Ungleichungen von Kraft & McMillan

Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

November 7, 2018

Motivation

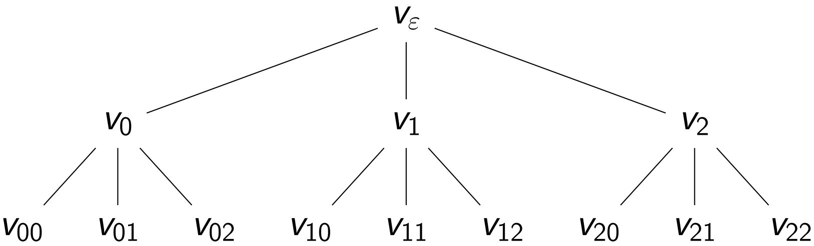
- Gesehen, dass eindeutig bzw. sofort dekodierbare Codes sehr nützlich sind.
- Wann bzw. unter welchen Bedingungen existieren diese?
- Insbesondere: Wortlängen und Größe des Code-Alphabets
- Vorgestellte Ungleichungen setzen diese Aspekte in Relation

Überblick

- Zusammenhang Codes und Bäume
- Ungleichung von Kraft
- Ungleichung von McMillan
- Intepretationen / Ausblick

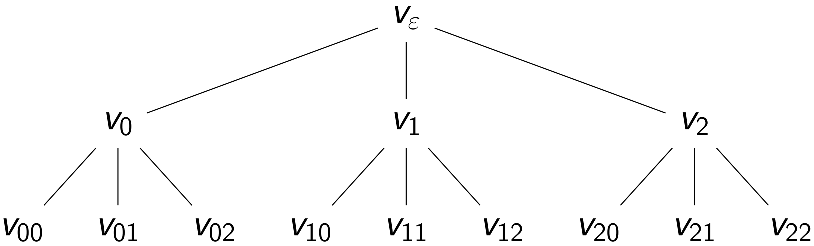
Code als Baum: $\mathcal{T}_r^h$

Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.



Code als Baum: $\mathcal{T}_r^h$

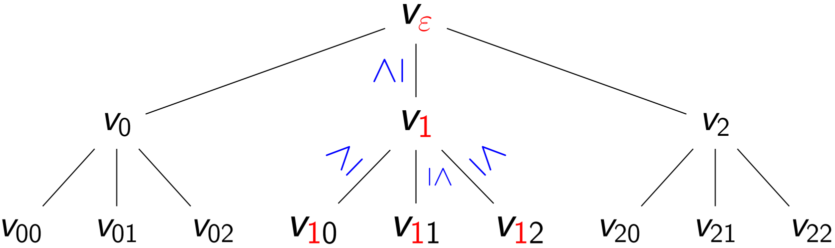
Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.



- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $height(v_w) = |w|$.

Code als Baum: $\mathcal{T}_r^h$

Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.



- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $height(v_w) = |w|$.

- Für $v_w, v_{w'} \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $v_w \leq v_{w'} \iff w \sqsubseteq w'$.

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen $0 < \ell_1, \leq \ell_2 \leq \cdots \leq \ell_q$ aufsteigend sortiert

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen $0 < \ell_1, \leq \ell_2 \leq \cdots \leq \ell_q$ aufsteigend sortiert
- Code-Alphabet von $\mathcal{C}$ ist $[0, r-1]$

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

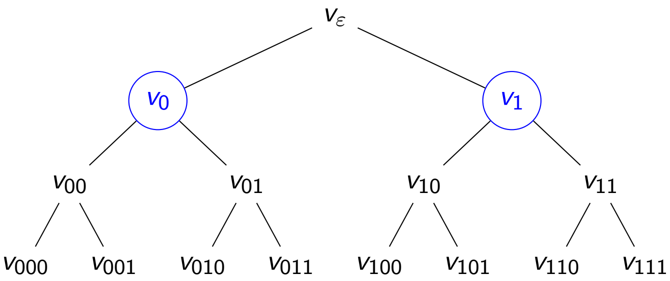
Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2{}^3$:

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

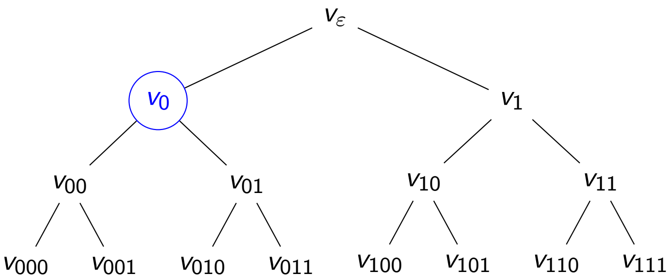
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$:



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

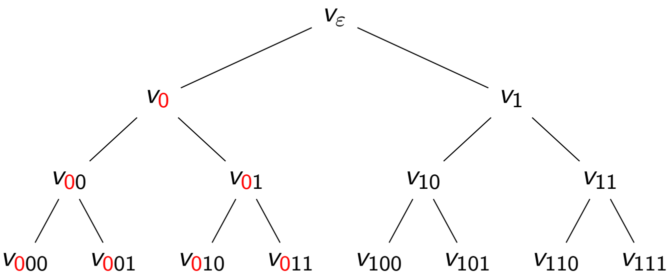
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$:
$w_1 = 0$,



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

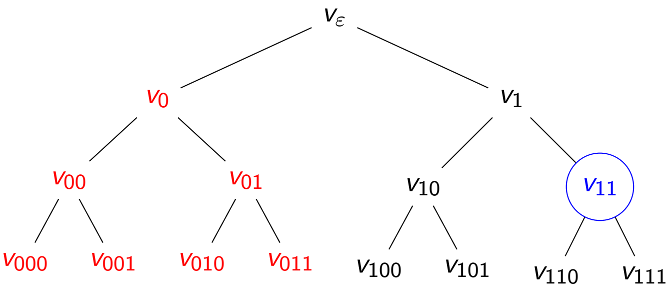
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$:
$w_1 = 0$,



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

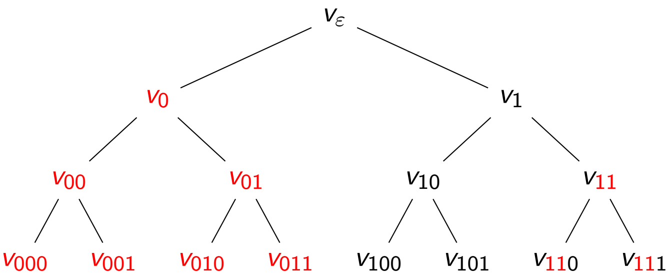
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$:
$w_1 = 0$, $w_2 = 11$,



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

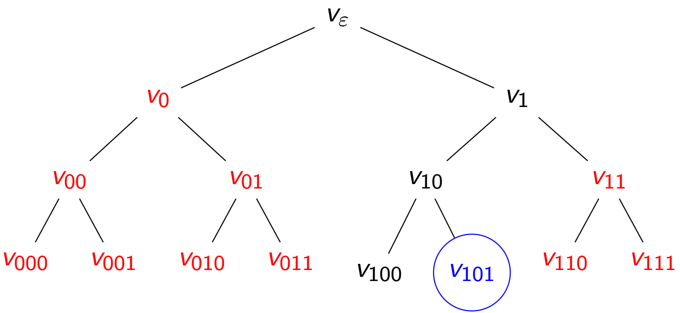
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$:
$w_1 = 0, \;\; w_2 = 11,$



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$:
$w_1 = 0$, $w_2 = 11$, $w_3 = 101$



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

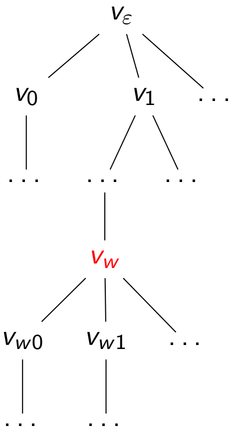
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. $w_1 = 0, w_2 = 11, w_3 = 101$

- $q = 3$ Wörter über Alphabet $[0, r - 1] = [0, 1] = \{0, 1\}$.
- Wortlängen $|w_1| = \ell_1, |w_2| = \ell_2, |w_3| = \ell_3$ eingehalten.
- Präfixcode $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\} = \{0, 11, 101\}$ konstruiert.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $\ell_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

$\mathcal{T}_r^h$:

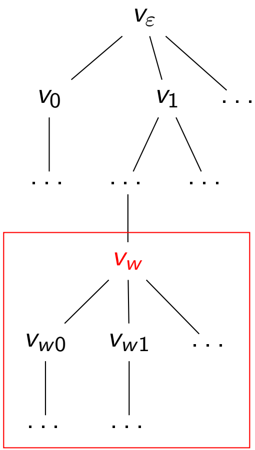


Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $\ell_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

Setze $h := \ell_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

$\mathcal{T}_r^h$:

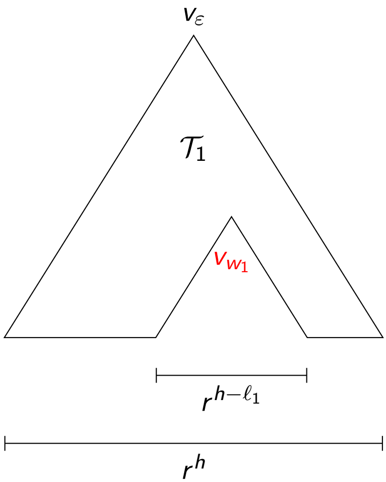


Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $\ell_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

Setze $h := \ell_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

$\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter.



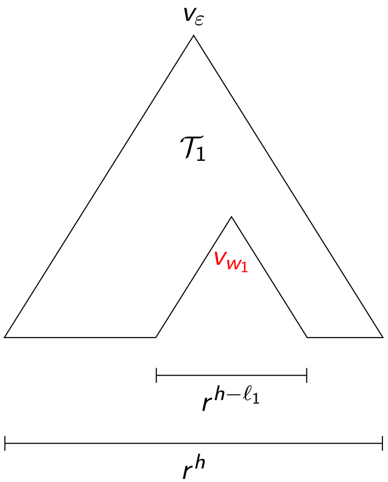
Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $\ell_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

Setze $h := \ell_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

$\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter. Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$



Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

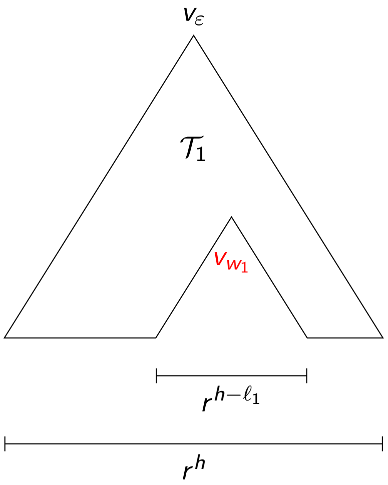
Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $\ell_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

Setze $h := \ell_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

$\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter. Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$



Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

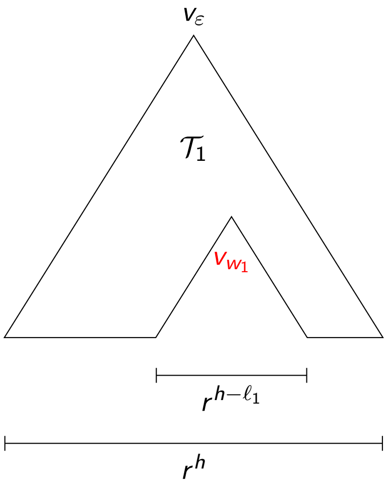
Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $\ell_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

Setze $h := \ell_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

$\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter.
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right) \geq 0$$

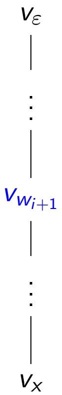


Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Nun $i \in [1, q-1]$ sodass $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = \ell_j$ ist, und $\mathcal{T}_i$ noch mindestens 1 Blatt v_x hat.

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

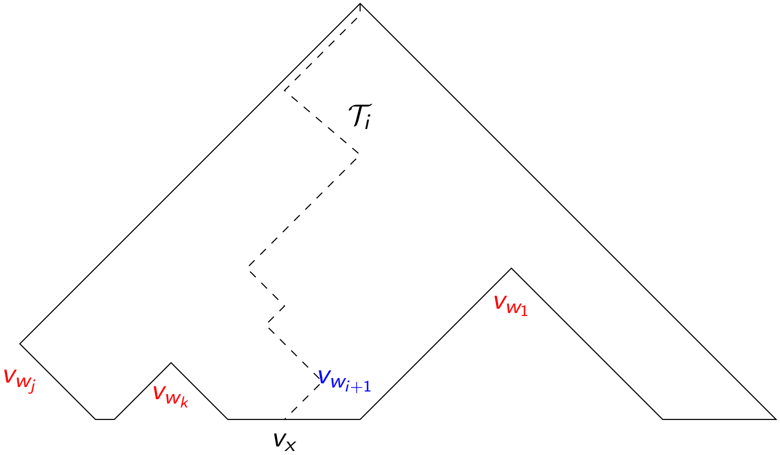
Nun $i \in [1, q-1]$ sodass $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = \ell_j$ ist, und $\mathcal{T}_i$ noch mindestens 1 Blatt v_x hat.



- $\mathcal{T}_i$ zusammenhängend
- $\exists v_w \in V(\mathcal{T}_i)$ mit *height*$(v_w) = \ell_{i+1} \leq h$
- Setze $w_{i+1} := w$.

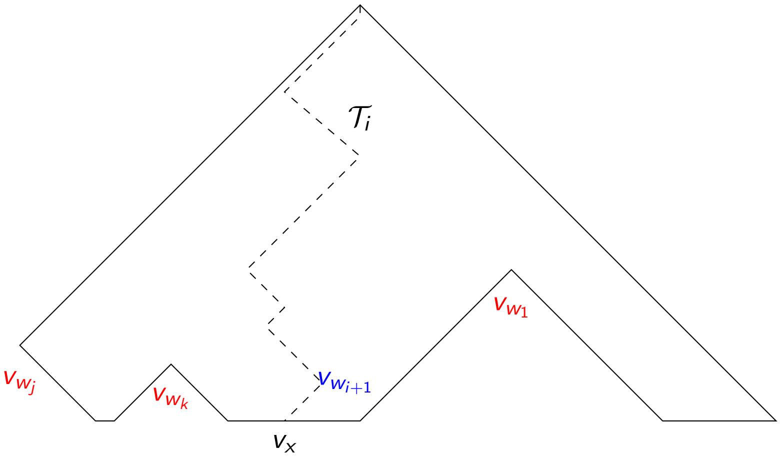
Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Sei $j \in [1, i]$. Wir haben bereits alle Knoten $v_w \geq v_{w_j}$ im Schritt $\mathcal{T}_j := \mathcal{T}_{j-1} \setminus v_{w_j}$ gelöscht. Da wir $v_{w_{i+1}}$ aus $\mathcal{T}_i$ gewählt haben, kann also **nicht** $v_{w_j} \leq v_{w_{i+1}}$ gelten.



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($\ell_j \leq \ell_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($\ell_j \leq \ell_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($\ell_j \leq \ell_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($\ell_j \leq \ell_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-\ell_k}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($\ell_j \leq \ell_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-\ell_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($\ell_j \leq \ell_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-\ell_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right) \geq 0$$

Blätter.

Somit Präfixcode $\mathcal{C}$ nach dieser Methode konstruierbar.
Dieser ist nach [JJ00] auch sofort dekodierbar.

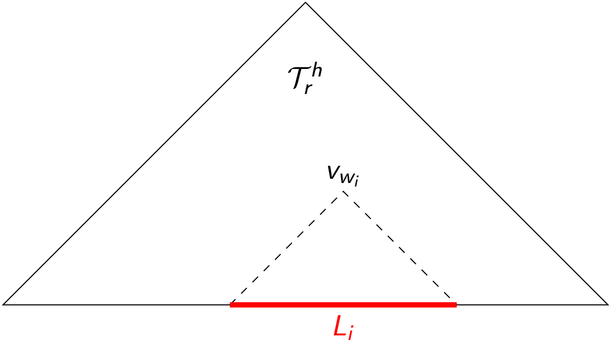
Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Zeige: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ Ungleichung gilt für Parameter

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

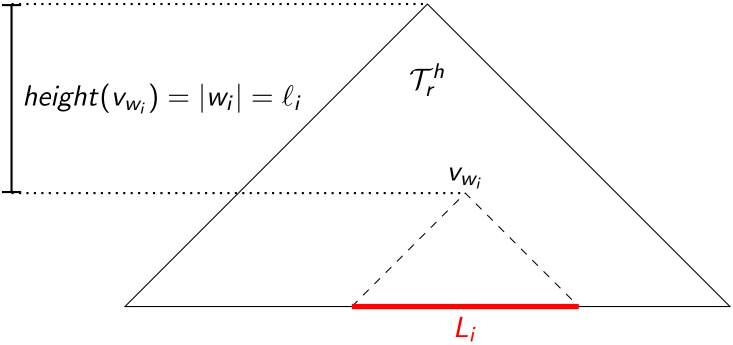
Zeige: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ Ungleichung gilt für Parameter

$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge height(v) = h\}$$

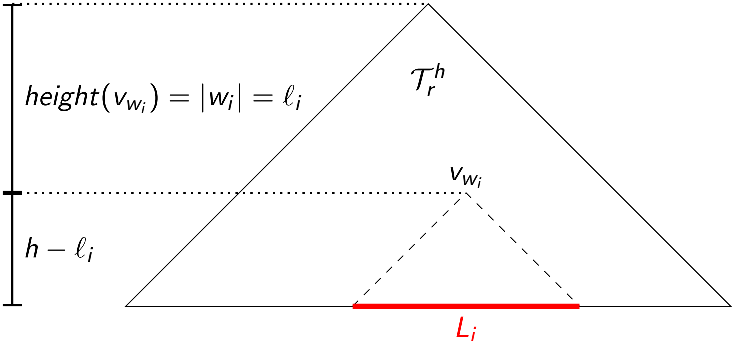


- Für $i, j \in [1, q] : i \neq j \implies L_i \cap L_j = \varnothing$

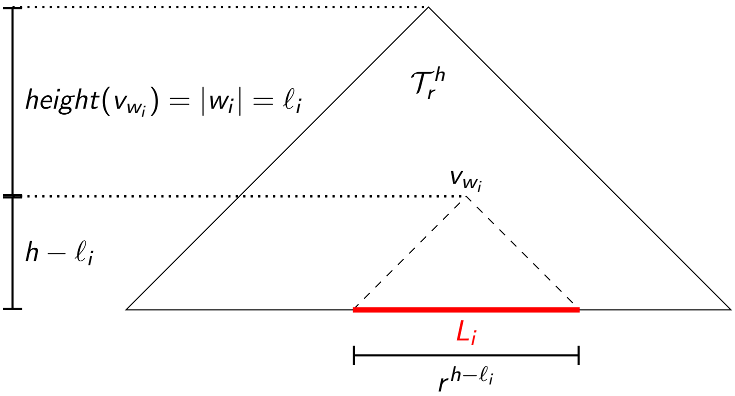
Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "



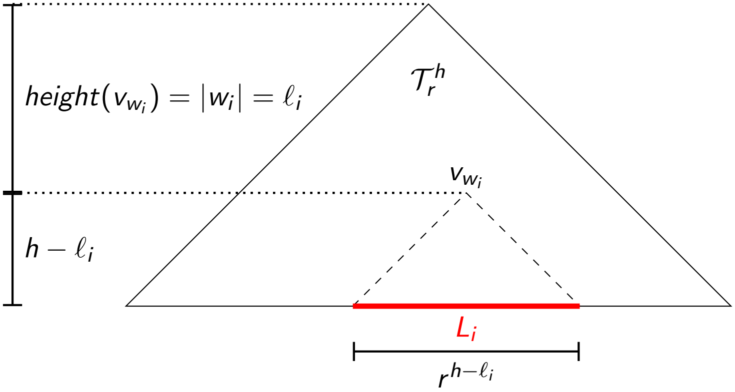
Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

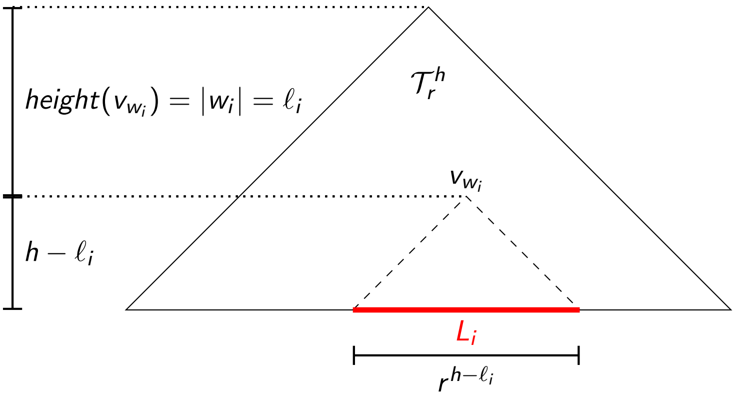


Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "



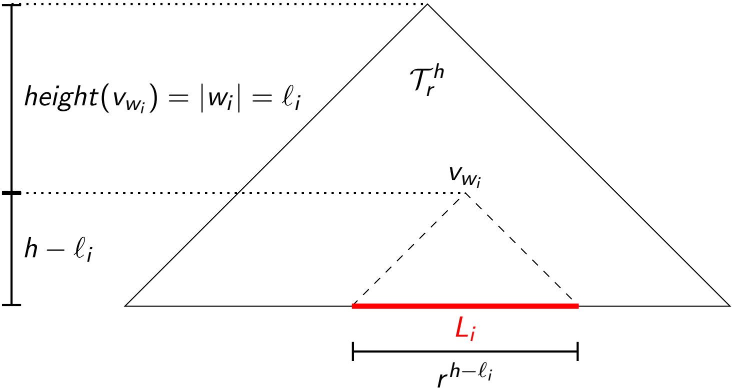
$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right|$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "



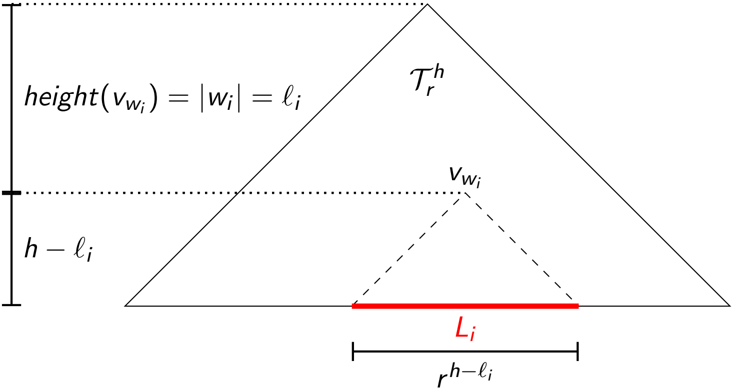
$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i|$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "



$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-\ell_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "



$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-\ell_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} \iff \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1$$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

- Beweis konstruktiv
- Untere Schranke für Wortlänge, Alphabetgröße

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

- Beweis konstruktiv
- Untere Schranke für Wortlänge, Alphabetgröße

- Bekannt: sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ eindeutig dekodierbar
- Schwächere Kriterien?

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer eindeutig dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \tag{1}$$

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer eindeutig dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \tag{1}$$

Richtung "(1) $\implies \mathcal{C}$ existiert" durch Kraft.

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- Zu zeigen: $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$
- Betrachte K^n abhängig von Wortlängen für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- Finde aus Form von K^n konstante obere Schranke
- Dann muss $K \leq 1$, da sonst K^n für geeignetes n größer als jede Konstante

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} \ell_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} \ell_k$.

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} \ell_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} \ell_k$.

Dann für jedes $i \in [1, q]^n$:

$$mn \leq \sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k} \leq Mn$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} \ell_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} \ell_k$.

Dann für jedes $i \in [1,q]^n$:

$$mn \leq \sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k} \leq Mn$$

Wollen schreiben:

$$K^n = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Ziel: Finde Abschätzung für Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Ziel: Finde Abschätzung für Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl Möglichkeiten: Summiere n Wortlängen zu j.

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Ziel: Finde Abschätzung für Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl Möglichkeiten: Summiere n Wortlängen zu j.
- Äquivalent: Bilde Sequenz der Länge j aus n Codewörtern

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Ziel: Finde Abschätzung für Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl Möglichkeiten: Summiere n Wortlängen zu j.
- Äquivalent: Bilde Sequenz der Länge j aus n Codewörtern
- $\mathcal{C}$ eindeutig dekodierbar $\Longrightarrow$ Jede Sequenz aus eindeutiger Auswahl $i \in [1, q]^n$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Ziel: Finde Abschätzung für Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl Möglichkeiten: Summiere n Wortlängen zu j.
- Äquivalent: Bilde Sequenz der Länge j aus n Codewörtern
- $\mathcal{C}$ eindeutig dekodierbar $\Longrightarrow$ Jede Sequenz aus eindeutiger Auswahl $i \in [1, q]^n$
- Maximal r^j Codewörter der Länge j $\Longrightarrow$ $N_j \leq r^j$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=nm}^{nM} N_j r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{N_j}{r^j}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=nm}^{nM} N_j r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{N_j}{r^j}$$

$$\leq \quad \sum_{j=nm}^{nM} 1 = (M-m)n + 1$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=nm}^{nM} N_j r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{N_j}{r^j}$$

$$\leq \quad \sum_{j=nm}^{nM} 1 = (M-m)n + 1$$

$$\Longrightarrow \frac{K^n}{n} \leq (M-m) + 1$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$\frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r, Wortlängen ℓ fix.
- Damit auch m, M, K fix.

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

$$\frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r, Wortlängen ℓ fix.
- Damit auch m, M, K fix.
- $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

$$\frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r, Wortlängen ℓ fix.
- Damit auch m, M, K fix.
- $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
- Nach Analysis bekannt: nur möglich für $K \leq 1$.

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} = K \leq 1$$

$\square$