Gruppe $\boxed{9}$ Phil Pützstück, 377247
Lineare Algebra für Informatiker

Hausaufgabe 9

Aufgabe 52

Die Rekursionsgleichung ist $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $a_0 = -1$ und $a_1 = 1$.
Das entsprechend kodierte Polynom (siehe VL) ist dann $f = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.
f hat Nullstellen $b_1 = 1, b_2 = 2$. Nach Satz 6.75 folgt nun, dass

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_{n+2} = -2a_n + 3a_{n+1}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = \frac{b_1^n b_2 - b_2^n b_1}{b_2 - b_1} x_0 + \frac{b_2^n - b_1^n}{b_2 - b_1} x_1 = 2^{n+1} 3$$

Dies entspricht der gesuchten geschlossenen Formel.

Aufgabe 53

a) Es gilt:

$$\frac{1}{2}(||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2) = \frac{1}{2}(\langle v+w, v+w\rangle - \langle v,v\rangle - \langle w,w\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(\langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle) = \langle v,w\rangle$$

b)

$$||v+w||^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\leq} ||v||^2 + 2||v||||w|| + ||w||^2 = (||v|| + ||w||)^2$$

$$\overset{\text{Positivität}}{\iff} ||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$$

c)

$$||v|| = ||v - w + w|| \leq ||v-w|| + ||w|| \iff ||v|| - ||w|| \leq ||v-w||$$

Da v, w beliebig gilt also auch

$$|||v|| - ||w||| \leq ||v-w||$$

d)

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle - 2\langle v,w\rangle$$

$$= 2\langle v,v\rangle + 2\langle w,w\rangle = 2(||v||^2 + ||w||^2)$$

e) Sei $v \perp w \iff \langle v, w\rangle = 0$. Dann:

$$||v+w|| - ||v-w|| = \sqrt{\langle v+w, v+w\rangle} - \sqrt{\langle v-w, v-w\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle + 2\langle v,w\rangle} - \sqrt{\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle - 2\langle v,w\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle} - \sqrt{\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle} = 0 \iff ||v+w|| = ||v-w||$$

Sei nun $||v+w|| = ||v-w|| \iff ||v+w|| - ||v-w|| = 0$. Dann gilt (s.o.) auch

$$\sqrt{\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle + 2\langle v,w\rangle} = \sqrt{\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle - 2\langle v,w\rangle}$$

Da $\sqrt{\ }$ injektiv und so folgt dann auch

$$2\langle v,w\rangle = -2\langle v,w\rangle \iff \langle v,w\rangle = 0$$

Insgesamt gilt also:

$$||v+w|| = ||v-w|| \iff ||v+w|| - ||v-w|| = 0 \iff v \perp w$$