Ungleichungen von Kraft & McMillan

Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

November 23, 2018

Motivation

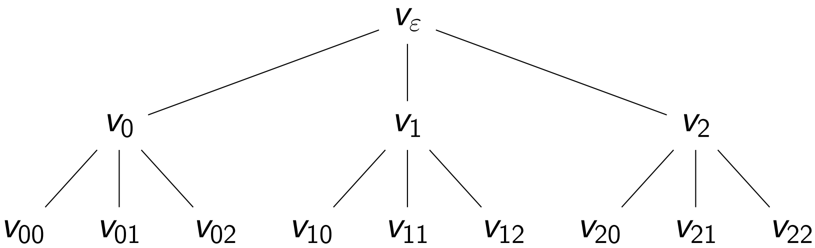
- Gesehen, dass eindeutig bzw. sofort dekodierbare Codes sehr nützlich sind.
- Wann bzw. unter welchen Bedingungen existieren diese?
- Insbesondere: Wortlängen und Größe des Code-Alphabets
- Vorgestellte Ungleichungen geben untere Schranken für diese

Überblick

- Zusammenhang Codes und Bäume
- Ungleichung von Kraft
- Ungleichung von McMillan
- Bemerkungen / Zusammenfassung

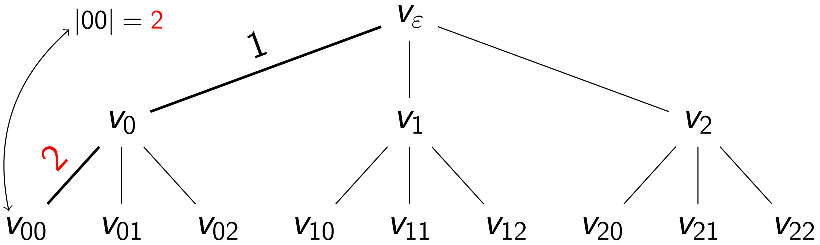
Code als Baum: $\mathcal{T}_r^h$

Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.
Beispiel $r = 3, h = 2$, Baum $\mathcal{T}_3^2$:



Code als Baum: $\mathcal{T}_r^h$

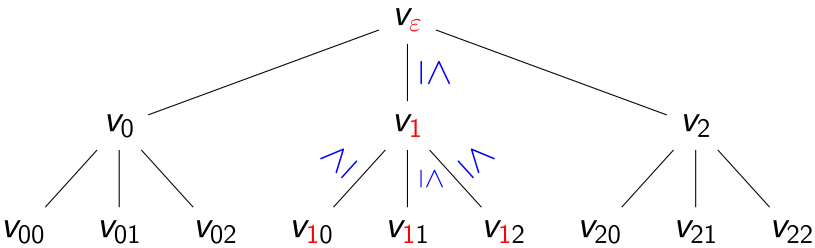
Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.
Beispiel $r = 3, h = 2$, Baum $\mathcal{T}_3^2$:



- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $height(v_w) = |w|$.

Code als Baum: $\mathcal{T}_r^h$

Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.
Beispiel $r = 3, h = 2$, Baum $\mathcal{T}_3^2$:



- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $height(v_w) = |w|$.
- Für $v_w, v_{w'} \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $v_w \leq v_{w'} \iff w \sqsubseteq w'$.

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen $0 < \ell_1 \leq \ell_2 \leq \cdots \leq \ell_q$ aufsteigend sortiert
- Code-Alphabet von $\mathcal{C}$ ist $[0, r-1]$

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

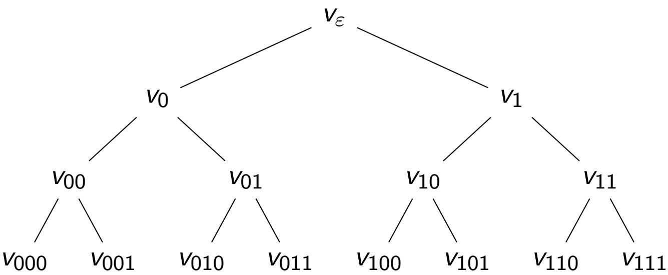
Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$.

Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2{}^3$

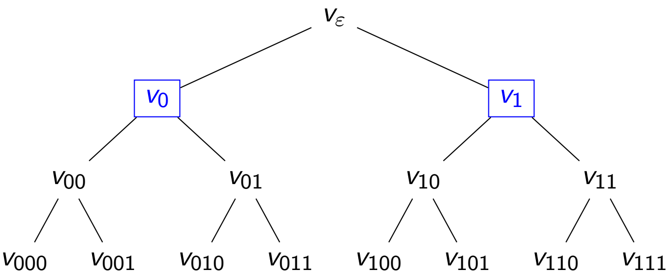


Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$



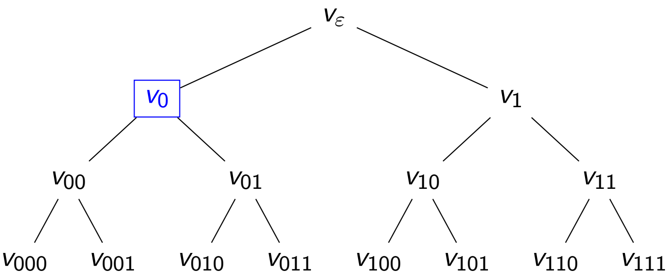
Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$

$w_1 = 0$,



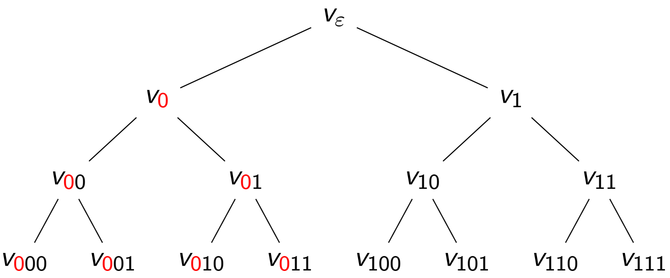
Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Longrightarrow$ "

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$

$w_1 = 0$,



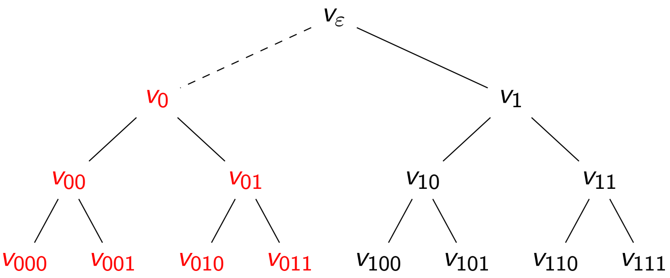
Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$

$w_1 = 0$,



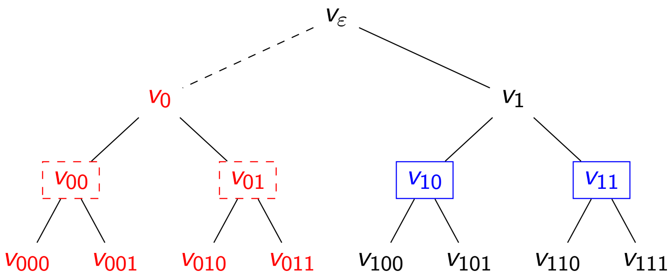
Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$

$w_1 = 0$,

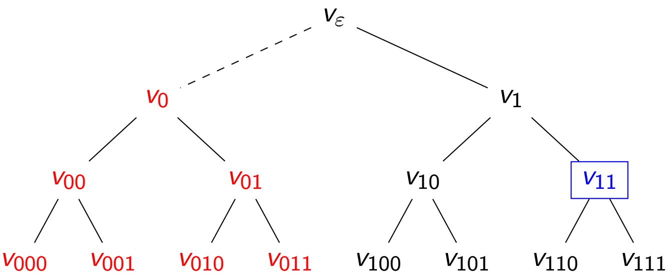


Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$
$w_1 = 0$, $w_2 = 11$,



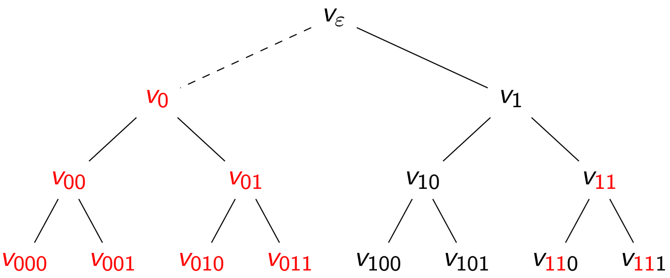
Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Longrightarrow$ "

Richtung " $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$

$w_1 = 0$, $w_2 = 11$,

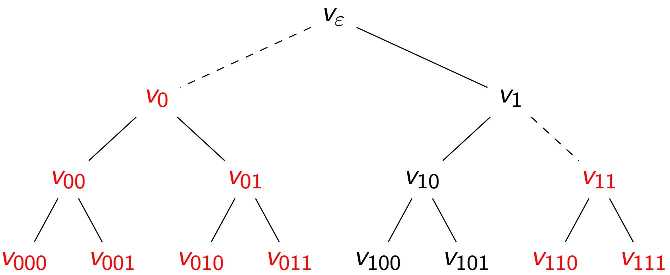


Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$
$w_1 = 0$, $w_2 = 11$,



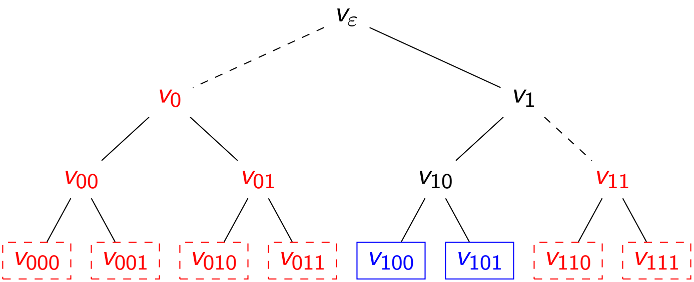
Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$

$w_1 = 0$, $w_2 = 11$,

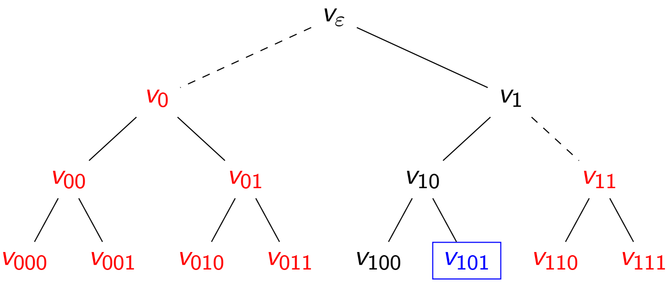


Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$
$w_1 = 0$, $w_2 = 11$, $w_3 = 101$



Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow \mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$.
$w_1 = 0$, $w_2 = 11$, $w_3 = 101$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- zz: Auswahl von w_i aus Baum möglich.
- Via endlicher Induktion über i.
- $h := \ell_{max}$

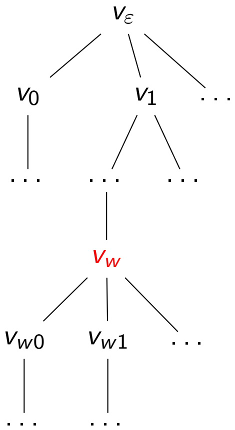
Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ ": Induktionsanfang

- zz: Auswahl von w_i aus Baum möglich.
- Via endlicher Induktion über i.
- $h := \ell_{max}$

$i = 1$:

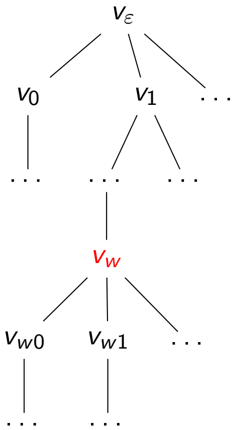
- Wähle $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h), height(v_w) = \ell_1$

$\mathcal{T}_r^h$:



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

$\mathcal{T}_r^h$:



- zz: Auswahl von w_i aus Baum möglich.
- Via endlicher Induktion über i.
- $h := \ell_{max}$

$i = 1$:

- Wähle $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h), height(v_w) = \ell_1$
- Setze $w_1 := w$, dann $|w_1| = \ell_1$

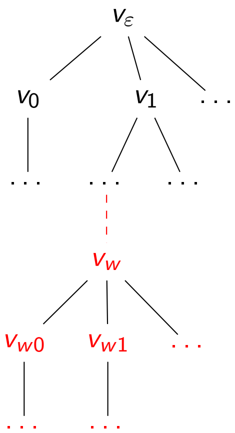
Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- zz: Auswahl von w_i aus Baum möglich.
- Via endlicher Induktion über i.
- $h := \ell_{max}$

$i = 1$:

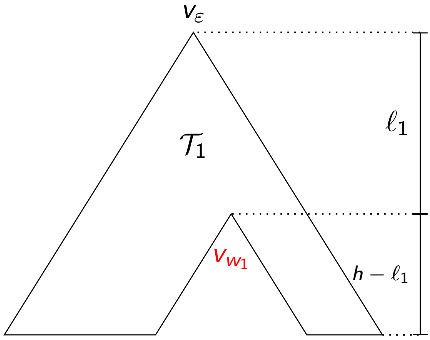
- Wähle $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h), height(v_w) = \ell_1$
- Setze $w_1 := w$, dann $|w_1| = \ell_1$
- Entferne Nachfolger; $\mathcal{T} := \mathcal{T}_r^h \setminus v_w$

$\mathcal{T}_r^h$:



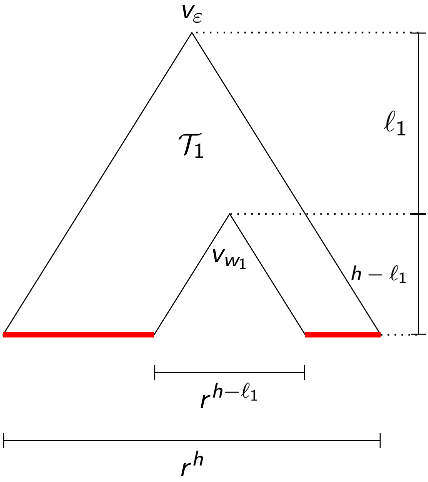
Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- Teilbaum der Höhe ℓ_1 entfernt



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- Teilbaum der Höhe ℓ_1 entfernt
- $\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter

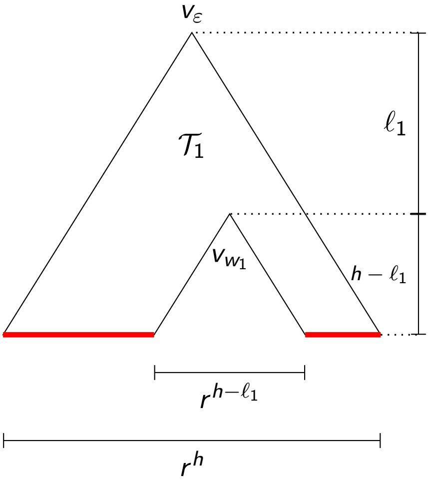


Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- Teilbaum der Höhe ℓ_1 entfernt
- $\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter

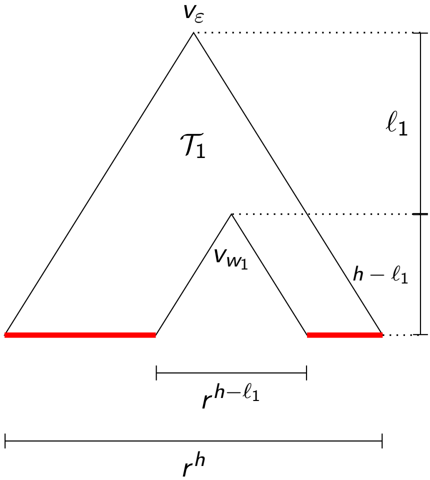
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$



Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ ": Induktionsanfang

- Teilbaum der Höhe ℓ_1 entfernt
- $\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter



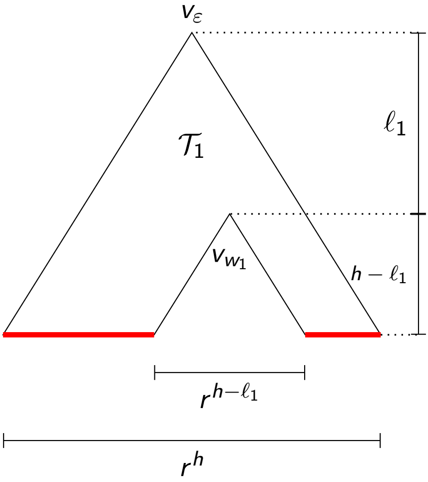
Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$

$$> r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- Teilbaum der Höhe ℓ_1 entfernt
- $\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter



Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$

$$> r^h\left(1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}}_{\leq 1}\right) \geq 0$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

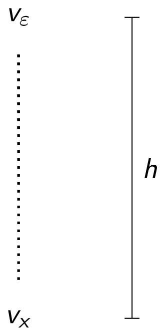
Induktionsvorraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- $|leaves(\mathcal{T}_j)| > 0$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Induktionsvorraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- $|leaves(\mathcal{T}_j)| > 0$

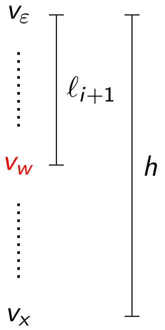


Dann:

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Induktionsvorraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- $|leaves(\mathcal{T}_j)| > 0$



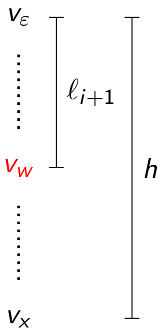
Dann:

- Knoten v_w der Höhe $\ell_{i+1} \leq h$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Induktionsvorraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- $|leaves(\mathcal{T}_j)| > 0$



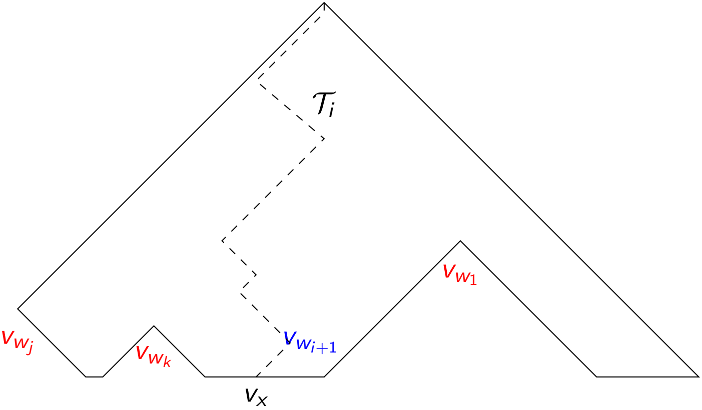
Dann:

- Knoten v_w der Höhe $\ell_{i+1} \leq h$
- Setze $w_{i+1} := w$, da $|w_{i+1}| = \ell_{i+1}$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Für $j \in [1, i]$:

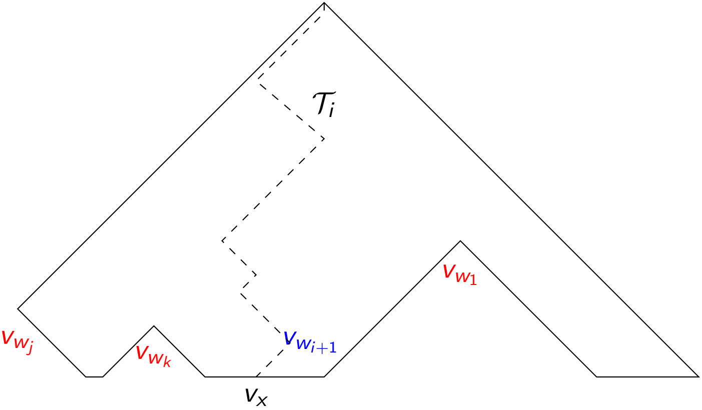
- Knoten "unter" v_{w_j} bereits entfernt



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Für $j \in [1, i]$:

- Knoten "unter" v_{w_j} bereits entfernt
- Damit $v_{w_j} \not\leq v_{w_{i+1}}$, also auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$



Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code
- Falls $i+1=q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code
- Falls $i + 1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$
- Falls $i + 1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code
- Falls $i + 1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$
- Falls $i + 1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- Dann $|\mathit{leaves}(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k}$$

Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code
- Falls $i + 1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$
- Falls $i + 1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- Dann $|leaves(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} \quad > \quad r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-\ell_k}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ ": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code
- Falls $i+1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$
- Falls $i+1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- Dann $|leaves(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} \quad {\color{red}>} \quad r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-\ell_k}$$

$$= \; r^h \Bigg(1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}}_{\leq\, 1} \Bigg) \; \geq \; {\color{red}0}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ ": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code
- Falls $i+1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$
- Falls $i+1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- Dann $|leaves(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} \quad > \quad r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-\ell_k}$$

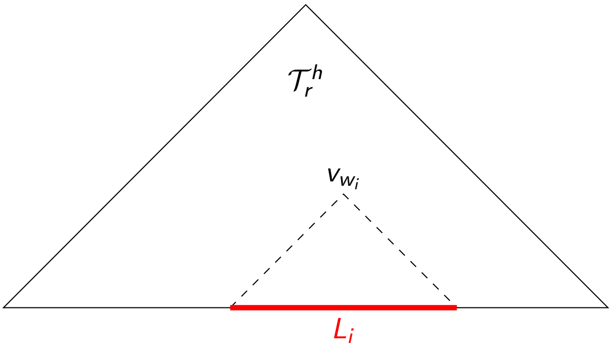
$$= \quad r^h \Bigg(1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}}_{\leq\ 1}\Bigg) \ \geq \ 0$$

Vorraussetzungen für I.S. erfüllt, Induktion vollendet.
Sofort dekodierbares $\mathcal{C}$ für r, q, l konstruierbar. $\square$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Zeige: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ Ungleichung gilt für Parameter

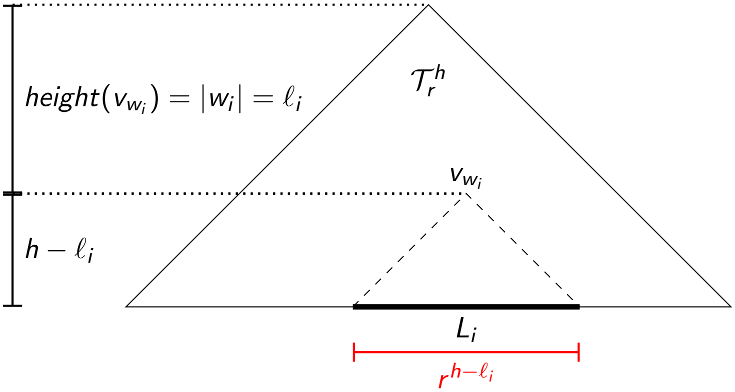
- $i \in [1, q]$. L_i's paarweise disjunkt.



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Zeige: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ Ungleichung gilt für Parameter

- $i \in [1, q]$. L_i's paarweise disjunkt.



Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

- $L_i \cap L_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
- $|L_i| = r^{h-\ell_i}$

$$r^h \;\geq\; \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right|$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

- $L_i \cap L_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
- $|L_i| = r^{h-\ell_i}$

$$r^h \;\geq\; \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| \;=\; \sum_{i=1}^{q} |L_i| \;=\; \sum_{i=1}^{q} r^{h-\ell_i} \;=\; r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}}$$

Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

- $L_i \cap L_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
- $|L_i| = r^{h-\ell_i}$

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-\ell_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1$$

$\square$

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

- Beweis konstruktiv
- Untere Schranke für Wortlänge, Alphabetgröße

Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

- Beweis konstruktiv
- Untere Schranke für Wortlänge, Alphabetgröße

- Bekannt: sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ eindeutig dekodierbar
- Schwächere Kriterien?

Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein r-ärer eindeutig dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen ℓ genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \tag{1}$$

Richtung "(1) $\implies \mathcal{C}$ existiert" durch Kraft.

Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- Zu zeigen: $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$
- Betrachte K^n abhängig von Wortlängen für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- Finde aus Form von K^n konstante obere Schranke
- Dann muss $K \leq 1$, da sonst K^n für geeignetes n größer als jede Konstante

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Dann für jedes $i \in [1,q]^n$:

$$n \cdot \ell_{min} \leq \sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k} \leq n \cdot \ell_{max}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Dann für jedes $i \in [1, q]^n$:

$$n \cdot \ell_{min} \leq \sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k} \leq n \cdot \ell_{max}$$

Wir wollen schreiben:

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{min}}^{n \cdot \ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Ziel: Gleiche Summenwerte durch $N_j \in \mathbb{N}_0$ zusammenfassen

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{min}}^{n \cdot \ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Ziel: Gleiche Summenwerte durch $N_j \in \mathbb{N}_0$ zusammenfassen

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{min}}^{n \cdot \ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit Wortlängensumme j

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Ziel: Gleiche Summenwerte durch $N_j \in \mathbb{N}_0$ zusammenfassen

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl $i \in [1,q]^n$ mit Wortlängensumme j
- Äquivalent: Anzahl $i \in [1,q]^n$ mit $|w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_n}| = j$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Ziel: Gleiche Summenwerte durch $N_j \in \mathbb{N}_0$ zusammenfassen

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl $i \in [1,q]^n$ mit Wortlängensumme j
- Äquivalent: Anzahl $i \in [1,q]^n$ mit $|w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}| = j$
- $\mathcal{C}$ eindeutig dekodierbar $\Longrightarrow$ Jede Code-Sequenz aus eindeutiger Auswahl $i \in [1,q]^n$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Ziel: Gleiche Summenwerte durch $N_j \in \mathbb{N}_0$ zusammenfassen

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=n \cdot \ell_{min}}^{n \cdot \ell_{max}} N_j \cdot r^{-j}$$

- N_j Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit Wortlängensumme j
- Äquivalent: Anzahl $i \in [1, q]^n$ mit $|w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_n}| = j$
- $\mathcal{C}$ eindeutig dekodierbar $\Longrightarrow$ Jede Code-Sequenz aus eindeutiger Auswahl $i \in [1, q]^n$
- r^j Wörter mit Länge j, nicht alles Code-Sequenzen von $\mathcal{C}$
- Für jedes max. ein $i \in [1, q]^n \Longrightarrow N_j \leq r^j$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} N_j r^{-j} = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} \frac{N_j}{r^j}$$

Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} N_j r^{-j} = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} \frac{N_j}{r^j}$$

$$\leq \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} 1 = n(\ell_{max} - \ell_{min}) + 1$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} N_j r^{-j} = \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} \frac{N_j}{r^j}$$

$$\leq \sum_{j=n\cdot\ell_{min}}^{n\cdot\ell_{max}} 1 = n(\ell_{max} - \ell_{min}) + 1$$

$$\Longrightarrow \frac{K^n}{n} \leq (\ell_{max} - \ell_{min}) + 1$$

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$\frac{K^n}{n} \leq (\ell_{max} - \ell_{min}) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r, Wortlängen ℓ fix.
- Damit auch $\ell_{min}, \ell_{max}, K$ fix.

Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$\frac{K^n}{n} \leq (\ell_{max} - \ell_{min}) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße r, Wortlängen ℓ fix.
- Damit auch $\ell_{min}, \ell_{max}, K$ fix.
- $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
- Nach Analysis/DSAL bekannt: nur möglich für $K \leq 1$.

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} = K \leq 1$$

$\square$

Bemerkungen

Für $r, q \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$ ergibt sich:

$$\exists \mathcal{C}_{r,q,\ell} \text{ eindeutig dekodierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mathcal{C}'_{r,q,\ell} \text{ sofort dekodierbar}$$

Bemerkungen

Für $r, q \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$ ergibt sich:

$$\exists \mathcal{C}_{r,q,\ell} \text{ eindeutig dekodierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mathcal{C}'_{r,q,\ell} \text{ sofort dekodierbar}$$

Außerdem, für festen Code $\mathcal{C}_{r,q,\ell}$:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1 \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad \mathcal{C}_{r,q,\ell} \text{ sofort dekodierbar}$$

Bemerkungen

Für $r, q \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$ ergibt sich:

$$\exists \mathcal{C}_{r,q,\ell} \text{ eindeutig dekodierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mathcal{C}'_{r,q,\ell} \text{ sofort dekodierbar}$$

Außerdem, für festen Code $\mathcal{C}_{r,q,\ell}$:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1 \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad \mathcal{C}_{r,q,\ell} \text{ sofort dekodierbar}$$

Beispiel: $r = 2, q = 3, \ell = (1, 2, 3)$

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} \;=\; \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \;=\; \frac{7}{8} \;<\; 1$$

$\mathcal{C} := \{0, 01, 011\}$ **nicht** sofort dekodierbar!

Zusammenfassung

- Existenz der Codes abhängig von:
  Alphabetgröße(r), Anzahl Codewörter(q), Codewortlängen(ℓ)

- Genauer durch Ungleichung von Kraft/McMillan:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1$$

- Zusammenhang/Konstruktion von Codes durch Bäume