Gruppe $\boxed{11}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 12

Aufgabe 1

a)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h\sin(h)|}{h} = \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{h\to 0} |\sin(h)| & \text{für } h \geq 0 \\ & \\ \lim\limits_{h\to 0} -|\sin(h)| & \text{für } h < 0 \end{array} \right\} = 0$$

Da nun der Grenzwert existiert, folgt Differenzierbarkeit von f in x_0.

b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-\sin(0)}{h} = \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 & \text{für } h \geq 0 \\ & \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 & \text{für } h < 0 \end{array} \right\}$$

Da nun also der rechtsseitige Grenzwert ungleich dem linksseitigem ist, existiert der Grenzwert nicht. Es ist also g in x_0 nicht differenzierbar.

c)

$$\lim_{h\to 0} \frac{j(x_0+h)-j(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{j(h)-\sin^n(0)}{h} = \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin^n(h)}{h} =? & \text{für } h \geq 0 \\ & \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 & \text{für } h < 0 \end{array} \right\}$$

Aufgabe 2

a) Es sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

b) Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben. Es gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-x+h}{(x^2+hx)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2+hx} = -\frac{1}{x^2}$$

c) Es sei $n = 1$. Es gilt für gegebenes $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{k_n(x+h) - k_n(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$

Also gilt die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei nun ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben sodass die Behauptung gilt, also $k(x) = x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Es folgt für $n + 1$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{k_{n+1}(x+h) - k_{n+1}(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{n+1} - x^{n+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} h^k \right) - x^{n+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} h^k}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} h^{k-1} = \lim_{h \to 0} \binom{n+1}{1} x^n h^0 + \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} h^{k-1}$$

$$= (n+1)x^n + \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} 0^{k-1} = (n+1)x^n$$

Der Differenzenquotient existiert dann also auch für k_{n+1} und ist ein Skalar von k_n, welche ebenfalls differenzierbar ist. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion existiert nun also der Differenzenquotient von k_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Mit der geometrischen Summe lässt sich herleiten:

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a-b) a^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^k = (a-b) a^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^n}{1 - \frac{b}{a}}$$

$$= (a-b) a^{n-1} \frac{\left(\frac{a^n - b^n}{a^n} \right)}{\left(\frac{a-b}{a} \right)} = (a-b) a^{n-1} \frac{a(a^n - b^n)}{a^n (a-b)} = a^n - b^n$$

Damit folgt nun für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{x^n - (x+h)^n}{x^n (x+h)^n} \right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x - (x+h)) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} (x+h)^k}{h x^n (x+h)^n} = \lim_{h \to 0} - \sum_{k=0}^{n-1} x^{-k-1} (x+h)^{k-n}$$

$$= - \sum_{k=0}^{n-1} x^{-(n+1)} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

Also existiert der Differenzenquotient von $j_n(x)$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3