

《算法设计与分析》

(2024 年秋季学期)

第二次作业

作业提交截止时间：2024 年 11 月 4 日 23 : 55

(请注意，如无特殊说明，题面中所有字符串、序列、数组的下标默认从 1 开始。)

1 不完美字符串 (20 分)

对于一个长度为 n 的仅由 0 和 1 构成的字符串 s ，其不完美度定义为所有相邻字符对中互不相同的字符对数量的和。比如，长度为 4 的字符串“0010”的不完美度为 2，这是由 01 和 10 两个相邻数对贡献得到的。形式化地，字符串 s 的不完美度如下式：

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n-1} [s_i \neq s_{i+1}]$$

([] 运算的结果取决于其中布尔表达式的真值。若为假，其值为 0，若为真，其值为 1)

现给定一个长度为 n 的字符串 s ，每一位仅由 0、1 和 ? 组成。你需要将其中的每一个 ? 替换成 0 或者 1，且最小化字符串 s 的不完美度 $f(s)$ 。

例如，给定的字符串为“?1?0”，一种使不完美度最小的替换方案为“1110”，其不完美度为 1，可以证明，没有其他替换方案，

请使用动态规划算法求解最小的不完美度，并给出一个替换方案。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

2 鲜花组合问题 (20 分)

花店共有 n 不同颜色的花，其中第 i 种库存有 a_i 枝，现要从中选出 m 枝花组成一束鲜花。

请设计算法计算有多少种组合一束花的方案，请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。(两种方案不同当且仅当存在一个花的种类 i ，两种方案中第 i 种花的数量不同)

3 最长公共上升子序列 (20 分)

对两个序列 A 和 B ，序列 s 为 A 和 B 的公共上升子序列，当且仅当 s 是 A 和 B 的公共子序列，且 s 是上升子序列 ($s_i < s_{i+1}, \forall 1 \leq i < |s|$)。

对两个序列 A 和 B ，若某个序列 s 是 A 和 B 的公共上升子序列，且对于任意的 A 和 B 的公共上升子序列 t ，都有 $|t| \leq |s|$ ，那么 s 称为 A 和 B 的最长公共上升子序列。

例如，给定两个序列 $\langle 2, 3, 1, 6, 5, 4, 6 \rangle$ 和 $\langle 1, 3, 5, 6 \rangle$ ，其一个最长公共上升子序列为 $\langle 3, 5, 6 \rangle$ 。

给定两个长度为 n 的序列 A 和 B 。请设计一个动态规划算法，求它们的最长公共上升子序列的长度。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

4 叠塔问题 (20 分)

给定 n 块积木，编号为 1 到 n 。第 i 块积木的重量为 w_i (w_i 为整数)，硬度为 s_i ，价值为 v_i 。

现要从中选择部分积木垂直摞成一座塔，要求每块积木满足如下条件：

若第 i 块积木在积木塔中，那么在其之上摆放的所有积木的重量之和不能超过第 i 块积木的硬度。

试设计算法求出满足上述条件的价值和最大的积木塔，输出摆放方案和最大价值和。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

5 最小划分问题 (20 分)

对一个序列 a 上的某两个数 a_i 和 a_j ，若 $i < j$ 且 $a_i \neq a_j$ ，则称 (i, j) 为一个不同数对。一个序列 a 的不同数对数为序列中所有不同数对的个数之和。例如，序列 $\langle 1, 0, 1, 0 \rangle$ 的不同数对有 $(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4)$ 四个。

给你一个长度为 n 的正整数序列 a 和一个正整数 k ，满足序列中的任意一个数 $a_i \in [1, n]$ 。请你将其划分为 k 个子段，最小化每个子段最小不同数对数相加的和。你只需要回答这个最小的和。

例如，给定序列为 $\langle 1, 1, 3, 3, 3, 2, 1 \rangle$ 和参数 $k = 3$ ，则答案为 1，对应的一个划分方法为 $\langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle$ 。

请使用动态规划求解该问题，描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。