Ungleichungen von Kraft & McMillan

Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

November 4, 2018

Inhalt

Motivation

- Gesehen, dass eindeutig bzw. sofort dekodierbare Codes sehr nützlich sind.
- Wann bzw. unter welchen Bedingungen existieren diese?
- Insbesondere: Wortlängen und Größe des Code-Alphabets
- Ungleichungen setzen diese Aspekte in Relation

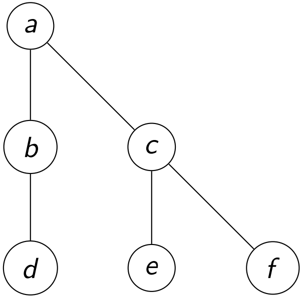
Überblick

- Graphen und Bäume: Wiederholung und Definitionen
- Zusammenhang Codes und Bäume
- Ungleichung von Kraft
- Ungleichung von McMillan
- Intepretationen / Ausblick

Bäume

Baum $T = (V, E)$.
Knotenmenge $V(T) := V$.
Kantenmenge $E(T) := E$.

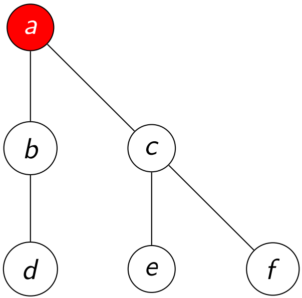
- ungerichtet
- azyklisch
- zusammenhängend



Bäume

Baum $T = (V, E)$.
Knotenmenge $V(T) := V$.
Kantenmenge $E(T) := E$.

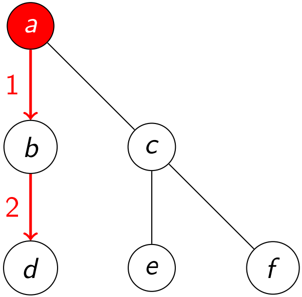
- ungerichtet
- azyklisch
- zusammenhängend
- eindeutige Wurzel $root(T)$



Bäume

Baum $T = (V, E)$.
Knotenmenge $V(T) := V$.
Kantenmenge $E(T) := E$.

- ungerichtet
- azyklisch
- zusammenhängend
- eindeutige Wurzel $root(T)$
- Höhe $height(v), v \in V$



$height(d) = 2$

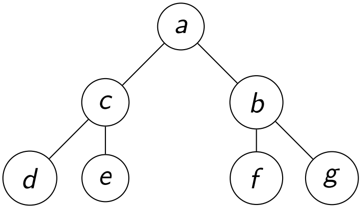
Bäume

Baum $T = (V, E)$.
Knotenmenge $V(T) := V$.
Kantenmenge $E(T) := E$.

- ungerichtet
- azyklisch
- zusammenhängend
- eindeutige Wurzel $root(T)$
- Höhe $height(v), v \in V$

Nenne T r-är wenn jeder Knoten mit Ausnahme von Blättern genau $r \in \mathbb{N}$ Kinder hat.

2-är bzw. binär



Teilbäume und Ordnung von Knoten

T, T' gewurzelte Bäume.

- Schreibe $T' \leq T$ wenn T' Teilgraph von T.

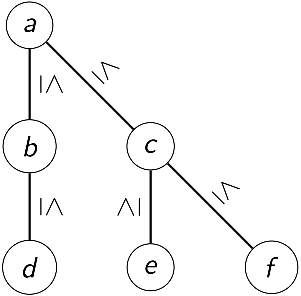
Teilbäume und Ordnung von Knoten

T, T' gewurzelte Bäume.

- Schreibe $T' \leq T$ wenn T' Teilgraph von T.
- Schreibe $T' \leq_r T$ wenn $T' \leq T$ und T, T' r-är.

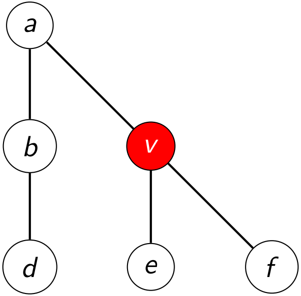
Teilbäume und Ordnung von Knoten

Für $v, v' \in T$ schreiben wir $v' \leq v$, genau dann, wenn der eindeutige Pfad von $root(T)$ zu v den Knoten v' besucht.
Hier $root(T) = a$



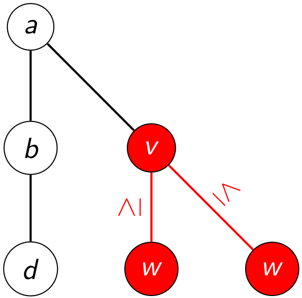
Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $root(T) \neq v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T), v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".



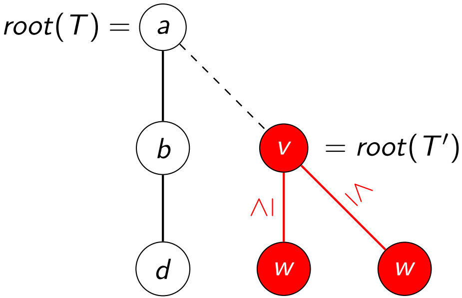
Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $root(T) \neq v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T), v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".



Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $root(T) \neq v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T), v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".

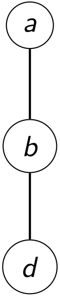


Definiere $T \setminus v := T \setminus T'$, wobei $T' \leq T$ der Teilbaum von T mit Wurzel $v \in V(T) \setminus \{root(T)\}$ ist.
Insbesondere ist $T \setminus v$ wieder ein gewurzelter Baum.

Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $root(T) \neq v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T), v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".

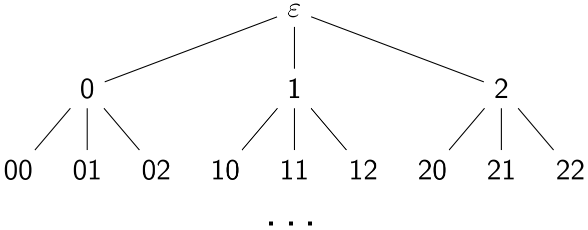
$root(T \setminus v) =$



Definiere $T \setminus v := T \setminus T'$, wobei $T' \leq T$ der Teilbaum von T mit Wurzel $v \in V(T) \setminus \{root(T)\}$ ist.
Insbesondere ist $T \setminus v$ wieder ein gewurzelter Baum.

Code als Baum

Sei $\mathcal{C}$ ein Code über dem Code-Alphabet $\{0, 1, 2\}$.
$\mathcal{C}$ als Teilmenge von $V(T)$, wobei T:



Code als Baum

Seien $h, r \in \mathbb{N}$, $A := [0, r-1]$ das Code-Alphabet eines r-ären Codes $\mathcal{C}$ mit maximaler Wortlänge $h \in \mathbb{N}$. Dann ist $W := \bigcup_{i \in [0,h]} A^i$ die Menge aller Wörter über A mit maximaler Länge h. Definiere gewurzelten r-ären Baum $\mathcal{T}_r^h$ der Höhe h durch:

$$V(\mathcal{T}_r^h) := \{v_w \mid w \in W\}$$

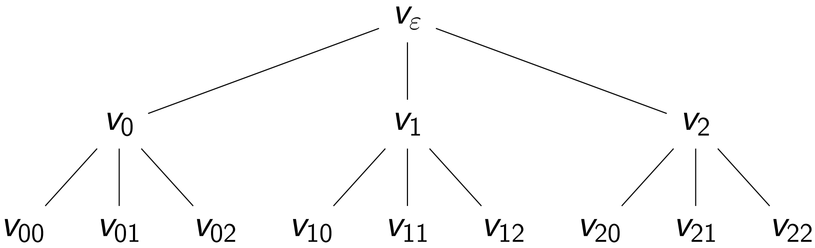
$$E(\mathcal{T}_r^h) := \{(v_w, v_{w'}) \mid w, w' \in W, wx = w', x \in A\}$$

$$root(\mathcal{T}_r^h) := v_\varepsilon$$

Insbesondere $\mathcal{T}_r^h$ eindeutig durch r, h bestimmt.
(Bis auf Bijektionen des Code-Alphabets).

Bemerkungen zu $\mathcal{T}_r^h$

Betrachte $\mathcal{T}_3^2$:

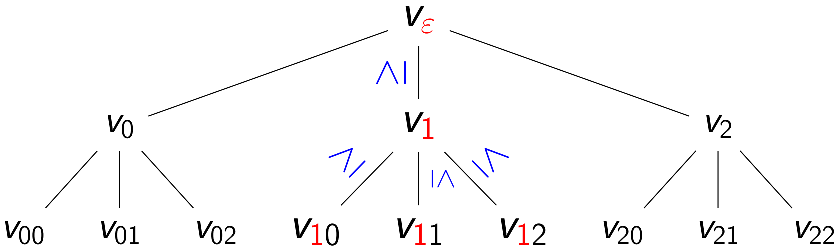


Wir haben:

- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $height(v_w) = |w|$.

Bemerkungen zu $\mathcal{T}_r^h$

Betrachte $\mathcal{T}_3^2$:



Wir haben:

- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $\mathit{height}(v_w) = |w|$.
- Für $v_w, v_{w'} \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $v_w \leq v_{w'} \iff w \sqsubseteq w'$.

Inhalt

Bäume

Ungleichung von Kraft

Ungleichung von McMillan

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen l aufsteigend sortiert und $l_1 > 0$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen l aufsteigend sortiert und $l_1 > 0$
- Code-Alphabet von $\mathcal{C}$ ist $[0, r-1]$

Ungleichung von Kraft: Beweisidee

TODO

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00] sind die sofort dekodierbaren Codes genau die Präfixcodes.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

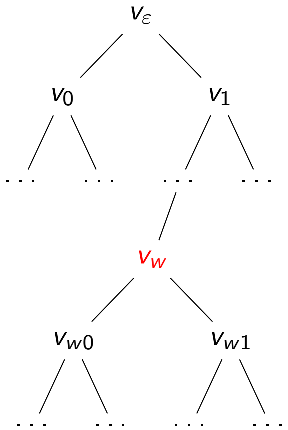
Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00] sind die sofort dekodierbaren Codes genau die Präfixcodes.

Konstuiere Codewörter w_i mit $|w_i| = l_i$ via endlicher Induktion über i. Betrachte dabei den zum Code-Alphabet zug. Baum $\mathcal{T}_r^h$ und wähle die w_i so, dass am Ende $\mathcal{C} = \{w_i \mid i \in [1, q]\}$ ein Präfixcode ist.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

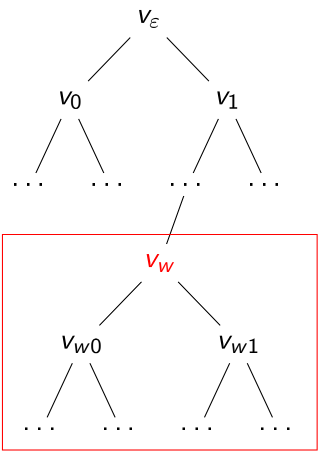
Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_1 := w$.



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_1 := w$.

Setze $h = l_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

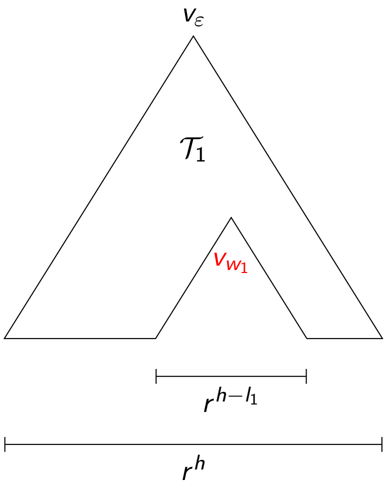


Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_1 := w$.

Setze $h = l_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

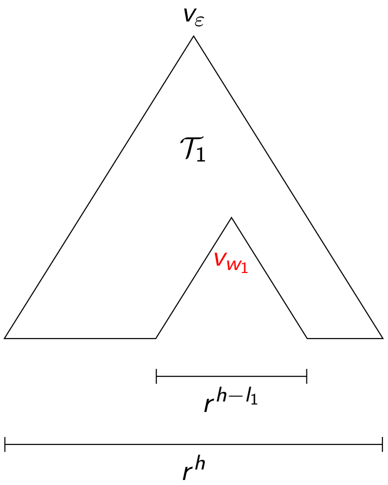
$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

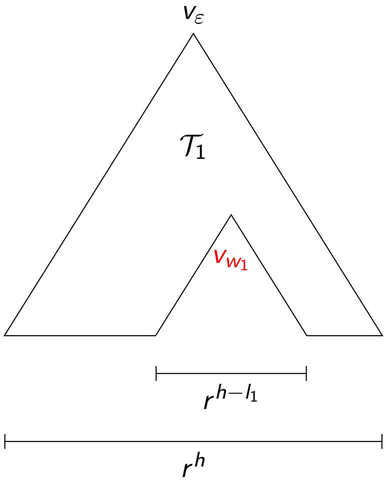


Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

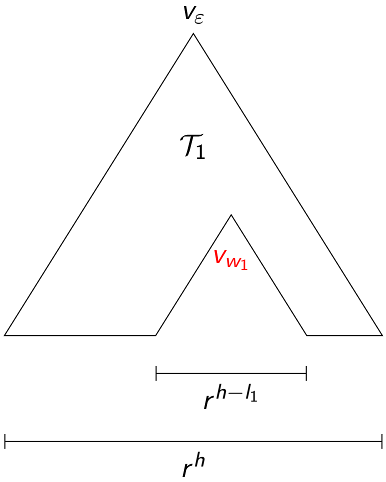


Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right) \geq 0$$



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

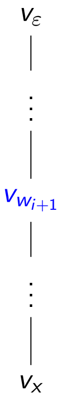
Sei nun $i \in [1, q-1]$ sodass $\mathcal{C} = \{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = l_j$ ist, und $\mathcal{T}_i$ noch mindestens 1 Blatt v_x hat.

$$\begin{array}{c} v_\varepsilon \\ | \\ \vdots \\ | \\ v_x \end{array}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

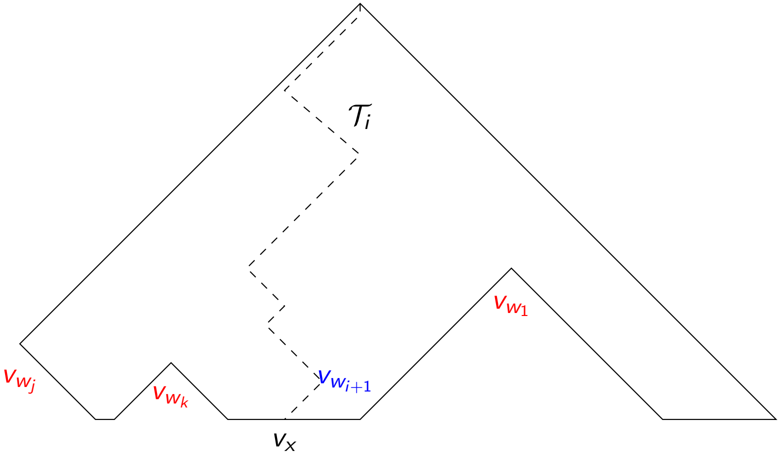
Sei nun $i \in [1, q-1]$ sodass $\mathcal{C} = \{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = l_j$ ist, und $\mathcal{T}_i$ noch mindestens 1 Blatt v_x hat.

- $\mathcal{T}_i$ zusammenhängend
- also ex. $v_w \in V(\mathcal{T}_i)$ mit $height(v_w) = l_{i+1} \leq h$
- Setze $w_{i+1} := w$.



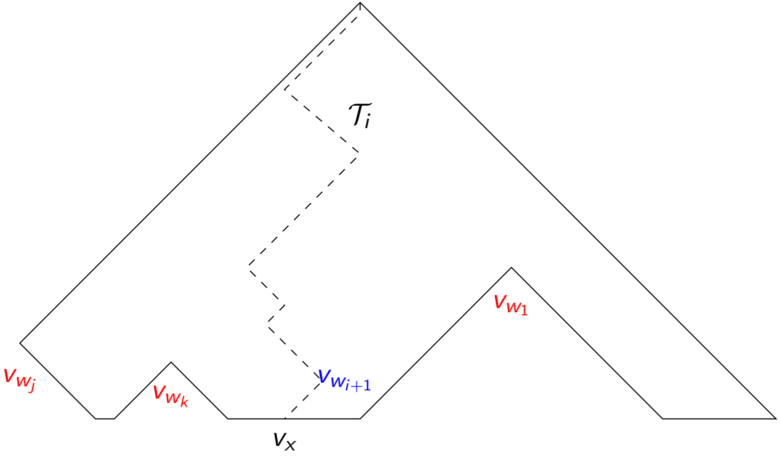
Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Sei $j \in [1, i]$. Wir haben bereits alle Knoten $v_w \geq v_{w_j}$ im Schritt $\mathcal{T}_j := \mathcal{T}_{j-1} \setminus v_{w_j}$ gelöscht. Da wir $v_{w_{i+1}}$ aus $\mathcal{T}_i$ gewählt haben, kann also **nicht** $v_{w_j} \leq v_{w_{i+1}}$ gelten.



Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).



Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$$\mathcal{T}_i \text{ hat nach Konstruktion} \quad r^h - \sum_{k=1}^{i} r^{h-l_k} \quad \text{Blätter}$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-l_k}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-l_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-l_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right) \geq 0$$

Blätter. Somit können wir einen Präfix-Code $\mathcal{C}$ unter den gegebenen Bedingungen konstruieren. Dieser ist nach [JJ00] auch sofort dekodierbar.

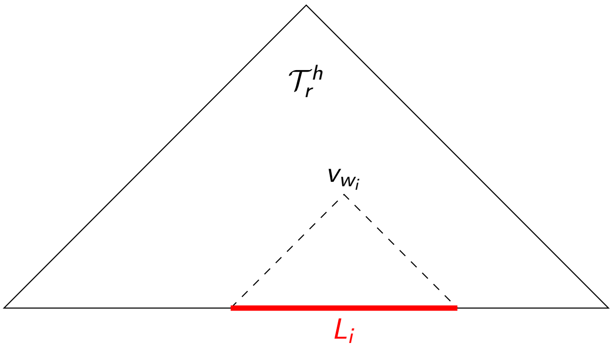
Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Nun zeigen wir, dass wenn $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.

Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Nun zeigen wir, dass wenn $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.
Betrachte für $i \in [1, q]$ die Menge der Blätter unter v_{w_i}:

$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge height(v) = h\}$$



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j}.

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j}. Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j}. Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j}. Dann gilt:

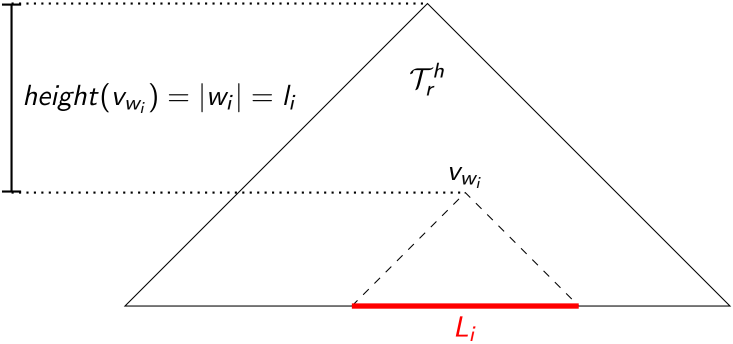
$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w \implies w_i \sqsubseteq w_j$$

Widerpruch, denn $w_i, w_j \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$ ist Präfix-Code!

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

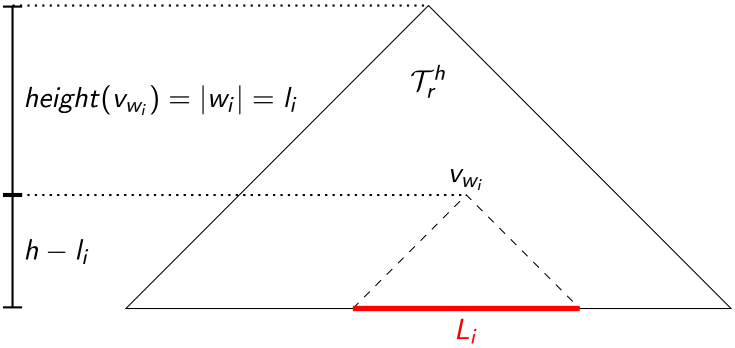
Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

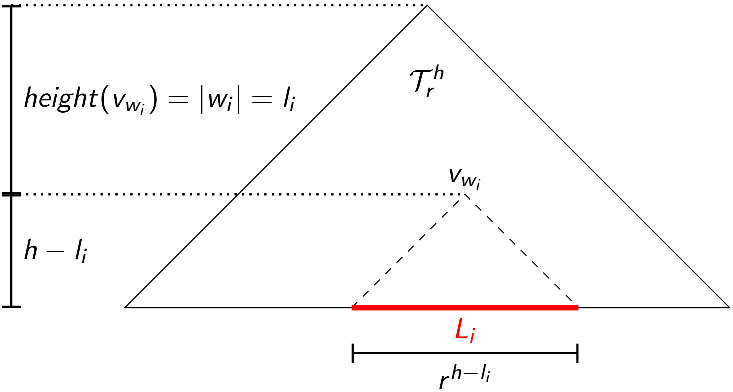
Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right|$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i|$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \emptyset$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Review of Kraft or smth.

Wir haben also gezeigt [...]

- Nach [JJ00] bekannt, dass sofort dekodierbar $\implies$ eindeutig dekodierbar
- Jedoch vorraussetzungen für letzteres **nicht** schwächer:

Inhalt

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer eindeutig dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \tag{1}$$

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer eindeutig dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \tag{1}$$

Richtung "(1) $\implies \mathcal{C}$ existiert" folgt sofort mit Kraft.

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- Betrachte K^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- Betrachte K^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- K^n als Summe abhängig von Wahl von n Wortlängen aus l.

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- Betrachte K^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- K^n als Summe abhängig von Wahl von n Wortlängen aus l.
- Fasse Auswahlen (Indextupel) mit selbem Summand zusammen und summiere über möglichen Wertebereich

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- Betrachte K^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- K^n als Summe abhängig von Wahl von n Wortlängen aus l.
- Fasse Auswahlen (Indextupel) mit selbem Summand zusammen und summiere über möglichen Wertebereich
- Nun finde aus Form von K^n konstante obere Schranke

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- Zu zeigen: $K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$
- Betrachte K^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- K^n als Summe abhängig von Wahl von n Wortlängen aus l.
- Fasse Auswahlen (Indextupel) mit selbem Summand zusammen und summiere über möglichen Wertebereich
- Nun finde aus Form von K^n konstante obere Schranke
- Dann muss $K \leq 1$, da sonst K^n für geeignetes n größer als jede Konstante

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Wir müssen also zeigen, dass $K \leq 1$, wobei

$$K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Wir müssen also zeigen, dass $K \leq 1$, wobei

$$K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Wir müssen also zeigen, dass $K \leq 1$, wobei

$$K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{l_{i_k}}}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Wir müssen also zeigen, dass $K \leq 1$, wobei

$$K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{l_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} l_{i_k}}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Wir müssen also zeigen, dass $K \leq 1$, wobei

$$K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{l_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} l_{i_k}}$$

Werden Summe über Auswahl an Wortlängen noch oft brauchen, definiere:

$$\mathcal{S} : [1, q]^n \to \mathbb{N},\ i \mapsto \sum_{k=1}^{n} l_{i_k}$$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

$[1, q]^n = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$$i = (3, 1) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} = l_{i_1} + l_{i_2} = l_3 + l_1 = 5 + 1$$

$$i = (2, 3) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} = l_2 + l_3 = 3 + 5$$

$$i = (2, 2) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} = l_2 + l_2 = 3 + 3$$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

$[1, q]^n = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$$i = (3, 1) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} = l_{i_1} + l_{i_2} = l_3 + l_1 = 5+1 = 6$$

$$i = (2, 3) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} = l_2 + l_3 = 3 + 5$$

$$i = (2, 2) \in [1, q]^n \implies \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} = l_2 + l_2 = 3 + 3 = 6$$

Also auch selber Wert bei unterschiedlichen Indextupeln.

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

- Summe minimal 3, maximal 15.
- Fasse Indextupel mit gleicher Summe $j \in [3, 15]$ zusammen

$$N_{6} := \mathcal{S}^{-1}(\{6\}) = \{i \in [1,3]^2 \mid \mathcal{S}(i) = 6\} = \{\underbrace{(1,3)}_{l_1+l_3=6}, \overbrace{(3,1)}^{l_3+l_1=6}, \underbrace{(2,2)}_{l_2+l_2=6}\}$$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

- Summe minimal 3, maximal 15.
- Fasse Indextupel mit gleicher Summe $j \in [3, 15]$ zusammen

$$N_6 := \mathcal{S}^{-1}(\{6\}) = \{i \in [1,3]^2 \mid \mathcal{S}(i) = 6\} = \{ \underbrace{(1,3)}_{l_1+l_3=6}, \overbrace{(3,1)}^{l_3+l_1=6}, \underbrace{(2,2)}_{l_2+l_2=6} \}$$

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j) = \{i \in [1,q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} = j\}$$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

- Betrachte Alphabet $[0, 1], \mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

- Betrachte Alphabet $[0, 1], \mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$
- Zu $i \in [1, q]^n$ eindeutige Code-Sequenz $\mathcal{W}(i) = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$.

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

- Betrachte Alphabet $[0, 1], \mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$
- Zu $i \in [1, q]^n$ eindeutige Code-Sequenz $\mathcal{W}(i) = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$.

$$\mathcal{W}(N_6) = \{\mathcal{W}(t) \mid t \in N_6\} = \{\mathcal{W}(t) \mid t \in \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}\}$$
$$= \{w_1 w_3, w_3 w_1, w_2 w_2\} = \{011111, 111110, 100100\}$$

Ungleichung von McMillan: Beispiel

Anzahl Codewörter $q = 3$. Wortlängen $l = (1, 3, 5)$. $n = 2$.

- Betrachte Alphabet $[0, 1], \mathcal{C} = \{\underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{100}_{w_2}, \underbrace{11111}_{w_3}\}$
- Zu $i \in [1, q]^n$ eindeutige Code-Sequenz $\mathcal{W}(i) = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$.

$$\mathcal{W}(N_6) = \{\mathcal{W}(t) \mid t \in N_6\} = \{\mathcal{W}(t) \mid t \in \{(1,3), (3,1), (2,2)\}\}$$
$$= \{w_1 w_3, w_3 w_1, w_2 w_2\} = \{011111, 111110, 100100\}$$

Da N_6 gerade die Indextupel Wortlängensumme 6:

$$\forall i \in N_6 : |\mathcal{W}(i)| = 6 \qquad \text{und} \qquad \mathcal{W}(N_6) \subseteq \{0, 1\}^6$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} l_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} l_k$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} l_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel $i \in [1, q]^n$.

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} l_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel $i \in [1,q]^n$. Definiere für $j \in [nm, nM]$:

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j) = \{i \in [1,q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} = j\}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} l_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel $i \in [1,q]^n$. Definiere für $j \in [nm, nM]$:

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j) = \{ i \in [1,q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} = j \}$$

$$\mathcal{W} : [1,q]^n \to [0, r-1]^*, \ \ i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} l_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} l_k$

Damit gilt auch

$$n \cdot m \leq \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} \leq n \cdot M$$

für alle Indextupel $i \in [1,q]^n$. Definiere für $j \in [nm, nM]$:

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j) = \{i \in [1,q]^n \mid \mathcal{S}(i) = \sum_{k=1}^{n} l_{i_k} = j\}$$

$$\mathcal{W} : [1,q]^n \to [0, r-1]^*, \; i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

$\mathcal{C}$ eindeutig dekodierbar $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ injektiv, da $i \in [1,q]^n$ die eindeutige Kombination von Codewörtern aus $\mathcal{C}$ für $\mathcal{W}(i)$.

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$j \in [nm, nM]$ zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \to [0, r-1]^*, \; i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

- $\mathcal{W}$ injektiv $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$j \in [nm, nM]$ zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \to [0, r-1]^*, \; i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

- $\mathcal{W}$ injektiv $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$
- $|\mathcal{W}(i)| = j$ für $i \in N_j$ nach Konstruktion

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$j \in [nm, nM]$ zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \to [0, r-1]^*, \; i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

- $\mathcal{W}$ injektiv $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$
- $|\mathcal{W}(i)| = j$ für $i \in N_j$ nach Konstruktion
- $\mathcal{W}(N_j) \subseteq [0, r-1]^j \implies |\mathcal{W}(N_j)| \leq |[0, r-1]^j|$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

$j \in [nm, nM]$ zwischen min / max Wortlängensumme.

$$N_j := \mathcal{S}^{-1}(j), \quad \mathcal{W} : [1, q]^n \to [0, r-1]^*, \; i \mapsto w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n}$$

- $\mathcal{W}$ injektiv $\implies |N_j| = |\mathcal{W}(N_j)|$
- $|\mathcal{W}(i)| = j$ für $i \in N_j$ nach Konstruktion
- $\mathcal{W}(N_j) \subseteq [0, r-1]^j \implies |\mathcal{W}(N_j)| \leq |[0, r-1]^j|$
- $|N_j| \leq r^j$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Recap:

$$K := \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} l_{i_k}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

$$K := \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} l_{i_k}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

- $|N_j| \leq r^j$ Anzahl der $i \in [1, q]^n$ mit gleichem $\mathcal{S}(i)$.

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} l_{i_k}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

- $|N_j| \leq r^j$ Anzahl der $i \in [1, q]^n$ mit gleichem $\mathcal{S}(i)$.
- Fasse zusammen via N_j, summiere über $[nm, nM]$

$$K^n = \sum_{j=nm}^{nM} |N_j| r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{|N_j|}{r^j}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} l_{i_k}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\mathcal{S}(i)}$$

- $|N_j| \leq r^j$ Anzahl der $i \in [1,q]^n$ mit gleichem $\mathcal{S}(i)$.
- Fasse zusammen via N_j, summiere über $[nm, nM]$

$$K^n = \sum_{j=nm}^{nM} |N_j| r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{|N_j|}{r^j} \leq \sum_{j=nm}^{nM} 1 = (M-m)n + 1$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}, \quad K^n \leq (M-m)n + 1$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}, \quad K^n \leq (M-m)n + 1 \implies \frac{K^n}{n} \leq (M-m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r, Wortlängen l fix.
- Damit auch m, M, K fix.
- $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$K := \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}, \quad K^n \leq (M-m)n + 1 \implies \frac{K^n}{n} \leq (M-m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r, Wortlängen l fix.
- Damit auch m, M, K fix.
- $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
- Nach Analysis bekannt: nur möglich für $K \leq 1$.

$$\implies \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} = K \leq 1$$

$\square$

Review of McMillan or smth.

[...]