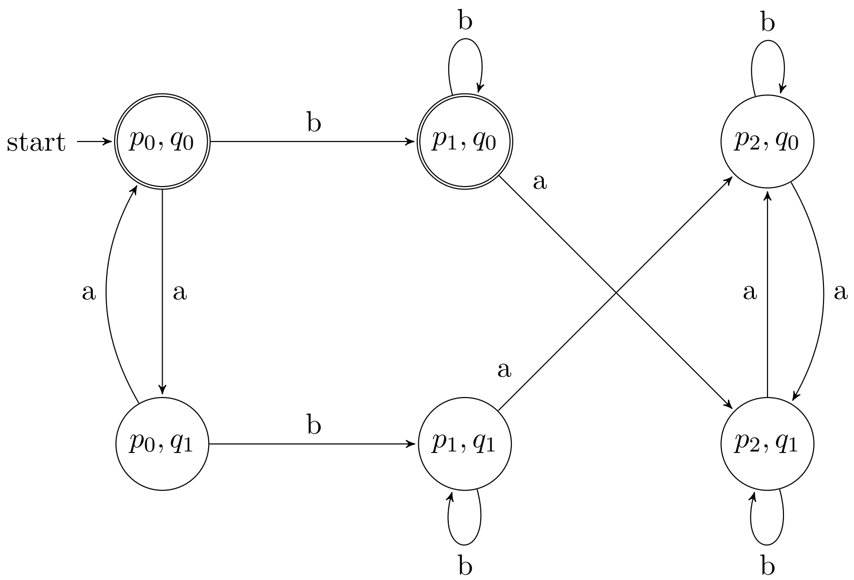
Gruppe $\boxed{3}$
Formale Systeme und Automaten

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 2

Aufgabe 6



Die Endzustände wurden so gewählt damit die akzeptierenden Läufe von $L(\mathcal{A})$ enthalten sind und die akzeptierenden Läufe von $L(\mathcal{B})$ nicht.

Aufgabe 7

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit Sprache $L(\mathcal{A})$. Wir definieren den ε-NFA $\mathcal{B} := (Q', \Sigma', \Delta, q_{-1}, F)$, wobei $Q' := Q \cup \{q_{-1}\}$, $\Sigma' := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und

$$\Delta := \{(q, a, q') \mid \delta(q, a) = q'\} \cup \{(q_{-1}, \varepsilon, f) \mid f \in F\}$$

für $q, q' \in Q$ und $a \in \Sigma$.

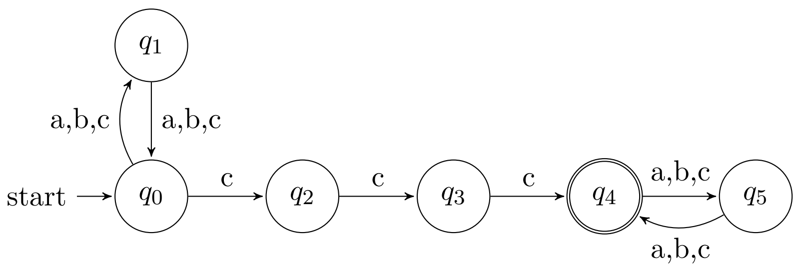
Wir zeigen zuerst $L_{\text{suff}}(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{B})$.
Sei $w \in L_{\text{suff}}(\mathcal{A})$ gegeben. Seien ferner $m, n \in \mathbb{N}$.
Dann existiert ein $u \in L(\mathcal{A})$ sodass $uw \in L(\mathcal{A})$. Durch $u \in L(\mathcal{A})$ existiert ein Lauf von $\mathcal{A}$ über u; $(r_0, r_1 \cdots r_m)$ sodass $r_0 = q_0$ und $r_n \in F$. Ferner gibt es durch $uw \in L(\mathcal{A})$ eine Zustandsfolge $(x_0, \sigma_1, x_1, \sigma_2 \cdots \sigma_n, x_n)$ sodass $x_0 = r_m$, $x_n \in F$ und $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n) = w$. Nun können wir den Lauf $(q_{-1}, \varepsilon, x_0, \sigma_1, x_1, \sigma_2, x_2, \cdots \sigma_n, x_n)$ in $\mathcal{B}$ angeben. Da beide Automaten die selben Endzustände haben und q_{-1} der Startzustand von $\mathcal{B}$ ist, folgt daraus $w \in L(\mathcal{B})$.

Wir zeigen nun $L(\mathcal{B}) \subseteq L_{\text{suff}}(\mathcal{A})$.
Sei $w \in L(\mathcal{B})$ gegeben. Sei ferner $n \in \mathbb{N}$.
Dann existiert ein Lauf $r := (q_{-1}, \varepsilon, r_0, \sigma_1 \cdots, \sigma_n, r_n)$ in $\mathcal{B}$ mit $(\sigma_1 \cdots \sigma_n) = w$ und $r_0, r_n \in F$. Da F eben die Endzustände von $\mathcal{A}$ sind, gibt es auch ein Wort $u \in L(\mathcal{A})$ sodass der Lauf von $\mathcal{A}$ über u eben an $r_1 \in F$ endet. Nun lässt sich der Lauf von w ohne die ε-Transition $(r_0, \sigma_1, \cdots \sigma_n, r_n)$ einwandfrei an den von u in dem DFA $\mathcal{A}$ anhängen um zu einem Weitern Endzustand von $\mathcal{A}$ zu kommen. Es folgt $uw \in L(\mathcal{A})$ und damit $w \in L_{\text{suff}}(\mathcal{A})$.

Insgesamt gilt also $L(\mathcal{B}) = L_{\text{suff}}(\mathcal{A})$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass alle Sprachen, welche ε-NFA-erkennbar sind auch DFA-erkennbar sind. $\square$

Aufgabe 8

a)



b)

Alle läufe von $\mathcal{A}$ auf dem Wort bbba:
$(q_0, b, q_0, b, q_0, b, q_1, a, q_2)$
$(q_0, b, q_1, b, q_0, b, q_1, a, q_2)$

c) Das Wort cbbbca wird akzeptiert, wenn die Präfixe die Erreichbarkeitsmenge $E(\mathcal{A}, w) := \{q_0, q_1\}$ haben.

Wenn jedoch für die Erreichbarkeitsmenge der Präfixe des Wortes cbbbca $q_2 \in E(\mathcal{A}, w)$ gilt ,wird das Wort nicht akzeptiert.

Aufgabe 9

Wir zeigen ($w \in L(\mathcal{A}) \implies ac$ kommt nicht als Infix in w vor) für Wörter w der Länge $n \in \mathbb{N}$.

Sei $n = 0$. Es folgt sofort $w = \varepsilon$. Weiter gilt $\varepsilon \in L(\mathcal{A})$. Ferner kann in w nicht ac als Infix vorkommen. Damit hält die Aussage für $n = 0$.

Sei nun ein beliebig aber festes $n \in \mathbb{N}$ gegeben sodass für jedes Wort w' mit $|w'| = n$ aus $w' \in L(\mathcal{A})$ folgt, dass ac nicht als Infix in w' vorkommt (IV).

Sei dann $w = w'x$ mit $w \in L(\mathcal{A})$ für $w' \in L(\mathcal{A})$ mit $|w'| = n$ und $x \in \Sigma_\mathcal{A}$ gegeben.
Dann ist $|w| = n + 1$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

Fall 1: Der Lauf von $\mathcal{A}$ auf $w' = (w'_0, \cdots, w'_n)$ endet in $q_a \in F_\mathcal{A}$.
Dann gilt nach IV dass ac nicht in w' als Infix vorkommt. Jedoch gilt $w'_n = a$.
Es folgt aber $x \neq c$, da sonst durch $\delta_\mathcal{A}(q_a, c) = q_{ac}$ und $q_{ac} \notin F_\mathcal{A}$ direkt $w'x = w \notin L(\mathcal{A})$ folgen würde. Folglich kann auch in w nicht das Infix ac vorkommen.

Fall 2: Der Lauf von $\mathcal{A}$ auf $w' = (w'_0, \cdots, w'_n)$ endet in $q_\varepsilon \in F_\mathcal{A}$.
Dann gilt nach IV dass ac nicht in w' als Infix vorkommt. Weiter ist $w'_n \neq a$. Damit folgt für $x \in \Sigma_\mathcal{A}$, dass $w = w'x$ ebenfalls nicht ac als Infix enthält.

Insgesamt folgt die Behauptung in allen Fällen für $n + 1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt nun für alle Wörter $w \in \Sigma^*_\mathcal{A}$, dass

$$w \in L(\mathcal{A}) \implies ac \text{ kommt nicht als Infix in } w \text{ vor}$$

Wir zeigen (ac kommt nicht als Infix in w vor $\implies w \in L(\mathcal{A})$) für Wörter w der Länge $n \in \mathbb{N}$.

Sei $n = 0$. Für jedes Wort w mit $|w| = n$ folgt dann $w = \varepsilon$. Offensichtlich kann ac nicht als Infix in w vorkommen. Weiter ist der Lauf von $\mathcal{A}$ über ε akzeptierend, es folgt also $w \in L(\mathcal{A})$.

Sei nun ein beliebig aber festes $n \in \mathbb{N}$ gegeben sodass für jedes Wort w' mit $|w'| = n$ in welchem nicht ac als Infix vorkommt folgt, dass $w' \in L(\mathcal{A})$ (IV).

Sei dann $w = w'x$ mit sodass ac nicht als Infix in w, w' vorkommt mit $x \in \Sigma_\mathcal{A}$ gegeben.
Dann ist $|w| = n + 1$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

Fall 1: $w'_n = a$.
Da ac nicht in $w = w'x$ als Infix vorkommt folgt sofort $x \neq c$. Durch $w' \in L(\mathcal{A})$ (IV) und $w'_n = a$ folgt, dass der Lauf von $\mathcal{A}$ über w' in q_a endet. Da dann das nächste eingelesene Symbol, $x \neq c$ ist, folgt, dass $w = w'x \in L(\mathcal{A})$.

Fall 2: $w'_n \neq a$.
Da $w' \in L(\mathcal{A})$ nach IV endet der Lauf von $\mathcal{A}$ über w' in q_ε. Es gilt für jedes $x \in \Sigma_\mathcal{A}$ nun immernoch, dass ac nicht als Infix in $w = w'x$ vorkommt. Weiter gilt $\forall x \in \Sigma_\mathcal{A} : \delta_\mathcal{A}(q_\varepsilon, x) \in F_\mathcal{A}$. Folglich ist also $w \in L(\mathcal{A})$.

Insgesamt folgt die Behauptung in allen Fällen für $n + 1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Indultion gilt nun für alle Wörter $w \in \Sigma^*_\mathcal{A}$, dass

$$ac \text{ kommt nicht als Infix in } w \text{ vor} \implies w \in L(\mathcal{A})$$

$\square$