Gruppe $\boxed{11}$
Analysis für Informatiker

Tobias Riedel, 379133
Phil Pützstück, 377247
Kevin Holzmann, 371116
Gurvinderjit Singh, 369227

Hausaufgabe 9

Aufgabe 2

a)

Zuerst sollten wir die Gleichung so umformen, dass nur noch ein x vorkommt:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \mid \div a \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && \mid -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && \mid + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && \mid \text{quad. Ergänzung} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Nun lässt sich die Gleichung nach x lösen:

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && \mid\sqrt{\ } \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} && \mid -\frac{b}{2a} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}
\end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \cdot \frac{2a}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \cdot (2a)^2 - \frac{c}{a} \cdot (2a)^2}}{2a}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Damit wären wir bei der allbekannten Mitternachtsformel. Die sogenannte Diskriminante, $b^2 - 4ac$, welche unter der Wurzel steht, bestimmt die Anzahl der Lösungen (Nullstellen). Gilt $b^2 - 4ac < 0$, so gibt es keine Lösungen (Nullstellen) in $\mathbb{R}$, gilt $b^2 - 4ac = 0$ so gibt es genau eine Lösung (Nullstelle) in $\mathbb{R}$, da stets $\pm\sqrt{0} = 0$ gilt. Ist $b^2 - 4ac > 0$ so gibt es genau 2 Lösungen (Nullstellen) in $\mathbb{R}$.

b)

Hier lässt sich einfach $z = x^2$ substituieren. Dann lassen sich die Nullstellen dieses Polynoms in z wie in a) beschrieben finden:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \implies az^2 + bz + c = 0 \implies z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dann kann man wieder resubstituieren um die Nullstellen in des ursprünglichen Polynoms in x zu erhalten. Es gilt $x = \pm\sqrt{z}$. Seien z_1, z_2 die möglichen Nullstellen des Polynoms in z. Es gilt nun

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} \quad \text{und} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$$

Insofern das Polynom in x genau 4 Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt. Insgesamt lässt sich dies auch alles in einem schreiben:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

c)

Wählt man nun $a, b, c \in \mathbb{C}$ und sucht nach komplexen Nullstellen, so wird man nach dem Fundamentalsatz der Algebra (IV 1.7) auch stets mindestens eine finden. Dies liegt grundlegend daran, dass die Gleichung $x = \sqrt{z}$ für $x, z \in \mathbb{C}$ stets in $\mathbb{C}$ lösbar ist, auch wenn $z \in \mathbb{R}$ mit $z < 0$, da $\sqrt{-1} = i$ gilt, wo i die imaginäre Einheit von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 3

a)

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $0 < \delta < \varepsilon$. Da stets $x^2 > 0$ sowie $|x| > 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (II 2.8 a4 und II 2.12) gilt, folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ |x - 0| < \delta\colon |f(x) - 0| = \left|\frac{x^2}{|x|}\right| = \frac{x^2}{|x|} < \frac{\delta^2}{\delta} = \delta < \varepsilon$$

Somit gilt $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

b)

Aufgabe 4

Wir benutzen im folgenden, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt, insofern f an der Stelle x_0 definiert ist. Dies ist zu interpretieren als eine unendlich nahe Annäherung von x an x_0, was in diesen Fällen eben äquivalent zum Einsetzen von x_0 in f ist.

a)

Da f im Punkt -1 definiert ist, lässt sich $x \to -1$ durch Einsetzen von -1 unendlich nahe approximieren:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{3x-1}{2x-2} = \frac{3(-1)-1}{2(-1)-2} = \frac{-4}{-4} = 1$$

b)

Die gegebene Funktion lässt sich wie folgt umformen:

$$g(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} = \frac{1}{2-x} - \frac{12}{(2-x)(x^2+2x+4)} = \frac{x^2+2x+4-12}{(2-x)(x^2+2x+4)}$$

$$= \frac{(x-2)(x+4)}{-(x-2)(x^2+2x+4)} = -\frac{x+4}{x^2+2x+4}$$

Nun lässt sich 2 einsetzen, um 2 mit x unendlich nahe zu approximieren:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} = \lim_{x \to 2} -\frac{x+4}{x^2+2x+4} = -\frac{2+4}{2^2+2 \cdot 2+4} = -\frac{1}{2}$$

c)

Die gegebene Funktion lässt sich wieder umformen, sodass der Grenzwert wie in den vorherigen Aufgabenteilen durch Einsetzen bestimmt werden kann. Mit Polynomdivision folgt:

$$h(x) = \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$$

Dieses Polynom ist für $x = 1$ definiert. Somit gilt:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = \lim_{x \to 1} 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$$

$$= 2(1)^3 - 4(1)^2 - 3(1) - 3 = -8$$