Gruppe $\boxed{\mathbf{11}}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 10

Aufgabe 1

a)

Für den Grenzwert $\lim\limits_{x \downarrow 3} f(x)$ gilt stets $x > 3$ und damit $|x-3| = x-3 > 0$, also auch:

$$\lim_{x \downarrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

Für den Grenzwert $\lim\limits_{x \uparrow 3} f(x)$ gilt stets $x < 3$ und damit $x-3 < 0 < |x-3|$, also auch:

$$\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \uparrow 3} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

Da nun $\lim\limits_{x \downarrow 3} f(x) \neq \lim\limits_{x \uparrow 3} f(x)$ gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ nicht existiert und $f(x)$ nicht stetig ist.

b)

Da die Polynome $x^2 + 5$ und $1 - 3x$ für $x = -2$ wohldefiniert sind, lässt sich hier der Grenzwert durch Einsetzen individuell bestimmen. Daraus folgt auch, dass (wie bei prakitsch jedem Polynom) der Grenzwert $\lim_{x \to -2}$ existiert (1.6) und dann mit (1.10) gilt:

$$\lim_{x \uparrow -2} x^2 + 5 = \lim_{x \to -2} x^2 + 5 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -2} 1 - 3x = \lim_{x \to -2} 1 - 3x$$

Es folgt also:

$$\lim_{x \uparrow -2} x^2 + 5 = (-2)^2 + 5 = 9 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -2} 1 - 3x = 1 - 3(-2) = 7$$

Weiterhin ist gilt wie in a) für den Grenzwert $\lim\limits_{x \uparrow -2} g(x)$, dass $x < -2$ und damit nach Konstruktion $g(x) = x^2 + 5$. Analog dazu gilt für $\lim\limits_{x \downarrow -2} g(x)$, dass $x > -2$ und damit nach Konstruktion $g(x) = 1 - 3x$. Es folgt also

$$\lim_{x \uparrow -2} g(x) = \lim_{x \uparrow -2} x^2 + 5 = 9 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -2} g(x) = \lim_{x \downarrow -2} 1 - 3x = 7$$

Da nun $\lim\limits_{x \uparrow -2} g(x) \neq \lim\limits_{x \downarrow -2} g(x)$ gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ nicht existiert und $g(x)$ nicht stetig ist.

c) Analog zu Beispiel 1.18 lässt sich begründen, dass $\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$ und $\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$ gilt:

Zu gegebenem $M > 0$ wähle $a = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$. Dann ist für $0 < x < a$:

$$\frac{1}{x^3} > \frac{1}{a^3} = M$$

Also gilt $\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$. Analog dazu wählen wir zu gegebenm $M > 0$ wieder $b = -\frac{1}{\sqrt[3]{M}}$.
Dann ist für $b < x < 0$:

$$\frac{1}{x^3} < \frac{1}{b^3} = -M$$

Also gilt $\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$.
Weiterhin gilt für $\lim_{x\downarrow 0} j(x)$ bzw. $\lim_{x\uparrow 0} j(x)$ stets $x \neq 0$ und damit auch

$$\lim_{x\downarrow 0} j(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{x\uparrow 0} j(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

Da nun $\lim_{x\uparrow 0} j(x) \neq \lim_{x\downarrow 0} j(x)$ gilt, lässt sich schließen, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0} j(x)$ nicht existiert und $j(x)$ nicht stetig ist.

Aufgabe 2

a)
Es gilt für $x, y \in [0, 2]$ stets $|x - y| \leq \max [0, 2] = 2$, ebenso $|x^2 - y^2| < \max[0, 2^2] = 4$.
Wir wählen also $L = 2$. Es folgt:

$$\forall x, y \in [0, 2]\colon |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| \leq L \cdot |x - y| = |2x - 2y| \leq 4$$

Dies gilt, da stets $x^2 = x \cdot x \leq 2 \cdot x$ für $x \in [0, 2]$. Damit ist f im Intervall $[0, 2]$ Lipschitz-stetig.

b)
Wäre f im Intervall $[0, 1]$ Lipschitz-stetig (Widerspruchsannahme), so gäbe es ein $L \in \mathbb{R}, L \geq 0$ sodass gilt:

$$\forall x, y \in [0, 1]\colon |f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$$

Sei nun $x = 2y \in [0, 1]$. Wir formen die das Libschitz-Kriterium leicht um. Es müsste gelten:

$$\forall y \in \left[0, \frac{1}{2}\right], x \in [0, 1], x = 2y\colon \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{\sqrt{2y} - \sqrt{y}}{2y - y} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{y}} \leq L$$

Es lässt sich jedoch zu jedem $M > 0$ ein $a = \frac{1}{M^2}$ wählen, sodass für $0 < x < a$ gilt:

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{x} > \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{a}} = M$$

Es gilt also $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{x}} = \infty$, damit wäre die Funktion im gegebenen Intervall für $x = 2y$ nach oben unbeschränkt. Dies stellt einen Widerspruch dar, da sonst L eine obere Schranke für eine nach oben unbeschränkte Funktion darstellen würde. Damit haben wir ein Gegenbeispiel gezeigt, folglich ist f nicht Lipschitz-stetig.

c)

Es sei eine Lipschitz-stetige Funktion f mit Definitionsbereich D und Lipschitzkonstante $L \in \mathbb{R},\ L \geq 0$ gegeben. Es gilt also:

$$\forall x, y \in D\colon |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir nun $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Es folgt:

$$\forall x, y \in D,\ |x - y| < \delta\colon |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon$$

Damit ist f für jeden Häufungspunkt $y \in D$ stetig, also ist f stetig.

Aufgabe 3

a)

Es sei eine beliebige Folge x_n mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gegeben. Die Exponentialfunktion ist stets größer 0 und streng monoton steigend (III 3.21). Weiterhin gilt:

$$\exp(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \exp(-1) = \frac{1}{e} < 1 \quad \text{also durch strenge Monotonie} \quad \forall x < 0\colon \exp(x) < 1$$

Weiterhin gilt stets $x^2 \geq 0$ und $\frac{-1}{x^2} < 0$ für $x \neq 0$. Daher folgt also für $x \neq 0$:

$$0 < \left|\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right| < 1 \quad \iff \quad 0 < \left|x \cdot \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right| < |x|$$

Da $f(0) = 0$ gilt dann auch:

$$0 \leq |f(x_n)| \leq |x_n|$$

Es gilt jedoch nach Konstruktion von x_n:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 = \lim_{n\to\infty} 0$$

Somit folgt mit dem Sandwich Lemma, dass $\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = 0$. Weiterhin gilt nach Definition auch $f(0) = 0$, also folgt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Damit ist f stetig in 0.

b)

Da $\mathbb{R}$ dicht ist, folgt, dass 0 ein Häufingspunkt von $\mathbb{R}$ ist.
Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \varepsilon$. Mit $\forall x \in \mathbb{R}\colon -1 \leq \sin(x) \leq 1$ folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x - 0| < \delta\colon |f(x) - f(0)| = |f(x)| = \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

Damit ist f stetig in 0.

Aufgabe 4

a)

Sei als Abkürzung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x) - x$, da cos auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Für $a = 0 < b = 2\pi$ gilt:

$$f(a) = \cos(0) - 0 = 1 > \frac{1}{2} = h(0) \quad \text{und} \quad f(b) = \cos(2\pi) - 2\pi = 1 - 2\pi < \frac{1}{2} = h(\pi)$$

Sei nun $m = \min\{f(x) \mid x \in [0, 2\pi]\}$ sowie $M = \max\{f(x) \mid x \in [0, 2\pi]\}$.
Es folgt, dass $m \leq f(b) = 1 - 2\pi$ und $M \geq f(a) = 1$, also auch $[1 - 2\pi, 1] \subseteq [m, M]$.
Weiterhin gilt nach Zwischenwertsatz (2.9 b) nun $f([a, b]) = [m, M]$.
Da aber $\frac{1}{2} \in [1 - 2\pi, 1] \subseteq [m, M]$ ist und f stetig ist, gilt also:

$$\exists c \in (a, b)\colon f(c) = \frac{1}{2} = h(c)$$

Damit gibt es mindestens eine Lösung für die Gleichung $h(x) = \cos(x) - x = f(x)$.

b)

Wir definieren $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) - f(x - 1)$. Es gilt:

$$g(0) = f(0) - f(-1) = f(0) - f(1) \qquad \text{und} \qquad g(1) = f(1) - f(0)$$

Wir Unterscheiden nun 3 Fälle:

Fall 1: $f(0) > f(1)$:
Dann gilt $g(0) = f(0) - f(1) > 0$ und $g(1) = f(1) - f(0) < 0$. Da f stetig ist gibt es also nach Zwischenwertsatz ein $x \in (0, 1)$ sodass $g(x) = f(x) - f(x - 1) = 0$, also $f(x) = f(x - 1)$ gilt.

Fall 2: $f(1) > f(0)$:
Dies ist analog zu Fall 1:

$$(g(0) < 0) \land (g(1) > 0) \land (\text{f stetig}) \implies \exists x \in (0, 1)\colon g(x) = 0 \implies f(x) = f(x - 1)$$

Fall 3: $f(1) = f(0)$:
Damit ist die Aussage schon bewiesen, da $1 \in [0, 1]$ und dann $f(1) = f(1 - 1) = f(0)$ gilt.

Insgesamt gibt es stets mindestens ein $x \in [0, 1]$, sodass $f(x) = f(x - 1)$ gilt.