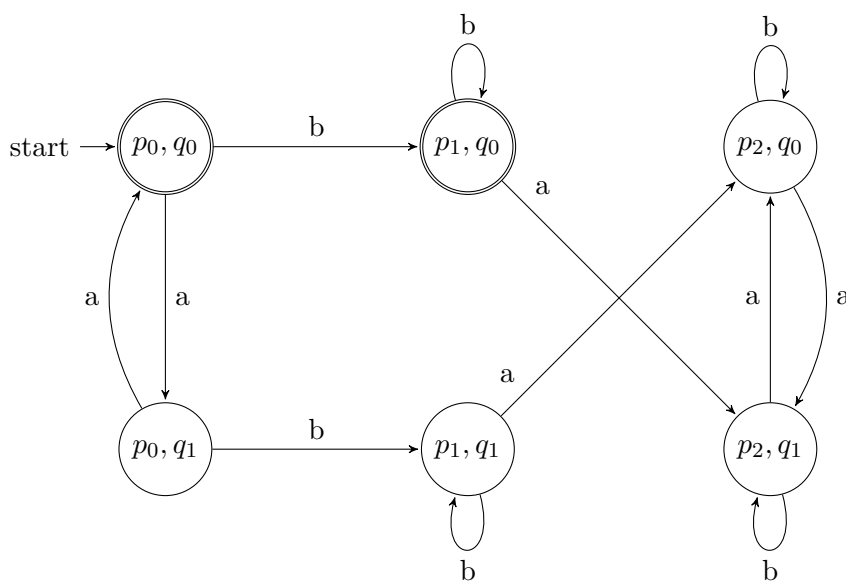


## Hausaufgabe 2

### Aufgabe 6



Die Endzustände wurden so gewählt damit die akzeptierenden Läufe von  $L(\mathcal{A})$  enthalten sind und die akzeptierenden Läufe von  $L(\mathcal{B})$  nicht.

### Aufgabe 7

Sei  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein DFA mit Sprache  $L(\mathcal{A})$ . Wir definieren den  $\varepsilon$ -NFA  $\mathcal{B} := (Q', \Sigma', \Delta, q_{-1}, F)$ , wobei  $Q' := Q \cup \{q_{-1}\}$ ,  $\Sigma' := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und

$$\Delta := \{(q, a, q') \mid \delta(q, a) = q'\} \cup \{(q_{-1}, \varepsilon, f) \mid f \in F\}$$

für  $q, q' \in Q$  und  $a \in \Sigma$ .

Wir zeigen zuerst  $L_{\text{suff}}(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{B})$ .

Sei  $w \in L_{\text{suff}}(\mathcal{A})$  gegeben. Seien ferner  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Dann existiert ein  $u \in L(\mathcal{A})$  sodass  $uw \in L(\mathcal{A})$ . Durch  $u \in L(\mathcal{A})$  existiert ein Lauf von  $\mathcal{A}$  über  $u$ ;  $(r_0, r_1 \cdots r_m)$  sodass  $r_0 = q_0$  und  $r_n \in F$ . Ferner gibt es durch  $uw \in L(\mathcal{A})$  eine Zustandsfolge  $(x_0, \sigma_1, x_1, \sigma_2 \cdots \sigma_n, x_n)$  sodass  $x_0 = r_m$ ,  $x_n \in F$  und  $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n) = w$ . Nun können wir den Lauf  $(q_{-1}, \varepsilon, x_0, \sigma_1, x_1, \sigma_2, x_2, \cdots \sigma_n, x_n)$  in  $\mathcal{B}$  angeben. Da beide Automaten die selben Endzustände haben und  $q_{-1}$  der Startzustand von  $\mathcal{B}$  ist, folgt daraus  $w \in L(\mathcal{B})$ .

Wir zeigen nun  $L(\mathcal{B}) \subseteq L_{\text{suff}}(\mathcal{A})$ .

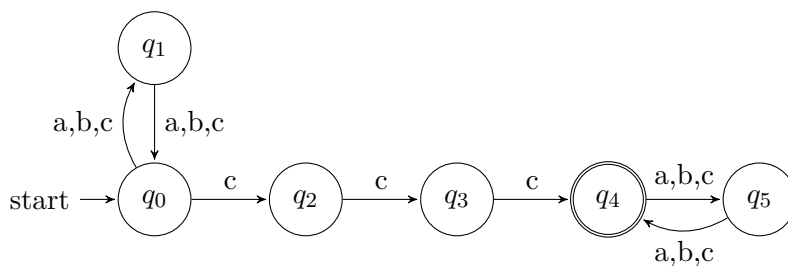
Sei  $w \in L(\mathcal{B})$  gegeben. Sei ferner  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann existiert ein Lauf  $r := (q_{-1}, \varepsilon, r_0, \sigma_1 \cdots, \sigma_n, r_n)$  in  $\mathcal{B}$  mit  $(\sigma_1 \cdots \sigma_n) = w$  und  $r_0, r_n \in F$ . Da  $F$  eben die Endzustände von  $\mathcal{A}$  sind, gibt es auch ein Wort  $u \in L(\mathcal{A})$  sodass der Lauf von  $\mathcal{A}$  über  $u$  eben an  $r_1 \in F$  endet. Nun lässt sich der Lauf von  $w$  ohne die  $\varepsilon$ -Transition  $(r_0, \sigma_1, \cdots \sigma_n, r_n)$  einwandfrei an den von  $u$  in dem DFA  $\mathcal{A}$  anhängen um zu einem Weitem Endzustand von  $\mathcal{A}$  zu kommen. Es folgt  $uw \in L(\mathcal{A})$  und damit  $w \in L_{\text{suff}}(\mathcal{A})$ .

Insgesamt gilt also  $L(\mathcal{B}) = L_{\text{suff}}(\mathcal{A})$ . Aus der Vorlesung ist bekannt, dass alle Sprachen, welche  $\varepsilon$ -NFA-erkennbar sind auch DFA-erkennbar sind.  $\square$

## Aufgabe 8

a)



b)

Alle läufe von  $\mathcal{A}$  auf dem Wort bbba:

$(q_0, b, q_0, b, q_0, b, q_1, a, q_2)$

$(q_0, b, q_1, b, q_0, b, q_1, a, q_2)$

c)

$E(\mathcal{A}, w) := \{q_0, q_1\}$

Das Wort  $cbbca$  wird akzeptiert.

## Aufgabe 9

Wir zeigen ( $w \in L(\mathcal{A}) \implies ac$  kommt nicht als Infix in  $w$  vor) für Wörter  $w$  der Länge  $n \in \mathbb{N}$ .

Sei  $n = 0$ . Es folgt sofort  $w = \varepsilon$ . Weiter gilt  $\varepsilon \in L(\mathcal{A})$ . Ferner kann in  $w$  nicht  $ac$  als Infix vorkommen. Damit hält die Aussage für  $n = 0$ .

Sei nun ein beliebig aber festes  $n \in \mathbb{N}$  gegeben sodass für jedes Wort  $w'$  mit  $|w'| = n$  aus  $w' \in L(\mathcal{A})$  folgt, dass  $ac$  nicht als Infix in  $w'$  vorkommt (IV).

Sei dann  $w = w'x$  mit  $w \in L(\mathcal{A})$  für  $w' \in L(\mathcal{A})$  mit  $|w'| = n$  und  $x \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  gegeben. Dann ist  $|w| = n + 1$ . Wir unterscheiden 2 Fälle:

**Fall 1:** Der Lauf von  $\mathcal{A}$  auf  $w' = (w'_0, \dots, w'_n)$  endet in  $q_a \in F_{\mathcal{A}}$ .

Dann gilt nach IV dass  $ac$  nicht in  $w'$  als Infix vorkommt. Jedoch gilt  $w'_n = a$ .

Es folgt aber  $x \neq c$ , da sonst durch  $\delta_{\mathcal{A}}(q_a, c) = q_{ac}$  und  $q_{ac} \notin F_{\mathcal{A}}$  direkt  $w'x = w \notin L(\mathcal{A})$  folgen würde. Folglich kann auch in  $w$  nicht das Infix  $ac$  vorkommen.

**Fall 2:** Der Lauf von  $\mathcal{A}$  auf  $w' = (w'_0, \dots, w'_n)$  endet in  $q_{\varepsilon} \in F_{\mathcal{A}}$ .

Dann gilt nach IV dass  $ac$  nicht in  $w'$  als Infix vorkommt. Weiter ist  $w'_n \neq a$ . Damit folgt für  $x \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ , dass  $w = w'x$  ebenfalls nicht  $ac$  als Infix enthält.

Insgesamt folgt die Behauptung in allen Fällen für  $n + 1$ . Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt nun für alle Wörter  $w \in \Sigma_{\mathcal{A}}^*$ , dass

$$w \in L(\mathcal{A}) \implies ac \text{ kommt nicht als Infix in } w \text{ vor}$$

Wir zeigen ( $ac$  kommt nicht als Infix in  $w$  vor  $\implies w \in L(\mathcal{A})$ ) für Wörter  $w$  der Länge  $n \in \mathbb{N}$ .

Sei  $n = 0$ . Für jedes Wort  $w$  mit  $|w| = n$  folgt dann  $w = \varepsilon$ . Offensichtlich kann  $ac$  nicht als Infix in  $w$  vorkommen. Weiter ist der Lauf von  $\mathcal{A}$  über  $\varepsilon$  akzeptierend, es folgt also  $w \in L(\mathcal{A})$ .

Sei nun ein beliebig aber festes  $n \in \mathbb{N}$  gegeben sodass für jedes Wort  $w'$  mit  $|w'| = n$  in welchem nicht  $ac$  als Infix vorkommt folgt, dass  $w' \in L(\mathcal{A})$  (IV).

Sei dann  $w = w'x$  mit sodass  $ac$  nicht als Infix in  $w, w'$  vorkommt mit  $x \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  gegeben.

Dann ist  $|w| = n + 1$ . Wir unterscheiden 2 Fälle:

**Fall 1:**  $w'_n = a$ .

Da  $ac$  nicht in  $w = w'x$  als Infix vorkommt folgt sofort  $x \neq c$ . Durch  $w' \in L(\mathcal{A})$  (IV) und  $w'_n = a$  folgt, dass der Lauf von  $\mathcal{A}$  über  $w'$  in  $q_a$  endet. Da dann das nächste eingelesene Symbol,  $x \neq c$  ist, folgt, dass  $w = w'x \in L(\mathcal{A})$ .

**Fall 2:**  $w'_n \neq a$ .

Da  $w' \in L(\mathcal{A})$  nach IV endet der Lauf von  $\mathcal{A}$  über  $w'$  in  $q_{\varepsilon}$ . Es gilt für jedes  $x \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  nun immernoch, dass  $ac$  nicht als Infix in  $w = w'x$  vorkommt. Weiter gilt  $\forall x \in \Sigma_{\mathcal{A}} : \delta_{\mathcal{A}}(q_{\varepsilon}, x) \in F_{\mathcal{A}}$ . Folglich ist also  $w \in L(\mathcal{A})$ .

Insgesamt folgt die Behauptung in allen Fällen für  $n + 1$ . Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt nun für alle Wörter  $w \in \Sigma_{\mathcal{A}}^*$ , dass

$$ac \text{ kommt nicht als Infix in } w \text{ vor} \implies w \in L(\mathcal{A})$$

□