Gruppe $\boxed{3}$
Formale Systeme und Automaten

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 9

Aufgabe 5

Sie $\mathcal{G} := (N, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Wir definieren die Grammatik $\mathcal{G}' := (N, \Sigma, P', S)$ mit

$$P' := P \cup \{S \to \alpha S \mid (S \to \alpha) \in P\} \cup \{S \to \varepsilon\}$$

Wir zeigen zuerst $L(\mathcal{G})^* \subseteq L(\mathcal{G}')$, also per Induktion über n, dass gilt:

$$w \in L(\mathcal{G})^n \implies w \in L(\mathcal{G}')$$

Sei also $n = 0$. Dann ist $w = \varepsilon$. Durch die Regel $(S \to \varepsilon) \in P'$ ist also $w \in L(\mathcal{G}')$. Sei nun $n = 1$. Dann ist $w \in L(\mathcal{G})$, also gilt $S \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}} w$. Wegen $P \subset P'$ folgt dann insbesondere auch $S \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}'} w$, also $w \in L(\mathcal{G}')$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ sodass $w \in L(\mathcal{G})^n \implies w \in L(\mathcal{G}')$ gegeben. Sei weiter $w \in L(\mathcal{G})^{n+1}$.
Dann ist $w = w_1 w_2$ mit $w_1 \in L(\mathcal{G})^n$ und $w_2 \in L(\mathcal{G})$. Folglich exisiteren Ableitungen sodass

$$S \xrightarrow{*} \alpha S \to \alpha\beta \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}} w_1 \qquad \text{und} \qquad S \xrightarrow{*} w_2$$

wobei $S \notin \beta$ und $(S \to \beta) \in P$. Dann gilt $(S \to \beta S) \in P'$, also existiert die Ableitung

$$S \xrightarrow{*} \alpha S \to \alpha\beta S \xrightarrow{*} w_1 w_2 = w$$

in $\mathcal{G}'$. Nach Prinzip der vollst. Induktion gilt nun $w \in L(\mathcal{G})^n \implies w \in L(\mathcal{G}')$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt auch sofort, dass $L(\mathcal{G})^* \subseteq L(\mathcal{G}')$.

Im folgenden sei $P_S := \{S \to \alpha S \mid (S \to \alpha) \in P\}$.
Wir zeigen nun $L(\mathcal{G}') \subseteq L(\mathcal{G})^*$, also per Induktion über n dass:
Wenn $w \in L(\mathcal{G}'), w \neq \varepsilon$ und die Ableitung von w benutzt genau n mal eine Regel $p \in P_S$, dann gilt $w \in L(\mathcal{G})^{n+1}$.

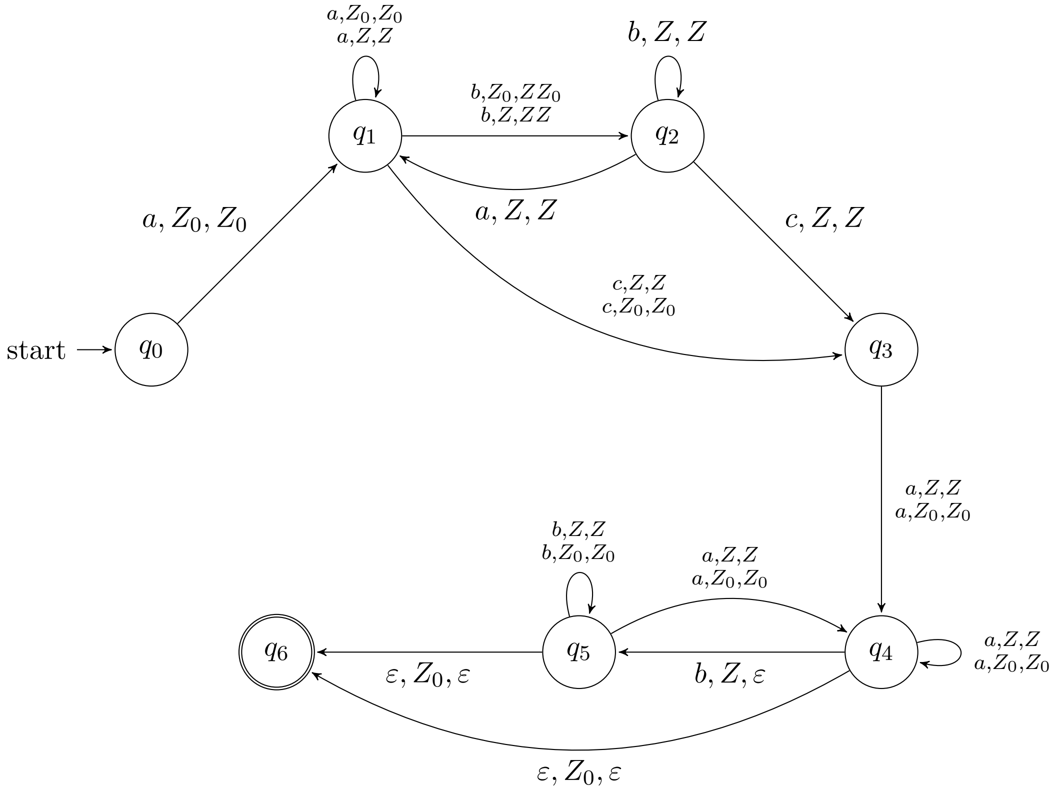
Sei also $n = 0$. Sei $w \in L(\mathcal{G}')$ mit $S \to \alpha \xrightarrow{*} w$ wobei $S \notin \alpha$. Dann folgt durch $\alpha \neq \varepsilon$, dass $S \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}} w$ und damit $w \in L(\mathcal{G})^1$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ gegeben, sodass die Behauptung für dieses gilt. Sei dann $w \in L(\mathcal{G}')$ sodass die Ableitung von w genau $n+1$ mal eine der Regeln in P_S benutzt. Dann ist $w = w_1 w_2$ mit

$$S \xrightarrow{*} w_1 S \to w_1 \alpha \xrightarrow{*} w_1 w_2 = w \qquad \text{wobei} \qquad S \notin \alpha$$

Dabei ist o.B.d.A. $w_2 \neq \varepsilon$, sonst könnte man die letzten Regeln $...S \to \alpha S \to \alpha$ durch $...S \to \alpha$ austauschen und den Fall für n betrachten. Damn haben wir eine Ableitung $S \xrightarrow{*} w_1$ welche genau n mal eine Regel aus P_S benutzt, und eine Ableitung $S \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}} w_2$, welche genau 0 mal eine Regel aus P_S benutzt. Nach Vorraussetzung und Basisfall gilt dann $w_1 \in L(\mathcal{G})^{n+1}$ und $w_2 \in L(\mathcal{G})$, also $w \in L(\mathcal{G})^{n+2}$. Nach Prinzip der vollst. Induktion gilt die Behauptung nun für $n \in \mathbb{N}$. Da insbesondere $\varepsilon \in L(\mathcal{G})^0$, folgt nun insgesamt, dass $L(\mathcal{G}') = L(\mathcal{G})^*$.

Aufgabe 6



Der Automat fügt ein Z in den Kellerspeicher für jedes vollständige Infix *ab* in *u* ein und entfernt ein Z aus dem Kellerspeicher für jedes vollständige *ab* in v.

Akzeptierender Lauf auf *acaa*:
$(q_0, Z_0, acaa) \to (q_1, Z_0, caa) \to (q_3, Z_0, aa) \to (q_4, Z_0, a) \to (q_4, Z_0, \varepsilon) \to (q_6, \varepsilon, \varepsilon)$

Akzeptierender Lauf auf *abaacabba*:
$(q_0, Z_0, abaacabba) \to (q_1, Z_0, baacabba) \to (q_2, ZZ_0, aacabba) \to (q_1, ZZ_0, acabba) \to (q_1, ZZ_0, cabba)$

$\to (q_3, ZZ_0, abba) \to (q_4, ZZ_0, bba) \to (q_5, Z_0, ba) \to (q_5, Z_0, a) \to (q_4, Z_0, \varepsilon) \to (q_6, \varepsilon, \varepsilon)$

Aufgabe 7

Die Idee ist, eine Produktkonstruktion durchzuführen. Da wir nur einen PDA besitzen haben wir nicht das Problem, zwei Speicher gleichzeitig verwalten zu müssen. Wir lassen also ganz normal beide Automaton laufen und übernehmen den Speicher des PDA für den Speicher des Produkt-PDA's.

Sei also $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_{0_{\mathcal{A}}}), Z_0, F_{\mathcal{A}})$ der PDA und $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, \Sigma, \delta, q_{0_{\mathcal{B}}}, F_{\mathcal{B}})$ der DFA.
Dann definiere den PDA

$$\mathcal{P} := (Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}}, \Sigma, \Gamma, \Delta', (q_{0_{\mathcal{A}}}, q_{0_{\mathcal{B}}}), Z_0, F')$$

wobei

$$\Delta' := \{((q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}), a, Z, (q'_{\mathcal{A}}, q'_{\mathcal{B}}), \gamma) \mid (q_{\mathcal{A}}, a, Z, q'_{\mathcal{A}}, \gamma) \in \Delta \wedge \delta(q_{\mathcal{B}}, a) = q'_{\mathcal{B}}\}$$

für $a \in \Sigma, Z \in \Gamma, \gamma \in \Gamma^*$. Weiter ist

$$F' := \{(f_{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{B}}) \mid f_{\mathcal{A}} \in F_{\mathcal{A}} \wedge f_{\mathcal{B}} \in F_{\mathcal{B}}\}$$

Aufgabe 8