

《算法设计与分析》

(2024 年秋季学期)

第一次作业

作业提交截止时间：2024 年 10 月 7 日 23 : 55

1 请给出 $T(n)$ 尽可能紧凑的渐进上界并予以说明 (每小题 3 分, 共 21 分)

1.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n-1) + n \quad \text{if } n > 1$$

2.

$$T(1) = 1, T(2) = 1$$

$$T(n) = T(n-2) + 1 \quad \text{if } n > 2$$

3.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T(n/2) + n \quad \text{if } n > 1$$

4.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 8T(n/2) + n^3 \quad \text{if } n > 1$$

5.

$$T(1) = 1, T(2) = 1$$

$$T(n) = 2T(n/3) + n^2 \quad \text{if } n > 2$$

6.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + \log n \quad \text{if } n > 1$$

7.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n-1) + 2^n \quad \text{if } n > 1$$

2 游戏获奖问题 (19 分)

在一场射击比赛中，有 n 名选手参加比赛，每名选手的得分都不同，记为 $s[1..n]$ ，其中第 i 名选手的得分为 $s[i]$ ，且对于任意的 $i \neq j$ 有 $s[i] \neq s[j]$ 。按照比赛规则，分数排名为前 $\lfloor n/3 \rfloor$ 的选手可以获得与其得分相等的奖金（包括第 $\lfloor n/3 \rfloor$ 名）。

例如，当有 6 名选手参加比赛，得分为 $s = [100, 50, 90, 60, 65, 80]$ 时，排名位于前 $\lfloor 6/3 \rfloor = 2$ 的选手得分为 100, 90，则主办方应该发放奖金 190 元。

请你设计一个算法，计算这次比赛主办方一共要发放多少奖金。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

3 奇数因子和问题 (20 分)

定义 $od(i)$ 为整数 i 的最大奇数因子，例如 $od(3) = 3$ ， $od(14) = 7$ 。

请你设计一个高效算法，计算一个整数区间 $[A, B]$ 内所有数的最大奇数因子和，即 $\sum_{i \in [A, B]} od(i)$ 。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

例如，区间 $[3, 9]$ 的计算结果为 $3 + 1 + 5 + 3 + 7 + 1 + 9 = 29$ 。

4 施工点对计数问题 (20 分)

在一个城市的修建工程中，有 n 个施工点，其中 $costs[i]$ 表示第 i 个施工点的成本。

为完成任务，工程师们需要选择两个不同的施工点进行联合施工，联合施工的成本为每个施工点的成本加和，并且需要保证联合施工的总成本不能超过预算上限。形式化地说：需要计算所有满足预算限制 l 的施工点对 (i, j) 的数量，其中 $1 \leq i < j \leq n$ 且 $costs[i] + costs[j] \leq l$ 。

请你设计并实现一个算法来解决该问题，描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

5 最近村庄距离问题 (20 分)

在一个广阔的平原上，有 n 个村庄。每个村庄 i 都有一个独特的位置，记为 (x_i, y_i) ，表示在平面上横纵坐标的位置。现在，政府打算优先在两个距离最接近的村庄之间修建一条公路，以便加强它们之间的交通联系，其中村庄之间的距离定义为欧几里得距离，即对于两个村庄 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ ，它们之间的距离为： $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

请你设计一个高效算法，计算在平原上距离最近的两个村庄之间的距离。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。