Gruppe $\boxed{11}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 11

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe steht "Verkettung" für Addition, Subtraktion, Multiplikation, Skalierung oder Komponierung von Funktionen. **a)**

(i) Nach Skript ist jedes Polynom und $\ln x$ als Umkehrfunktion von e^x differenzierbar und Verkettung dieser Funktionen erhält dies. $|a-1|$ ist hier nur eine konstante, deswegen ist f auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.
Mit VII 1.11 sowie der Produkt und Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} = [x^\alpha \cdot \ln(x + |\alpha - 1|)]' &\overset{\text{P}}{=} [x^\alpha]' \cdot \ln(x + |\alpha - 1|) + x^\alpha \cdot [\ln(x + |\alpha - 1|)]' \\ &\overset{\text{*K}}{=} \alpha x^{\alpha-1} \cdot \ln(x + |\alpha - 1|) + x^\alpha \cdot \left(\frac{[x + |\alpha - 1|]'}{x + |\alpha - 1|}\right) \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \cdot \ln(x + |\alpha - 1|) + x^\alpha \cdot \frac{1}{x + |\alpha - 1|}\end{aligned}$$

(ii) Nach Skript ist jedes Polynom, $\sin x$, $\cos x$ auf $\mathbb{R}$ und jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Verkettung dieser Funktionen erhält Differenzierbarkeit, also ist g auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.
Mit Satz 1.7 und der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx} = \left[\cos\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right)\right]' &= \cos'\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left[\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right]' \\ &= -\sin\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\sin'\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left[x^2 + \frac{1}{x}\right]'\right) \\ &= -\sin\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\left[x^2\right]' + \left[\frac{1}{x}\right]'\right)\right) \\ &= -\sin\left(\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \cos\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

b)

(iii) Nach Skript ist jedes Polynom, $\sin x$, $\cos x$, e^x auf $\mathbb{R}$ und jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Ebenso ist die Umkehfunktion f^{-1} einer differenzierbaren, stetigen und injektiven Funktion f ebenfalls differenzierbar in den Punkten x wo $f'(x) \neq 0$ ist. Verkettung dieser Funktionen erhält Differenzierbarkeit.
Es ist $\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion des Polynoms x^2 und damit auch differenzierbar auch ihrem Definitionsbereich. Analog dazu ist arctan die Umkehrfunktion von $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ und damit auch differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich. Insgesamt ist also h auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.
Mit Satz 1.7, 1.10 und der Ketten und Quotientenregel folgt:

$$\frac{dh}{dx} = \left[\cos\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right)\right]' = -\sin\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right) \cdot \left[\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right]'$$

$$= -\sin\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right) \cdot \left(\frac{\left[e^x + \sqrt{1+x^2}\right]' \cdot (\arctan x) - (e^x + \sqrt{1+x^2}) \cdot [\arctan x]'}{(\arctan x)^2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right) \cdot \left(\frac{\left(e^x + \left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\right) \cdot (\arctan x) - (e^x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \left(\frac{1}{\tan^{-1}(\arctan x)}\right)}{(\arctan x)^2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{e^x + \sqrt{1+x^2}}{\arctan x}\right) \cdot \left(\frac{\left(e^x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \cdot (\arctan x) - (e^x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{(\arctan x)^2}\right)$$

(iv) Nach Skript ist e^x auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, also ist i auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.
Mit Satz 1.7 und der Kettenregel folgt:

$$\frac{di}{dx} = [\cosh x]' = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left([e^x]' + [e^{(-1)x}]'\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

c) (v) Nach Skript ist jedes Polynom sowie e^x und $\ln x$ als dessen Umkehrfunktion differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich. Also ist auch j als Verkettung dieser differenzierbar.
Mit Satz 1.7, 1.11 und der Kettenregel folgt:

$$\frac{dj}{dx} = [x^x]' = \left[e^{x\ln(x)}\right]' = e^{x\ln(x)} \cdot [x\ln(x)]' = e^{x\ln(x)} \cdot ([x]' \cdot \ln(x) + [\ln(x)]' \cdot x)$$

$$= e^{x\ln(x)} \cdot (1 \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot x) = e^{x\ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1)$$

$$= x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

(vi) Wie zuvor erwähnt sind alle Polynome, e^x, $\sin x$, $\cos x$ und auch $\ln x$ als Umkehrfunktion von e^x sowie $\sqrt{x}$ als Umkehrfunktion von x^2 auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Damit ist k als Verkettung dieser Funktionen ebenfalls auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Mit Satz 1.7, 1.10, 1.11 und der Produkt und Kettenregel folgt:

$$\frac{dk}{dx} = \left[\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\right]' = \left[\exp\left(\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right)\right]'$$

$$= \exp\left(\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right)\cdot\left[\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'$$

$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left[\sin(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'$$

$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left([\sin(x)]'\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\left[\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)\right]'\right)$$

$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\frac{[1+\sqrt{x}+x^2]'}{1+\sqrt{x}+x^2}\right)$$

$$= \left(1+\sqrt{x}+x^2\right)^{\sin x}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)+\sin(x)\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x}{1+\sqrt{x}+x^2}\right)$$

Aufgabe 2

Der maximale reelle Def. Bereich ist $\left[-\frac{3}{2}, 3\right)$, da für $x < -\frac{3}{2}$ dann $3 - 2x < 0$ währe und wir dann die Wurzel einer negativen Zahl ziehen würden. Des weiteren gilt für $x \geq 3$, dass $\sqrt{3 + 2x} - x \leq \sqrt{9} - 3 = 0$, und da der natürliche Logarithmus nur für $x > 0$ definiert ist, gibt dies eine Definitionslücke. Insgesamt ist also $D_f = \left[-\frac{3}{2}, 3\right)$.

Für die Nullstellen setzen wir $f = 0$:

$$f = 0 \implies \ln\left(\sqrt{3 + 2x} - x\right) = 0 \implies \exp\left(\ln\left(\sqrt{3 + 2x} - x\right)\right) = \exp(0)$$

$$\implies \sqrt{3 + 2x} - x = 1 \implies \sqrt{3 + 2x} = x + 1 \implies 3 + 2x = x^2 + 2x + 1$$
$$\implies 2 = x^2 \implies x = \pm\sqrt{2}$$

Wir testen nun:

$$f(\sqrt{2}) = \ln\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) = \ln\left(\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{2}\right) = \ln(1) = 0$$

$$f(-\sqrt{2}) = \ln\left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) = \ln\left(\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2}\right) = \ln(2\sqrt{2} - 1) \neq 0$$

Also hat f eine Nullstelle bei $\sqrt{2} \in D_f$, aber nicht bei $-\sqrt{2}$.

Für mögliche Extrema bestimmen wir zuerst f': Nach Satz 1.10 und wie in Aufgabe 1 bereits erwähnt sind $\ln x$, $\sqrt{x}$ und jedes Polynom auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. f ist eine Verkettung dieser Funktionen und erhält damit die Differenzierbarkeit.

$$\frac{df}{dx} = \left[\ln\left(\sqrt{3 + 2x} - x\right)\right]' = \frac{\left[\sqrt{3 + 2x} - x\right]'}{\sqrt{3 + 2x} - x} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3 + 2x} - x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3 + 2x} - x}$$

Nun setzen wir $f' = 0$:

$$f' = 0 \implies \frac{\frac{1}{\sqrt{3+2x}} - 1}{\sqrt{3 + 2x} - x} = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{3 + 2x}} - 1 = 0 \implies 1 = \sqrt{3 + 2x}$$
$$\implies 3 + 2x = 1 \implies x = -1$$

Damit ist $x = -1$ ein möglicher Kandidat für Extrema von f.

Aufgabe 3

a) Da jedes Polynom und e^x sowie deren Komponierung auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, ist auch f differenzierbar.

$$f' = \frac{df}{dx} = \Big[\exp(2x^4 - x^2 - 1)\Big]' = \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot \Big[2x^4 - x^2 - 1\Big]'$$
$$= \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (8x^3 - 2x)$$

f immernoch differenzierbar, da es wieder nur eine Verkettung von Polynomen und Exponentialfunktionen ist.

$$f'' = \frac{df'}{dx} = \Big[\exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (8x^3 - 2x)\Big]'$$
$$= [\exp(2x^4 - x^2 - 1)]' \cdot (8x^3 - 2x) + \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot [8x^3 - 2x]'$$
$$= \Big(\exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (8x^3 - 2x)\Big) \cdot (8x^3 - 2x) + \exp(2x^4 - x^2 - 1) \cdot (24x^2 - 2)$$
$$= \exp(2x^4 - x^2 - 1)(64x^6 - 32x^4 + 28x^2 - 2)$$

Wir setzen $f' = 0$. Da nach (III 3.21) stets $\exp(x) \neq 0$ ist und $\mathbb{R}$ ein Körper, also ein Integritätsbereich mit Nullteilerfreiheit ist, genügt es hier das Polynom $8x^3 - 2x$ gleich 0 zu setzen. Weiterhin ist $8x^3 - 2x = x(8x^2 - 2)$ also ist $x = 0$ eine Nullstelle von $8x^3 - 2x$. Wir lösen also $8x^2 - 2$ mit der quadratischen Formel:

$$8x^2 - 2 = 0 \implies x = \frac{\pm\sqrt{-4 \cdot 8 \cdot (-2)}}{2 \cdot 8} = \frac{\pm\sqrt{64}}{16} = \frac{\pm 8}{16} = \pm\frac{1}{2}$$

Somit haben wir mögliche Extremalstellen $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}$. Wir überprüfen dies durch einsetzen in f''. Wir verwenden wieder, dass stets $\exp(x) > 0$ (*):

$$f''(0) = \exp(-1)(-2) \overset{*}{<} 0$$
$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1\right)(1 - 2 + 7 - 2) = 4\exp\left(-\frac{9}{8}\right) \overset{*}{>} 0$$
$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1\right)(1 - 2 + 7 - 2) = 4\exp\left(-\frac{9}{8}\right) \overset{*}{>} 0$$

Also gilt nach (VII 2.9), dass $x_1 = 0$ eine strikte lokale Maximalstelle ist, und $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$ strikte lokale Minimalstellen sind. Weiterhin ist e^x sowie $2x^4 - x^2 - 1$ nach oben unberschränkt, daher kann es kein globales Maximum geben. Durch $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^4 - x^2 - 1 = \infty$ sowie $\lim\limits_{x \to \infty} 2x^4 - x^2 - 1 = \infty$ folgt auch $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$. Da also f keine weiteren Extremalstellen besitzt und für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ bestimmt gegen ∞ divergiert, folgt, dass $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$ mit $f(x_3) = f(x_2) = \exp\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1\right) = \exp\left(-\frac{9}{8}\right)$ wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion (III 3.21) auch globale Minimalstellen von f sind.

b) Nach Satz 1.10 und wie zuvor erwähnt ist $\ln x$ auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Da also g eine Verkettung von Polynomen und dem natürlichen Logarithmus ist, ist auch g differenzierbar.

$$g' = \frac{dg}{dx} = [3\ln(3x^2+1)]' = 3[\ln(3x^2+1)]' = 3\left(\frac{[3x^2+1]'}{3x^2+1}\right) = \frac{18x}{3x^2+1}$$

Nach Skript ist jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich differnzierbar, also g''.

$$g'' = \frac{dg'}{dx} = \left[\frac{18x}{3x^2+1}\right]' = \frac{[18x]'(3x^2+1) - (18x)[3x^2+1]'}{(3x^2+1)^2} = \frac{54x^2 - 108x + 18}{(3x^2+1)^2}$$

Wir setzen also $g' = 0$:

$$g' = 0 \implies \frac{18x}{3x^2+1} = 0 \implies 18x = 0 \implies x_1 = 0$$

Es ist $0 \in D_g = [-1, 1]$, also überprüfen wir durch Einsetzen in g'':

$$g''(0) = \frac{18}{1} = 18 > 0$$

Damit ist nach (VII 2.9) $x_1 = 0$ eine lokale strikte Minimalstelle von g. Wir überprüfen die Randwerte und den Wert von $g(0)$:

$$g(0) = 3\ln(1) = 0$$

$$g(-1) = 3\ln(4) > 0 \qquad \text{und} \qquad g(1) = 3\ln(4) > 0$$

Da g keine weitern Extremalstellen besitzt, folgt, dass $x_1 = 0$ mit $g(x_1) = 0$ auch das globale Minimum von g darstellt.

Aufgabe 4