《偏微分方程》学习指导与习题解答

浙江大学数学系

前　言

《偏微分方程》课程是本科阶段公认的较难学习和掌握的公共数学课程之一，为了帮助学生能更好地学习和掌握偏微分方程的基本概念、基本理论以及基本的求解方法，我们组织部分任课老师编写了这本《偏微分方程学习指导与习题解答》。

本书共分六章，除第一章外每章分为基本要求、内容提要和习题解答三部分。基本要求部分主要起教学大纲与教学计划的作用，用“理解、了解和知道”三个术语给出了基本概念和基本内容的不同要求，用“熟练掌握、掌握和会”三个术语给出了求解方法和解题技巧的不同要求；内容提要部分给出相关内容的精讲，供学生复习参考之用；习题解答部分以李胜宏、潘祖梁和陈仲慈编著的《数学物理方程》(浙江大学出版社，2008 年) 的附后练习题为主，这些习题属于掌握偏微分方程知识所必须的基本训练。

本书是多位老师合作的结果，其中第一章和第六章由薛儒英编写，第二章和第三章分别由汪国昭和吴彪编写，王会英和王伟分别编写了第四章和第五章的内容，最后由薛儒英和贾厚玉统稿并补充了每一章的基本要求和内容提要。本书得到浙江大学大类课程教改课题《微分方程》的资助，得到浙江大学数学系各位老师的大力支持，在此表示感谢。

目　录

第 1 章　预备知识

大多数读者认为《偏微分方程》是一门较难学习的课程，这其中主要有二方面的原因：原因之一是学习偏微分方程需要读者已经掌握且能灵活运用较多的现代数学知识，特别需要熟练掌握多元函数微积分知识、Fourier 级数理论以及常微分方程理论等等，需要初步了解复变函数、特殊函数理论以及广义函数理论等等；原因之二是不同与常微分方程理论有统一的处理方法 (如常微分方程理论中讨论解的存在性以及惟一性的毕卡存在惟一性定理、研究解性质的各种稳定性理论以及技巧、线性常微分方程解的结构理论以及求解方法等等)，偏微分方程的研究还没有建立统一的理论体系和处理方法，已有的各种求解方法基本只适用于某类特殊的偏微分方程，研究方法需要根据所研究偏微分方程的不同而有所改变。

§1.1　一些常用的常微分方程的求解

在这里我们仅仅对学习后面几章内容所必需的一些常微分方程作简单的介绍，需要了解常微分方程更多内容的读者可以查阅常微分方程的专门教材。

一. 一阶线性常微分方程

一阶线性常微分方程的一般形式是

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

其中函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 $I=(a,b)$ 上已知的连续函数。它的通解可表示为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right),$$

其中式中的不定积分 $\int p(x)dx$ 表示函数 $p(x)$ 的某一个原函数。一阶线性常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的解可表示为

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds\right).$$

二. 常系数齐次线性常微分方程

常系数齐次线性微分方程是

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=0,$$

与它相对应的特征方程是

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0.$$

如果 μ 是特征方程的一个 k 重**实特征根**，则下列函数

$$e^{\mu x}, xe^{\mu x}, \cdots, x^{k-1}e^{\mu x}$$

是齐次常系数线性微分方程的 k 个 (线性无关) 解; 如果 $\mu = \alpha + \beta i$ 是特征方程的一个 k 重**复特征根**(这时，$\alpha - \beta i$ 肯定也是特征方程的一个 k 重复特征根)，则与这对共轭的 k 重 (复) 特征根 $\alpha \pm \beta i$ 相对应的 $2k$ 个线性无关的实解是

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

它们恰好是

$$e^{(\alpha\pm\beta)x}, xe^{(\alpha\pm\beta)x}, \cdots, x^{k-1}e^{(\alpha\pm\beta)x}$$

的实部与虚部。

从上面我们可知，若 μ 是常系数线性微分方程所对应的特征方程的一个 k 重特征根，那么我们可以构造出常系数线性微分方程对应于特征根 μ 的 k 个解。由线性代数的理论可知，一个 n 阶特征方程刚好有 n 个特征根 (按重数计算)，因此我们利用上面的方法刚好能构造常系数线性微分方程的 n 个解。容易证明这 n 个解是线性无关的，这样我们就得到 n 阶常系数线性微分方程解。

习题 1.1 *试求方程 $y'' + 5y' + 4y = 0$ 的通解.*

解 所给方程的特征方程 $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ 有两个不同的实根 $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1$. 因此 $y_1 = e^{-4x}$ 和 $y_2 = e^{-x}$ 构成基本解组, 故通解为

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

习题 1.2 *求解下面的初值问题 $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.*

解 所给方程的特征方程 $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1 = 0$ 的根 $2 \pm i$, 因此, 其通解为

$$y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x).$$

而

$$y'(x) = 2e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{2x}(-c_1\sin x + c_2\cos x),$$

由初值条件

$$y(0) = c_1 = 1, \ y'(0) = 2c_1 + c_2 = 5$$

得 $c_2 = 3$, 这样所求的解为

$$y = e^{2x}(\cos x + 3\sin x).$$

习题 1.3 *试求方程 $y^{(6)} - 2y^{(5)} + 4y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + 2y = 0$ 的通解.*

解 所给方程的特征方程

$$\lambda^6-2\lambda^5+4\lambda^4-4\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda+2=(\lambda^2+1)^2(\lambda^2-2\lambda+2)=0$$

有共轭的 (二重) 复特征根 $\lambda_1=\lambda_2=i$ 和 $\lambda_3=\lambda_4=-i$; 共轭的 (一重) 复特征根 $\lambda_5=1+i$ 和 $\lambda_6=1-i$. 因此

$$\cos x,\ x\cos x,\ \sin x,\ x\sin x,\ e^x\cos x,\ e^x\sin x$$

构成基本解组, 故通解为

$$y=(C_1+C_2x+C_3e^x)\cos x+(C_4+C_5x+C_6e^x)\sin x,$$

其中 $C_1,\cdots,C_6$ 任意 (实或复) 常数。

三. 常系数非齐次线性常微分方程

常系数非齐次线性方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=f(x),$$

其中 $p_1,\cdots,p_n$ 是 n 个已知的常数, $f(x)$ 是已知的函数。

由非齐次线性方程解的结构定理, 求解非齐次线性方程的解只须设法求出它的齐次线性方程的解 (这是一个常系数齐次线性微分方程, 它的求解见上) 和非齐次线性方程的一个特解。当非齐次项 $f(x)$ 是某些特殊函数时, 即 $f(x)$ 具有

$$P_m(x)e^{\alpha x};\ P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x;\ P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

形式时 (其中 $P_m(x)$ 是 x 的 m 阶多项式, α 和 β 是给定的实常数), 我们可以用待定系数法来构造一个特解; 当非齐次项 $f(x)$ 是一般函数时, 要求非齐次线性方程的一个特解有时是非常困难的, 常用的方法是**常数变易法**。

(I). $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$, 其中 $P_m(x)$ 是 x 的 m 阶多项式

这时我们的常系数线性微分方程是

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=P_m(x)e^{\alpha x}.$$

定理: (1) 如果 α 不是特征方程

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$$

的特征根, 则常系数线性微分方程有一个特解

$$y=Q_m(x)e^{\alpha x}$$

其中 $Q_m(x)$ 是 x 的一个待定的 m 阶多项式。

(2) 如果 α 是特征方程

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$$

的 k 重特征根, 则常系数线性微分方程有一个特解

$$y = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}$$

其中 $Q_m(x)$ 是 x 的一个待定的 m 阶多项式。

习题 1.4 *求方程* $y'' + 3y' + 4y = 3x + 2$ *的一个特解.*

解 这里 $f(x) = 3x + 1$ 是一个一次多项式, 即 $\alpha = 0$ 和 $P_1(x) = 3x + 1$, 而 $\alpha = 0$ 不是特征方程

$$\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

的特征根。这样我们有特解 $y(x) = Ax + B$, 其中 A 和 B 待定. 由于 $y' = A$ 和 $y'' = 0$, 代入方程得

$$3A + 4(Ax + B) = 3x + 2.$$

要使这等式成立必须有 $4A = 3$ 和 $3A + 4B = 2$ 成立. 由此得到 $A = \frac{3}{4}$ 和 $B = -\frac{1}{16}$. 因此, 这个特解为

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}.$$

(II). $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ **或** $P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$**, 其中** $P_m(x)$ **是** m **阶多项式**

当系数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是实数时，我们先求出

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

的一个特解, 记为 $y = u(x) + iv(x)$ 其中 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是实部与虚部。把 $y = u(x) + iv(x)$ 代入常系数线性微分方程，分开实部与虚部得

$$L[u + iv] = L[u] + iL[v] = Re\{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\} + Im\{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\},$$

比较它的实部与虚部得

$$L[u] = Re\{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\}$$

和

$$L[v] = Im\{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\}.$$

因此，若实系数常系数线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

有一个特解 $y = u(x) + iv(x)$, 则它的实部 $u(x)$ 与虚部 $v(x)$ 分别是实系数常系数线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

和实系数常系数线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

的特解。

习题 1.5 确定方程 $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$ 的通解.

解 所给方程的特征方程 $\lambda^2-2\lambda+5=0$ 有特征根 $1\pm 2i$. 相应齐次线性方程的通解为

$$C_1e^x\sin 2x+C_2e^x\cos 2x.$$

注意到 $e^x\sin 2x=Im\{e^{(1+2i)x}\}$. 先讨论方程

$$y"-2y'+5y=e^{(1+2i)x}$$

的特解。$\mu=1+2i$ 是特征根。这样对应的方程有特解 $y=Axe^{(1+2i)x}$, 代入方程 $y''-2y'+5y=e^{(1+2i)x}$ 解得 $A=-\frac{i}{4}$, 特解

$$y=\frac{i}{4}xe^{(1+2i)x}=\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{i}{4}x\cos 2x.$$

方程 $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$ 的一个特解是 $-\frac{1}{4}x\cos 2x$, 通解是

$$C_1e^x\sin 2x+C_2e^x\cos 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

(III). 非齐次项 $f(x)$ 是一般函数时 — 变动任意常数法

当非齐次项 $f(x)$ 是一般函数时，要求非齐次线性方程的一个特解有时是非常困难的，常用的方法是**变动任意常数法**。

如果已知某一个 n 阶齐次线性微分方程的 n 个线性无关解，利用变动任意常数法我们可以求出相应的 n 阶非齐次线性微分方程的特解 (注意，在前面我们仅仅能求解某些具特殊非齐次项的非齐次线性微分方程的特解)，我们以二阶线性方程为例来说明。考虑

$$y"+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x), \tag{1.1}$$

假设已知相应的齐次线性微分方程 $y"+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ 的二个线性无关解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，则齐次线性微分方程的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$。由线性微分方程的解结构定理知，如果能找到非齐次线性微分方程 (1.1) 的一个特解，那么方程 (1.1) 就能得到所有解。下面我们利用变动任意常数法来求出一个特解，我们希望找一个具特殊形式的特解：

$$y=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x) \tag{1.2}$$

其中 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是二个待定的函数。

$$y'=u_1(x)y_1'(x)+u_2(x)y_2'(x)+u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)$$

由于把 (1.2) 代入方程 (1.1) 只得到一个关系式，而我们有二个待定函数，这样可以再另外增加一个限制关系式，我们取

$$u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0. \tag{1.3}$$

在条件 (1.3) 下有

$$y'=u_1(x)y_1'(x)+u_2(x)y_2'(x),$$

$$y" = u_1(x)y"_1(x) + u_2(x)y"_2(x) + u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x),$$

代入方程 (1.1) 得

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{1.4}$$

从 (1.3) 和 (1.4) 中解得

$$u_1'(x) = \varphi_1(x),\ u_2'(x) = \varphi_2(x).$$

积分得到

$$u_1(x) = \int \varphi_1(x)dx,\ u_2(x) = \int \varphi_2(x)dx,$$

我们可经取到特解

$$y = y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx.$$

习题 1.6 *求解* $y" + y = f(x)$.

解 显然，方程 $y" + y = 0$ 有二个线性无关解 $y_1(x) = \sin x$ 以及 $y_2(x) = \cos x$. 用变动任意常数法找特解 $y = u_1(x)\sin x + u_2(x)\cos x$, 求导得

$$y' = u_1(x)\cos x - u_2(x)\sin x + u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x$$

取条件

$$u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = 0 \tag{1.5}$$

把

$$y" = u_1'(x)\cos x - u_2'(x)\sin x - u_1(x)\sin x - u_2(x)\cos x$$

代入方程得

$$u_1'(x)\cos x - u_2'(x)\sin x = f(x). \tag{1.6}$$

从 (1.5) 和 (1.6) 中解得

$$u_1'(x) = f(x)\cos x,\ u_2'(x) = -f(x)\sin x,$$

我们取 $u_1(x) = \int_0^x f(x)\cos x dx$, $u_2(x) = -\int_0^x f(x)\sin x dx$ 得到特解

$$y = \int_0^x f(s)\sin(x-s)ds.$$

(IV). 非齐次项 $f(x)$ 是一般函数时 — 齐次化方法

用变动任意常数法来求解常微分方程的一个特解一般来说较繁琐，对于**常系数**的非齐次线性常微分方程来说，我们可以用**齐次化方法**来求特解. 但是特别需要注意的是，对变系数的非齐次线性常微分方程来说，齐次化方法可能不再适用。

齐次化方法是一种应用非常广泛的方法, 它的主要想法是**把非齐次（常系数）线性方程的求解转化为齐次（常系数）线性方程的求解.** 下面通过具体的例子来说明。

习题 1.7 讨论一阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' + py = f(t),\ t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

记 $w(x, \tau)$ 为问题

$$\begin{cases} w' + pw = 0,\ t > 0 \\ w(t)|_{t=0} = f(\tau). \end{cases} \tag{1.8}$$

的解, 即 $w = w(t, \tau) = f(\tau)e^{-pt}$, 则

$$y = \int_0^t w(t-\tau, \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)e^{-p(t-\tau)}d\tau$$

为原方程的解. 事实上, 由

$$y|_{t=0} = \int_0^t w(t-\tau, \tau)d\tau|_{t=0} = \int_0^0 w(0-\tau, \tau)d\tau = 0$$

知 y 满足初始条件; 由

$$\frac{dy}{dt} = w(t-t, t)d + \int_0^t \frac{d}{dt}w(t-\tau, \tau)d\tau = f(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}w(t-\tau, \tau)d\tau$$

知 y 满足

$$y' + py = f(t) + \int_0^t \left(\frac{dw}{dt} + pw\right)(t-\tau, \tau)d\tau = f(t) + \int_0^t 0d\tau = f(t).$$

习题 1.8 讨论二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = f(t),\ t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0,\ y'(t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 p 和 q 是二个常数。
记 $w(t, \tau)$ 为问题

$$\begin{cases} w'' + pw' + qw = 0,\ t > 0 \\ w|_{t=0} = 0,\ w'(t)|_{t=0} = f(\tau). \end{cases} \tag{1.10}$$

的解, 则

$$y = \int_0^t w(t-\tau, \tau)d\tau$$

为原方程的解. 事实上, 由

$$\frac{dy}{dt} = w(0, t)d + \int_0^t \frac{d}{dt}w(t-\tau, \tau)d\tau = \int_0^t \frac{d}{dt}w(t-\tau, \tau)d\tau$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = w'(0,t)d + \int_0^t \frac{d^2}{dt^2}w(t-\tau,\tau)d\tau = f(t) + \int_0^t \frac{d^2}{dt^2}w(t-\tau,\tau)d\tau$$

知

$$y|_{t=0} = \int_0^t w(t-\tau,\tau)d\tau|_{t=0} = \int_0^0 w(0-\tau,\tau)d\tau = 0$$

$$y'|_{t=0} = \int_0^t \frac{d}{dt}w(t-\tau,\tau)d\tau|_{t=0} = \int_0^0 \frac{d}{dt}w(0-\tau,\tau)d\tau = 0$$

及

$$y'' + py' + qy = f(t) + \int_0^t \left(\frac{d^2w}{dt^2} + p\frac{dw}{dt} + q\right)(t-\tau,\tau)d\tau = f(t) + \int_0^t 0d\tau = f(t).$$

对于高阶常系数的非齐次线性方程也有类似的齐次化原理, 在常微分方程理论中, 一般用常数变易法来求高阶常系数的非齐次线性方程的解, 实际上我们用齐次化方法来求解可能更容易, 下面我们给出一个简单的例子来说明。

习题 1.9 求下列初值问题

$$\begin{cases} y'' + \beta^2 y = f(t),\ t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = A,\ y'(t)|_{t=0} = B. \end{cases} \tag{1.11}$$

解 把初值问题分解为

$$(I)\begin{cases} u'' + \beta^2 u = 0,\ t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = A,\ y'(t)|_{t=0} = B. \end{cases} \tag{1.12}$$

和

$$(II)\begin{cases} h'' + \beta^2 h = f(t),\ t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0,\ y'(t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

则我们有 $y = u + h$. 对于初值问题 (I), 它是一个二阶常系数齐次线性方程, 它的解是

$$u = \frac{B}{\beta}\sin\beta t + A\cos\beta t.$$

对于初值问题 (II) 我们用齐次化方法来讨论. 记 $w(t,\tau)$ 为齐次方程

$$\begin{cases} w'' + \beta^2 w = 0,\ t > 0 \\ w(t)|_{t=0} = 0,\ w'(t)|_{t=0} = f(\tau). \end{cases}$$

的解, 即

$$w(t,\tau) = \frac{f(\tau)}{\beta}\sin\beta t.$$

由齐次化原理得

$$h = \int_0^t w(t-\tau,\tau)d\tau = \frac{1}{\beta}\int_0^t f(\tau)\sin\beta(t-\tau)d\tau.$$

因此

$$y = \frac{B}{\beta}\sin\beta t + A\cos\beta t + \frac{1}{\beta}\int_0^t f(\tau)\sin\beta(t-\tau)d\tau.$$

四. 欧拉方程

n 阶欧拉方程的一般形式是

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} + p_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + xp_{n-1}y' + p_ny = f(x),$$

其中 $p_1, \cdots, p_n$ 是给定的常数，$f(x)$ 是已知的函数。欧拉方程的**求解关键**是引进自变量变换 $x = e^t$(当讨论 $x < 0$ 时引进自变量变换 $x = -e^t$)，函数 y 作为自变量 t 的函数满足一个 n 阶常系数线性微分方程。具体如下：

记 $y = y(x) = y(t)$,$x = e^t$ 利用复合函数的求导法则，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = e^t\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dx}) = e^t\frac{dy}{dx} + e^t\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx}) = x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{d^2x}$$

即我们有

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt};\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

类似地，

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}, \cdots.$$

代入 n 阶欧拉方程

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} + p_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + xp_{n-1}y' + p_ny = f(x)$$

得一个 n 阶常系数线性微分方程

$$\frac{d^ny}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1y' + a_ny = f(e^t).$$

习题 1.10 *求解方程* $x^2y'' + xy' = 6\ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

解 记 $y = y(x) = y(t)$, $x = e^t$ 利用复合函数的求导法则，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = e^t\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dx}) = x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{d^2x}.$$

代入二阶欧拉方程 $x^2y'' + xy' = 6\ln x - \frac{1}{x}$ 得 $y = y(t)$ 满足

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6t - e^{-t}.$$

解得

$$y = C_1 + C_2t + t^3 - e^{-t} = C_1 + C_2\ln x + (\ln x)^3 - \frac{1}{x}.$$

习题 1.11 *求方程* $x^2y''+3xy'+y=\frac{1}{x}(\ln x)^2$, $x>0$.

解 记 $y=y(x)=y(t)$,$x=e^t$ 利用复合函数的求导法则,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=e^t\frac{dy}{dx}=x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dx})=x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{d^2x}.$$

代入 2 阶欧拉方程 $x^2y''+xy'=6\ln x-\frac{1}{x}$ 得 $y=y(t)$ 满足

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=t^2e^{-t}.$$

解得

$$y=(C_1+C_2t+\frac{1}{12}t^3)e^{-t}=(C_1+C_2\ln x+\frac{1}{12}(\ln x)^3)/x.$$

五. 幂级数解法

对于常系数的齐次线性微分方程, 我们可以转化为求解它的特征方程的根的代数方程问题, 但对于线性变系数方程就没有类似的过程。除了一些特殊的方程, 一般的变系数线性方程要求用幂级数技巧。

定理: 设二阶线性微分方程 $y"+p(x)y'+q(x)y=0$ 中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $|x-x_0|<R$ 内都可以表示成关于 $(x-x_0)$ 的收敛幂级数

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_))^n,\ q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n.$$

则方程在区间 $|x-x_0|<R$ 内有形如

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n \tag{1.14}$$

的两个线性无关解。级数 (1.14) 的系数可以将其代入方程通过比较系数方法得到。

习题 1.12 *用幂级数方法求解 Airy 方程*

$$y"=xy,\ (-\infty<x<+\infty) \tag{1.15}$$

解 由定理, 我们可设方程 (1.15) 有幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ (-\infty<x<+\infty).$$

对它关于 x 逐项求导, 代入方程并调整求和指标 (令 $c_{-1}=0$) 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-1}x^n.$$

比较等式两边的系数, 我们得到下面的递推关系式

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = c_{n-1}, \ (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

由此不难得到

$$\begin{aligned}
c_2 &= c_5 = \cdots = c_{3n+2} = \cdots = 0; \\
c_3 &= \frac{c_0}{3\cdot 2}, c_6 = \frac{c_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}, \cdots, \\
c_{3n} &= \frac{c_0}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}, \cdots; \\
c_4 &= \frac{c_1}{4\cdot 3}, c_7 = \frac{c_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}, \cdots, \\
c_{3n+1} &= \frac{c_1}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}, \cdots.
\end{aligned}$$

所以, 我们得到 Airy 方程 1.15 的幂级数解

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}\right] \\
&= c_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}\right]
\end{aligned}$$

容易验证, 这个幂级数解对任何 x 都是收敛的. 并且, 它是方程 (1.15) 的通解, 其中 c_0 和 c_1 是任意常数.

习题 1.13 *求解 α 阶 Legendre 方程*

$$(1-x^2)y" - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \tag{1.16}$$

其中 $\alpha > -1$ 是实数.

解 注意到 Legendre 方程的仅有两个奇点是 $x = \pm 1$. 我们将 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 代入方程可得下面的递推关系式

$$c_{m+2} = -\frac{(\alpha-m)(\alpha+m-1)}{(m+1)(m+2)}c_m \tag{1.17}$$

对 $m \geq 0$ 成立.

对于任意的常数 c_0 和 c_1, 由 (1.17) 得到

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}c_0, \\
c_3 &= -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}c_1, \\
c_4 &= \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}c_0, \\
c_5 &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}c_1.
\end{aligned}$$

一般地, 我们有

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!} c_0. \tag{1.18}$$

和

$$c_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!} c_1. \tag{1.19}$$

或

$$c_{2m} = (-1)^m a_{2m} c_0 \text{ 和 } c_{2m+1} = (-1)^m a_{2m+1} c_1,$$

其中 a_{2m} 和 a_{2m+1} 分别记 1.18 和 1.19 中的分式. 这样我们得到 α 阶 Legendre 多项式的两个线性无关解

$$y_1(x) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m} x^{2m} \text{ 和 } y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m+1} x^{2m+1}. \tag{1.20}$$

我们取 $\alpha = n$, 一个非负整数. 如果 $\alpha = n$ 是偶数, 则当 $2m > n$ 时, 从式 (1.19) 得 $a_{2m} = 0$. 在这种情形,$y_1(x)$ 是一个 n 次的多项式,y_2 是一个无穷级数. 如果 $\alpha = n$ 是奇数, 从 (1.19) 知当 $2m+1 > n$ 时 $a_{2m+1} = 0$. 在这种情形 y_2 是一个 n 次多项式,y_1 是一个无穷级数. 这样, 在任何一种情形, 方程的两个解 (1.20) 中的一个是多项式, 而另一个是无穷级数. 通过对任意常数 c_0(n 为偶数) 和 c_1(n 为奇数) 的适当选取,n 阶 Legendre 方程

$$(1-x^2)y" - 2xy' + n(n+1)y = 0, \tag{1.21}$$

的 n 次多项式解记为 $P_n(x)$ 并称之为 n 次 Legendre 多项式. 如果 $P_n(x)$ 中 x^n 的系数为 $(2n)!/[2^n(n!)^2]$. 我们可以把它写为

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \tag{1.22}$$

, 其中 $N = [n/2]$ 记 $n/2$ 的整数部分.Legendre 多项式的前 6 项分别可写为

$$\begin{array}{ll} P_0(x) \equiv 1, & P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x), \end{array} \tag{1.23}$$

定理：设二阶线性微分方程 $x^2y" + p(x)y' + q(x)y = 0$ 中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $|x| < R$ 内都可以表示成关于 x 的收敛幂级数

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n,\ q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

且 $p(0)=0$. 则方程在区间 $0<|x|<R$ 内有形如

$$y(x)=x^c\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1.24}$$

的两个线性无关解 (广义幂级数解), 其中 $a_0\neq 0$。级数 (1.24) 的系数可以将其代入方程通过比较系数方法得到。

习题 1.14 *求 0 阶 Bessel 方程 $x^2y''+xy'+x^2y=0$ 的广义幂级数解.*

解 设方程有广义幂级数解

$$y(x)=x^c\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

由

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(c+n)a_nx^{n+c-1},$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(c+n)(c+n-1)a_nx^{n+c-2},$$

把它代入方程可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)(n+c-1)a_nx^{n+c}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)a_nx^{n+c}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c+2}=0.$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)(n+c-1)a_nx^{n+c}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)a_nx^{n+c}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+c}=0.$$

比较系数可得

$$x^c\text{前的系数}: c(c-1)a_0+ca_0=0\Rightarrow c^2a_0=0, \tag{1.25}$$

$$x^{c+1}\text{前的系数}: (c+1)ca_1+(1+c)a_1=0\Rightarrow (c+1)^2a_1=0, \tag{1.26}$$

$$x^{c+n}\text{前的系数}(n\geq 2): (n+c)(n+c-1)a_n+(n+c)a_n+a_{n-2}=0\Rightarrow a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n_c)^2} \tag{1.27}$$

由于 $a_0\neq 0$, 由第一式我们看到 $c=0$, 再由第二知 $a_1=0$, 由第三式递推得对奇数 n 有 $a_n=0$; 如果 n 是偶数, 则

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2},\ c_4=-\frac{c_0}{4^2}=\frac{c_0}{2^2\cdot 4^2}.\ \cdots.$$

一般可以写为

$$c_{2n}=\frac{(-1)^nc_0}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}=\frac{(-1)^nc_0}{2^{2n}(n!)^2}.$$

如果我们取 $c_0=1$, 我们得到称之为**第一类的** 0 **阶** Bessel **函数**的数学中最重要的一个特殊函数

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{1.28}$$

习题 1.15 *求 1/2 阶 Bessel 方程* $x^2y"+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$ *的广义幂级数解.*

解 设方程有广义幂级数解

$$y(x)=x^c\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

由

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(c+n)a_nx^{n+c-1},$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(c+n)(c+n-1)a_nx^{n+c-2},$$

把它代入方程可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)(n+c-1)a_nx^{n+c}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+c-\frac{1}{4})a_nx^{n+c}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c+2}=0.$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+c)^2-\frac{1}{4}])a_nx^{n+c}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+c}=0.$$

比较系数可得

$$x^c\text{前的系数}:(c^2-\frac{1}{4})a_0=0, \tag{1.29}$$

$$x^{c+1}\text{前的系数}:[(c+1)^2-\frac{1}{4}]a_1=0, \tag{1.30}$$

$$x^{c+n}\text{前的系数}(n\geq 2):[(n+c)^-\frac{1}{4}]a_n+a_{n-2}=0. \tag{1.31}$$

由于 $a_0\neq 0$, 由第一式我们看到 $c=\pm\frac{1}{2}$, 再由第二知 $a_1=0$, 由第三式递推得对奇数 n 有 $a_n=0$; 下面我们计算 $n=2k$ 是偶数时 a_n 的值。

如果 $c=\frac{1}{2}$, 则由

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+1)}\Rightarrow a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{(2k+1)!}.$$

我们得到一个解

$$y_1=a_0x^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_0}{(2k+1)!}x^{2k}=a_0\frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

其中 a_0 是一个任意常数。

如果 $c=-\frac{1}{2}$, 则由

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2k(2k-1)}\Rightarrow a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{(2k)!}.$$

我们得到一个解

$$y_2=a_0x^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_0}{(2k)!}x^{2k}=a_0\frac{\cos x}{\sqrt{x}},$$

其中 a_0 是一个任意常数。因此方程的通解为

$$y=C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

§1.2 Sturm-Liouville 本征值 (或固有值) 问题

在用变量分离方法求解某些偏微分方程时, 需要我们求解下列形式的二阶线性常微分方程

$$a_1(x)y''+a_2(x)y'+[a_3(x)+\lambda]y=0 \tag{1.32}$$

其中 $a_1(x),a_2(x)$ 和 $a_3(x)$ 是给定区间 I 上的连续函数，$a_1(x)\neq 0$, λ 是给定的常数。取 $p(x)=exp[\int\frac{a_2}{a_1}dx]$, 在方程两边同乘 $p(x)$ 可把方程 (1.32) 表示为得

$$[p(x)y']'+[-q(x)+\lambda s(x)]y=0, \tag{1.33}$$

其中 $q(x)=-a_3(x)/a_1(x)$, $s(x)=p(x)/a_1(x)$。我们把方程 (1.33) 称为 **Sturm-Liouville 方程**。当我们在区间 $[a,b]$ 上考虑方程 (1.33) 时，可对它加上边值条件

$$Ky(a)+Ly'(a)=0,\ My(b)+Ny'(b)=0,$$

其中 K,L,M 和 N 为给定的常数，它们满足

$$K^2+L^2\neq 0,\ M^2+N^2\neq 0.$$

这样我们得到二阶线性常微分方程边值问题

$$\begin{cases}[p(x)y']'+[-q(x)+\lambda s(x)]y=0,\ a\leq x\leq b,\\ Ky(a)+Ly'(a)=0,\ My(b)+Ny'(b)=0\end{cases} \tag{1.34}$$

其中 $p(x),q(x)$ 和 $s(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续函数，$p(x)$ 是可微的，且 $p(x)>0$ 和 $s(x)>0$, λ 是一个参数，K,L,M 和 N 为给定的常数，它们满足

$$K^2+L^2\neq 0,\ M^2+N^2\neq 0.$$

我们把边值问题 (1.34) 称为**Sturm-Liouville 本征值 (或固有值) 问题**。显然 $y\equiv 0$ 一定是 Sturm-Liouville 固有值问题的一个解 (称它为零解)。对于本征值 (或固有值) 问

题, 我们主要关心当参数 λ 取哪些值 (称为**固有值或特征值**) 时, Sturm-Liouville 固有值问题有非零解 (称为**固有函数或特征函数**)。求解固有值问题是指求出它的所有固有值以及相应的固有函数。我们先讨论几个简单的例子, 然后介绍有关 Sturm-Liouville 本征值 (或固有值) 问题的几个重要结论。

习题 1.16 *求解固有值问题*

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0,\ 0 < x < \ell, \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases}$$

解 当 $\lambda < 0$ 时, 方程的通解为

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

由条件 $u(0) = u(\ell) = 0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足,

$$u(0) = C_1 + C_2 = 0,\ u(\ell) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0.$$

注意到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\ell} & e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} \end{vmatrix} \neq 0$$

我们有 $C_1 = C_2 = 0$, $u \equiv 0$, 即当 $\lambda < 0$ 时固有值问题只有零解。

当 $\lambda = 0$ 时, 方程的通解为

$$u(x) = C_1 + C_2 x$$

由条件 $u(0) = u(\ell) = 0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足,

$$u(0) = C_1 = 0,\ u(\ell) = C_1 + C_2\ell = 0.$$

我们有 $C_1 = C_2 = 0$,$u \equiv 0$, 即当 $\lambda = 0$ 时固有值问题只有零解。

当 $\lambda > 0$ 时, 方程的通解为

$$u(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

由条件 $u(0) = u(\ell) = 0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足,

$$u(0) = C_2 = 0,\ u(\ell) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

即必须满足有 $C_2 = 0$ 及 $C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$。由于 $\lambda > 0$ 及我们要求固有值问题的非零解, 必有 (若 $C_1 = 0$, 而 C_2 必须为零, 这样 $u \equiv 0$) $\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$, 即 $\lambda = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, 其中 $k = 1, 2, \cdots$。因此当 $\lambda = \lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}$, $k = 1, 2, \cdots$ 时, 固有值问题有非零解

$$u_k(x) = C_k \sin(\frac{k\pi x}{\ell})$$

其中 C_k 为任何不等于零的常数。这样，固有值问题有固有值 $\lambda = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$，相应的固有函数是 $u_k(x) = C_k \sin(\frac{k\pi x}{\ell})$，其中 $k = 1, 2, \cdots$。

下面我们来讨论一下所得到的固有值和固有函数的性质：

(1). 固有值问题有无穷多个固有值

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty.$$

(2). 相应于每个固有值 λ_k $(k = 1, 2, \cdots)$ 的所有特征函数组成一维的线性空间，记为 $\phi_k(x) = \sin(\frac{k\pi x}{\ell})$ 是这个线性空间的基，则 $\{\phi(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 相互正交，即满足

$$\int_0^{\ell} \phi_k(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0, \ k \neq n, \\ \frac{\ell}{2} \neq 0, \ k = n \end{cases}$$

(3). (广义 Fourier 级数) 若函数 $f(x) \in L^2[0, \ell]$(即满足 $\int_0^{\ell} |f(x)|^2 dx < +\infty$ 的函数), 则存在常数 A_k 使得

$$f(x) = A_1\phi_1(x) + A_2\phi_2(x) + \cdots + A_k\phi_k(x) + \cdots$$

其中 $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\phi_k(x)dx$，$k = 1, 2, \cdots$。

习题 1.17 求解固有值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \ 0 < x < \ell, \\ u'(0) = u'(\ell) = 0. \end{cases}$$

解 当 $\lambda < 0$ 时，方程的通解为

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

由条件 $u'(0) = u'(\ell) = 0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足，

$$u'(0) = C_1\sqrt{-\lambda} - C_2\sqrt{-\lambda} = 0, \ u'(\ell) = C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\ell} - C_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0.$$

注意到

$$\begin{vmatrix} \sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\ell} & -\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} \end{vmatrix} \neq 0$$

我们有 $C_1 = C_2 = 0$, 即当 $\lambda < 0$ 时固有值问题只有零解。

当 $\lambda = 0$ 时，方程的通解为

$$u(x) = C_1 + C_2 x$$

由条件 $u'(0) = u'(\ell) = 0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足，

$$u'(0) = C_2 = 0, \ u'(\ell) = C_2\ell = 0.$$

我们有 $C_2 = 0$ 而 C_1 可以取任意值, 即当 $\lambda = 0$ 时固有值问题有非零解 (固有函数)$u_0(x) = C_0$, $\lambda_0 = 0$ 是相应的固有值。

当 $\lambda > 0$ 时, 方程的通解为

$$u(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

由条件 $u'(0) = u'(\ell) = 0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足,

$$u'(0) = \sqrt{\lambda}C_1 = 0,\ u'(\ell) = C_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\ell) - C_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

即有 $C_1 = 0$ 及 $C_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$。由于 $\lambda > 0$ 及我们要求固有值问题的非零解, 必有 $C_2 \neq 0$, 这样必有 $\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$, 即 $\lambda = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, $k = 1, 2, \cdots$. 因此当 $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, 其中 $k = 1, 2, \cdots$ 时, 固有值问题也有非零解 (固有函数)

$$u_k(x) = C_k \cos(\frac{k\pi x}{\ell})$$

其中 C_k 为任何不等于零的常数。这样, 固有值问题有固有值 $\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, 相应的固有函数是 $u_k(x) = C_k\cos(\frac{k\pi x}{\ell})$, 其中 $k = 0, 1, 2, \cdots$。下面我们来讨论一下所得到的固有值和固有函数的性质:

(1). 固有值问题有无穷多个固有值

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty.$$

(2). 相应于每个固有值 λ_k 的所有固有函数组成一维的线性空间, 记为 $\phi_k(x) = \cos(\frac{k\pi x}{\ell})$ 是这个线性空间的基, 其中 $k = 0, 1, 2, \cdots$。则 $\{\phi(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 相互正交, 即

$$\int_0^\ell \phi_k(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0,\ k \neq n, \\ \frac{\ell}{2} \neq 0,\ k = n \end{cases}$$

(3). (广义 Fourier 级数) 若函数 $f(x) \in L^2[0, \ell]$(即 $\int_0^\ell |f(x)|^2dx < +\infty$), 则存在常数 A_k 使得

$$f(x) = A_0\phi_0(x) + A_1\phi_1(x) + A_2\phi_2(x) + \cdots + A_k\phi_k(x) + \cdots$$

其中 $A_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(x)dx, A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\phi_k(x)dx\ (k = 1, 2, \cdots)$.

上面我们讨论了二个具体的固有值问题, 求得了它们的固有值以及相应的固有值函数并给出了固有值和固有值函数的相关性质。下面我们说明对一般的 Sturm-Liouville 固有值问题:

$$\begin{cases} [p(x)y']' + [q(x) + \lambda s(x)]y = 0,\ a \le x \le b, \\ Ky(a) + Ly'(a) = 0,\ My(b) + Ny'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.35}$$

也有类似的结论, 其中 $p(x), q(x)$ 和 $s(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续函数, $p(x)$ 是可微的, 且 $p(x) > 0$ 和 $s(x) > 0$, λ 是一个参数, K, L, M 和 N 为给定的常数, 它们满足

$$K^2 + L^2 \neq 0,\ M^2 + N^2 \neq 0.$$

由于一般 Sturm-Liouville 固有值问题中的常微分方程是一个变系数方程，习题 1.16 和习题 1.17 的讨论方法不再适用，但我们从理论上可以证明类似的性质仍成立：

定理：(1).Sturm-Liouville 固有值问题 1.35 有无限多个固有值，可以把它们排列如下

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty.$$

(2). 相应于每个固有值 λ_k 的所有固有函数组成一个一维的线性空间，记为 $\phi_k(x)$ 是这个线性空间的基，则 $\{\phi(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 在权 $s(x)$ 下正交，即

$$\int_a^b s(x)\phi_k(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0,\ k \neq n, \\ \delta_k \neq 0,\ k = n \end{cases}$$

其中 $\delta_k = \int_a^b s(x)\phi_k^2(x)dx \neq 0$.

(3). (广义 Fourier 级数) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 **Dirichlet(狄氏) 条件** (即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最多只有有限个第一类间断点，且 $\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty$)，则存在常数

$$C_k = \frac{1}{\delta_k}\int_a^b s(x)f(x)\phi_k(x)dx$$

使在 $f(x)$ 的连续点处有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\phi_k(x)(x),$$

在 $f(x)$ 的第一类间断点处有

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\phi_k(x).$$

第 2 章　方程的导出和定解问题

§2.1　基本要求与内容提要

一. 基本要求

1. 掌握三类典型数学物理方程 (弦振动方程, 热传导方程以及拉普拉斯方程) 的推导过程;

2. 熟悉三类边界所代表的物理意义, 能正确写出典型数学物理问题的定解条件和定解问题;

3. 掌握线性偏微分方程的叠加原理, 了解其应用;

4. 了解二阶线性偏微分方程的分类, 会将一般的二阶线性偏微分方程化成标准型。

二. 内容提要

1. 建立数学物理方程的常用方法

通常用以下三种方法来建立描述物理现象的数学方程: 微元法、规律法和统计法。

(1) 微元法

就是在整个系统中分出一个小部分, 分析邻近部分与这一小部分的相互作用, 根据物理学规律 (牛顿第二定律等), 用数学表达式来表示这个作用, 通过对表达式的化简、整理, 得到所研究问题满足的数学物理方程。

(2) 规律法

就是将物理规律 (如 Maxwell 方程组) 用易求解的数学物理方程表示出来。

(3) 统计法

就是通过统计规律建立所研究问题满足的数学物理方程, 常用于经济、社会科学等领域。

2. 定解条件

在一般情形下, 数学物理方程的解中含有任意常数或任意函数, 为了得到符合实际问题要求的惟一解, 我们数学物理方附加定解条件。定解条件一般有初始条件和边界条件两种。

(1) 初始条件

初始条件是所研究的物理量在开始时刻取值的数学表达式。初始条件的个数取决于偏微分方程中关于时间变量 t 的导数的阶数, 如弦振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

关于 t 的导数是二阶的, 故需要两个初始条件才能确定一个特解, 即要求给出初始位移和初始速度

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x).$$

热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

关于 t 的导数是一阶的，故需要一个初始条件就能确定一个特解，即要求给出初始温度

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x).$$

弦振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

Poisson 方程和 Laplace 方程不含时间变量，称为稳定场方程，故不需要初始。

(2) 边界条件

边界条件是所研究的物理量在边界上状况的数学表达式。边界条件一般有三种类型，简单地说，若给定未知函数在区域边界（或区间端点）上的函数值，这样的条件称为 Dirichlet 条件 (或第一类边界条件)；若给定未知函数在区域边界（或区间端点）上外方向导数，这样的条件称为牛曼条件 (或第二类边界条件)；若不知道未知函数在区域边界（或区间端点）上的函数值，也不知道未知函数在区域边界（或区间端点）上的方向导数，只是给定未知函数和它的方向导数的某一组合在区域边界（或区间端点）上的取值，这样的条件称为混合边界 (或第三类边界条件)。

3. 定解问题与适定性

偏微分方程和相应的定解条件结合在一起，就构成了一个定解问题。根据定解条件的不同，定解问题以可以分为以下三类：

初值问题 只有初始条件，没有边界条件的定解问题；

边值问题 没有初始条件，只有边界条件的定解问题；

混合问题 既有初始条件又有边界条件的定解问题；

适定性 如果定解问题存在惟一解且解连续依赖于初值条件和边界条件，则称定解问题是适定的。经典问题的适定性已经解决，对于新的定解问题必须进行适定性研究。

4. 线性方程的分叠加原理

我们以二个自变量的二阶线性偏微分方程：

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

为例来说明线性偏微分方程的叠加原理，其中 $a(x,y), b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $e(x,y)$,$f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 为 (x,y) 光滑函数。

叠加原理 设函数 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 是线性偏微分方程

$$Lu = g_j,\ j = 1, 2, \cdots$$

的解，$c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 为给定的数列，使得级数 $\sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j$ 收敛，和为 u，且可逐项微分两次，级数 $\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j$ 也收敛。则 u 为方程

$$Lu = \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j$$

的解。

若 $g_j = 0\ (j = 1, 2, \cdots)$, 则 u_j 为二阶齐次线性偏微分方程 $Lu = 0$ 的解, 此时齐次线性方程的叠加原理可表述为：

设函数 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 是齐次线性方程 $Lu = 0$ 的解, $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 为给定的数列, 使得级数 $\sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j$ 收敛, 和为 u, 且可逐项微分两次。则 u 为齐次线性方程 $Lu = 0$ 的解。

5. 二阶线性方程的分类

我们以二个自变量的二阶线性偏微分方程：

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

为例来说明线性偏微分方程的分类, 其中 $a(x,y), b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $e(x,y)$,$f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 为 (x,y) 光滑函数。

若在区域 Ω 上某一点 (x_0, y_0),

$$\Delta \equiv b^2 - ac > 0,$$

则称方程) 在点 (x_0, y_0) 为**双曲型的**；若点 (x_0, y_0) 有

$$\Delta \equiv b^2 - ac = 0,$$

则称方程在点 (x_0, y_0) 为**抛物型的**；若点 (x_0, y_0) 有

$$\Delta \equiv b^2 - ac < 0,$$

则称方程在点 (x_0, y_0) 为**椭圆型的**。若方程在区域 Ω 内每一点都是双曲型的称方程 (??) 在点在区域 Ω 内是双曲型的；若方程在区域 Ω 内每一点都是抛物型的称方程在点在区域 Ω 内是抛物型的；若方程在区域 Ω 内每一点都是椭圆型的称方程在点在区域 Ω 内是椭圆型的。

由上述定义，弦振动方程是双曲型方程，热传导方程是抛物型方程，而二维拉普拉斯方程是一个椭圆型方程。

§2.2　习题解答

习题 2.1 *若弦的重量不能忽略，试推导弦的振动方程。*

解 考察一根两端固定、水平拉紧的弦。弦沿垂直方向的位移 $u(x,t)$。根据牛顿第二定律, u 方向运动的方程可以描述为 (λ 为线密度)：

$$T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 - \lambda g ds = \lambda u_{tt} ds.$$

作用于小段 ABC 的纵向合力应该为零, 即

$$T_2 \cos\alpha_2 - T_1 \cos\alpha_1 = 0.$$

仅考虑微小的横振动，夹角 α_1, α_2 为很小的量，忽略 α_1^2, α_2^2 及其以上的高阶小量，则根据级数展开式有

$$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \cdots \approx 1, \cos\alpha_2 \approx 1,$$

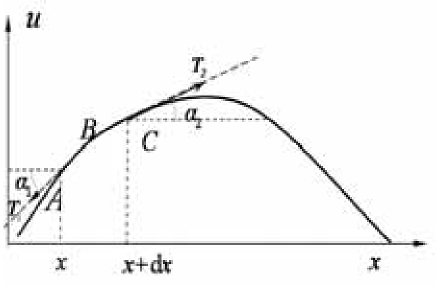

图 2.1

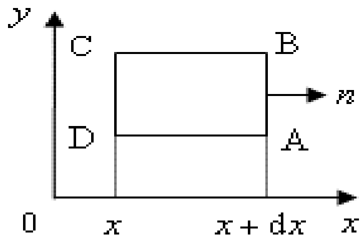

图 2.3

$$\sin\alpha_1 = \alpha_1 - \frac{1}{3!}\alpha_1^3 + \cdots \approx \alpha_1 \approx \tan\alpha_1,\ \sin\alpha_2 \approx \alpha_2 \approx \tan\alpha_2,$$
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = \sqrt{1 + (u_x)^2}dx \approx dx,\ u_x = \tan\alpha \approx \sin\alpha.$$

故得到

$$u_x|_x = \tan\alpha_1 \approx \sin\alpha_1,\ u_x|_{x+dx} = \tan\alpha_2 \approx \sin\alpha_2.$$

这样，简化得

$$T_2 u_x|_{x+dx} - T_1 u_x|_x - \lambda g dx = \lambda u_{tt} dx,\ T_1 - T_2 = 0.$$

因此在微小横振动条件下，可记 $T = T_1 = T_2$, 故有

$$T[u_x|_{x+dx} - u_x|_x] - \lambda g dx = \lambda u_{tt} dx.$$

由于变化量 dx 可以取得很小，根据微分知识成立

$$u_x|_{x+dx} - u_x|_x = u_{xx} dx,$$

这样，ABC 段的运动方程就成为 $\lambda u_{tt} - T u_{xx} + \lambda g = 0$, 即

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - g,\ (a^2 = T/\lambda).$$

习题 2.2 若弦在振动过程中还受到阻力和恢复力的作用，阻力的大小与速度成正比，恢复力的大小与位移成正比，试推导弦的振动方程 (重力忽略不计)。

解 由上题推导过程知：如果在弦的单位长度上还有横向外力 $F(x,t)$ 作用，则弦的横振动方程应该改写为

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - f(x,t),$$

式中 $f(x,t) = F(x,t)/\lambda$ 称为力密度，根据题意

$$F(x,t) = -k u_t + p u,$$

其中 $k > 0$ 为单位长度弦的阻力系数，$p > 0$ 为单位长度弦的恢复力系数。则弦的横振动方程为

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \frac{k}{\lambda} u_t + \frac{p}{\lambda} u,\ (a^2 = T/\lambda).$$

习题 2.3 推导二维的稳恒 (定常) 的温度分布方程。

解 由热传导的傅里叶定律：dt 时间内，通过线元 dL 流入小面元的热量 dQ 与沿线元外法线方向的温度变化率 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 成正比，也与 dL 与 dt 之积成正比，即

$$dQ = k\frac{\partial u}{\partial n} dL dt$$

式中 k 是导热系数，$u(x,y,t)$ 表示 t 时刻二维物体内任一点 (x,y) 处的温度。则在 dt 时段内通过线元 AB 流入的热量为

$$dQ|_x = \left(k\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_x dtdy = \left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_x dtdy.$$

同样，在 dt 时间沿 y 方向流入立方体的热量为 $\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)dtdxdy$. 在 t 到 $t+dt$ 时间内，小体积元的温度变化是 $\frac{\partial u}{\partial t}dt$. 如果用 ρ 和 C_0 分别表示物体的密度和比热，则根据能量守恒定律得热平衡方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dtdxdy=\rho C_0\frac{\partial u}{\partial t}dtdxdy,$$

或写成

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=\rho C_0\frac{\partial u}{\partial t}.$$

当温度稳恒时，$\frac{\partial u}{\partial t}=0$, 即有

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

习题 2.4 推导一维的非定常的温度分布方程。

解 由上题推导过程知：在一维情况下，温度分布方程为 $ku_{xx}=\rho C_0 u_t$, 即

$$u_t=a^2u_{xx},\,(a^2=k/\rho C_0).$$

若内部有热源，热平衡方程变为 $ku_{xx}+F(x,t)=\rho C_0u_t$, $F(x,t)$ 表示热源强度，则

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\,(a^2=k/\rho C_0,\,f(x,t)=F(x,t)/\rho C_0).$$

习题 2.5 球形导热体的上半球面绝热，下半球面保持温度 $u=u_0\sin\omega t$, 试用球坐标写出这个定解问题的边界条件。

解 设球面半径为 a, 球坐标 (R,θ,φ)(如图所示)。则边界条件为

$$\begin{cases} u_R|_{R=a}=0\,(0\le\varphi<2\pi,0\le\theta<\frac{\pi}{2}) \\ u|_{R=a}=u_0\sin\omega t\,(0\le\varphi<2\pi,\frac{\pi}{2}\le\theta<\pi). \end{cases}$$

习题 2.6 圆柱体的侧面绝热，一端温度为 0^oC, 另一端的温度与端面半径成反比，比例系数为 λ, 试写出它的边界条件。

解 设圆柱体底面半径为 R, 高为 h(如图所示)，在柱坐标 (ρ,φ,z) 下的温度函数为 u, 则边界条件为

$$\begin{cases} u_\rho|_{\rho=R}=0\,(0\le\varphi<2\pi,0\le z<h), \\ u|_{z=0}=0\,(0\le\varphi<2\pi,0\le\rho<R), \\ u|_{z=h}=\lambda/\rho\,(0\le\varphi<2\pi,0\le\rho<R). \end{cases}$$

习题 2.7 长为 ell 的均匀杆，两端有恒定热流进入，其强度为 q_0, 写出这个热传导问题的边界条件。

解 根据第 3 题的分析，有 $Q|_x=k\frac{\partial u}{\partial n}|_x$($k$ 为热传导系数)。当 $x=0$ 时，有 $q_0=-k\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}$；当 $x=\ell$ 时，有 $q_0=k\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\ell}$。因此边界条件为

$$frac\partial u\partial x\,|_{x=0}=-q_0/k,\,frac\partial u\partial x\,|_{x=\ell}=q_0/k.$$

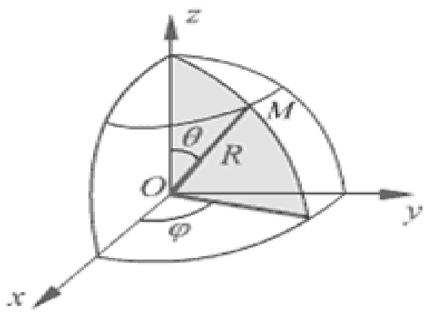

图 2.5

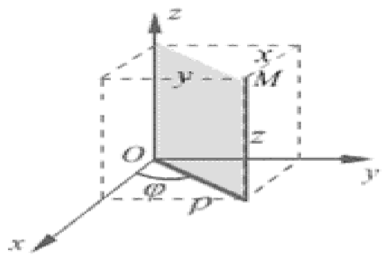

图 2.6

习题 2.8 在波动方程 $u_{tt}=\Delta u$ 中令 $u=e^{ikt}\nu$, 在热传导方程 $u_t=\Delta u$ 中令 $u=-e^{-k^2t}\nu$。证明 $\nu(x,y,z)$ 满足 *Helmholtz* 方程

$$\Delta\nu+f^2\nu=0.$$

解 注意到 $\nu(x,y,z)$ 与 t 无关, 在波动方程 $u_{tt}=\Delta u$ 中,

$$u_t=ike^{ikt}\nu, u_{tt}=-k^2e^{ikt}\nu,$$

$$\Delta u=e^{ikt}\Delta\nu.$$

从而 ν 满足

$$\Delta\nu+k^2\nu=0.$$

同理, 在热传导方程 $u_t=\Delta u$ 中

$$u_t=k^2e^{-k^2t}\nu, \Delta u=-e^{-k^2t}\Delta\nu.$$

从而 ν 满足

$$\Delta\nu+k^2\nu=0.$$

习题 2.9 设 $F(z)$, $G(z)$ 是任意的二阶连续可微函数, 试证

$$u=F(x+at)+G(x-at)$$

满足波动方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}.$$

解 $u_x=F'(x+at)+G'(x-at)$, $u_t=aF'(x+at)-aG'(x-at)$, $u_{xx}F"(x+at)+G"(x-at)$, $u_t=a^2F"(x+at)+a^2G"(x-at)$. 因此有

$$u_{tt}=a^2u_{xx}.$$

习题 2.10 对于方程 $u_{xx}-4u_{xy}+3u_{yy}=0$, 设其解为 $u(x,y)=f(\lambda x+y)$ 的形式, 试确定参数 λ 的值, 使 $u(x,y)$ 满足方程, 这里 f 为其变元的二阶可微函数。

解 $u_x=\lambda f'(\lambda x+y)$, $u_y=f'(\lambda x+y)$,

$$u_{xx}=\lambda^2f"(\lambda x+y), u_{xy}=\lambda f"(\lambda x+y), u_{yy}=f"(\lambda x+y),$$

则方程化为

$$(\lambda^2-4\lambda+3)f"(\lambda x+y)=0,$$

从而推得 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$.

习题 2.11 将下列方程化为标准型：

(1) $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$;
(2) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$;
(3) $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}+5u_x=0$;
(4) $yu_{xx}+u_{xy}=0\,(y<0)$.

解 (1) $\Delta=1^2-1\times(-3)>0$,, 方程为双曲型. 特征方程为 $\frac{dy}{dx}=\frac{1\pm\sqrt{4}}{1}$, 积分得

$$y-3x=C_1,\ y+x=C_2.$$

作替换 $\xi=y-3x$, $\eta=y+x$, 原方程化为

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2}u_\eta=0.$$

再令 $s=\frac{\xi+\eta}{2}$, $t=\frac{\xi=\eta}{2}$, 得

$$u_{ss}-u_{tt}-u_s+u_t=0.$$

(2) $\Delta=2^2-1\times5<0$,, 方程为椭圆型. 特征方程为 $\frac{dy}{dx}=\frac{1\pm i}{1}$, 积分得

$$y-(2+i)x=C_1,\ y-(2-i)x=C_2.$$

作替换 $\xi=y-2x$, $\eta=x$, 原方程化为

$$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_\eta=0.$$

(3) $\Delta=(-2)^2-1\times4=0$,, 方程为抛物型. 特征方程为 $\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{1}$, 积分得 $y+2x=C_1$. 作替换 $\xi=y+2x$, $\eta=x$, 原方程化为

$$u_{\eta\eta}+10u_\xi+5u_\eta=0.$$

(4) $\Delta=0^2-1\times y>0$,, 方程为双曲型. 特征方程为 $\frac{dy}{dx}=\frac{0\pm\sqrt{-y}}{y}$, 积分得

$$x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=C_1,\ x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=C_2.$$

作替换 $\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, $\eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, 原方程化为

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0.$$

习题 2.12 设 u_x 和 u_2 分别为下列定解问题的解

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=\varphi_1(t),\ u(\ell,t)=\varphi_2(t)\\ u(x,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0.\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=0,\ u(\ell,t)=0\\ u(x,0)=\psi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi_2(x).\end{cases}$$

试证明 $u=u_1+u_2$ 是定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=\varphi_1(t),\ u(\ell,t)=\varphi_2(t)\\ u(x,0)=\psi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi_2(x)\end{cases}$$

的解。

证明 由题意，得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ u_1(0,t) = \varphi_1(t),\ u_1(\ell,t) = \varphi_2(t) \\ u_1(x,0) = 0,\ \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\ u_2(0,t) = 0,\ u_2(\ell,t) = 0 \\ u_2(x,0) = \psi_1(x),\ \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{t=0} = \psi_2(x). \end{cases}$$

则有

$$\frac{\partial^2(u_1+u_2)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2(u_1+u_2)}{\partial x^2},$$

$$(u_1+u_2)(0,t) = \varphi_1(t) + 0 = \varphi_1(t),$$

$$(u_1+u_2)(\ell,t) = \varphi_2(t) + 0 = \varphi_2(t),$$

$$(u_1+u_2)(x,0) = 0 + \psi_1(x) = \psi_1(x),$$

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial t}|_{t=0} = 0 + \psi_2(x) = \psi_2(x).$$

即 $u = u_1 + u_2$ 是定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = \varphi_1(t),\ u(\ell,t) = \varphi_2(t) \\ u(x,0) = \psi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi_2(x) \end{cases}$$

的解。

第 3 章　行波法

§3.1　基本要求与内容提要

一. 基本要求

1. 掌握求解一维波动方程初值问题的达朗贝尔公式；
2. * 理解用“球面平均”法求解三维波动方程初值问题的思想；
3. * 理解降维的概念，会求二维波动方程初值问题；
4. 理解非齐次波动方程初值问题的齐次化方法；
5. 掌握用对称延拓法求解一维波动方程的半无界初边值问题。

二. 内容提要

1. 一维波动方程初值问题的达朗贝尔公式

一维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

可以直接用达朗贝尔公式

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$$

来求解。达朗贝尔公式的物理意义是波动方程初值问题的解可分解为沿着 x 轴正负方向传播的两组行波的叠加，因此这种方法称为**行波法**。

2. *“球面平均”法，Poisson 公式

受求解一维波动方程初值问题的达朗贝尔公式的启发，对于三维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}), -\infty < x,y,z < +\infty, t > 0 \\ u(x,y,z,t)|_{t=0} = \phi(x,y,z), -\infty < x,y,z < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x,y,z), -\infty < x,y,z < +\infty. \end{cases}$$

先求三维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$ 的具有球对称性质的解 $u = u(r,t)$，得到

$$u(r,t) = \frac{f(r+at)+g(r-at)}{r},$$

其中 f 与 g 是二个任意的二阶连续可微的函数，它们可以由给定的初始条件来确定。

在没有球对称性质的情况下，先导出 $u(x,y,z,t)$ 在以 $M(x,y,z)$ 为球心，以 r 为半径的球面上的平均值

$$\bar{u}(r;t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\int_{S_r} u(\xi,\eta,\zeta;t)dS$$

(其中 dS 为球面 $S_r(x,y,z)$ 的面积元素) 满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2 r\bar{u}}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 ru}{\partial r^2},$$

其通解是

$$\bar{u}(r,t)=\frac{f(r+at)+g(r-at)}{r},$$

将二阶连续可微的函数 f 与 g 由给定的初始条件来确定得

$$\begin{aligned}\bar{u}(r,t) &= \frac{-(at-r)\bar{\phi}(at-r)+(at+r)\bar{\phi}(at+r)}{2r}\\ &\quad+\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{at+r}\alpha\bar{\psi}(\alpha)d\alpha,\end{aligned}$$

其中 $bar\phi$, $\bar{\psi}$ 分别是初始函数 ϕ 与 ψ 在以 $M(x,y,z)$ 为球心，以 r 为半径的球面上的平均值。令 $r\to 0$, 利用洛必达法则计算得

$$u(x,y,z;t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2t}\int\int_{S_{at}(x,y,z)}\phi dS\right]+\frac{1}{4\pi a^2t}\int\int_{S_{at}(x,y,z)}\psi dS.$$

其中 $S_{at}(x,y,z)$ 表示以 (x,y,z) 为中心，at 为半径的球面。

3. * 用降维法求二维波动方程初值问题

对于二维波动方程

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2})+f(x,y,t),-\infty<x,y<+\infty,t>0\\ u(x,y,t)|_{t=0}=\phi(x,y),-\infty<x,y<+\infty,\\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x,y),-\infty<x,y,<+\infty.\end{cases}$$

可以用三维波动方程的初值问题的 Poisson 公式通过降维的方法来求解

$$\begin{aligned}u(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int\int_{\Sigma_{at}(x,y)}\frac{\phi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}dd\xi d\eta\right]\\ &\quad+\frac{1}{2\pi a}\int\int_{\Sigma_{at}(x,y)}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta\\ &\quad+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left[\int\int_{\Sigma_{a(t-\tau)}(x,y)}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta\right]d\tau,\end{aligned}$$

其中 $\Sigma_{at}(x,y)$ 表示以 (x,y) 圆心，at 为半径的圆盘。

4. 非齐次波动方程初值问题的齐次化方法

一维非齐次波动方程的初值问题为

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t),-\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,t)|_{t=0}=\phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x),-\infty<x<+\infty.\end{cases}\tag{3.1}$$

利用线性叠加原理，转化为下列二个初值问题的解的和：

$$(I)\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},-\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,t)|_{t=0}=\phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x),-\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(x,t)|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0, -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

问题 (I) 的解 $u_1(x.y.z.t)$ 可以利用达朗贝尔公式得到

$$u_1(x,t)=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds.$$

利用**齐次化方法**(Duheml 原理) 求定解问题 (II) 的解 $u_2(x,t)$: 设 $w=w(x,t,\tau)$(其中 τ 是一个参数）是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ w(x,t,\tau)|_{t=\tau}=0,\ \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=\tau}=f(x,\tau) \end{cases} \tag{3.2}$$

的解，则

$$u_2(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$$

是初值问题 (II) 的解。由达朗倍尔公式，

$$w(x,t,\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

$$u_2(x,t)=\int_0^t w(x,t-\tau,\tau)d\tau=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

由此一维非齐次波动方程初值问题 (3.1) 的解是

$$u(x,t)=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

对于三维 (或二维) 非齐次波动方程的初值问题可以用线性叠加原理结合齐次化方法不求解。

5. 一维波动方程的半无界初边值问题

一维波动方程的半无界初边值问题可以利用 Lapalce 变换法或对称延拓法来求解，这里我们先讨论对称延拓法。

(A). 端点固定的半无界弦振动

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ x\geq 0,\ t\geq 0 \\ u|_{x=0}=\nu(t),\quad t\geq 0, \\ u(x,t)|_{t=0}=\phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x), \end{cases} \tag{3.3}$$

第一步，把边界条件化为齐次。记 $v=u(x,t)-\nu(t)$, 那么 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)-\nu''(t), \\ v|_{x=0}=0,\quad t\geq 0 \\ v(x,t)|_{t=0}=\phi(x)-\nu(0),\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)-\nu'(0), 0<x<+\infty. \end{cases} \tag{3.4}$$

第二步：把半无界弦的振动转化为无界弦的振动。把非齐次项和初始条件关于 x 作**奇**延拓

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t)-\nu''(t),\ x\geq 0\\ -f(-x,t)+\nu''(t)\,x<0\end{cases}$$

$$\Phi(x)=\begin{cases} \phi(x)-\nu(0),\ x\geq 0\\ -\phi(-x)+\nu(0),\ x<0\end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x)-\nu'(0),\ x\geq 0\\ -\psi(-x)+\nu'(0),\ x<0\end{cases}$$

记 $V(x,t)$ 为初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+F(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ t>0\\ V(x,t)|_{t=0}=\Phi(x),\ \frac{\partial V}{\partial t}|_{t=0}=\Psi(x)\end{cases}$$

的解, 它可以利用一维非齐次波动方程解的 Kirchoff 公式来求解。可以知道函数 $V(x,t)$ 关于 x 是奇函数，因此函数 $V(x,t)$ 自动满足条件 $V(x,t)|_{x=0}=0$，函数 $V(x,t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的限制函数 $V(x,t)|_{x\geq 0,t\geq 0}$ 满足定解问题 (3.4)。因此定解问题 (3.3) 的解为

$$u(x,t)=V(x,t)+\nu(t),\ x\geq 0,t\geq 0.$$

(B) 端点自由的半无界弦振动

端点自由的半无界弦振动的可描述为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ x\geq 0,\ t\geq 0\\ u_x|_{x=0}=\nu(t),\quad t\geq 0\\ u(x,t)|_{t=0}=\phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x),\end{cases}\tag{3.5}$$

第一步：把边界条件化为齐次。记 $v=u(x,t)-x\nu(t)$, 那么 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)-x\nu''(t)\\ v_x|_{x=0}=0,\quad t\geq 0\\ v(x,t)|_{t=0}=\phi(x)-x\nu(0),0<x<+\infty,\\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)-x\nu'(0),0<x<+\infty.\end{cases}\tag{3.6}$$

第二步：把半无界弦的振动转化为无界弦的振动。把非齐次项和初始条件关于 x 作**偶**延拓

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t)-x\nu''(t),\ x\geq 0\\ f(-x,t)+x\nu''(t)\,x<0\end{cases}$$

$$\Phi(x)=\begin{cases} \phi(x)-x\nu(0),\ x\geq 0\\ \phi(-x)+x\nu(0),\ x<0\end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x)-x\nu'(0),\ x\geq 0\\ \psi(-x)+x\nu'(0),\ x<0\end{cases}$$

记 $V(x,t)$ 为初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+F(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ V(x,t)|_{t=0}=\Phi(x),\ \frac{\partial V}{\partial t}|_{t=0}=\Psi(x) \end{cases}$$

的解, 它可以利用一维非齐次波动方程解的 Kirchoff 公式来求解。可以知道函数 $V(x,t)$ 关于 x 是偶函数，因此 $V(x,t)$ 自动满足条件 $V_x(x,t)|_{x=0}=0$。函数 $V(x,t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的限制函数 $V(x,t)|_{x\geq 0,t\geq 0}$ 满足定解问题 (3.6). 因此定解问题 (3.5) 的解为

$$u(x,t)=V(x,t)+x\nu(t),\ x\geq 0,t\geq 0.$$

对于上空间 (或上半平面) 上的三维 (或二维) 波动方程的初边值问题可以延拓法类似地求解。

§3.2　习题解答

习题 3.1 证明方程

$$(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial x}[(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial u}{\partial x}]$$

的通解为

$$u(x,t)=\frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x}$$

其中 F,G 是任意的二次连续函数，$a,h>0$ 的常数。

解: 令 $v(x,t)=(h-x)u(x,t)$, 代入方程得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^x}$$

其通解为：

$$v(x,t)=F(x-at)+G(x+at),$$

所以

$$u(x,t)=\frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x}.$$

习题 3.2 求方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2y$ 满足条件 $u|_{y=0}=x^2$ 和 $u|_{x=1}=cosy$ 的解。

解: 方程关于 x 积分得：

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{3}x^3y+f(y).$$

再关于 y 积分得：

$$u=\frac{1}{6}x^3y^2+F(y)+G(x),$$

其中 $F(y)=\int f(y)dy$. 分别代入 $x=1$, $y=0$, 易得：

$$cosy=\frac{1}{6}y^2+F(y)+G(1),$$

$$x^2 = F(0) + G(x).$$

由此二式易得：

$$1 = F(0) + G(1),$$

$$x^2 + cosy = F(y) + G(x) + 1 + \frac{1}{6}y^2.$$

所以，

$$u = \frac{1}{6}x^3y^2 + x^2 + cosy - \frac{1}{6}y^2 - 1.$$

习题 3.3 求下列波动方程的特征线并化简下列方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2cosx\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - sin^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - sinx\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

解: 方程的特征方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2cosx\frac{dy}{dx} - sin^2x = 0,$$

由此得

$$\frac{dy}{dx} = cosx \pm 1,$$

解得特征线：$y - sinx - x = C_1$, $y - sinx + x = C_2$.
作变换：$\xi = y - sinx - x$, $\eta = y - sinx + x$, 代入方程，整理化简得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

习题 3.4 解初值问题 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u|_{y=0} = sinx \\ u_y|_{y=0} = x \end{cases}$

解: 特征方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0,$$

由此得: $\frac{dy}{dx} = -1$, $\frac{dy}{dx} = -1$,
解得特征线：$y + x = C_1$, $y - 3x = C_2$.
作变换：$\xi = y + x$, $\eta = y - 3x$, 代入方程，整理化简得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

$\therefore\ u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$,
$\therefore\ u(x, y) = F(y + x) + G(y - 3x)$,
其中F, G 待定函数. 代入初值：

$$sinx = F(x) + G(-3x),$$

$$x = F'(x) + G'(-3x),$$

对第二式积分得：

$$\frac{1}{2}x^2 = F(x) - \frac{1}{3}G(-3x).$$

解得：

$$F(x) = \frac{1}{4}sinx + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}C$$

$$G(x) = \frac{3}{4}sin(-\frac{x}{3}) - \frac{1}{24}x^2 - \frac{3}{4}C$$

$$\therefore\ u(x,y) = \frac{1}{4}sin(x+y) + \frac{3}{8}(x+y)^2 + \frac{3}{4}sin(x-\frac{y}{3}) - \frac{1}{24}(y-3x)^2$$

习题 3.5 求解下列初值问题

$$(1)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \sin x \\ u_t|_{t=0} = x^2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \ln(1+x^2) \\ u_t|_{t=0} = 2 \end{cases}$$

解: (1). 代 D'Alembert 公式：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\sin(x-at)+\sin(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} s^2 ds \\ &= \sin x\cos at + x^2 t + \frac{1}{3}a^2t^3 \end{aligned}$$

(2). 代 D'Alembert 公式：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\ln 1+(x-at)^2 + \ln 1+(x+at)^2}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} 2ds \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+(x-at)^2)(1+(x+at)^2) + 2t \end{aligned}$$

习题 3.6 求解下列初值问题

$$(1).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x \\ u|_{t=0} = \cos x \\ u_t|_{t=0} = x \end{cases} \qquad (2).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin x \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \sin x \end{cases}$$

解: (1). 问题分解成：

$$(I).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \cos x \\ u_t|_{t=0} = x \end{cases}$$

$$(II).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

问题 (I) 由 D'Alembert 公式求解：$u_I(x,t) = \cos x\cos at + xt$

问题 (II) 由齐次化原理解之：先求得问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w|_{t=\tau} = 0 \\ w_t|_{t=\tau} = -\sin x \end{cases}$$

的解：

$$\begin{aligned} w(x,t;\tau) &= \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} -\sin s ds \\ &= -\frac{1}{a}\sin x \sin a(t-\tau) \end{aligned}$$

根据齐次化原理 (II) 的解为：

$$\begin{aligned} u_{II}(x,t) &= \int_0^t w(x,t;\tau)d\tau \\ &= -\frac{1}{a}\int_0^t \sin x \sin a(t-\tau)d\tau \\ &= -\frac{1}{a^2}\sin x + \frac{1}{a^2}\sin x \cos at \end{aligned}$$

原问题的解为：

$$\begin{aligned} u &= u_I + u_{II} \\ &= \cos x \cos at + xt - \frac{1}{a^2}\sin x + \frac{1}{a^2}\sin x \cos at \end{aligned}$$

(2). 问题分解成：$(I).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \sin x \end{cases}$　　$(II).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin x \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$

问题 (I) 由 D'Alembert 公式求解：$u_I(x,t) = \sin x \sin t$

问题 (II) 由齐次化原理解之：先求得问题 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=\tau} = 0 \\ u_t|_{t=\tau} = \tau \sin x \end{cases}$ 的解为

$$\begin{aligned} w(x,t;\tau) &= \frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+t-\tau} \tau \sin s ds \\ &= \tau \sin x \sin(t-\tau) \end{aligned}$$

根据齐次化原理 (II) 的解为：

$$\begin{aligned} u_{II}(x,t) &= \int_0^t w(x,t;\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \tau \sin x \sin(t-\tau)d\tau \\ &= \sin x(t - \sin t) \end{aligned}$$

原问题的解为：$u = u_I + u_{II} = t\sin x$.

习题 3.7 利用延拓法求下列定解问题的解

$$(1)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (x \geq 0,\ y > 0) \\ u|_{y=0} = 2x^2 & (x > 0) \\ u_y|_{y=0} = 3x & (x > 0) \\ u|_{x=0} = 0 & (y \geq 0) \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x \geq 0,\ t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (x \geq 0) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) & (x \geq 0) \\ u_x|_{x=0} = 0 & (t > 0) \end{cases}$$

解: (1). 作解 $u(x,y)$ 的奇延拓：

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & x \geq 0 \\ -u(-x,y), & x < 0 \end{cases}$$

则恒有 $v(0,y) = 0$, 且易验证 v 满足初值问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} & (|x| < \infty,\ y > 0) \\ v|_{y=0} = \varphi(x) & (|x| < \infty) \\ v_y|_{y=0} = \psi(x) & (|x| < \infty) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 分别为:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \geq 0 \\ l - 2x^2, & x < 0 \end{cases}, \quad \psi(x) = 3x.$$

代入 D'Alembert 公式：

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \psi(s)ds \\ &= \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 3xy, & x \geq y \\ 7xy & x < y \end{cases} \end{aligned}$$

限制于 $x \geq 0$, 得

$$u(x,y) = v(x,y)|_{x|\geq 0} = \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 3xy, & x \geq y \\ 7xy & 0 \leq x < y \end{cases}$$

(2). 作解 $u(x,t)$ 的偶延拓：

$$v(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x \geq 0 \\ u(-x,t), & x < 0 \end{cases}$$

则恒有 $v_x(0,t)=0$, 且易验证 v 满足初值问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (|x|<\infty,\ t>0) \\ v|_{t=0}=\hat{\varphi}(x) \quad (|x|<\infty) \\ v_t|_{t=0}=\hat{\psi}(x) \quad (|x|<\infty) \end{cases}$$

其中, $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\psi}(x)$ 分别为 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 的偶延拓, 即:

$$\hat{\varphi}(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\geq 0 \\ \varphi(-x), & x<0 \end{cases}, \quad \hat{\psi}(x)=\begin{cases} \psi(x), & x\geq 0 \\ \psi(-x), & x<0 \end{cases}$$

代 D'Alembert 公式：

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{\hat{\varphi}(x-at)+\hat{\varphi}(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{\psi}(s)ds \\ &= \begin{cases} \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, & x\geq at \\ \frac{\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(s)ds, & x<at \end{cases} \end{aligned}$$

限制于 $x\geq 0$, 得 $u(x,y)=v(x,y)|_{x|\geq 0}$.

习题 3.8 证明：若 $w(x,t,\tau)$ 是定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w|_{t=\tau}=f(x,\tau) \end{cases}$ 的解，则 $u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$ 是定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \\ u|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解。

证明 先验证 u 满足方程：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}=w(x,t,t)+\int_0^t\frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau=0+\int_0^t\frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}=\frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)(x,t,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}(x,t,\tau)d\tau=f(x,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}(x,t,\tau)d\tau \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}=\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}(x,t,\tau)d\tau \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}=f(x,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}d\tau=f(x,t)$$

再验证满足定解条件：

$$u(x,0)=0$$

得证。

习题 3.9 证明：若 $w(x,t\tau)$ 是定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w|_{x=0}=w|_{x=l}=0 \\ w|_{t=\tau}=0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0}=f(x,\tau) \end{cases}$ 的解，则 $u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$ 是定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解。

解 先验证 u 满足方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=w(x,t,t)+\int_0^t\frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau=0+\int_0^t\frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}=\frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)(x,t,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}(x,t,\tau)d\tau=f(x,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}(x,t,\tau)d\tau$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}=\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}(x,t,\tau)d\tau$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}=f(x,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}d\tau=f(x,t)$$

再验证满足定解条件：

$$u(0,t)=\int_0^t w(0,t,\tau)d\tau=\int_0^t 0d\tau=0$$

$$u(l,t)=\int_0^t w(l,t,\tau)d\tau=\int_0^t 0d\tau=0$$

$$u(x,0)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$$

得证。

习题 3.10 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \\ u|_{t=0}=x^3+y^2z \\ u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

解: 由 Poission 公式得：

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{S_{at}^M}\frac{\xi^3+\eta^2\zeta}{at}ds$$

其中, S_{at}^M 是以 $M(x,y,z)$ 为球心, at 为半径的球面: $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=(at)^2$.
作球面坐标变换:

$$\begin{cases} \xi = x + at\sin\varphi\cos\theta \\ \eta = y + at\sin\varphi\sin\theta \\ \zeta = z + at\cos\varphi \end{cases}$$

计算面积分

$$\begin{aligned}
&\int\int_{S_{at}^M} \frac{\xi^3+\eta^2\zeta}{at} ds \\
= \quad & at\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}[(x+at\sin\varphi\cos\theta)^3+(y+at\sin\varphi\sin\theta)^2(z+at\cos\varphi)]d\theta \\
= \quad & at\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi[2x^3+3xa^2t^2\sin^2\varphi+(2y^2+a^2t^2\sin^2\varphi)(z+at\cos\varphi)]d\varphi \\
= \quad & at\pi[4x^3+4xa^2t^2+4y^2z+\frac{4}{3}a^2t^2z]
\end{aligned}$$

于是

$$u(x,y,z,t) = x^3+y^2z+3xa^2t^2+za^2t^2.$$

习题 3.11 求初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ u|_{t=0} = \varphi(r) \\ u_t|_{t=0} = \psi(r) \end{cases}$$

的轴对称解 $u=u(r,t)$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.
解: 由 Poission 公式得:

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) \quad = \quad & u(r,t) = \frac{1}{2\pi a}(\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\sqrt{\xi^2+\eta^2})}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta \\
& +\int\int_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2})}{\sqrt{(at^2)-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta) \\
= \quad & \frac{1}{2\pi a}(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{at}\frac{\varphi(\sqrt{(r\cos\theta+x)^2+(r\sin\theta+y)^2})}{\sqrt{(at^2)-r^2}}rdr \\
& +\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{at}\frac{\psi(\sqrt{(r\cos\theta+x)^2+(r\sin\theta+y)^2})}{\sqrt{(at^2)-r^2}}rdr)
\end{aligned}$$

其中, Σ_{at}^M 是以 $M(x,y)$ 为园心, at 为半径的圆: $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\le(at)^2$.
r,θ 是极坐标变换:

$$\begin{cases} \xi = x + r\cos\theta \\ \eta = y + r\sin\theta \end{cases}$$

习题 3.12 利用降维法, 由二维 *Poission* 公式, 导出弦振动方程的 *D'Alembert* 公式。

解: 设 $u(x,t)$ 是下列定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$ 的解。设 $v(x,y,t) = u(x,t)$，则 v 满足下列方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) \\ v_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

由二维 Poission 公式得

$$\begin{aligned} v(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}(\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{(at^2) - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta \\ &\quad + \int\int_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(x)}{\sqrt{(at^2) - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta) \end{aligned}$$

其中，Σ_{at}^M 是以 $M(x,y)$ 为园心，at 为半径的园：$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \le (at)^2$.
在直角坐标下，先对 η 积分，记 $b = \sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2}$，并利用 $\int_{-b}^{b} \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \pi$，

$$\begin{aligned} v(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi \int_{y-b}^{y+b} \frac{d\eta}{\sqrt{b^2 - (\eta - y)^2}} d\eta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \int_{y-b}^{y+b} \frac{d\eta}{\sqrt{b^2 - (\eta - y)^2}} d\eta \\ &= \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2a} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

由解的唯一性知：

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2a} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

即为 D'Alembert 公式。

第 4 章　分离变量法

§4.1　基本要求与内容提要

一. 基本要求

1. 了解分离变量法的思想, 熟悉用分离变量法求解定解问题的步骤;

2. 会用分离变量法求解一维齐次波动方程和热传导方程以及二维 Laplace 方程带有齐次边界条件的定解问题;

3. 会用本征函数 (又称固有函数或特征函数) 法求解非齐次方程带有齐次边界条件的定解问题;

4. 会将定解问题中的非齐次边界条件齐次化, 并且求解相相应的定解问题;

5. 了解本征值 (又称固有值或特征值) 问题在分离变量法中的意义与作用, 会求解常用的本征值问题.

二. 内容提要

1. 分离变量法的思想与适用范围

分离变量法的主要思路：把求解偏微分方程转化为求解常微分方程, 且把未知函数按固有函数展开表示成 Fourier 级数；主要理论基础：线性偏微分方程的叠加原理和本征值问题的相关理论；主要缺点为：对方程以及的求解区域有较强限制，一般要求是常系数的线性偏微分方程，区域一般要求为区间，矩形区域，圆域，柱域，球域等。

2. 用分离变量法求解定解问题的一般步骤

(1). 求出满足齐次方程和 (部分) 齐次边界条件的且可变量分离的所有非零解, 把偏微分方程的定解问题化为常微分方程的定解问题;

(2). 求解本征问题，确定所有的本征值以及本征函数;

(3). 交本征值代入其它的常微分方程且求解, 所求得的解与本征函数相乘得到满足齐次方程和 (部分) 齐次边界条件的所有非零解的可变量分离解;

(4). 利用线性叠加原理, 将由 (3) 所得的所有变量分离解叠加起来成为一个级数形式解 (它含有可数多个可任意取值的常数), 只要适当选取其中的任意常数使它满足定解问题中的初始条件和其它的边界条件, 就得到了定解问题的解。

3. 求解带有非齐次方程和 (部分) 齐次边界条件的定解问题的本征函数法

(1). 先考虑一个由相应的齐次方程和 (部分) 齐次边界条件组成的定解问题，求出相应定解问题的本征函数系;

(2). 把原定解问题中的条件未知函数，非齐次项，初始条件以及其余的边界条件按本征函数展开并且把它们代入定解问题，得到一个非齐次常微分方程的定解问题;

(3). 利用常微分方程知识求解非齐次常微分方程的定解问题, 将所得的解代入未知函数的展开式, 即得原定解问题的解。

4. 非齐次边界条件的处理

有些定解问题中所给的齐次边界条件不足以保证本征值问题有可数多个本征值以及可数多个本征函数，这时必须首先找未知函数的一个适当替换，将部分非齐次的边界条件化为齐次边界条件, 然后再根据具体情况用分离变量法或按本征函数 (特征) 展法来求解。在大多数情况下找到的替换往往只能把非齐次的边界条件化为齐次边界条

件，而方程可能还是非齐次偏微分方程，这时我们用本征函数（特征）展法来求解新的定解问题。在某些特殊的情况下，我们可以找到一个替换不仅能把非齐次的边界条件化为齐次边界条件，而且也能把方程化为一个齐次偏微分方程，这时可以直接用分离变量法来求解新的定解问题，例如考虑定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A,\ 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\ell} = B, \\ u(x,t)|_{t=0} = 0, 0 < x < \ell \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, 0 < x < \ell. \end{cases}$$

其中 A 和 B 为给定的常数。我们取函数

$$w(x,t) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + (\frac{A\ell}{2a^2} + \frac{B}{\ell})x$$

则

$$w|_{x=0} = 0,\ w|_{x=\ell} = B.$$

记 $U(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ U|_{x=0} = 0,\ U|_{x=\ell} = 0, \\ U(x,t)|_{t=0} = \frac{A}{2a^2}x^2 - (\frac{A\ell}{2a^2} + \frac{B}{\ell})x, 0 < x < \ell \\ \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = 0, 0 < x < \ell. \end{cases}$$

这样我们只要直接利用分离变量法求出一个齐次边界条件齐次方程的初边值问题的解即可。

§4.2　习题解答

习题 4.1 *求解下列本征问题:*

$$(1).\quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (0 < x < l) \\ X(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$(2).\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (0 < x < l) \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$(3).\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (0 < x < l) \\ X(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0 & (h > 0\text{常数}) \end{cases}$$

$$(4).\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(2\pi),\ X'(0) = X'(2\pi) \end{cases}$$

解 (1): (a) 当 $\lambda \le 0$ 时，可以验证没有非零解。所以 $\lambda \le 0$ 不是本征值。

(b) 当 $\lambda > 0$ 时，通解为

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

代入边界条件，可知 $A = 0, B\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. 为使有非零解，易知此题本征值为

$$\lambda = (\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{l})^2, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

本征函数为

$$X(x) = \sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

解 (2): (a) 当 $\lambda < 0$ 时，不是本征值。

(b) 当 $\lambda = 0$ 时，通解为 $X(x) = Cx + D$, 由边界条件，知 $C = 0$. 故可解得 $X(x) = D$. $\lambda = 0$ 是本征值。

(c) 当 $\lambda > 0$ 时，

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

代入边界条件，易知 $B = 0, A\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. 所以本征值为

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

本征函数为

$$X_0(x) = 1, \;\; X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

解 (3)：(A) 当 $\lambda \le 0$, 不是本征值.

(B) 当 $\lambda > 0$ 时, $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$. 由边界条件知

$$A = 0, \quad B(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

为使 $B \ne 0$, 必须

$$\tan\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}.$$

令 $x = \sqrt{\lambda}l$, 得方程

$$\tan x = -\frac{x}{lh}, \quad x > 0.$$

以上方程由无穷多个解 μ_n, 且在每个周期 $(n\pi - \frac{1}{2}\pi, n\pi + \frac{1}{2}\pi), (n = 1, 2, \cdots)$ 都有一个. 因此本征值和本征函数可记为

$$\lambda_n = (\frac{\mu_n}{l})^2, \; X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

解 (4): (A) 当 $\lambda < 0$, 不是本征值.

(B) 当 $\lambda = 0$, $X(x) = 1$, 故 $\lambda_0 = 0$ 是本征值.

(C) w 当 $\lambda > 0$, $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$. 由边界条件知

$$\begin{cases} A(\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1) + B\sin\sqrt{\lambda}2\pi = 0, \\ -A\sin\sqrt{\lambda}2\pi + B(\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1) = 0. \end{cases}$$

为使 $A \neq 0$ 或 $B \neq 0$, 须 $\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1 = 0$, 即 $\sin\sqrt{\lambda_n}2\pi = 0$. 因此本征值和本征函数为

$$\lambda_n = n^2,\ X_n = \cos nx,\ \sin nx, (n = 1, 2, \cdots).$$

习题 4.2 试用分离变量法解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \sin\frac{3\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x) & \end{cases}$$

解: (i) 设 $u = X(x)T(t)$ ，代入方程得

$$X(x)T''(t) = a^2T(t)X''(x)$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

或

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2T(t) = 0$$

(ii) 解下列本征值问题,

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (0 < x < l) \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

可得

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2,\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l},\ (n = 1, 2, \cdots)$$

故

$$T_n(t) = a_n\cos\frac{n\pi at}{l} + b_n\sin\frac{n\pi at}{l}, (n = 1, 2, \cdots)$$

(iii) 则解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l},$$

由初始条件得

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{l} = \sin\frac{3\pi x}{l} \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l} = x(l-x) \end{aligned}$$

所以可解得

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \begin{cases} 1, & n=3 \\ 0, & n\neq 3 \end{cases}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{4}{al}(\frac{l}{n\pi})^4(1-(-1)^n)$$

则

$$u(x,t) = \cos\frac{3a\pi t}{l}\sin\frac{3\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{al}(\frac{l}{n\pi})^4(1-(-1)^n)\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

习题 4.3 试用分离变量法解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l, t>0) \\ u|_{x=0}=0, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=0 & (t\geq 0) \\ u|_{t=0}=\sin\frac{3\pi x}{l} & (0\leq x\leq l) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=x(l-x) & \end{cases}$$

解: (i) 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$, 代入方程得

$$X(x)T''(t)=a^2T(t)X''(x)$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

或

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

(ii) 解下列本征值问题,

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (0<x<l) \\ X(0)=0, X'(l)=0 & \end{cases}$$

得

$$\lambda_n=[\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{l}]^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l},\ (n=1,2,\cdots)$$

故

$$T_n(t)=a_n\cos\frac{(n-\frac{1}{2})\pi at}{l}+b_n\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi at}{l}, (n=1,2,\cdots)$$

(iii) 设

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos\frac{(n-\frac{1}{2})\pi at}{l}+B_n\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi at}{l}]\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}$$

由初始条件，可解得

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}dx, \quad B_n = \frac{2}{a(n-\frac{1}{2})\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}dx.$$

习题 4.4 设有长为 l 的均匀细杆，侧面绝热，内部没有热源，其初始温度分布为 $u|_{t=0} = Ax$，两端温度 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$，求此细杆上的温度分布。

解: 此细杆中的热传导方程的定解问题为

$$\begin{cases} u_t = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = Ax & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

用分离变量法可解.

(i) 设

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入方程得

$$X(x)T'(t) = a^2T(t)X''(x)$$

即

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

或

$$T'(t) + \lambda a^2T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

(ii) 解本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (0 < x < l) \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

得

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2,\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l},\ (n = 1, 2, \cdots)$$

则

$$T_n(t) = a_n e^{\lambda_n a^2 t}, (n = 1, 2, \cdots)$$

(iii) 解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n\pi t}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

由初始条件，得

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l Ax\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2Al}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Al}{n\pi}(-1)^{n+1} e^{-\frac{a^2 n\pi t}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

习题 4.5 试解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 \\ u|_{t=0} = x^2 y(x-a)(y-b) \end{cases}$$

解: 用分离变量法解,

(i) 设 $U(x,y,t) = V(x,y)T(t)$, 代入方程得

$$V(x,y)T'(t) = k^2 T(t)(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2})$$

即

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V(x,y) = 0, \tag{4.1}$$

$$T'(t) + k^2 \lambda T(t) = 0,$$

(ii) 再设 $V(x,y) = X(x)Y(y)$, 代入 4.1 中, 得

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'' + \lambda Y}{Y} = -\mu$$

即

$$X'' + \mu X = 0, \quad Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0,$$

由边界条件得

$$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0$$

解 $X(x), Y(y)$ 的本征值问题得

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \ (n = 1, 2, \cdots) \\ \lambda - \mu_n &= \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{b}, \ (m = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

所以

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}$$

$$T_{m,n} = Ce^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}$$

则

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{4}{l^2}\int_0^a \int_0^b x^2(x-a)(y-b)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}dxdy \\ &= \frac{16a^3b^3}{n^3m^3\pi^6}[(-1)^m - 1][2(-1)^n + 1] \end{aligned}$$

习题 4.6 试用分离变量法求解定解问题.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l,t>0) \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=0,\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=0 & (t\geq 0) \\ u|_{t=0}=1+\cos\frac{3\pi x}{l},\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0 & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

解: 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$, 由前面解法知, (i)

$$X(x)T''(t)=a^2T(t)X''(x)$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

(ii) 解本征值问题,

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (0<x<l) \\ X'(0)=0,X'(l)=0 \end{cases}$$

得

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\ X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l},\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$T_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l},(n=0,1,2,\cdots)$$

以及

$$u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}]\cos\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$A_0=1,A_3=1,A_n=0,(n\neq 3,0),\ B_n=0$$

习题 4.7 用分离变量法解下列边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \\ u(x,y)=u(a,y)=0 \\ u(x,0)=f(x)u(x,b)=0,f(0)=f(a)=0 \end{cases}$$

解: 设 $u(x,y)=X(x)Y(y)$, 代入方程得 $X''(x)Y(y)+Y''(y)X(x)=0$, 则

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda$$

即

$$X''+\lambda X=0,\quad Y''-\lambda Y=0$$

解本征值问题

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = X(a) = 0$$

得

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2},\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, (n = 1, 2, \cdots)$$

这样

$$Y(y) = a_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

所以,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}]\sin\frac{n\pi x}{a}$$

其中

$$A_n + B_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$
$$A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = 0$$

所以

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{e^{-\frac{2n\pi b}{a}}}{1 - e^{-\frac{2n\pi b}{a}}}\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx, \\ B_n &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{2n\pi b}{a}}}\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \end{aligned}$$

整理即得

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{sh\frac{n\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

其中

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

习题 4.8 试用分离变量法解求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < 1, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = 3\sin 2\pi x, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

解: 设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入方程中得

$$T''(t)X(x) + 2T'(t)X(x) = X''(x)T(t)$$

即

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2T'}{T} = -\lambda X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + 2T' + \lambda T = 0$$

解本征值问题

$$X''+\lambda X=0,\quad X(0)=X(1)=0$$

得

$$\lambda_n=n^2\pi^2,\ X_n(x)=\sin n\pi x,\ (n=1,2,\cdots)$$

则

$$T(t)=e^{-t}(A_n\cos t\sqrt{\lambda_n-1}+B_n\sin t\sqrt{\lambda_n-1})$$

最后

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-t}(A_n\cos t\sqrt{\lambda_n-1}+B_n\sin t\sqrt{\lambda_n-1}]\sin n\pi x.$$

由初始条件,

$$A_2=3,A_n=0,(n\neq 2);B_2=\frac{3}{\sqrt{4\pi^2-1}},B_n=0,(n\neq 2)$$

即

$$u(x,t)=e^{-t}[3\cos t\sqrt{4\pi^2-1}+\frac{3}{\sqrt{4\pi^2-1}}\sin t\sqrt{4\pi^2-1}]\sin 2\pi x$$

习题 4.9 求解定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bshx & (0<x<l,t>0)\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0 & (t\geq 0)\\ u|_{t=0}=0,\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0\end{cases}$$

其中 b 为常数。

解:因为非齐次项不含 t, 可设

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$$

其中

$$a^2w''+bshx=0,\quad w(0)=w(l)=0$$

则可解得

$$w(x)=\frac{b}{a^2}(\frac{x}{l}shl-shx-l+x)$$

故

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (0<x<l,t>0)\\ v|_{x=0}=0,v|_{x=l}=0 & (t\geq 0)\\ v|_{t=0}=-w(x),\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=0\end{cases}$$

解得

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$A_n=-\frac{2}{l}\int_0^l w(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=2[\frac{l}{n\pi}-shl(\frac{1}{\pi}-\frac{n\pi}{n^2\pi^2+l^2})(-1)^{n+1}]$$

习题 4.10 求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\sin\omega t & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

其中 A, ω 为常数。

解：由相应的齐次方程的解知，可将解 $u(x,t)$ 和非齐次项可特征函数系展开，即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l},\ A\sin\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2Al}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin\omega t$$

代入方程，可得

$$T_n''(t) + a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t) = f_n(t), \quad T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0$$

求其解，可得

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{2l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}d\tau \\ &= \frac{2Al^2}{an^2\pi^2}[1-(-1)^n]\frac{1}{\omega^2 - \frac{n^2\pi^2}{l^2}}(\omega\sin\frac{an\pi t}{l} - \frac{n\pi}{l}\sin\omega t) \end{aligned}$$

习题 4.11 求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = A, u|_{x=l} = B & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = g(x), \end{cases}$$

解：因为非齐次项与 t 无关，故可设

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

其中

$$a^2 w''(x) + f(x) = 0, \quad w(0) = A, w(l) = B$$

解得

$$w(x) = (1-\frac{x}{l})A + \frac{x}{l}B + \frac{x}{la^2}\int_0^l\int_0^y f(\xi)d\xi dy - \frac{1}{a^2}\int_0^x\int_0^y f(\xi)d\xi dy$$

又因为此时 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (0 < x < l, t > 0) \\ v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = g(x) - w(x), \end{cases}$$

求解上述 Dirichlet 边值问题, 得

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l [g(x) - w(x)] \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

习题 4.12 求解圆环的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(r,\theta) = 0, \\ u(r_1,\theta) = f(\theta), \\ u(r_2,\theta) = g(\theta) \end{cases}$$

解：设

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

代入方程得

$$\Theta(R'' + \frac{1}{r}R') + \frac{1}{r^2}\Theta'' R = 0$$

整理得

$$\frac{r^2 R + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

求解特征值问题

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi), \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$$

得

$$\lambda_n = n^2, \;\; \Theta_n = a_n \cos n\pi\theta + b_n \sin n\pi\theta, \;\; (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

再解 $R(r)$ 的方程

$$r^2 R'' + rR' - \lambda_n R = 0$$

得

$$R_0(r) = a_0 \ln r + b_0, \; R_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}$$

所以解 u 可以表示成

$$u(r,\theta) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\pi\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\pi\theta]$$

再由边值条件，可得

$$
\begin{aligned}
A_0 \ln r_1 + B_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \\
A_0 \ln r_2 + B_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta \\
A_n {r_1}^n + B_n {r_1}^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\pi\theta d\theta \\
A_n {r_2}^n + B_n {r_2}^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\pi\theta d\theta \\
C_n {r_1}^n + D_n {r_1}^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\pi\theta d\theta \\
C_n {r_2}^n + D_n {r_2}^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\pi\theta d\theta
\end{aligned}
$$

习题 4.13 在平面极坐标系中将二维波动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta})$$

进行变量分离，写出相应的常微分方程。

解：设

$$u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

代入方程，得

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

故

$$
\begin{aligned}
&T'' - a^2\lambda T = 0, \\
&\frac{r^2R'' + rR'}{R} - \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu
\end{aligned}
$$

整理上面第二式，得

$$
\begin{aligned}
&r^2R'' + rR' - (\lambda r^2 + \mu)R = 0, \\
&\Theta'' + \mu\Theta = 0
\end{aligned}
$$

习题 4.14 利用 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 的级数表达式证明：

$$
\begin{aligned}
&J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sqrt{\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \\
&J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x
\end{aligned}
$$

由此并利用 $J_\nu(x)$ 的递推公式，说明阶数为奇数一半的 *Bessel* 函数都能用初等函数表示。

解：由递推公式知，设，

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}$$

其中，

$$a_0=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{3}{2})}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(k+1)}$$

当 k 为偶数时，

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(k+1)}=\frac{a_{k-4}}{(k-2)k(k+1)(k-1)}=\cdots=\frac{(-1)^{k/2}a_0}{(k+1)!}$$

所以，计算 a_{2k}，得

$$a_{2k}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

所以，

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{1+2k}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

则

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}$$

其中，

$$a_0=\frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(k-1)}$$

所以，

$$a_{2k}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

则

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

习题 4.15 用 $J_0(\alpha x)$ 和 $J_1(\alpha x)$ 表示 $J_4(\alpha x)$.

解：

$$\begin{aligned}
J_2(x) &= \frac{2J_1(x)}{x}-J_0(x),\quad J_3(x)=\frac{4J_2(x)}{x}-J_1(x),\\
J_4(x) &= \frac{6J_3(x)}{x}-J_2(x)=(\frac{24}{x^2}-1)J_2(x)-\frac{6J_1(x)}{x}\\
&= (\frac{48}{x^2}-2-\frac{6}{x})J_1(x)-(\frac{24}{x^2}-1)J_0(x)
\end{aligned}$$

所以，

$$J_4(\alpha x)=(\frac{48}{\alpha^2x^2}-2-\frac{6}{\alpha x})J_1(\alpha x)-(\frac{24}{\alpha^2x^2}-1)J_0(\alpha x)$$

习题 4.16 利用 $J_\nu(x)$ 的级数展开式证明递推公式 $(3.3.17a)$.
解：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^\nu J_\nu(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^\nu}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2\nu+2k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^\nu(\nu+k)}{k!(\nu+k)\Gamma(\nu+k)}(\frac{x}{2})^{\nu+\nu-1+2k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^\nu}{k!\Gamma(\nu-1+k+1)}(\frac{x}{2})^{\nu-1+2k}\\ &= x^\nu J_{\nu-1}(x)\end{aligned}$$

习题 4.17 求证 $\int J_3(x)dx = -\frac{4}{x}J_1(x)+J_0(x)+C$.
证明：由公式 $(3.3.18)_b$ 可知

$$\int J_3(x)dx = \int J_1(x)dx - 2J_2(x) + C$$

再由 $(3.3.18)_a$ 知

$$J_2(x) = \frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x)$$

以及 $(3.3.17)_b$, 得

$$J_0(x) = -\int J_1(x)dx + C$$

代入 (4.2) 中, 即得

$$\int J_3(x)dx = -\frac{4}{x}J_1(x) + J_0(x) + C$$

习题 4.18 计算下列积分：

$$(1). \int x^3 J_0(x)dx,\ (2). \int x^2 J_1(x)dx,\ (3). \int J_0(\sqrt{x})dx$$

解：

$$\begin{aligned}\int x^3 J_0(x)dx &= \int x^2(xJ_1)'dx = x^3J_1(x) - 2\int x^2 J_1(x)dx + C\\ &= x^3J_1(x) - 2x^2J_2(x) + C = x^3J_1(x) - 2x^2[\frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x)] + C\\ &= (x^3-4x)J_1(x) + 2x^2J_0(x) + C.\\ \int x^2 J_1(x)dx &= x^2J_2(x) + C = 2xJ_1(x) - x^2J_0(x) + C\\ \int J_0(\sqrt{x})dx &= \int J_0(y)2ydy = 2yJ_1(y) + C = 2\sqrt{x}J_1(\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

习题 4.19 将 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上展开为 $J_{1/2}(\lambda_n x)$ 的 F-B 级数，其中 λ_n 式 $J_{1/2}(\pi x)=0$ 的正根。

解：$J_{1/2}(\pi x)$ 的解为 $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_{1/2}(\lambda_n x)$$

其中

$$\begin{aligned}C_n &= \int_0^{\pi}x\sqrt{x}J_{1/2}(\lambda_n x)dx=\frac{2}{\pi^2J^2_{\frac{3}{2}}(\lambda_n\pi)}\int_0^{\lambda_n\pi}\frac{y^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}-1}(\lambda_n y)}{\lambda_n^{\frac{5}{2}}}dy\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\lambda_nJ_{\frac{3}{2}}(\lambda_n\pi)}\end{aligned}$$

习题 4.20 将 $f(x)=4x-x^3$ 在 $(0,2)$ 上展开为 $J_1(\lambda_n x)$ 的 F-B 级数，其中 λ_n 式 $J_1(2x)=0$ 的正根。

解：$J_1(2x)$ 的解为 $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_1(\lambda_n x)$$

其中

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{2}{4J_2^2(2\lambda_n)}\int_0^2x(4x-x^3)J_1(\lambda_n x)dx\\ &= \frac{1}{2J_2^2(\lambda_n2)}\int_0^{2\lambda_n}[\frac{4y^2}{\lambda_n^3}-\frac{y^4}{\lambda_n^5}]J_1(y)dy\\ &= \frac{8J_3(\lambda_n2)}{\lambda_n^2J_2^2(\lambda_n2)}\end{aligned}$$

习题 4.21 将 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,1)$ 上展开为 $J_0(\lambda_n x)$ 的 F-B 级数，其中 λ_n 式 $J_0(x)$ 的正零点。

解：$J_0(x)$ 的解为 $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\lambda_n x)$$

其中

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)}\int_0^1x\ln xJ_0(\lambda_n x)dx\\ &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)}\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^{\lambda_n}y(\ln y-\ln\lambda_n)J_0(y)dx\\ &= \frac{-2}{\lambda_n^2J_1^2(\lambda_n)}\end{aligned}$$

习题 4.22 将 $f(x)=\begin{cases}x, 0<x<1,\\ 0, 1<x<2,\end{cases}$ 展开为 $J_1(\lambda_n x)$ 的 F-B 级数，其中 λ_n 是方程 $J_1'(2x)=0$ 的非负根。

解：设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}C_iJ_1(\lambda_i x)$$

其中

$$\begin{aligned}C_i &= \frac{2}{(4-\frac{1}{\lambda_i^2})J_1^2(2\lambda_i)}\int_0^1 x^2J_1(\lambda_i x)dx\\ &= \frac{2J_2(\lambda_i)}{(4-\frac{1}{\lambda_i^2})J_1^2(2\lambda_i)\lambda_i}\end{aligned}$$

习题 4.23 将 $f(x)=x$ 在区间 $(0,3)$ 上展开为 $J_1(\lambda_n x)$ 的 F-B 级数，其中 λ_n 是 $J_1'(3x)$ 的非负根。

解：设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}C_iJ_1(\lambda_i x)$$

其中

$$\begin{aligned}C_i &= \frac{2}{(9-\frac{1}{\lambda_i^2})J_1^2(3\lambda_i)}\int_0^3 x^2J_1(\lambda_i x)dx\\ &= \frac{18J_2(3\lambda_i)}{(9-\frac{1}{\lambda_i^2})J_1^2(3\lambda_i)\lambda_i}\end{aligned}$$

习题 4.24 证明 $P_n(-1)=(-1)^n, P_{2n-1}(0)=0, P_{2n}(0)=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

证明：由课本公式 (3.4.9) 知，当 n 是奇数时，$P_n(0)=0$. 所以，$P_{2n-1}(0)=0$. 由 (3.4.12) 式和莱布尼兹公式，可知 $P_n(x)=x^n+(1-x^2)Q(x)$, $Q(x)$ 是多项式。所以，$P_n(-1)=(-1)^n$.

再由 (3.4.14),

$$2nP_{2n}(0)=-(2n-1)P_{2n-2}(0)$$

故

$$P_{2n}=-\frac{(2n-1)}{2n}P_{2n-2}(0)=\cdots=(-1)^n\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}P_0(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

习题 4.25 证明再替换 $x=\cos\theta$ 下, *Legendre* 方程可化为 $\frac{d^2y}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dy}{d\theta}+n(n+1)y=0$.

证明：在此变换下，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta}(-\csc\theta)\\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{d\theta^2}\csc^2\theta + \frac{dy}{d\theta}\cot\theta\csc\theta\end{aligned}$$

代入方程 $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ 即可得证。

习题 4.26 利用 *Rodrigues* 公式及分布积分证明：

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = 0, (k<n, \text{且 } k \text{ 为非负整数})$$

证明：证明只需注意，设

$$D_n(x) = (x^2-1)^n,$$

则当 $0 \le m < n$ 时，

$$\frac{d^m D_n(x)}{dx^m} = (x^2-1)Q_m(x)$$

其中 $Q_m(x)$ 是 x 的多项式，所以上式在 $-1,1$ 处为零。故若设 $C=\frac{1}{2^n n!}$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^k P_n(x)dx &= -Ck\int_0^1 \frac{d^{n-1}D_n(x)}{dx^{n-1}}x^{k-1}dx\\ &= \cdots(-1)^k Ck!\int_0^1 \frac{d^{n-k}D_n(x)}{dx^{n-k}}dx\\ &= (-1)^k Ck!\frac{d^{n-k-1}D_n(x)}{dx^{n-k-1}}\Big|_0^1 = 0 \quad (\text{因为} n \ge k+1)\end{aligned}$$

习题 4.27 将函数 $f(x)=\begin{cases} 0, -1<x\le 0, \\ x, 0<x<1 \end{cases}$ 展开为 $P_n(x)$ 的 *F-L* 级数。

解：

$$C_k = \frac{2k+1}{2}\int_0^1 xP_n(x)dx = \frac{1}{4}(k=0),\ \frac{1}{2}(k=1),\ \frac{5}{16}(k=2),\cdots$$

习题 4.28 将函数 $f(x)=\begin{cases} 1, 0<\theta x\le \frac{\pi}{2}, \\ 0, \frac{\pi}{2}<\theta<\pi \end{cases}$ 展开为 $P_n(\cos\theta)$ 的 *F-L* 级数。

解：

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 P_n(x)dx = \frac{1}{2}[P_{n-1}(0)-P_{n+1}(0)] = \frac{1}{2}(n=0),\ \frac{3}{4}(n=1),\ \cdots$$

习题 4.29 试证：当 $f(\theta)=\begin{cases} 1, 0<\theta\le\alpha \\ 0, \alpha<\theta<\pi \end{cases}$ 时，则有

$$f(\theta) = \frac{1-\cos\alpha}{2}P_0(\cos\theta) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)]P_n(\cos\alpha).$$

证：

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2}\int_0^\alpha P_0(\cos\phi)\sin\phi d\phi = \frac{1-\cos\alpha}{2} \\ C_n &= \frac{2n+1}{2}\int_0^\alpha P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi = \frac{2n+1}{2}\int_{\cos\alpha}^1 P_n(x)dx \quad (n\ge 1) \end{aligned}$$

由公式 $(3.3.13)_b$

$$n\int_{\cos\alpha}^1 P_n(x)dx = P_n(x)x\,|_{\cos\alpha}^1 - \int_{\cos\alpha}^1 P_n(x)dx - P_{n+1}(x)|_{\cos\alpha}^1$$

再由公式 (3.4.14), 知

$$xP_n(x) = \frac{(n+1)P_{n+1}+nP_{n-1}}{2n+1}$$

则

$$(n+1)\int_{\cos\alpha}^1 P_n(x)dx = \frac{(n+1)[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)]|_{\cos\alpha}^1}{2n+1}$$

所以,

$$\int_{\cos\alpha}^1 P_n(x)dx = \frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2n+1}$$

因此,

$$C_n = \frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2}$$

习题 4.30 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) \\ u|_{r=0}\text{有界}, u|_{r=b}=0 \\ u|_{t=0}=0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=f(r) \end{cases}$$

解：设 $u(r,t)=R(r)T(t)$, 代入方程, 得

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{rR''+R'}{rR} = -\lambda$$

即

$$T''+a^2\lambda T=0,\quad r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0$$

解本征值问题

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0, \\ R(b)=0, R(0)\text{有界} \end{cases}$$

设 $\lambda=\beta^2$, 令 $x=\beta r, y(x)=R(r)$, 则得零阶的 Bessel 方程

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+x^2y=0, \\ y(\beta b)=0, y(0)\text{有界} \end{cases}$$

所以，若设 $\xi_0^{(n)}, (n=1,2,\cdots)$ 为 $J_0(x)$ 的正根，则

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \beta_n^2 = (\frac{\xi_0^{(n)}}{b})^2,\\ R_n(r) &= J_0(\frac{\xi_0^{(n)}}{b}r) \quad (n=1,2\cdots)\end{aligned}$$

又

$$T_n(t) = a_n\cos a\beta_n t + b_n\sin a\beta_n t$$

所以，

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos a\beta_n t + B_n\sin a\beta_n t)J_0(\beta_n r)$$

其中，

$$\begin{aligned}&A_n = 0,\\ &B_n = \frac{2}{a\beta_n b^2 J_1^2(\beta_n b)}\int_0^b rf(r)J_0(\beta_n r)dr\end{aligned}$$

习题 4.31 解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + B\\ u|_{r=0}\text{有界}, u|_{r=R} = 0\\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0\end{cases}$$

解：由齐次化原理，可知若设 $w(r,t,\tau)$ 是下列问题的解

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r)\\ w|_{r=0}\text{有界}, w|_{r=R} = 0\\ w|_{t=\tau} = 0, w_t|_{t=\tau} = B\end{cases}$$

则

$$u(r,t) = \int_0^t w(x,t-\tau)d\tau$$

就是原来问题的解。由 31 题的结果知，

$$w(x,t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin a\beta_n(t-\tau)J_0(\beta_n r)$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{\xi^{(n)}}{R},\\ B_n &= \frac{2}{a\beta_n R^2 J_1^2(\beta_n R)}\int_0^R rBJ_0(\beta_n r)dr = \frac{2B}{aR\beta_n^2 J_1(\beta_n R)}\end{aligned}$$

而

$$\int_0^t \sin a\beta_n(t-\tau)d\tau = \frac{1-\cos a\beta_n t}{a\beta_n}$$

所以，

$$u(r,t) = \frac{2B}{a^2R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos a\beta_n t)}{\beta_n^3 J_1(\beta_n R)}J_0(\beta_n r)$$

习题 4.32 解定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2\frac{1}{r}(ru_r)_r \\ u|_{r=l} = u_0, u|_{r=0}\text{有界} \\ u|_{t=0} = f(r) \end{cases}$$

解：首先，令 $v(r,t) = u(r,t) - u_0$，则 $v(r,t)$ 满足齐次方程，齐次边界条件。为解出 $v(r,t)$，用分离变量法。设 $v(r,t) = R(r)T(t)$，代入方程，得

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{(rR')'}{rR} = -\lambda$$

即

$$T' + a^2\lambda T = 0, \quad r^2R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0$$

解 $R(r)$ 的本征值问题

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0, \\ R(b) = 0, R(0)\text{有界} \end{cases}$$

同 31 题的解的过程可知，若设 $\xi_0^{(n)}$ 为 $J_0(x)$ 的正跟，

$$\lambda_n = \beta_n^2, \beta_n = \frac{\xi_0^{(n)}}{l}, (n = 1, 2, \cdots)$$
$$R_n(r) = J_0(\beta_n r)$$

则 $T_n(t) = a_n e^{-a^2\beta_n^2 t}$，所以，

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\beta_n^2 t} J_0(\beta_n r)$$

其中

$$A_n = \frac{2}{l^2 J_1^2(\beta_n l)}\int_0^l r[f(r) - u_0]J_0(\beta_n r)dr, \; u(r,t) = u_0 + v(r,t).$$

习题 4.33 求下列球内的 *Dirichlet* 问题的解：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \quad (\rho < a, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi) \\ u|_{\rho=a} = \cos^2\phi \end{cases}$$

解：观察边界条件，可知 u 不依赖于 θ，故设 $u(r,\theta,\phi)=R(\rho)H(\phi)$，代入方程，分离变量，得

$$(\rho^2R')'=\lambda R\frac{1}{\sin\phi}(\sin\phi H')'+\lambda H=0$$

对 $H(\phi)$ 的方程，令 $x=\cos\phi$，记 $y(x)=H(\phi)$，有 Legendre 方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$$

故

$$\lambda_n=n(n+1),\quad H_n(\phi)==P_n(\cos\phi),(n=0,1,2,\cdots)$$

接着由 $R(\rho)$ 的方程和 u 在 $\rho=0$ 有界，可解得

$$R_n=C_n\rho^n$$

因此

$$u(\rho,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\rho^nP_n(\cos\phi)$$

用比较系数法，知

$$x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)$$

故由边界条件，

$$A_0=\frac{1}{3},A_2=\frac{2}{3a^2},A_n=0(n\neq 0,2)$$

$$u(\rho,\phi)=\frac{1}{3}+\frac{\rho^2}{a^2}\frac{2}{3}P_2(\cos\phi)=\frac{1}{3}+\frac{\rho^2}{a^2}(\cos\phi^2-\frac{1}{3})$$

习题 4.34 设高为 l 半径为 a 的圆柱体两底接地，而侧面充电到电势 u_0，求柱体内静电场的电势。

解：此定解问题为

$$\begin{cases}\Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0,\\ u|_{z=0}=0,u|_{z=l}=0,\\ u|_{r=a}=u_0\end{cases}$$

用分离变量法解以上问题。首先，设 $u(r,z)=R(r)H(z)$，代入方程中，得

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=-\frac{H''}{H}=\lambda$$

即

$$\begin{aligned}&r^2R''+rR'-\lambda r^2R=0,\\ &H''+\lambda H=0\end{aligned}$$

解 $H(z)$ 的本征值问题

$$\begin{cases}H''+\lambda H=0,\\ H(0)=0,H(h)=0\end{cases}$$

得

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{h^2}, \quad H_n(z) = \sin\frac{n\pi z}{h} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

再解 $R(r)$ 的方程，令 $x = n\pi/lr, y(x) = R(r)$，得

$$x^2y'' + xy' - x^2y = 0,\ y(0)\text{有界}$$

其解是零阶第一类虚宗量 Bessel 函数 $I_0(x)$. 故

$$R_n(r) = a_n I_0(\frac{n\pi r}{l})$$

从而

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(\frac{n\pi r}{l})\sin\frac{n\pi z}{l}$$

其中

$$A_{\ n} = \frac{2}{I_0(\frac{n\pi a}{l})l}\int_0^l u_0\sin\frac{n\pi z}{l}dz = \frac{2u_0}{n\pi I_0(\frac{n\pi a}{l})}[(-1)^n - 1]$$

习题 4.35 一半径为 a 的球，如果上半球面充电到电势 u_1，下半球面充电到电势 u_2，求球内电场中的电势。

解：观察此解与 θ 无关，于是得如下定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = (r^2u_r)_r + \frac{1}{\sin\phi}(\sin\phi u_\phi)_\phi = 0 \\ u|_{r=a} = f(\phi) = \begin{cases} u_1, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2} \\ u_2, \frac{\pi}{2} < \phi \le \pi \end{cases} \end{cases}$$

解得

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\phi)$$

将边界条件代入，得到

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{a^n}\frac{2n+1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u_2P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi] \\ &= \frac{2n+1}{2a^n}[u_1\int_0^1 P_n(x)dx + u_2\int_{-1}^0 P_n(x)dx] \\ &= \frac{1}{2a^n}[(u_1 - u_2)(P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)) + u_2(P_{n-1}(-1) - P_{n+1}(-1))] \end{aligned}$$

习题 4.36 求下列周期 S-L 问题的本征值和本征函数：

(1). $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-1) = y(1), y'(-1) = y'(1) \end{cases}$ (2). $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi) \end{cases}$

解 (1)：(i) 当 $\lambda<0$ 时，不是本征值。

(ii) 当 $\lambda=0$ 时，$y=Ax+B$，则 $A=0, y=B$，所以 $\lambda=0$ 是本征值。

(iii) 当 $\lambda>0$ 时，$y=A\cos x\sqrt{\lambda}+B\sin x\sqrt{\lambda}$. 代入边界条件，得

$$\begin{cases} B\sin\sqrt{\lambda}=0 \\ \sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}=0 \end{cases}$$

所以，要得非零的 A, B，必须 $\sin\sqrt{\lambda}=0$. 也即 $\sqrt{\lambda}=n\pi, \lambda=n^2\pi^2, (n=1,2,\cdots)$. 此时，$y=A_n\cos n\pi x+B_n\sin n\pi x$.

解 (2)：(i) 易知，$\lambda=0$ 是本征值，此时 $y=C$.

(ii) 当 $\lambda>0$ 时，$y=A\cos x\sqrt{\lambda}+B\sin x\sqrt{\lambda}$. 代入边界条件，得

$$\begin{cases} A(1-\cos\pi\sqrt{\lambda})+B\sin\pi\sqrt{\lambda}=0 \\ A\sin\pi\sqrt{\lambda}+B(1-\cos\pi\sqrt{\lambda})=0 \end{cases}$$

要得非零的 A, B，必须 $1-\cos\pi\sqrt{\lambda}=0$，则 $\pi\sqrt{\lambda}=2n\pi, \lambda_n=4n^2, (n=1,2,\cdots)$. 此时，$y_n(x)=A_n\cos(2n\pi x)+B_n\sin(2n\pi x)$.

习题 4.37 求下列 SL 问题的本征值和本征函数：

$$(1).\begin{cases} y''+y'+(1+\lambda)y=0 \\ y(0)=0, y(1)=0 \end{cases} \qquad (2).\begin{cases} y''+2y'+(1+\lambda)y=0 \\ y(0)=0, y'(1)=0 \end{cases}$$

解 (1)：设 $y=e^{\mu x}$，代入方程，得 $\mu=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}$.

(i) 当 $\lambda<-\frac{3}{4}$ 时 $y=e^{-x\frac{1}{2}}(Ae^{x\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}}+Be^{-x\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}})$. 代入边界条件，$A+B=0$，$Ae^{\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}}+Be^{-\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}}=0$，解得 $A=B=0$. 所以，此时，λ 不是本征值。

(ii) 当 $\lambda=-\frac{3}{4}$ 时，$y(x)=e^{-x\frac{1}{2}}(Ax+B)$.

代入边界条件，$B=0, A=0$，所以，此时 λ 不是本征值。

(iii) 当 $\lambda>-\frac{3}{4}$ 时，$y(x)=e^{-x\frac{1}{2}}[A\cos(x\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda})+B\sin(x\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda})]$.

代入边界条件，$A=0, B\sin(\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda})=0$. 所以要使 $B\neq 0$，须 $\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}=n\pi, (n=1,2,\cdots)$. 故

$$\lambda_n=-\frac{3}{4}-n^2\pi^2, y_n=Be^{-\frac{x}{2}}\sin n\pi x \quad (n=1,2,\cdots)$$

解 (2)：设 $y=e^{\mu x}$，代入方程，得 $\mu=-1\pm\sqrt{-\lambda}$.

(i) 当 $\lambda<0$ 时，$y=e^{-x}(Ae^{x\sqrt{-\lambda}}+Be^{-x\sqrt{-\lambda}})$.

代入边界条件，$A+B=0$，$Ae^{\sqrt{-\lambda}}(\sqrt{-\lambda}-1)+Be^{-\sqrt{-\lambda}}(-\sqrt{-\lambda}-1)=0$，解得 $A=B=0$. 所以，此时，λ 不是本征值。

(ii) 当 $\lambda=0$ 时，$y=e^{-x}(Ax+B)$. 代入边界条件，$B=0, A=0$，所以，此时 λ 不是本征值。

第 5 章　积分变换法

§5.1　基本要求与内容提要

一. 基本要求

1. 理解 Fourier 变换与 Fourier 逆变换的定义与基本性质，会求常用函数的 Fourier 变换与逆变换；

2. 会用 Fourier 变换法求解定解问题；

3. * 理解 Laplace 变换与 Laplace 逆变换的定义与基本性质，会求常用函数的 Laplace 变换与逆变换；

4. * 会用 Laplace 变换法求解定解问题。

二. 内容提要

1. Fourier 变换的定义

函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$F[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt,$$

函数 $g(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换为

$$F^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 分段光滑且绝对可积 (即满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$), 则有 Fourier 反演公式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\right]e^{i\lambda x}d\lambda,$$

即

$$F^{-1}[F[f]] = f(x).$$

2. Fourier 变换的性质

(1). **线性性质**　a_1 和 a_2 是二个（复）常数，则

$$F[a_1f_1 + a_2f_2](\lambda) = a_1F_1(\lambda) + a_2F_2(\lambda),$$

$$F^{-1}[a_1F_1 + a_2F_2](x) = a_1f_1(x) + a_2f_2(x).$$

(2). **平移性质**　设 a 是一个常数，则

$$F[f(x-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a}F[f(x)](\lambda),\ F[f(x)e^{iax}](\lambda) = F[f](\lambda - a).$$

(3). **伸缩性质**　对于 $a \neq 0$, 有

$$F[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|}F[f](\frac{\lambda}{a}).$$

(4). **乘项式性质**

$$F[xf(x)](\lambda) = i\frac{d}{d\lambda}F[f](\lambda).$$

(5). **微分性质** 函数 f 的一阶导数 f' 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，且 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, 则

$$F[f'(x)](\lambda) = i\lambda F[f](\lambda).$$

(6). **积分性质**

$$F[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi](\lambda) = -\frac{i}{\lambda}F[f](\lambda).$$

(7). **对称性质**

$$F^{-1}[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi}F[f](-\lambda).$$

(8). **卷积性质** 积分

$$(f_1(t) \star f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(x-\tau)d\tau$$

称为函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积.

卷积定理: 假设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 连续, 分段光滑且绝对可积分, 记 $F_1(\lambda) = \mathcal{F}[f_1](\lambda)$ 和 $F_2(\lambda) = \mathcal{F}[f_2](\lambda)$, 则

$$\mathcal{F}[f_1 \star f_2] = F_1(\lambda)F_2(\lambda)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\lambda)F_2(\lambda)] = (f_1 \star f_2)(x).$$

3. *Lapalce 变换的定义

设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时有定义且积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

在 s 的某一区域内收敛，则

$$L[f(t)](p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

称为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换. 若 $F(p)$ 是函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换，则称 $f(t)$ 为 $F(p)$ 的 Laplace 逆变换，记为 $f(t) = L^{-1}[F(p)](t)$, 它可以利用 (复变函数) 积分

$$L^{-1}[F(p)](t) = \frac{i}{2\pi}\int_{p-i\infty}^{p+i\infty} F(s)e^{st}ds,$$

来计算。

4. *Laplace 变换的性质

(1). **线性性质** a_1 和 a_2 是二个（复）常数，则

$$L[a_1 f_1 + a_2 f_2](p) = a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p),$$

$$L^{-1}[a_1 F_1 + a_2 F_2](t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t).$$

(2). **微分性质**

$$L[f^{(n)}(t)](p) = p^n L[f(t)](p) - f^{n-1}(0) - p f^{n-2}(0) - \cdots - p^{n-1} f(0).$$

(3). **卷积性质** 函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 定义在区间 $(0, +\infty)$ 上，则积分

$$f_1(t) \star f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积.

卷积定理: 假设 $F_1(p) = L[f_1](p)$ 和 $F_2(p) = L[f_2](p)$，则

$$L[f_1(t) \star f_2(t)](p) = F_1(p) F_2(p)$$

$$L^{-1}[F_1(p) F_2(p)](t) = f_1(t) \star f_2(t).$$

5. 积分变换法的基本思想

积分变换法的基本思想是，用可逆的积分

$$F(p) = \int k(x,p) f(x) dx \tag{5.1}$$

把函数类 A 中的函数 $f(x)$ 变换到另外一个函数类 B 中的函数 $F(p)$, $F(p)$ 称为函数 $f(x)$ 的像函数，$f(x)$ 称为函数 $F(p)$ 的像原函数，$k(x,p)$ 称为积分变换核。在上述积分变换 (5.1) 下，原来的偏微分方程可以减少自变量的个数，直至变成一个常微分方程；原来的常微分方程可以变成代数方程，从而使得在函数类 B 中的运算简化。对于定解问题，找出在函数类 B 中的一个解，再经过逆变换得到在函数类 A 中所示求的解。

§5.2 习题解答

习题 5.1 求下列函数的 *Fourier* 变换：

(1) $f(x) = \begin{cases} |x| & |x| \le a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} \sin \lambda_0 x & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

(3) $f(x) = \sin x e^{-a|x|} \quad (a > 0)$

(4) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} \cos bx & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ 其中 $a, b > 0$.

解　(1) 直接利用定义得

$$
\begin{aligned}
F[f(x)] &= \int_{-a}^{a}|x|e^{-i\lambda x}dx=\int_{-a}^{0}-xe^{-i\lambda x}dx+\int_{0}^{a}xe^{-i\lambda x}dx\\
&= \int_{0}^{a}xe^{i\lambda x}dx+\int_{0}^{a}xe^{-i\lambda x}dx\\
&= 2\int_{0}^{a}x\cos\lambda x dx\\
&= \frac{2a}{\lambda}\sin\lambda a+\frac{2}{\lambda^2}\cos\lambda a-\frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

(2) 由定义

$$
\begin{aligned}
F[f(x)] &= \int_{-a}^{a}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx=\int_{-a}^{0}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx+\int_{0}^{a}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= -\int_{0}^{a}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{i\lambda x}dx+\int_{0}^{a}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= -2i\int_{0}^{a}\sin\lambda_0 x\sin\lambda x dx\\
&= i\int_{0}^{a}\left[\cos(\lambda_0+\lambda)x-\cos(\lambda_0-\lambda)x\right]dx\\
&= i\frac{\sin(\lambda_0+\lambda)a}{\lambda_0+\lambda}-i\frac{\sin(\lambda_0-\lambda)a}{\lambda_0-\lambda}.
\end{aligned}
$$

(3) 方法一: 直接由定义，有

$$
\begin{aligned}
F[f(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= \frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{0}\left(\mathrm{e}^{[a+(1-\lambda)i]x}-\mathrm{e}^{[a-(1+\lambda)i]x}\right)dx\right.\\
&\quad\left.+\int_{0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{[-a+(1-\lambda)i]x}-\mathrm{e}^{[-a-(1+\lambda)i]x}\right)dx\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{a+(1-\lambda)i}-\frac{1}{a-(1+\lambda)i}+\frac{-1}{-a+(1-\lambda)i}-\frac{-1}{-a-(1+\lambda)i}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{2a}{a^2+(1-\lambda)^2}-\frac{2a}{a^2+(1+\lambda)^2}\right]\\
&= \frac{-4i\lambda a}{[a^2+(1-\lambda)^2][a^2+(1+\lambda)^2]}.
\end{aligned}
$$

方法二: 由定义

$$
F[\mathrm{e}^{-a|x|}] = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a-i\lambda}+\frac{-1}{-a-i\lambda}\\
&= \frac{2a}{a^2+\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

再由 Fourier 变换的线性性质和位移性质，得

$$
\begin{aligned}
F[\sin x\mathrm{e}^{-a|x|}] &= F\left[\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix})\mathrm{e}^{-a|x|}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left(F[\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-a|x|}]-F[\mathrm{e}^{-ix}\mathrm{e}^{-a|x|}]\right)\\
&= -ia\left(\frac{1}{a^2+(\lambda-1)^2}-\frac{1}{a^2+(\lambda+1)^2}\right)\\
&= \frac{-4i\lambda a}{[a^2+(\lambda+1)^2][a^2+(\lambda-1)^2]}
\end{aligned}
$$

(4) 由定义

$$
\begin{aligned}
F[f(x)] &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\mathrm{e}^{ibx}+\mathrm{e}^{-ibx}}{2}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{[-a+(b-\lambda)i]x}+\mathrm{e}^{[-a-(b+\lambda)i]x}dx\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-a+(b-\lambda)i}+\frac{-1}{-a-(b+\lambda)i}\right]\\
&= \frac{a+\lambda i}{(a+\lambda i)^2+b^2}.
\end{aligned}
$$

习题 5.2 利用 *Fourier* 变换的性质，求下列函数的 *Fourier* 变换：

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$

(2) $f(x)=xe^{-a|x|}\quad (a>0)$

(3) $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$

(4) $f(x)=\frac{x}{a^2+x^2}$.

解 (1) 令 $g(x)=\begin{cases} 1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$. 由定义

$$
F[g(x)]=\int_{-a}^{a}e^{-i\lambda x}dx=\frac{-1}{i\lambda}(e^{-i\lambda a}-e^{i\lambda a})=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}
$$

由 Fourier 变换的乘子性质，得

$$
F[f(x)] = F[x^2g(x)]=i^2\frac{d^2}{d\lambda^2}F[g](\lambda)=-\frac{d}{d\lambda}(\frac{2a\cos\lambda a}{\lambda}-\frac{2\sin\lambda a}{\lambda^2})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2a^2\sin\lambda a}{\lambda} + \frac{2a\cos\lambda a}{\lambda^2} + \frac{2a\cos\lambda a}{\lambda^2} - \frac{4\sin\lambda a}{\lambda^3} \\
&= \frac{2a^2\sin\lambda a}{\lambda} + \frac{4a\cos\lambda a}{\lambda^2} - \frac{4\sin\lambda a}{\lambda^3}
\end{aligned}
$$

(2) 由定义

$$
\begin{aligned}
F[\mathrm{e}^{-a|x|}] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx + \int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx \\
&= \frac{1}{a-i\lambda} + \frac{-1}{-a-i\lambda} \\
&= \frac{2a}{a^2+\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

再由 Fourier 变换乘子性质，得

$$F[f(x)] = F[x\mathrm{e}^{-a|x|}] = i\frac{d}{d\lambda}F[\mathrm{e}^{-a|x|}](\lambda) = \frac{-4a\lambda i}{(a^2+\lambda^2)^2}$$

(3) 设 $F[f(x)] = \hat{f}(\lambda)$, 下面证明 Fourier 变换的对称性质, 即 $F^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\lambda)$.
证明如下

$$F^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-i(-\lambda)x}dx = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\lambda).$$

因此, $F[f](\lambda) = 2\pi F^{-1}[f(x)](-\lambda)$. 由上题可知 $F[\mathrm{e}^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2+\lambda^2}$, 于是 $F^{-1}[\frac{1}{a^2+x^2}](\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{-a|\lambda|}}{2a}$. 所以 $F[f](\lambda) = \frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\lambda|}$.

(4) 由 Fourier 变换乘子性质及上题结果，有

$$
\begin{aligned}
F[f(x)] &= F\left[x\frac{1}{a^2+x^2}\right] = i\frac{d}{d\lambda}F\left[\frac{1}{a^2+x^2}\right](\lambda) \\
&= i\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\lambda|}\right) \\
&= \begin{cases} -i\pi e^{-a\lambda} & \lambda > 0 \\ i\pi e^{a\lambda} & \lambda < 0 \\ \text{不存在} & \lambda = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

习题 5.3 若记 $F[f] = F(\lambda)$, 证明
$F[f(x)\cos\omega x] = \frac{1}{2}(F(\lambda-\omega) + F(\lambda+\omega))$
$F[f(x)\sin\omega x] = \frac{1}{2i}(F(\lambda-\omega) - F(\lambda+\omega))$.

证明 (1) 因为 $\cos\omega x = \frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}$, 由 Fourier 变换的线性性质, 有

$$F[f(x)\cos\omega x] = \frac{1}{2}\left\{F[f(x)e^{i\omega x}] + F[f(x)e^{-i\omega x}]\right\}$$

又由 Fourier 变换的位移性质，有

$$
\begin{aligned}
F[f(x)e^{i\omega x}] &= F(\lambda-\omega) \\
F[f(x)e^{-i\omega x}] &= F(\lambda+\omega).
\end{aligned}
$$

于是

$$F[f(x)\cos\omega x]=\frac{1}{2}\left(F(\lambda-\omega)+F(\lambda+\omega)\right).$$

(2) 因为 $\sin\omega x=\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}$, 由 Fourier 变换的线性性质和位移性质, 有

$$\begin{aligned} F[f(x)\sin\omega x] &= \frac{1}{2i}\left\{F[f(x)e^{i\omega x}]-F[f(x)e^{-i\omega x}]\right\} \\ &= \frac{1}{2i}\left(F(\lambda-\omega)-F(\lambda+\omega)\right). \end{aligned}$$

习题 5.4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上分段连续且绝对可积, 设 $g(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$, 证明 $F[g]=\frac{1}{i\lambda}F[f]$.

说明 若是通常意义下的 Fourier 变换则有问题, 例如取 $f(x)=e^{-|x|}$, 则 f 连续且绝对可积, 但 $g(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ 不绝对可积, 且当 $x\to+\infty$ 时极限不为 0.

解 当 $g(x)$ 绝对可积时, 由 $g'(x)=f(x)$ 以及 Fourier 变换的微分性质可得

$$F[f]=F[g']=i\lambda f[g],$$

从而我们有 $F[g]=\frac{1}{i\lambda}F[f]$.

习题 5.5 *求下列函数的 Fourier 逆变换:*

(1) $F(\lambda)=e^{-(a^2\lambda^2+ib\lambda+c)t}\quad(a,b,c$ 常数, 参数 $t>0)$

(2) $F(\lambda)=e^{-|\lambda|y}\quad($参数 $y>0)$

解 (1) 由定义

$$f(x)=F^{-1}[F(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a^2\lambda^2+ib\lambda+c)t}e^{i\lambda x}d\lambda.$$

令 $\lambda=-\mu$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a^2\mu^2-ib\mu+c)t}e^{-i\mu x}d\mu=\frac{1}{2\pi}e^{-ct}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2t+ib\mu t}e^{-i\mu x}d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-ct}F[e^{-a^2\mu^2t}e^{ibt\mu}](x). \end{aligned}$$

由 Fourier 变换的平移性质, 有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}e^{-ct}F[e^{-a^2t\mu^2}](x-bt).$$

由例 3 知 $F[e^{-a^2t\mu^2}]=(\frac{\pi}{a^2t})^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$. 因此,

$$f(x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-ct}e^{-\frac{(x-bt)^2}{4a^2t}}.$$

(2) 由定义

$$f(x)\;=\;F^{-1}[F(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\lambda|y}e^{i\lambda x}d\lambda$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda y+i\lambda x}d\lambda+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda y+i\lambda x}d\lambda\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{y+ix}-\frac{1}{-y+ix}\right)\\
&= \frac{y}{(x^2+y^2)\pi}.
\end{aligned}
$$

习题 5.6 *求下列函数的广义 Fourier 变换:*

(1) $\delta(x-x_0)$ *(2)* $e^{i\lambda_0 x}$

(3) $\cos\lambda_0 x$ *(4)* $\sin^2\lambda_0 x$

解 (1) 因

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} F[\delta(x-x_0)]\varphi(\lambda)d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda dx\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda\,|_{x=x_0}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)e^{-i\lambda x_0}d\lambda.
\end{aligned}
$$

所以

$$F[\delta(x-x_0)] = e^{-i\lambda x_0}.$$

(2) 因

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} F[e^{i\lambda_0 x}](\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda_0 x}F[\varphi(\lambda)](x)dx\\
&= 2\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F[\varphi(\lambda)](x)e^{i\lambda_0 x}dx\\
&= 2\pi F^{-1}\left[F[\varphi(\lambda)]\right]|_{\lambda=\lambda_0} = 2\pi\varphi(\lambda_0)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\lambda-\lambda_0)\varphi(\lambda)d\lambda.
\end{aligned}
$$

所以

$$F[e^{i\lambda_0 x}] = 2\pi\delta(\lambda-\lambda_0).$$

(3) 因 $\cos\lambda_0 x = \frac{e^{i\lambda_0 x}+e^{-i\lambda_0 x}}{2}$, 由 Fourier 变换的线性性质及 (2), 得

$$
\begin{aligned}
F[\cos\lambda_0 x] &= \frac{1}{2}\left\{F[e^{i\lambda_0 x}]+F[e^{-i\lambda_0 x}]\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\lambda-\lambda_0)+2\pi\delta(\lambda+\lambda_0)\right]\\
&= \pi\left[\delta(\lambda-\lambda_0)+\delta(\lambda+\lambda_0)\right].
\end{aligned}
$$

(4) 因 $\sin^2\lambda_0 x = \frac{1-\cos 2\lambda_0 x}{2}$, 由 Fourier 变换的线性性质和 (3), 得

$$
\begin{aligned}
F[\sin^2\lambda_0 x] &= \frac{1}{2}F[1]-\frac{1}{2}F[\cos 2\lambda_0 x]\\
&= \pi\delta(\lambda)-\frac{\pi}{2}\left[\delta(\lambda-2\lambda_0)+\delta(\lambda+2\lambda_0)\right].
\end{aligned}
$$

习题 5.7 利用 *Fourier* 变换求解下列定解问题:

(1) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} &= \sin x \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - b u_x - cu = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$ 其中 a, b, c 为常数.

解 (1) 对方程和定解条件关于 x 作 Fourier 变换, 记

$$F[u] = \hat{u}(\lambda, t), \qquad F[\sin x] = \hat{\varphi}(\lambda).$$

利用 Fourier 变换的线性性质和微分性质, 得

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + a^2\lambda^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

由一阶线性常微分方程的解的表达式, 得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi} \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}.$$

对上式两边求反演, 因为

$$\begin{aligned} F^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\mathrm{e}^{i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\mathrm{e}^{-i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} F[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}](x) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

所以

$$\hat{u}(\lambda, t) = F[\sin x] F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right].$$

利用卷积性质, 得

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\xi \, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

(2) 对方程和定解条件关于 x 作 Fourier 变换, 记

$$F[u] = \hat{u}(\lambda, t), \qquad F[\sin x] = \hat{\varphi}(\lambda), \qquad F[f] = \hat{f}(\lambda, t).$$

利用 Fourier 变换的线性性质和微分性质, 得

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + a^2\lambda^2 \hat{u} - bi\lambda\hat{u} - c\hat{u} = \hat{f} \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

由一阶线性常微分方程的解的表达式，得

$$\hat{u}(\lambda,t)=\hat{\varphi}\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-bi\lambda-c)t}+\int_0^t\hat{f}(\lambda,\tau)\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-bi\lambda-c)(t-\tau)}d\tau.$$

对上式两边求反演，由 5(1)

$$\begin{aligned}F^{-1}[\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-bi\lambda-c)t}] &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{ct}e^{-\frac{(x+bt)^2}{4a^2t}}\\ F^{-1}[\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-bi\lambda-c)(t-\tau)}] &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{c(t-\tau)}e^{-\frac{[x+b(t-\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}.\end{aligned}$$

所以

$$\hat{u}(\lambda,t)=F[\varphi]F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{ct}e^{-\frac{(x+bt)^2}{4a^2t}}\right]+\int_0^t F[f]F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{c(t-\tau)}e^{-\frac{[x+b(t-\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\tau.$$

利用卷积性质，得

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{e^{ct}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi+bt)^2}{4a^2t}}d\xi\\ &+ \int_0^t\frac{e^{c(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-\frac{[x-\xi+b(t-\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi.\end{aligned}$$

习题 5.8 利用延拓方法与 *Fourier* 变换求解:

$$(1)\left\{\begin{array}{lll}u_t &=& a^2u_{xx}+f(x,t)\quad(0<x<+\infty,\ t>0)\\ u|_{t=0} &=& \varphi(x)\qquad(0<x<+\infty)\\ u|_{x=0} &=& 0\qquad(t\geq 0)\end{array}\right.$$

并验证上述边值问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi\\ &+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi.\end{aligned}$$

$$(2)\left\{\begin{array}{lll}u_t &=& a^2u_{xx}+f(x,t)\quad(0<x<+\infty,\ t>0)\\ u|_{t=0} &=& \varphi(x)\qquad(0<x<+\infty)\\ u_x|_{x=0} &=& 0\qquad(t\geq 0)\end{array}\right.$$

并验证上述边值问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi\\ &+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi.\end{aligned}$$

解　(1) 将 $u(x,t),\varphi(x),f(x,t)$ 关于 x 作奇延拓, 即令

$$U(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & x\ge 0 \\ -u(-x,t) & x<0 \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x\ge 0 \\ -\varphi(-x) & x<0 \end{cases}$$

$$F_1(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & x\ge 0 \\ -f(-x,t) & x<0. \end{cases}$$

不难验证 $U(x,t)$ 是下列初值问题的解

$$\begin{cases} U_t = a^2U_{xx}+F_1(x,t) & (-\infty<x<+\infty,\ t>0) \\ U|_{t=0} = \Phi(x) & (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

由一维热传导方程解的表达式, 得

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi \\ &\quad+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi. \end{aligned}$$

这个 $U(x,t)$ 限制在 $x\ge 0$ 上就是原问题的解. 下面确定 $u(x,t)$ 的表达式. 当 $x\ge 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi \\ &\quad+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_{-\infty}^{0}-\varphi(-\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi\right\} \\ &\quad+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\int_{-\infty}^{0}-f(-\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right. \\ &\qquad\left.+\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right\} \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_0^{+\infty}-\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi\right\} \\ &\quad+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\int_0^{+\infty}-f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right. \\ &\qquad\left.+\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right\} \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi.$$

(2) 将 $u(x,t),\varphi(x),f(x,t)$ 关于 x 作偶延拓，即令

$$\begin{aligned}U(x,t)&=\begin{cases}u(x,t) & x\geq 0\\ u(-x,t) & x<0\end{cases}\\ \Phi(x)&=\begin{cases}\varphi(x) & x\geq 0\\ \varphi(-x) & x<0\end{cases}\\ F_1(x,t)&=\begin{cases}f(x,t) & x\geq 0\\ f(-x,t) & x<0.\end{cases}\end{aligned}$$

不难验证 $U(x,t)$ 是下列初值问题的解

$$\begin{cases}U_t = a^2U_{xx}+F_1(x,t) & (-\infty<x<+\infty,\ t>0)\\ U|_{t=0}=\Phi(x) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

由一维热传导方程解的表达式，得

$$\begin{aligned}U(x,t)=&\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi\\&+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi.\end{aligned}$$

这个 $U(x,t)$ 限制在 $x\geq 0$ 上就是原问题的解. 下面确定 $u(x,t)$ 的表达式. 当 $x\geq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi\\&+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\\=&\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_{-\infty}^{0}\varphi(-\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi\right\}\\&+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\int_{-\infty}^{0}f(-\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right.\\&\quad\left.+\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right\}\\=&\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi\right\}\\&+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\int_0^{+\infty} f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\Bigg\} \\
= \quad & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi \\
& +\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi.
\end{aligned}
$$

习题 5.9 求下列热传导方程的混合问题的解

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<+\infty,\ t>0) \\
u|_{t=0} = 0 & (0<x<+\infty) \\
u_x|_{x=0} = \sin\omega t & (t\ge 0)
\end{cases}
$$

解 令 $v=u-x\sin\omega t$, 则

$$
\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}+x\omega\cos\omega t,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
$$

原方程变为

$$
\begin{cases}
\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-x\omega\cos\omega t & (0<x<+\infty,\ t>0) \\
v|_{t=0} = 0 & (0<x<+\infty) \\
v_x|_{x=0} = 0 & (t\ge 0)
\end{cases}
$$

由 8(2) 可知上述方程的解为

$$
\begin{aligned}
v(x,t) \quad = \quad & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}(-\xi\omega\cos\omega t) \\
& \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi.
\end{aligned}
$$

因此, 原方程的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) \quad = \quad & x\sin\omega t-\frac{\omega\cos\omega t}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}\xi \\
& \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi.
\end{aligned}
$$

习题 5.10 求下列函数的 *Laplace* 变换 *(其中* $u(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ *)*

(1). $f(t)=e^{-2t}u(t)$,

(2). $f(t)=\sin t\cos t u(t)$,

(3). $f(t)=ch\omega t\, u(t)$, *(*ω *为实常数)*

(4). $f(t)=e^{-\lambda t}sh\omega t\, u(t)$, *(*$\lambda$, ω *为实常数)*.

解 (1). $L[f](p)=\int_0^{+\infty}e^{-2t}e^{-pt}dt=\frac{1}{2+p}\,(Rep>-2)$

(2). $L[f](p)=\int_0^{+\infty}\sin t\cos te^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin 2te^{-pt}dt=\frac{1}{4i}\int_0^{+\infty}[e^{-(p-2i)t}-e^{-(p+2i)t}]dt=\frac{1}{p^2+4},\,(Rep>0)$

(3). $L[f](p)=\int_0^{+\infty}ch\omega te^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[e^{(w-p)t}+e^{-(w+p)t}]dt=\frac{1}{2}[\frac{1}{w+p}-\frac{1}{w-p}]=\frac{p}{p^2-w^2},\,Rep>|w|;$

(4). $L[f](p)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}sh\omega te^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}shwte^{-(\lambda+p)t}dt=\frac{1}{2}[\frac{1}{w+p+\lambda}+\frac{1}{w-p-\lambda}]=-\frac{w}{(\lambda+p)^2-w^2},\,Rep>|w|+|\lambda|;$

习题 5.11 利用 *Laplace* 变换的性质求下列函数的 *Laplace* 变换

(1). $f(t)=t\sin wtu(t);$

(2). $f(t)=t\cos wtu(t);$

(3). $f(t)=e^{-\lambda t}\sin wtu(t);$

(4). $f(t)=e^{-\lambda t}\cos wtu(t);$

(5). $f(t)=\cos^2 tu(t);$

(6). $f(t)=t^2e^{9t}u(t).$

解 (1). $L[t\sin wtu(t)](p)=-\frac{d}{dp}L[\sin wtu(t)](p)=-\frac{d}{dp}[\frac{-w}{p^2+w^2}]=-\frac{2pw}{(p^2+w^2)^2}.$

(2). $L[t\cos wtu(t)](p)=-\frac{d}{dp}L[\cos wtu(t)](p)=-\frac{d}{dp}[\frac{p}{p^2+w^2}]=\frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}.$

(3). $L[e^{-\lambda t}\sin wtu(t)](p)=L[\sin wtu(t)](p+\lambda)=-\frac{w}{(p+\lambda)^2+w^2}.$

(4). $L[e^{-\lambda t}\cos wtu(t)](p)=L[\cos wtu(t)](p+\lambda)=-\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+w^2}.$

(5). $L[\cos^2 tu(t)](p)=L[\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2}](p)=\frac{1}{2}L[1](p)+\frac{1}{2}L[\cos 2t](p)=\frac{1}{2p}+\frac{p}{2(p^2+4)}=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$

(6). $L[t^2e^{9t}u(t)](p)=\frac{d^2}{dp^2}L[e^{9t}u(t)](p)=\frac{d^2}{dp^2}[\frac{1}{p-9}]=\frac{2}{(p-9)^3}.$

习题 5.12 求证下列公式

(1). $L[\frac{d}{dx}(f\star g)]=pL[f\star g]=pL[f]\cdot L[g];$

(2). $pL[f]\cdot L[g]=L[f\star g']+g(0)L[f].$

证明 (1). 记 $h(x)=f\star g$, 由卷积定义得 $h(0)=0$, 利用微分性质以及卷积性质得

$$\begin{aligned}L[\frac{d}{dx}(f\star g)](p)&=L[h'(x)](p)=pL[h](p)-h(0)\\&=pL[f\star g](p)=pL[f]\cdot L[g].\end{aligned}$$

(2). 由 $f\star g(x)=\int_0^x f(\xi)g(x-\xi)d\xi$ 得

$$\frac{d}{dx}f\star g(x)=\int_0^x f(\xi)g'(x-\xi)d\xi+g(0)f(x)=f\star g'+g(0)f(x).$$

利用微分性质以及卷积性质得

$$L[f\star g'](p)=L[\frac{d}{dx}f\star g(x)]-g(0)L[f(x)](p)=pL[f]\cdot L[g']-g(0)l[f].$$

习题 5.13 利用 *Laplace* 变换求解

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\,(-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\,(-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

并证明它的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$$

解 关于变量 t 作 Laplace 变换，记 $U(x,p) = L[u(x,t)](p)$ 且不妨 $p > 0$,

$$\begin{cases} a^2 \frac{d^2U}{dx^2} = pU - \varphi(x), \ -\infty < x < +\infty \\ \lim_{|x|\to\infty} U(x,p) = 0. \end{cases}$$

常微分方程的通解为

$$U(x,p) = C_1 e^{\sqrt{p}x/a} + C_2 e^{-\sqrt{p}x/a} + \int_0^x \frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{p}} \left[e^{-\sqrt{p}(x-\xi)/a} - e^{\sqrt{p}(x-\xi)/a} \right] d\xi,$$

由条件 $\lim_{|x|\to\infty} U(x,p) = 0$ 得

$$C_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}\xi/a} d\xi,$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{p}} e^{\sqrt{p}\xi/a} d\xi.$$

从而得到

$$U(x,p) = \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{p}} e^{\sqrt{p}(x-\xi)/a} d\xi + \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}(x-\xi)/a} d\xi.$$

利用 (查表) $L[\frac{1}{\sqrt{\pi t} e^{-a^2/(4t)}} = e^{-a\sqrt{p}}/\sqrt{p}$ 得

$$L^{-1}[\frac{1}{2a\sqrt{p}} e^{\pm\sqrt{p}(x-\xi)/a}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}},$$

因此,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_x^{+\infty} \varphi(\xi) L^{-1}\left[\frac{1}{2a\sqrt{p}} e^{\sqrt{p}(x-\xi)/a}\right] d\xi + \int_{-\infty}^x \varphi(\xi) L^{-1}\left[\frac{1}{2a\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}(x-\xi)/a}\right] d\xi \\ &= \int_x^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \int_{-\infty}^x \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \end{aligned}$$

习题 5.14 利用 *Laplace* 变换求解下列混合问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = 0, \ (-\infty < x < +\infty) \\ u|_{x=0} = U_0, \ (t \geq 0) \end{cases}$$

解 关于变量 t 作 Laplace 变换，记 $U(x,p)=L[u(x,t)](p)$ 且不妨 $p>0$, $L[U_0]=U_0/p$,

$$\begin{cases} a^2\frac{d^2U}{dx^2}=pU, (-\infty<x<+\infty) \\ U|_{x=0}=U_0/p, \lim_{x\to+\infty}U=0 \end{cases}$$

解得

$$U(x,p)=\frac{U_0}{p}e^{-x\sqrt{p}/a}.$$

利用 (查表)

$$L[erfc(\frac{a}{2\sqrt{t}})](p)=\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}},$$

其中

$$erfc(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta,$$

我们有

$$u(x,t)=L^{-1}[U(x,p)]=U_0erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

习题 5.15 利用 *Laplace* 变换求解下列定解问题

$$(1).\quad \begin{cases} \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=x^2y, (x>1,y>0) \\ u|_{y=0}=x^2, (x\geq 1) \\ u|_{x=1}=\cos y, (y\geq 0) \end{cases}$$

$$(2).\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}, (0<x<\ell,t>0) \\ u|_{t=0}=u_0, (0<x<\ell) \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=0,\ u|_{x=\ell}=u_1, (t\geq 0) \end{cases}$$

解关于变量 y 作 Laplace 变换, 记 $U(x,p)=L[u(x,y)](p)$ 且不妨 $p>0$, $L[y]=-\frac{1}{p^2}$,

$$(1).\quad \begin{cases} p\frac{dU}{dx}=-\frac{x^2}{p^2}+2x, (x>1) \\ U|_{x=1}=L[\cos y](p). \end{cases}$$

解得

$$U(x,p)=\frac{1-x^3}{3p^3}+\frac{x^2-1}{p}+L[\cos y](p).$$

关于 p 作 Laplace 逆变换得到

$$\begin{aligned} u(x,y) &= (1-x^3)L^{-1}[\frac{1}{3p^3}](y)+(x^2-1)L^{-1}[\frac{1}{p}](y)+L^{-1}[L[\cos y]] \\ &= \frac{y^2(1-x^3)}{6}+(x^2-1)+\cos y. \end{aligned}$$

(2). **解** 由条件可得 $u_0=u|_{x=0,t=0}=u_1$。

关于变量 t 作 Laplace 变换，记 $U(x,p)=L[u(x,t)](p)$ 且不妨 $p>0$, $L[u_0]=u_0/p$,

$$\begin{cases} a^2\frac{d^2U}{dx^2}=pU-u_0,\ (0<x<\ell) \\ \frac{dU}{dx}|_{x=0}=0,\ U|_{x=\ell}=u_0/p. \end{cases}$$

通解为

$$U(x,p)=C_1e^{x\sqrt{p}/a}+C_2e^{-x\sqrt{p}/a}+\frac{u_0}{p},$$

由 $u_0==u_1$ 以及

$$\frac{dU}{dx}|_{x=0}=0,\ U|_{x=\ell}=u_0/p$$

得 $C_1=C_2=0$, 即 $U(x,p)=u_0/p$. 关于 p 作 Laplace 逆变换得到 $u(x,t)=L^{-1}[u_0/p]=u_0$.

第 6 章　Green 函数法

§6.1　基本要求与内容提要

一. 基本要求

(1). 理解第一格林公式和第二格林公式;

(2). 了解 Laplace 方程的基本解;

(3). 了解 Laplace 方程第一边值问题格林函数的定义，能用格林函数来表示 Laplace 方程第一边值问题的解;

(4). 会用镜像法来求解某些特殊区域上 Laplace 方程第一边值问题的格林函数。

二. 内容提要

(1). Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 (有界) 区域, 边界为 $\partial\Omega, \overrightarrow{n}$ 是边界上的单位外法向量, u 和 v 在 Ω 有二阶连续的偏导数。则第一 $Green$ 公式:

$$\int\int\int_{\Omega} u\triangle v dV = \int\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} dS - \int\int\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV.$$

第二 $Green$ 公式:

$$\int\int\int_{\Omega}(v\triangle u - u\triangle v)dV = \int\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}\right)dS.$$

Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 (有界) 区域, 边界为 $\partial\Omega, \overrightarrow{n}$ 是边界上的单位外法向量, u 和 v 在 Ω 有二阶连续的偏导数。则第一 $Green$ 公式:

$$\int\int_{\Omega} u\triangle v dV = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} ds - \int\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV.$$

第二 $Green$ 公式:

$$\int\int_{\Omega}(v\triangle u - u\triangle v)dV = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}\right)ds.$$

(2). 三维 Laplace 方程的基本解为 $(M_0(x,y,z), M(\xi,\eta,\zeta))$

$$\Gamma(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

二维 Laplace 方程的基本解为 $(M_0(x,y), M(\xi,\eta))$

$$\Gamma(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

(3). Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 (有界) 区域, 边界为 $\partial\Omega$, $M_0(x,y,z), M(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega$, 称满足

$$\triangle_M G = \delta(M-M_0),\ M \in \Omega;\ G = 0,\ M \in \partial\Omega$$

的解 $G(M,M_0)$ 是三维 Laplace 方程第一边值条件的 Green 函数. 对于三维 Laplace 方程第一边值问题

$$\triangle u = f(M),\ M\in\Omega;\ u=\varphi(M),\ M\in\partial\Omega$$

的解可表示为

$$u(M_0)=\int\int_{\partial\Omega}\varphi(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial\overrightarrow{n}}dS_M+\int\int\int_{\Omega}G(M,M_0)f(M)dV_M.$$

Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个 (有界) 区域, 边界为 $\partial\Omega$, $M_0(x,y),M(\xi,\eta)\in\Omega$, 称满足

$$\triangle_M G=\delta(M-M_0),\ M\in\Omega;\ G=0,\ M\in\partial\Omega$$

的解 $G(M,M_0)$ 是二维 Laplace 方程第一边值条件的 Green 函数. 对于二维 Laplace 方程第一边值问题

$$\triangle u = f(M),\ M\in\Omega;\ u=\varphi(M),\ M\in\partial\Omega$$

的解可表示为

$$u(M_0)=\int_{\partial\Omega}\varphi(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial\overrightarrow{n}}ds_M+\int\int_{\Omega}G(M,M_0)f(M)dV_M.$$

§6.2 习题解答

习题 6.1 设 D 是以光滑曲线 L 为边界的二维的有界区域，函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 以及它们所有的一阶偏导数在闭区域 $D+L$ 上连续，在 D 内有二阶的连续偏导数。试证明：

(1) $\int_L u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\int\int_D u\Delta v d\sigma+\int\int_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma$

(2) $\int_L(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int\int_D(u\Delta v-v\Delta u)d\sigma$

(3) $u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_L[\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n_M}-u(M)\frac{\partial}{\partial n_M}(\ln\frac{1}{r_{MM_0}})]ds_M$
$\quad -\frac{1}{2\pi}\int\int_D\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u d\sigma_M$

解 首先讨论一下 Green 公式。平面上有界区域 D, 边界闭曲线为 L, $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是有连续偏导数的二元函数, 则 Green 公式是

$$\int\int_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma=\int_L u(x,y)dx+v(x,y)dy \tag{6.1}$$

记 L 的单位切向量 (逆时针方向) 为 $\overrightarrow{T}=(\alpha,\beta)$, 单位外法向量 $\overrightarrow{n}=(\beta,-\alpha)$(见图 1). 由 $dx=\alpha ds$,$dy=\beta ds$, 其中 ds 表示 L 的弧长元素,

$$\begin{aligned}\int\int_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma &= \int_L(u(x,y)\alpha+v(x,y)\beta)ds\\ &= \int_{\partial\Omega}(v,-u)\cdot\overrightarrow{n}ds.\end{aligned}$$

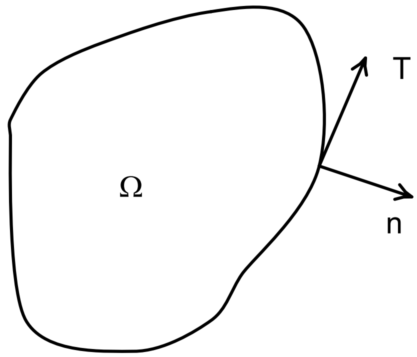

图 1

特别, 若记 $\overrightarrow{w}=(v,-u)$, 则

$$\int\int_D div\overrightarrow{w}d\sigma=\int_L \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{n}ds. \tag{6.2}$$

下面我们利用公式 (6.2) 来求解习题 1。

(1). 取 $\overrightarrow{w}=u\ grad\, v$ 代入公式 (6.2) 得

$$\int_D div(u\ grad\, v)d\sigma=\int_L u\, gradv\cdot\overrightarrow{n}ds,$$

计算得

$$\int_L u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\int\int_D u\Delta v d\sigma+\int\int_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma. \tag{6.3}$$

(2). 交换 (6.3) 中函数 u 与 v 的位置得

$$\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int\int_D v\Delta u d\sigma+\int\int_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma. \tag{6.4}$$

上式与 (6.3) 式相减得

$$\int_L(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int\int_D(u\Delta v-v\Delta u)d\sigma.$$

(3). 对于 $M_0(x,y)\in D$, 记 K_ϵ 为以 M_0 为中心, ϵ 为半径的圆盘。取

$$u(M)=u(\xi,\eta),\ v=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}},$$

其中 $r_{M_0M}=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$。由 (2) 中的结论得

$$\begin{aligned}&\int\int_{D-K_\epsilon}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\Delta u d\sigma\\ &=\int_{L+\partial K_\epsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds.\end{aligned} \tag{6.5}$$

在 ∂K_ϵ 上有

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)=\frac{1}{2\pi\epsilon},$$

所以有

$$\int_{\partial K_\epsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)ds=\frac{1}{2\pi\epsilon}\int_{\partial K_\epsilon}uds=u(\bar{\xi},\bar{\eta}),$$

其中 $(\bar{\xi},\bar{\eta})$ 是 ∂K_ϵ 上的一个点，令 $\epsilon\to 0^+$ 利用函数 u 的连续性得

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\partial K_\epsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)ds=u(M_0)\tag{6.6}$$

再由函数 u 在 D 内有二阶的连续偏导数得

$$\left|\int_{\partial K_\epsilon}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}ds\right|\le\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\epsilon}\left|\int_{\partial K_\epsilon}\frac{\partial u}{\partial n}ds\right|\le\epsilon\ln\frac{1}{\epsilon}\max_D|grad\,u|$$

令 $\epsilon\to 0^+$ 得

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\partial K_\epsilon}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0\tag{6.7}$$

由函数 u 在 D 内有二阶的连续偏导数得，当 $\epsilon\to 0^+$ 时广义积分

$$\int\int_{D-K_\epsilon}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\Delta ud\sigma$$

收敛，即

$$\int\int_{D-K_\epsilon}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\Delta ud\sigma=-\frac{1}{2\pi}\int\int_D\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\Delta ud\sigma.\tag{6.8}$$

在 (6.5) 中令 $\epsilon\to 0^+$，利用 (6.6), (6.7) 和 (6.8) 得

$$\begin{aligned}u(M_0)\ \ &=\ \ \frac{1}{2\pi}\int_L[\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n_M}-u(M)\frac{\partial}{\partial n_M}(\ln\frac{1}{r_{MM_0}})]ds_M\\&\quad-\frac{1}{2\pi}\int\int_D\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta ud\sigma_M.\end{aligned}$$

习题 6.2 试证明：在二维的情况下调和函数的表达式为

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_L[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{r})]ds$$

其中 L 为一条封闭的光滑曲线，M_0 为 L 所围的区域中的任意一点。

解 在习题 1(3) 中取 u 为调和函数即得。

习题 6.3 在半平面 $y>0$ 内求解 *Laplace* 方程 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$，其边界条件为

$$u(x,0)=\begin{cases}0 & \text{当}x<0\text{时}\\u_0 & \text{当}x\ge 0\text{时}.\end{cases}$$

解 考虑区域 $D \in \mathbb{R}^2$ 上的定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y) \quad (x,y) \in D \\ u|_L = \varphi(x,y) \end{cases}$$

取 Green 函数 $G(x,y;\xi,\eta)$ 为

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + g(x,y;\xi,\eta)$$

其中 $g(x,y;\xi,\eta)$ 为定解问题

$$\begin{cases} \Delta g = f(x,y) \quad (\xi,\eta) \in D \\ g|_{(\xi,\eta)\in L} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}|_{(\xi,\eta)\in L} \end{cases}$$

的解, 则

$$u(x,y) = -\int_L \varphi(\xi,\eta) \frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n} ds - \int\int_D G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\sigma. \tag{6.9}$$

利用 "镜像法" 求二维上半平面的 Green 函数为

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}}\right]$$

在 (6.9) 中取 L 为 x 轴, $\varphi(\xi,\eta) = u(\xi,0)$, $f(\xi,\eta) = 0$, 在 x 轴上有

$$\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}|_L = \frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial \eta}|_{\eta=0} = -\frac{1}{\pi}\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -\int_L \varphi(\xi,\eta) \frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n} ds \\ &= \frac{u_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y}{(\xi-x)^2+y^2} d\xi \\ &= \frac{u_0}{\pi} [\frac{\pi}{2} + \arctan(x/y)]. \end{aligned}$$

习题 6.4 *(1).* 试作出上半圆域的 *Green* 函数;

(2). 试作出上半球域的 *Green* 函数。

解 (1). 利用 "镜像法" 来求解。记圆域为 $B_R(O) = \{(x,y)|x^2+y^2 \le R^2\}$, 上半圆域为 $B_R^+(O) = \{(x,y)|x^2+y^2 \le R^2, y > 0\}$. 设 $P(x,y), Q(\xi,\eta) \in B_R^+(O)$, $P(x,y)$ 关于 $y=0$ 平面的对称点为 $P^-(x,-y)$, $P(x,y)$ 和 $P^-(x,-y)$ 关于圆域 $B_R(O)$ 的对称点分别为 P_* 和 P_*^-. 在 P 点放置一个单位正电荷, 在 P^- 点放置一个单位负电荷, 在 P_* 点放置 R/r_{OP} 单位负电荷, 在 P_*^- 点放置 R/r_{OP} 单位正电荷. 则

$$\begin{aligned} G(P,Q) &= \frac{1}{2\pi}\left[\ln \frac{1}{r_{PQ}} - \ln\left(\frac{R}{r_{OP}} \frac{1}{r_{P_*Q}}\right)\right] \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\left[\ln \frac{1}{r_{P^-Q}} - \ln\left(\frac{R}{r_{OP}} \frac{1}{r_{P_*^-Q}}\right)\right]. \end{aligned}$$

(2). 利用"镜像法"来求解。记球域为 $B_R(O)=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2\}$, 上半圆域为 $B_R^+(O)=\{(x,y)|x^2+y^2+z^2\le R^2, z>0\}$. 设 $P(x,y,z), Q(\xi,\eta,\zeta)\in B_R^+(O)$, $P(x,y,z)$ 关于 $z=0$ 平面的对称点为 $P^-(x,y,-z)$, $P(x,y,z)$ 和 $P^-(x,y,-z)$ 关于圆域 $B_R(O)$ 的对称点分别为 P_* 和 P_*^-. 在 P 点放置一个单位正电荷, 在 P^- 点放置一个单位负电荷, 在 P_* 点放置 R/r_{OP} 个单位负电荷, 在 P_*^- 点放置 R/r_{OP} 个单位正电荷. 则

$$\begin{aligned} G(P,Q) &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{R}{r_{OP}}\frac{1}{r_{P_*Q}}\right) \\ &\quad -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{P^-Q}}-\frac{R}{r_{OP}}\frac{1}{r_{P_*^-Q}}\right). \end{aligned}$$

习题 6.5 求证圆域 $x^2+y^2\le R^2$ 的 Green 函数为

$$G(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{PQ}}-\ln\frac{R}{r}\frac{1}{r_{P^*Q}}\right],$$

其中 P^* 是 P 关于圆周 $x^2+y^2=R^2$ 的反演点，并由此推出圆内第一边值问题的解表达式。

解 利用"镜像法"来求圆域 $x^2+y^2\le R^2$ 的 Green 函数。记圆域为 $B_R(O)=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$, 设 $P(x,y)\in B_R^+(O)$, $P(x,y)$ 关于圆周 $x^2+y^2=R^2$ 的反演点为 P^*. 在 P 点放置一个单位正电荷, 在 P^* 点放置 R/r_{OP} 个单位负电荷. 则

$$G(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{PQ}}-\ln\frac{R}{r_{OP}}\frac{1}{r_{P^*Q}}\right).$$

圆域内第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta u=u_{xx}+u_{yy}=f_1(x,y),\ x^2+y^2\le R^2 \\ u=\varphi_1(x,y),\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

解的表达式为

$$u(x,y)=-\int_{x^2+y^2=R^2}\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}ds-\int\int_{x^2+y^2\le R^2}f_1(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\sigma.$$

引进极坐标

$$\xi=r\cos\alpha,\eta=r\sin\alpha;x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,$$

记

$$f_1(\xi,\eta)=f(r,\alpha),\varphi_1(x,y)|_{x^2+y^2=R^2}=\varphi(\alpha),$$

则各点的坐标为 $P(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta), Q(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$, 以及 $P^*(R^2/\rho\cos\theta,R^2/\rho\sin\theta)$。直接计算得

$$\begin{aligned} G(x,y;\xi,\eta) &= -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{R^4+\rho^2r^2-2r\rho R^2\cos(\theta-\alpha)}{R^2(r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha))}, \\ \frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}|_{r=R} &= \frac{\partial}{\partial r}G(x,y;\xi,\eta)|_{r=R}=-\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R(R^2+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\alpha))}. \end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= -\int_{x^2+y^2=R^2}\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}ds-\int\int_{x^2+y^2\leq R^2}f_1(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\sigma\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^R dr\int_0^{2\pi}\ln\frac{R^4+\rho^2r^2-2r\rho R^2\cos(\theta-\alpha)}{R^2(r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha))}rf(r,\alpha)d\alpha\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha.
\end{aligned}
$$