Gruppe $\boxed{9}$ Phil Pützstück, 377247
Lineare Algebra für Informatiker

Hausaufgabe 3

Aufgabe 16

Projektionen sind im Skript (Def. 1.84) deutlich allgemeiner als für nur 2 Untervektorräume definiert. Wir halten uns im folgenden an die Definition des Skripts.

a)

Es sei ein K-Vektorraum V, ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein n-Tupel $(U_1, \cdots, U_n)$ von K-Untervektorräumen von V mit $V = \dot{\sum\limits_{i\in[1,n]}} U_i$ gegeben.

Wir überprüfen die Kriterien für Vektorraumhomomorphismen (2.2):
Seien $v, v' \in V$. Dann existieren $u, u' \in \bigtimes_{i\in[1,n]} U_i$ sodass $v = \sum_{i\in[1,n]} u_i$ und $v' = \sum_{i\in[1,n]} u'_i$.
Sei nun $i \in [1, n]$. Dann gilt

$$\mathrm{pr}_i^V(v+v') = \mathrm{pr}_i^V(\sum_{j\in[1,n]}(u_j+u'_j)) \overset{\text{def}}{=} u_i+u'_i \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_i^V(\sum_{j\in[1,n]} u_j)+\mathrm{pr}_i^V(\sum_{j\in[1,n]} u'_j) = \mathrm{pr}_i^V(v)+\mathrm{pr}_i^V(v')$$

Sei weiter nun $a \in K$. Es gilt

$$\mathrm{pr}_i^V(av) = \mathrm{pr}_i^V(\sum_{j\in[1,n]} au_j) \overset{\text{def}}{=} au_i \overset{\text{def}}{=} a \cdot \mathrm{pr}_i^V(\sum_{j\in[1,n]} u_j) = a \cdot \mathrm{pr}_i^V(v)$$

Damit sind die Kriterien aus (2.2) erfüllt.
Es folgt, dass Projektionen (Endo-)Vektorraumhomomorphismen sind. □

b)

Sei V ein K-Vektorraum. Sei weiter ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein n-Tupel $(U_1, \cdots, U_n)$ von K-Untervektorräumen von V mit $V = \sum_{i\in[1,n]} U_i$ gegeben. Dann existiert $u \in \bigtimes_{i\in[1,n]} U_i$ sodass $v = \sum_{i\in[1,n]} u_i$.
Sei nun $i \in [1, n]$ und $p := \mathrm{pr}_i^V$. Es gilt

$$(p \circ p)(v) = p(p(v)) \overset{\text{def}}{=} p(u_i) = p(\sum_{j\in[1,n]} \delta_{j,i} \cdot u_i) \overset{\text{def}}{=} u_i \overset{\text{def}}{=} p(\sum_{j\in[1,n]} u_j) = p(v)$$

wobei δ das Kronecker-Delta bezeichnet. Es folgt $p \circ p = p$. □

c)

Für $v, v' \in V$ ist $\varphi(v) + \varphi(v') = \varphi(v + v') \in \mathrm{Im}\ \varphi$. Ferner ist $0 = \varphi(0) \in \mathrm{Im}\ \varphi$.
Für $a \in K$ ist schließlich $a\varphi(v) = \varphi(av) \in \mathrm{Im}\ \varphi$.
Damit ist nach (1.15) $U_1 := \mathrm{Im}\ \varphi$ ein K-Untervektorraum von V.

Zuerst ist $0 = 0 - \varphi(0) \in U_2$. Für $v, v' \in V$ ist $(v + v') \in V$ und $(v - \varphi(v)), (v' - \varphi(v')) \in U_2$. Es gilt

$$(v - \varphi(v)) + (v' - \varphi(v')) = (v + v') - (\varphi(v) + \varphi(v')) = (v + v') - \varphi(v + v') \in U_2$$

Ferner ist für $a \in K$ auch $av \in V$ und damit

$$a(v - \varphi(v)) = av - a\varphi(v) = av - \varphi(av) \in U_2$$

Damit ist nach (1.15) U_2 ein K-Untervektorraum von V.

Sei nun $v \in V$. Es gilt $v = v + \varphi(v) - \varphi(v) = \varphi(v) + (v - \varphi(v)) \in (U_1 + U_2)$. Also $V \subseteq (U_1 + U_2)$.

Sei nun $v \in (U_1 + U_2)$. Dann gilt $v = u_1 + u_2$ für $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$. Ferner gilt $U_1 \leq V$ und $U_2 \leq V$, also $u_1, u_2 \in V$. Es folgt direkt nach den Vektorraumgesetzen, dass auch $v = u_1 + u_2 \in V$. Also $(U_1 + U_2) \subseteq V$. Es folgt $V = U_1 + U_2$. Sei weiter $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ mit $u_1 + u_2 = 0$ gegeben, sodass $u_1 = \varphi(v), u_2 = v' - \varphi(v')$ für $v, v' \in V$. Dann gilt:

$$u_1 + u_2 = 0 \implies \varphi(v) + v' = \varphi(v') \implies \varphi(\varphi(v) + v') = \varphi(\varphi(v')) \implies \varphi(v) + \varphi(v') = \varphi(v')$$

$$\implies u_1 = \varphi(v) = 0 \implies 0 = u_1 + u_2 = u_2 \implies u_1 = u_2 = 0$$

Folglich sind U_1, U_2 linear unabhängig. Damit gilt dann auch $V = U_1 \dot{+} U_2$.

d) Sei $u_1 \in U_1$. Dann gilt $u_1 = \varphi(v)$ für ein $v \in V$. Ferner gilt $\varphi \circ \varphi = \varphi$ (*). Es folgt

$$\varphi(u_1) = \varphi(\varphi(v)) \overset{*}{=} \varphi(v) = u_1$$

Sei nun $u_2 \in U_2$. Dann gilt $u_1 = v - \varphi(v)$ für ein $v \in V$. Es folgt

$$\varphi(u_2) = \varphi(v - \varphi(v)) = \varphi(v) + \varphi(-\varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0$$

$\square$

Aufgabe 17

Sei $X \in V$ mit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\varphi(X) = AXA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c+d \\ 0 & c+d \end{pmatrix} \tag{1}$$

Seien nun $X, X' \in V$. Es folgt:

$$\varphi(X + X') = A(X + X')A = AXA + AX'A = \varphi(X) + \varphi(X')$$

Sei $X \in V$. Sei ferner $r \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$r\varphi(X) = A(rX)A = r(AXA) = r\varphi(X)$$

Nach (2.2) ist φ damit linear.

Mit (1) folgt für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \overset{(1)}{=} \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid c = -d\} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Offensichtlich ist dann auch $(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von Ker φ.

Ebenso folgt mit (1) für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \overset{(1)}{=} \{\begin{pmatrix} 0 & c+d \\ 0 & c+d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}A$$

Folglich gilt $\operatorname{Im}(\varphi) = \langle A \rangle$, also dass (A) eine Basis von $\operatorname{Im}(\varphi)$ ist, da auch weiter $A \neq 0$.

b)

Es ist (v_1, v_2, v_3) eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$, denn:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v_1 + v_2 - v_3}{2} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v_1 - v_2 + v_3}{2} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-v_1 + v_2 + v_3}{2}$$

Damit gilt nach Proposition 2.19, dass es genau ein lineare Abbildung φ mit

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Damit ist dann

$$\varphi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = a \cdot \varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) + b \cdot \varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + c \cdot \varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$= \frac{a}{2}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2) - \varphi(v_3)) + \frac{b}{2}(\varphi(v_1) - \varphi(v_2) + \varphi(v_3)) + \frac{c}{2}(-\varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \varphi(v_3))$$

$$= \frac{a}{2}(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}) + \frac{b}{2}(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}) + \frac{c}{2}(-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ b - a - c & a - b - c \end{pmatrix}$$