15-16学年冬季学期《偏微分方程》期末试卷答案

一.(15分)在区域$\{t>1,-\infty<x<+\infty\}$内指出二阶线性偏微分方程

$$t^2u_{tt}+2txu_{tx}+x^2u_{xx}=0$$

的类型（即说明是双曲型、抛物型还是椭圆型方程）？作变换$\xi=x/t,\eta=x,u(\xi,\eta)=u(t,x)$ 求$u(\xi,\eta)$所满足的方程，并求满足条件$u(1,x)=x^2,u_t(1,x)=0$的特解。

解：方程为抛物型方程：

$u(\xi,\eta)$所满足$u_{\eta\eta}=0$, 解得通解为

$$u(t,x)=u(\xi,\eta)=\eta f(\xi)+g(\xi)=xf(x/t)+g(x/t)$$

由定解条件得

$$\begin{cases} u(1,x)=xf(x)+g(x)=x^2 \\ u_t(1,x)=-x^2f'(x)-xg'(x)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)+xf'(x)+g'(x)=2x \\ xf'(x)+g'(x)=0 \end{cases}$$

解得$f(x)=2x,g(x)=-x^2$, 从而

$$u(t,x)=\frac{2x^2}{t}-\frac{x^2}{t^2}=\frac{x^2}{t^2}(2t-1).$$

二.（15分）试用幂级数解法讨论：当ρ是何值时Hermite方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\rho y=0$$

存在多项式类型的解？并分别求出一个3次多项式和一个4次多项式类型的解。

解：幂级数解为$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 代入Hermite方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+\rho a_n-2na_n\right]x^n=0.$$

比较系数得

$$a_{n+2}=\frac{2n-\rho}{(n+2)(n+1)}a_n, n=0,1,2,\cdots$$

从而, 当$\rho=2n$时存在多项式类型的解. $\rho=6$时有3次多项式类型的解

$$y=a_1\left(x-\frac{2}{3}x^3\right),$$ 取 $a_0=0$

当$\rho=8$时有4次多项式类型的解

$$y=a_0\left(1-4x^2+\frac{4}{3}x^4\right).$$ $a_1=0$

三. （15分）设A是给定的常数，试用分离变量法求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ y > 0 \\ u(0, y) = 0,\ u(1, y) = A \\ u(x, 0) = 0,\ \lim_{y \to +\infty} u(x, y) \neq \infty. \end{cases}$$

解：取$v = u - Ax$, 则$v(x, y)$满足

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ y > 0 \\ v(0, y) = 0,\ v(1, y) = 0 \\ v(x, 0) = -Ax,\ \lim_{y \to +\infty} v(x, y) \neq \infty. \end{cases}$$

分离变量$v(x, y) = X(x)Y(y)$且代入方程及条件$v(0, y) = 0,\ v(1, y) = 0$及$\lim_{y \to +\infty} v(x, y) \neq \infty$得,

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0,\ y > 0 \\ \lim_{y \to \infty} Y(y) \neq +\infty \end{cases}$$

当$\lambda = n^2\pi^2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 时有非零解

$$X_n(x) = A_n \sin n\pi x,\ Y_n(y) = C_n e^{-n\pi y}.$$

取

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n e^{-n\pi y} \sin n\pi x$$

它满足条件$v(0, y) = 0,\ v(1, y) = 0$以及$\lim_{y \to +\infty} v(x, y) \neq \infty$, 取$D_n$ 满足

$$-Ax = v(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin n\pi x$$

即

$$D_n = -2A \int_0^1 x \sin n\pi x dx = (-1)^n \frac{2A}{n\pi}$$

从而得解

$$u(x, y) = v(x, y) + Ax = Ax + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\pi y} \sin n\pi x.$$

四. （15分）(1). 求证函数$w(t, x) = t^2 + (x + 1)^2$满足

$$w_{tt} - w_{xx} = 0,\ w(t, -1) = t^2.$$

(2). 用延拓法求解下列半无界初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x > -1, t > 0 \\ u(t, -1) = t^2, \\ u(0, x) = 0,\ u_t(0, x) = x + 1. \end{cases}$$

解： (1). 省略。

(2). 记$y=x+1$, $v(t,y)=u(t,y-1)-t^2-y^2$， 则函数$v(t,y)$满足

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{yy}=0, y>0, t>0 \\ v(t,0)=0, \\ v(0,y)=-y^2,\ v_t(0,y)=y. \end{cases}$$

关于y作奇延拓

$$V(t,y)=\begin{cases} v(t,y),\ y\geq 0 \\ -v(t,-y),\ y<0 \end{cases},\ \phi(y)=\begin{cases} -y^2,\ y\geq 0 \\ y^2,\ y<0 \end{cases}$$

则函数$V(t,y)$满足初值问题

$$\begin{cases} V_{tt}-V_{yy}=0, -\infty<y<+\infty, t>0 \\ V(0,y)=\phi(y),\ V_t(0,y)=y. \end{cases}$$

解得

$$V(t,y)=\frac{\phi(y+t)+\phi(y-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{y-t}^{y+t} y dy=\frac{\phi(y+t)+\phi(y-t)}{2}+yt.$$

从而得

$$u(t,x)=v(t,y)+t^2+y^2=V(t,y)|_{y\geq 0}+t^2+y^2=\begin{cases} -t(x+1),\ 0<x+1<t\geq 0 \\ -(x+1-t)^2-t(x+1),\ x+1\geq t>0. \end{cases}$$

五.（20分）给定常数$T>0$, 记$u(t,x)$为

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=f(x),\ 0<x<\pi, t>0 \\ u_x(t,0)=0,\ u_x(t,\pi)=0 \\ u(0,x)=h(x) \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} 1,\ 0\leq x\leq \frac{1}{2}, \\ 0,\ \frac{1}{2}<x\leq \pi \end{cases}$$

的解。试用分离变量法求$h(x)$使得解满足$u(T,x)=0$.

解：由边界条件知本征（特征）函数为$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$, 取

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\cos nx,\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\cos nx,\ h(x)=\sum_{n=0}^{\infty} h_n\cos nx$$

则满足

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left[u_n'(t)+n^2u_n(t)\right]\cos nx=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\cos nx \\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)\cos nx=\sum_{n=0}^{\infty} h_n\cos nx \end{cases}$$

即

$$u_n'(t)+n^2u_n(t)=f_n,\ u_n(0)=h_n$$

由$u(T,x)=0$得$u_n(T)=0$, 利用

$$f_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx=\begin{cases}\frac{1}{2\pi},\ n=0\\ \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n}{2},\ n\neq 0\end{cases}$$

解得

$$h_n=u_n(0)=-\int_0^T e^{n^2t}f_n dt=\begin{cases}-\frac{T}{2\pi},\ n=0\\ \frac{2(1-e^{n^2T})}{n^3\pi}\sin\frac{n}{2},\ n\neq 0.\end{cases}$$

从而

$$h(x)=-\frac{T}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-e^{n^2T})}{n^3\pi}\sin\frac{n}{2}\cos nx$$

六．（20分）(1). 试用傅里叶变换法求函数$G(x,y,\tau)$(格林函数)使得问题

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0,\ -\infty<x<+\infty,y>0\\ \lim_{x^2+y^2\to+\infty}u(x,y)=0,\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$$

的解可以表示为$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y,\tau)f(\tau)d\tau$。

(2). 试用上述表达式求证：在区域$\{-\infty<x<+\infty,y>0\}$内解满足

$$\min_{-\infty<x<+\infty}f(x)\leq u(x,y)\leq\max_{-\infty<x<+\infty}f(x)$$

解： (1). 记$u(x,y)$与$f(x)$关于x的Fourier变换分别为$\bar{u}(\lambda,y)$与$\bar{f}(\lambda)$。关于x作Fourier变换得

$$\begin{cases}\bar{u}_{yy}-\lambda^2\bar{u}=0,\ -\infty<\lambda<+\infty,y>0\\ \lim_{\lambda^2+y^2\to+\infty}\bar{u}(\lambda,y)=0,\ \bar{u}(\lambda,0)=\bar{f}(\lambda)\end{cases}$$

解得

$$\bar{u}(\lambda,y)=\bar{f}(\lambda)e^{|\lambda|y}$$

关于λ作Fourier逆变换得

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(\tau)}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}d\tau.$$

从而$G(x,y,\tau)=\frac{y}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}$。

(2)记$m=\min_{-\infty<x<+\infty}f(x)$及$M=\max_{-\infty<x<+\infty}f(x)$, 则

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(\tau}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}d\tau\geq m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}d\tau=m.$$

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(\tau}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}d\tau\leq M\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}d\tau=M.$$