

Ungleichungen von Kraft & McMillan

Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

November 21, 2018

Motivation

- ▶ Gesehen, dass eindeutig bzw. sofort dekodierbare Codes sehr nützlich sind.
- ▶ Wann bzw. unter welchen Bedingungen existieren diese?
- ▶ Insbesondere: Wortlängen und Größe des Code-Alphabets
- ▶ Vorgestellte Ungleichungen geben untere Schranken für diese

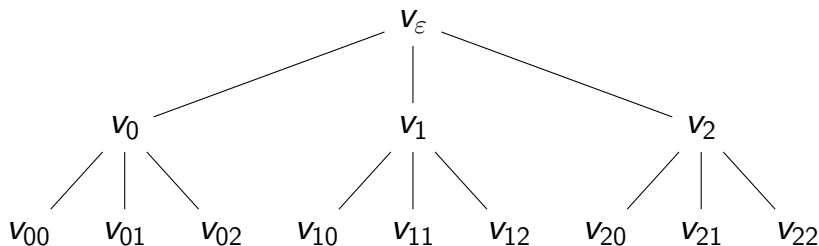
Überblick

- ▶ Zusammenhang Codes und Bäume
- ▶ Ungleichung von Kraft
- ▶ Ungleichung von McMillan
- ▶ Bemerkungen / Zusammenfassung

Code als Baum: \mathcal{T}_r^h

Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.

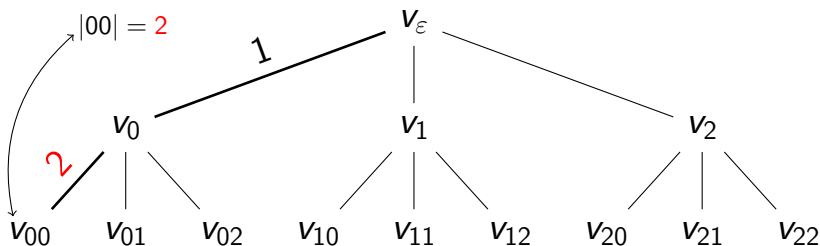
Beispiel $r = 3, h = 2$, Baum \mathcal{T}_3^2 :



Code als Baum: \mathcal{T}_r^h

Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.

Beispiel $r = 3, h = 2$, Baum \mathcal{T}_3^2 :

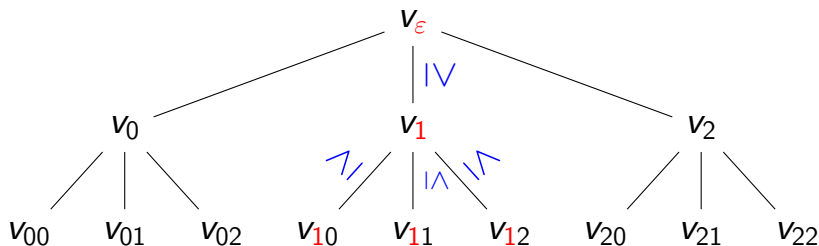


- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $\text{height}(v_w) = |w|$.

Code als Baum: \mathcal{T}_r^h

Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.

Beispiel $r = 3, h = 2$, Baum \mathcal{T}_3^2 :



► Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $height(v_w) = |w|$.

► Für $v_w, v_{w'} \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $v_w \leq v_{w'} \iff w \sqsubseteq w'$.

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer sofort dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer sofort dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer sofort dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- ▶ Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- ▶ Wortlängen $0 < \ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_q$ aufsteigend sortiert

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer sofort dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- ▶ Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- ▶ Wortlängen $0 < \ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_q$ aufsteigend sortiert
- ▶ Code-Alphabet von \mathcal{C} ist $[0, r - 1]$

Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \implies "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \implies "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \implies "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

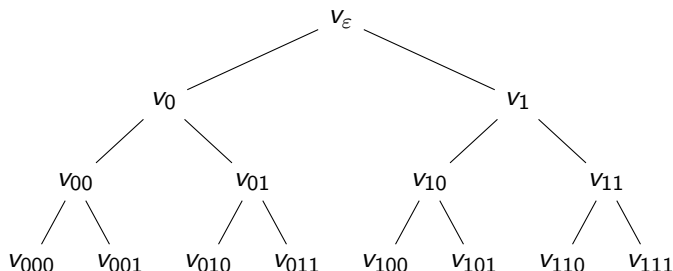
Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$.

Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte \mathcal{T}_2^3

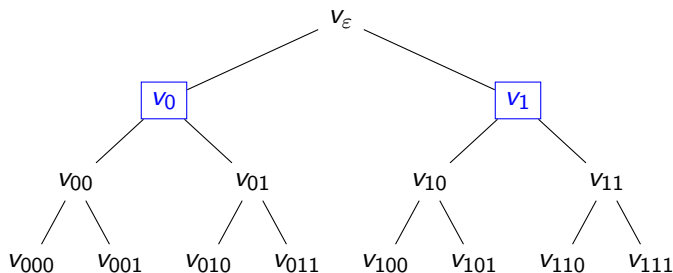


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte \mathcal{T}_2^3



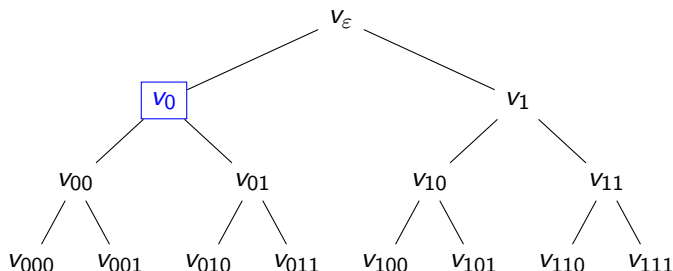
Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte \mathcal{T}_2^3

$w_1 = 0$,

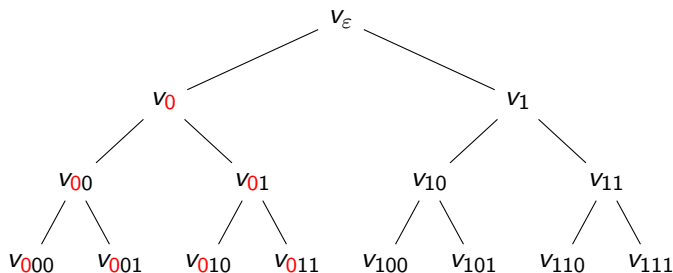


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte \mathcal{T}_2^3
 $w_1 = 0$,

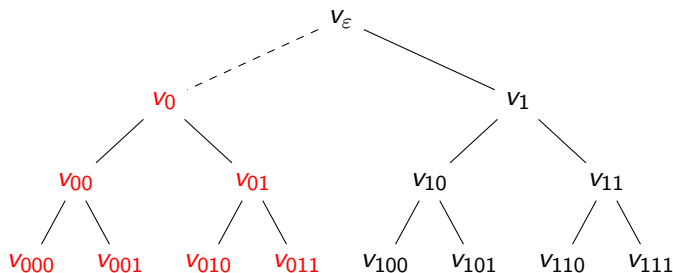


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$
 $w_1 = 0$,

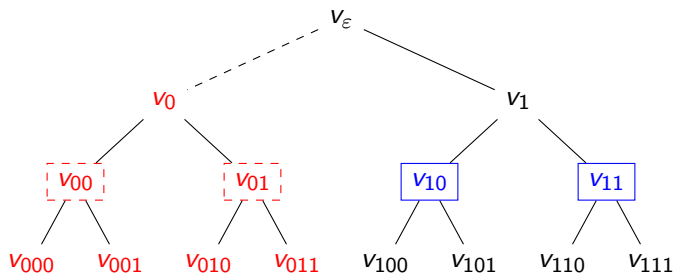


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$
 $w_1 = 0$,

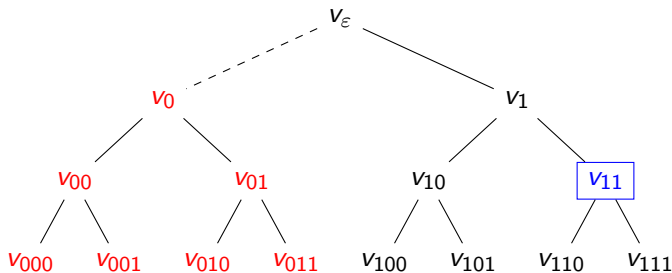


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$
 $w_1 = 0$, $w_2 = 11$,

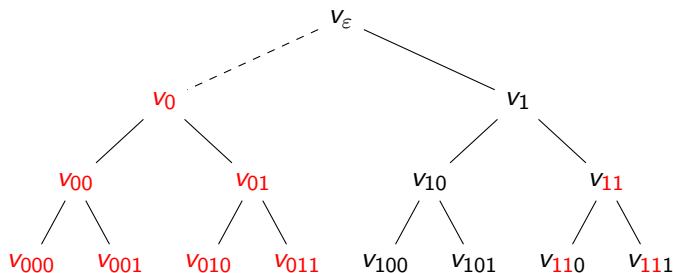


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$
 $w_1 = 0, w_2 = \textcolor{red}{11}$,

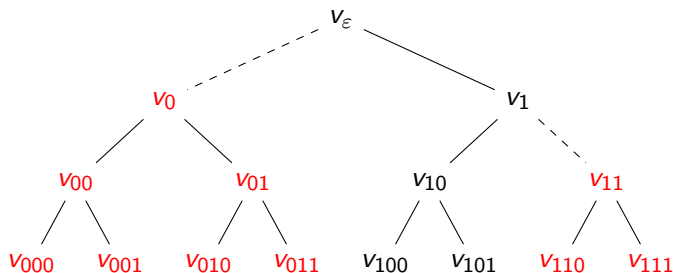


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$
 $w_1 = 0, w_2 = 11$,

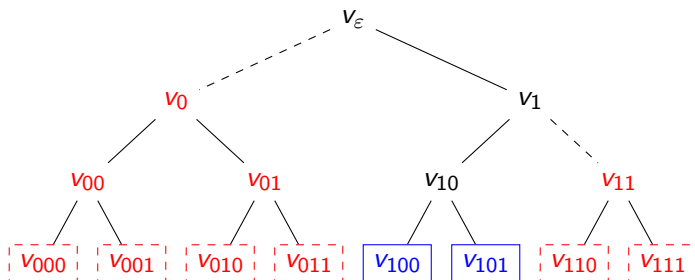


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$
 $w_1 = 0, w_2 = 11$,

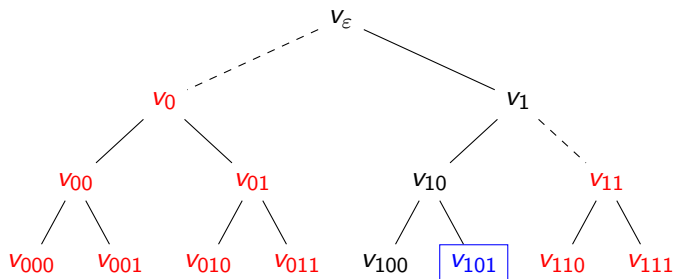


Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \Rightarrow "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$
 $w_1 = 0, w_2 = 11, w_3 = 101$



Ungleichung von Kraft: Beweisidee " \implies "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: \mathcal{C} sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$.

$w_1 = 0, w_2 = 11, w_3 = 101$

- ▶ $q = 3$ Wörter über Alphabet $[0, r - 1] = [0, 1] = \{0, 1\}$.
- ▶ Wortlängen $|w_1| = \ell_1, |w_2| = \ell_2, |w_3| = \ell_3$ eingehalten.
- ▶ Präfixcode $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\} = \{0, 11, 101\}$ konstruiert.

Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsanfang

- ▶ zz: Auswahl von w_i aus Baum möglich.
- ▶ Via endlicher Induktion über i .
- ▶ $h := \ell_q$ (max. Wortlänge)

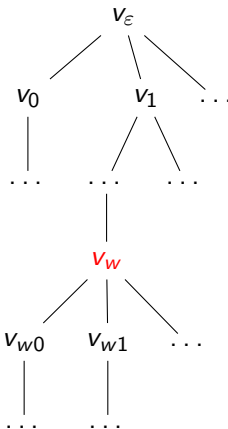
Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsanfang

\mathcal{T}_r^h :

- ▶ zz: Auswahl von w_i aus Baum möglich.
- ▶ Via endlicher Induktion über i .
- ▶ $h := \ell_q$ (max. Wortlänge)

$i = 1$:

- ▶ Wähle $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$, $\text{height}(v_w) = \ell_1$



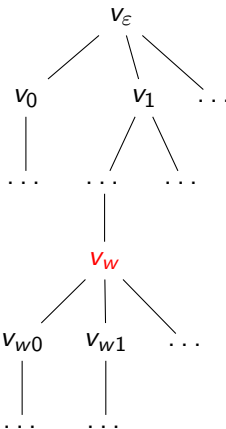
Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsanfang

\mathcal{T}_r^h :

- ▶ zz: Auswahl von w_i aus Baum möglich.
- ▶ Via endlicher Induktion über i .
- ▶ $h := \ell_q$ (max. Wortlänge)

$i = 1$:

- ▶ Wähle $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$, $\text{height}(v_w) = \ell_1$
- ▶ Setze $w_1 := w$, dann $|w_1| = \ell_1$



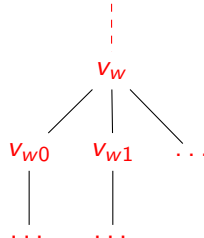
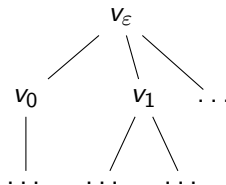
Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow ": Induktionsanfang

- ▶ zz: Auswahl von w_i aus Baum möglich.
- ▶ Via endlicher Induktion über i .
- ▶ $h := \ell_q$ (max. Wortlänge)

$i = 1$:

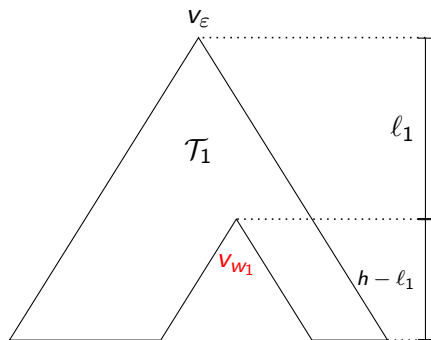
- ▶ Wähle $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$, $\text{height}(v_w) = \ell_1$
- ▶ Setze $w_1 := w$, dann $|w_1| = \ell_1$
- ▶ Entferne Nachfolger; $\mathcal{T} := \mathcal{T}_r^h \setminus v_w$

\mathcal{T}_r^h :



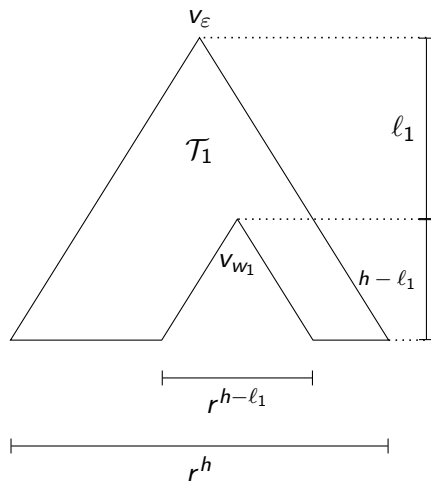
Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow ": Induktionsanfang

- ▶ Teilbaum der Höhe ℓ_1 entfernt



Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow ": Induktionsanfang

- ▶ Teilbaum der Höhe ℓ_1 entfernt
- ▶ \mathcal{T}_1 noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter

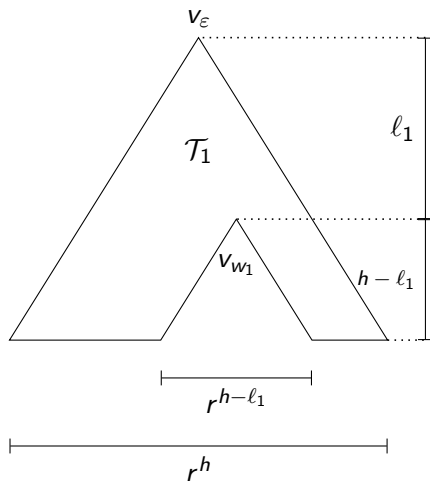


Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow ": Induktionsanfang

- ▶ Teilbaum der Höhe ℓ_1 entfernt
- ▶ \mathcal{T}_1 noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)$$



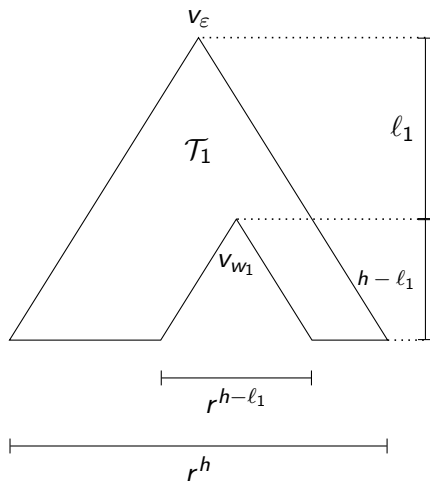
Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow ": Induktionsanfang

- ▶ Teilbaum der Höhe ℓ_1 entfernt
- ▶ \mathcal{T}_1 noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)$$



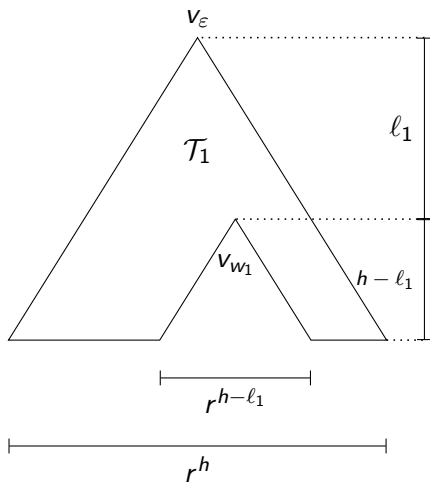
Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow ": Induktionsanfang

- ▶ Teilbaum der Höhe ℓ_1 entfernt
- ▶ \mathcal{T}_1 noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)$$

$$> r^h \underbrace{\left(1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)}_{\leq 1} > 0$$



Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzungen für $i \in [1, q - 1]$:

- ▶ $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- ▶ $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- ▶ $|\text{leaves}(\mathcal{T}_j)| > 0$

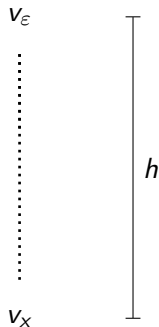
Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- ▶ $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- ▶ $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- ▶ $|\text{leaves}(\mathcal{T}_j)| > 0$

Dann:

- ▶ Es gibt Blatt $v_x \in V(\mathcal{T}_i)$.
- ▶ \mathcal{T}_i als Baum zusammenhängend



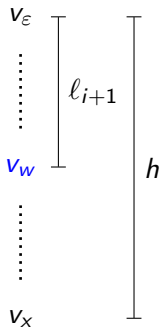
Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- ▶ $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- ▶ $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- ▶ $|\text{leaves}(\mathcal{T}_j)| > 0$

Dann:

- ▶ Es gibt Blatt $v_x \in V(\mathcal{T}_i)$.
- ▶ \mathcal{T}_i als Baum zusammenhängend
- ▶ $\exists v_w \in V(\mathcal{T}_i) : \text{height}(v_w) = \ell_{i+1} \leq h$



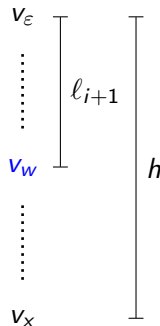
Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- ▶ $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- ▶ $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- ▶ $|\text{leaves}(\mathcal{T}_j)| > 0$

Dann:

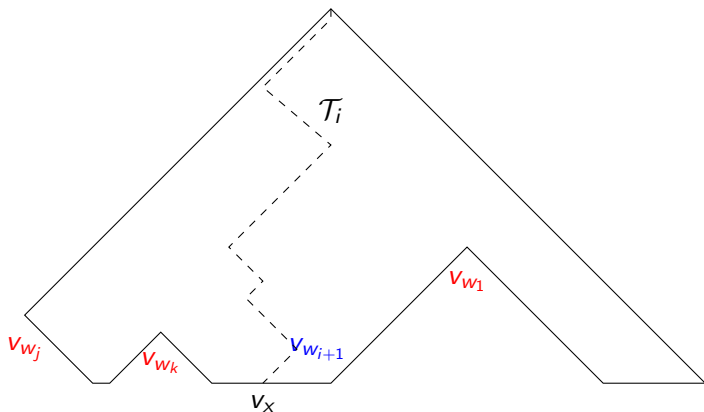
- ▶ Es gibt Blatt $v_x \in V(\mathcal{T}_i)$.
- ▶ \mathcal{T}_i als Baum zusammenhängend
- ▶ $\exists v_w \in V(\mathcal{T}_i) : \text{height}(v_w) = \ell_{i+1} \leq h$
- ▶ Setze $w_{i+1} := w$. Dann $|w_{i+1}| = \ell_{i+1}$



Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

Für $j \in [1, i]$:

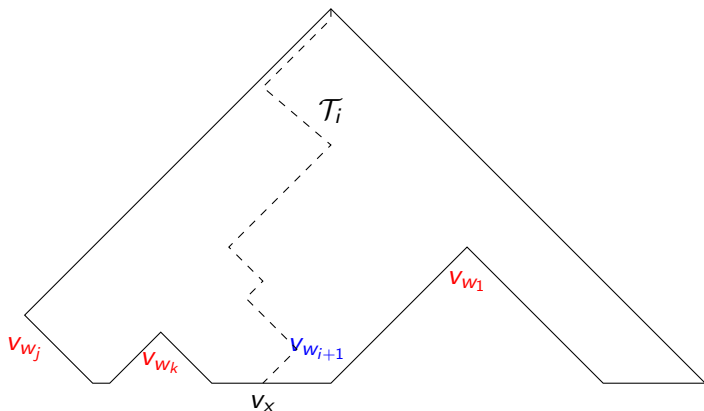
- Knoten "unter" v_{w_j} bereits entfernt



Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

Für $j \in [1, i]$:

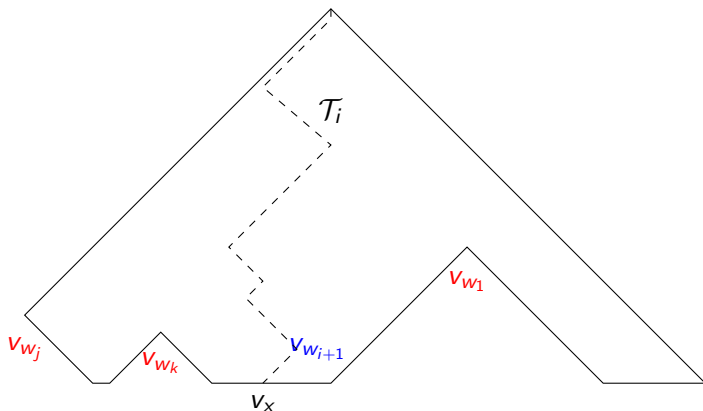
- ▶ Knoten "unter" v_{w_j} bereits entfernt
- ▶ Damit $v_{w_j} \not\leq v_{w_{i+1}}$, also auch $w_j \not\leq w_{i+1}$



Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

Für $j \in [1, i]$:

- ▶ Knoten "unter" v_{w_j} bereits entfernt
- ▶ Damit $v_{w_j} \not\leq v_{w_{i+1}}$, also auch $w_j \not\leq w_{i+1}$
- ▶ Ausserdem $w_{i+1} \not\leq w_j$ durch $|w_j| = \ell_j \leq \ell_{i+1} = |w_{i+1}|$



Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i + 1]\}$ wieder Präfix-Code.

Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

- ▶ Damit $\{w_j \mid j \in [1, i + 1]\}$ wieder Präfix-Code.
- ▶ Falls $i + 1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i + 1]\}$.

Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

- ▶ Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- ▶ Falls $i+1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.
- ▶ Falls $i+1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$

Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

- ▶ Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- ▶ Falls $i+1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.
- ▶ Falls $i+1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- ▶ Dann $|\text{leaves}(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k}$$

Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

- ▶ Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- ▶ Falls $i+1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.
- ▶ Falls $i+1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- ▶ Dann $|\text{leaves}(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} > r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-\ell_k}$$

Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

- ▶ Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- ▶ Falls $i+1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.
- ▶ Falls $i+1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- ▶ Dann $|\text{leaves}(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$\begin{aligned} r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} &> r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-\ell_k} \\ &= r^h \left(1 - \underbrace{\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}}}_{\leq 1} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Ungleichung von Kraft: " \implies ": Induktionsschritt

- ▶ Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- ▶ Falls $i+1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.
- ▶ Falls $i+1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- ▶ Dann $|\text{leaves}(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$\begin{aligned} r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} &> r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-\ell_k} \\ &= r^h \left(1 - \underbrace{\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}}}_{\leq 1} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Vorraussetzungen für I.S. erfüllt, also Induktion vollendet.
Sofort dekodierbares \mathcal{C} für r, q, l konstruierbar.



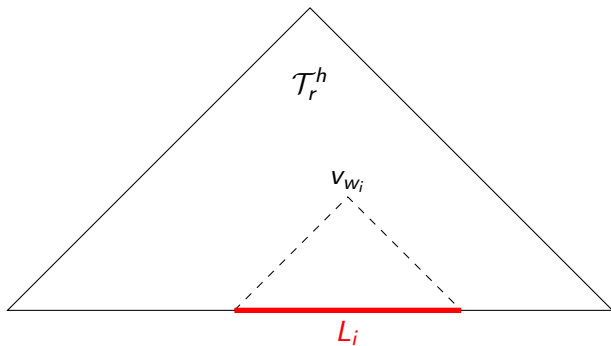
Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Zeige: \mathcal{C} sofort dekodierbar \implies Ungleichung gilt für Parameter

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Zeige: \mathcal{C} sofort dekodierbar \implies Ungleichung gilt für Parameter

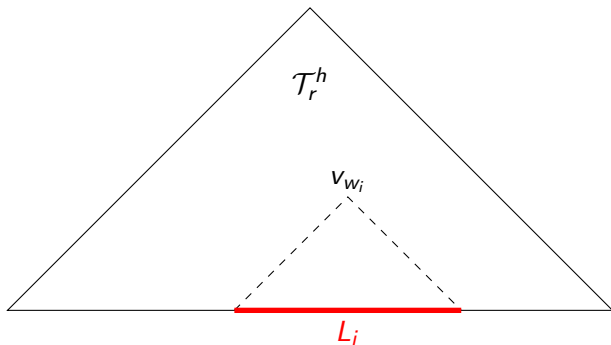
$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge \text{height}(v) = h\}$$



Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Zeige: \mathcal{C} sofort dekodierbar \implies Ungleichung gilt für Parameter

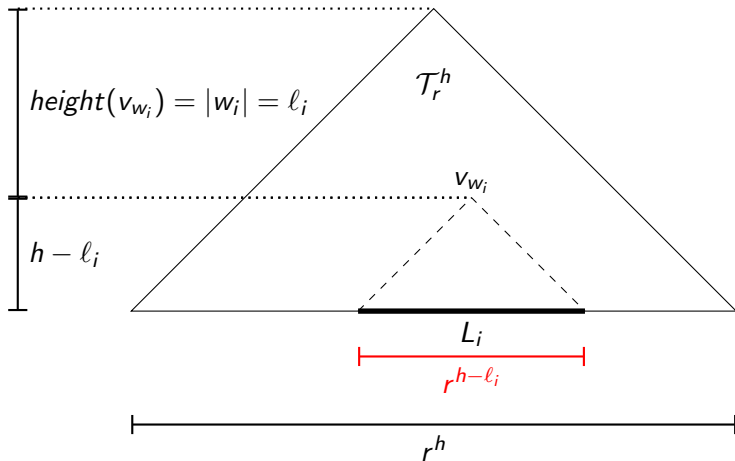
$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge \text{height}(v) = h\}$$



► Für $i, j \in [1, q] : i \neq j \implies L_i \cap L_j = \emptyset$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

- Anzahl dieser Blätter: $|L_i| = r^{h-\ell_i}$



Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

- ▶ $L_i \cap L_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
- ▶ $|L_i| = r^{h-\ell_i}$

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right|$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

- ▶ $L_i \cap L_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
- ▶ $|L_i| = r^{h-\ell_i}$

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-\ell_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{\ell_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

- ▶ $L_i \cap L_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
- ▶ $|L_i| = r^{h-\ell_i}$

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-\ell_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{\ell_i}}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1$$



Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer sofort dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

- ▶ Beweis konstruktiv
- ▶ Untere Schranke für Wortlänge, Alphabetgröße

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer sofort dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

- ▶ Beweis konstruktiv
- ▶ Untere Schranke für Wortlänge, Alphabetgröße
- ▶ Bekannt: sofort dekodierbar \implies eindeutig dekodierbar
- ▶ Schwächere Kriterien?

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer eindeutig dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \quad (1)$$

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer eindeutig dekodierbarer Code \mathcal{C} mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \quad (1)$$

Richtung "(1) $\implies \mathcal{C}$ existiert" durch Kraft.

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- ▶ Zu zeigen: $K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$
- ▶ Betrachte K^n abhängig von Wortlängen für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ Finde aus Form von K^n konstante obere Schranke
- ▶ Dann muss $K \leq 1$, da sonst K^n für geeignetes n größer als jede Konstante

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1, q]^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1, q]^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1, q]^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}}$$

Dann für jedes $i \in [1, q]^n$:

$$n \cdot \ell_{\min} \leq \sum_{k=1}^n \ell_{i_k} \leq n \cdot \ell_{\max}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1, q]^n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}}$$

Dann für jedes $i \in [1, q]^n$:

$$n \cdot \ell_{\min} \leq \sum_{k=1}^n \ell_{i_k} \leq n \cdot \ell_{\max}$$

Wir wollen schreiben:

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} N_j \cdot r^{-j}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Ziel: Gleiche Summenwerte durch $N_j \in \mathbb{N}_0$ zusammenfassen

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} N_j \cdot r^{-j}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Ziel: Gleiche Summenwerte durch $N_j \in \mathbb{N}_0$ zusammenfassen

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} N_j \cdot r^{-j}$$

► N_j Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit Wortlängensumme j

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Ziel: Gleiche Summenwerte durch $N_j \in \mathbb{N}_0$ zusammenfassen

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- ▶ N_j Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit Wortlängensumme j
- ▶ Äquivalent: Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit $|w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}| = j$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Ziel: Gleiche Summenwerte durch $N_j \in \mathbb{N}_0$ zusammenfassen

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- ▶ N_j Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit Wortlängensumme j
- ▶ Äquivalent: Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit $|w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}| = j$
- ▶ \mathcal{C} eindeutig dekodierbar \implies Jede Code-Sequenz aus eindeutiger Auswahl $i \in [1, q]^n$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Ziel: Gleiche Summenwerte durch $N_j \in \mathbb{N}_0$ zusammenfassen

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- ▶ N_j Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit Wortlängensumme j
- ▶ Äquivalent: Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit $|w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}| = j$
- ▶ \mathcal{C} eindeutig dekodierbar \implies Jede Code-Sequenz aus eindeutiger Auswahl $i \in [1, q]^n$
- ▶ r^j Wörter mit Länge j , nicht alle Code-Sequenzen von \mathcal{C}
- ▶ Für jedes max. ein $i \in [1, q]^n \implies N_j \leq r^j$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} N_j r^{-j} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} \frac{N_j}{r^j}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$\begin{aligned} K^n &= \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} N_j r^{-j} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} \frac{N_j}{r^j} \\ &\leq \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} 1 = n(\ell_{\max} - \ell_{\min}) + 1 \end{aligned}$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1, q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} N_j r^{-j} = \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} \frac{N_j}{r^j}$$

$$\leq \sum_{j=n \cdot \ell_{\min}}^{n \cdot \ell_{\max}} 1 = n(\ell_{\max} - \ell_{\min}) + 1$$

$$\implies \frac{K^n}{n} \leq (\ell_{\max} - \ell_{\min}) + 1$$

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$$\frac{K^n}{n} \leq (\ell_{\max} - \ell_{\min}) + 1$$

- ▶ Code \mathcal{C} gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r , Wortlängen ℓ fix.
- ▶ Damit auch $\ell_{\min}, \ell_{\max}, K$ fix.

Ungleichung von McMillan: " \Leftarrow "

$$\frac{K^n}{n} \leq (\ell_{\max} - \ell_{\min}) + 1$$

- ▶ Code \mathcal{C} gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r , Wortlängen ℓ fix.
- ▶ Damit auch $\ell_{\min}, \ell_{\max}, K$ fix.
- ▶ $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
- ▶ Nach Analysis/DSAL bekannt: nur möglich für $K \leq 1$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{\ell_i}} = K \leq 1$$



Bemerkungen

Für $r, q \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$ ergibt sich:

$$\exists \mathcal{C}_{r,q,\ell} \text{ eindeutig dekodierbar} \iff \exists \mathcal{C}'_{r,q,\ell} \text{ sofort dekodierbar}$$

Bemerkungen

Für $r, q \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$ ergibt sich:

$$\exists \mathcal{C}_{r,q,\ell} \text{ eindeutig dekodierbar} \iff \exists \mathcal{C}'_{r,q,\ell} \text{ sofort dekodierbar}$$

Außerdem, für festen Code $\mathcal{C}_{r,q,\ell}$:

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1 \quad \not\Rightarrow \quad \mathcal{C}_{r,q,\ell} \text{ sofort dekodierbar}$$

Bemerkungen

Für $r, q \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$ ergibt sich:

$$\exists \mathcal{C}_{r,q,\ell} \text{ eindeutig dekodierbar} \iff \exists \mathcal{C}'_{r,q,\ell} \text{ sofort dekodierbar}$$

Außerdem, für festen Code $\mathcal{C}_{r,q,\ell}$:

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1 \quad \not\Rightarrow \quad \mathcal{C}_{r,q,\ell} \text{ sofort dekodierbar}$$

Beispiel: $r = 2, q = 3, \ell = (1, 2, 3)$

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{\ell_i}} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8} < 1$$

$\mathcal{C} := \{0, 01, 011\}$ **nicht** sofort dekodierbar!

Zusammenfassung

- ▶ Existenz der Codes abhängig von:
Alphabetgröße(r), Anzahl Codewörter(q), Codewortlängen(ℓ)
- ▶ Genauer durch Ungleichung von Kraft/McMillan:

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1$$

- ▶ Zusammenhang/Konstruktion von Codes durch Bäume