

# 《算法设计与分析》

## (2024 年秋季学期)

### 第一次作业

作业提交截止时间：2024 年 10 月 7 日 23:55

- 1 请给出  $T(n)$  尽可能紧凑的渐进上界并予以说明 (每小题 3 分, 共 21 分)

1.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n - 1) + n \quad if \quad n > 1$$

2.

$$T(1) = 1, T(2) = 1$$

$$T(n) = T(n - 2) + 1 \quad if \quad n > 2$$

3.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T(n/2) + n \quad if \quad n > 1$$

4.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 8T(n/2) + n^3 \quad if \quad n > 1$$

5.

$$T(1) = 1, T(2) = 1$$

$$T(n) = 2T(n/3) + n^2 \quad if \quad n > 2$$

6.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + \log n \quad if \quad n > 1$$

7.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n - 1) + 2^n \quad if \quad n > 1$$

## 2 游戏获奖问题 (19 分)

在一场射击比赛中，有  $n$  名选手参加比赛，每名选手的得分都不同，记为  $s[1 \dots n]$ ，其中第  $i$  名选手的得分为  $s[i]$ ，且对于任意的  $i \neq j$  有  $s[i] \neq s[j]$ 。按照比赛规则，分数排名为前  $\lfloor n/3 \rfloor$  的选手可以获得与其得分相等的奖金（包括第  $\lfloor n/3 \rfloor$  名）。

例如，当有 6 名选手参加比赛，得分为  $s = [100, 50, 90, 60, 65, 80]$  时，排名位于前  $\lfloor 6/3 \rfloor = 2$  的选手得分为 100, 90，则主办方应该发放奖金 190 元。

请你设计一个算法，计算这次比赛主办方一共要发放多少奖金。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

## 3 奇数因子和问题 (20 分)

定义  $od(i)$  为整数  $i$  的最大奇数因子，例如  $od(3) = 3$ ,  $od(14) = 7$ 。

请你设计一个高效算法，计算一个整数区间  $[A, B]$  内所有数的最大奇数因子和，即  $\sum_{i \in [A, B]} od(i)$ 。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

例如，区间  $[3, 9]$  的计算结果为  $3 + 1 + 5 + 3 + 7 + 1 + 9 = 29$ 。

## 4 施工点对计数问题 (20 分)

在一个城市的修建工程中，有  $n$  个施工点，其中  $costs[i]$  表示第  $i$  个施工点的成本。

为完成任务，工程师们需要选择两个不同的施工点进行联合施工，联合施工的成本为每个施工点的成本加和，并且需要保证联合施工的总成本不能超过预算上限。形式化地说：需要计算所有满足预算限制  $l$  的施工点对  $(i, j)$  的数量，其中  $1 \leq i < j \leq n$  且  $costs[i] + costs[j] \leq l$ 。

请你设计并实现一个算法来解决该问题，描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

## 5 最近村庄距离问题 (20 分)

在一个广阔的平原上，有  $n$  个村庄。每个村庄  $i$  都有一个独特的位置，记为  $(x_i, y_i)$ ，表示在平面上横纵坐标的位置。现在，政府打算优先在两个距离最接近的村庄之间修建一条公路，以便加强它们之间的交通联系，其中村庄之间的距离定义为欧几里得距离，即对于两个村庄  $A(x_1, y_1)$  和  $B(x_2, y_2)$ ，它们之间的距离为： $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

请你设计一个高效算法，计算在平原上距离最近的两个村庄之间的距离。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。