

《算法设计与分析》

(2024 年秋季学期)

第四次作业

作业提交截止时间：2024 年 12 月 30 日 23:55

- 1 对下面的每个描述，请判断其是正确或错误，或无法判断正误。对于你判为错误的描述，请说明它为什么是错的。(每小题 5 分，共 20 分)

- 如果一个问题 NP-Hard 问题，那么它一定是 NP 问题。
- $P \cap NPC = \emptyset$ 。
- 若 TSP 问题无法在多项式时间内被解决，则 3-SAT 问题也无法在多项式时间内被解决。
- 对某问题 $X \in NP$ 而言，若可以证明规约式 $3-SAT \leq_p X$ ，则 $X \in NPC$ 。

2 最小点集问题 (20 分)

给定一个包含 n 个点的连通有向图 $G = (V, E)$ ，节点编号为 $1, 2, \dots, n$ ，请设计算法找出最小的点集 $U \subseteq V$ ，使得：对所有点 $v \in V$ ，均存在某点 $u \in U$ ，满足图中存在一条从 u 到 v 的路径。如果这样的点集有多个，求出任意一个即可。此外，请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

例如，给定一个包含 $n = 6$ 个点的图，边集 $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 6), (4, 5), (5, 3)\}$ 。可以发现，在该图中从 1 出发可到达 2, 3, 6，从 4 出发可到达 3, 5, 6。因此，选择点集 $U = \{1, 4\}$ 即可满足条件。

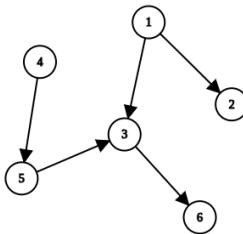


图 1. 问题实例

3 最小环问题 (20 分)

给定一个包含 n 个点的无向图，保证无重边无自环。边权使用矩阵 $w_{i,j} (w_{i,j} > 0)$ 表示。

请设计一个高效的算法，计算图中最小环（最少包含三个节点）的最小边权和，请描述算法的核心思想，给出该算法伪代码并分析时间复杂度。

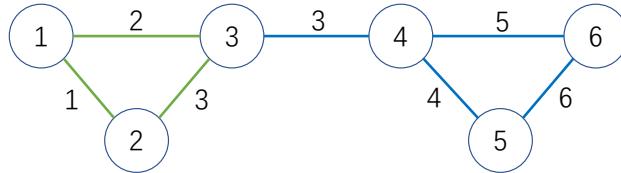


图 2. 无向图最小环

如图 2 所示，节点 1-2-3 组成的环权重为 6，是该图中的最小环，节点 4-5-6 组成的环权重为 15，不能被称为该图中的最小环，节点 3-4 不满足最少包含三个节点的条件，不能被称为该图中的最小环。

4 最短路经过次数问题 (20 分)

给定一张由 n 个点组成的无向带权图 G ，其所有边权都是正数，现指定一个起点 S 和一个终点 T 。对于图中的每一个节点 i ，请求出从 S 到 T 的所有最短路径中，一共有几条最短路径经过了节点 i 。请你设计一个高效算法求解本问题，描述算法的核心思想，并给出算法伪代码和对应的时间复杂度分析。

例如，在图 3 中，包含 5 个结点和 5 条无向带权边，分别是：1 和 4 之间的无向边，边权为 5；1 和 3 之间的无向边，边权为 5；2 和 3 之间的无向边，边权为 4；2 和 4 之间的无向边，边权为 6；4 和 5 之间的无向边，边权为 1。指定 S 为结点 3， T 为结点 5，那么 S 到 T 之间的最短路有两条，分别为 $3 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ 和 $3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ ，则结点 3, 4, 5 被经过 2 次，结点 1, 2 被经过 1 次，对应问题的输出为 $<1, 1, 2, 2, 2>$ 。

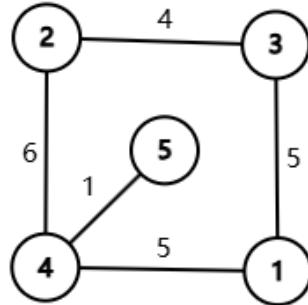


图 3. 问题实例

5 扩张树问题 (20 分)

给定一个包含 n 个点的带权无向树 T ，保证边权均为整数，要求你在 T 的基础上添加 $\frac{n(n-1)}{2} - n + 1$ 条带权无向边，得到图 G ，并且满足：

1. G 是一张完全图。
2. T 是 G 的唯一最小生成树。
3. G 的边权均为整数。

(完全图的边数为 $\frac{n(n-1)}{2}$ ，树的边数为 $n - 1$ ，故添加的边数为两者之差)

求添加的 $\frac{n(n-1)}{2} - n + 1$ 条无向边的边权之和的最小值。请你设计一个高效算法求解本问题，描述算法的核心思想，并给出算法伪代码及对应的时间复杂度分析。

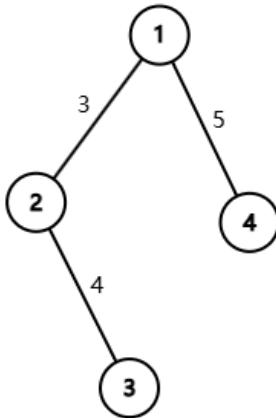


图 4. 无向树 T

例如，如图 4 所示：有一棵如图所示的无向树，节点个数为 4。有 3 条树边，分别是：1 和 4 之间的无向边，边权为 5；1 和 2 之间的无向边，边权为 3；2 和 3 之间的无向边，边权为 4。

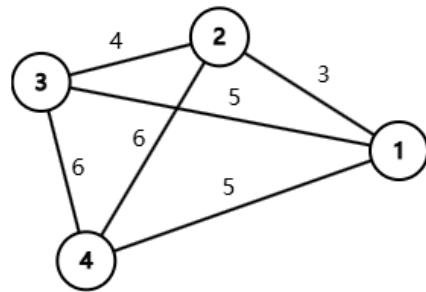


图 5. 完全图 G

将 T 作为本问题的输入，则对应的输出为 17，一种最优的方案如图 5 所示，添加的 3 条边为：2 和 4 之间的无向边，边权为 5；1 和 3 之间的无向边，边权为 6；4 和 3 之间的无向边，边权为 6。所添加边的边权和为 17，可以证明， G 的唯一最小生成树是 T ，且不存在一种另外的方案，使得边权和小于 17。