

3.5 MIMO信道及其容量

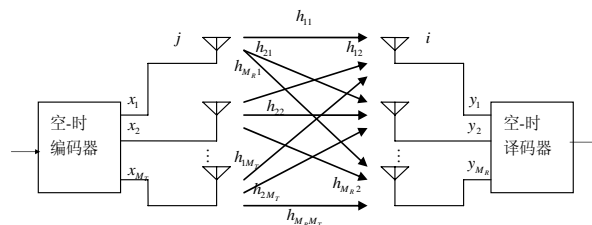
3.5.1 MIMO系统模型

3.5.2 MIMO无线信道的容量

3.5.3 用SVD方法对MIMO的进一步分析

3.5.1 MIMO系统模型

点到点MIMO系统由 M_T 根发送天线和 M_R 根接收天线以及相应的空-时编码器和空-时译码器组成。



$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{M_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1M_T} \\ \vdots & h_{ij} & \vdots \\ h_{M_R 1} & \cdots & h_{M_R M_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{M_T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{M_R} \end{bmatrix}$$

3.5.1 MIMO系统模型

- **信道矩阵**: \mathbf{H} 为复矩阵, h_{ij} 表示第 j 根发送天线至第 i 根接收天线的信道衰落系数。
- 归一化约束: 每一根天线的接收功率均等于总的发送功率

$$\sum_{j=1}^{M_T} |h_{ij}|^2 = M_T, \quad i = 1, 2, \dots, M_R$$

3.5.1 MIMO系统模型

- **发送信号**: 第 j 根天线发送 x_j 为零均值i.i.d高斯变量, 发送信号的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}$$

- 总的发送功率约束为 $P_T = \text{tr}(\mathbf{R}_{xx})$
- 若每根天线发送相等的信号功率 P_T/M_T ,

$$\mathbf{R}_{xx} = \frac{P_T}{M_T} \mathbf{I}_{M_T}$$

3.5.1 MIMO系统模型

- 接收端的**噪声**: 各分量为独立的零均值高斯变量, 具有独立的和相等方差的实部和虚部。
- 噪声协方差矩阵 $\mathbf{R}_{nn} = E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\}$
- 若 \mathbf{n} 的分量间不相关, $\mathbf{R}_{nn} = \sigma^2 \mathbf{I}_{M_R}$
- 每根接收天线具有相等的噪声功率 σ^2 。
- 每根接收天线输出端的信号功率为 P_T , 故接收功率信噪比为

$$\rho = \frac{P_T}{\sigma^2}$$

3.5.2 MIMO无线信道的容量

- 假设发送信号 \mathbf{x} 与 \mathbf{n} 相互独立

$$\begin{aligned}\therefore R_{yy} &= E\{y y^H\} = E\{(Hx + n)(Hx + n)^H\} \\ &= E\{Hx x^H H^H\} + E\{n n^H\} \\ &= H Q H^H + R_{nn}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I(x; y) &= H(y) - H(y/x) = H(y) - H(n) \\ &= \log \det[\pi e(H Q H^H + R_{nn})] - \log \det(\pi e R_{nn}) \\ &= \log \det[I_{M_R} + H Q H^H (R_{nn})^{-1}]\end{aligned}$$

- 遍历容量(ergodic capacity)**: 输入与输出间最大互信息的期望 $C = E_H \left\{ \max_{P(x): \text{tr}(Q) \leq P_T} I(x; y) \right\}$

- 等功率发送 $R_{xx} = Q = \frac{P_T}{M_T} I_{M_T}$
- 每根天线的接收噪声 \mathbf{n} 为互不相关的零均值复高斯变量, $R_{nn} = E\{n n^H\} = \sigma^2 I_{M_R}$

$$\begin{aligned}C &= E_H \left\{ \log \left[\det \left(I_{M_R} + \frac{P_T}{\sigma^2 M_T} H H^H \right) \right] \right\} \\ &= E_H \left\{ \log \left[\det \left(I_{M_R} + \frac{\rho}{M_T} H H^H \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

- 中断容量**: 指信道瞬时容量值小于某个指定容量值的概率等于某一给定中断概率 P_{outage} 时, 该给定的信道容量称为对应于该中断概率的中断容量 C_{outage} , 即

$$P(C_{\text{inst}} < C_{\text{outage}}) = P_{\text{outage}}$$

3.5.3 用SVD方法对MIMO的进一步分析

- 根据**奇异值分解**(SVD-Singular Value Decomposition)定理, 任意矩阵 \mathbf{H} 可表示为

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H$$

- \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 分别为 $M_R \times M_R$ 和 $M_T \times M_T$ 酉矩阵,

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}_{M_R} \quad \mathbf{V} \mathbf{V}^H = \mathbf{I}_{M_T}$$

- \mathbf{D} 为 $M_R \times M_T$ 非负对角阵, 对角线元素为矩阵 $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$ 特征值 λ_i 的非负平方根 $\sqrt{\lambda_i}$. λ 满足

$$\mathbf{H} \mathbf{H}^H \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

- \mathbf{z} 为关于特征值 λ 的 $M_R \times 1$ 特征向量。 \mathbf{U} 的列是 $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$ 的特征向量, \mathbf{V} 的列是 $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ 的特征向量。

3.5.3 用SVD方法对MIMO的进一步分析

$$\mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

$$\text{令 } \mathbf{y}' = \mathbf{U}^H \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{V}^H \mathbf{x}$$

$$\mathbf{n}' = \mathbf{U}^H \mathbf{n}$$

$$\text{则 } \mathbf{y}' = \mathbf{D} \mathbf{x}' + \mathbf{n}'$$

- 矩阵 $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$ 的非零特征值数目 m 等于矩阵 \mathbf{H} 的秩 r 。对于 $M_R \times M_T$ 矩阵 \mathbf{H} , 其秩最大为 $m = \min(M_R, M_T)$ 即 \mathbf{H} 的非零奇异值最多有 m 个。

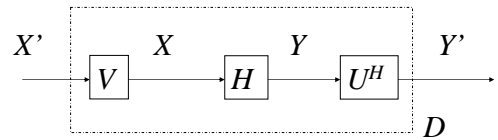
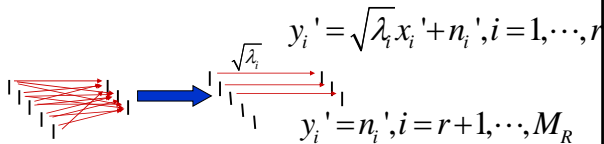
- 用 $\sqrt{\lambda_i}$ ($i=1, 2, \dots, r$)表示 \mathbf{H} 的奇异值, 则

$$y'_i = \sqrt{\lambda_i} x'_i + n'_i \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

$$y'_i = n'_i \quad (i=r+1, r+2, \dots, M_R)$$

- 从第1个到第 r 个接收分量, 子信道增益为 $\sqrt{\lambda_i}$, 而从第 $r+1$ 接收分量起, 子信道的增益为0, 相应的接收分量不再依赖发送分量 x'_i 。

- 等效的MIMO信道可看成由 r 个相分离的并行子信道组成，每个子信道指配一个 \mathbf{H} 矩阵的奇异值（或 $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ 的特征值），该奇异值 $\sqrt{\lambda_i}$ 相当于该子信道的幅度增益，而子信道的功率增益相当于 $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ 的特征值 λ_i 。



$$Y = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{n} \quad \begin{matrix} \mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{X}' \\ \mathbf{Y}' = \mathbf{U}^H \mathbf{Y} \end{matrix} \rightarrow \mathbf{Y}' = \mathbf{D}\mathbf{X}' + \mathbf{n}'$$

- 各子信道是分开的，因而它们的容量相加。假定在等效MIMO信道模型中每根天线发送的功率为 P_T/M_T ，总的信道容量可利用Shannon公式求出： $C = F \sum_{i=1}^r \log(1 + \frac{P_i}{\sigma^2})$
- 式中 F 为每个子信道的带宽， P_i 为第 i 个子信道的接收信号功率： $P_i = \frac{\lambda_i P_T}{M_T}$

$$\therefore C = F \sum_{i=1}^r \log(1 + \frac{\lambda_i P_T}{M_T \sigma^2}) = F \log \prod_{i=1}^r (1 + \frac{\lambda_i P_T}{M_T \sigma^2})$$

3.5 MIMO信道及其容量（总结）

- MIMO系统的信道容量主要由 \mathbf{H} 的奇异值决定，即 $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ 的特征值。反映各支路的相关程度。
- 发送端未知CSI，采用功率均分

$$C = F \sum_{i=1}^r \log(1 + \frac{\lambda_i P_T}{M_T \sigma^2})$$

- 发送端已知CSI：采用water-filling，增加容量

$$C = F \sum_{i=1}^r \log(1 + \frac{1}{\sigma^2} (\lambda_i \nu - \sigma^2)^+)$$

- 发送端未知CSI时的信道容量小于或等于已知CSI时的信道容量，是因为发送端可利用CSI对发送模块进行优化处理。

3.5 MIMO信道及其容量（总结）

- 采用空间分集技术的MIMO系统是对抗无线衰落、提高传输信道容量的一种行之有效的方法。
- 在相同发射功率和传输带宽下，MIMO系统较单天线系统的信道容量大大提高，有时甚至高达几十倍。
- 这些增加的信道容量既可用来提高信息传输速率，也可不提高信息速率而通过增加信息冗余度提高通信系统的性能，或者在两者之间取得折中。