Gruppe $\boxed{\textbf{14}}$
Datenstrukturen und Algorithmen

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 4

Aufgabe 1

Die maximale Anzahl der Schleifendurchläufe lässt sich durch die Rekursionsgleichung

$$S(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 + S(\lceil \frac{n}{3} \rceil) & \text{sonst} \end{cases}$$

beschreiben. Im Sinne der Folien aus der Vorlesung lassen wir im folgenden das Aufrunden weg. Wir führen Induktion über n mit der Hypothese, dass für $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ gilt, dass
$S(n) \in \mathcal{O}(\log_3 n)$.

Sei also $n = 3$. Dann ist

$$S(n) = 1 + S(1) = 2 \leq 2 = 2 \cdot \log_3 3$$

Also existiert ein $c = 2 > 0$ sodass $S(n) \leq c \cdot \log_3 n$ ist. Es folgt $S(n) \in \mathcal{O}(\log_3 n)$ für $n = 3$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ beliebig aber fest, sodass die Hypothese für $\frac{n}{3}$ gilt (IV). Es folgt

$$S(n) = 1 + S\left(\frac{n}{3}\right) \overset{\text{IV}}{\leq} 1 + \log_3 \frac{n}{3} = 1 + \log_3 n - \log_3 3 = \log_3 n$$

Also existiert wieder ein $c = 1 > 0$ sodass $S(n) \leq c \cdot \log_3 n$ gilt, also $S(n) \in \mathcal{O}(\log_3 n)$ ist.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage bewiesen. □

Aufgabe 2

a) Der Worst-case tritt ein, wenn das gesuchte Element K entweder sofort am Anfang oder am Ende des Arrays liegt. In diesem Fall muss der jeweils rechte oder linke "Index-pointer" genau $n-1$ mal verschoben werden, wobei genau n mal die Schleifenbedingung überprüft wird. Es ist also $W(n) = n \in \mathcal{O}(n)$.

b) Der Best-case tritt ein, wenn das gesuchte Element K genau in der Mitte des arrays liegt, also bei $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. In diesem Fall werden beide "Index-pointer" genau $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ mal bewegt, wobei die Schleifenbedingung dann $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ mal überprüft wird. Es ist also $B(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \in \mathcal{O}(n)$

c) Wir nehmen an n gerade. Die Wkeit dass das gesuchte Element in Index i vorkommt ist $\frac{1}{n}$. Die benötigten Vergleiche für K bei Index $0 \leq i \leq n$ sind symmetrisch mit globalem Minimum um $i = \frac{n}{2}$ aufgebaut, wodurch die doppelte Summe des Intervalls der Indexe $[\frac{n}{2}, n-1]$ genügt:

$$A(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{n}{2} + \left| \frac{n}{2} - i \right| \right) = \frac{2}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} i = \frac{2}{n} \cdot \frac{n(3n-2)}{8} = \frac{3n-2}{4} \in \mathcal{O}(n)$$

Aufgabe 3

a) Wir zeigen zuerst; $\preceq$ ist eine Halbordnung auf $\mathbb{T}$. Für $t \in \mathbb{T}$ gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : t(n) \le t(n) \implies t \preceq t$$

Für weitere $r, s \in \mathbb{T}$ gilt ferner

$$t \preceq r \wedge r \preceq s \implies \forall n \in \mathbb{N} : t(n) \le r(n) \wedge r(n) \le s(n) \implies \forall n \in \mathbb{N} : t(n) \le r(n) \le s(n)$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} : t(n) \le s(n) \implies t \preceq s$$

Ferner gilt noch

$$t \preceq s \wedge s \preceq t \implies \forall n \in \mathbb{N} : t(n) \le s(n) \wedge s(n) \le t(n) \implies \forall n \in \mathbb{N} : s(n) = t(n) \implies s = t$$

Insgesamt ist $\preceq$ auf $\mathbb{T}$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, also eine Halbordnung.

REST FEHLT NOCH

b)

Seien $t, t' \in \mathbb{T}$ mit $t \preceq t'$ gegeben. Es folgt für $n = 0$

$$(\Phi(t))(0) = 1 \le 1 = (\Phi(t'))(0)$$

sowie für $n \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\Phi(t))(n) = 2t\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \overset{t \preceq t'}{\le} 2t'\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n = (\Phi(t'))(n)$$

Also gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : (\Phi(t))(n) \le (\Phi(t'))(n)$$

Es folgt $\Phi(t) \preceq \Phi(t')$. Damit ist Φ nach Definition monoton bzgl. $\preceq$.

c) Die Idee ist es, zu zeigen, dass für $f \in \mathbb{X}$ stets $\Psi(f(n)) \sqsubseteq f(n)$ gilt. Denn da Ψ monoton bzgl. $\sqsubseteq$ ist, und $(\mathbb{X}, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband ist folgt dann nach dem Prinzip der Fixpunktinduktion, dass Ψ einen Fixpunkt p mit $p \sqsubseteq f$ besitzt. Dann zeigt man, dass $T(n)$ eben dieser Fixpunkt p ist, und wenn die gegebene Halbordnung $\sqsubseteq$ etwa das Wachstum von Funktionen in einer sinnvollen Weise vergleicht (wie z.B. $\preceq$ in den vorherigen Teilaufgaben), so folgt dann aus $T(n) \sqsubseteq f(n)$, dass $T(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ liegt.

d)

Sei $\Phi, \preceq, \mathbb{T}$ wie zuvor gegeben. Dann sei $2n \log n \in \mathbb{T}$. Im folgenden ist wie in der Vorlesung $\log n \equiv \log_2 n$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\Phi(2n \log n) \le 2\left(2\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}\right) + n = 2n \log \frac{n}{2} + n = 2n \log_2 n - 2n \log_2 2 + n$$

$$= 2n \log_2 n - n \le 2n \log_2 n$$

Folglich gilt auch $\Phi(2n \log n) \preceq 2n \log n$. Da $\preceq$ eine Halbordnung und Φ monoton bzgl. dieser ist, folgt nach dem Satz der Fixpunktinduktion, dass Φ einen Fixpunkt p mit $p \preceq 2n \log n$ hat. Offensichtlich folgt nach Definition von $T(n)$, dass $\Phi(T(n)) = T(N)$, also eben $T(n)$ dieser Fixpunkt p ist. Insgesamt gilt also $T(n) \in \mathcal{O}(2n \log n)$, da nach Definition von $\preceq$ gilt, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : T(n) \le 2n \log n$$

Damit existiert eine Konstante $c = 1 > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 = 1$ sodass die Bedingung für $T(n) \in \mathcal{O}(2n \log n)$ erfüllt ist.

e)

Wir führen Induktion über alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $n = 1$. Es gilt:

$$T(n) = 1 \leq 1^2 = n^2$$

Also existiert ein $c = 1 > 0$ sodass $T(n) \leq cn^2$ ist. Sei nun $n = 2$. Es gilt:

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n = 2T(1) + 2 = 4 \leq n^2$$

Also existiert wieder ein $c = 1 > 0$ sodass $T(n) \leq cn^2$ ist.

Sei nun ein beliebig aber festes $n \in \mathbb{N}$ gegeben, sodass $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \leq cn^2$ für ein $c > 0$ (IV). Es folgt:

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \overset{\text{IV}}{\leq} 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n = \frac{n^2}{2} + n \leq n^2 + n^2 = 2n^2$$

Daher existiert ein $c = 2 > 0$ sodass $T(n) \leq cn^2$ gilt.

Insgesamt lässt sich nach Prinzip der vollständigen Induktion zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $c > 0$ finden, sodass $T(n) \leq cn^2$ ist. Es folgt $T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$. $\square$

f)

Wir gehen analog zu d) vor. Also seien wieder $\Phi, \preceq, \mathbb{T}, T(n)$ wie zuvor gegeben.
Dann sei $n^2 \in \mathbb{T}$. Für $n = 1$ gilt:

$$\Phi(n^2) = 1 \leq n^2$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Es gilt für ein $a \in \mathbb{N}$ mit $n = 2 + a$:

$$\frac{n^2}{2} + n = \frac{(2+a)^2}{2} + 2 + a = 4 + 2a + \frac{a^2}{2} \leq (2+a)^2 = n^2 \tag{1}$$

Ferner gilt:

$$\Phi(n^2) = 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)^2 + n = \frac{n^2}{2} + n \overset{(1)}{\leq} \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} = n^2$$

Folglich gilt auch $\Phi(n^2) \preceq n^2$. Analog zu d) folgt mit dem Satz der Fixpunktinduktion, dass $T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

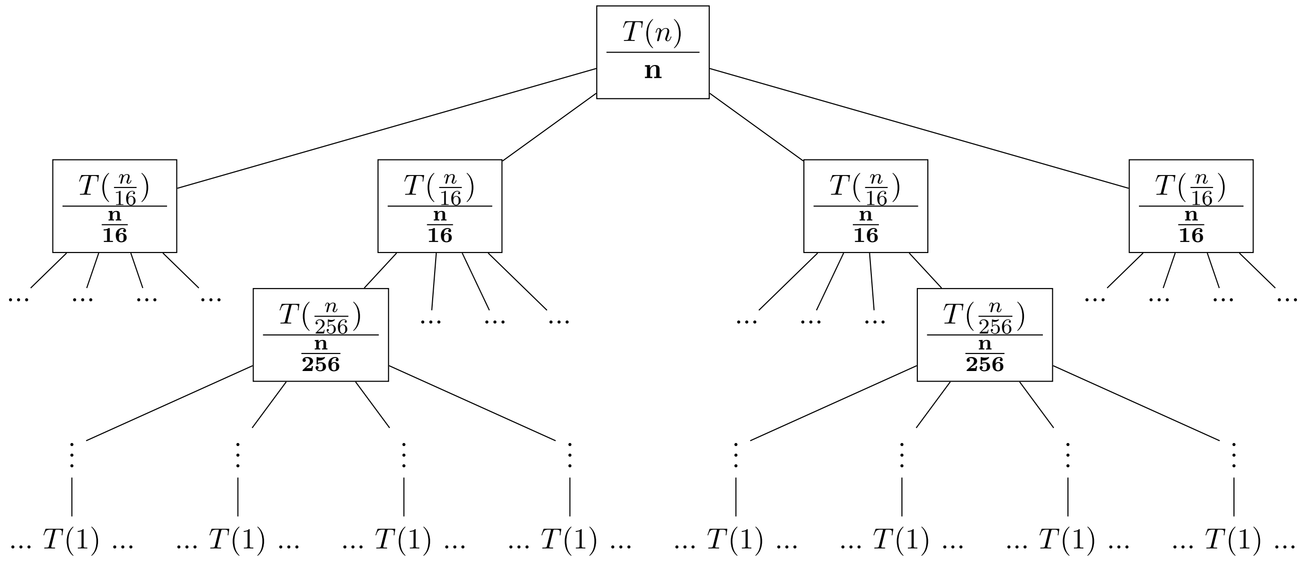
g)

Die Methode der Fixpunktinduktion ist in dieser Aufgabe leicht gefallen, da wir schon einen vollständigen Verband, sowie eine bzgl. der Halbordnung monotone Funktion auf der Menge des Verbands gegeben hatten. Wäre dies nicht gegeben, so denke ich würde die Methode der Substitution einfacher und schneller gehen.

Aufgabe 4

a)

In allen Brüchen wird implizit abgerundet. Im Sinne der Lesbarkeit kennzeichnen wir dies im folgenden nicht explizit.



Der Baum hat $\log_{16} n$ Ebenen und entsprechend $4^{\log_{16} n} = n^{\log_{16} 4} = \sqrt{n}$ Blätter. Es folgt

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\sqrt{n}} \left(\frac{4}{16}\right)^i n \ + \sqrt{n} \ \approx \ \frac{4}{3} n + \sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$$

b)

Wir benutzen das Mastertheorem. Es ist $b = 4 \geq 1$, $c = 16 > 1$ und $f(n) = n$. Weiter ist dann $E := \log_c b = \log_{16} 4 = 0.5$, also $n^E = \sqrt{n}$. Der 3. Fall des Mastertheorems trifft hier zu, denn wir haben für $\varepsilon = 0.5 > 0$, dass

$$f(n) = n \in \Omega(n^{E+\varepsilon}) = \Omega(n)$$

Weiter gilt

$$b \cdot f\left(\frac{n}{c}\right) = 4 \cdot f\left(\frac{n}{16}\right) = \frac{n}{4} \leq \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot f(n)$$

Also existiert ein $d = \frac{1}{2} < 1$ sodass $b \cdot f(\frac{n}{c}) \leq d \cdot f(n)$ sogar für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach dem Mastertheorem folgt nun, dass

$$T(n) \in \Theta(f(n)) = \Theta(n)$$

Unsere Vermutung aus a) stimmt also und wurde sogar noch von unten eingegrenzt.