

Hausaufgabe 1

Aufgabe 2

a)

Wir zeigen $A(n) = \left(\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right), n \in \mathbb{N}^{>0}$. Es sei $n = 1$. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Damit hält die Aussage für $n = 1 \in \mathbb{N}^{>0}$. Es sei nun ein $n \in \mathbb{N}^{>0}$ mit $A(n)$ gegeben (IV).
 $n \rightarrow n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^n k \stackrel{\text{IV}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Also folgt damit auch $A(n+1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt nun $\forall n \in \mathbb{N}^{>0} : A(n)$

□

b)

Wir zeigen $A(n) = \left(\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1 \right), n \in \mathbb{N}^{>0}$. Es sei $n = 1$. Es gilt:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = \sum_{i=0}^1 2^i = 2^0 + 2^1 = 3 = 2^2 - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Damit hält die Aussage für $n = 1 \in \mathbb{N}^{>0}$. Es sei nun ein $n \in \mathbb{N}^{>0}$ mit $A(n)$ gegeben (IV).
 $n \rightarrow n+1$:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+1} + \sum_{i=0}^n 2^i \stackrel{\text{IV}}{=} 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Also folgt damit auch $A(n+1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt nun $\forall n \in \mathbb{N}^{>0} : A(n)$

□

Aufgabe 3

a) Es sei $X = \{1, 2\}$, $r = \{(1, 2)\}$. Es gilt:

$$\forall x \in X : (x, x) \notin r \quad \text{sowie} \quad \forall x, y, z \in X : ((x, y) \in r \wedge (y, z) \in r) \implies (x, z) \in r$$

Damit ist r eine irreflexive, transitive Relation auf X . Offensichtlich ist $r \neq \emptyset$, und damit nicht die leere Relation.

Ferner gilt folgendes nicht:

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in r \implies (y, x) \in r$$

Denn wir haben für $1, 2 \in X$ und $(1, 2) \in r$ jedoch $(2, 1) \notin r$. Daher ist r nicht symmetrisch.

Damit gibt es eine irreflexive, transitive Relation auf einer Menge X , sodass die ersten beiden Behauptungen nicht stets gelten.

Wir zeigen die letzte Behauptung mit einem Beweis durch Widerspruch:

Wir nehmen an, es gäbe eine irreflexive, transitive Relation r einer beliebigen Menge X welche nicht antisymmetrisch ist. Dann folgt

$$\exists x, y \in X : (x, y) \in r \wedge (y, x) \in r \xrightarrow{\text{trans.}} (x, x) \in r \implies r \text{ nicht irreflexiv}$$

Also haben wir einen Widerspruch.

Daher muss jede irreflexive, transitive Relation r auch antisymmetrisch sein. □

Aufgabe 4

```
1 class Element {
2     public int num;
3     public Element next;
4
5     public Element(int n) {
6         this.num = n;
7     }
8 }
9
10 class List {
11     public Element first, last;
12
13     public List(Element first, Element last) {
14         this.first = first;
15         this.last = last;
16     }
17 }
18
19 int get_snd_largest_iterative(List L) {
20     Element current = L.first;
21     int largest = current.num, secondLargest = 0;
22
23     do {
24         current = current.next;
25
26         if (current.num > largest) {
27             secondLargest = largest;
28             largest = current.num;
29         } else {
30             if (current.num > secondLargest)
31                 secondLargest = current.num;
32         }
33     } while (current != L.last);
34
35     return secondLargest;
36 }
37
38
39 int get_snd_largest_recursive(Element e, int largest, int secondLargest) {
40     if (e.num > largest) {
41         secondLargest = largest;
42         largest = e.num;
43     } else {
44         if (e.num > secondLargest)
45             secondLargest = e.num;
46     }
47
48     if (e.next == null)
49         return secondLargest;
50
51     return get_snd_largest_recursive(e.next, largest, secondLargest);
52 }
53
54 int get_snd_largest_recursive(List L) {
55     return get_snd_largest_recursive(L.first, 0, 0);
56 }
```
