Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 11

Aufgabe 1

a)

(i) Mit (VII 1.11) folgt:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} = [x^\alpha \cdot \ln(x+|\alpha-1|)]' &= [x^\alpha]' \cdot \ln(x+|\alpha-1|) + x^\alpha \cdot [\ln(x+|\alpha-1|)]' \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \cdot \ln(x+|\alpha-1|) + x^\alpha \cdot \left(\frac{[x+|\alpha-1|]'}{x+|\alpha-1|}\right) \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \cdot \ln(x+|\alpha-1|) + x^\alpha \cdot \frac{1}{x+|\alpha-1|}\end{aligned}$$

(ii) Es ist $g(x) = \cos\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right)$ nicht für $x=0$ definiert, da sonst durch 0 geteilt werden würde. cos und sin sind wie Polynome sonst für ganz $\mathbb{R}$ definiert, also ist $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ der Definitionsbereich von g. Weiterhin sind nach (VI 2.2) $\cos, \sin$ und Polynome, sowie rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich stetig. Also ist g stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Mit der Kettenregel und (VII 1.5, 1.7) folgt nun:

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx} = \left[\cos\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right)\right]' &= \cos'\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left[\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right]' \\ &= -\sin\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\sin'\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \cdot \left[x^2+\frac{1}{x}\right]'\right) \\ &= -\sin\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\left[x^2\right]' + \left[\frac{1}{x}\right]'\right)\right) \\ &= -\sin\left(\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \cos\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

b)

(iii)

$$\frac{dh}{dx} = \left[\cos\left(\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\right]' = -\sin\left(\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\cdot\left[\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right]'$$

$$= -\sin\left(\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\cdot\left(\frac{\left[e^x+\sqrt{1+x^2}\right]'\cdot(\arctan x)-(e^x+\sqrt{1+x^2})\cdot[\arctan x]'}{(\arctan x)^2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\cdot\left(\frac{\left(e^x+\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\right)\cdot(\arctan x)-(e^x+\sqrt{1+x^2})\cdot\left(\frac{1}{\tan^{-1}(\arctan x)}\right)}{(\arctan x)^2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\cdot\left(\frac{\left(e^x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot(\arctan x)-(e^x+\sqrt{1+x^2})\cdot\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{(\arctan x)^2}\right)$$

(iv)

$$\frac{di}{dx} = [\cosh x]' = \left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x+e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left([e^x]'+[e^{(-1)x}]'\right) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh x$$

c)

(v)

$$\frac{dj}{dx} = [x^x]' = \left[e^{x\ln(x)}\right]' = e^{x\ln(x)}\cdot[x\ln(x)]' = e^{x\ln(x)}\cdot([x]'\cdot\ln(x)+[\ln(x)]'\cdot x)$$
$$= e^{x\ln(x)}\cdot(1\cdot\ln(x)+\frac{1}{x}\cdot x) = e^{x\ln(x)}\cdot(\ln(x)+1)$$

(vi)

$$\frac{dk}{dx} = \left[\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\right]' = \left[\exp\left(\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right)\right]'$$
$$= \exp\left(\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right)\cdot\left[\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'$$
$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left[\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'$$
$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left([\sin(x)]'\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\left[\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'\right)$$
$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\frac{[1+\sqrt{x}+x^2]'}{1+\sqrt{x}+x^2}\right)$$
$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x}{1+\sqrt{x}+x^2}\right)$$