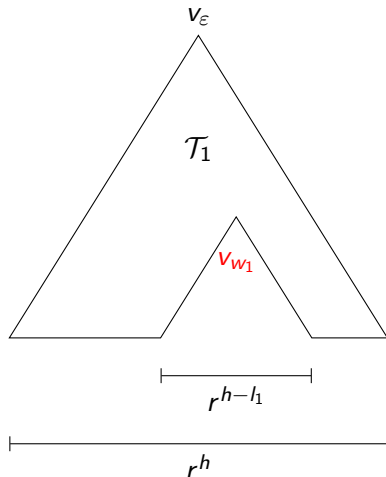


## Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$  hat dann noch  $r^h - r^{h-l_1}$   
Blätter.

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left( 1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$



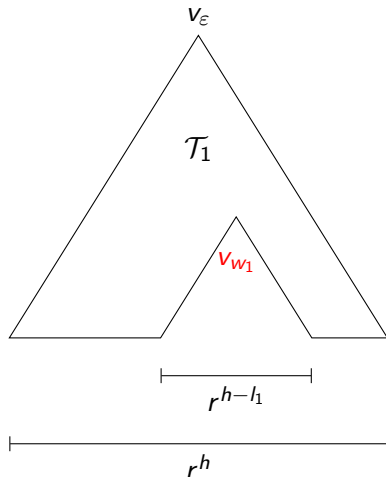
## Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$  hat dann noch  $r^h - r^{h-l_1}$   
Blätter.

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left( 1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$

$$> r^h \left( 1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$



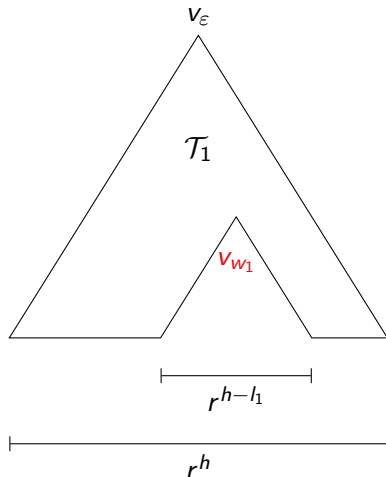
## Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$  hat dann noch  $r^h - r^{h-l_1}$   
Blätter.

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left( 1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$

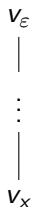
$$> r^h \left( 1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right) \geq 0$$





## Ungleichung von Kraft: " $\implies$ "

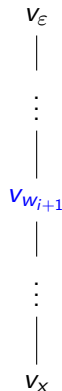
Sei nun  $i \in [1, q - 1]$  sodass  $\mathcal{C} = \{w_j \mid j \in [1, i]\}$  ein Präfix-Code mit  $|w_j| = l_j$  ist, und  $\mathcal{T}_i$  noch mindestens 1 Blatt  $v_x$  hat.



## Ungleichung von Kraft: " $\implies$ "

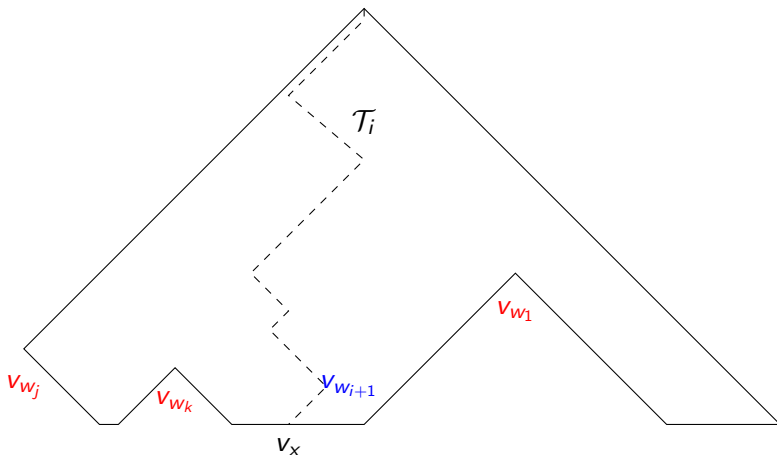
Sei nun  $i \in [1, q-1]$  sodass  $\mathcal{C} = \{w_j \mid j \in [1, i]\}$  ein Präfix-Code mit  $|w_j| = l_j$  ist, und  $\mathcal{T}_i$  noch mindestens 1 Blatt  $v_x$  hat.

- ▶  $\mathcal{T}_i$  zusammenhängend
- ▶ also ex.  $v_w \in V(\mathcal{T}_i)$  mit  $\text{height}(v_w) = l_{i+1} \leq h$
- ▶ Setze  $w_{i+1} := w$ .



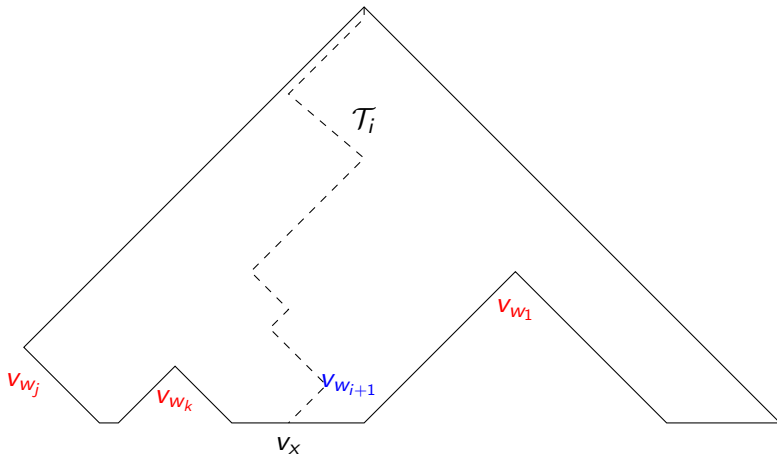
## Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

Sei  $j \in [1, i]$ . Wir haben bereits alle Knoten  $v_w \geq v_{w_j}$  im Schritt  $\mathcal{T}_j := \mathcal{T}_{j-1} \setminus v_{w_j}$  gelöscht. Da wir  $v_{w_{i+1}}$  aus  $\mathcal{T}_i$  gewählt haben, kann also **nicht**  $v_{w_j} \leq v_{w_{i+1}}$  gelten.



## Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

Folglich haben wir auch  $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$  für  $j \in [1, i]$ .  $\mathcal{C}$  bleibt also durch Wahl von  $w_{i+1}$  ein Präfix-Code ( $l_j \leq l_{i+1}$ , also  $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$ ).



## Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

Folglich haben wir auch  $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$  für  $j \in [1, i]$ .  $\mathcal{C}$  bleibt also durch Wahl von  $w_{i+1}$  ein Präfix-Code ( $l_j \leq l_{i+1}$ , also  $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$ ).

Wenn nun  $i + 1 = q$  war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort  $w_q$  soeben  $\mathcal{C}$  hinzugefügt haben.

## Ungleichung von Kraft: " $\implies$ "

Folglich haben wir auch  $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$  für  $j \in [1, i]$ .  $\mathcal{C}$  bleibt also durch Wahl von  $w_{i+1}$  ein Präfix-Code ( $l_j \leq l_{i+1}$ , also  $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$ ).

Wenn nun  $i + 1 = q$  war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort  $w_q$  soeben  $\mathcal{C}$  hinzugefügt haben.

Falls hingegen  $i + 1 < q$ , so definiere  $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$ .

Dann hat  $\mathcal{T}_{i+1}$  immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$$\mathcal{T}_i \text{ hat nach Konstruktion } r^h - \sum_{k=1}^i r^{h-l_k} \text{ Blätter}$$

## Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

Folglich haben wir auch  $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$  für  $j \in [1, i]$ .  $\mathcal{C}$  bleibt also durch Wahl von  $w_{i+1}$  ein Präfix-Code ( $l_j \leq l_{i+1}$ , also  $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$ ).

Wenn nun  $i + 1 = q$  war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort  $w_q$  soeben  $\mathcal{C}$  hinzugefügt haben.

Falls hingegen  $i + 1 < q$ , so definiere  $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$ .

Dann hat  $\mathcal{T}_{i+1}$  immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$\mathcal{T}_{i+1}$  hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k}$$

## Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

Folglich haben wir auch  $w_j \not\leq w_{i+1}$  für  $j \in [1, i]$ .  $\mathcal{C}$  bleibt also durch Wahl von  $w_{i+1}$  ein Präfix-Code ( $l_j \leq l_{i+1}$ , also  $w_{i+1} \not\leq w_j$ ).

Wenn nun  $i + 1 = q$  war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort  $w_q$  soeben  $\mathcal{C}$  hinzugefügt haben.

Falls hingegen  $i + 1 < q$ , so definiere  $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$ .

Dann hat  $\mathcal{T}_{i+1}$  immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$\mathcal{T}_{i+1}$  hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-l_k}$$



## Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

Folglich haben wir auch  $w_j \not\leq w_{i+1}$  für  $j \in [1, i]$ .  $\mathcal{C}$  bleibt also durch Wahl von  $w_{i+1}$  ein Präfix-Code ( $l_j \leq l_{i+1}$ , also  $w_{i+1} \not\leq w_j$ ).

Wenn nun  $i + 1 = q$  war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort  $w_q$  soeben  $\mathcal{C}$  hinzugefügt haben.

Falls hingegen  $i + 1 < q$ , so definiere  $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$ .

Dann hat  $\mathcal{T}_{i+1}$  immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$\mathcal{T}_{i+1}$  hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-l_k} = r^h \left( 1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$

## Ungleichung von Kraft: " $\Rightarrow$ "

Folglich haben wir auch  $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$  für  $j \in [1, i]$ .  $\mathcal{C}$  bleibt also durch Wahl von  $w_{i+1}$  ein Präfix-Code ( $l_j \leq l_{i+1}$ , also  $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$ ).

Wenn nun  $i + 1 = q$  war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort  $w_q$  soeben  $\mathcal{C}$  hinzugefügt haben.

Falls hingegen  $i + 1 < q$ , so definiere  $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$ .

Dann hat  $\mathcal{T}_{i+1}$  immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$\mathcal{T}_{i+1}$  hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-l_k} = r^h \left( 1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right) \geq 0$$

Blätter. Somit können wir einen Präfix-Code  $\mathcal{C}$  unter den gegebenen Bedingungen konstruieren. Dieser ist nach [JJ00] auch sofort dekodierbar.

## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

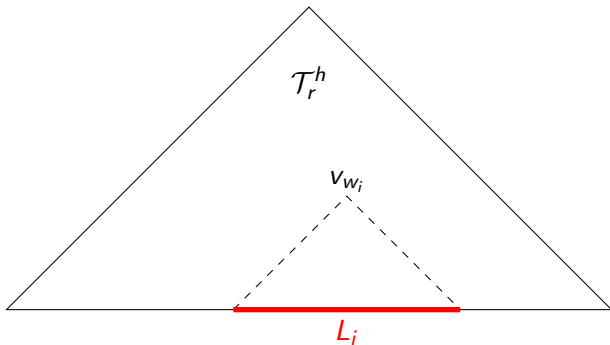
Nun zeigen wir, dass wenn  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.

## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Nun zeigen wir, dass wenn  $\mathcal{C}$  sofort dekodierbar, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.

Betrachte für  $i \in [1, q]$  die Menge der Blätter unter  $v_{w_i}$ :

$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge \text{height}(v) = h\}$$



## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

Sei o.E.  $i < j$ ,  $v_w \in L_i \cap L_j$ , also  $v_w$  gleichzeitig Blatt unter  $v_{w_i}$  und  $v_{w_j}$ .

## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

Sei o.E.  $i < j$ ,  $v_w \in L_i \cap L_j$ , also  $v_w$  gleichzeitig Blatt unter  $v_{w_i}$  und  $v_{w_j}$ . Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w$$

## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

Sei o.E.  $i < j$ ,  $v_w \in L_i \cap L_j$ , also  $v_w$  gleichzeitig Blatt unter  $v_{w_i}$  und  $v_{w_j}$ . Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w$$



## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

Sei o.E.  $i < j$ ,  $v_w \in L_i \cap L_j$ , also  $v_w$  gleichzeitig Blatt unter  $v_{w_i}$  und  $v_{w_j}$ . Dann gilt:

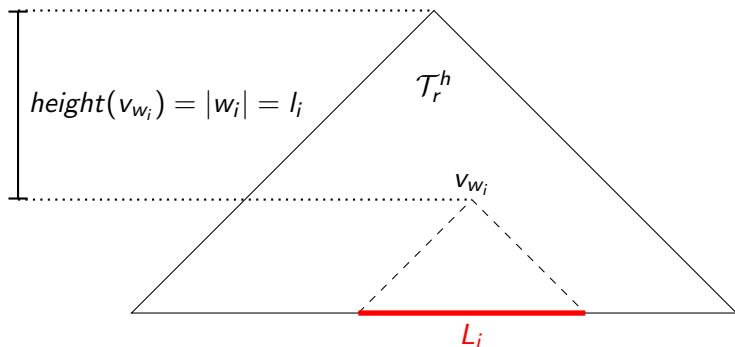
$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w \implies w_i \sqsubseteq w_j$$

Widerpruch, denn  $w_i, w_j \in \mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}$  ist Präfix-Code!

## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

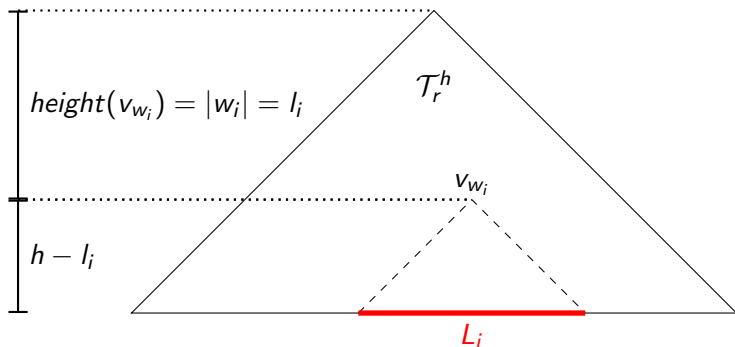
Wir wissen weiter, dass  $\mathcal{T}_r^h$  nur  $r^h$  Blätter hat, und  $|L_i| = r^{h-l_i}$ .



## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

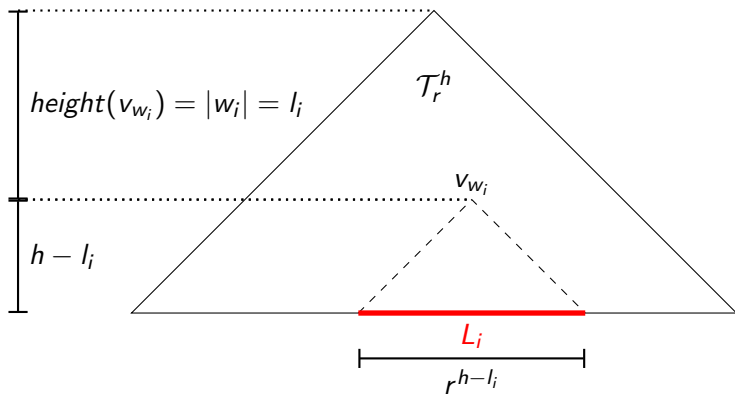
Wir wissen weiter, dass  $\mathcal{T}_r^h$  nur  $r^h$  Blätter hat, und  $|L_i| = r^{h-l_i}$ .



## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

Wir wissen weiter, dass  $\mathcal{T}_r^h$  nur  $r^h$  Blätter hat, und  $|L_i| = r^{h-l_i}$ .



## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

Wir wissen weiter, dass  $\mathcal{T}_r^h$  nur  $r^h$  Blätter hat, und  $|L_i| = r^{h-l_i}$ .

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right|$$

## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

Wir wissen weiter, dass  $\mathcal{T}_r^h$  nur  $r^h$  Blätter hat, und  $|L_i| = r^{h-l_i}$ .

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i|$$

## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

Wir wissen weiter, dass  $\mathcal{T}_r^h$  nur  $r^h$  Blätter hat, und  $|L_i| = r^{h-l_i}$ .

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

Wir wissen weiter, dass  $\mathcal{T}_r^h$  nur  $r^h$  Blätter hat, und  $|L_i| = r^{h-l_i}$ .

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$



## Ungleichung von Kraft: " $\Leftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für  $i, j$  mit  $i \neq j$  auch  $L_i \cap L_j = \emptyset$  gelten muss

Wir wissen weiter, dass  $\mathcal{T}_r^h$  nur  $r^h$  Blätter hat, und  $|L_i| = r^{h-l_i}$ .

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$
$$\iff \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

Dies war zu zeigen.



## Review of Kraft or smth.

Wir haben also gezeigt [...]

- ▶ Nach [JJ00] bekannt, dass sofort dekodierbar  $\implies$  eindeutig dekodierbar
- ▶ Jedoch vorraussetzungen für letzteres **nicht** schwächer:

# Inhalt

Bäume

Ungleichung von Kraft

**Ungleichung von McMillan**

## Ungleichung von McMillan

Seien  $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$ . Dann existiert ein  $r$ -ärer eindeutig dekodierbarer Code  $\mathcal{C}$  mit Wortlängen  $l$  genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \quad (1)$$

## Ungleichung von McMillan

Seien  $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$ . Dann existiert ein  $r$ -ärer eindeutig dekodierbarer Code  $\mathcal{C}$  mit Wortlängen  $l$  genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \quad (1)$$

Richtung "(1)  $\implies \mathcal{C}$  existiert" folgt sofort mit Kraft.

## Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen:  $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$

# Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen:  $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- ▶ Betrachte  $K^n$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .

# Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen:  $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- ▶ Betrachte  $K^n$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶  $K^n$  als Summe abhängig von Wahl von  $n$  Wortlängen aus  $I$ .



## Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen:  $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- ▶ Betrachte  $K^n$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶  $K^n$  als Summe abhängig von Wahl von  $n$  Wortlängen aus  $I$ .
- ▶ Fasse Auswahlen (Indextupel) mit selbem Summand zusammen und summiere über möglichen Wertebereich

# Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen:  $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- ▶ Betrachte  $K^n$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶  $K^n$  als Summe abhängig von Wahl von  $n$  Wortlängen aus  $I$ .
- ▶ Fasse Auswahlen (Indextupel) mit selbem Summand zusammen und summiere über möglichen Wertebereich
- ▶ Nun finde aus Form von  $K^n$  konstante obere Schranke

# Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen:  $K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r_k^l} \leq 1$
- ▶ Betrachte  $K^n$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶  $K^n$  als Summe abhängig von Wahl von  $n$  Wortlängen aus  $I$ .
- ▶ Fasse Auswahlen (Indextupel) mit selbem Summand zusammen und summiere über möglichen Wertebereich
- ▶ Nun finde aus Form von  $K^n$  konstante obere Schranke
- ▶ Dann muss  $K \leq 1$ , da sonst  $K^n$  für geeignetes  $n$  größer als jede Konstante

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Wir müssen also zeigen, dass  $K \leq 1$ , wobei

$$K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}}$$

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Wir müssen also zeigen, dass  $K \leq 1$ , wobei

$$K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten:

$$K^n = \left( \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n$$

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Wir müssen also zeigen, dass  $K \leq 1$ , wobei

$$K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten:

$$K^n = \left( \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{r^{l_{i_k}}}$$

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Wir müssen also zeigen, dass  $K \leq 1$ , wobei

$$K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten:

$$K^n = \left( \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{r^{l_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}}$$

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Wir müssen also zeigen, dass  $K \leq 1$ , wobei

$$K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten:

$$K^n = \left( \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1, q]^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{r^{l_{i_k}}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}}$$

Werden Summe über Auswahl an Wortlängen noch oft brauchen, definiere:

$$\mathcal{S} : [1, q]^n \rightarrow \mathbb{N}, \quad i \mapsto \sum_{k=1}^n l_{i_k}$$



## Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter  $q = 3$ . Wortlängen  $l = (1, 3, 5)$ .  $n = 2$ .

$$[1, q]^n = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$i = (3, 1) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_{i_1} + l_{i_2} = l_3 + l_1 = 5 + 1$$

$$i = (2, 3) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_2 + l_3 = 3 + 5$$

$$i = (2, 2) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_2 + l_2 = 3 + 3$$

## Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter  $q = 3$ . Wortlängen  $l = (1, 3, 5)$ .  $n = 2$ .

$$[1, q]^n = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$i = (3, 1) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_{i_1} + l_{i_2} = l_3 + l_1 = 5 + 1 = 6$$

$$i = (2, 3) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_2 + l_3 = 3 + 5$$

$$i = (2, 2) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = l_2 + l_2 = 3 + 3 = 6$$

Also auch selber Wert bei unterschiedlichen Indextupeln.

## Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter  $q = 3$ . Wortlängen  $l = (1, 3, 5)$ .  $n = 2$ .

- ▶ Summe minimal 3, maximal 15.
- ▶ Fasse Indextupel mit gleicher Summe  $j \in [3, 15]$  zusammen

$$N_6 := \mathcal{S}^{-1}(\{\textcolor{red}{6}\}) = \{i \in [1, 3]^2 \mid \mathcal{S}(i) = \textcolor{red}{6}\} = \{ \underbrace{(1, 3)}_{l_1+l_3=\textcolor{red}{6}}, \overbrace{(3, 1)}^{l_3+l_1=\textcolor{red}{6}}, \underbrace{(2, 2)}_{l_2+l_2=\textcolor{red}{6}} \}$$

## Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter  $q = 3$ . Wortlängen  $l = (1, 3, 5)$ .  $n = 2$ .

- ▶ Summe minimal 3, maximal 15.
- ▶ Fasse Indextupel mit gleicher Summe  $j \in [3, 15]$  zusammen

$$N_6 := \mathcal{S}^{-1}(\{6\}) = \{i \in [1, 3]^2 \mid \mathcal{S}(i) = 6\} = \{ \underbrace{(1, 3)}_{l_1+l_3=6}, \overbrace{(3, 1)}^{l_3+l_1=6}, \underbrace{(2, 2)}_{l_2+l_2=6} \}$$

$$N_{\textcolor{red}{j}} := \mathcal{S}^{-1}(\textcolor{red}{j}) = \{i \in [1, q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = \textcolor{red}{j}\}$$

## Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter  $q = 3$ . Wortlängen  $l = (1, 3, 5)$ .  $n = 2$ .

► Betrachte Alphabet  $[0, 1], \mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$

## Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter  $q = 3$ . Wortlängen  $l = (1, 3, 5)$ .  $n = 2$ .

► Betrachte Alphabet  $[0, 1], \mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$

► Zu  $i \in [1, q]^n$  eindeutige Code-Sequenz  $\mathcal{W}(i) = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$ .

## Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter  $q = 3$ . Wortlängen  $l = (1, 3, 5)$ .  $n = 2$ .

► Betrachte Alphabet  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$

► Zu  $i \in [1, q]^n$  eindeutige Code-Sequenz  $\mathcal{W}(i) = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(N_6) &= \{\mathcal{W}(t) \mid t \in N_6\} = \{\mathcal{W}(t) \mid t \in \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}\} \\ &= \{w_1 w_3, w_3 w_1, w_2 w_2\} = \{011111, 111110, 100100\}\end{aligned}$$

## Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter  $q = 3$ . Wortlängen  $l = (1, 3, 5)$ .  $n = 2$ .

► Betrachte Alphabet  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$

► Zu  $i \in [1, q]^n$  eindeutige Code-Sequenz  $\mathcal{W}(i) = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(N_6) &= \{\mathcal{W}(t) \mid t \in N_6\} = \{\mathcal{W}(t) \mid t \in \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}\} \\ &= \{w_1 w_3, w_3 w_1, w_2 w_2\} = \{011111, 111110, 100100\}\end{aligned}$$

Da  $N_6$  gerade die Indextupel Wortlängensumme 6:

$$\forall i \in N_6 : |\mathcal{W}(i)| = 6 \quad \text{und} \quad \mathcal{W}(N_6) \subseteq \{0, 1\}^6$$



## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Kürzeste Wortlänge  $m := \min_{k \in [1, q]} l_k$ , längste  $M := \max_{k \in [1, q]} l_k$

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Kürzeste Wortlänge  $m := \min_{k \in [1, q]} l_k$ , längste  $M := \max_{k \in [1, q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel  $i \in [1, q]^n$ .

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Kürzeste Wortlänge  $m := \min_{k \in [1, q]} l_k$ , längste  $M := \max_{k \in [1, q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel  $i \in [1, q]^n$ . Definiere für  $j \in [nm, nM]$ :

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j) = \{i \in [1, q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = j\}$$

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Kürzeste Wortlänge  $m := \min_{k \in [1, q]} l_k$ , längste  $M := \max_{k \in [1, q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel  $i \in [1, q]^n$ . Definiere für  $j \in [nm, nM]$ :

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j) = \{i \in [1, q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = j\}$$

$$\mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Kürzeste Wortlänge  $m := \min_{k \in [1, q]} l_k$ , längste  $M := \max_{k \in [1, q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel  $i \in [1, q]^n$ . Definiere für  $j \in [nm, nM]$ :

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j) = \{i \in [1, q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^n l_{i_k} = j\}$$

$$\mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

$\mathcal{C}$  eindeutig dekodierbar  $\implies \mathcal{W}$  injektiv, da  $i \in [1, q]^n$  die eindeutige Kombination von Codewörtern aus  $\mathcal{C}$  für  $\mathcal{W}(i)$ .

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

$j \in [nm, nM]$  zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

►  $\mathcal{W}$  injektiv  $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

$j \in [nm, nM]$  zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

- ▶  $\mathcal{W}$  injektiv  $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$
- ▶  $|\mathcal{W}(i)| = j$  für  $i \in N_j$  nach Konstruktion

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

$j \in [nm, nM]$  zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

- ▶  $\mathcal{W}$  injektiv  $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$
- ▶  $|\mathcal{W}(i)| = j$  für  $i \in N_j$  nach Konstruktion
- ▶  $\mathcal{W}(N_j) \subseteq [0, r-1]^j \implies |\mathcal{W}(N_j)| \leq |[0, r-1]^j|$



## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

$j \in [nm, nM]$  zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \rightarrow [0, r-1]^*, \quad i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

- ▶  $\mathcal{W}$  injektiv  $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$
- ▶  $|\mathcal{W}(i)| = j$  für  $i \in N_j$  nach Konstruktion
- ▶  $\mathcal{W}(N_j) \subseteq [0, r-1]^j \implies |\mathcal{W}(N_j)| \leq |[0, r-1]^j|$
- ▶  $|N_j| \leq r^j$

# Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

Recap:

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

►  $|N_j| \leq r^j$  Anzahl der  $i \in [1, q]^n$  mit gleichem  $\mathcal{S}(i)$ .

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

- ▶  $|N_j| \leq r^j$  Anzahl der  $i \in [1, q]^n$  mit gleichem  $\mathcal{S}(i)$ .
- ▶ Fasse zusammen via  $N_j$ , summiere über  $[nm, nM]$

$$K^n = \sum_{j=nm}^{nM} |N_j| r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{|N_j|}{r^j}$$

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n l_{i_k}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

- ▶  $|N_j| \leq r^j$  Anzahl der  $i \in [1, q]^n$  mit gleichem  $\mathcal{S}(i)$ .
- ▶ Fasse zusammen via  $N_j$ , summiere über  $[nm, nM]$

$$K^n = \sum_{j=nm}^{nM} |N_j| r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{|N_j|}{r^j} \leq \sum_{j=nm}^{nM} 1 = (M - m)n + 1$$

Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}, \quad K^n \leq (M - m)n + 1$$

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}, \quad K^n \leq (M - m)n + 1 \implies \frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- ▶ Code  $\mathcal{C}$  gegeben;  $q = |\mathcal{C}|$ , Alphabetgröße  $r$ , Wortlängen  $l$  fix.
- ▶ Damit auch  $m, M, K$  fix.
- ▶  $n \in \mathbb{N}$  beliebig; Ungleichung muss für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelten.

## Ungleichung von McMillan: " $\Leftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}, \quad K^n \leq (M - m)n + 1 \implies \frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- ▶ Code  $\mathcal{C}$  gegeben;  $q = |\mathcal{C}|$ , Alphabetgröße  $r$ , Wortlängen  $l$  fix.
- ▶ Damit auch  $m, M, K$  fix.
- ▶  $n \in \mathbb{N}$  beliebig; Ungleichung muss für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelten.
- ▶ Nach Analysis bekannt: nur möglich für  $K \leq 1$ .

$$\implies \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} = K \leq 1$$





Review of McMillan or smth.

[...]