Gruppe $\boxed{11}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247

Hausaufgabe 7

Aufgabe 1

a)

Die Folge der Partialsummen lässt sich wie folgt darstellen:

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

b)

Wir zeigen, dass die Folge s_n der Partialsummen monoton steigt. Man betrachte $s_{n+1} - s_n$:

$$s_{n+1} - s_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = a_{k+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = a_{k+1}$$

Wir wissen weiterhin, dass $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Beweis (Induktion):
(IA) $k = 1$. Es gilt

$$\frac{3^1}{5^1 + 1} = \frac{3}{5} \geq 0$$

Also gilt die Aussage für $k = 1$.
(IS) Die Behauptung gelte für ein $k \in \mathbb{N}$. $k \mapsto k + 1$:

$$\frac{3^{k+1}}{5^{k+1} + 1} = \frac{3^k \cdot 3}{5^k \cdot 5 + 1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3^k}{5^k + \frac{1}{5}} \geq \frac{3}{5} \cdot \frac{3^k}{5^k + 1}$$

Wir wissen, dass $\frac{3^k}{5^k+1} \geq 0$, also folgt auch $\frac{3}{5} \cdot \frac{3^k}{5^k+1} \geq 0$. Insgesamt gilt also die Behauptung auch für $k + 1$.
Damit ist a_k stets größer 0 und es folgt $s_{n+1} - s_n = a_{k+1} \geq 0$. Also ist s_n monoton wachsend.

c)

Es gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon a_k = \frac{3^k}{5^k + 1} \leq \frac{3^k}{5^k} \leq \frac{1}{5^k} = \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

d)

Da $\frac{1}{5} \neq 1$ lässt sich die geometrische Summenformel (II Satz 3.5) wie folgt einsetzen:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}}$$

Sei also $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k$. Durch $\forall k \in \mathbb{N}\colon a_k \geq 0$ folgt $|a_k| = a_k$.
Weiterhin gilt $\forall k \in N\colon a_k = |a_k| \leq c_k$. Da c_k nach Satz 3.5 (geometrische Reihe) konvergiert, folgt nach dem Minorantenkriterium (3.17), dass auch a_k konvergiert.

Aufgabe 2

Wir wenden Partialbruchzerlegung auf den gegebenen Bruch an:

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \frac{a}{(2k+1)} + \frac{b}{(2k+5)} \iff 1 = a(2k+5) + b(2k+1)$$

Nun stellen wir nach k um:

$$1 = a(2k+5) + b(2k+1) = 2ak + 5a + 2bk + b = k(2a+2b) + (5a+b)$$

Somit haben wir nach Koeffizientenvergleich zwei Gleichungen: $\mathbb{I} := (2a + 2b = 0)$ und $\mathbb{II} := (5a + b = 1)$. Wir lösen dies durch addieren der Gleichungen:

$$\mathbb{I} + \mathbb{II} \cdot (-2) \implies 2a - 10a + 2b - 2b = 0 - 2 \iff -8a = -2 \iff a = \frac{1}{4}$$

Nun lässt sich $a = \frac{1}{4}$ in die andere Gleichung einsetzen:

$$5 \cdot \frac{1}{4} + b = 1 \iff b = -\frac{1}{4}$$

Also gilt nach Prinzip der Partialbruchzerlegung nun

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \frac{1}{4(2k+1)} - \frac{1}{4(2k+5)}$$

Ebenso gilt also

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+1)} - \frac{1}{4(2k+5)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+1)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)}$$

Durch Indizienverschiebung erhalten wir

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+1)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)}$$

Dies entspricht einer teleskopischen Summe, also folgt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{4(2k+5)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4(2k+5)}$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{4(2k+5)} = \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{20} + \frac{1}{28} = \frac{3}{35}$$

Insgesamt folgt also

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \frac{3}{35}$$

Also konvergiert die Reihe

$$(s_n)_{n \geq 2} := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)} \quad \text{mit} \quad \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{3}{35}$$

Aufgabe 3

a)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} := (-1)^{k-1}\dfrac{2^k}{k^k}$. Wir betrachten

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\left(\frac{(-1)^k\cdot 2^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}\right)}{\left(\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2^k}{k^k}\right)}\right| = \frac{\left(\frac{2^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}\right)}{\left(\frac{2^k}{k^k}\right)} = \frac{2^{k+1}\cdot k^k}{(k+1)^{k+1}\cdot 2^k} = \frac{2k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

$$= \frac{2}{k+1}\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \overset{k\geq 0}{\equiv} \frac{2}{k+1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} = \frac{2}{k+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$$

Wir wissen aus Hausaufgabe 5, dass

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k = e^x \quad \text{also auch} \quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e}$$

Somit lassen sich die Grenzwertsätze wie folgt anwenden:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{k+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{k+1}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = 0\cdot\frac{1}{e} = 0$$

Damit gilt nun $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ und nach dem Quotientenkriterium konvergiert die gegebene Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut. Offensichtlich konvergiert die Reihe dann auch (3.14).

b)

Wir wissen nach Skript und den letzten Hausaufgaben, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ eine monoton fallende und reelle Nullfolge ist. Nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 3.12) folgt dann, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergiert. Weiterhin gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

Hinzukommend gilt

$$\forall k\geq 1\colon \sqrt{k}\leq k \iff \frac{1}{\sqrt{k}}\geq\frac{1}{k}$$

Somit lässt sich durch das Majorantenkriterium (Satz 3.17) folgendes schließen:

Sei $\sum_{k=1}^{\infty}(d_k)_{k\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ die harmonische Reihe. Wir wissen nach Satz 3.6, dass diese bestimmt gegen ∞ divergiert. Weiterhin gilt:

$$\forall k\in\mathbb{N}\colon |a_k| = \frac{1}{\sqrt{k}}\geq\frac{1}{k} = d_k\geq 0$$

Somit divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right|$ ebenfalls. Also ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent.

c)

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} := \dfrac{k^2}{2^k}$. Es gilt:

$$\left|\frac{a^{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}}\right| = \left|\frac{(k+1)^2\cdot 2^k}{2^{k+1}\cdot k^2}\right| = \frac{(k+1)^2}{2\cdot k^2} = \frac{k^2+2k+1}{2k^2} = \frac{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}}{2}$$

Wir betrachten nun $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \dfrac{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}}{2}$. Da 1 und 2 Konstanten sind und $x_k = \frac{2}{k}$ und $y_k = \frac{2}{k^2}$ Nullfolgen sind (Bsp. 1.11), lassen sich die Limitenregeln wie folgt anwenden:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}}{2} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} 1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}}{\lim\limits_{k\to\infty} 2} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} 1+\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2}{k}+\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}}{2} = \frac{1+0+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Daher gilt das Quotientenkriterium für die gegebene Reihe:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

und somit ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^2}{2^k}$ absolut konvergent. Offensichtlich ist die Reihe dann auch konvergent (Satz 3.16).

d)

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} := \dfrac{(-1)^k k}{k+1}$. Die Grenzwertsätze lassen sich wie folgt anwenden:

$$\lim_{k\to\infty}|a_k| = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{k}} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} 1}{\lim\limits_{k\to\infty} 1+\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Damit ist $|a_k|$ keine Nullfolge, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$ kann nicht konvergieren (3.9). Damit kann die gegebene Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergieren. Wir wissen nun, dass $\frac{k}{k+1}$ für $k\to\infty$ gegen 1 konvergiert. Es folgt, dass a_k im unendlichen zwischen $-\frac{1}{1} = -1$ und $\frac{1}{1} = 1$ alterniert, sich also wie die Folge $(-1)^k$ verhält, welche wie im Skript bewiesen (1.10) unbestimmt divergiert. Da a_k folglich keine Nullfolge sein kann, folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht konvergiert (3.9).

e)

Die gegebene Reihe lässt sich wie folgt umformen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi^k}{4^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi^k}{4^k}\cdot\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^k\cdot\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^k}{k!}$$

Da $\frac{\pi}{4}\in\mathbb{R}$ gilt, folgt nach Satz 3.19:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^k}{k!} = \exp\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\pi/4} \quad \text{und außerdem} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^k}{k!}$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\pi^k}{4^k k!}$ generell und absolut gegen $e^{\pi/4}$.

Aufgabe 4

Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, muss nach Definition auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergieren. Nach Korollar 3.9 ist $|a_k|$ also eine Nullfolge. Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass gilt:

$$\forall k > N\colon |a_k| < 1$$

Weiterhin gilt $x^2 < x$ für $|x| < 1$, also ist $|a_k|$ eine Majorante und es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ sodass das Majorantenkriterium für ${a_k}^2$ gilt:

$$\forall k > N\colon |{a_k}^2| \leq |a_k|$$

Damit gilt nach dem Majorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$ absolut konvergiert und damit auch konvergiert.

Aufgabe 5

$|e^x - s_n(x)|$ lässt sich wie folgt nach oben abschätzen. Wir benutzen den Satz 3.5 der geometrischen Reihe (G) und dass $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ gilt (X):

$$\begin{aligned}
|e^x - s_n(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| < \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{(n+1)!}\right| \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=n+1}^{\infty} |x^k| \overset{(X)}{<} \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \overset{(G)}{=} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Da e^x streng monoton wachsend ist (Satz 3.21) gilt außerdem:

$$\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): e^{-0.5} < e^x$$

Also lässt sich die gegebene Ungleichung nun wie folgt darstellen. Sei $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$|e^x - s_n(x)| < \frac{2}{(n+1)!} \leq \frac{e^{-1/2}}{10^{16}} < \frac{e^x}{10^{16}}$$

Durch ausprobieren von ein paar Werten für n lässt sich dies schnell eingrenzen:

$$\frac{2}{(18+1)!} < \frac{e^{-1/2}}{10^{16}} < \frac{2}{(17+1)!}$$

Also kann die Gültigkeit dieser Ungleichung für alle $n \geq 18$ gewährleistet werden.