Gruppe $\boxed{\mathbf{14}}$
Datenstrukturen und Algorithmen

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 11

Aufgabe 1

a)

Wert des Flusses insgesamt nach Iterationen: $1,\ 1+\phi,\ 1+2\phi,\ 2+\phi,\ 3,\ 2+2\phi\cdots$
Dies lässt sich nach dem Hinweis auch in Potenzen von ϕ schreiben, also

$$1,\ 1+\phi,\ 1+2\phi,\ 1+2\phi+\phi^2,\ 1+2\phi+2\phi^2,\ 1+2\phi+2\phi^2+\phi^3\cdots$$

b)

Es ergibt sich ein offensichtliches Muster, wenn man den Wert des Flusses wie oben in Potenzen von ϕ schreibt. Insgesamt ist der Wert des Flusses nach der $2n$-ten Iteration gegeben durch:

$$f_{2n} = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} \phi^i$$

Es ergibt sich folgende Konvergenz:

$$1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \overset{|\phi|<1}{=} 1 + 2\frac{1}{1-\phi} = 4 + \sqrt{5} < 201$$

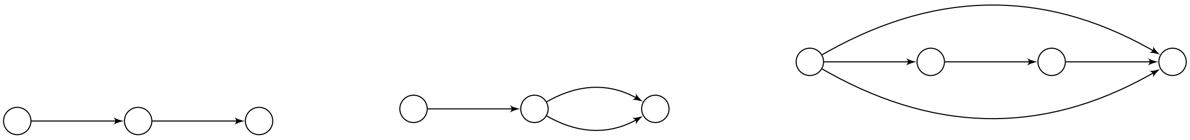
Da also 201 der eigentliche maximale Flusswert ist, konvergiert der Algorithmus hier nicht zum erwünschten maximalen Fluss.

c)

Es wird behauptet, dass wenn der Algorithmus terminiert, er dann auf jeden Fall einen maximalen Fluss bestimmt. Ferner wird jedoch nur garantiert, dass er bei rationalen Kapazitäten terminiert. Da aber $\phi \notin \mathbb{Q}$, ist die falsche Konvergenz hier kein Problem.

Aufgabe 2

a)



b)

Wir können so einen Algorithmus rekursiv über die Struktur der Graphen implementieren.
Der Basisfall ist natürlich der Graph $s \to t$, bei welchem der maximale Fluss eben der Kapazität der Kante (s, t) entspricht. Nun können wir den rekursiven Fall betrachten: Bei einer Serie von SP-Graphen ist der maximale Fluss eben das Minimum der maximalen Flüsse der SP-Graphen, ähnlich wie bei den Kapazitäten der Kanten in einem augmentierenden Pfad.
Wenn wir 2 SP-Graphen Parallel ausführen so ist der maximale Fluss eben die Summe der maximalen Flüsse der SP-Graphen.

Insgesamt:

MaxFlow$(s, t) = c(s, t)$.
MaxFlow(Serie(s_G, t_G)) = min{MaxFlow(s_G), MaxFlow(t_G)}
MaxFlow(Parallel(s_G, t_G)) = MaxFlow(s_G) + MaxFlow(t_G)

Aufgabe 3

2	A	B	C	D	E
A	0	8	1	5	∞
B	∞	0	∞	∞	∞
C	∞	7	0	1	1
D	8	$\underline{16}$	3	0	1
E	∞	3	1	∞	0

3	A	B	C	D	E
A	0	8	1	5	∞
B	∞	0	∞	∞	∞
C	∞	7	0	1	1
D	8	16	3	0	1
E	∞	3	1	∞	0

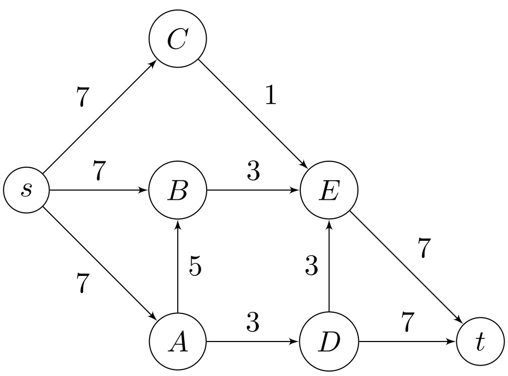
4	A	B	C	D	E
A	0	8	1	$\underline{2}$	$\underline{2}$
B	∞	0	∞	∞	∞
C	∞	7	0	1	1
D	8	$\underline{10}$	3	0	1
E	∞	3	1	$\underline{2}$	0

5	A	B	C	D	E
A	0	8	1	2	2
B	∞	0	∞	∞	∞
C	$\underline{9}$	7	0	1	1
D	8	10	3	0	1
E	$\underline{10}$	3	1	2	0

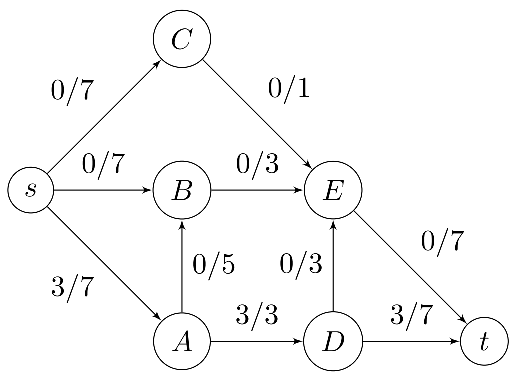
6	A	B	C	D	E
A	0	$\underline{5}$	1	2	2
B	∞	0	∞	∞	∞
C	9	$\underline{4}$	0	1	1
D	8	$\underline{4}$	$\underline{2}$	0	1
E	10	3	1	2	0

Aufgabe 4

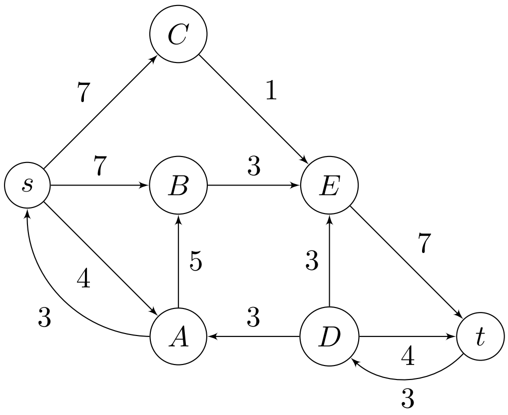
initiales Restnetzwerk



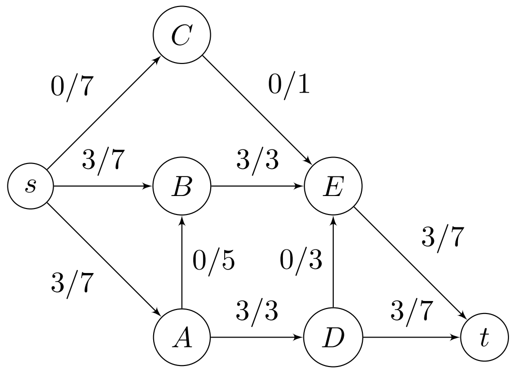
Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss



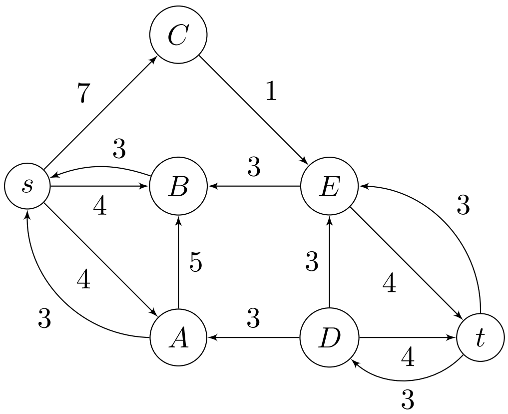
Restnetzwerk



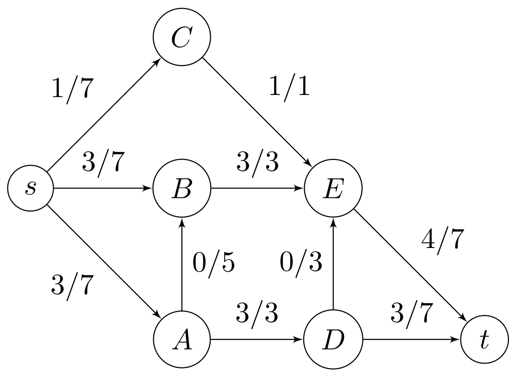
Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss



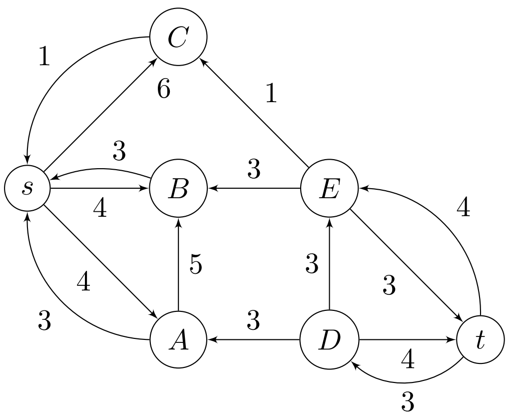
Restnetzwerk



Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss



Restnetzwerk



Der maximale Fluss hat den Wert 7.

Aufgabe 5