Gruppe $\boxed{\mathbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

# Hausaufgabe 14

---

## Aufgabe 1

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dann ist $\det(A) = ad - bc$ nach Hinweis. Für $\det(A) \neq 0$ gilt:

$$\frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = B$$

Dann gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(a \cdot \frac{d}{ad-bc}\right) + \left(b \cdot \frac{-c}{ad-bc}\right) & \left(a \cdot \frac{-b}{ad-bc}\right) + \left(b \cdot \frac{a}{ad-bc}\right) \\ \left(c \cdot \frac{d}{ad-bc}\right) + \left(d \cdot \frac{-c}{ad-bc}\right) & \left(c \cdot \frac{-b}{ad-bc}\right) + \left(d \cdot \frac{a}{ad-bc}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{ab-ab}{ad-bc} \\ \frac{cd-cd}{ad-bc} & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

Damit gilt nach Skript, dass $B = A^{-1}$.

## Aufgabe 2

**a)** Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Nach Definition ist:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Es gelten folgende 3 Eigenschaften:

**1)** Nach Skript gilt $\forall a \in \mathbb{R}\colon\ (|a| \geq 0) \wedge (|a| = 0 \implies a = 0)$.

Für $x = 0$, d.h. $\forall i \in [1, n]_{\mathbb{N}}\colon x_i = 0$ gilt also auch

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} |0| = 0$$

Andernfalls gilt:

$$(\exists i \in [1, n]_{\mathbb{N}}\colon x_i \neq 0) \implies ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| > 0$$

Damit gilt in jedem Fall, dass $||x||_1 \geq 0$, sowie $(||x||_1 = 0) \implies (\forall i \in [1, n]_{\mathbb{N}}\colon x_i = 0)$

**2)** Für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$||x \cdot c||_1 = \sum_{i=1}^{n} |c \cdot x_i| = \sum_{i=1}^{n} |c| \cdot |x_i| = |c| \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |c| \cdot ||x||_1$$

**3)** Sei nun ebenfalls $y \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Es gilt:

$$||x + y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|\right) = ||x||_1 + ||y||_1$$

Damit ist $|| \cdot ||_1$ nach Skript eine Norm.

**b)** Es sind:

$||x||_1 = |-1| + |0| + |5| = 6 \qquad ||y||_1 = |2| + |3| + |1| = 7 \qquad ||z||_1 = |\sqrt{2}| + |-1| + |0| = \sqrt{2} + 1$

Weiter gilt

$$||\langle x, y\rangle \cdot z||_1 = ||\,(-2 + 0 + 5) \cdot z||_1 = |3\sqrt{2}| + |-3| = 3(\sqrt{2} + 1)$$
$$||\langle x, z\rangle \cdot y||_1 = ||\left(-\sqrt{2}\right) \cdot y||_1 = |-2\sqrt{2}| + |-3\sqrt{2}| + |-\sqrt{2}| = 7\sqrt{2}$$
$$||\langle y, z\rangle \cdot x||_1 = ||\left(2\sqrt{2} - 3\right) \cdot x||_1 = |3 - 2\sqrt{2}| + |5(2\sqrt{2} - 3)| = 6(3 - 2\sqrt{2})$$

**c)** Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gilt:

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} ||x||_\infty \cdot y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} ||x||_\infty \cdot |y_i| = ||x||_\infty \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i| = ||x||_\infty \cdot ||y||_1$$

Da $\forall i \in [1, n]_\mathbb{N} \colon |x_i| \leq ||x||_\infty$ nach Definition.

## Aufgabe 3

**a)**

**b)** Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Es notiere $a := \max\{x_i \mid i \in [1, n]_\mathbb{N}\}$. Ferner sei $m = 1$ und $M = \sqrt{n}$.

$$m||x||_\infty = ||x||_\infty = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a^2} = \sqrt{na^2} = M||x||_\infty$$

Sei nun wieder ein $x \in \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben und $l = 1$ sowie $L = n$. Es gilt:

$$l||x||_\infty = ||x||_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} ||x||_\infty = L||x||_\infty$$