Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$ Tobias Riedel, 379133
Analysis für Informatiker Phil Pützstück, 377247

Hausaufgabe 03

Aufgabe 1

Zu zeigen sind die Körperaxiome (K1) bis (K5) für die Menge Q mit Operationen # und $*$.

(K1)(Assoziativität)

$$\begin{aligned}
(\,(a,b)\#(c,d)\,)\#(e,f) &\overset{\#}{=} (\ ad+bc\ ,\ bd\ )\#(e,f)\\
&\overset{\#}{=} (\ (ad+bc)\cdot f+(bd)\cdot e\ ,\ (bd)\cdot f\ )
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a,b)\#(\,(c,d)\#(e,f)\,) &\overset{\#}{=} (a,b)\#(\ cf+de\ ,\ df\ )\\
&\overset{\#}{=} (\ a\cdot(df)+b\cdot(cf+de)\ ,\ b\cdot(df)\ )\\
&\overset{\text{viii}}{=} (\ a\cdot(df)+b\cdot(cf)+b\cdot(de)\ ,\ b\cdot(df)\ )\\
&\overset{\text{vi}}{=} (\ (ad)\cdot f+(bc)\cdot f+(bd)\cdot e\ ,\ (bd)\cdot f\ )\\
&\overset{\text{viii}}{=} (\ (ad+bc)\cdot f+(bd)\cdot e\ ,\ (bd)\cdot f\ )
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ (\,(a,b)\#(c,d)\,)\#(e,f)=(a,b)\#(\,(c,d)\#(e,f)\,)$$

Somit ist die Assoziativität von # gezeigt. Analog dazu für $*$:

$$\begin{aligned}
(\,(a,b)*(c,d)\,)*(e,f) &\overset{*}{=} (\ ac\ ,\ bd\ )*(e,f)\\
&\overset{*}{=} (\ (ac)\cdot e\ ,\ (bd)\cdot f\ )
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a,b)*(\,(c,d)*(e,f)\,) &\overset{*}{=} (a,b)*(\ ce\ ,\ df\ )\\
&\overset{*}{=} (\ a\cdot(ce)\ ,\ b\cdot(df)\ )\\
&\overset{\text{vi}}{=} (\ (ac)\cdot e\ ,\ (bd)\cdot f\ )
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ (\,(a,b)*(c,d)\,)*(e,f)=(a,b)*(\,(c,d)*(e,f)\,)$$

Somit ist die Assoziativität von $*$ gezeigt. Es folgt, dass Q bzgl. # und $*$ assoziativ ist.

(K2)(Kommutativität)

$$(a,b)\#(c,d) = (\ ad+bc\ ,\ bd\ )$$

$$\begin{aligned}(c,d)\#(a,b) &= (\ cb+da\ ,\ db\ )\\ &\overset{\text{i}}{=} (\ da+cb\ ,\ db\ )\\ &\overset{\text{v}}{=} (\ ad+bc\ ,\ bd\ )\end{aligned}$$

$$\implies (a,b)\#(c,d) = (c,d)\#(a,b)$$

Somit ist die Kommutativität von # gezeigt. Analog dazu für $*$:

$$(a,b)*(c,d) = (\ ac\ ,\ bd\ )$$

$$\begin{aligned}(c,d)*(a,b) &= (\ ca\ ,\ db\ )\\ &\overset{\text{v}}{=} (\ ac\ ,\ bd\ )\end{aligned}$$

$$\implies (a,b)*(c,d) = (c,d)*(a,b)$$

Somit ist die Kommutativität von $*$ gezeigt. Q ist bzgl. # und $*$ kommutativ.

(K3)(Existenz neutraler Elemente)

Zuerst bestimmen wir das Nullelement $\bar{0} = (\bar{0}_1, \bar{0}_2)$, das neutrale Element von #.

$$\begin{aligned}
& (a,b) = (a,b)\#(\bar{0}_1,\bar{0}_2)\\
\overset{\#}{\iff}\ & (a,b) = (\ a\cdot\bar{0}_2 + b\cdot\bar{0}_1\ ,\ b\cdot\bar{0}_2\ )\\
\overset{\text{Gleichheit}}{\iff}\ & a\cdot(b\cdot\bar{0}_2) = b\cdot(a\cdot\bar{0}_2 + b\cdot\bar{0}_1)\\
\overset{\text{viii}}{\iff}\ & a\cdot(b\cdot\bar{0}_2) = b\cdot(a\cdot\bar{0}_2) + b\cdot(b\cdot\bar{0}_1)\\
\overset{\text{v,vi}}{\iff}\ & a\cdot(b\cdot\bar{0}_2) = a\cdot(b\cdot\bar{0}_2) + b\cdot(b\cdot\bar{0}_1)\\
\iff\ & 0 = b\cdot(b\cdot\bar{0}_1)\\
\overset{\text{v,vi}}{\iff}\ & 0 = b^2\cdot\bar{0}_1\\
\overset{\text{ix}}{\iff}\ & 0 = \bar{0}_1
\end{aligned}$$

Die Gleichung ist nun schon durch $\bar{0}_1 = 0$ erfüllt, also auch für $\bar{0}_2 = n\,, n\in\mathbb{N}$.
Aus dem Gleichheitskriterium folgt dann, dass $(0,n) = (0,1)$:

$$0 = 0 \overset{\text{ix}}{\iff} 0\cdot n = 0\cdot 1 \overset{\text{Gleichheit}}{\iff} (0,1) = (0,n) \tag{a}$$

Wir verwenden diese Eigenschaft (a) in weiteren Beweisen. Somit ist das Nullelement $\bar{0} = (0,1) = (0,n)\,, n\in\mathbb{N}$. Es existiert nun ein definitiongemäßes Nullelement:

$$(a,b)\#\bar{0} = (a,b)\#(0,1) \overset{\#}{=} (\ a\cdot 1 + b\cdot 0\ ,\ b\cdot 1\ ) \overset{\text{vii}}{=} (\ a + b\cdot 0\ ,\ b\ ) \overset{\text{ix}}{=} (\ a+0\ ,\ b\ ) \overset{\text{iii}}{=} (a,b)$$

Nun bestimmen wir das Einselement $\bar{1} = (\bar{1}_1, \bar{1}_2)$, das neutrale Element von $*$:

$$\begin{aligned}
& & (a,b) &= (a,b) * (\bar{1}_1, \bar{1}_2) \\
&\overset{*}{\iff} & (a,b) &= (\ a \cdot \bar{1}_1\ ,\ b \cdot \bar{1}_2\ ) \\
&\overset{\text{Gleichheit}}{\iff} & a \cdot (b \cdot \bar{1}_2) &= b \cdot (a \cdot \bar{1}_1) \\
&\overset{\text{v,vi}}{\iff} & (ab) \cdot \bar{1}_2 &= (ab) \cdot \bar{1}_1 \\
&\iff & \bar{1}_2 &= \bar{1}_1
\end{aligned}$$

Die Gleichung ist nun schon durch $\bar{1}_1 = \bar{1}_2$ erfüllt, also für jedes (n,n) mit $n \in \mathbb{N}$, da nach Definition $\forall (a,b) \in Q : b \in \mathbb{N}$ gelten muss.
Aus dem Gleichheitskriterium folgt dann, dass $(n,n) = (1,1)$:

$$n = n \overset{\text{vii}}{\iff} 1 \cdot n = 1 \cdot n \overset{\text{v}}{\iff} n \cdot 1 = 1 \cdot n \overset{\text{Gleichheit}}{\iff} (n,n) = (1,1) \tag{b}$$

Wir verwenden diese Eigenschaft (b) in weiteren Beweisen.
Somit ist $\bar{1} = (1,1) = (n,n)\,, n \in \mathbb{N}$ das neutrale Element von $*$. Es existiert nun ein definitiongemäßes Einselement:

$$(a,b) * \bar{1} = (a,b) * (1,1) \overset{*}{=} (a \cdot 1\ ,\ b \cdot 1) \overset{\text{vii}}{=} (a,b)$$

(K4)(Existenz inverser Elemente)

Wir zeigen, dass es zu jedem $(a,b) \in Q$ ein inverses Element $(c,d) \in Q$ bzgl. $\#$ gibt, sodass $(a,b)\#(c,d) = \bar{0}$ gilt. Sei (a,b) gegeben. Wir nehmen an $c = -a$ und $b = d$.
Es folgt:

$$\begin{aligned}
(a,b)\#(c,d) &= (a,b)\#(-a,b) \\
&\overset{\#}{=} (\ ab + b \cdot (-a)\ ,\ b^2\ ) \\
&\overset{\text{viii}}{=} (\ b \cdot (a + (-a))\ ,\ b^2\ ) \\
&\overset{\text{iv}}{=} (\ b \cdot 0\ ,\ b^2\ ) \\
&\overset{\text{ix}}{=} (0, b^2) \\
&\overset{\text{(a)}}{=} (0,1) = \bar{0}
\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass $(c,d) = (-a,b) \in Q$ die gewünschte Eigenschaft erfüllt.
Es existiert nun für jedes Element $(a,b) \in Q$ ein definitionsgemäßes Inverses bzgl. $\#$:

$$\forall (a,b) \in Q \colon \exists (-a,b) \in Q \colon (a,b)\#(-a,b) = \bar{0}$$

Notationshinweis:
Für alle $(a,b) \in Q$ ist $-(a,b)$ definiert als dieses Inverses von (a,b) bzgl. $\#$.

Nun zeigen wir analog zu $\#$, dass es zu jedem $(a,b) \in Q$ ein inverses Element bzgl. $*$ gibt, sodass $(a,b) * (c,d) = \bar{1}$ gilt.
Man bemerke, dass für ein beliebiges $(a,b) \in Q$ nach Definition von Q $b \in \mathbb{N}$ gelten muss.
Damit wir im folgenden diese Eigenschaft garantieren können,
sodass für ein Inverses $(c,d) \in Q$ stets $d \in \mathbb{N}$ gilt, beweisen wir noch kurz ein Lemma:

Proposition: Für ein beliebig aber festes $a \in \mathbb{Z}$ gilt $(-1) \cdot a = -a$
Beweis. Sei a gegeben. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& a = a \\
\iff \quad & a \cdot 0 = a \cdot 0 \\
\overset{\text{ix}}{\iff} \quad & 0 = a \cdot 0 \\
\overset{\text{iv}}{\iff} \quad & 0 = a \cdot (1 + (-1)) \\
\overset{\text{viii}}{\iff} \quad & 0 = a \cdot 1 + a \cdot (-1) \\
\overset{\text{vii}}{\iff} \quad & 0 = a + a \cdot (-1) \\
\iff \quad & -a = a \cdot (-1) \qquad \text{(c)}
\end{aligned}$$

Nun zurück zur Existenz eines Inversen bzgl. $*$:
Sei $(a, b) \in Q$ gegeben. Zu zeigen ist $(a, b) * (c, d) = \bar{1}$, $(c, d) \in Q$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall $a > 0$ bzw. $a \in \mathbb{N}$. Dann sei $c = b$ und $d = a$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
(a, b) * (c, d) &= (a, b) * (b, a) \\
&\overset{*}{=} (\ ab\ ,\ ba\ ) \\
&\overset{\text{v}}{=} (\ ab\ ,\ ab\ ) \\
&\overset{\text{(b)}}{=} (1, 1) = \bar{1}
\end{aligned}$$

Fall $a < 0$ bzw. $(a \in \mathbb{Z}) \wedge (a \notin \mathbb{N})$. Dann sei $c = -b$ und $d = -a$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
(a, b) * (c, d) &= (a, b) * (-b, -a) \\
&\overset{*}{=} (\ a \cdot (-b)\ ,\ b \cdot (-a)\ ) \\
&\overset{\text{(c)}}{=} (\ a \cdot (b \cdot (-1))\ ,\ b \cdot (-a)\ ) \\
&\overset{\text{vi}}{=} (\ ab \cdot (-1)\ ,\ b \cdot (-a)\ ) \\
&\overset{\text{v,vi}}{=} (\ b \cdot (a \cdot (-1)\ ,\ b \cdot (-a)\ ) \\
&\overset{\text{(c)}}{=} (\ b \cdot (-a)\ ,\ b \cdot (-a)\ ) \\
&\overset{\text{(b)}}{=} (1, 1) = \bar{1}
\end{aligned}$$

Da es nach Definition von (K4) kein multiplikativ inverses Element für $\bar{0}$ geben kann, können wir den Fall $a = 0$ wegen $(0, b) \overset{\text{(a)}}{=} (0, 1) = \bar{0}$ ignorieren.
Somit ist gezeigt, dass $(c, d) = (b, a) \in Q$ für $a > 0$, und $(c, d) = (-b, -a)$ für $a < 0$ die gewünschte Eigenschaft erfüllt.
Es existiert nun für jedes Element $(a, b) \in Q$ ein definitionsgemäßes Inverses bzgl. $*$.
Notationshinweise:
Dieses Inverses lässt sich auch ohne Fallbetrachtung durch Definition 2.11 für $|x|$ und die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn}(x)$ in einem ausdrücken:

$$\forall (a, b) \in Q \colon \exists (\ \operatorname{sgn}(a) \cdot b\ ,\ |a|\ ) \in Q \colon (a, b) * (\ \operatorname{sgn}(a) \cdot b\ ,\ |a|\ ) = \bar{1}$$

Weiterhin ist $(a, b)^{-1}$ für alle $(a, b) \in Q$ definiert als dieses Inverses von (a, b) bzgl. $*$.

(K5)(Distributivgesetz)

$$\begin{aligned}(a,b)*(\,(c,d)\#(e,f)\,) &\overset{\#}{=} (a,b)*(\ cf+de\ ,\ df\ )\\ &\overset{*}{=} (\ a\cdot(cf+de)\ ,\ b\cdot(df)\ )\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\,(a,b)*(c,d)\,)\#(\,(a,b)*(e,f)\,) &\overset{*}{=} (\ ac\ ,\ bd\ )\#(\ ae\ ,\ bf\ )\\ &\overset{\#}{=} (\ (ac)\cdot(bf)+(bd)\cdot(ae)\ ,\ (bd)\cdot(bf)\ )\\ &\overset{\text{v,vi}}{=} (\ (ab)\cdot(cf)+(ab)\cdot(de)\ ,\ (bb)\cdot(df)\ )\\ &\overset{\text{viii}}{=} (\ (ab)\cdot(cf+de)\ ,\ (bb)\cdot(df)\ )\\ &\overset{\text{vi}}{=} (\ b\cdot(a\cdot(cf+de)\ ,\ b\cdot(b\cdot(df)\ )\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\ a\cdot(cf+de)\ ,\ b\cdot(df)\ ) \overset{!}{=} (\ (b\cdot(a\cdot(cf+de))\ ,\ b\cdot(b\cdot(df)\ )\\ \overset{\text{Gleichheit}}{\iff}\ &(a\cdot(cf+de))\cdot(b\cdot(b\cdot(df))) = (b\cdot(df))\cdot(b\cdot(a\cdot(cf+de))\\ \overset{\text{vi}}{\iff}\ &(a\cdot(cf+de))\cdot b\cdot(bdf) = (bdf)\cdot b\cdot(a\cdot(cf+de))\\ \overset{\text{v}}{\iff}\ &b\cdot(a\cdot(cf+de))\cdot(bdf) = b\cdot(a\cdot(cf+de))\cdot(bdf)\\ \iff\ &1=1\end{aligned}$$

Somit ist die Distributivität von Q bzgl. $\#$ und $*$ gezeigt.

Nun wurde gezeigt, dass alle Körperaxiome (K1) bis (K5) für Q mit $\#$ und $*$ gelten. Somit ist Q mit Operationen $\#$ und $*$ ein Körper.

Aufgabe 2

a) $\forall a \in \mathbb{R}\colon 0 \cdot a = 0$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&& a \cdot 0 &\overset{\text{K3}}{=} a \cdot (0+0) \\
\overset{\text{K5}}{\iff} && a \cdot 0 &= a \cdot 0 + a \cdot 0 \\
\iff && (a \cdot 0) + (-(a \cdot 0)) &= (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-(a \cdot 0)) \\
\overset{\text{K1}}{\iff} && (a \cdot 0) + (-(a \cdot 0)) &= a \cdot 0 + ((a \cdot 0) + (-(a \cdot 0))) \\
\overset{\text{K4}}{\iff} && 0 &= (a \cdot 0) + 0 \\
\overset{\text{K3}}{\iff} && 0 &= (a \cdot 0)
\end{aligned}
$$

□

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$

Beweis. Zuerst zeigen wir $a = 0 \vee b = 0 \implies a \cdot b = 0$. Wir betrachten zwei Fälle.
Fall $a = 0 \wedge b = 0$:

$$a \cdot b = 0 \cdot 0 \overset{\text{a)}}{=} 0$$

Fall $a = 0 \wedge b \neq 0$:

$$a \cdot b = a \cdot 0 \overset{\text{a)}}{=} 0$$

Dies gilt analog für $a \neq 0 \wedge b = 0$.
Nun zeigen wir $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$. Wir betrachten wieder zwei Fälle.
Fall $a = 0$:

$$a \cdot b = 0 \cdot b \overset{\text{a)}}{=} 0$$

Fall $a \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
&& 0 &= a \cdot b \\
\iff && a^{-1} \cdot 0 &= a^{-1} \cdot (a \cdot b) \\
\overset{\text{a)}}{\iff} && 0 &= a^{-1} \cdot (a \cdot b) \\
\overset{\text{K1}}{\iff} && 0 &= (a^{-1} \cdot a) \cdot b \\
\overset{\text{K4}}{\iff} && 0 &= 1 \cdot b \\
\overset{\text{K3}}{\iff} && 0 &= b
\end{aligned}
$$

Somit ist gezeigt, dass $(a = 0) \vee (b = 0) \implies a \cdot b = 0$ und $a \cdot b = 0 \implies (a = 0) \vee (b = 0)$.
Daher gilt $a \cdot b = 0 \iff (a = 0) \vee (b = 0)$. □

c) $\forall a \in \mathbb{R} : (-1) \cdot a = -a$

Beweis. Wir beweisen dies nach dem gleichen Schema wie bereits in Aufgabe 1(K4). Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&& a &= a \\
&\Longleftrightarrow & a \cdot 0 &= a \cdot 0 \\
&\overset{\text{a)}}{\Longleftrightarrow} & 0 &= a \cdot 0 \\
&\overset{\text{K4}}{\Longleftrightarrow} & 0 &= a \cdot (1 + (-1)) \\
&\overset{\text{K5}}{\Longleftrightarrow} & 0 &= a \cdot 1 + a \cdot (-1) \\
&\overset{\text{K3}}{\Longleftrightarrow} & 0 &= a + a \cdot (-1) \\
&\Longleftrightarrow & -a &= a \cdot (-1)
\end{aligned}
$$

$\square$

d) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \neq 0\colon\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab}$

Beweis. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \neq 0$ gegeben. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\overset{\text{K3}}{=} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot 1 && \overset{\text{K4}}{=} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \\
&\overset{\text{K3}}{=} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot 1 && \overset{\text{K4}}{=} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) \\
&\overset{\text{K1}}{=} \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) && \overset{\text{K2}}{=} \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) \\
&\overset{\text{K1}}{=} \left(\left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot a\right) \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) && \overset{\text{K5}}{=} \left(\left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) \\
&\overset{\text{K1}}{=} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) && \overset{\text{K2}}{=} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) \cdot \frac{1}{a} \\
&\overset{\text{K2}}{=} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{a} && \overset{\text{K1}}{=} \left(\left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot b\right) \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} \\
&\overset{\text{K5}}{=} (b + a) \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} && \overset{\text{K5}}{=} \left(\frac{a+b}{b}\right) \cdot \frac{1}{a} \\
&\overset{\text{K5}}{=} \frac{a+b}{ab}
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 3

a) $a, b, c \in \mathbb{K}$: $(a < b) \wedge (b < c) \implies a < c$

Beweis. Es seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ gegeben. Es folgt:

$$\begin{aligned}
& (a < b) \wedge (b < c) && \xRightarrow{2.6b} (b - a) \in P \wedge (c - b) \in P \\
\xRightarrow{P2}\ & ((b - a) + (c - b)) \in P && \xRightarrow{Not} ((b + (-a)) + (c + (-b))) \in P \\
\xRightarrow{K1}\ & (b + (-a) + c + (-b)) \in P && \xRightarrow{K2} (b + (-b) + (-a) + c) \in P \\
\xRightarrow{K1}\ & ((b + (-b)) + (-a) + c) \in P && \xRightarrow{K4} (0 + (-a) + c) \in P \\
\xRightarrow{K3}\ & ((-a) + c) \in P && \xRightarrow{K2} (c + (-a)) \in P \\
\xRightarrow{Not}\ & (c - a) \in P && \xRightarrow{2.6b} a < c
\end{aligned}$$

□

b) $a, b, c \in \mathbb{K}$: $a < b \implies (a + c) < (b + c)$

Beweis. Es seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ gegeben. Es folgt:

$$\begin{aligned}
& a < b && \xRightarrow{2.6b} (b - a) \in P \\
\xRightarrow{Not}\ & (b + (-a)) \in P && \xRightarrow{K3} (b + (-a) + 0) \in P \\
\xRightarrow{K4}\ & (b + (-a) + (c - c)) \in P && \xRightarrow{Not} (b + (-a) + (c + (-c))) \in P \\
\xRightarrow{K1}\ & (b + (-a) + c + (-c)) \in P && \xRightarrow{K2} (b + c + (-a) + (-c)) \in P \\
\xRightarrow{K1}\ & ((b + c) + ((-a) + (-c))) \in P && \xRightarrow{Nr.2c} ((b + c) + ((-1) \cdot a + (-1) \cdot c)) \in P \\
\xRightarrow{K5}\ & ((b + c) + (-1) \cdot (a + c)) \in P && \xRightarrow{Nr.2c} ((b + c) + (-(a + c))) \in P \\
\xRightarrow{Not}\ & ((b + c) - (a + c)) \in P && \xRightarrow{2.6b} (a + c) < (b + c)
\end{aligned}$$

□

c) $a, b, c \in \mathbb{K}$: $(a < b) \wedge (c > 0) \implies ac < bc$

Beweis. Es seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ gegeben. Es folgt:

$$c > 0 \xRightarrow{Not} 0 < c \xRightarrow{2.6b} (c - 0) \in P \xRightarrow{K3} c \in P$$

$$\begin{aligned}
& a < b && \xRightarrow{2.6b} (b - a) \in P \\
\xRightarrow{P3}\ & c \cdot (b - a) \in P && \xRightarrow{Not} c \cdot (b + (-a)) \in P \\
\xRightarrow{K5}\ & (cb + c \cdot (-a)) \in P && \xRightarrow{Nr.2c} (cb + c \cdot (-1) \cdot a) \in P \\
\xRightarrow{K2}\ & (bc + (-1) \cdot ac) \in P && \xRightarrow{Nr.2c} (bc + (-ac)) \in P \\
\xRightarrow{Not}\ & (bc - ac) \in P && \xRightarrow{2.6b} ac < bc
\end{aligned}$$

□

d) $a \in \mathbb{K}$: $a \neq 0 \implies a^2 > 0$

Beweis. Es sei $a \in \mathbb{K}$ gegeben. Durch P1 sind zwei Fälle zu betrachten:

Fall $a \in P$:

$$a \in P \overset{\text{P3}}{\implies} (a \cdot a) \in P \overset{\text{Not}}{\implies} a^2 \in P$$

Fall $-a \in P$:

$$\begin{aligned} -a \in P &\overset{\text{P3}}{\implies} ((-a) \cdot (-a)) \in P \\ &\overset{\text{Nr.2c}}{\implies} ((-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot (a)) \in P \\ &\overset{\text{K2}}{\implies} ((-1) \cdot (-1) \cdot a^2) \in P \\ &\overset{\text{K1}}{\implies} (((-1) \cdot (-1)) \cdot a^2) \in P \\ &\overset{\text{K4}}{\implies} (1 \cdot a^2) \in P \\ &\overset{\text{K3}}{\implies} a^2 \in P \end{aligned}$$

Es folgt in beiden Fällen, dass $a^2 \in P$. $\square$

e) $1 > 0$

Beweis (Indirekt). Wir wissen $1 \neq 0$. Nehmen wir an, dass $1 < 0$ gelte.
Es folgt:

$$\begin{aligned} 1 < 0 &\overset{\text{2.6b}}{\implies} (0 - 1) \in P \\ &\overset{\text{K3}}{\implies} -1 \in P \\ &\overset{\text{P3}}{\implies} (-1) \cdot (-1) \in P \\ &\implies 1 \in P \\ &\implies 1 - 0 \in P \\ &\overset{\text{2.6b}}{\implies} 0 < 1 \iff 1 > 0 \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Folgerung widerspricht unserer Annahme. Somit muss $1 > 0$ gelten.
$\square$

Aufgabe 4

a) $|2x| > |5-2x|$ mit $x \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden insgesamt 4 Fälle:
Fall $(2x \geq 0) \wedge (5-2x \geq 0)$. Somit ist x enthalten in

$$x \in \{x \in \mathbb{R} \mid (2x \geq 0) \wedge (5-2x \geq 0)\} = \left[0,\ \frac{5}{2}\right]$$

Es folgt dann nach Definition vom Betrag:

$$\begin{aligned} & 2x > 5-2x && \mid + h(x) = 2x \\ \implies\ & 4x > 5 && \mid \cdot h(x) = \frac{1}{4} \\ \implies\ & x > \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Somit ist die Lösungsmenge $D_1 = \left(\frac{5}{4},\ \infty\right) \cap \left[0,\ \frac{5}{2}\right] = \left(\frac{5}{4},\ \frac{5}{2}\right]$

Fall $(2x \geq 0) \wedge (5-2x < 0)$. Somit ist x enthalten in

$$x \in \{x \in \mathbb{R} \mid (2x \geq 0) \wedge (5-2x < 0)\} = \left(\frac{5}{2},\ \infty\right)$$

Es folgt dann nach Definition vom Betrag:

$$\begin{aligned} & 2x > -(5-2x) \\ \implies\ & 2x > 2x-5 && \mid + h(x) = -2x \\ \implies\ & 0 > -5 \end{aligned}$$

Dies ist immer erfüllt, also ist die Lösungsmenge $D_2 = \mathbb{R}\ \cap \left(\frac{5}{2},\ \infty\right) = \left(\frac{5}{2},\ \infty\right)$

Fall $(2x < 0) \wedge (5-2x \geq 0)$. Somit ist x enthalten in

$$x \in \{x \in \mathbb{R} \mid (2x < 0) \wedge (5-2x \geq 0)\} = (-\infty,\ 0)$$

Es folgt dann nach Definition vom Betrag:

$$\begin{aligned} & -2x > 5-2x && \mid + h(x) = 2x \\ \implies\ & 0 > 5 \end{aligned}$$

Dies ist nie erfüllt, also ist die Lösungsmenge $D_3 = \varnothing \cap (-\infty,\ 0) = \varnothing$

Fall $(2x < 0) \wedge (5-2x < 0)$. Somit ist x enthalten in

$$x \in \{x \in \mathbb{R} \mid (2x < 0) \wedge (5-2x < 0)\} = \varnothing$$

Daher ist die Lösungsmenge $D_4 = \varnothing$
Die Lösung der ganzen Ungleichung ist nun $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 = \left(\frac{5}{4},\ \infty\right)$

b) $\dfrac{x+4}{x-2} < x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

Fall $x - 2 > 0$. Somit ist x enthalten in

$$x \in \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 > 0\} = (2, \infty)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{x+4}{x-2} < x && \mid \cdot\, h(x) = x - 2 \\
\Longrightarrow\quad & x + 4 < x \cdot (x - 2) && \\
\Longrightarrow\quad & x + 4 < x^2 - 2x && \mid + h(x) = -x - 4 \\
\Longrightarrow\quad & 0 < x^2 - 3x - 4 && \\
\Longrightarrow\quad & 0 < (x - 4)(x + 1) &&
\end{aligned}$$

Da $x + 1$ nun unter gegebenen Umständen niemals 0 sein kann:

$$x \in (2, \infty) \implies x + 1 > 0$$

und $x - 4$ für $x > 4$ immer positiv ist:

$$x - 4 > 0 \implies x > 4$$

lässt sich folgern, dass $x > 4$ gelten muss, damit die Ungleichung erfüllt ist.
Somit ist die Lösungsmenge $D_1 = (4, \infty)$

Fall $x - 2 < 0$. Somit ist x enthalten in

$$x \in \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 < 0\} = (-\infty, 2)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{x+4}{x-2} < x && \mid \cdot\, h(x) = x - 2 \\
\Longrightarrow\quad & x + 4 > x \cdot (x - 2) && \\
\Longrightarrow\quad & x + 4 > x^2 - 2x && \mid + h(x) = -x - 4 \\
\Longrightarrow\quad & 0 > x^2 - 3x - 4 && \\
\Longrightarrow\quad & 0 > (x - 4)(x + 1) &&
\end{aligned}$$

Damit $(x - 4)(x + 1)$ negativ ist, darf nur eine Klammer von beiden positiv sein, da $(-1) \cdot (-1) \overset{\text{Nr.2c}}{=} -(-1) = 1$. Es gilt jedoch $\forall x \in (-\infty, 2)\colon x - 4 < 0$, somit muss $x + 1 > 0$ gelten, damit die Ungleichung erfüllt ist.

$$x + 1 > 0 \implies x > -1$$

Somit ist die Lösungsmenge $D_2 = (-1, \infty) \cap (-\infty, 2) = (-1, 2)$. Die Lösung der Ungleichung ist dann

$$D_1 \cup D_2 = (-1, \infty) \setminus [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid (-1 < x < 2) \vee (x > 4)\}$$