Gruppe $\boxed{\textbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 13

Aufgabe 1

Aufgabe 2

a) Da $\forall x \in [a,b]\colon m \leq f(x) \leq M$, sowie $\forall x \in [a,b]\colon g(x) \geq 0$, folgt auch:

$$\forall x \in [a,b]\colon mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

Nach Skript Satz 1.5 folgt durch betrachtung von $mg(x), Mg(x)$ und $f(x)$ als eigene Funktion:

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x = M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Da die Stammfunktionen von $f, g, f\cdot g$ existieren, muss also eine Zerlegungssumme folgender Form existieren:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

für ein $n \in \mathbb{N}, n \to \infty$, eine reelle Folge x mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ und eine reelle Folge $h_i \in g([x_{i-1}, x_i])$.

Ebenso muss die Zerlegugssumme für $f \cdot g$ existieren:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i h_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

mit der zusätzlichen reellen Folgen $k_i \in f([x_{i-1}, x_i])$. Es gilt nun:

$$\forall x \in [a,b]\colon f(x) \geq m \implies \forall i \in [1,n]\colon \forall x \in f([y_{i-1}, y_i])\colon x \geq m \implies \forall i \in [1,n]\colon k_i \geq m$$

$$\implies m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} mh_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} k_i h_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

Analog gilt:

$$\forall x \in [a,b]\colon f(x) \leq M \implies \forall i \in [1,n]\colon \forall x \in f([x_{i-1}, x_i])\colon x \leq M \implies \forall i \in [1,n]\colon k_i \leq M$$

$$\implies \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} k_i h_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} Mh_i(x_i - x_{i-1}) = M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3

a) Die Exponentialfunktion ist differenzierbar, integrierbar und stetig auf $\mathbb{R}$.

$$\int_0^\infty 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left(\int_0^b 1 \, \mathrm{d}x - \int_0^b \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \right) = \lim_{b\to\infty} (x - \ln(|z|))_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (x - \ln(e^x + e^{-x}))_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(b - \ln(e^b + e^{-b}) - (0 - \ln(e^0 + e^{-0})) \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(b - \ln(e^b + e^{-b}) + \ln(2) \right) = \ln(2) + \lim_{b\to\infty} \ln\left(\exp\left(b - \ln(e^b + e^{-b}) \right) \right)$$

$$= \ln(2) + \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{e^b}{e^b + e^{-b}} \right) = \ln(2) + \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{1}{1 + e^{-2b}} \right) = \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{1+0} \right)$$

$$= \ln(2) + \ln(1) = \ln(2)$$

Da der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \ln(2)$ existiert, gilt nun auch

$$\int_0^\infty 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \ln(2)$$

b) Nach Skript Satz 2.13 gilt $\lim_{a\to 0} \ln(a) = -\infty$, also ist $\ln(x)$ für $x \to 0$ bestimmt divergent gegen $-\infty$ (*). Daher gilt, dass für $\alpha \leq -1$ das gegebene uneigentliche Integral nicht existiert: Wir unterteilen das Integral bei $c = 1$, da x^α für $\alpha < 0$ in $x_0 = 0$ nicht definiert ist, also zwei uneigentliche Integrationsgrenzen hat:

$$\int_0^\infty x^\alpha \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x + \int_1^\infty x^\alpha \, \mathrm{d}x$$

Wir betrachten zuerst das Integral $\int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x$ für $\alpha = -1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \ln(1) - \ln(a)$$

Da der Grenzwert nicht existiert (s.o.), existiert auch das uneigentliche Integral nicht für $\alpha = -1$.
Wir betrachten zunächst das Integral $\int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x$:

$$\int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \int_a^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \Bigg|_a^1 = \lim_{a\to 0} \left(\frac{1^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

Für $\alpha < -1$ ist $\alpha + 1 < 0$, d.h. $\lim\limits_{a\to 0} a^{\alpha+1}$ existiert nicht und divergiert bestimmt gegen unendlich.
Also kann das gegebene uneigentliche Integral schonmal nicht für $\alpha \leq -1$ existieren.
Für $0 > \alpha > -1$ gilt jedoch:

$$\lim_{a\to 0} \left(\frac{1^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) = \frac{1^{\alpha+1} - 0^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Und damit auch

$$\forall 0 > \alpha > -1\colon \int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}$$

Wir überprüfen also nun ob auch das Integral $\int_1^\infty x^\alpha \, \mathrm{d}x$ für $0 > \alpha > -1$ existiert:

$$\int_1^\infty x^\alpha \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_1^b x^\alpha \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \frac{b^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1}$$