Ungleichungen von Kraft & McMillan

Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

November 5, 2018

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen l aufsteigend sortiert und $l_1 > 0$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen l aufsteigend sortiert und $l_1 > 0$
- Code-Alphabet von $\mathcal{C}$ ist $[0, r-1]$

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Longrightarrow$ "

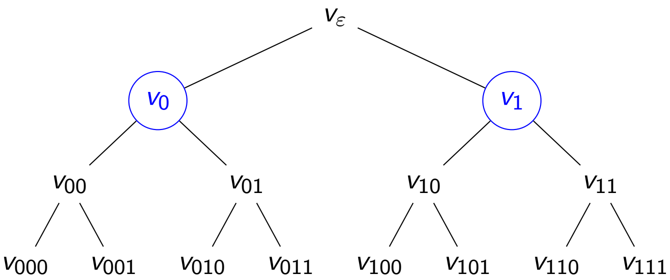
Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2{}^3$:

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

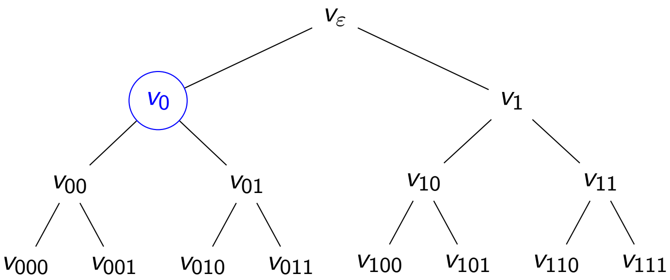
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$:



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

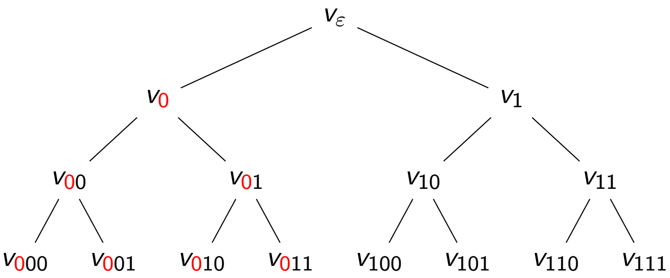
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$:
$w_1 = 0$,



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

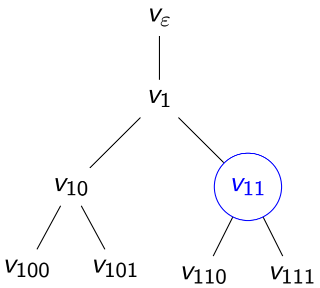
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$:
$w_1 = 0$,



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

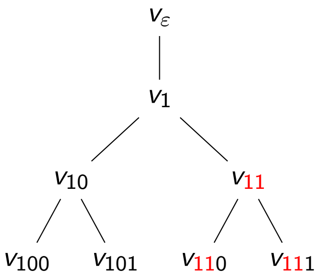
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$:
$w_1 = 0$, $w_2 = 11$,



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

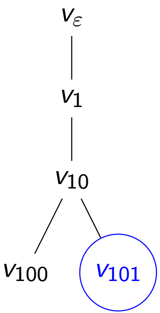
Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$:
$w_1 = 0$, $w_2 = 11$,



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$:
$w_1 = 0$, $w_2 = 11$, $w_3 = 101$



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

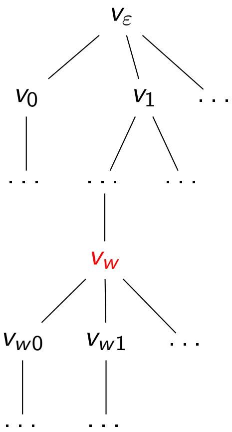
Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Nach [JJ00]: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.
Am Beispiel $q = 3, r = 2, l = (1, 2, 3)$. $w_1 = 0, w_2 = 11, w_3 = 101$

- $q = 3$ Wörter über Alphabet $[0, r - 1] = [0, 1] = \{0, 1\}$.
- Wortlängen $|w_1| = l_1, |w_2| = l_2, |w_3| = l_3$ eingehalten.
- Präfixcode $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\} = \{0, 11, 101\}$ konstruiert.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

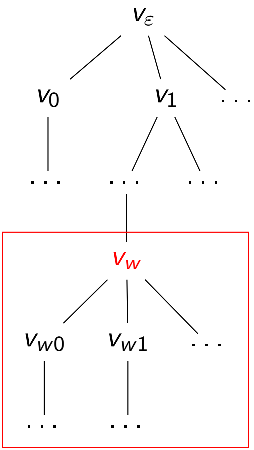
$\mathcal{T}_r^h$:



Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

$\mathcal{T}_r^h$:



Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

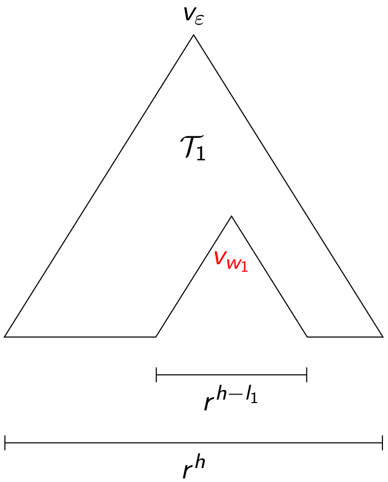
Setze $h := l_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Sei also $i = 1$. Wähle Knoten v_w der Höhe $l_1 > 0$ beliebig und setze $w_i = w_1 := w$.

Setze $h := l_q$ (max. Wortlänge) und $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_r^h$, $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_r^h \setminus v_{w_1}$.

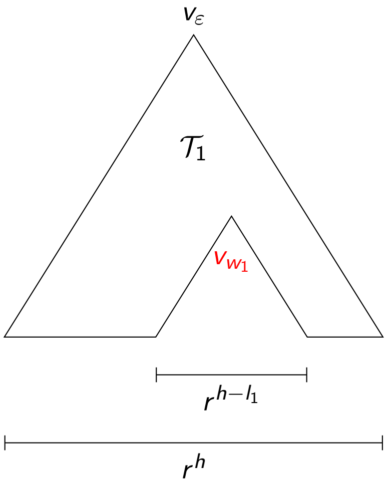
$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.



Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

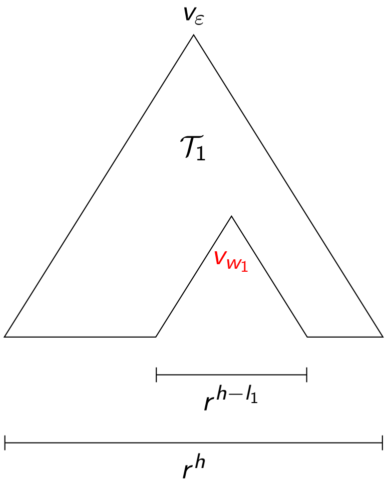


Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

$$> r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{q}\frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

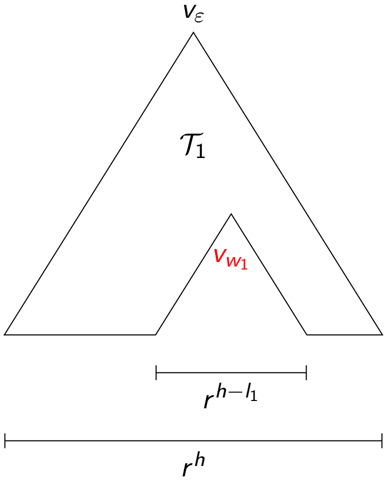


Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

$\mathcal{T}_1$ hat dann noch $r^h - r^{h-l_1}$ Blätter.
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-l_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

$$> r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right) \geq 0$$



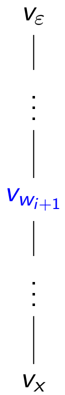
Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Nun $i \in [1, q-1]$ sodass $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = l_j$ ist, und $\mathcal{T}_i$ noch mindestens 1 Blatt v_x hat.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

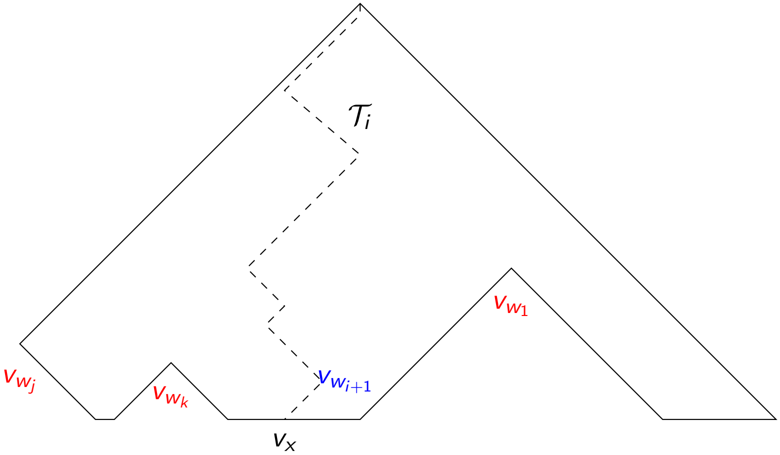
Nun $i \in [1, q-1]$ sodass $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ ein Präfix-Code mit $|w_j| = l_j$ ist, und $\mathcal{T}_i$ noch mindestens 1 Blatt v_x hat.

- $\mathcal{T}_i$ zusammenhängend
- also ex. $v_w \in V(\mathcal{T}_i)$ mit $\mathit{height}(v_w) = l_{i+1} \leq h$
- Setze $w_{i+1} := w$.



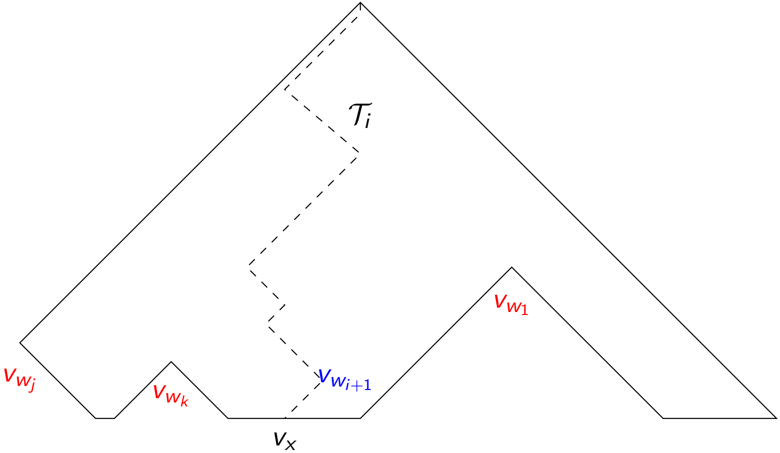
Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Sei $j \in [1, i]$. Wir haben bereits alle Knoten $v_w \geq v_{w_j}$ im Schritt $\mathcal{T}_j := \mathcal{T}_{j-1} \setminus v_{w_j}$ gelöscht. Da wir $v_{w_{i+1}}$ aus $\mathcal{T}_i$ gewählt haben, kann also **nicht** $v_{w_j} \leq v_{w_{i+1}}$ gelten.



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:

$$\mathcal{T}_i \text{ hat nach Konstruktion} \quad r^h - \sum_{k=1}^{i} r^{h-l_k} \quad \text{Blätter}$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k}$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$"

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-l_k}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-l_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right)$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ "

Folglich haben wir auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$ für $j \in [1, i]$. $\mathcal{C}$ bleibt also durch Wahl von w_{i+1} ein Präfix-Code ($l_j \leq l_{i+1}$, also $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$).

Wenn $i + 1 = q$, so haben wir q Wörter gewählt und sind fertig.

Falls hingegen $i + 1 < q$, so definiere $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$.
Dann hat $\mathcal{T}_{i+1}$ immernoch mindestens 1 Blatt, denn:
$\mathcal{T}_{i+1}$ hat nach Konstruktion also:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-l_k} > r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-l_k} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}}\right) \geq 0$$

Blätter.

Somit Präfixcode $\mathcal{C}$ nach dieser Methode konstruierbar.
Dieser ist nach [JJ00] auch sofort dekodierbar.

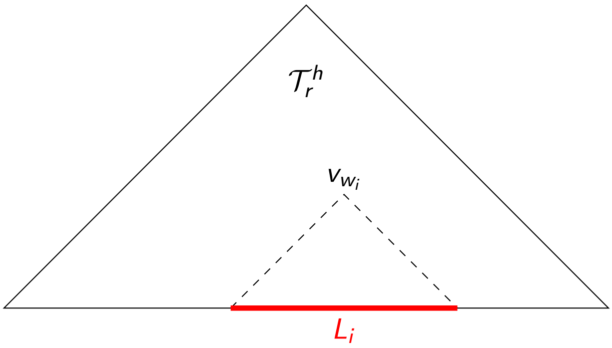
Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Nun zeigen wir, dass wenn $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.

Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Nun zeigen wir, dass wenn $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar, also ein Präfix-Code ist, auch die Ungleichung gelten muss.
Betrachte für $i \in [1, q]$ die Menge der Blätter unter v_{w_i}:

$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \wedge height(v) = h\}$$



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$, denn:

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \emptyset$, denn:

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i}, v_{w_j}.

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$, denn:

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i}, v_{w_j}.
Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$, denn:

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i}, v_{w_j}.
Dann gilt:

$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$, denn:

Sei o.E. $i < j, v_w \in L_i \cap L_j$, also v_w gleichzeitig Blatt unter v_{w_i}, v_{w_j}. Dann gilt:

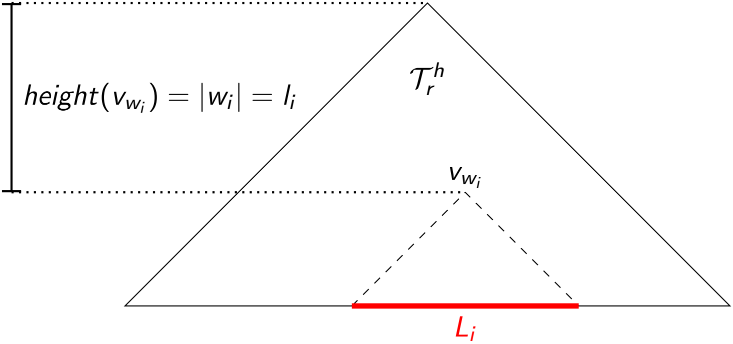
$$v_{w_i} \leq v_w \wedge v_{w_j} \leq v_w \implies w_i \sqsubseteq w \wedge w_j \sqsubseteq w \implies w_i \sqsubseteq w_j$$

Widerpruch, denn $w_i, w_j \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$ ist Präfix-Code!

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$

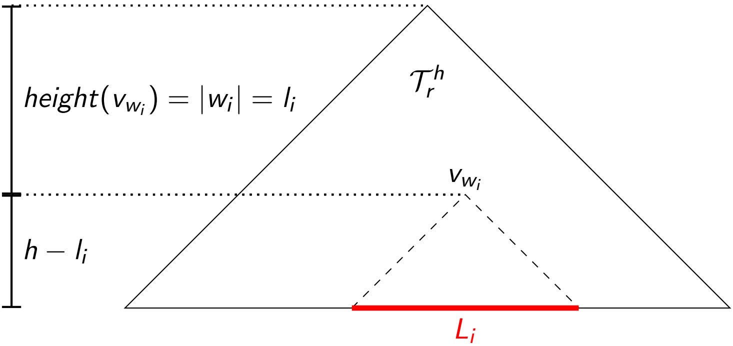
Weiter hat $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$

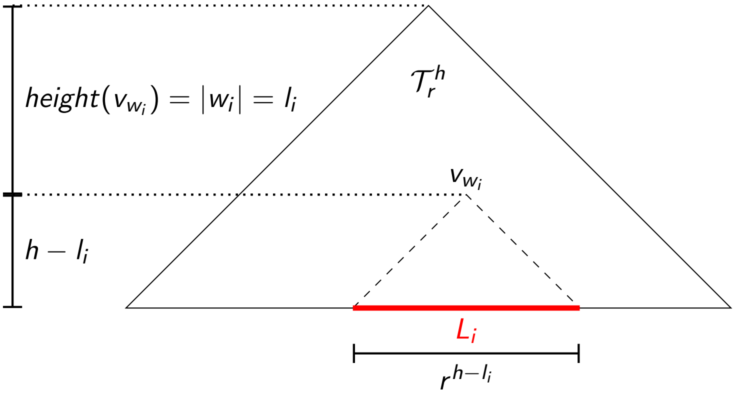
Weiter hat $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$

Weiter hat $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$

Weiter hat $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right|$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$

Weiter hat $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i|$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$

Weiter hat $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Für $i, j \in [1, q]$ mit $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \varnothing$

Weiter hat $\mathcal{T}_r^h$ nur r^h Blätter, und $|L_i| = r^{h-l_i}$.

Damit haben wir nun:

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-l_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Review of Kraft or smth.

Wir haben also gezeigt:

Seien $q, r \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen l genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

- Wissen nun, wie so ein Code erstellt werden kann