Gruppe $\boxed{9}$ Phil Pützstück, 377247
Lineare Algebra für Informatiker

Hausaufgabe 4

Aufgabe 22

Sei $s = (s_1, s_2, s_3)$ mit $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$, $s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $t \in \mathbb{R}$ mit $t \neq 1$ ist s eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & t & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & t-1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & t-1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also insbesondere

$$\mathcal{B}_1 = s_1 + \frac{2}{t-1} s_2 - (1 + \frac{2}{t-1}) s_3 \qquad \mathcal{B}_2 = \frac{-1}{t-1} s_2 + (1 + \frac{1}{t-1}) s_3$$

$$\mathcal{B}_3 = \frac{1}{t-1} s_2 + \frac{-1}{t-1} s_3$$

Daraus ergibt sich auch sofort die Basiswecheselmatrix von s nach $\mathcal{B}$ für $t \neq 1$:

$$M_{s,\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{3\times 1}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{t-1} & \frac{-1}{t-1} & \frac{1}{t-1} \\ -(1 + \frac{2}{t-1}) & 1 + \frac{1}{t-1} & \frac{-1}{t-1} \end{pmatrix}$$

Für $t \neq 1$ ist s eine Basis und dann φ_t eindeutig durch die Abbildungsvorschrift, also die Bilder dar Basiselemente von s bestimmt. Folglich existiert φ_t für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \neq 1$. Weiter gilt nach Proposition 3.18, dass

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi_t) = M_{\mathcal{B},s}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{3\times 1}}) M_{s,s}(\varphi_t) M_{s,\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{3\times 1}})$$

Analog gilt

$$M_{\mathcal{B},s}(\varphi_t) = M_{\mathcal{B},s}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{3\times 1}}) M_{s,s}(\varphi_t) M_{s,s}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{3\times 1}}) = M_{\mathcal{B},s}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{3\times 1}}) M_{s,s}(\varphi_t) E_3 = M_{\mathcal{B},s}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{3\times 1}}) M_{s,s}(\varphi_t)$$

Wir können also schreiben

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi_t) = M_{\mathcal{B},s}(\varphi_t) M_{s,\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{3\times 1}})$$

$M_{\mathcal{B},s}(\varphi_t)$ ist offensichtlich analog zu Bsp. 3.19 gegeben durch die Abbildungsvorschrift:

$$M_{\mathcal{B},s}(\varphi_t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ -t-4 & -1 & 2t+7 \end{pmatrix}$$

Damit können wir nun $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi_t)$ ausrechnen:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi_t) = M_{\mathcal{B},s}(\varphi_t) M_{s,\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{3\times 1}})$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ -t-4 & -1 & 2t+7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{t-1} & \frac{-1}{t-1} & \frac{1}{t-1} \\ -(1+\frac{2}{t-1}) & 1+\frac{1}{t-1} & \frac{-1}{t-1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} -8t-4 & 7t-1 & -6 \\ 0 & 2(t-1) & 0 \\ -3t^2-12t-5 & 2t^2+7t+1 & -2t-8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 23

Im folgenden steht $V(x)$ repräsentativ für Elemente aus V angewandt auf x. Da Elemente von V nur durch ihr Bild beschrieben sind ($v(x) = \cdots$), dieses Bild von x unter v jedoch nicht selbst Element von V ist, wollen wir mit $v(x) \in V(x)$ ausdrücken, dass $v \in V$.

Seien $v, v' \in V$ und $a, a' \in \mathbb{R}^5$ mit $v(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i$ sowie $v'(x) = \sum_{i=0}^4 a'_i x^i$. Es gilt

$$v(x) + v'(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i + \sum_{i=0}^4 a'_i x^i = \sum_{i=0}^4 (a_i + a'_i) x^i \in V(x)$$

Weiter sei $c \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$cv(x) = c \sum_{i=0}^4 a_i x^i = \sum_{i=0}^4 (ca_i) x^i \in V(x)$$

Ferner ist

$$0 = \sum_{i=0}^4 0 = \sum_{i=0}^4 0 \cdot x^i \in V(x)$$

Folglich ist V ein Untervektorraum von $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Wir wissen aus der Analysis, dass für relle Funktionen $f, g \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}$ stets gilt:

$$(f+g)' = f' + g' \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \qquad \text{sowie} \qquad (cf)' = cf' \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \tag{1}$$

Damit ist die Ableitung ein Endomorphismus von $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dies ist offensichtlich analog für höhere Ableitungen.

Seien nun $f, g \in V$ sowie $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir haben

$$\varphi(f+g)(x) = (f+g)''(x) + x(f+g)'(x) - (f+g)(x+1)$$

$$\stackrel{1}{=} f''(x) + g''(x) + x(f'(x) + g'(x)) - (f(x+1) + g(x+1))$$

$$= f''(x) + xf'(x) - f(x+1) + g''(x) + xg'(x) - g(x+1) = \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$$

Weiter gilt

$$\varphi(cf)(x) = (cf)''(x) + x(cf)'(x) - (cf)(x+1)$$

$$\stackrel{1}{=} cf''(x) + cxf'(x) - cf(x+1) = c(f''(x) + f'(x) - f(x+1)) = c\varphi(f)(x)$$

Folglich ist φ ein Endomorhphismus auf V, also linear.

b)

Sei $\mathcal{B} \in V^5$ mit

$$\mathcal{B}_0(x) = 1 \qquad \mathcal{B}_1(x) = x \qquad \mathcal{B}_2(x) = x^2 \qquad \mathcal{B}_3(x) = x^3 \qquad \mathcal{B}_4(x) = x^4$$

Damit haben wir für $v \in V$ mit $v(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i$, dass $v = \sum_{i=0}^4 a_i \mathcal{B}_i$ und damit eine Linearkombination über $\mathcal{B}$ ist. Foglich ist $\mathcal{B}$ ein EZS von V. Weiter gilt für $a \in \mathbb{R}^5$

$$\left(\sum_{i=0}^4 a_i \mathcal{B}_i\right)(x) = 0 \implies a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = 0 \implies \forall i \in [0,4] : a_i = 0$$

Folglich ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig und damit eine Basis von V. Es gilt nach Definition der Darstellungsmatrix dass

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) = (\kappa_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathcal{B}_i)))_{i \in [0,4]}$$

Wir haben

$$\begin{gathered}
\varphi(\mathcal{B}_0)(x) = 0 + 0 - 1 = -1 \\
\varphi(\mathcal{B}_1)(x) = 0 + x - (x+1) = -1 \\
\varphi(\mathcal{B}_2)(x) = 2 + 2x^2 - (x+1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\
\varphi(\mathcal{B}_3)(x) = 6x + 3x^3 - (x+1)^3 = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
\varphi(\mathcal{B}_4)(x) = 12x^2 + 4x^4 - (x+1)^4 = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 1
\end{gathered}$$

und damit

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

Nach Korrolar 3.39 gilt $\mathrm{Sol}(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi), 0) = \kappa_{\mathcal{B}}(\mathrm{Ker}\ \varphi)$. Also:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{V}\cdot\frac{1}{3},\ (\text{I, II, III, IV})+\text{V}(1,4,-6,4)} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}\cdot\frac{1}{2},\ (\text{I, II, III})+\text{IV}(1,-3,3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}\cdot(-1),\ (\text{I, II})+\text{III}(1,2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Damit haben wir durch lösen des homogenen LGS und nach Korrolar 3.39

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = \{\sum_{i=0}^4 a_i \mathcal{B}_i \mid a \in \mathrm{Sol}(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi), 0)\} = \{\sum_{i=0}^4 a_i \mathcal{B}_i \mid a \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

$$= \{a(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_0) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_0)\rangle$$

Damit ist $(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_0)$ eine Basis von Ker φ.

d)

Es gilt $\kappa_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Nach Bemerkung 3.38 ist $\kappa_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}(\{g\})) = \mathrm{Sol}(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi), \kappa_{\mathcal{B}}(g))$. Also:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{V}\cdot\frac{1}{3},\ \text{(I, II, III, IV)+V(1,4,}-6\text{,4)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}\cdot\frac{1}{2},\ \text{(I, II, III)+IV(1,}-3\text{,3)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(I, II)+III(}-1\text{,2)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit haben wir nach Bemerkung 3.38

$$\varphi^{-1}(\{g\}) = \{\sum_{i=0}^{4} a_i\mathcal{B}_i \mid a \in \mathrm{Sol}(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi), \kappa_{\mathcal{B}}(g))\} = \{\sum_{i=0}^{4} a_i\mathcal{B}_i \mid a = \begin{pmatrix} -2-x \\ x \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(-2-a)\mathcal{B}_0 + a\mathcal{B}_1 + 3\mathcal{B}_2 + 3\mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_4 \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Auf ein $x \in \mathbb{R}$ angewendet, erhalten wir für ein $a \in \mathbb{R}$ die Funktionenschaar

$$\varphi^{-1}(\{g\})(x) = -2 - a + ax + 3x^2 + 3x^3 + x^4$$