Gruppe $\boxed{\mathbf{11}}$ Tobias Riedel, 379133
Analysis für Informatiker Phil Pützstück, 377247

Hausaufgabe 8

Aufgabe 1

a)

Für w_1 gilt:

$$w_1 = \frac{2}{1-3i} = (2+0i) \cdot (1-3i)^{-1} = (2+0i) \cdot \left(\frac{1+3i}{1^2+3^2}\right) = (2+0i) \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Es folgt

$$\mathrm{Re}(w_1) = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(w_1) = \frac{3}{5}$$

Für w_2 gilt:

$$w_2 = \frac{1}{i} = (1+0i) \cdot (0+i)^{-1} = (1+0i) \cdot \left(\frac{0-i}{1}\right) = 0 - i$$

Es folgt

$$\mathrm{Re}(w_2) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(w_2) = -1$$

Für w_3 gilt:

$$w_3 = \frac{1+it}{1-it}$$

Es folgt

$$\mathrm{Re}(w_3) = \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(w_3) =$$

b) Nach Satz **???** lässt sich der Betrag $|z|$ wie folgt berechnen:

$$\left|\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = \frac{|(3+4i)(-1+2i)|}{|(-1-i)(3-i)|} = \frac{|3+4i| \cdot |-1+2i|}{|-1-i| \cdot |3-i|} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{2}$$

c) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $z = x + iy$. Es gilt

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \frac{|z+i|}{|z-i|} = \frac{|(x+iy)+i|}{|(x+iy)-i|} = \frac{|x+i(y+1)|}{|x+i(y-1)|} = \sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}} \leq 1$$

Die lässt sich weiter umformen:

$$\sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}} \leq 1 \iff \frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2} \leq 1^2 = 1 \iff x^2+(y+1)^2 \leq x^2+(y-1)^2$$

$$\iff (y^2+2y+1)-(y^2-2y+1) \leq 0 \iff 4y \leq 0 \iff y \leq 0$$

Also ist die Ungleichung für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) \leq 0$ erfüllt.

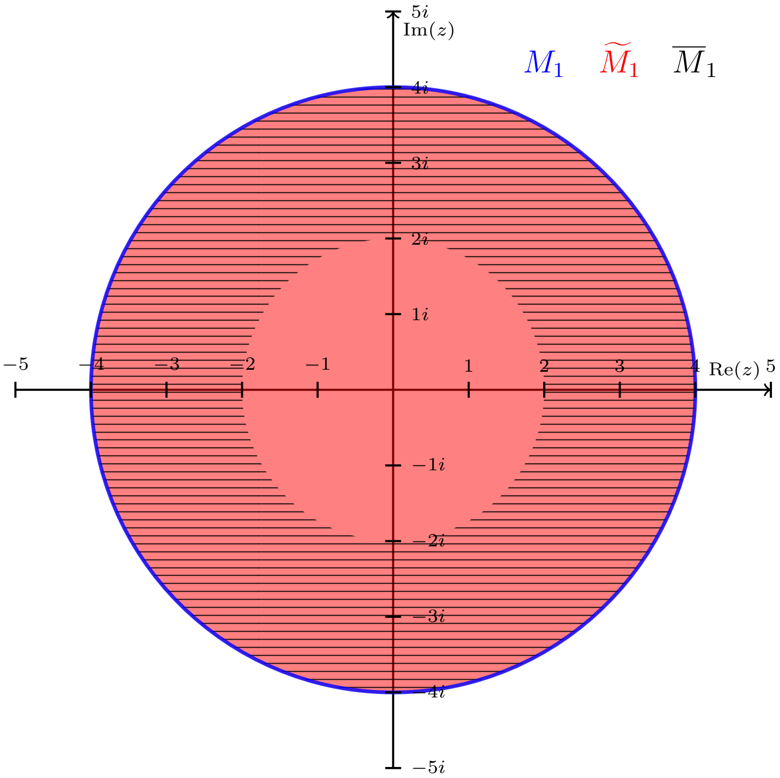
d) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $z = x + iy$. Es gilt

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+(x+iy)}{1-(x+iy)} =$$

Aufgabe 2

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $z = x + iy$.

a) Durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ folgt



b)

$$2\,\mathrm{Re}(z) + 5\,\mathrm{Im}(y) = 1 \iff 2x + 5y = 1 \iff y = \frac{1-2x}{5}$$

c)

$$\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) - 1 > 2 \iff x + y > 3 \iff y > 3 - x$$

d)

$$(\mathrm{Re}(z) \geq 0) \wedge (|z| \leq 9) \wedge (\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z) \iff (0 \leq x \leq y) \wedge \left(\sqrt{x^2+y^2} < 9\right)$$