

Ungleichungen von Kraft & McMillan

Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

October 28, 2018

Inhalt

Erinnerung: Bäume

Ungleichung von Kraft

Motivation / Überblick

- ▶ Gesehen, dass uniquely decodable codes und instantenous codes sehr nützlich.
- ▶ Wann bzw. unter welchen Bedingungen existieren diese?
- ▶ Insbesondere: Wortlängen und Größe des Code-Alphabets
- ▶ Ungleichungen setzen diese Aspekte in Relation

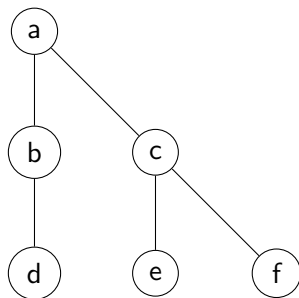
Bäume

Baum $T = (V, E)$.

Knotenmenge $V(T) := V$.

Kantenmenge $E(T) := E$.

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend



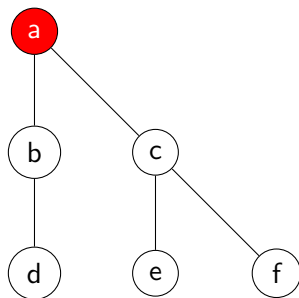
Bäume

Baum $T = (V, E)$.

Knotenmenge $V(T) := V$.

Kantenmenge $E(T) := E$.

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend
- ▶ eindeutige Wurzel $root(T)$



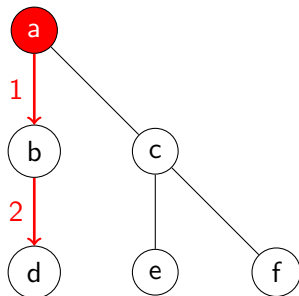
Bäume

Baum $T = (V, E)$.

Knotenmenge $V(T) := V$.

Kantenmenge $E(T) := E$.

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend
- ▶ eindeutige Wurzel $root(T)$
- ▶ Höhe $height(v)$, $v \in V$



$$height(4) = 2$$

Bäume

Baum $T = (V, E)$.

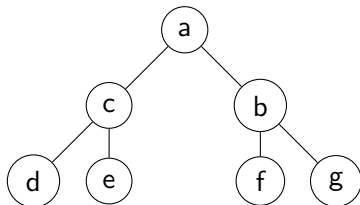
Knotenmenge $V(T) := V$.

Kantenmenge $E(T) := E$.

- ▶ ungerichtet
- ▶ azyklisch
- ▶ zusammenhängend
- ▶ eindeutige Wurzel $root(T)$
- ▶ Höhe $height(v)$, $v \in V$

Nenne T r -är wenn jeder Knoten mit Ausnahme von Blättern genau $r \in \mathbb{N}$ Kinder hat.

2-är bzw. binär



Teilbäume und Ordnung von Knoten

T, T' gewurzelte Bäume.

- ▶ Schreibe $T' \leq T$ wenn T' Teilgraph von T .

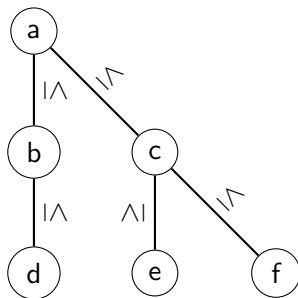
Teilbäume und Ordnung von Knoten

T, T' gewurzelte Bäume.

- ▶ Schreibe $T' \leq T$ wenn T' Teilgraph von T .
- ▶ Schreibe $T' \leq_r T$ wenn $T' \leq T$ und T, T' r -är.

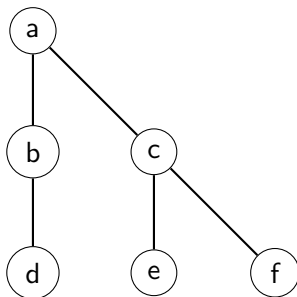
Teilbäume und Ordnung von Knoten

Für $v, v' \in T$ schreiben wir $v' \leq v$, genau dann, wenn der eindeutige Pfad von $\text{root}(T)$ zu v den Knoten v' besucht.



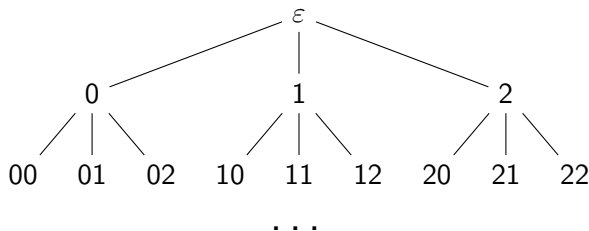
Teilbäume und Ordnung von Knoten

$\text{sub}(v)$?



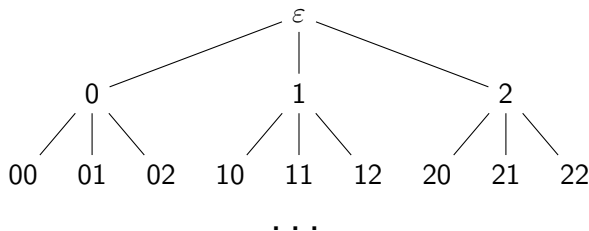
Code als Baum

Sei \mathcal{C} ein Code über dem Code-Alphabet $\{0, 1, 2\}$.
 \mathcal{C} als Teilmenge von $V(T)$, wobei T :



Code als Baum

Sei \mathcal{C} ein Code über dem Code-Alphabet $\{0, 1, 2\}$.
 \mathcal{C} als Teilmenge von $V(T)$, wobei T :



Inhalt

Erinnerung: Bäume

Ungleichung von Kraft

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer instantaneous Code \mathcal{C} mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer instantaneous Code \mathcal{C} mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer instantaneus Code \mathcal{C} mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- ▶ Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- ▶ Wortlängen l aufsteigend sortiert und $l_1 > 0$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r -ärer instantaneous Code \mathcal{C} mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- ▶ Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- ▶ Wortlängen l aufsteigend sortiert und $l_1 > 0$
- ▶ Code-Alphabet von \mathcal{C} ist $[0, r - 1]$

Ungleichung von Kraft: " \implies "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Ungleichung von Kraft: " \implies "

Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00] sind die instantaneous Codes genau die Präfixcodes.

Ungleichung von Kraft: " \implies "

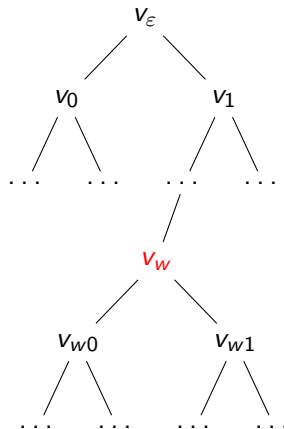
Richtung " $\sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00] sind die instantaneous Codes genau die Präfixcodes.

Konstruiere Codewörter w_i mit $|w_i| = l_i$ via endlicher Induktion über i . Betrachte dabei den zum Code-Alphabet zug. Baum und wähle die w_i so, dass am Ende $\mathcal{C} = \{w_i \mid i \in [1, q]\}$ ein Präfixcode ist.

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

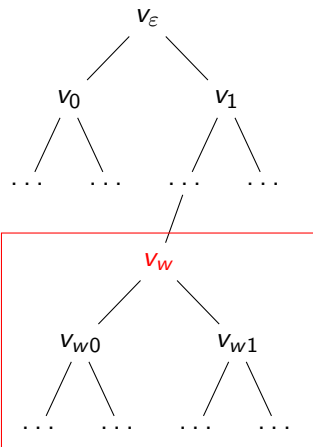
Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_1 := w$.



Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_1 := w$.

Setze $h = l_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

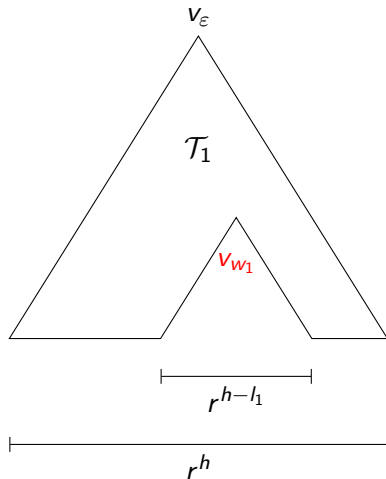


Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_1 := w$.

Setze $h = l_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

\mathcal{T}_1 hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.

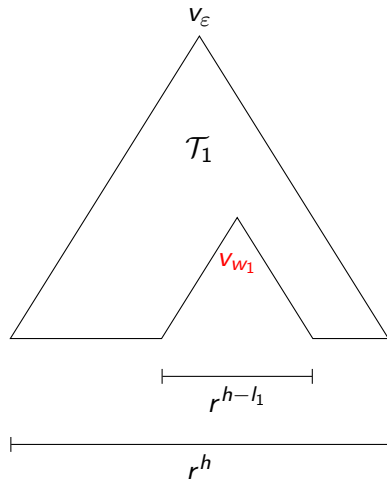


Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

\mathcal{T}_1 hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$
Blätter.

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$



Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

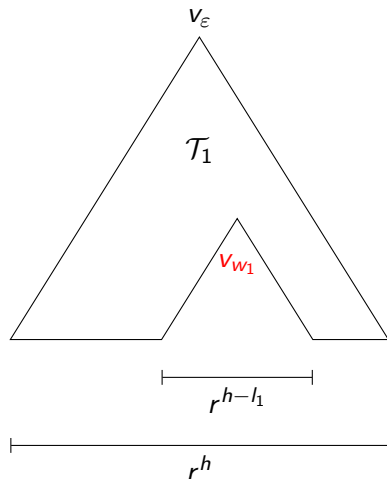
\mathcal{T}_1 hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$

Blätter.

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$



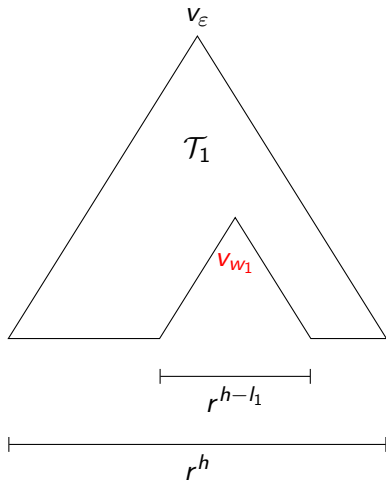
Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

\mathcal{T}_1 hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$
Blätter.

Weiter gilt:

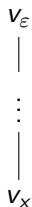
$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right) \geq 0$$



Ungleichung von Kraft: " \implies "

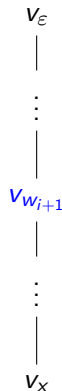
Sei nun $i \in [1, q - 1]$ sodass $\mathcal{C} = \{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = l_j$ ist, und \mathcal{T}_i noch mindestens 1 Blatt v_x hat.



Ungleichung von Kraft: " \implies "

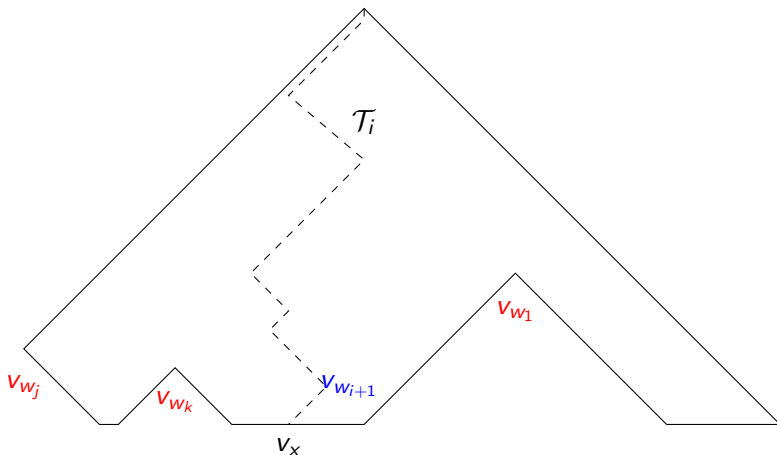
Sei nun $i \in [1, q-1]$ sodass $\mathcal{C} = \{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = l_j$ ist, und \mathcal{T}_i noch mindestens 1 Blatt v_x hat.

- ▶ \mathcal{T}_i zusammenhängend
- ▶ also ex. $v_w \in V(\mathcal{T}_i)$ mit $\text{height}(v_w) = l_{i+1} \leq h$
- ▶ Setze $w_{i+1} := w$.



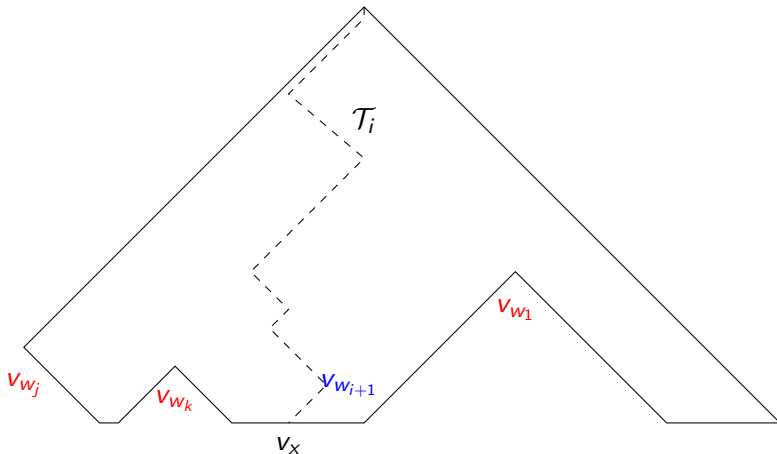
Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Sei $j \in [1, i]$. Wir haben bereits alle Knoten $v_w \geq v_{w_j}$ im Schritt $\mathcal{T}_j := \mathcal{T}_{j-1} \setminus v_{w_j}$ gelöscht. Da wir $v_{w_{i+1}}$ aus \mathcal{T}_i gewählt haben, kann also **nicht** $v_{w_j} \leq v_{w_{i+1}}$ gelten.



Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).



Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Ungleichung von Kraft: " \implies "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.

Dann hat \mathcal{T}_{i+1} immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$$\mathcal{T}_i \text{ hat nach Konstruktion } r^h - \sum_{k=1}^i r^{h-l_k} \text{ Blätter}$$

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.

Dann hat \mathcal{T}_{i+1} immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

\mathcal{T}_{i+1} hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k}$$

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\leq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\leq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.

Dann hat \mathcal{T}_{i+1} immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

\mathcal{T}_{i+1} hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-l_k}$$

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.

Dann hat \mathcal{T}_{i+1} immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

\mathcal{T}_{i+1} hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-l_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right)$$

Ungleichung von Kraft: " \Rightarrow "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. \mathcal{C} bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben \mathcal{C} hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.

Dann hat \mathcal{T}_{i+1} immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

\mathcal{T}_{i+1} hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^q r^{h-l_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \right) \geq 0$$

Blätter. Somit können wir einen Präfix-Code \mathcal{C} unter den gegebenen Bedingungen konstruieren. Dieser ist nach [JJ00] auch instantaneous.

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

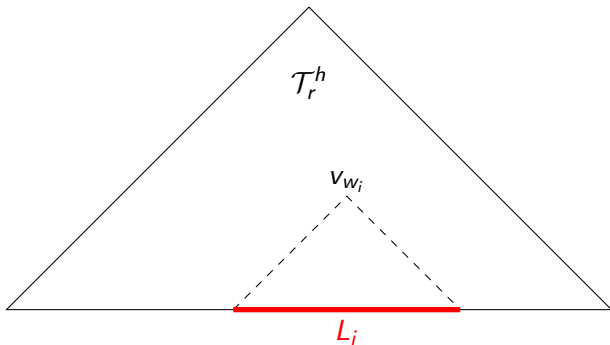
Nun zeigen wir, dass wenn \mathcal{C} instantaneuous, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Nun zeigen wir, dass wenn \mathcal{C} instantaneuous, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.

Betrachte für $i \in [1, q]$ die Menge der Blätter unter v_{w_i} :

$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge \text{height}(v) = h\}$$



Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Sei o.E. $i < j$, $v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j} .

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Sei o.E. $i < j$, $v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j} . Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Sei o.E. $i < j$, $v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j} . Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Sei o.E. $i < j$, $v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j} . Dann gilt:

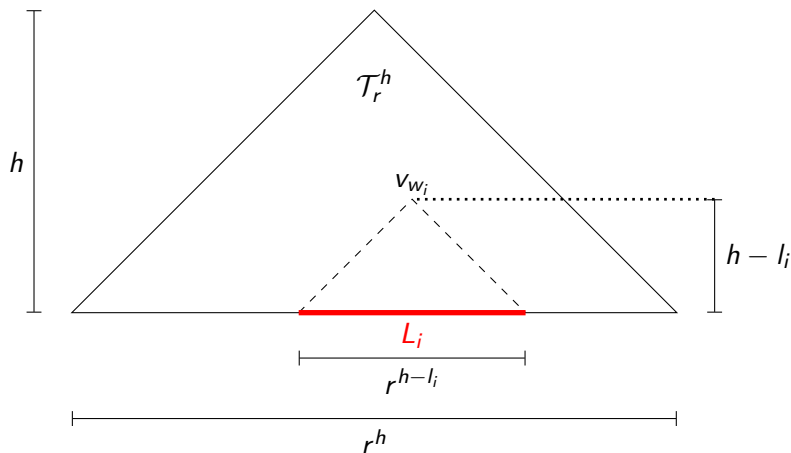
$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w \implies w_i \sqsubseteq w_j$$

Widerpruch, denn $w_i, w_j \in \mathcal{C}$ und \mathcal{C} ist Präfix-Code!

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right|$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i|$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " \Leftarrow "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass \mathcal{T}_r^h nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$\begin{aligned} r^h &\geq \left| \bigcup_{i \in [1, q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^q |L_i| = \sum_{i=1}^q r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \\ &\iff \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1 \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen.

