

## Hausaufgabe 4

---

### Aufgabe 5

a)

$$\begin{array}{llllll} A : & \varepsilon \in L & & & & \\ B : & A \wedge (1) : & x = \varepsilon, & y = \varepsilon, & z = \varepsilon & \implies abc \in L \\ C : & B \wedge (1) : & x = a, & y = b, & z = c & \implies aabbcc \in L \\ D : & C \wedge (1) : & x = aa, & y = bb, & z = cc & \implies aaabbbccc \in L \\ E : & D \wedge (2) : & x = aaa, & y = bbb, & z = cc & \implies cbbbccaaa \in L \end{array}$$

b) Sei

$$L' = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{cb^n c^{n-1} a^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{\varepsilon\}$$

Dann ist  $L = L'$ . Wir zeigen zuerst  $L \subseteq L'$ .

Wir führen Induktion über den Aufbau von  $L$ . Wir fangen mit der Basisregel an. Sei also  $w = \varepsilon$ . Dann gilt trivialerweise  $w \in L'$ .

Sei nun  $w \in L \wedge w \in L'$  (IV). Wir überprüfen die Rekursionregeln:

**Fall 1:** Anwenden der Rekursionregel (1).

Dann ist  $w = xyz$  mit  $x = a^n, y = b^n$  und  $z = c^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , da  $w \in L'$  und Rekursionregel (1) diesen Aufbau von Wort benötigt. Durch anwenden der Rekursionregel (1) auf  $w$  erhalten wir ein  $w'$  und es folgt

$$w' = axbycz = aa^n bb^n cc^n = a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1} \in L'$$

**Fall 2:** Anwenden der Rekursionregel (2).

Dann ist  $w = xyzc$  mit  $x = a^n, y = b^n$  und  $z = c^{n-1}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , da die Rekursionregel (2) benötigt, dass das gegebene Wort diese Form hat. Weiter ist ja nach (IV) auch  $w \in L'$ , also insgesamt  $w = xyzc = a^n b^n c^{n-1} c = a^n b^n c^n$ . Durch anwenden der Rekursionsregel (2) auf  $w$  erhalten wir ein  $w'$  und es folgt:

$$w' = cyzx = cb^n c^{n-1} a^n \in L'$$

Insgesamt folgt für jedes ableitbare Wort  $w \in L$ , dass auch  $w \in L'$ . Also  $L \subseteq L'$ .

Wir zeigen nun  $L' \subseteq L$ . Offensichtlich gilt  $\varepsilon \in L'$  und  $\varepsilon \in L$  nach Basisregel.

Wir notieren das anwenden der Rekursionregel auf ein wort  $w$  als  $R_1(w)$  bzw.  $R_2(w)$ .

Wir führen Induktion über  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  und zeigen, dass stets  $a^n b^n c^n \in L$  sowie  $cb^n c^{n-1} a^n \in L$

Sei also  $n = 1$ . Es gilt  $a^n b^n c^n = abc = R_1(\varepsilon)$  und  $\varepsilon \in L$  also auch  $abc \in L$ . Weiter ist  $cb^n c^{n-1} a^n = cba = R_2(abc) = R_2(R_1(\varepsilon))$  also auch  $cba \in L$ .

Sei nun  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  gegeben, sodass  $a^n b^n c^n \in L$  (IV). Es folgt

$$a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1} = R_1(a^n b^n c^n) \quad \text{sowie} \quad cb^{n+1} c^n a^{n+1} = R_2(a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1}) = R_2(R_1(a^n b^n c^n))$$

Da  $a^n b^n c^n \in L$  nach IV, folgt also auch  $a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1} \in L$  sowie  $cb^{n+1} c^n a^{n+1} \in L$ . Nach Prinzip der vollständigen Induktion gilt also, dass  $a^n b^n c^n \in L$  und  $cb^n c^{n-1} a^n \in L$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Insgesamt gilt also nach Konstruktion von  $L'$ , dass  $L' \subseteq L$ .

Aus beiden Induktionen folgt dann  $L = L'$ . □

## Aufgabe 6

a) Wir definieren  $q$  rekursiv wie folgt für ein  $w \in \Sigma^*$

$$q(w) = \begin{cases} 0 & \text{für } w = \varepsilon \\ a + q(v) & \text{für } w = av \text{ mit } a \in \Sigma \text{ und } v \in \Sigma^* \end{cases}$$

b)

Wir zeigen  $q(vw) = q(v) + q(w)$  für  $v, w \in \Sigma^*$  mittels Induktion über  $v$ . Sei also  $w$  beliebig aber fest. Für  $v = \varepsilon$  ist

$$q(vw) = q(\varepsilon w) = q(w) = 0 + q(w) = q(\varepsilon) + q(w) = q(v) + q(w)$$

Sei also nun  $v$  so dass  $q(vw) = q(v) + q(w)$  (IV). Wir verlängern also  $v$  um ein Präfix  $a \in \Sigma$ :

$$q(aww) = a + q(vw) \stackrel{\text{IV}}{=} a + q(v) + q(w) = q(av) + q(w)$$

Folglich gilt für alle  $v, w \in \Sigma^*$ , dass  $q(vw) = q(v) + q(w)$ . Da wir aber mindestens im abelschen Monoid der natürlichen Zahlen (da hier  $0 \in \mathbb{N}$ ) rechnen, ist die Addition kommutativ.

Folglich gilt für  $v, w \in \Sigma^*$

$$q(vw) = q(v) + q(w) = q(w) + q(v) = q(wv)$$

□

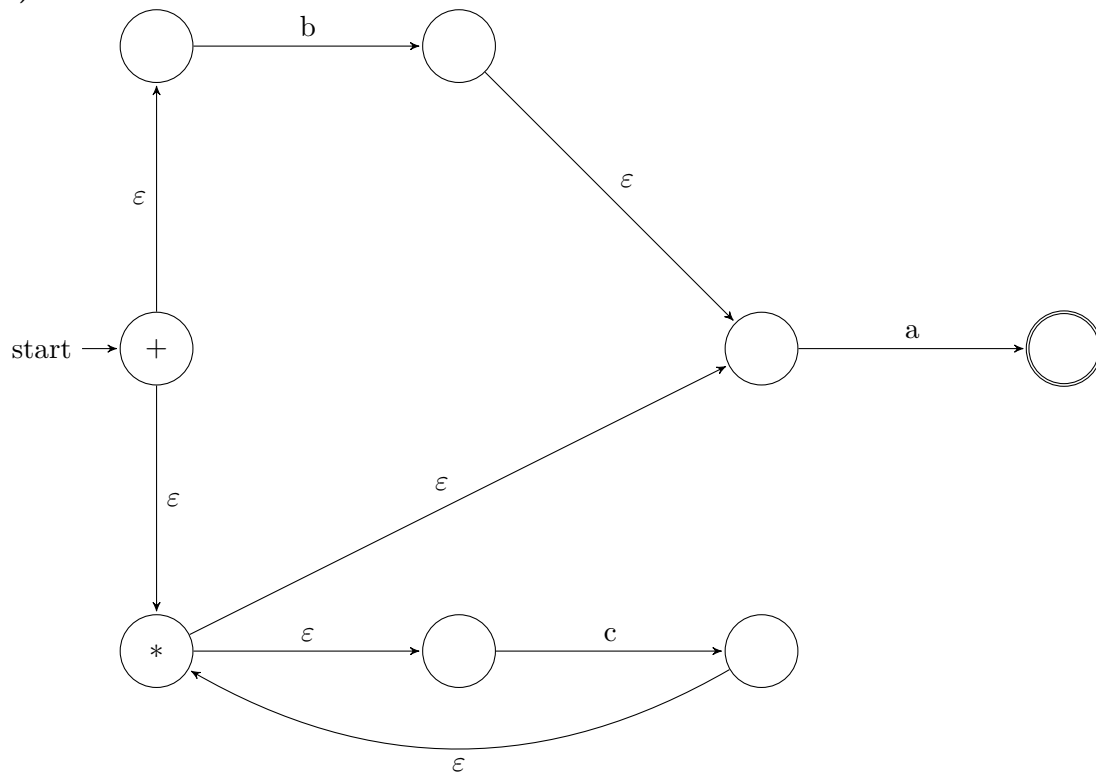
## Aufgabe 7

Es sei im Sinne der Lesbarkeit im folgenden  $\Sigma^*$  als  $(\sum_{a \in \Sigma} a)^*$ , also konkret  $(a + b + c)^*$  zu interpretieren.

$$\begin{aligned} r_1 &= (\Sigma \Sigma)^* & r_2 &= (c^* a + b^* a)^* + (c^* + b^*) \\ r_3 &= \Sigma^* (ab(c + \Sigma^* bc) + bc \Sigma^* ab) \Sigma^* & r_4 &= (b + c)^* + (\Sigma^* bc \Sigma^*) \end{aligned}$$

## Aufgabe 8

a)



**b)**

