Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247

Hausaufgabe 6

Aufgabe 1

Wir zeigen zuerst, dass a_n nach unten durch $\sqrt{x}$ beschränkt ist: Sei $A(n) := a_n \geq \sqrt{x}$

(IA) Für $a_0 = 1$ folgt $a_0 \geq \sqrt{1}$ und für $a_0 = x > 1$ folgt $a_0 \geq \sqrt{x}$. Also gilt $A(1)$.

(IS) Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. $n \mapsto n+1$: Zu zeigen ist $a_{n+1} \geq \sqrt{x}$:

$$a_{n+1} \geq \sqrt{x} \iff {a_n}^2 + x \geq 2a_n\sqrt{x} \iff (a_n - \sqrt{x})^2 \geq 0$$

Letzteres ist stets erfüllt, da $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 \geq 0$ gilt. Es folgt nun nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Also ist a_n mit $\sqrt{x}$ nach unten beschränkt.

Zu zeigen ist nun, dass a_n monoton fällt, also $a_{n+1} - a_n \leq 0$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) - a_n = \frac{a_n}{2} - \frac{x}{2a_n} - \frac{2a_n}{2} = x - (a_n)^2 \overset{a_n \geq \sqrt{x}}{\leq} x - (\sqrt{x})^2 = 0$$

Da nun stets $a_{n+1} - a_n \leq 0$ gilt, ist a_n monoton fallend und damit nach 1.4 auch nach oben beschränkt, also insgesamt beschränkt. Der Grenzwert dieser rekursiven Folge lässt sich wie folgt bestimmen:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(L + \frac{x}{L}\right)$$

Wir lösen nach L auf:

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{x}{L}\right) \iff L^2 = x \iff L = \pm\sqrt{x}$$

Da a_n jedoch von unten durch $\sqrt{x}$ beschränkt ist gilt stets $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \not< \sqrt{x}$, d.h. a_n kann niemals $-\sqrt{x}$ erreichen. Somit kommt für uns als Lösung nur $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$ in Frage, da es nach Satz 4.13 (Kapitel 2) nur genau eine positive reelle Zahl $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$ mit $n \in \mathbb{N}$ gibt. Also konvergiert a_n gegen $\sqrt{x}$.

b) Für $c = 1$ folgt durch $\forall n \in \mathbb{N}_0\colon a_n \geq \sqrt{x} \implies a_n \geq 0$, dass folgendes stets gilt:

$$|(a_n - \sqrt{x})^2| \leq 2a_n|a_n - \sqrt{x}|^2 \iff \left|\frac{{a_n}^2 - 2a_n\sqrt{x} + x}{2a_n}\right| \leq |a_n - \sqrt{x}|^2$$

$$\iff \left|\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) - \sqrt{x}\right| \leq |a_n - \sqrt{x}|^2 \iff |a_{n+1} - \sqrt{x}| \leq 1 \cdot |a_n - \sqrt{x}|^2$$

Somit existiert ein $c = 1 > 0$, sodass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\colon |a_{n+1} - \sqrt{x}| \leq c \cdot |a_n - \sqrt{x}|^2$$

Also konvergiert a_n quadratisch gegen $\sqrt{x}$.

Aufgabe 2

Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2} = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}} - 1$.
Es folgt:

$$\forall n \geq n_0\colon \left|\frac{1}{(n+1)^2} - 0\right| = \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{(n_0+1)^2} < \frac{1}{\left(\left(\sqrt{1/\varepsilon} - 1\right) + 1\right)^2} = \varepsilon$$

Es folgt nach Definition 1.5 dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe 3

a)

Wir wählen zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $2^{(N-1)} > \varepsilon^{-1}$ gilt. Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$ gegeben. Es lässt sich in diesem Fall ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $n \geq m$. Somit gilt $n = m + k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Es folgt nun durch die Dreiecksungleichung (*) und die Gegebenheit der Aufgabe (**):

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m+k}| = \left|\sum_{i=1}^{k} a_{m+i-1} - a_{m+i}\right| \overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} |a_{m+i-1} - a_{m+i}|$$

$$\overset{(**)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} 2^{-(m+i-1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{m+i-1}} < \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \frac{1}{\varepsilon^{-1}} = \varepsilon$$

Also gilt das Cauchy-Kriterium, da zu jedem ε ein $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-(N-1)} < \varepsilon$ existiert, sodass gilt:

$$\forall m, n \geq N\colon |a_m - a_n| < \varepsilon$$

b)

Für $b_n = \dfrac{8n^2 - 5}{4n^2 + 7}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^2-5}{4n^2+7} = 2$. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > n_0(\varepsilon)$:

$$n_0(\varepsilon) := \begin{cases} \left\lceil \left(\sqrt{\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{7}{4}}\right) \right\rceil & \text{falls } \varepsilon < \frac{19}{11} \\ 2 & \text{falls } \varepsilon \geq \frac{19}{11} \end{cases}$$

Es folgt für $\varepsilon < \frac{19}{11}$:

$$\forall n \geq n_0\colon |b_n - 2| = \left|\frac{8n^2 - 5}{4n^2 + 7} - 2\right| < \left|\frac{8\left(\sqrt{\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{7}{4}}\right)^2 - 5}{4\left(\sqrt{\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{7}{4}}\right)^2 + 7} - 2\right| = \left|\frac{2(\frac{19}{\varepsilon}) - 19}{\frac{19}{\varepsilon}} - 2\right| = \varepsilon$$

Und für $\varepsilon \geq \frac{19}{11}$:

$$\forall n \geq n_0\colon |b_n - 2| \leq \left|\frac{8(n_0)^2 - 5}{4(n_0)^2 + 7} - 2\right| < \left|\frac{8(2)^2 - 5}{4(2)^2 + 7} - 2\right| = \frac{19}{23} < \varepsilon$$

Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$.

Aufgabe 4

a) Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert nach Definition ein $N \in \mathbb{N}$ sodass gilt:

$$\forall m, n \geq N \colon |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Da jedoch $|b_n - b_m| \leq |a_n - a_m|$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt, also insbesondere auch für $m, n \geq N$, folgt durch die Transitivität von Ungleichungen:

$$\forall m, n \geq N \colon |b_n - b_m| < \varepsilon$$

Also existiert zu jedem ε ein N sodass $|b_n - b_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt. Somit ist auch b_n eine Cauchy-Folge.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegebene Cauchy-Folge. Nach Definition existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodass mit der Dreiecksungleichung gilt:

$$\forall m, n \geq N \colon |a_m| - |a_n| \leq |a_m - a_n| < \varepsilon \iff |a_m| < |a_n| + \varepsilon$$

Da dies für alle $m, n \geq N$ gilt, folgt insbesondere für $n = N$:

$$\forall m \geq N \colon |a_m| \leq |a_N| + \varepsilon$$

Somit ist a_n für alle $n \geq N$ durch $|a_N| + \varepsilon$ beschränkt. Die endliche Anzahl an Werten von a_m für $m < N$ haben ein Maximum M, sodass $\forall n < N \colon a_n < M$ gilt. Es folgt also:

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon |a_n| \leq \max(\ \{|a_m| \colon m \in \mathbb{N} \land m < N\} \cup \{|a_N| + \varepsilon\})$$

Also entweder ist das Maximum der Wertemenge von a_n über alle $n < N$ größer als $|a_N| + \varepsilon$ und somit die Schranke der Folge, oder $|a_N| + \varepsilon$ bleibt die Schranke. In jedem Fall existiert eine Schranke, wodurch a_n beschränkt ist.

c) Da a_n eine Cauchy-Folge ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt. Umgeschrieben muss also gelten

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_0 \colon |a_{N+i} - a_{N+j}| < \varepsilon$$

Insbesondere muss dies also auch als Spezialfall für $n, k \in \mathbb{N}, n \geq N$ und $m = n + k$ gelten:

$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ n \geq N \colon |a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

Folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für beliebige $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\forall n \geq N \colon |a_{n+k} - a_n| = |{b_n}^{(k)}| < \varepsilon$$

Also ist auch ${b_n}^{(k)}$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge.