

## Hausaufgabe 4

---

### Aufgabe 5

## Aufgabe 6

a) Wir definieren  $q$  rekursiv wie folgt für ein  $w \in \Sigma^*$

$$q(w) = \begin{cases} 0 & \text{für } w = \varepsilon \\ a + q(v) & \text{für } w = av \text{ mit } a \in \Sigma \text{ und } v \in \Sigma^* \end{cases}$$

b)

Wir zeigen  $q(vw) = q(v) + q(w)$  für  $v, w \in \Sigma^*$  mittels Induktion über  $v$ . Sei also  $w$  beliebig aber fest. Für  $v = \varepsilon$  ist

$$q(vw) = q(\varepsilon w) = q(w) = 0 + q(w) = q(\varepsilon) + q(w) = q(v) + q(w)$$

Sei also nun  $v$  so dass  $q(vw) = q(v) + q(w)$  (IV). Wir verlängern also  $v$  um ein Präfix  $a \in \Sigma$ :

$$q(aww) = a + q(vw) \stackrel{\text{IV}}{=} a + q(v) + q(w) = q(av) + q(w)$$

Folglich gilt für alle  $v, w \in \Sigma^*$ , dass  $q(vw) = q(v) + q(w)$ . Da wir aber mindestens im abelschen Monoid der natürlichen Zahlen (da hier  $0 \in \mathbb{N}$ ) rechnen, ist die Addition kommutativ. Folglich gilt für  $v, w \in \Sigma^*$

$$q(vw) = q(v) + q(w) = q(w) + q(v) = q(wv)$$

□

## Aufgabe 7

Es sei im Sinne der Lesbarkeit im folgenden  $\Sigma^*$  als  $(\sum_{a \in \Sigma} a)^*$ , also konkret  $(a + b + c)^*$  zu interpretieren.

$$\begin{array}{ll} L_1 = & L_2 = \\ L_3 = & L_4 = \end{array}$$

## Aufgabe 8