Gruppe $\boxed{\mathbf{9}}$ Phil Pützstück, 377247
Lineare Algebra für Informatiker

Hausaufgabe 2

Aufgabe 10

a)

Sei $Y := \{(1,x) \mid x \in [0,1]_{\mathbb{Q}}\}$. Da $[0,1]_{\mathbb{Q}}$ nicht endlich ist, ist Y dies ebenfalls nicht.
Damit ist Y eine undendliche Teilmenge von $\mathbb{Q}^2$. Ferner seien nun $v, v' \in Y$ mit $v \neq v'$ gegeben.
Dann sind $v = (1,x), v' = (1,x')$ für $x, x' \in Q$. Da $v \neq v'$ folgt sofort $x \neq x'$.
Seien nun $a, b \in Q$. Dann folgt

$$av + bv' = 0 \iff (a, ax) = (b, bx') \iff a = b \wedge a(x - x') = 0 \iff a = b = 0$$

Folglich sind v, v' linear unabhängig.

b)

Wir führen Induktion: Sei $n = 1$. Da $f_1(1) = 1 \neq 0$ folgt auch $f_1 \neq 0$, also (f_1) l.u.
Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $(f_i)_{i \in [1,n]}$ ist l.u, gegeben. Dann gilt nach Definition, dass

$$\forall a \in \mathbb{Q}^n : (\sum_1^n a_i f_i)(n+1) = \sum_1^n a_i f_i(n+1) = \sum_1^n a_i 0 = 0$$

Folglich kann es keine Linearkombination f von $(f_i)_{i \in [1,n]}$ geben, sodass $f(n+1) = n+1$. Da aber $f_{n+1}(n+1) = n+1 \neq 0$ ist also auch $(f_i)_{i \in [1,n+1]}$ linear unabhängig.

Nach dem Prinzip der vollst. Induktion folgt also, dass $(f_i)_{i \in [1,n]}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ l.u. ist. Dies ist nach 1.72 äquivalent dazu, dass $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ l.u. ist.

Aufgabe 11

Trivial. (Dies sei dem Leser zur Übung überlassen)