Gruppe $\boxed{3}$
Formale Systeme und Automaten

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 5

Aufgabe 5

Wir berechnen: $r_Q(q_0, q_0)$. Mit $x = q_1$ erhalten wir:

$$r_Q(q_0, q_0) = r_{\{q_0\}}(q_0, q_0) + r_{\{q_0\}}(q_0, q_1) r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)^* r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_0, q_0)$. Mit $x = q_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_0, q_0) &= r_\varnothing(q_0, q_0) + r_\varnothing(q_0, q_0) r_\varnothing(q_0, q_0)^* r_\varnothing(q_0, q_0) \\ &= (a + \varepsilon) + (a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^*(a + \varepsilon) \\ &= a^* \end{aligned}$$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$. Mit $x = q_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_0, q_1) &= r_\varnothing(q_0, q_1) + r_\varnothing(q_0, q_0) r_\varnothing(q_0, q_0)^* r_\varnothing(q_0, q_1) \\ &= (b + c) + (a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^*(b + c) \\ &= (b + c) + a^*(b + c) \\ &= a^*(b + c) \end{aligned}$$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$. Mit $x = q_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_1, q_1) &= r_\varnothing(q_1, q_1) + r_\varnothing(q_1, q_0) r_\varnothing(q_0, q_0)^* r_\varnothing(q_0, q_1) \\ &= \varepsilon + a(a + \varepsilon)^*(b + c) \\ &= \varepsilon + aa^*(b + c) \end{aligned}$$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$. Mit $x = q_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_1, q_0) &= r_\varnothing(q_1, q_0) + r_\varnothing(q_1, q_0) r_\varnothing(q_0, q_0)^* r_\varnothing(q_0, q_0) \\ &= a + a(a + \varepsilon)^*(a + \varepsilon) \\ &= a + aa^* \\ &= aa^* \end{aligned}$$

Durch Rückeinsetzen erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} r_Q(q_0, q_0) &= r_{\{q_0\}}(q_0, q_0) + r_{\{q_0\}}(q_0, q_1) r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)^* r_{\{q_0\}}(q_1, q_0) \\ &= a^* + a^*(b + c)(\varepsilon + aa^*(b + c))^* aa^* \\ &= a^* + a^*(b + c)(aa^*(b + c))^* aa^* \end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Angenommen, L_1 ist regulär. Wir wählen n zu L_1 gemäß Pumping-Lemma und betrachten das Wort $w = a^n b^n c^{2n} \in L_1$. Das Pumping-Lemma liefert Zerlegung

$$w = xyz \quad \text{mit} \quad |xy| \leq n \quad \text{und} \quad y \neq \varepsilon \quad \text{sowie} \quad xz = xy^0 z \in L_1$$

Wegen $|xy| \leq n$ und $y \neq \varepsilon$ gilt $x = a^j$ mit $j \geq 0$ und $y = a^k$ mit $k > 0$.
Jedoch:

$$xz = a^{n-k} b^n c^{2n} \notin L_1 \quad \text{weil} \quad k > 0 \implies n - k + n \neq 2n$$

Dies führt also zu einem Widerspruch. Folglich ist L_1 nicht regulär.

b) Angenommen, L_2 ist regulär. Wir wählen n zu L_2 gemäß Pumping-Lemma und betrachten das Wort $w = b^n a^{n+1} \in L_2$. Das Pumping-Lemma liefert Zerlegung

$$w = xyz \quad \text{mit} \quad |xy| \leq n \quad \text{und} \quad y \neq \varepsilon \quad \text{sowie} \quad xy^3 z \in L_2$$

Wegen $|xy| \leq n$ und $y \neq \varepsilon$ gilt $x = b^j$ mit $j \geq 0$ und $y = b^k$ mit $k > 0$.
Jedoch:

$$xy^3 z = a^{n+2k} b^{n+1} \notin L_2 \quad \text{weil} \quad k > 0 \implies 2k \geq 2 \implies n + 2k \nless n + 1$$

Dies führt also zu einem Widerspruch. Folglich ist L_2 nicht regulär.

Aufgabe 7

Zuerst bilden teilen wir die Zustände in Endzustände und nicht-Endzustände:

$$\mathcal{B}_1 := \{q_0, q_1, q_5\} \qquad \mathcal{B}_2 := \{q_2, q_3, q_4\}$$

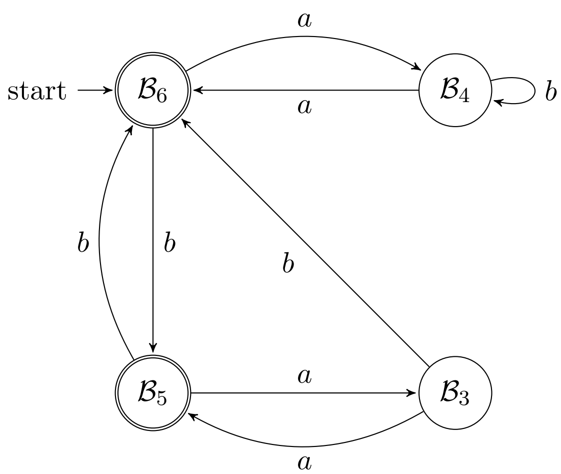
Wir verfeinern $\mathcal{B}_2$ bzgl der b-Transition und $\mathcal{B}_1$:

$$\mathcal{B}_1 := \{q_0, q_1, q_5\} \qquad \mathcal{B}_3 := \{q_2\} \qquad \mathcal{B}_4 := \{q_3, q_4\}$$

Wir verfeinern $\mathcal{B}_1$ bzgl. der a-Transition und $\mathcal{B}_3$:

$$\mathcal{B}_5 := \{q_1\} \qquad \mathcal{B}_6 := \{q_0, q_5\} \qquad \mathcal{B}_3 := \{q_2\} \qquad \mathcal{B}_4 := \{q_3, q_4\}$$

Es lässt sich nun keine Zustandsmenge noch weiter verfeinern. Der minimale DFA ist dann:



Aufgabe 8

a)

Der Satz von Nerode besagt: $index(L) < \infty \Rightarrow$ L ist regulär.
Somit folgt: L ist nicht regulär $\Rightarrow index(L) = \infty$
Wir zeigen das L nicht regulär und somit der Index von L unendlich ist.

Beweis durch Widerspruch
Angenommen L ist Regulär.
Wähle n zu L gemäß Pumping Lemma und betracht w = $b^n aa\ b^n$.
Puming Lemma liefert Zerlegung.
w = xyz mit |xy| $\leq$ n und y $\neq \varepsilon$ und xz $\in$ L.
Wegen |xy| $\leq$ und y $\neq \varepsilon$ gilt x = b^j mit j $\geq$ 0 und y = b^k mit k > 0.
Aber xz = $b^n - kaa\ b^n \notin$ L, weil n-k > n.
Widerspruch!
Somit ist der Index von L unendlich.

AUFBAU DER KLASSEN ?

b)

Wir Definieren v $\in \{a, b\}^*$ und im Sinne der Lesbarkeit:

$$p := |v|_{ab} = |v|_{ba}, \quad q := |v|_{ab} > |v|_{ba}, \quad r := |v|_{ab} < |v|_{ba}$$

Wir beginnen mit einigen Beobachtungen zu $\sim_k$:
$||v|_{ab} - |v|_{ba}| \leq 1$
$\varepsilon \in$ p, ab $\in$ q, ba $\in$ r
$\varepsilon \not\sim_k$ ab (mit x = b, denn εb $\in$ K und abb $\notin$ K)
$\varepsilon \not\sim_k$ ba (mit x = a, denn εa $\in$ K und baa $\notin$ K)
ab $\not\sim_k$ ba (mit x = a, denn aba $\in$ K und baa $\notin$ K)

Behauptung:
Die $\sim_K$-Klassen sind: p$/_k$, q$/_k$, r$/_k$

Da ein beliebiges v immer genau eine Eigenschaft der drei Äquivalenzklassen erfüllen muss, zeigt dies, dass p$/_k$, q$/_k$, r$/_k$ alle Äquivalenzklassen von K sind.
Somit folgt auch index(K) = 3.