Gruppe $\boxed{\textbf{9}}$ Phil Pützstück, 377247
Lineare Algebra für Informatiker

Hausaufgabe 6

Aufgabe 34

a)

Syndrom	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
Anführer	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Syndrom	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
Anführer	$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

b)

$x_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$. Syndrom $Bx_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Decodiere x_1 zu $x_1 - e_{Bx_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = x_1 \in C$.

$$x_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}. \text{ Syndrom } Bx_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \text{ Decodiere } x_2 \text{ zu } x_2 - e_{Bx_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \in C.$$

$$x_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \text{ Syndrom } Bx_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}. \text{ Decodiere } x_3 \text{ zu } x_3 - e_{Bx_3} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in C.$$

Aufgabe 35

Lemma 1: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $\pi \in S_n$ mit $\pi \neq \mathrm{id}$ existiert ein $k \in [1, n]$ mit $\pi(k) > k$.

Beweis durch Widerspruch.
Sei also $\pi \in S_n, \pi \neq \mathrm{id}$ und $\pi(k) \leq k$ für alle $k \in [1, n]$. Wir führen Induktion über k :

Für $k = 1$ haben wir $\pi(k) = 1$, da $\{i \in [1, n] \mid i \leq k\} = \{1\}$, also nur eine Möglichkeit besteht. Es gilt also $\pi(k) = k$ für $k = 1$.

Sei nun ein $k \in [1, n]$ gegeben, sodass $\forall k' \in [1, k-1] : \pi(k') = k'$. Da Permutationen Bijektionen, also insbesondere injektiv sind, ist die Menge der möglichen Bilder für k gleich
$\{i \in [1, n] \setminus [1, k-1] \mid i \leq k\} = \{k\}$. Folglich muss also auch $\pi(k) = k$ gelten.

Insgesamt folgt also $\forall k \in [1, n] : \pi(k) = k$, was ein Widerspruch zur Annahme $\pi \neq \mathrm{id}$ ist.

Damit haben ist das zu zeigende bewiesen, d.h. es gilt

$$\forall \pi \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\} : \exists k \in [1, n] : \pi(k) > k$$

a)

Sei also eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ gegeben welche obere Dreicksform hat. Mit Lemma 1 folgt nun:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} (\mathrm{sgn}\ \pi) \prod_{j \in [1,n]} A_{\pi(j),j} = (\mathrm{sgn}\ \mathrm{id}) \prod_{j \in [1,n]} A_{\mathrm{id}(j),j} + \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi \neq \mathrm{id}}} (\mathrm{sgn}\ \pi) \prod_{j \in [1,n]} A_{\pi(j),j}$$

Da nach Lemma 1 für jede Permutation außer id also ein $k \in [1, n]$ mit $\pi(k) > k$ existiert ist das Produkt $\prod_{j \in [1,n]} A_{\pi(j),j} = 0$ für alle diese π, da nach Konstruktion von A stetes $A_{i,j} = 0$ für $i, j \in [1, n]$ mit $i > j$. Also:

$$\det(A) = 1 \cdot \prod_{j \in [1,n]} A_{j,j} + \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi \neq \mathrm{id}}} (\mathrm{sgn}\ \pi) \prod_{j \in [1,n]} 0 = \prod_{j \in [1,n]} A_{j,j}$$

b) Ein evtl. etwas einfacherer Beweis mittels Induktion lässt sich im Skript finden.

Seien also $A \in R^{n \times n}$ mit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ wobei $B \in R^{k \times k}, C \in R^{k \times (n-k)}, D \in R^{(n-k)\times(n-k)}$.
Dann ist:

$$\det(B) \cdot \det(D) = \left(\sum_{\pi \in S_k} (\text{sgn } \pi) \prod_{j \in [1,k]} B_{\pi(j),j} \right) \cdot \left(\sum_{\pi' \in S_{n-k}} (\text{sgn } \pi') \prod_{j \in [1,n-k]} D_{\pi'(j),j} \right)$$

$$= \left(\sum_{\pi \in S_k} (\text{sgn } \pi) \prod_{j \in [1,k]} A_{\pi(j),j} \right) \cdot \left(\sum_{\pi' \in S_k} (\text{sgn } \pi') \prod_{j \in [1,n-k]} A_{\pi'(j)+k,j+k} \right)$$

Wir fassen nun alle möglichen Permutationen in S_k und S_{n-k} zusammen in:

$X := \{\sigma \in S_n \mid \exists \pi \in S_n, \pi' \in S_{n-k} : (\forall j \in [1,k] : \sigma(j) = \pi(j)) \wedge (\forall j \in [1, n-k] : \sigma(k+j) = k+\pi'(j))\}$

Sei nun $\sigma \in X$. Dann existieren $\pi \in S_k, \pi' \in S_{n-k}$ nach Vorschrift der Menge X.
Daraus folgt $\text{sgn } \sigma = (\text{sgn } \pi)(\text{sgn } \pi')$. Weiter ist dann:

$$\prod_{j \in [1,k]} A_{\pi(j),j} \prod_{j \in [1,n-k]} A_{\pi'(j)+k,j+k} = \prod_{j \in [1,n]} A_{\sigma(j),j}$$

Das Multiplizieren der Summen entspricht den möglichen Kombinationen für π, π', da z.B. für ein $\pi \in S_k$ genau $|S_{n-k}|$ verschiedene $\sigma \in X$ existieren. Insgesamt haben wir nun:

$$\det(B) \cdot \det(D) = \sum_{\sigma \in X} (\text{sgn } \sigma) \prod_{j \in [1,n]} A_{\sigma(j),j}$$

Da nach Aufbau von A aber stets $A_{i,j} = 0$ für $i \in [k+1, n]$ und $j \in [1,k]$, folgt mit Lemma 1 und $\text{id} \in X$, dass:

$$\forall \pi \in S_n \setminus X : (\exists j \in [1,k] : (\pi(j) > k \implies A_{\pi(j),j} = 0) \implies \prod_{j \in [1,n]} A_{\pi(j),j} = 0)$$

$$\implies \sum_{\sigma \in X} (\text{sgn } \sigma) \prod_{j \in [1,n]} A_{\sigma(j),j} = \underbrace{\sum_{\pi \in S_n \setminus X} (\text{sgn } \pi) \prod_{j \in [1,n]} A_{\pi(j),j}}_{=\,0} + \sum_{\sigma \in X} (\text{sgn } \sigma) \prod_{j \in [1,n]} A_{\sigma(j),j}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} (\text{sgn } \pi) \prod_{j \in [1,n]} A_{\pi(j),j} = \det(A)$$

c) Nach Satz A.164 lässt sich jede Matrix über einem Körper in reduzierte Zeilenstufenform bringen (durch Elementaroperationen, für welche wir die entsprechende Änderung der Determinante definiert haben). Diese ist dann insbesondere eine obere Dreiecksmatrix. Mit a) haben wir dann ein leichte Formel für die Determinante dieser reduzierten Matrix.