

Hausaufgabe 3

Aufgabe 16

Projektionen sind im Skript (Def. 1.84) deutlich allgemeiner als für nur 2 Untervektorräume definiert. Wir halten uns im folgenden an die Definition des Skripts.

a)

Es sei ein K -Vektorraum V , ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein n -Tupel (U_1, \dots, U_n) von K -Untervektorräumen von V mit $V = \sum_{i \in [1, n]} U_i$ gegeben.

Wir überprüfen die Kriterien für Vektorraumhomomorphismen (2.2):

Seien $v, v' \in V$. Dann existieren $u, u' \in \times_{i \in [1, n]} U_i$ sodass $v = \sum_{i \in [1, n]} u_i$ und $v' = \sum_{i \in [1, n]} u'_i$. Sei nun $i \in [1, n]$. Dann gilt

$$\text{pr}_i^V(v + v') = \text{pr}_i^V\left(\sum_{j \in [1, n]} (u_j + u'_j)\right) \stackrel{\text{def}}{=} u_i + u'_i \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_i^V\left(\sum_{j \in [1, n]} u_j\right) + \text{pr}_i^V\left(\sum_{j \in [1, n]} u'_j\right) = \text{pr}_i^V(v) + \text{pr}_i^V(v')$$

Sei weiter nun $a \in K$. Es gilt

$$\text{pr}_i^V(av) = \text{pr}_i^V\left(\sum_{j \in [1, n]} au_j\right) \stackrel{\text{def}}{=} au_i \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot \text{pr}_i^V\left(\sum_{j \in [1, n]} u_j\right) = a \cdot \text{pr}_i^V(v)$$

Damit sind die Kriterien aus (2.2) erfüllt.

Es folgt, dass Projektionen (Endo-)Vektorraumhomomorphismen sind. □

b)

Sei V ein K -Vektorraum. Sei weiter ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein n -Tupel (U_1, \dots, U_n) von K -Untervektorräumen von V mit $V = \sum_{i \in [1, n]} U_i$ gegeben. Dann existiert $u \in \times_{i \in [1, n]} U_i$ sodass $v = \sum_{i \in [1, n]} u_i$.

Sei nun $i \in [1, n]$ und $p := \text{pr}_i^V$. Es gilt

$$(p \circ p)(v) = p(p(v)) \stackrel{\text{def}}{=} p(u_i) = p\left(\sum_{j \in [1, n]} \delta_{j,i} \cdot u_j\right) \stackrel{\text{def}}{=} u_i \stackrel{\text{def}}{=} p\left(\sum_{j \in [1, n]} u_j\right) = p(v)$$

wobei δ das Kronecker-Delta bezeichnet. Es folgt $p \circ p = p$. □

c)

Für $v, v' \in V$ ist $\varphi(v) + \varphi(v') = \varphi(v + v') \in \text{Im } \varphi$. Ferner ist $0 = \varphi(0) \in \text{Im } \varphi$.

Für $a \in K$ ist schließlich $a\varphi(v) = \varphi(av) \in \text{Im } \varphi$.

Damit ist nach (1.15) $U_1 := \text{Im } \varphi$ ein K -Untervektorraum von V .

Zuerst ist $0 = 0 - \varphi(0) \in U_2$. Für $v, v' \in V$ ist $(v + v') \in V$ und $(v - \varphi(v)), (v' - \varphi(v')) \in U_2$. Es gilt

$$(v - \varphi(v)) + (v' - \varphi(v')) = (v + v') - (\varphi(v) + \varphi(v')) = (v + v') - \varphi(v + v') \in U_2$$

Ferner ist für $a \in K$ auch $av \in V$ und damit

$$a(v - \varphi(v)) = av - a\varphi(v) = av - \varphi(av) \in U_2$$

Damit ist nach (1.15) U_2 ein K -Untervektorraum von V .

Sei nun $v \in V$. Es gilt $v = v + \varphi(v) - \varphi(v) = \varphi(v) + (v - \varphi(v)) \in (U_1 + U_2)$. Also $V \subseteq (U_1 + U_2)$.

Sei nun $v \in (U_1 + U_2)$. Dann gilt $v = u_1 + u_2$ für $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$. Ferner gilt $U_1 \leq V$ und $U_2 \leq V$, also $u_1, u_2 \in V$. Es folgt direkt nach den Vektorraumgesetzen, dass auch $v = u_1 + u_2 \in V$. Also $(U_1 + U_2) \subseteq V$. Es folgt $V = U_1 + U_2$. \square

d) Sei $u_1 \in U_1$. Dann gilt $u_1 = \varphi(v)$ für ein $v \in V$. Ferner gilt $\varphi \circ \varphi = \varphi^*$. Es folgt

$$\varphi(u_1) = \varphi(\varphi(v)) = \varphi^*(v) = u_1$$

Sei nun $u_2 \in U_2$. Dann gilt $u_2 = v - \varphi(v)$ für ein $v \in V$. Es folgt

$$\varphi(u_2) = \varphi(v - \varphi(v)) = \varphi(v) + \varphi(-\varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0$$

\square

Aufgabe 17

Sei $X \in V$ mit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\varphi(X) = AXA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c+d \\ 0 & c+d \end{pmatrix} \quad (1)$$

Seien nun $X, X' \in V$. Dann ist $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $X' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

für $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$. Es folgt:

$$\varphi(X) + \varphi(X') \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} 0 & c+d \\ 0 & c+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c'+d' \\ 0 & c'+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c+d+c'+d' \\ 0 & c+d+c'+d' \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \varphi(X + X')$$

Sei $X \in V$, also $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Sei ferner $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$x\varphi(X) \stackrel{(1)}{=} x \cdot \begin{pmatrix} 0 & c+d \\ 0 & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & xc+xd \\ 0 & xc+xd \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \varphi\left(\begin{pmatrix} xa & xb \\ xc & xd \end{pmatrix}\right) = \varphi(xX)$$

Nach (2.2) ist φ damit linear.

Mit (1) folgt für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\text{Ker}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \stackrel{(1)}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid c = -d \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es folgt direkt $\text{Ker}(\varphi) = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle$, also dass $(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\text{Ker}(\varphi)$ ist, da auch weiter $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$.

Ebenso folgt mit (1) für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \stackrel{(1)}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c+d \\ 0 & c+d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}A$$

Folglich gilt $\text{Im}(\varphi) = \langle A \rangle$, also dass (A) eine Basis von $\text{Im}(\varphi)$ ist, da auch weiter $A \neq 0$.

b)

Es ist (v_1, v_2, v_3) eine Basis von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$, denn:

$$(1, 0, 0) = \frac{v_1 + v_2 - v_3}{2} \quad (0, 1, 0) = \frac{v_1 - v_2 + v_3}{2} \quad (0, 0, 1) = \frac{-v_1 + v_2 + v_3}{2}$$

Damit gilt nach Proposition 2.19, dass es genau eine lineare Abbildung φ mit

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Für $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $a = x + y, b = x + z, c = y + z$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + z\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ -2y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+y) & 0 \\ -2y & -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ b-a-c & a-b-c \end{pmatrix} \end{aligned}$$