# Ungleichungen von Kraft & McMillan

## Proseminar Informationstheorie

Phil Pützstück

November 18, 2018

# Motivation

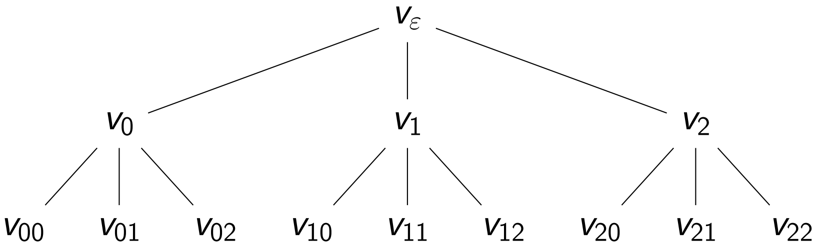
- Gesehen, dass eindeutig bzw. sofort dekodierbare Codes sehr nützlich sind.
- Wann bzw. unter welchen Bedingungen existieren diese?
- Insbesondere: Wortlängen und Größe des Code-Alphabets
- Vorgestellte Ungleichungen geben untere Schranken für diese

# Überblick

- Zusammenhang Codes und Bäume
- Ungleichung von Kraft
- Ungleichung von McMillan
- Intepretationen / Ausblick

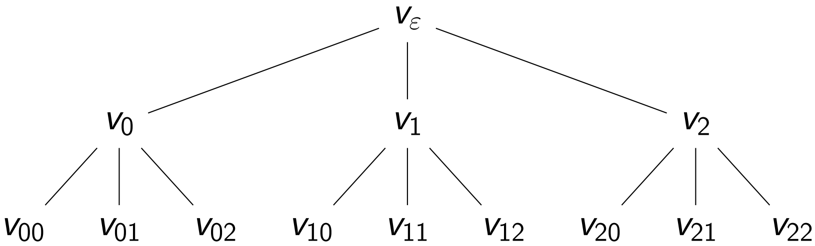
# Code als Baum: $\mathcal{T}_r^h$

Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.



# Code als Baum: $\mathcal{T}_r^h$

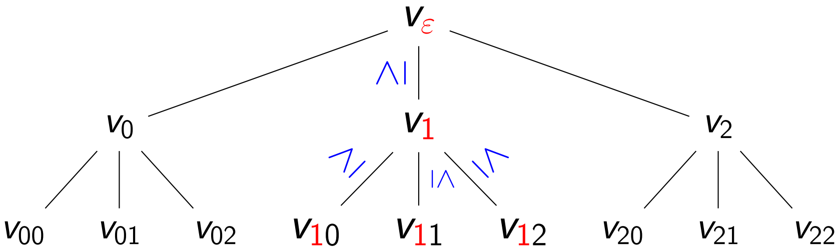
Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.




- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $height(v_w) = |w|$.

## Code als Baum: $\mathcal{T}_r^h$

Höhe $h \in \mathbb{N}$, Verzweigungsgrad $r \in \mathbb{N}$.




- Für $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $\mathit{height}(v_w) = |w|$.
- Für $v_w, v_{w'} \in V(\mathcal{T}_r^h)$ gilt $v_w \leq v_{w'} \iff w \sqsubseteq w'$.

# Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein $r$-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen $\ell$ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

# Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein $r$-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen $\ell$ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$

# Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein $r$-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen $\ell$ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen $0 < \ell_1 \leq \ell_2 \leq \cdots \leq \ell_q$ aufsteigend sortiert

# Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein $r$-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen $\ell$ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$$

Annahmen:

- Anzahl Code-Wörter $q > 1$
- Wortlängen $0 < \ell_1 \leq \ell_2 \leq \cdots \leq \ell_q$ aufsteigend sortiert
- Code-Alphabet von $\mathcal{C}$ ist $[0, r-1]$

# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \implies \mathcal{C}$ existiert".

# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\iff \mathcal{C}$ Präfixcode.

# Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Longrightarrow$ "

Richtung " $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

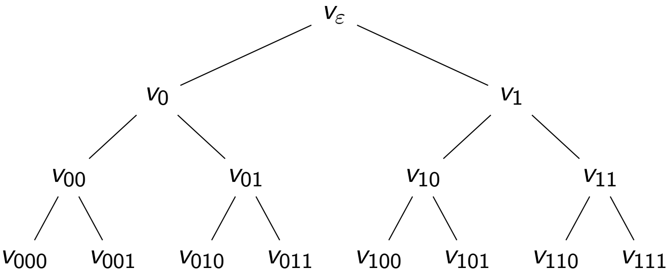
Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$.

# Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Longrightarrow$ "

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2{}^3$

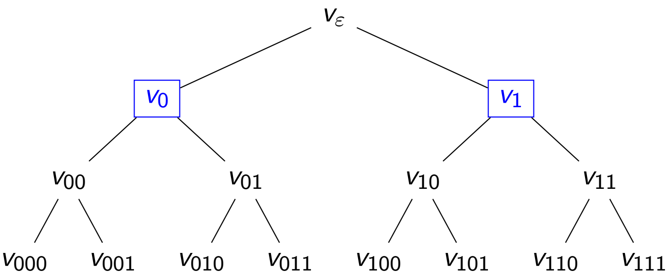


# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$.  Betrachte $\mathcal{T}_2^3$



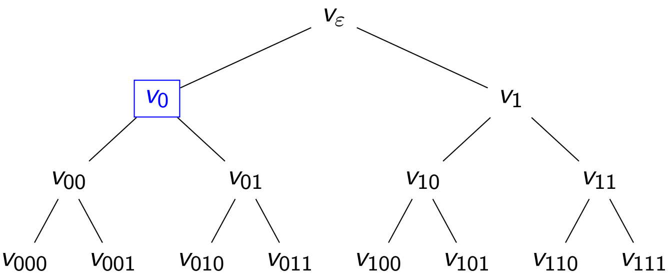
# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$

$w_1 = 0$,



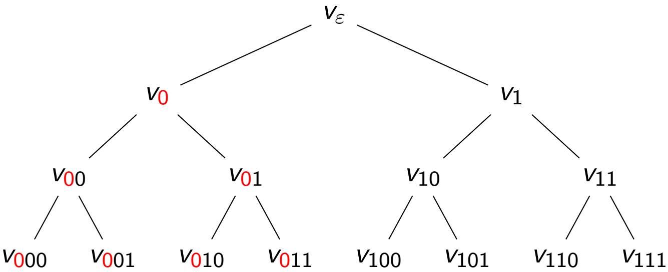
# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3$

$w_1 = 0$,



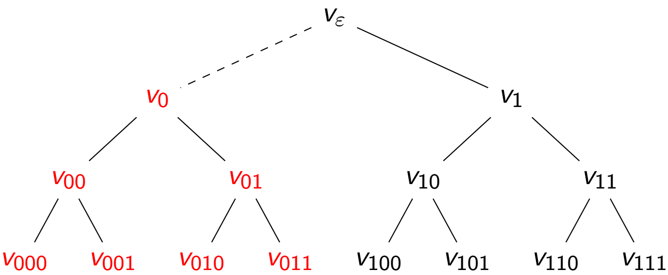
# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$

$w_1 = 0$,

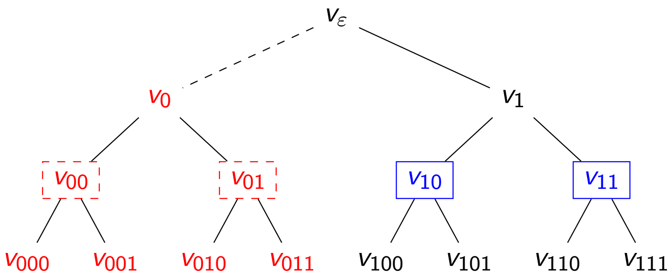


# Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Longrightarrow$ "

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$
$w_1 = 0$,



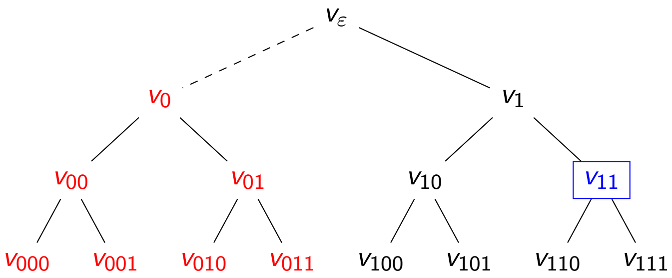
# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$

$w_1 = 0$, $w_2 = 11$,



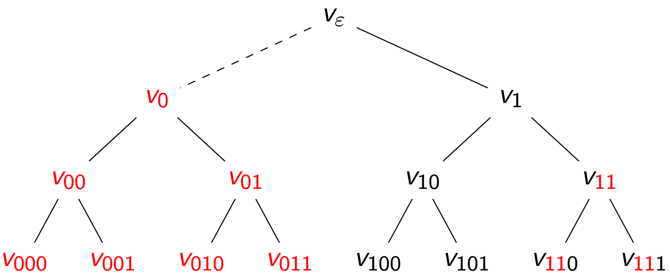
# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0$

$w_1 = 0$, $w_2 = 11$,

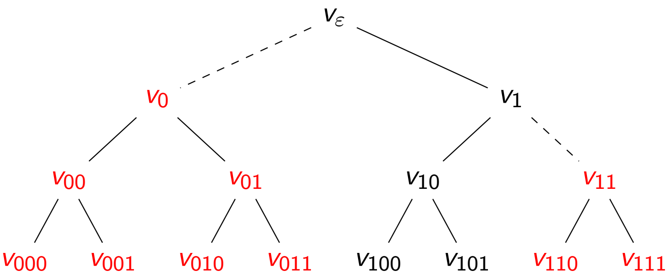


# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$
$w_1 = 0$, $w_2 = 11$,

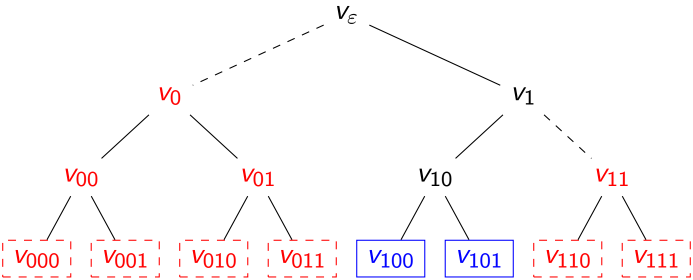


# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$
$w_1 = 0,\ \ w_2 = 11,$



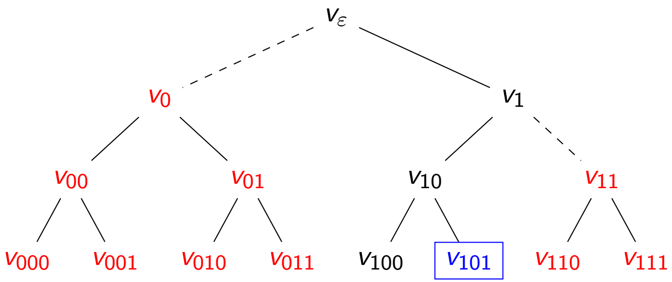
# Ungleichung von Kraft: Beweisidee "$\Longrightarrow$"

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$. Betrachte $(\mathcal{T}_2^3 \setminus v_0) \setminus v_{11}$

$w_1 = 0$, $w_2 = 11$, $w_3 = 101$



# Ungleichung von Kraft: Beweisidee " $\Longrightarrow$ "

Richtung "$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ existiert".

Bekannt: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Präfixcode.

Beispiel: $q = 3, r = 2, \ell = (1, 2, 3)$.
$w_1 = 0,\;\; w_2 = 11,\; w_3 = 101$

- $q = 3$ Wörter über Alphabet $[0, r-1] = [0, 1] = \{0, 1\}$.
- Wortlängen $|w_1| = \ell_1, |w_2| = \ell_2, |w_3| = \ell_3$ eingehalten.
- Präfixcode $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\} = \{0, 11, 101\}$ konstruiert.

# Ungleichung von Kraft "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- zz: Auswahl von $w_i$ aus Baum möglich.
- Via endlicher Induktion über $i$.
- $h := \ell_q$ (max. Wortlänge)

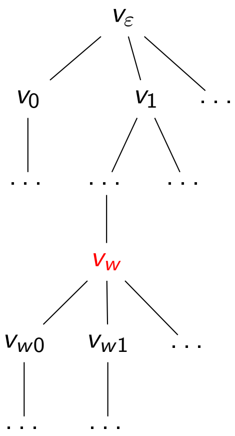
# Ungleichung von Kraft "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- zz: Auswahl von $w_i$ aus Baum möglich.
- Via endlicher Induktion über $i$.
- $h := \ell_q$ (max. Wortlänge)

$i = 1$:

- Wähle $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h)$, $height(v_w) = \ell_1$

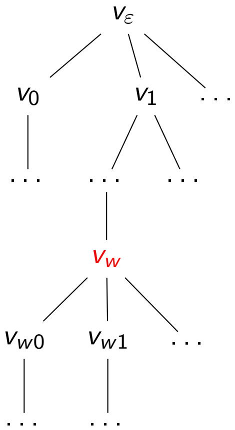
$\mathcal{T}_r^h$:



# Ungleichung von Kraft "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- zz: Auswahl von $w_i$ aus Baum möglich.
- Via endlicher Induktion über $i$.
- $h := \ell_q$ (max. Wortlänge)

$\mathcal{T}_r^h$:




$i = 1$:

- Wähle $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h), \mathit{height}(v_w) = \ell_1$
- Setze $w_1 := w$, dann $|w_1| = \ell_1$

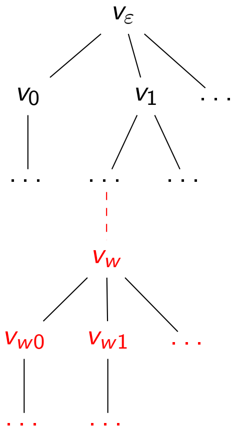
# Ungleichung von Kraft "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- zz: Auswahl von $w_i$ aus Baum möglich.
- Via endlicher Induktion über $i$.
- $h := \ell_q$ (max. Wortlänge)

$i = 1$:

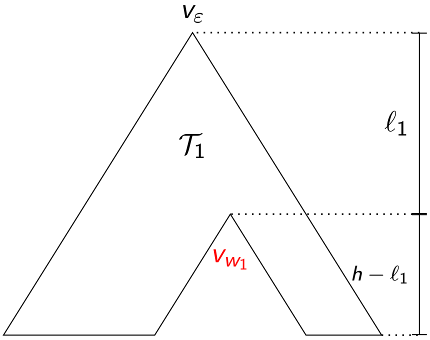
- Wähle $v_w \in V(\mathcal{T}_r^h), height(v_w) = \ell_1$
- Setze $w_1 := w$, dann $|w_1| = \ell_1$
- Entferne Nachfolger; $\mathcal{T} := \mathcal{T}_r^h \setminus v_w$

$\mathcal{T}_r^h$:



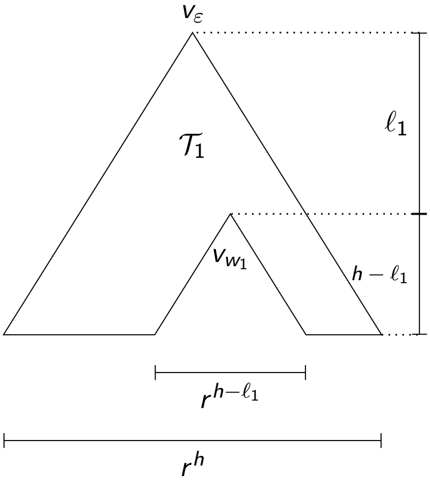
# Ungleichung von Kraft "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- Teilbaum der Höhe $\ell_1$ entfernt



# Ungleichung von Kraft "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- Teilbaum der Höhe $\ell_1$ entfernt
- $\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter

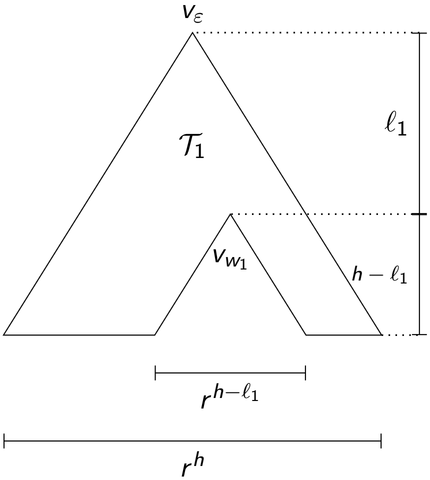


# Ungleichung von Kraft "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- Teilbaum der Höhe $\ell_1$ entfernt
- $\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$



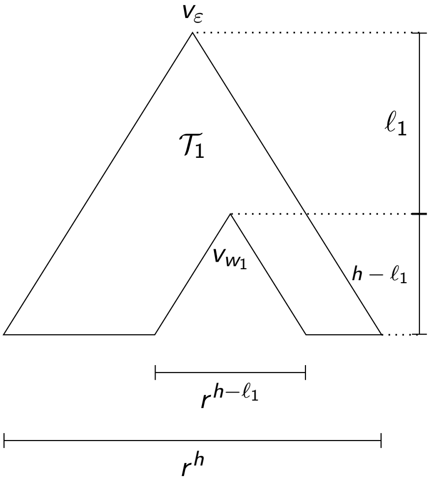
# Ungleichung von Kraft "$\Longrightarrow$": Induktionsanfang

- Teilbaum der Höhe $\ell_1$ entfernt
- $\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$

$$> r^h\left(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$



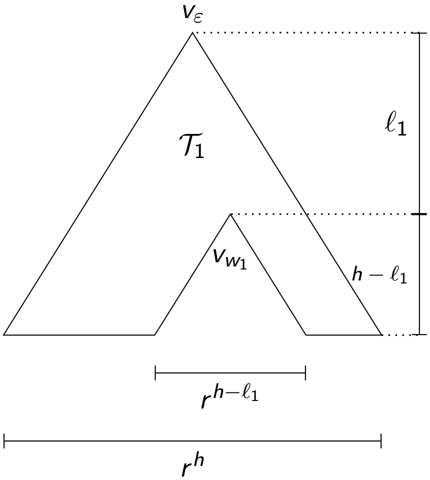
# Ungleichung von Kraft " $\Longrightarrow$ ": Induktionsanfang

- Teilbaum der Höhe $\ell_1$ entfernt
- $\mathcal{T}_1$ noch $r^h - r^{h-\ell_1}$ Blätter

Weiter gilt:

$$r^h - r^{h-\ell_1} = r^h \left(1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{r^{\ell_k}}\right)$$

$$> r^h \left(1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}}_{\leq 1}\right) > 0$$



## Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Vorraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- $|leaves(\mathcal{T}_j)| > 0$

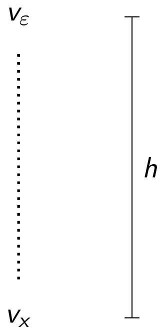
# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Vorraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- $|leaves(\mathcal{T}_j)| > 0$

Dann:

- Es gibt Blatt $v_x \in V(\mathcal{T}_i)$.
- $\mathcal{T}_i$ als Baum zusammenhängend



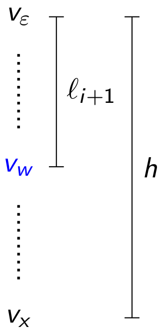
# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Vorraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- $|leaves(\mathcal{T}_j)| > 0$

Dann:

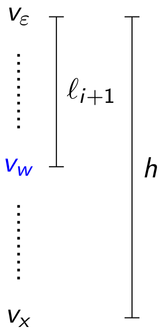
- Es gibt Blatt $v_x \in V(\mathcal{T}_i)$.
- $\mathcal{T}_i$ als Baum zusammenhängend
- $\exists v_w \in V(\mathcal{T}_i) : height(v_w) = \ell_{i+1} \leq h$



# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Vorraussetzungen für $i \in [1, q-1]$:

- $\forall j \in [1, i] : |w_j| = \ell_j$
- $\{w_j \mid j \in [1, i]\}$ Präfix-Code
- $|leaves(\mathcal{T}_j)| > 0$



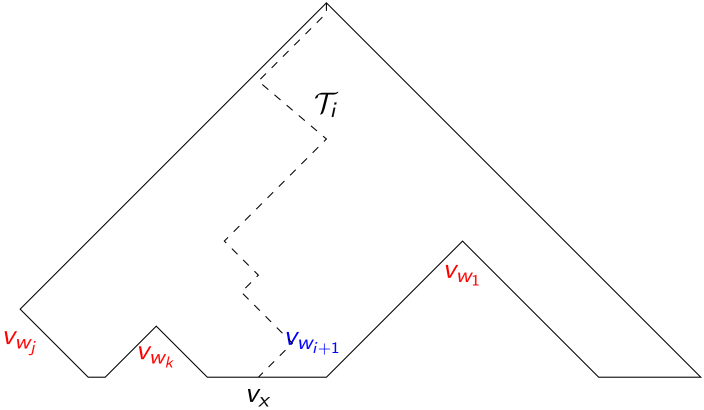

Dann:

- Es gibt Blatt $v_x \in V(\mathcal{T}_i)$.
- $\mathcal{T}_i$ als Baum zusammenhängend
- $\exists v_w \in V(\mathcal{T}_i) : height(v_w) = \ell_{i+1} \leq h$
- Setze $w_{i+1} := w$. Dann $|w_{i+1}| = \ell_{i+1}$

# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Für $j \in [1, i]$:

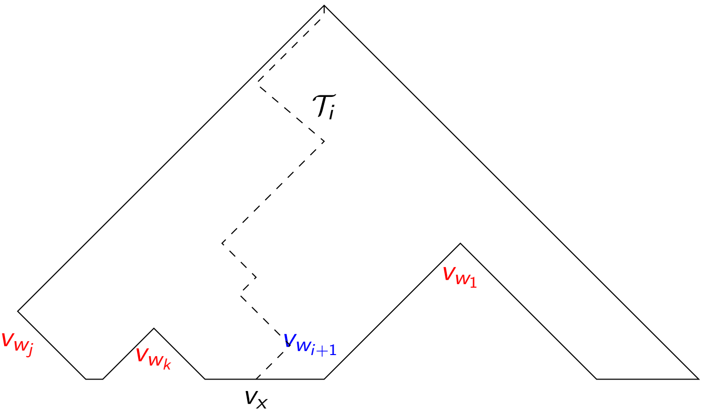
- Knoten "unter" $v_{w_j}$ bereits entfernt



# Ungleichung von Kraft: " $\Longrightarrow$ ": Induktionsschritt

Für $j \in [1, i]$:

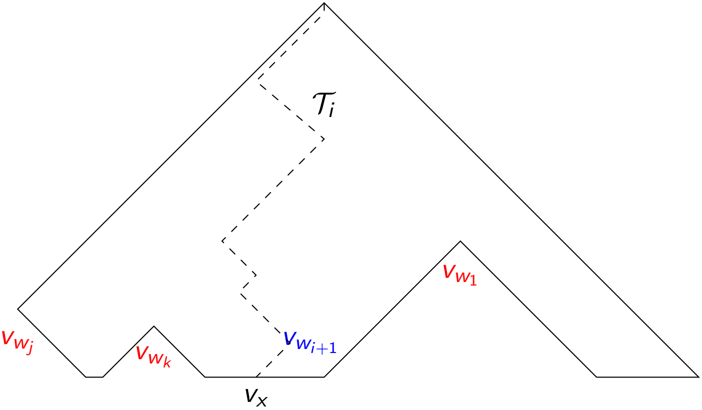
- Knoten "unter" $v_{w_j}$ bereits entfernt
- Damit $v_{w_j} \not\leq v_{w_{i+1}}$, also auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$



# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

Für $j \in [1, i]$:

- Knoten "unter" $v_{w_j}$ bereits entfernt
- Damit $v_{w_j} \not\leq v_{w_{i+1}}$, also auch $w_j \not\sqsubseteq w_{i+1}$
- Ausserdem $w_{i+1} \not\sqsubseteq w_j$ durch $|w_j| = \ell_j \leq \ell_{i+1} = |w_{i+1}|$



# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.

## Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- Falls $i + 1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.

# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- Falls $i + 1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.
- Falls $i + 1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$

# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- Falls $i+1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.
- Falls $i+1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- Dann $|leaves(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k}$$

# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- Falls $i+1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.
- Falls $i+1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- Dann $|leaves(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} \quad > \quad r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-\ell_k}$$

# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- Falls $i + 1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.
- Falls $i + 1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- Dann $|leaves(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} \quad > \quad r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-\ell_k}$$

$$= \quad r^h \Bigg(1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}}_{\leq\ 1}\Bigg) \ \geq \ 0$$

# Ungleichung von Kraft: "$\Longrightarrow$": Induktionsschritt

- Damit $\{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$ wieder Präfix-Code.
- Falls $i + 1 = q$: Setze $\mathcal{C} := \{w_j \mid j \in [1, i+1]\}$.
- Falls $i + 1 < q$: Entferne Nachfolger: $\mathcal{T}_{i+1} := \mathcal{T}_i \setminus v_{w_{i+1}}$
- Dann $|leaves(\mathcal{T}_{i+1})| > 0$, denn:

$$r^h - \sum_{k=1}^{i+1} r^{h-\ell_k} \quad > \quad r^h - \sum_{k=1}^{q} r^{h-\ell_k}$$

$$= \quad r^h \left(1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}}_{\leq 1}\right) \quad \geq \quad 0$$

Vorraussetzungen für I.S. erfüllt, also Induktion vollendet.
Sofort dekodierbares $\mathcal{C}$ für $q, r, l$ konstruierbar. $\square$

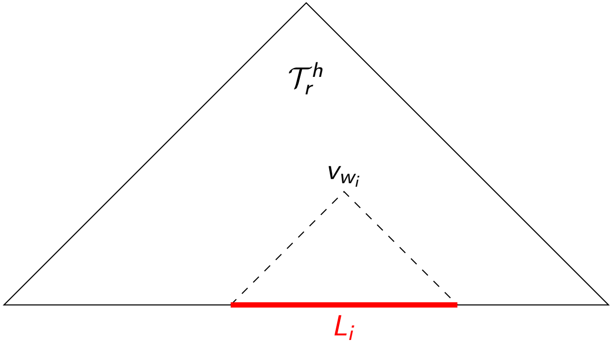
# Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

Zeige: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ Ungleichung gilt für Parameter

# Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "

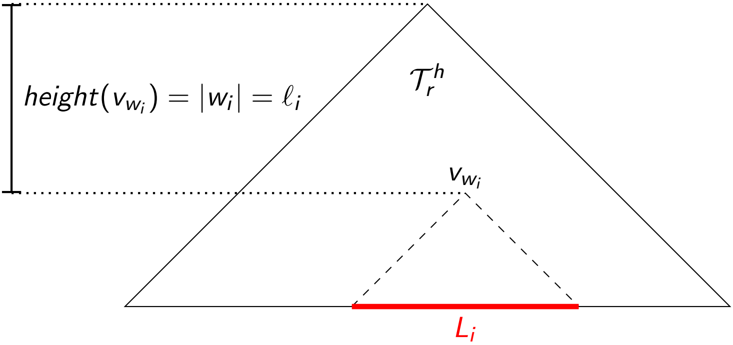
Zeige: $\mathcal{C}$ sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ Ungleichung gilt für Parameter

$$L_i := \{v \in V(\mathcal{T}_r^h) \mid v_{w_i} \leq v \land height(v) = h\}$$

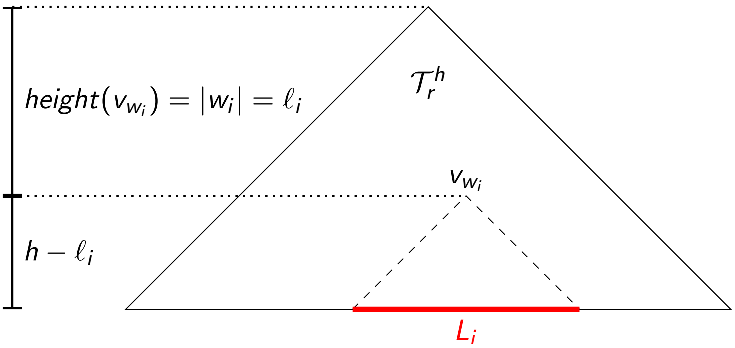



- Für $i, j \in [1, q] : i \neq j \Longrightarrow L_i \cap L_j = \varnothing$

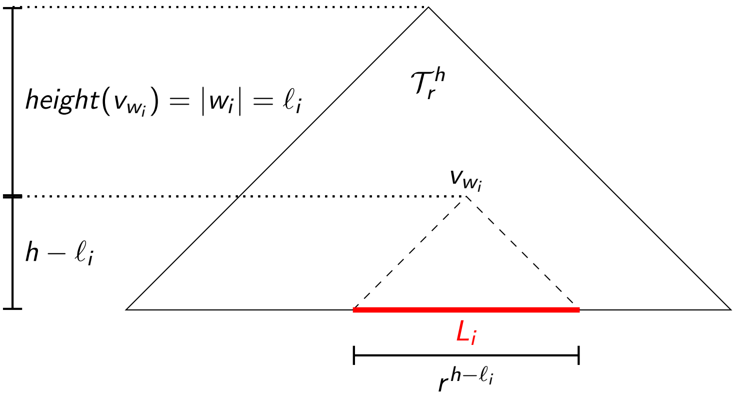
# Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "



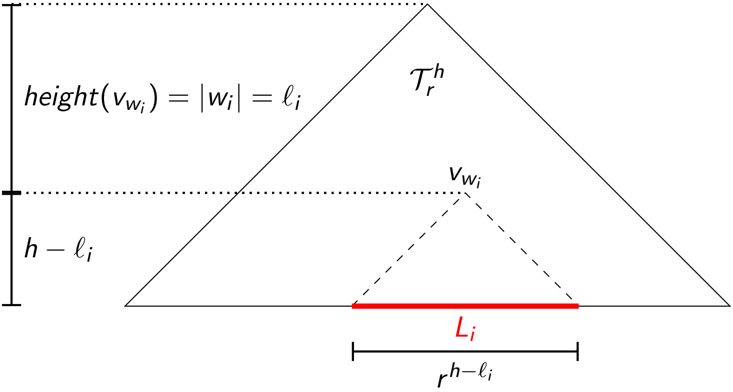
# Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "



# Ungleichung von Kraft: "$\Longleftarrow$"

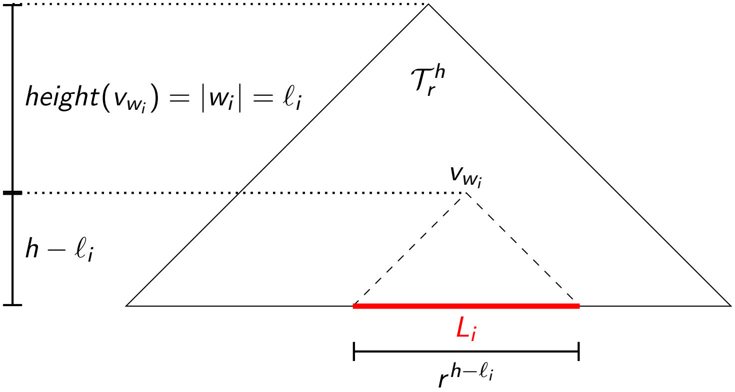


# Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "



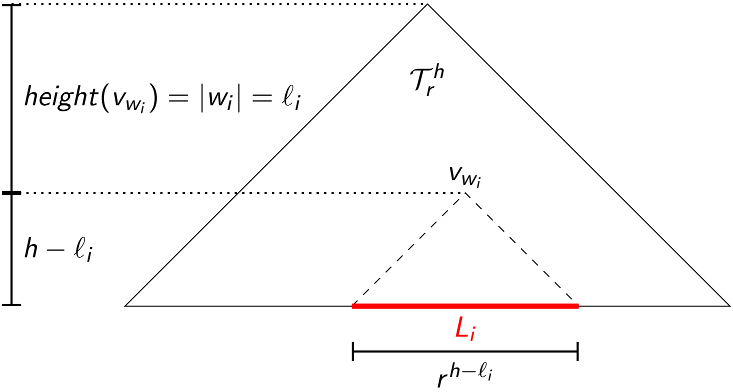

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right|$$

# Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "



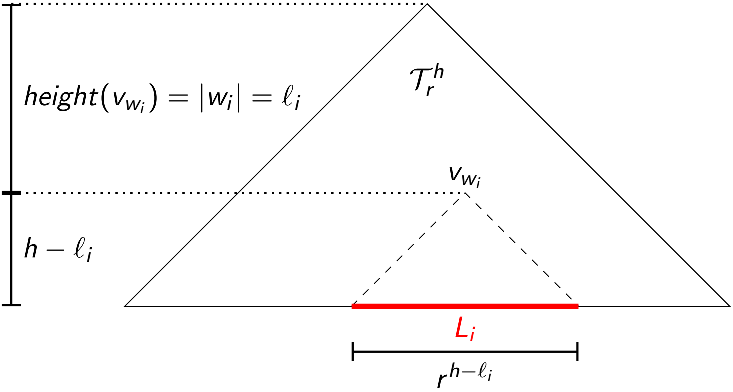

$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i|$$

# Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "




$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-\ell_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}}$$

# Ungleichung von Kraft: " $\Longleftarrow$ "




$$r^h \geq \left| \bigcup_{i \in [1,q]} L_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |L_i| = \sum_{i=1}^{q} r^{h-\ell_i} = r^h \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} \iff \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1$$

# Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein $r$-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen $\ell$ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

- Beweis konstruktiv
- Untere Schranke für Wortlänge, Alphabetgröße

# Ungleichung von Kraft

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein $r$-ärer sofort dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen $\ell$ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{l_k}} \leq 1$$

- Beweis konstruktiv
- Untere Schranke für Wortlänge, Alphabetgröße

- Bekannt: sofort dekodierbar $\Longrightarrow$ eindeutig dekodierbar
- Schwächere Kriterien?

# Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein $r$-ärer eindeutig dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen $\ell$ genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \tag{1}$$

# Ungleichung von McMillan

Seien $q, r \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^q$. Dann existiert ein $r$-ärer eindeutig dekodierbarer Code $\mathcal{C}$ mit Wortlängen $\ell$ genau dann, wenn

$$K := \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1 \tag{1}$$

Richtung "(1) $\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$ existiert" durch Kraft.

# Ungleichung von McMillan: Beweisidee

- Zu zeigen: $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \leq 1$
- Betrachte $K^n$ abhängig von Wortlängen für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- Finde aus Form von $K^n$ konstante obere Schranke
- Dann muss $K \leq 1$, da sonst $K^n$ für geeignetes $n$ größer als jede Konstante

# Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

# Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left( \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n$$

# Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left( \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}}$$

# Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left( \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

# Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left( \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} \ell_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} \ell_k$.

# Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left( \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} \ell_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} \ell_k$.

Dann für jedes $i \in [1, q]^n$ :

$$mn \leq \sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k} \leq Mn$$

## Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Zu zeigen: $K \leq 1$, wobei $K = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$K^n = \left( \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_k}} \right)^n = \sum_{i \in [1,q]^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{\ell_{i_k}}} = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}}$$

Kürzeste Wortlänge $m := \min_{k \in [1,q]} \ell_k$, längste $M := \max_{k \in [1,q]} \ell_k$.

Dann für jedes $i \in [1,q]^n$ :

$$mn \leq \sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k} \leq Mn$$

Wollen schreiben:

$$K^n = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

# Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Ziel: Finde Abschätzung für Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

# Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Ziel: Finde Abschätzung für Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^n \ell_{i_k}} = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

- $N_j$ Anzahl Möglichkeiten: Summiere $n$ Wortlängen zu $j$.

# Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Ziel: Finde Abschätzung für Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

- $N_j$ Anzahl Möglichkeiten: Summiere $n$ Wortlängen zu $j$.
- Äquivalent: Bilde Sequenz der Länge $j$ aus $n$ Codewörtern

# Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Ziel: Finde Abschätzung für Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

- $N_j$ Anzahl Möglichkeiten: Summiere $n$ Wortlängen zu $j$.
- Äquivalent: Bilde Sequenz der Länge $j$ aus $n$ Codewörtern
- $\mathcal{C}$ eindeutig dekodierbar $\Longrightarrow$ Jede Sequenz aus eindeutiger Auswahl $i \in [1, q]^n$

# Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Ziel: Finde Abschätzung für Koeffizient $N_j \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=mn}^{Mn} N_j \cdot r^{-j}$$

- $N_j$ Anzahl Möglichkeiten: Summiere $n$ Wortlängen zu $j$.
- Äquivalent: Bilde Sequenz der Länge $j$ aus $n$ Codewörtern
- $\mathcal{C}$ eindeutig dekodierbar $\Longrightarrow$ Jede Sequenz aus eindeutiger Auswahl $i \in [1, q]^n$
- Maximal $r^j$ Codewörter der Länge $j$ $\Longrightarrow$ $N_j \leq r^j$

# Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=nm}^{nM} N_j r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{N_j}{r^j}$$

# Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=nm}^{nM} N_j r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{N_j}{r^j}$$

$$\leq \quad \sum_{j=nm}^{nM} 1 = (M-m)n + 1$$

# Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

Mit $N_j \leq r^j$ folgt:

$$K^n = \sum_{i \in [1,q]^n} r^{-\sum_{k=1}^{n} \ell_{i_k}} = \sum_{j=nm}^{nM} N_j r^{-j} = \sum_{j=nm}^{nM} \frac{N_j}{r^j}$$

$$\leq \quad \sum_{j=nm}^{nM} 1 = (M-m)n + 1$$

$$\Longrightarrow \frac{K^n}{n} \leq (M-m) + 1$$

# Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$\frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße $r$, Wortlängen $\ell$ fix.
- Damit auch $m, M, K$ fix.

# Ungleichung von McMillan: " $\Longleftarrow$ "

$$\frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße $r$, Wortlängen $\ell$ fix.
- Damit auch $m, M, K$ fix.
- $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

## Ungleichung von McMillan: "$\Longleftarrow$"

$$\frac{K^n}{n} \leq (M - m) + 1$$

- Code $\mathcal{C}$ gegeben; $q = |\mathcal{C}|$, Alphabetgröße $r$, Wortlängen $\ell$ fix.
- Damit auch $m, M, K$ fix.
- $n \in \mathbb{N}$ beliebig; Ungleichung muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
- Nach Analysis bekannt: nur möglich für $K \leq 1$.

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{\ell_i}} = K \leq 1$$

$\square$