

## Hausaufgabe 10

---

### Aufgabe 1

a)

Für den Grenzwert  $\lim_{x \downarrow 3} f(x)$  gilt stets  $x > 3$  und damit  $|x - 3| = x - 3 > 0$ , also auch:

$$\lim_{x \downarrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{x - 3}{x - 3} = 1$$

Für den Grenzwert  $\lim_{x \uparrow 3} f(x)$  gilt stets  $x < 3$  und damit  $x - 3 < 0 < |x - 3|$ , also auch:

$$\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \uparrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{-(x - 3)}{x - 3} = -1$$

Da nun  $\lim_{x \downarrow 3} f(x) \neq \lim_{x \uparrow 3} f(x)$  gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  nicht existiert und  $f(x)$  nicht stetig ist.

b)

Da die Polynome  $x^2 + 5$  und  $1 - 3x$  für  $x = -2$  wohldefiniert sind, lässt sich hier der Grenzwert durch Einsetzen individuell bestimmen. Daraus folgt auch, dass (wie bei praktisch jedem Polynom) der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow -2}$  existiert (1.6) und dann mit (1.10) gilt:

$$\lim_{x \uparrow -2} x^2 + 5 = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 5 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -2} 1 - 3x = \lim_{x \rightarrow -2} 1 - 3x$$

Es folgt also:

$$\lim_{x \uparrow -2} x^2 + 5 = (-2)^2 + 5 = 9 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -2} 1 - 3x = 1 - 3(-2) = 7$$

Weiterhin ist gilt wie in a) für den Grenzwert  $\lim_{x \uparrow -2} g(x)$ , dass  $x < -2$  und damit nach Konstruktion  $g(x) = x^2 + 5$ . Analog dazu gilt für  $\lim_{x \downarrow -2} g(x)$ , dass  $x > -2$  und damit nach Konstruktion  $g(x) = 1 - 3x$ . Es folgt also

$$\lim_{x \uparrow -2} g(x) = \lim_{x \uparrow -2} x^2 + 5 = 9 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -2} g(x) = \lim_{x \downarrow -2} 1 - 3x = 7$$

Da nun  $\lim_{x \uparrow -2} g(x) \neq \lim_{x \downarrow -2} g(x)$  gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$  nicht existiert und  $g(x)$  nicht stetig ist.

c) Analog zu Beispiel 1.18 lässt sich begründen, dass  $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$  und  $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$  gilt:

Zu gegebenem  $M > 0$  wähle  $a = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$ . Dann ist für  $0 < x < a$ :

$$\frac{1}{x^3} > \frac{1}{a^3} = M$$

Also gilt  $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$ . Analog dazu wählen wir zu gegebenem  $M > 0$  wieder  $b = -\frac{1}{\sqrt[3]{M}}$ .

Dann ist für  $b < x < 0$ :

$$\frac{1}{x^3} < \frac{1}{b^3} = -M$$

Also gilt  $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$ .

Weiterhin gilt für  $\lim_{x \downarrow 0} j(x)$  bzw.  $\lim_{x \uparrow 0} j(x)$  stets  $x \neq 0$  und damit auch

$$\lim_{x \downarrow 0} j(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \uparrow 0} j(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

Da nun  $\lim_{x \uparrow 0} j(x) \neq \lim_{x \downarrow 0} j(x)$  gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} j(x)$  nicht existiert und  $j(x)$  nicht stetig ist.

## Aufgabe 2

a)

Es gilt für  $x, y \in [0, 2]$  stets  $|x - y| \leq \max[0, 2] = 2$ , ebenso  $|x^2 - y^2| < \max[0, 2^2] = 4$ .

Wir wählen also  $L = 2$ . Es folgt:

$$\forall x, y \in [0, 2]: |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| \leq L \cdot |x - y| = |2x - 2y| \leq 4$$

Dies gilt, da stets  $x^2 = x \cdot x \leq 2 \cdot x$  für  $x \in [0, 2]$ . Damit ist  $f$  im Intervall  $[0, 2]$  Lipschitz-stetig.

b)

Wäre  $f$  im Intervall  $[0, 1]$  Lipschitz-stetig (Widerspruchsannahme), so gäbe es ein  $L \in \mathbb{R}, L \geq 0$  sodass gilt:

$$\forall x, y \in [0, 1]: |f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$$

Sei nun  $x = 2y \in [0, 1]$ . Wir formen die das Lipschitz-Kriterium leicht um. Es müsste gelten:

$$\forall y \in \left[0, \frac{1}{2}\right], x \in [0, 1], x = 2y: \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{\sqrt{2y} - \sqrt{y}}{2y - y} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{y}} \leq L$$

Es lässt sich jedoch zu jedem  $M > 0$  ein  $a = \frac{1}{M^2}$  wählen, sodass für  $0 < x < a$  gilt:

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{x} > \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{a}} = M$$

Es gilt also  $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{2} - 1}{x} = \infty$ , damit wäre die Funktion im gegebenen Intervall für  $x = 2y$  nach oben unbeschränkt. Dies stellt einen Widerspruch dar, da sonst  $L$  eine obere Schranke für eine nach oben unbeschränkte Funktion darstellen würde. Damit haben wir ein Gegenbeispiel gezeigt, folglich ist  $f$  nicht Lipschitz-stetig.

c)  
**FEHLT NOCH**

### **Aufgabe 3**