

《算法设计与分析》

(2024 年秋季学期)

第三次作业

作业提交截止时间：2024 年 12 月 2 日 23 : 55

1 医院排队问题 (20 分)

在一个医院中，有 n 个病人排队等待就诊，医院每次只能接诊 1 人。每个病人有一个病情严重程度 s_i ，不同病人的病情严重程度可以相同。 s_i 越大表示病情越严重，病情越严重的病人应当越优先就诊，形式化地说：对于任意两个病人 i, j ，如果接诊顺序 $o_i < o_j$ ，那么一定有 $s_i \geq s_j$ 。同时，每个病人还需要一定的时间 t_i 来完成就诊。记每个病人在排队时的等待时间为 w_i ，即从第一个人开始看病，到自己看完病为止的时间。

请你安排病人接诊的顺序，在关注病人病情严重程度的前提下最小化总的等待时间 $\sum w_i$ 。

例如，有 1, 2, 3 号三位病人前来就诊， $s = [1, 1, 2]$, $t = [1, 2, 3]$ ，那么就诊顺序应该安排为 3 号 - 1 号 - 2 号，总等待时间为 $\sum w_i = (3) + (3 + 1) + (3 + 1 + 2) = 13$ 。

请设计一个高效算法，描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

2 生产线规划问题 (20 分)

某制造公司拥有一条生产线，工作时每天可获得收益 X_1 元，初始资金为 C 元。若当前资金大于等于升级费用 U 元，公司可以选择对生产线进行升级。每次升级会使生产效率提高，每天生产可以带来额外收益 X_2 元，且升级可以叠加，也就是说在第 K 次升级后，生产一天的收益为 $X_1 + K \times X_2$ 。但升级过程需要停产（包括升级当天） T 天，期间无法产生收益。

在接下来的 n 天内，公司希望通过合理安排升级时机以最大化最终资金。

请设计一个高效的算法，规划生产线的策略，以在 n 天内最大化公司的最终资金。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其时间复杂度。

3 分店选址问题 (20 分)

某奶茶品牌想在全国投资开分店来扩大规模提高影响力，通过向新老顾客发放问卷的形式调研产生了 n 个备选地址，并实地考察到了两组数据 $flow$ 和 $cost$ ，其中 $flow_i$ 表示第 i 个备选地址的人流量， $cost_i$ 表示在该地址开店所需的最低资金。由于当前总资金有限，该奶茶品牌希望根据这两组数据，从 n 个备选地址中挑选出 k 个组成最终分店名单，使得能够在满足以下约束条件的前提下尽可能降低总投资成本：

- 对每个被选中的地址，应当按照其人流量与其他 $k - 1$ 个被选中地址人流量的比例来投入资金。例如，在 $k = 3$ 的情况下，如果最终分店选址为 a, b, c 三地，而这三地的人流量分别为 100, 200, 300，那么最终投入在 a, b, c 三地资金比例应严格保证为 1:2:3。
- 被选中的每个地址的投入资金都不得低于其所需的最低资金。

请设计一个算法求满足上述条件的前提下，该奶茶品牌需要投入的总资金的最小值。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其时间复杂度。

4 食物链计数问题 (20 分)

对于一个生态系统，存在一个食物网 G ，该食物网中有 n 个结点，捕食关系为二元组的集合 $A = \{(i, j)\}$ ，其中 (i, j) 表示 j 捕食 i ，体现在食物网中为 i 指向 j 的一条有向边。保证该食物网中的任一结点都存在与之相连的边，且食物网中不存在环。

食物链是食物网中以一种生物为起点，另一种生物为终点的有向路径。极大食物链定义为：位于链条起点的是生产者，它们不捕食其他生物而是通过光合作用等方式获取能量，即该节点的入度为 0；而位于链条终点的是顶级消费者，这类生物不再被其他生物所捕食，即该节点的出度为 0。

例如：在图 1 的食物网中，极大食物链有 4 条，为： $6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ； $6 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ； $6 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ； $6 \rightarrow 4 \rightarrow 7$ 。其他链均不是极大食物链。

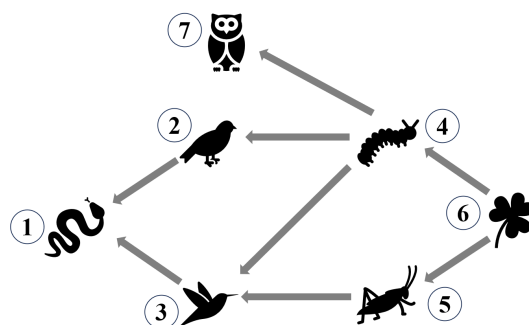


图 1. 食物网

请设计一个高效的算法统计该食物网中极大食物链的数量。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其时间复杂度。

5 迷宫逃离问题 (20 分)

给定一个 $m \times n$ 的迷宫，其入口和出口分别为 $(1, 1)$ 和 (m, n) （行列坐标都从 1 开始）。每个格子的状态用 $c_{i,j}$ 表示，并存在两种取值：

1. $c_{i,j} = 0$ ，表示这个格子是空格子，可以通过；
2. $c_{i,j} = 1$ ，表示这个格子是障碍物，不可通过。

入口 $(1, 1)$ 和出口 (m, n) 均为空格子。在迷宫中可从某个格子 (i, j) 移动到与其相邻的空格子 $((i, j - 1), (i, j + 1), (i - 1, j), (i + 1, j))$ 其中之一，且需保证移动后的横坐标必须位于 $[1, m]$ 之间，纵坐标必须位于 $[1, n]$ 之间，消耗体力为 1。

现将可至多 1 个障碍物移除，使其对应的格子的变为空格子，移除障碍物不消耗体力。

例如：在图 2 所示的迷宫中，不移除障碍物（图 2(a)）最小消耗的体力为 10；移除坐标 $(2, 1)$ 处的障碍物再移动（图 2(b)）最小消耗的体力为 6。在本例中消耗的最小体力为 6。

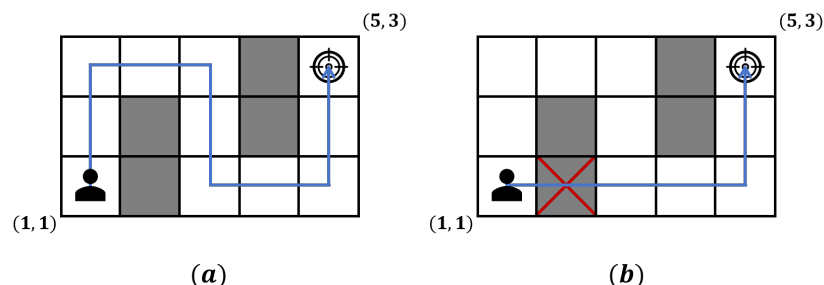


图 2. 迷宫

请在此基础上设计一个尽可能高效的算法，求出从入口 $(1, 1)$ 到出口 (m, n) 需消耗的最小体力，描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其时间复杂度。