Ungleichungen von Kraft & McMillan

Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

October 29, 2018

Inhalt

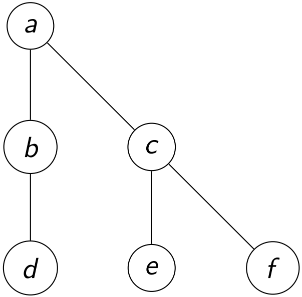
Motivation / Überblick

- Gesehen, dass uniquely decodable codes und instantenous codes sehr nützlich.
- Wann bzw. unter welchen Bedingungen existieren diese?
- Insbesondere: Wortlängen und Größe des Code-Alphabets
- Ungleichungen setzen diese Aspekte in Relation

Bäume

Baum $T = (V, E)$.
Knotenmenge $V(T) := V$.
Kantenmenge $E(T) := E$.

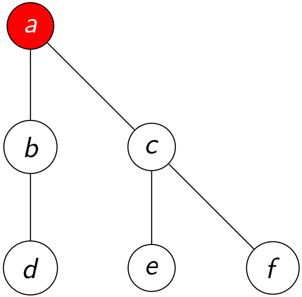
- ungerichtet
- azyklisch
- zusammenhängend



Bäume

Baum $T = (V, E)$.
Knotenmenge $V(T) := V$.
Kantenmenge $E(T) := E$.

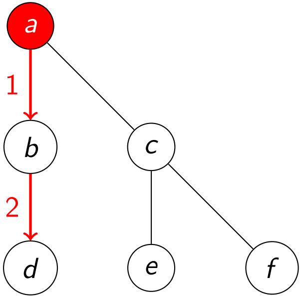
- ungerichtet
- azyklisch
- zusammenhängend
- eindeutige Wurzel $root(T)$



Bäume

Baum $T = (V, E)$.
Knotenmenge $V(T) := V$.
Kantenmenge $E(T) := E$.

- ungerichtet
- azyklisch
- zusammenhängend
- eindeutige Wurzel $root(T)$
- Höhe $height(v), v \in V$



$height(d) = 2$

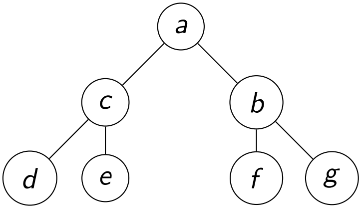
Bäume

Baum $T = (V, E)$.
Knotenmenge $V(T) := V$.
Kantenmenge $E(T) := E$.

- ungerichtet
- azyklisch
- zusammenhängend
- eindeutige Wurzel $root(T)$
- Höhe $height(v), v \in V$

Nenne T r-är wenn jeder Knoten mit Ausnahme von Blättern genau $r \in \mathbb{N}$ Kinder hat.

2-är bzw. binär



Teilbäume und Ordnung von Knoten

T, T' gewurzelte Bäume.

- Schreibe $T' \leq T$ wenn T' Teilgraph von T.

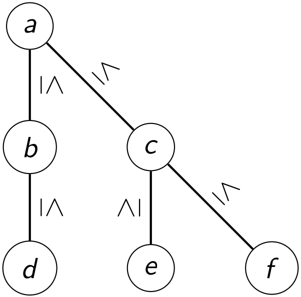
Teilbäume und Ordnung von Knoten

T, T' gewurzelte Bäume.

- Schreibe $T' \leq T$ wenn T' Teilgraph von T.
- Schreibe $T' \leq_r T$ wenn $T' \leq T$ und T, T' r-är.

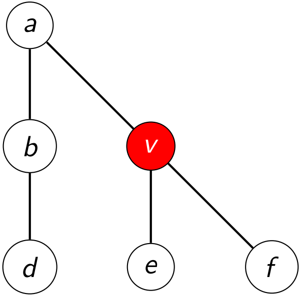
Teilbäume und Ordnung von Knoten

Für $v, v' \in T$ schreiben wir $v' \leq v$, genau dann, wenn der eindeutige Pfad von $root(T)$ zu v den Knoten v' besucht.
Hier $root(T) = a$



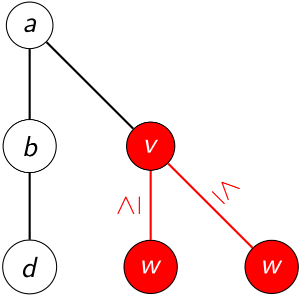
Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T), v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".



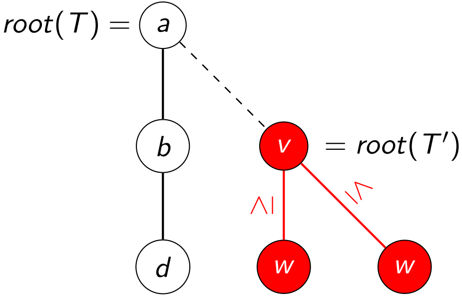
Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T), v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".



Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T), v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".

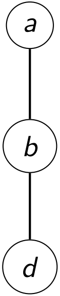


Definiere $T \setminus v := T \setminus T'$, wobei $T' \leq T$ der Teilbaum von T mit Wurzel $v \in V(T) \setminus \{root(T)\}$ ist.
Insbesondere ist $T \setminus v$ wieder ein gewurzelter Baum.

Teilbäume und Ordnung von Knoten

Sei $v \in V(T)$. Wir wollen v und seine "Nachfolger" $w \in V(T), v \leq w$ von T inklusive Kanten "ausschneiden".

$root(T \setminus v) =$

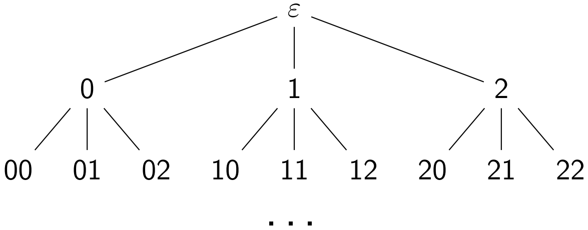


Definiere $T \setminus v := T \setminus T'$, wobei $T' \leq T$ der Teilbaum von T mit Wurzel $v \in V(T) \setminus \{root(T)\}$ ist.

Insbesondere ist $T \setminus v$ wieder ein gewurzelter Baum.

Code als Baum

Sei $\mathcal{C}$ ein Code über dem Code-Alphabet $\{0, 1, 2\}$.
$\mathcal{C}$ als Teilmenge von $V(T)$, wobei T:



Code als Baum

Seien $h, r \in \mathbb{N}$, $A := [0, r-1]$ das Code-Alphabet eines r-ären Codes $\mathcal{C}$ mit maximaler Wortlänge $h \in \mathbb{N}$. Dann ist $W := \bigcup_{i \in [0,h]} A^i$ die Menge aller Wörter über A mit maximaler Länge h. Definiere gewurzelten r-ären Baum $\mathcal{T}_r^h$ der Höhe h durch:

$$V(\mathcal{T}_r^h) := \{v_w \mid w \in W\}$$

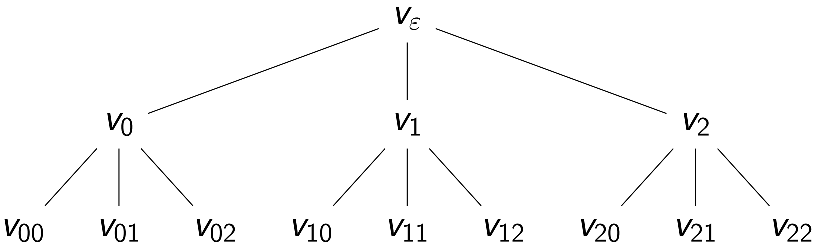
$$E(\mathcal{T}_r^h) := \{(v_w, v_{w'}) \mid w, w' \in W, wx = w', x \in A\}$$

$$root(\mathcal{T}_r^h) := v_\varepsilon$$

Insbesondere $\mathcal{T}_r^h$ eindeutig durch r, h bestimmt.
(Bis auf Bijektionen des Code-Alphabets).

Bemerkungen zu $\mathcal{T}_r^h$

Betrachte $\mathcal{T}_3^2$:

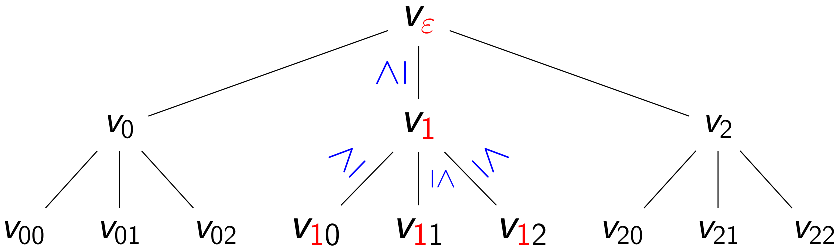


Wir haben:

- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $\mathit{height}(v_w) = |w|$.

Bemerkungen zu $\mathcal{T}_r^h$

Betrachte $\mathcal{T}_3^2$:



Wir haben:

- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $height(v_w) = |w|$.
- Für $v_w, v_{w'} \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $v_w \leq v_{w'} \iff w \sqsubseteq w'$.

Inhalt

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer instantaneous Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer instantaneous Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer instantaneous Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen l aufsteigend sortiert und $l_1 > 0$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer instantaneous Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen l aufsteigend sortiert und $l_1 > 0$
- Code-Alphabet von $\mathcal{C}$ ist $[0, r-1]$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Richtung " $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Richtung " $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00] sind die instantaneous Codes genau die Präfixcodes.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

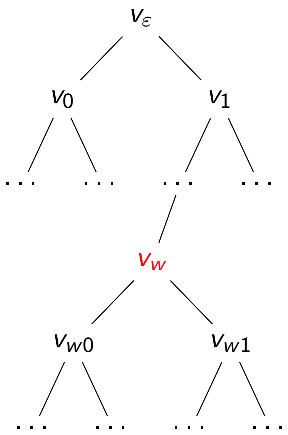
Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00] sind die instantaneous Codes genau die Präfixcodes.

Konstuiere Codewörter w_i mit $|w_i| = l_i$ via endlicher Induktion über i. Betrachte dabei den zum Code-Alphabet zug. Baum $\mathcal{T}_r^h$ und wähle die w_i so, dass am Ende $\mathcal{C} = \{w_i \mid i \in [1, q]\}$ ein Präfixcode ist.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

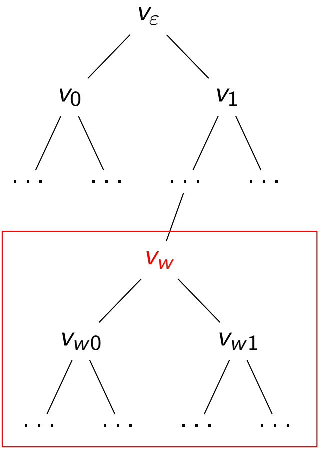
Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_1 := w$.



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_1 := w$.

Setze $h = l_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

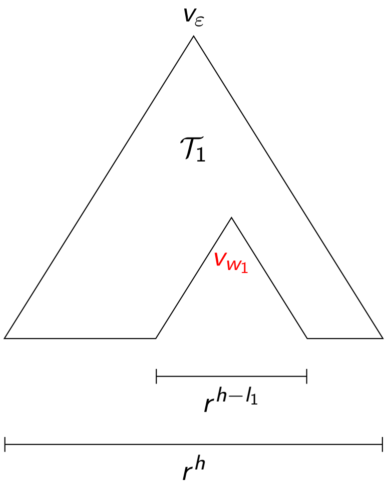


Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_1 := w$.

Setze $h = l_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

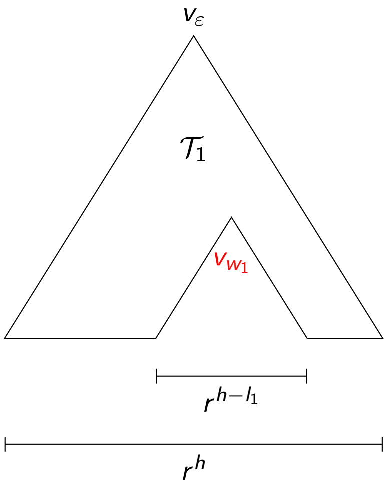
$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.



Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

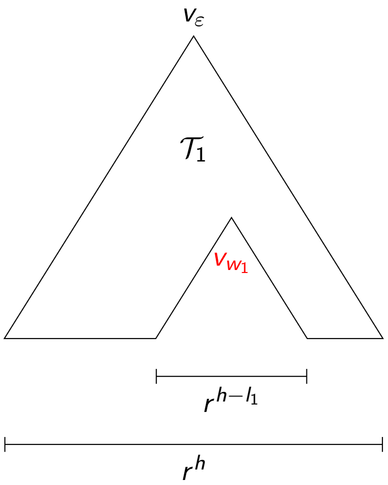


Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

$$> r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

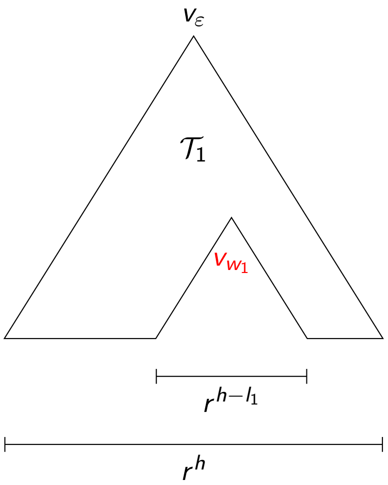


Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right) \geq 0$$



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

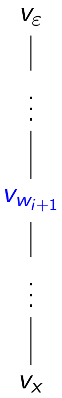
Sei nun $i \in [1, q-1]$ sodass $\mathcal{C} = \{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = l_j$ ist, und $\mathcal{T}_i$ noch mindestens 1 Blatt v_x hat.

$$\begin{array}{c} v_\varepsilon \\ | \\ \vdots \\ | \\ v_x \end{array}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

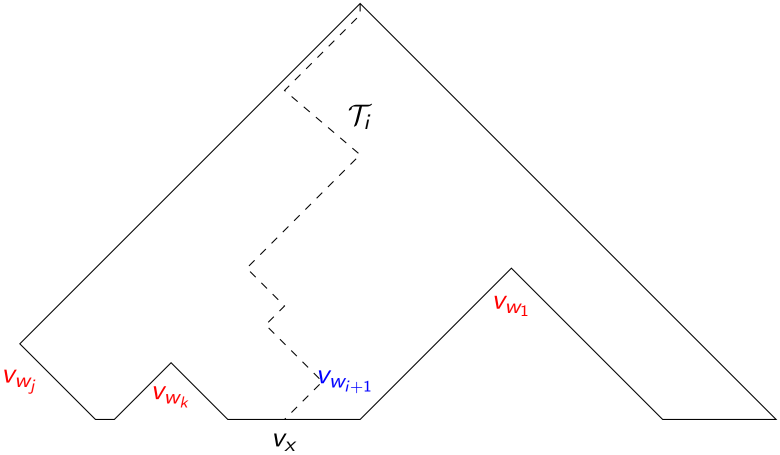
Sei nun $i \in [1, q-1]$ sodass $\mathcal{C} = \{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = l_j$ ist, und $\mathcal{T}_i$ noch mindestens 1 Blatt v_x hat.

- $\mathcal{T}_i$ zusammenhängend
- also ex. $v_w \in V(\mathcal{T}_i)$ mit $height(v_w) = l_{i+1} \leq h$
- Setze $w_{i+1} := w$.



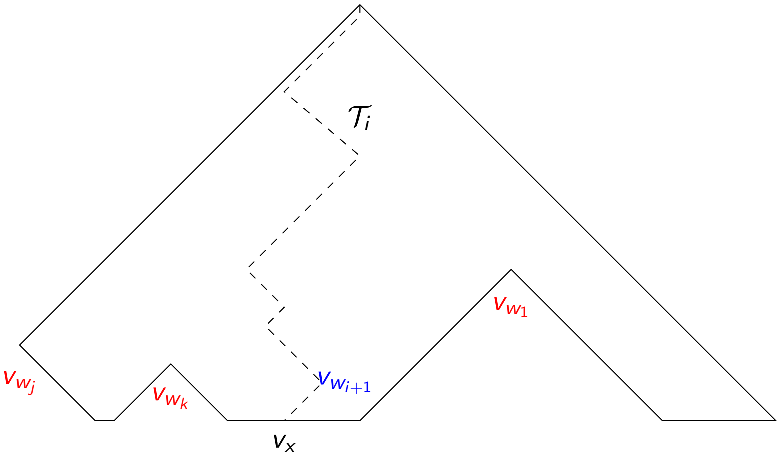
Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Sei $j \in [1, i]$. Wir haben bereits alle Knoten $v_w \geq v_{w_j}$ im Schritt $\mathcal{T}_j := \mathcal{T}_{j-1} \setminus v_{w_j}$ gelöscht. Da wir $v_{w_{i+1}}$ aus $\mathcal{T}_i$ gewählt haben, kann also **nicht** $v_{w_j} \leq v_{w_{i+1}}$ gelten.



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).



Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$$\mathcal{T}_i \text{ hat nach Konstruktion } \quad r^h - \sum_{k=1}^{i} r^{h-l_k} \quad \text{Blätter}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k}$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-l_k}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-l_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn nun $i + 1 = q$ war, so sind wir fertig, da wir das letzte Wort w_q soeben $\mathcal{C}$ hinzugefügt haben.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-l_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right) \geq 0$$

Blätter. Somit können wir einen Präfix-Code $\mathcal{C}$ unter den gegebenen Bedingungen konstruieren. Dieser ist nach [JJ00] auch instantaneous.

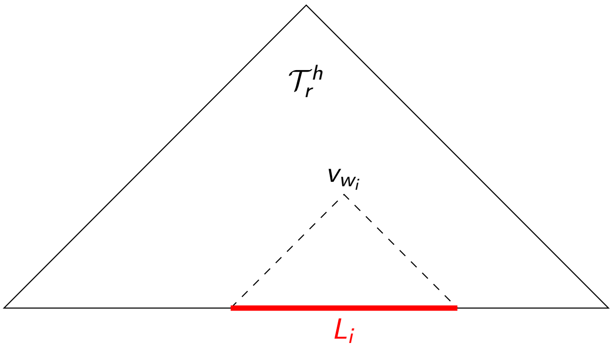
Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Nun zeigen wir, dass wenn $\mathcal{C}$ instantaneous, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Nun zeigen wir, dass wenn $\mathcal{C}$ instantaneous, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.
Betrachte für $i \in [1, q]$ die Menge der Blätter unter v_{w_i}:

$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge height(v) = h\}$$



Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j}.

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j}. Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j}. Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i} und v_{w_j}. Dann gilt:

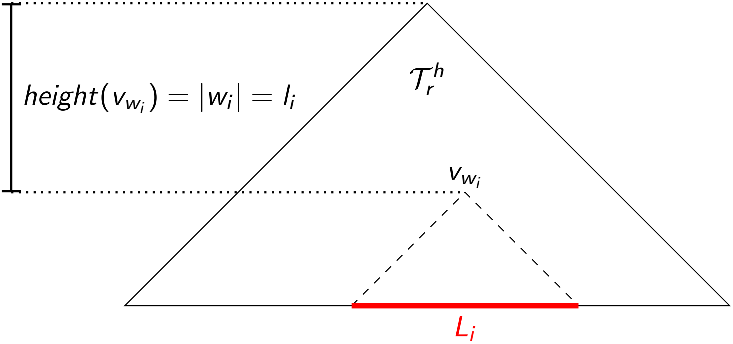
$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w \implies w_i \sqsubseteq w_j$$

Widerpruch, denn $w_i, w_j \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$ ist Präfix-Code!

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

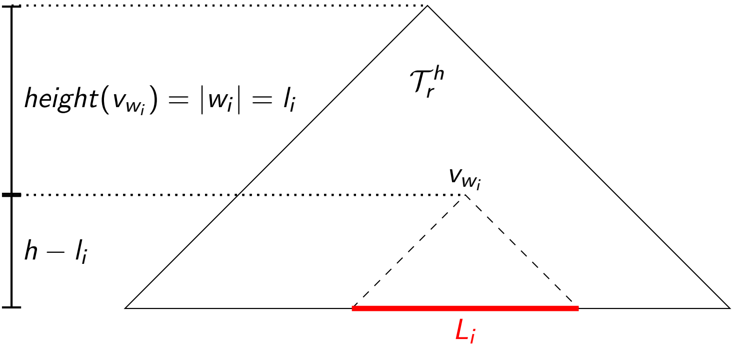
Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

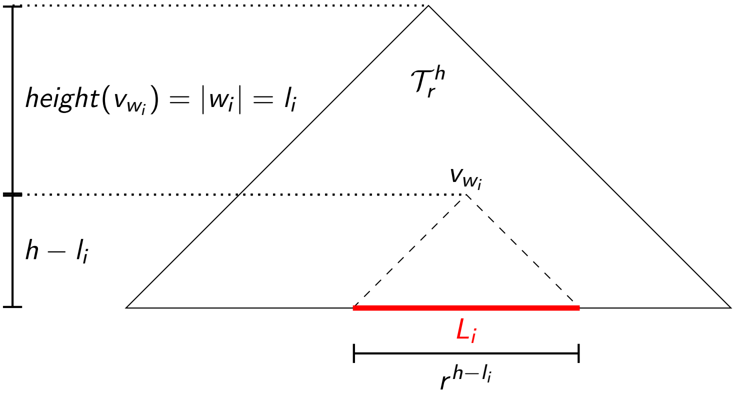
Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right|$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i|$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Wir wissen nun, dass für i, j mit $i \neq j$ auch $L_i \cap L_j = \varnothing$ gelten muss

Wir wissen weiter, dass $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter hat, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Review of Kraft or smth.

Wir haben also gezeigt [...]

- Nach [JJ00] bekannt, dass instantaneous $\implies$ uniquely decodable
- Jedoch vorraussetzungen für letzteres **nicht** schwächer:

Inhalt

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer uniquely decodable Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \tag{1}$$

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer uniquely decodable Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \tag{1}$$

Richtung "(1) $\implies$ $\mathcal{C}$ existiert" mit Kraft geschenkt.