Gruppe $\boxed{\textbf{(noch nicht bekannt)}}$ Phil Pützstück, 377247
Datenstrukturen und Algorithmen

Hausaufgabe 1

Aufgabe 2

a)
Wir zeigen $A(n) = \left(\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\right), n \in \mathbb{N}^{>0}$. Es sei $n = 1$. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Damit hält die Aussage für $n = 1 \in \mathbb{N}^{>0}$. Es sei nun ein $n \in \mathbb{N}^{>0}$ mit $A(n)$ gegeben (IV).
$n \to n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{IV}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Also folgt damit auch $A(n+1)$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt nun $\forall n \in \mathbb{N}^{>0} : A(n)$ $\square$

b)
Wir zeigen $A(n) = \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1\right), n \in \mathbb{N}^{>0}$. Es sei $n = 1$. Es gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{1} 2^i = 2^0 + 2^1 = 3 = 2^2 - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Damit hält die Aussage für $n = 1 \in \mathbb{N}^{>0}$. Es sei nun ein $n \in \mathbb{N}^{>0}$ mit $A(n)$ gegeben (IV).
$n \to n+1$:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} 2^i \overset{\text{IV}}{=} 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Also folgt damit auch $A(n+1)$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt nun $\forall n \in \mathbb{N}^{>0} : A(n)$ $\square$

Aufgabe 3

a) Es sei $X = \{1, 2\}, r = \{(1, 2)\}$. Es gilt:

$$\forall x \in X : (x, x) \notin r \quad \text{sowie} \quad \forall x, y, z \in X : ((x, y) \in r \land (y, z) \in r) \implies (x, z) \in r$$

Damit ist r eine irreflexive, transitive Relation auf X. Offensichtlich ist $r \neq \varnothing$, und damit nicht die leere Relation.

Ferner gilt folgendes nicht:

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in r \implies (y, x) \in r$$

Denn wir haben für $1, 2 \in X$ und $(1, 2) \in r$ jedoch $(2, 1) \notin r$. Daher ist r nicht symmetrisch.

Damit gibt es eine irreflexive, transitive Relation auf einer Menge X, sodass die ersten beiden Behauptungen nicht stets gelten.

Wir zeigen die letzte Behauptung mit einem Beweis durch Widerspruch:

Wir nehmen an, es gäbe eine irreflexive, transitive Relation r einer beliebigen Menge X welche nicht antisymmetrisch ist. Dann folgt

$$\exists x, y \in X : (x, y) \in r \land (y, x) \in r \overset{\text{trans.}}{\implies} (x, x) \in r \implies r \text{ nicht irreflexiv}$$

Also haben wir einen Widerspruch.
Daher muss jede irreflexive, transitive Relation r auch antisymmetrisch sein. $\square$

Aufgabe 4