Gruppe $\boxed{3}$
Formale Systeme und Automaten

Phil Pützstück, 377247
Benedikt Gerlach, 376944
Sebastian Hackenberg, 377550

Hausaufgabe 1

Aufgabe 6

a)

Diese Aussage ist wahr. Seien K, L zwei beliebige Sprachen. Sei ferner $w \in (K \cap L)^*$ mit $|w| = n, n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} w \in (K \cap L)^* &\Longrightarrow \forall i \in [1, n]_{\mathbb{N}_0} : w_i \in (K \cap L) \\ &\Longrightarrow \forall i \in [1, n]_{\mathbb{N}_0} : (w_i \in K) \wedge (w_i \in L), \\ &\Longrightarrow \forall i \in [1, n]_{\mathbb{N}_0} : (w_i \in K) \vee (w_i \in L), \\ &\Longrightarrow \forall i \in [1, n]_{\mathbb{N}_0} : w_i \in (K \cup L) \\ &\Longrightarrow w \in (K \cup L)^* \end{aligned}$$

Es folgt $(K \cap L)^* \subseteq (K \cup L)^*$ $\square$

b)

Diese Aussage ist falsch. Wir geben ein Gegenbeispiel:
Sei $K = \{a\}, L = \{b\}$. Es ist $w = ab \in (K \cup L)^*$. Jedoch ist $K \cap L = \varnothing$ und damit $(K \cap L)^* = \{\varepsilon\}$. Also ist $w \notin (K \cap L)*$. Es folgt $(K \cup L)^* \not\subseteq (K \cap L)^*$.

c)

Diese Aussage ist wahr. Seien K, L zwei beliebige Sprachen mit $K \subseteq L$.
Sei ferner $w \in K^*$ mit $|w| = n, n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Es gilt:

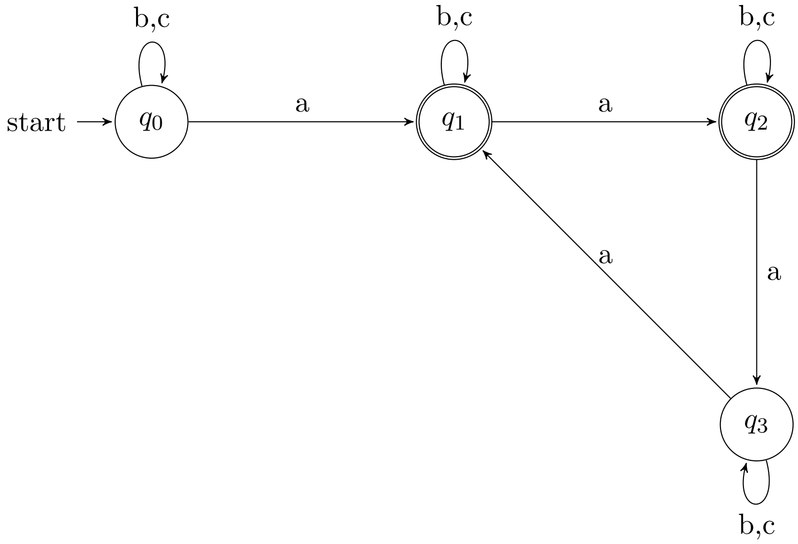
$$w \in K^* \implies \forall i \in [1, n]_{\mathbb{N}_0} : w_i \in K \overset{K \subseteq L}{\implies} \forall i \in [1, n]_{\mathbb{N}_0} : w_i \in L \implies w \in L^*$$

Es folgt $K \subseteq L \implies K^* \subseteq L^*$ $\square$

d)

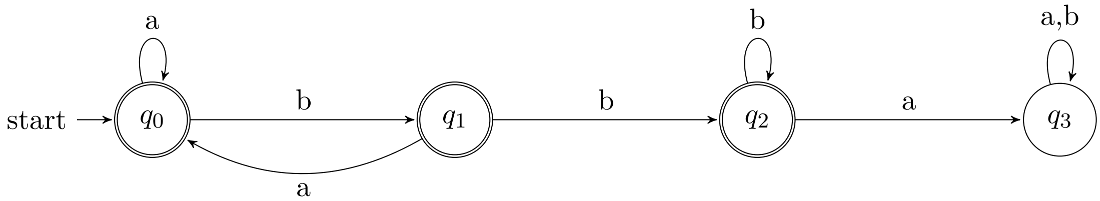
Diese Aussage ist falsch. Wir geben ein Gegenbeispiel:
Sei $K = \{aa\}, L = \{a\}$. Dann gilt $K^* \subseteq L^*$, da $(aa)^n = a^{2n}$. Also gibt es zu jedem $w \in K^*$ mit $|w| = n, n \in \mathbb{N}_0$ ein $w' \in L*$ mit $|w| = 2n$. Jedoch gilt $aa \neq a$ und damit $K \not\subseteq L$.

Aufgabe 7



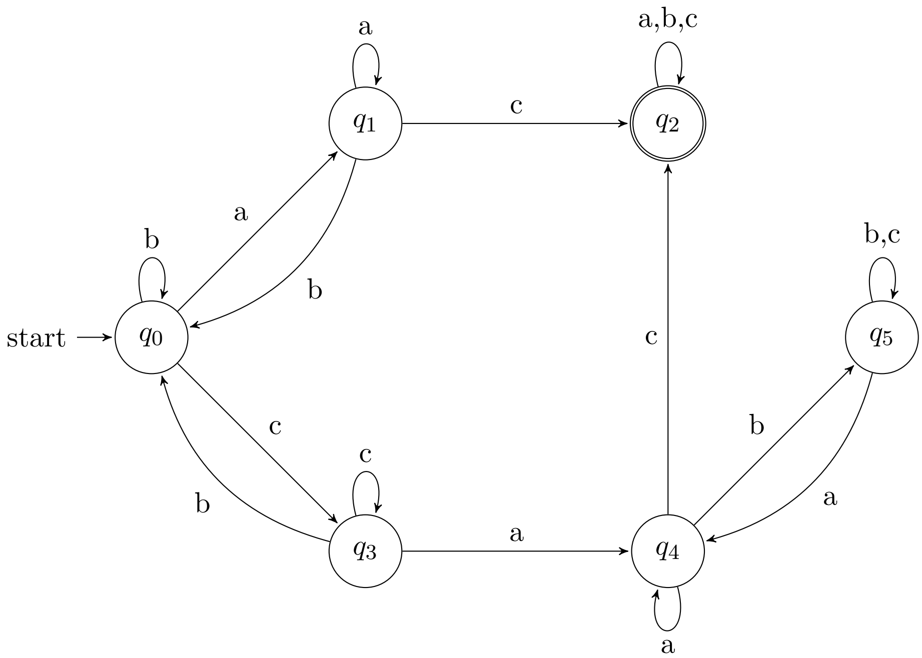
start
a
a
a
a
b,c
b,c
b,c
b,c

b)



start
a
b
a
b
b
a
a,b

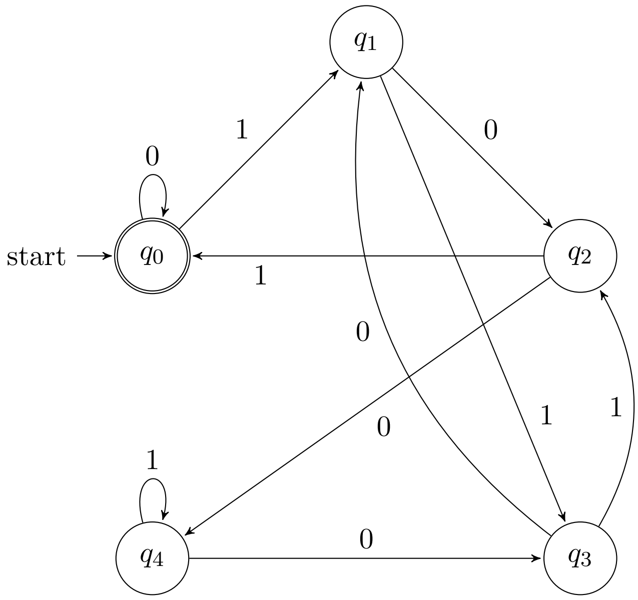
c)



start
a
a,b,c
c
a
b
b
b,c
c
b
c
c
b
a
a
a

Aufgabe 8

Wir betrachten zur Lösung des Problems den Rest der Zahlen bei Ganzzahldivision mit 5. Wir starten mit einem Rest von 0. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass wenn wir an eine Binärzahl w eine 0 oder 1 konkatenieren, gilt: $wN = 2w + N$, wobei N eine 0 oder 1 ist.



Aufgabe 9

a) Der Automat $\mathcal{A}_1$ erkennt alle Sprachen über dem gegebenem Alphabet, in denen keine Worte vorkommen, welche das Symbol a 2 mal hintereinander enthalten.

b) Der Automat $\mathcal{A}_2$ erkennt alle Sprachen über dem gegebenem Alphabet, in denen nur Worte vorkommen, welche sowohl als Präfix als auch als Suffix ein a haben und dazwischen nur eine ungerade Anzahl des Symbols b enthalten.