13.2　伪随机二式序列－－M序列的产生及其性质

本节讨论伪随机测试信号的产生原理及其主要特点。

一、　伪随机噪声

设 $x(t)$ 是以T为周期的白噪声，即 $x(t)$ 在 $(0,\ T)$ 时间内是白噪声，在此时间外仍是以T为周期重复的白噪声。显然，它的自相关函数为 $R_{xx}(\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]$ ，其周期也为T。常称这各周期性白噪声 $x(t)$ 为伪随机噪声输入被辨识的线性系统，自相关函数和互相关函数如下：

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^{\infty}x(t)y(t+\tau)dt \tag{13-8}$$

$$\begin{aligned}R_{xy}(\tau)&=\int_0^{\infty}g(\sigma)R_{xx}(\tau-\sigma)d\sigma\\&=\int_0^{\infty}g(\sigma)\left[\frac{1}{T}\int_0^{T}x(t+\tau-\sigma)dt\right]d\sigma\\&=\frac{1}{T}\int_0^{T}\left[\int_0^{\infty}g(\sigma)x(t+\tau-\sigma)dt\right]x(t)d\sigma\end{aligned}$$

式中

$$\int_0^{\infty}g(\sigma)x(t+\tau-\sigma)d\sigma=y(t+\tau)$$

则

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^{\infty}x(t)y(t+\tau)dt \tag{13-9}$$

上式表明， $R_{xy}(\tau)$ 仅需计算一个周期的积分。若把式(13-2)改写为

$$\begin{aligned}R_{xy}(\tau)&=\int_0^{\infty}g(\sigma)R_{xx}(\tau-\sigma)d\sigma\\&=\int_0^{T}g(\sigma)R_{xx}(\tau-\sigma)d\sigma+\int_T^{2T}g(\sigma)R_{xx}(T+\tau-\sigma)d\sigma+\cdots\\&=\int_0^{T}g(\sigma)K\delta(\tau-\sigma)d\sigma+\int_0^{2T}g(\sigma)K\delta(T+\tau-\sigma)d\sigma+\cdots\end{aligned}$$

则

$$R_{xy}(\tau)=Kg(\tau)+Kg(T+\tau)+Kg(2T+\tau)+\cdots \tag{13-10}$$

由上式可知，适当选择T，使脉冲响应函数在 $\tau < T$ 时衰减到零。那么，

$g(T+\tau)=0$，$g(2T+\tau)=0, \cdots$ 于是有

$$R_{xy}(\tau) = Kg(\tau)$$

$$g(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{K} \qquad (13\text{-}11)$$

由此可得结论：若 $x(t)$ 是以T为周期的白噪声，T大于 $g(\tau)$ 衰减到的时间，则可根据式(13-9)求得 $R_{xy}(\tau)$ ，再代入式(13-3)求得系统的脉冲响应 $g(\tau)$ 。

二、 离散二位式白噪声序列

由于离散白噪声比连续的白噪声容易产生，所以在系统辨识试验中常用离散的白噪声序列。

设随机序列 $x_1, x_2, \cdots$ ，如果它们的均值为零，方差相同，且互不相关，即

$$E[x_i] = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots)$$

$$E[x_i x_j] = \begin{cases} \sigma^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

则此随机序列称为离散白噪声序列。如果这个序列中的每个随机变量只有1或-1两种状态，则称此随机序列为离散二位式白噪声序列。当序列 $x_i(i=1,2,\cdots, N)$ 充分长时，即N充分大时，离散二位式白噪声序列具有以下三个概率性质：

概率性质1：在序列中1出现的次数与-1出现的次数几乎相等。

在叙述概率性质2以前，先介绍一个名词“游程”。若干个1（或若干个-1）的连续排列称为“游程”。一个游程中含有1或-1的个数称为游程长度。例如，一个周期长为15的二位式序列1,1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,1,1-，游程总数为8，其中的游程长度为1的共有四个，占总游程数的1/2，游程长度为2的有两个，占总游程数的1/4，游程长度为3和4的都只有一个，各占总游程数的1/8，其中1与-1的个数分别为8和7，只相关1。

概率性质2：在序列中总的游程个数平均为$\frac{1}{2}(N+1)$ 个，1的游程与-1的游程大约各占一半。即大约为$\frac{1}{4}(N+1)$ 个（N为奇数，表示序列的个数）。更详细地说，长度为1的游程个数约占总游程数的1/2，长度为2的游程个数占总游程数的1/4，…，长度为 i 的游程个数占总游程个数的 $1/2^i$ ，等等。

概率性质3：对于离散二位式无穷随机序列 $x_1, x_2, \cdots$ ，它的相关函数为

$$R_{xx}(\tau)=E[x_i x_{i+\tau}]=\begin{cases}1 & (\tau=0)\\ 0 & (\tau=1,2,\cdots)\end{cases}$$

三、 M序列的产生方法

离散二位式随机序列是按照确定的方式产生的，实际上是一种确定性序列。由于它的概率性质与离散二位白噪声序列的三条概率性质相似，故称为伪随机序列。伪随序列有很多种，下面只介绍M序列。

用线性反馈移位寄存器产生M序列。移位寄存器以0和1表示两种状态。当移位脉冲输入时，每位的状态（0或1）移到下一位，最后一位（即n位）移出的状态为输出，为了保持连续工作，将移位寄存器的状态经过适当的逻辑运算后，反馈到第一位去作为输入。例如前面所述的周期长度为15的伪随机序列，若将其“-1”变为“0”可得到111100010011010，它是由图13－4所示的四级移位寄存器网络产生的，其条件是寄存器的初始状态不全为“0”。

这个电路的四级寄存器为 A_1，A_2，A_3，A_4，其中 A_3 和 A_4 的状态作模2相加，即1 $\oplus$ 0=1，0 $\oplus$ 1=1，1 $\oplus$ 1=0，0 $\oplus$ 0=0，然后反馈到第一个移 A_1 的输入端，如果所有寄存器初始状态都是1，第一个移位脉冲输入，使四个寄存器的状态变为0111,第二个移位脉冲输入，则寄存器的为0011，…，一个周期的变化规律为1111（初态）→0111→0011→0001→1000→0100→0010→1001→1100→0110→1011→0101→1010→1101→1110→1111。一个周期中产生15种不同的状态，如果取 A_4 的状态作为输出的伪随机信号，则这个随机序列为111100010011010。

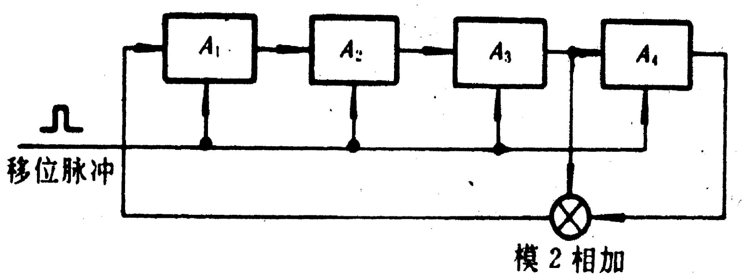

图13－4 周期长度为15的伪随机序列发生器方块图

如果一个四级移位寄存器以 A_2 和 A_4 的状态作模2相加，反馈 A_1 的输入端，如图13－5所示。

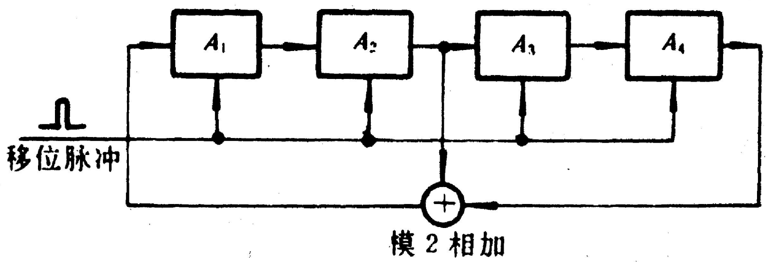

图13－5 周期为6的伪随机序列发生器方块图

设所有寄存器的初始状态为1，则一个周期内四个寄存器的状态变化规律为1111（初态）→0111→0011→1100→1111，共产生六种不同状态。比较上面两种线路可知，由于反馈逻辑运算不同，两者获得的输出序列不相同，前者的周期长度是15，后者的周期长度是6。需要指出，各级寄存器的初始不能全为“0”。

四级移位寄存器输出序列的最大周期长度，等于所能出现的各种组合状态（各级都是0的组合状态除外），共有组合状态$2^4-1=15$种，也即输出序列的最大周期长度等于15。

如果一个移位寄存器的输出序列的周期长度达到最大周期长度，这个序列称为最大长度二位式序列或M序列。如果输出序列的周期比最大周期长度小，就不是M序列。 n 级移寄存器产生的序列的最大周期长度为

$$N = 2^n - 1 \tag{13-12}$$

下面不加证明地给出综合表13－1。

表13－1

移位寄存器	序列的最大周期长度 $N = 2^n - 1$	反馈到第一级的模2相加信号所取的输出级
2	3	1和2
3	7	2和3
4	15	3和4
5	31	4和5
6	63	5和6
7	127	4和7
8	255	2, 3, 4和8
9	511	5和9
10	1023	7和10
11	2047	9和11

M序列的相关函数为

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ -\dfrac{1}{N} & 0 < \tau \le N-1 \end{cases} \tag{13-13}$$

上式的证明见下面。当N很大时，M序列的相关函数与离散二位式白噪声序列的相关函数相接近，故可用它作为测试信号。

四、 二电平M序列

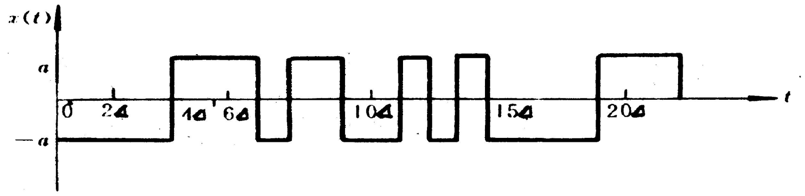

图13－6 n＝4的二电平序列（一个周期）

如果线性系统输入连续型白噪声，输入与输出的互相关函脉冲响应函数只差一个常数倍。为了利用这一简单结论，需将对时间离散的M序列改造成对时间连续的二电平M序列。仍然由线性反馈移位寄存器产生M序列，若多位寄存器的输出状态是1、电平取 $-a$ ；若输出状态是0，电平取 $+a$ 。通常取电压作为电平， a 表示幅值。设每个基本电平延迟的的阻力N，随机序列的周期T=NA。例如，对于M序列：111100010011010，相应的二电平序列一个周期的图形如图13－6所示。

移位脉冲间隔A是不变的，电平绝对值 a 也不变，它在每次脉冲开始时变号或不变号。由于上述M序列中1的数目比0的数目多一个，因此在一个序列周期中电平为 $-a$ 的脉冲数比电平为 $+a$ 有脉冲数多1个，所以在一个周期内，电平为 $+a$ 的脉冲数为 $\frac{1}{2}(N+1)$ ，电平为 $-a$ 的脉冲数为 $\frac{1}{2}(N+1)$ 。

一个周期序列的数学期望（直流电平）为

$$m_a=\frac{N-1}{2}\frac{aA}{NA}-\frac{N+1}{2}\frac{aA}{NA}=-\frac{a}{N} \tag{13-14}$$

$$m_a^2=\frac{\sigma 2}{N^2} \tag{13-15}$$

下面不加推导地给出二电平M序列的自相关函数

$$R_{xx}(\tau)=\begin{cases} a^2\left(1-\dfrac{N+1}{N}\dfrac{|\tau|}{\Delta}\right) & -\Delta\le\tau\le\Delta \\ -\dfrac{a^2}{N} & \Delta<\tau\le(N-1)\Delta \end{cases} \tag{13-16}$$

$R_{xx}(\tau)$ 如图13－7所示。 $R_{xx}(\tau)$ 周期性变化的，周期为 $N\Delta$ 。当 Δ 很小时，由图13－7可知，式(13-16)所示的 $R_{xx}(\tau)$ 可以近似看成强度 $\frac{1}{2}(N+1)a^2\Delta$ 的脉冲函数和学值 $\frac{\sigma^2}{N}$ 两部分组成，即

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{N}(N+1)a^2\Delta\delta(\tau)-\frac{a^2}{N} \tag{13-17}$$

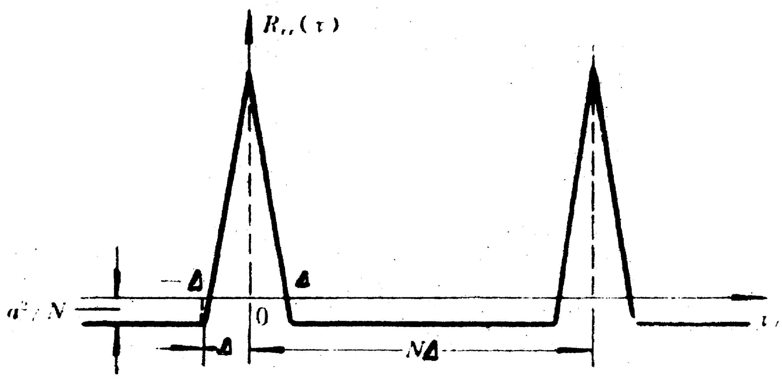

图13－7 二电平M序列的 $R_{xx}(\tau)$ 图形

由式(13-16)，如果 $a=+1, -a=-1$ ，则可得如式(13-13)所示的M序列的自相关函数。

五、二电平M序列的功率谱密度

对式(13-16)求富氏变换，可得二电平M序列的功率谱密度 $S_x(\omega)$ 为

$$S_x(\omega)=\frac{2\pi a^2}{N}\delta(\omega)-\frac{2\pi a^2(N+1)}{N^2}\left[\frac{\sin(\omega\Delta/2)}{\omega\Delta/2}\right]^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)\Big|_{\omega\neq 0} \qquad (13\text{-}18)$$

式中 $\delta(\omega)$ 为狄拉克 δ 函数， $\omega_0=\frac{2\pi}{N\Delta}$ 为基频。当 $\omega=\frac{2\pi}{N\Delta}$ 时， $\left[\frac{sin(\omega\Delta/2)}{\omega\Delta/2}\right]^2$ 下降3dB，即 $S_x(\omega)$ 近似地下降3dB。 $S_x(\omega)$ 的图形如图13－8所示。

从式(13-18)可看出，M序列的功率谱密度与 a^2 成正比，与序列长度N成反比，在序列周期 $T(T=N\Delta)$ 一定条件下，与采样周期 Δ 成反比。

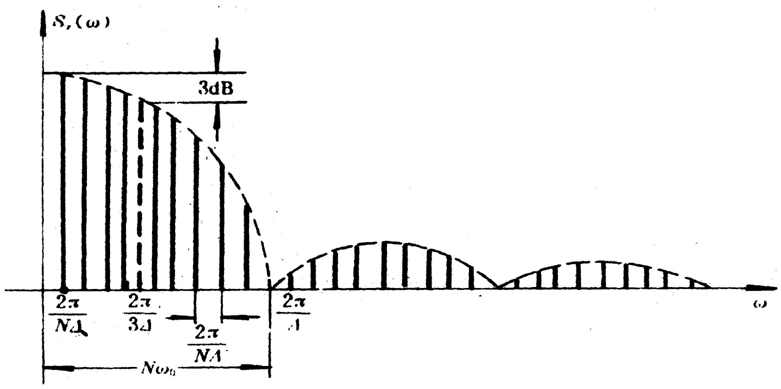

图13－8 M序列的功率谱密度 $S_x(\omega)$ 图形