第九章　真空中的静电场

9.1　**两个铜球，质量均为 10^{-3}kg，相距 1m。问：(1)每个铜球含有多少电子？(2)必须将多少电子从一个铜球移到另一个铜球上，才能使它们之间的引力为 10^4N？(3)移去的电子数占一个球上总电子数的多大部分？**

解　(1)已知铜原子的摩尔质量 $\mu=63.6\times10^{-3}$kg/mol，则每一个铜球含有的铜原子数为

$$N_{\text{cu}}=\frac{m}{\mu}N_0=9.47\times10^{21}(\text{个})$$

铜的原子序数为 29，因此每个球含有的电子数为

$$N_e=29N_{\text{cu}}=2.75\times10^{23}(\text{个})$$

(2)设移去 N 个电子，库仑定律近似适用，则有

$$F=\frac{(Ne)^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$N=\frac{r}{e}\sqrt{4\pi\varepsilon_0 F}=6.59\times10^{15}(\text{个})$$

(3)
$$\frac{N}{N_e}=2.40\times10^{-8}$$

9.2　**两个同号点电荷所带电量之和为 Q，相隔一定距离，问它们各带多少电量时，相互作用力最大？**

解　设其中一个点电荷所带电量为 q，则另一个为 $Q-q$，根据库仑定律

$$F=k\frac{q(Q-q)}{r^2}$$

求 F 对 q 的极值，使 $F'=0$，可得

$$k\frac{Q-2q}{r^2}=0$$

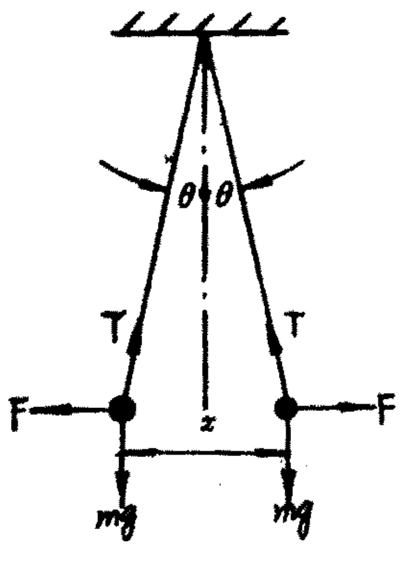
所以
$$q=\frac{1}{2}Q$$

又 $F''=\frac{-2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}<0$，故 $q=\frac{1}{2}Q$ 时 F 为最大值。

9.3　两个相同的小球，质量都是 m，带等量同号电荷 q，各用长 l 的细线挂在同一点，如图所示。设平衡时两线夹角 2θ 很小。(1)试证下列近似等式：

$$x=\left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{\frac{1}{3}}$$

式中 x 为两球平衡时的距离。(2)如果 $l=1.2\mathrm{m}$，$m=1.0\times10^{-2}\mathrm{kg}$，$x=5\times10^{-2}\mathrm{m}$，每个小球上的电荷 $q=2.38\times10^{-8}\mathrm{C}$。若每个小球以 $1.0\times10^{-8}\mathrm{C/s}$ 的变化率失去电荷，此时两球彼此趋近的瞬时相对速率是多少？



解 9.3 图

解　(1)小球平衡时

$$\begin{cases}T\sin\theta=F=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\\ T\cos\theta=mg\end{cases}$$

由于 θ 很小，$\mathrm{tg}\theta \approx \sin\theta = \dfrac{x/2}{l}$，代入上式解得

$$x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$(2)v_r = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}\left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right) \cdot \frac{2gl}{2\pi\varepsilon_0 mg} \cdot \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{x}{q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

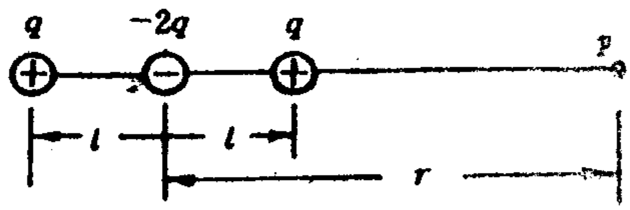
$$= \frac{2}{3}\frac{5\times10^{-2}}{2.28\times10^{-6}}(-1.0\times10^{-8})$$

$$= -1.4\times10^{-3}(\mathrm{m/s})$$

9.4 电四极子由两个相同的电偶极子组成，其电荷分布如图所示。证明在电四偶极子轴线的延长线上离中心为r（$r >> a$）的P点处的电场强度为

$$E = \frac{3\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

式中 $\theta = 2ql^2$ 称为电四极矩。



题 9.4 图

解 根据场强叠加原理

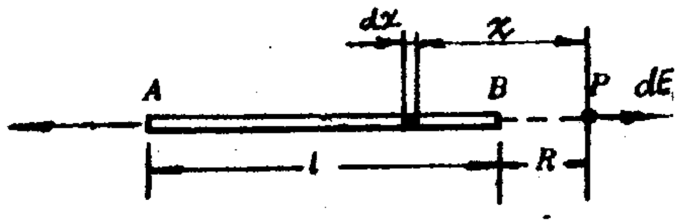
$$E_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r+l)^2} + \frac{1}{(r-l)^2} - \frac{2}{r^2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{1}{(1+\frac{l}{r})^2} + \frac{1}{(1-\frac{l}{r})^2} - 2\right]$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[1 - 2\frac{l}{r} + \frac{3l^2}{r^2} + 1 + \frac{2l}{r} + \frac{3l^2}{r^2} - 2\right]$$

$$=\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

9.5　长 $l=15\text{cm}$ 的直导线 AB(如图)，均匀地分布着线密度 $\lambda=5\times10^{-9}\text{C/m}$ 的电荷。求：(1)在导线的延长线上与导线一端 B 相距 $R=5\text{cm}$ 处 P 点的场强；(2)在导线的垂直平分线上与导线中点相距 $R=5\text{cm}$ 处 Q 点的场强。



解 9.5(1)图

解　(1)建立如图所示的坐标，P 为坐标原点。在导线上任取一线元 $\mathrm{d}x$，带电量 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，在 P 点产生的电场强度的大小为

$$\mathrm{d}E_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{x^2}$$

于是有

$$E_P=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-(R+l)}^{-R}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

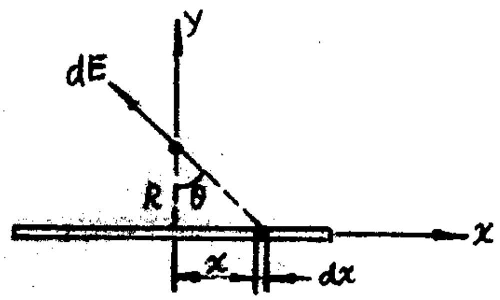
$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+l}\right)$$

$$=6.75\times10^2\text{V/m}$$

(2)建立如图所示的坐标。由对称性可知带电导线在 Q 点产生的场强沿 y 轴正向。取线元 $\mathrm{d}x$，带电量 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，在 Q 点产生的场强的 y 分量为

$$\mathrm{d}E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{r^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda R\mathrm{d}x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

所以



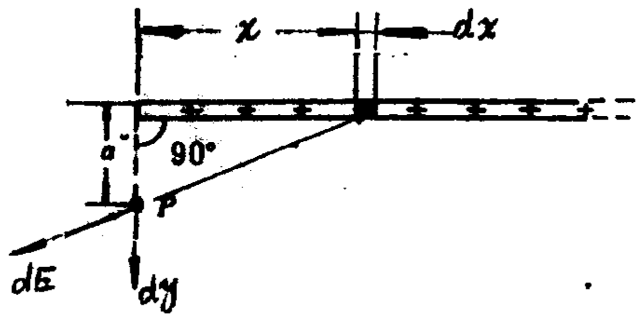
解 9.5(2)图

$$E = \int dE_y = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 R} \frac{1}{[R^2 + (\frac{l}{2})^2]^{1/2}}$$

$$= 1.50 \times 10^3 \text{V/m}$$

9.6 一根很长的绝缘棒，均匀带电(如图)，单位长度上的电荷为 λ。试求距棒的一端垂直距离为 a 的 P 点处的电场强度。



解 9.6 图

解 建立如图所示的坐标。在导线上任取一线元 dx，带电量 $dq = \lambda dx$，在 P 点产生的场强为

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}$$

因此　　$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta,\quad \mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\sin\theta$

由于　$x=-a\mathrm{ctg}\theta,\quad \mathrm{d}x=a\csc^2\theta\mathrm{d}\theta,$

$r^2=a^2+x^2=\csc^2\theta\cdot a^2$

所以有

$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int_0^{\pi/2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

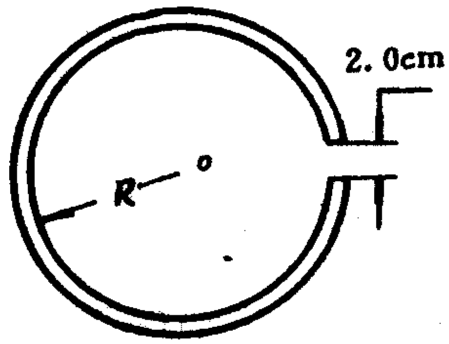
$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=\int_0^{\pi/2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

P 点的场强大小为

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{2}$$

与 x 轴的夹角 $\theta=45°$。

9.7　用不导电的细塑料棒弯成半径为 50.0cm 的圆弧，其两端间空隙为 2.0cm，电量为 3.12×10^{-9}C 的正电荷均匀分布在棒上。求圆心处的场强。



题 9.7 图

解　该圆弧可被看作是由一个均匀带正电的闭合细圆环，与空隙处一段长为 a，电荷线密度相同的带负电的小圆弧组合而成。故圆心处的场强为两者之叠加。均匀带电细圆环在圆心处的场强为零，所以圆心处的合场强与小圆弧在该处产生的场强的大小相等，方向相反。

带负电的小圆弧长 $a=0.020(\mathrm{m})\ll R$，故可将它看作带电量为

q'的点电荷。细塑料棒的电荷线密度为

$$\lambda=\frac{q}{2\pi R-a}=\frac{3.12\times10^{-9}}{3.12}=1.00\times10^{-9}\mathrm{C/m}$$

则小圆弧带电量为

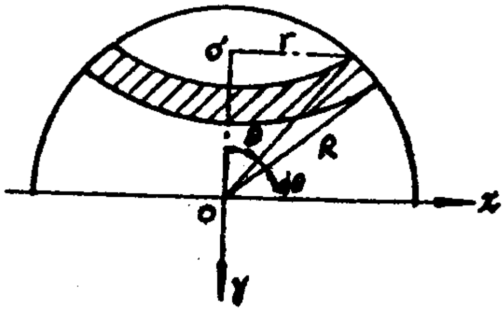
$$q'=\lambda a=2.0\times10^{-11}\mathrm{C}$$

q'电荷在圆心处产生的场强的大小为

$$E_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{R^2}=0.72\mathrm{V/m}$$

方向由圆心指向缝隙。

9.8　一半径为 R 的半球壳，均匀带电，电荷面密度为 σ，求球心处的电场强度。



解 9.8 图

解　将半球面分割成许多极窄的圆环，环的带电量为

$$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}s=\sigma\cdot2\pi r\mathrm{d}l$$
$$=6.2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

该圆环在球心 O 点产生的场强为

$$\mathrm{d}E=\frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}$$

方向沿 x 轴正向。将

$$x=R\cos\theta,\quad r=R\sin\theta,\quad \mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$$

代入上式，有

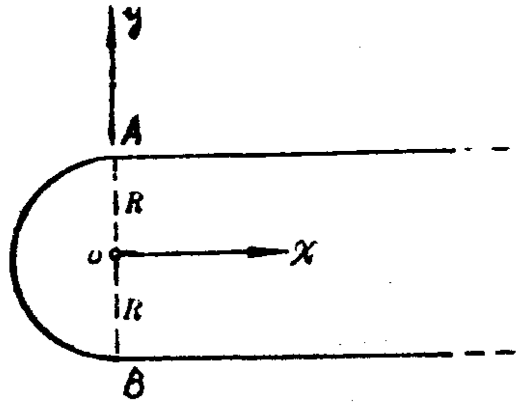
$$\mathrm{d}E=\frac{\sigma\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta}{2\varepsilon_0}$$

所以

$$E=\int\mathrm{d}E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

9.9　电荷线密度为 λ 的无限长均匀带电导线，弯成如图所示的形状，若圆弧半径为 R，求图中 O 点的场强。

解　半无限长直导线 A 在 O 点产生的场强 E_1 为



题 9.9 图

$$E_1 = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}i - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}j$$

半无限长直导线 B 在 O 点产生的场强 E_2 为

$$E_2 = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}i + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}j$$

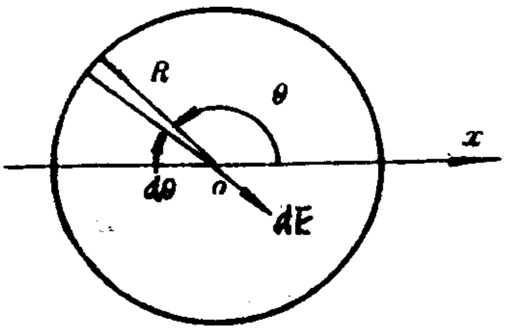
半圆弧在 O 点产生的场强 $E_{\widehat{AB}}$ 为

$$E_{\widehat{AB}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}i$$

所以 O 点的场强为

$$E = E_1 + E_2 + E_{\widehat{AB}} = 0$$

9.10　半径为 R 的带电细圆环，电荷线密度为 $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$，$\lambda_0$ 为常数，θ 为半径 R 与 x 轴的夹角。求环中心处的电场强度。



题 9.10 图

解　把圆环分割或许多电荷元 dq，任一电荷元在环心 O 产生的场强为

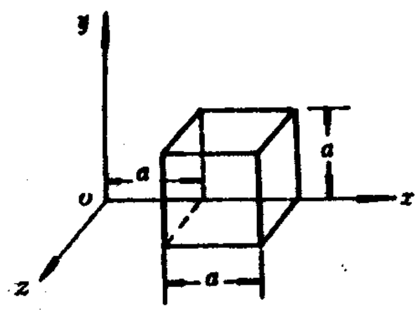
$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{(\lambda_0\cos\theta)Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{\lambda_0\cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0R}$$

根据对称性分析，总场强场只是平行于 x 轴的分量 dE_x 的总和，即

$$dE_x=\frac{\lambda_0\cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0R}\cos(\pi+\theta)=-\frac{\lambda_0\cos^2\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0R}$$

$$E=\int dE_x=2\int_0^{\pi}\frac{\lambda_0\cos^2\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0R}=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0R}$$

9.11　设某空间电场强度的分布为 $\boldsymbol{E}=bx\boldsymbol{i}$。有一边长为 a 的立方体如图所示。试求：(1)通过立方体的电通量；(2)该立方体内的总电荷量。



题 9.11 图

解　(1)根据电通量定义

$\Phi=ES\cos\theta$

$$\Phi_{e1}=ES_1\cos\pi=-ES_1=-bxa^2=-ba^3$$

$$\Phi_{e2}=ES_2=bxa^2=2ba^3$$

$$\Phi_e=\Phi_{e1}+\Phi_{e2}=ba^3$$

(2)根据高期定理，$\Phi_e=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

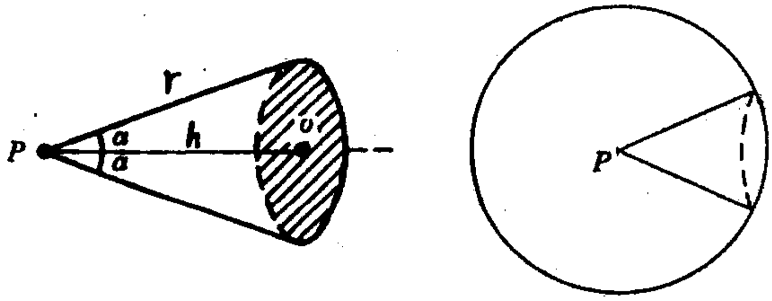
故有

$$\Phi_e=ba^3=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$q=\varepsilon_0ba^3$$

9.12　如图所示，在点电荷 q 的电场中，取半径为 R 的圆形平面，设 q 在垂直于平面并通过圆心 O 的轴线上 A 点处。试计算通过此平面的电通量。

解　圆边至 A 点的距离 $r=\sqrt{R^2+h^2}$，以 A 为圆心，r 为半径作



题 9.12 图

一球面。根据高斯定理，通过此球面积的电通量为$\frac{q}{\varepsilon_0}$。

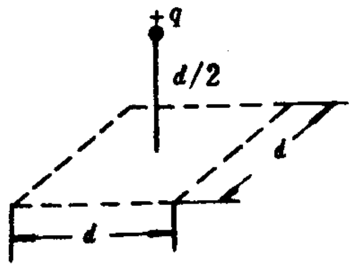
圆平面在球面上截取的部分球面积为 $2\pi r(r-h)$，因此 A 点对圆平面所张的立体角为

$$\Omega=\frac{2\pi r(r-h)}{r^2}=\frac{2\pi(r-h)}{r}$$

已知通过整个球面(即立体角为 4π)的电通量为$\frac{q}{\varepsilon_0}$，所以通过圆平面的电通量为

$$\Phi_e=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega}{4\pi}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi(\sqrt{R^2+h^2}-h)}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

9.13 一边长为 d 的正方形表面，其中心上方距离 $d/2$ 处有一带 $+q$ 电量的点电荷，如图所示。求通过该表面的电通量。



题 9.13 图

解 作一边长为 d 的立方体，点电荷 q 位于中心。按高斯定理，通过立方体各表面的总电通量为 $\Phi_e=\frac{q}{\varepsilon_0}$，所以通过任一正方形表面的电通量为

$$\Phi_{e1}=\frac{1}{6}\Phi_e=\frac{q}{6\varepsilon_0}$$

9.14 半径为 R 的非金属带电球,其电荷体密度 $\rho=kr^2$,k 为常数,r 为离球心的距离。求这带电球体产生的电场的场强分布:(1)在球外;(2)在球内。

解 由电荷分布的球对称性可知,球体内、外的场强分布是球对称的,且方向处处沿径向。

(1)在球体外

取半径为 r 的同心球面为高斯面,其中包围的电荷量为

$$q=\int\rho\mathrm{d}v=\int_0^R 4\pi kr^4\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi kR^5$$

由高斯定量得

$$\oint E_{外}\cdot\mathrm{d}S=4\pi r^2\cdot E_{外}=\frac{4\pi k}{5\varepsilon_0}R^5$$

所以

$$E_{外}=\frac{kR^5}{5\varepsilon_0 r^2}$$

(2)在球体内

取半径为 r 的同心球面为高斯面,其中所包围的电荷量为

$$q=\int\rho\mathrm{d}v=\frac{4}{5\pi}kr^5$$

根据高斯定量

$$\oint E\cdot\mathrm{d}S=4\pi r^2\cdot E_{内}=\frac{4\pi}{5\varepsilon_0}kr^5$$

所以 $E_{内}=\frac{kr^3}{5\varepsilon_0}$

9.15 两根互相平行的带电长直导线,电荷线密度分别为 λ_1 和 λ_2,其轴线间的距离为 r,求导线单位长度上所受静电力的大小。

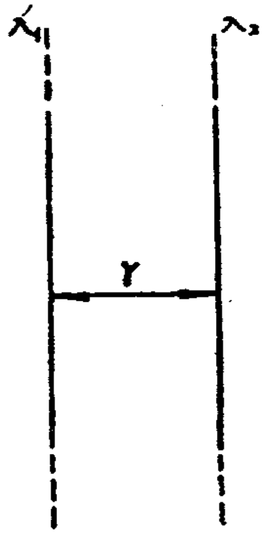
解 长直导线 l 在相距 r 处产生的电场强度为 $E_1=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$,在导

线 2 上取长度为 L 的一段导线，受到的静电力为

$$F_l=\int_0^L E_1\lambda_2 \mathrm{d}l=E_1\lambda_2 L$$

因此单位长度所受静电力为

$$F=\frac{F_l}{L}=E_1\lambda_2=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



题 9.15 图

9.16 实验表明，地球表面附近的电场强度近似为 200N/C，方向指向地球中心，如果地球上的电荷全部分布在表面，试求地球带的总电量。

解 按高斯定理

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-E\cdot 4\pi R^2=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

所以得

$$Q=-4\pi\varepsilon_0 R^2 E=-\frac{1}{9\times 10^9}(6.37\times 10^6)^2\times 200$$

$$=-9.02\times 10^3\mathrm{C}$$

9.17 根据量子理论，氢原子中心是带正电 e 的原子核（看作点电荷），核外是带负电的电子云。在正常状态下电子云的电荷密度分布呈球对称，为 $\rho(r)=-\frac{e}{2a_0^3}\mathrm{e}^{-2r/a_0}$，式中 a_0 为常数，称为玻尔半径。试求氢原子内的电场分布。

解 氢原子内的电场是原子核产生的电场 E_+ 与电子云产生的电场 E_- 的矢量和。总场强沿径向。原子核激发的场强为

$$E_+(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

电子云激发的场强为

$$E_-(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \rho(r')\mathrm{d}V$$

取球坐标，原点在原子核处，则体积元 $\mathrm{d}V=r'^2\sin\theta\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 代入上式，得

$$E_-(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^r-\frac{e}{2a_0^3}e^{2r'/a_0}r'^2\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(\frac{2r^2}{a_0^2}+\frac{2r}{a_0}+1\right)e^{-2r/a_0}-1\right]$$

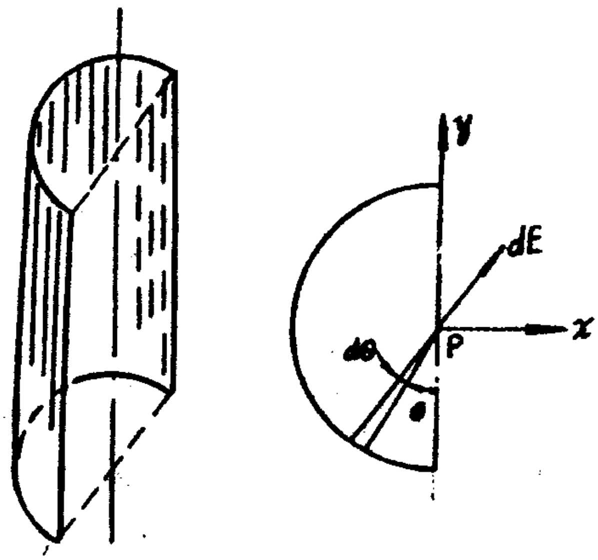
氢原子内的总场强为

$$E=E_++E_-=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{2r^2}{a_0^2}+\frac{2r}{a_0}+1\right)e^{-2r/a_0}$$

9.18　一半径为 R 的无限长半圆柱面形薄筒，均匀带电，电荷面密度为 σ。试求圆柱面轴线上一点的电场强度 E。

解　把半圆柱面分割成宽度为 $\mathrm{d}l$（$\mathrm{d}l\to0$）的许多窄条。柱面轴线上一点的场强是无限多细直导线在该处产生的场强的叠加。

作半圆柱薄筒的横截面图。设导线长 L，则每根导线的带电量为 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}s=\sigma L\mathrm{d}l$，故导线的线电荷密度为



解 9.18 图

$$\lambda=\frac{\mathrm{d}q}{L}=\frac{\sigma L\mathrm{d}l}{L}=\sigma\mathrm{d}l=\sigma R\mathrm{d}\theta$$

根据高斯定理求得长直细导线在 P 处产生的场强为

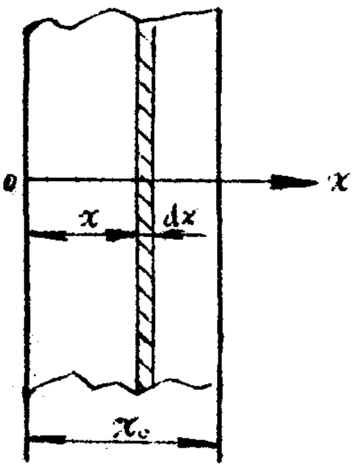
$$\mathrm{d}E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

由对称性分析可知，整个带电圆柱面在 P 点产生的场强沿 x 轴方向，故有

$$E=\int \mathrm{d}E_x=\int \mathrm{d}E\sin\theta=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}$$

9.19 无限大带电平板，厚度为 x_0，电荷体密度沿 x 方向分布为 $\rho=\rho_0 x$，求板内($0<x<x_0$)和板外 $x>x_0$ 的电场分布。

解 可将此板看成由无限多个带电薄平面组成，电荷面密度为 $\sigma=\frac{\rho s\mathrm{d}x}{s}=\rho_0 x\mathrm{d}x$。每一带电平面产生的场强为



解 9.19 图

$$\mathrm{d}E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho_0 x}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x$$

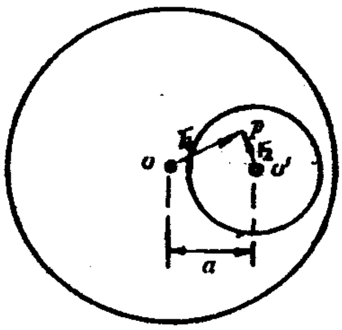
总场强为：

$$E_{内}=\int_0^x \frac{\rho_0 x}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x-\int_x^{x_0}\frac{\rho_0 x}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}(2x^2-x_0^2)\quad(0<x<x_0)$$

$$E_{外}=\int_0^x \frac{\rho_0 x}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x=\frac{\rho_0 x_0^2}{4\varepsilon_0}\qquad(x>x_0)$$

9.20 一半径为 R 的均匀带电球，电荷体密度为 ρ，球内有一不带电的球形空腔，半径为 r，两球心距为 a，如图所示。求空腔内任一点 P 的电场强度。(忽略边缘效应)



题 9.20

解 若我们认为空腔呈电中性是由电荷体密度相同的正、负两种电荷重叠在一起形成的，那么题中的带电体可被看作是由半径 R，电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体和半径 r 电荷体密度为 $-\rho$ 的均匀带电球体所构成，空间任一点的场强为这两个均匀带电球体在该处激发的场强的叠加。

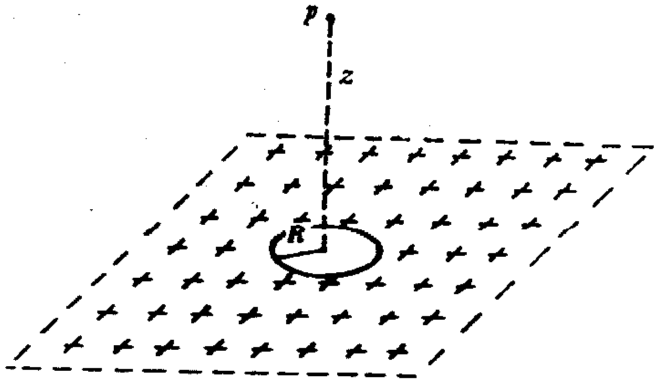
由高斯定理求得大球和小球在 P 点的场强 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 分别为

$$E_1=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_1,\quad E_2=\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}r_2$$

得 P 点场强为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_P&=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\\&=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\\&=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

9.21 图中一无限大均匀带电平面，电荷面密度为 σ，板上有一半径 R 的小圆孔，求孔轴上相距为 a 的 P 点的场强（忽略边缘效应）。



题 9.21 图

解 带有小孔的无限大均匀带电平板，可被视为由电荷面密度为 σ 的无限大平板与电荷面密度为 $-\sigma$、半径为 R 的圆形薄板组合而成。P 点的场强可根据叠加原理求得。

无限大带电平板在 P 点产生的场强 E_1 为

$$E_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

半径为 R 的均匀带电薄圆盘在盘轴线上 P 点处的场强 E_2 为（计算过程从略）

$$E_2=\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

因此 P 点处的合场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}\boldsymbol{k}$$

9.22 半径为 R 的长直圆柱体均匀带电，电荷体密度为 ρ。求这种体分布电荷所产生的电场的场强分布：(1)在圆柱体外；(2)在圆柱体内；(3)电场在何处最强？何处最弱？

解　由于电场分布具有轴对称性，可应用高斯定理求解。

(1)圆柱体外作同轴圆柱面为高斯面，根据高斯定理，有

$$\Phi_{e1}=\oint E_1\cdot dS=E_1\cdot 2\pi rl$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R \rho l(2\pi r)dr=\frac{\pi l\rho}{\varepsilon_0}R^2$$

所以 $$E_1=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

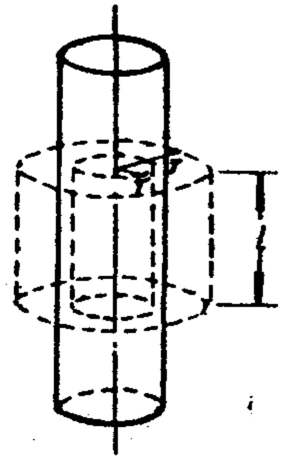
(2)在圆柱体内，同理可得

$$\Phi_{e2}=\oint E_2\cdot dS=E_2\cdot 2\pi rl$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho l(2\pi r)dr$$

$$=\frac{\pi l\rho}{\varepsilon_0}r^2$$

所以 $$E_2=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$



解 9.22 图

根据上述结果，可知 $r=R$ 处 E 最强，$r=0$ 处 E 最弱。

9.23　设气体放电形成的等离子体在圆柱内的电荷分布可用下式表示

$$\rho_e(r)=\frac{\rho_0}{\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2}$$

式中 r 是到轴线的距离，ρ_0 是轴线上的电荷密度，a 是常数。试计算场强分布。

解　该等离子体在圆柱体的电荷分布是 r 函数，激发的电场具有轴对称性，场强方向垂直圆柱面侧面。作同轴圆柱面为高斯面。

沿轴线方向作长为 l，半径为 r 的圆柱体，在厚度为 dr 的薄层内所包围的电量为

$$dq=\rho_e(r)\cdot l\cdot 2\pi r\cdot dr$$
$$=\frac{\rho_0\cdot 2\pi r\cdot l dr}{\{1+(\frac{r}{a})^2]^2}$$

则半径为 r 的圆柱体内的总电量为

$$q=\int dq=\int_0^r\frac{\rho\cdot 2\pi r\cdot l\cdot dr}{[1+(\frac{r}{a})^2]^2}$$
$$=2\pi l\rho_0\int_0^r\frac{r dr}{[(1+(\frac{r}{a})^2]^2}$$

令 $k=1+(\frac{r}{a})^2$,则 $dk=\frac{2r}{a^2}dr$,

即
$$r dr=\frac{a^2}{2}dk$$

当 $r=0$ 时,$k=1$;$r=r$ 时,$k=1+(\frac{r}{a})^2$,代入上式,于是

$$q=2\pi l\rho_0\frac{a^2}{2}\int_1^{1+(\frac{r}{a})^2}\frac{dk}{k^2}$$
$$=\frac{\pi l\rho_0a^2}{1+(\frac{a}{r})^2}$$

通过圆柱面的通量为 $E\cdot 2\pi rl$,根据高斯定理,有

$$E\cdot 2\pi r\cdot l=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

则
$$E(r)=\frac{\rho_0a^2r}{2\varepsilon_0(a^2+r^2)}$$

E 的方向垂直于轴线指向等离子圆柱体外。

9.24 四个点电荷各带电量 2.0×10^{-9}C,放在一正方形的四个顶点上,各点与正方形中心 O 点相距 5.0cm。问:(1)O 点的电势是多少?(2)将点电荷 $q_0=1.0\times10^{-9}$C 从无限远处移至 O 点,电场力需作功多少?(3)该电荷的电势能改变了多少?

解 (1)O 点的电势是各点电荷在该处产生的电势的代数和,故

$$U_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{r}+\frac{q_3}{r}+\frac{q_4}{r}\right]$$

$$=9\times10^9\,\frac{4\times2.0\times10^{-9}}{5.0\times10^{-2}}$$

$$=1.44\times10^3\text{v}$$

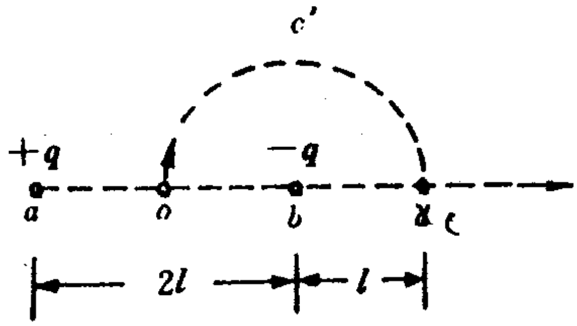
(2) $A=q_0(U_\infty-U_0)$

$=-q_0U_0$

$=-1.44\times10^{-6}\text{J}$

(3) $\Delta W=W_0-W_\infty=W_0$

$=1.44\times10^{-6}\text{J}$



题 9.25 图

9.25 在图中 a、b 两处放有电量分别为 $+q$ 和 $-q$ 的点电荷，ab 间距离为 $2l$。试问:(1)将一正试验电荷 q_0 从 O 点沿半圆弧移到 c 点，电场力对它作了多少功?(2)将一负试验电荷从 c 点沿 ac 的延长线移到无穷远，电场力对它作了多少功?

解 (1)
$$U_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=0$$

$$U_c=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(3l)}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

$$A_{oc'c}=q_0(U_o-U_c)$$

$$=\frac{q_0q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

(2) $A_{c\infty}=q_0(U_c-U_\infty)=\dfrac{q_0q}{6\pi\varepsilon_0 l}$

9.26 试求如图所示的线性电四极子在很远处($r>>l$)一点 P 的电势。

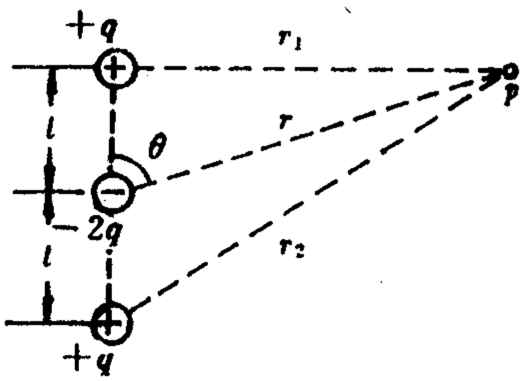
解 $U_p=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{2}{r}+\dfrac{1}{r_2}\right)$

因为 $r\gg l$,故有

$r_1\approx r-a$, $r_2\approx r+a$, $a=l\cos\theta$

得 $U_p=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r-a}-\frac{2}{r}+\frac{1}{r+a}\right)$

$$\approx\frac{ql^2\cos^2\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

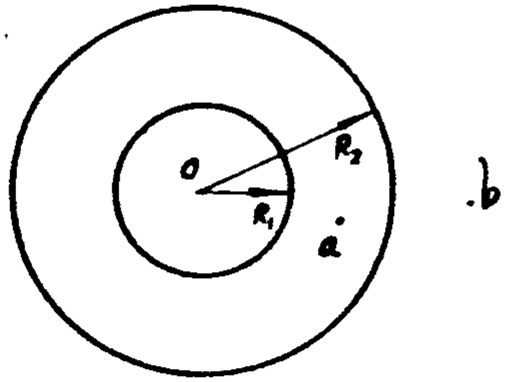


题 9.26 图

9.27 金原子核可看作均匀带电球，其半径约为 6.9×10^{-15}m，电荷量为 $Ze=79\times1.6\times10^{-19}$C。求它表面上的电势。

解 $U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=1.6\times10^{7}$v

9.28 两个同心球壳，半径分别为 10cm 和 30cm，小球壳均匀带正电荷 10^{-8}C，大球壳均匀带有正电荷 1.5×10^{-8}C。求离球心分别为 20cm 的 a 点与 50cm 的 b 点的电势。



题 9.28 图

解 已知小球壳和大球壳分别带电 Q_1 和 Q_2。利用高斯定理求出场强分布

$$E_1=0 \qquad (r<R_1)$$

$$E_2=\frac{\theta_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$E_3=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r>R_2)$$

则电势分布为

$$U=\int_{0.2}^{0.3}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{0.3}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$=900\text{v}$$

$$U=\int_{0.5}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=450\text{v}$$

9.29 一均匀带电线的形状如图所示，电荷线密度为 λ，AB 和 DE 段的长度均为 R。求圆心 O 点的电势。

解 O 点的电势为带电直线 AB、DE 和半圆弧 BD 在该点产生的电势的叠加。

题 9.29 图

设 AB 在 O 点产生的电势为 U_1，$\overset{\frown}{BD}$为 U_2，DE 为 U_3。已知点电荷产生的电势为

$$dU=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

根据电势叠加原理，有

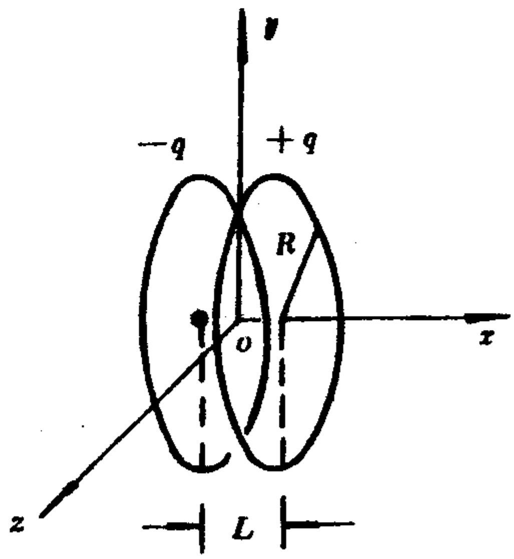
$$U_1=U_2=\int_R^{2R}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

$$U_3=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}=\int^{R}\frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

所以 O 点的电势

$$U_0=U_1+U_2+U_3=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}(2\ln 2+\pi)$$

9.30 两个半径均为 R 的均匀带电圆环，电量分别为 q 和 $-q$，平行放置，其间距为 l，且 $l<<R$，如图所示。(1)以两环的对称中心 O 为坐标原点，试求垂直于环面的 x 轴上的电势分布；(2)试证明：当 $x>>R$ 时，$U=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$。



题 9.30 图

解(1)带正电圆环在 x 轴上 P 点处产生的电势为

$$U_+=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-\frac{l}{2})^2+R^2}}$$

带负电圆环在 P 点产生的电势是

$$U_-=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+\frac{l}{2})^2+R^2}}$$

由叠加原理得：

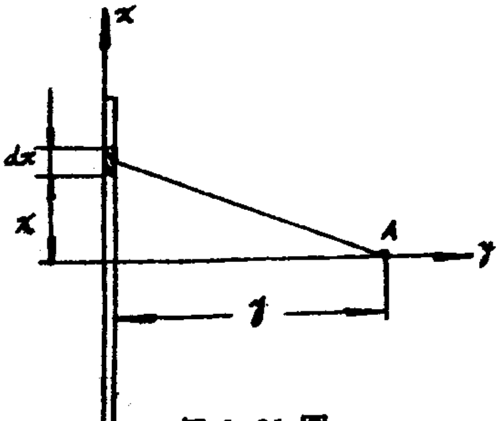
$$U=U_++U_-$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{l}{2})^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+\frac{l}{2})^2+R^2}}\right]$$

当 $l\ll R$ 时，用泰勒级数在 $l=0$ 处展开，略去 l 的二次项，得

$$U=\frac{qlx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

9.31　电量 Q 均匀分布在长为 $2l$ 的细线上。试求：(1)在带电直线的中垂线上离带电直线中心距离为 y 的 A 点的电势 U_A 和场强 E_A；(2)在带电直线的延长线上，距带电直线中心的距离为 x 的 B 点的电势 U_B 和场强 E_B(利用电势梯度求场强)。



解 9.31 图

解　(1)在细导线上任取分元 dx，带电量为 $dq=\frac{Q}{2l}dx$，该电荷元在 P 点产生的电势为

$$dU=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{Q}{2l}dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

根据电势叠加原理整个导线在 P 点产生的电势为

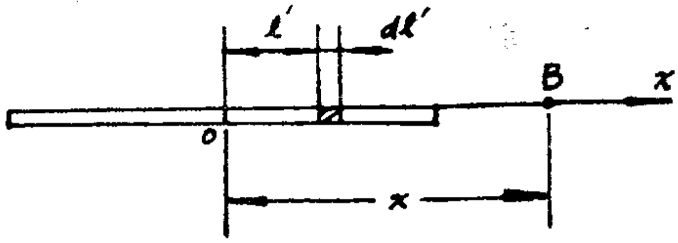
$$U=\int dU=\int_{-l}^{l}\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l}\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{\sqrt{l^2+y^2}+l}{y}$$

根据对称性分析，P 点的场强沿 x 轴正向。所以

$$E=E_y=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{y^2+l^2}}$$

(2)在细导线上任取线元 $\mathrm{d}l'$，带电量为 $\mathrm{d}q=\frac{Q}{2l}\mathrm{d}l'$，该电荷元在 P 处产生的电势为



解 9.31(2)图

$$\mathrm{d}U=\frac{\frac{Q}{2l}}{4\pi\varepsilon_0(x-l')}\mathrm{d}l'$$

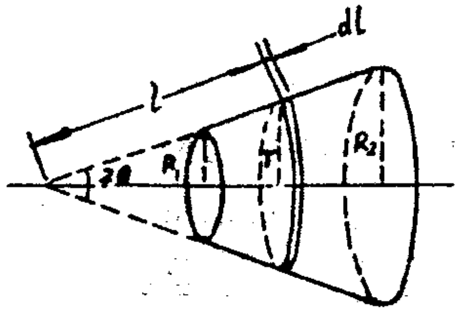
整个带电细导线在 P 点产生的电势为

$$U=\int\mathrm{d}U=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{x+l}{x-l}\qquad(x>l)$$

分析电荷分布情况，可知 P 点的场强沿 x 正方向。因此

$$E=E_x=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(x^2-l^2)}$$

9.32 一圆台的锥顶张角为 2θ，上底半径为 R_1，下底半径为 R_2，如图所示。它的侧面均匀带电，其电荷面密度为 σ。求顶点 O 的电势。



题 9.32 图

解 将锥形圆台分割成许多平行于底面的细圆环，环面积为 $\mathrm{d}S=2\pi r\cdot\mathrm{d}l=2\pi l\sin\theta\mathrm{d}l$，带电量 $\mathrm{d}q=\sigma(2\pi l\sin\theta\mathrm{d}l)$。细环在 O 点产生的电势为

$$\mathrm{d}U=\frac{2\pi l\sigma\sin\theta\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

根据电势叠加原理，锥顶 O 处的电势为

$$U=\int\mathrm{d}U=\int_{R_1/\sin\theta}^{R_2/\sin\theta}\frac{2\pi l\sigma\sin\theta\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

9.33 一薄圆环的内半径 $a=0.4\text{m}$，外半径 $b=0.8\text{m}$，均匀带电，总电量 $Q=6\times10^{-7}\text{C}$。求其圆心处的电势。

解 在半径 r 处取宽度 $\mathrm{d}r$ 的同心圆环，带电量为 $\mathrm{d}q=\sigma(2\pi r\mathrm{d}r)$，带电细圆环在环心处产生的电势为

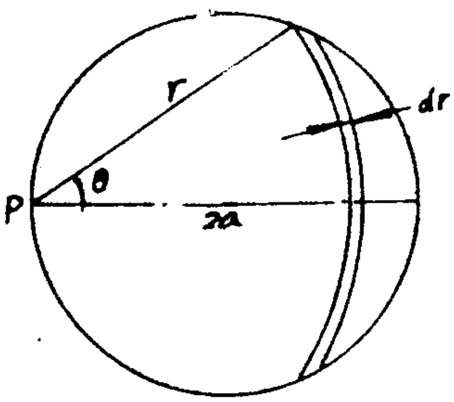
$$\mathrm{d}U=\frac{\sigma(2\pi r\mathrm{d}r)}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0}$$

根据电势叠加原理，圆心处的电势为各细圆环在该处产生的电势的代数和，即

$$U=\int\mathrm{d}U=\int_a^b\frac{\sigma\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(b-a)$$

$$=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(a+b)}=9\times10^3\text{v}$$

9.34 半径为 R 的非导体薄圆盘均匀带电，电荷的面密度为 σ。求圆盘边缘上一点 P 的电势。



解 9.34 图

解 以圆盘边缘上 P 点为圆心，任意长 $r(r<2a)$ 为半径，作一宽度 $\mathrm{d}r$ 的环带，其面积为 $\mathrm{d}S=2\theta r\mathrm{d}r$，带有电量 $\mathrm{d}q=\sigma(2\theta r\mathrm{d}r)$。环带在 P 点产生的电势为

$$\mathrm{d}U=\frac{\sigma(2\theta r\mathrm{d}r)}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma\theta\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0}$$

P 点的总电势应为各环带在该处产生的电势的代数和。根据几何关系

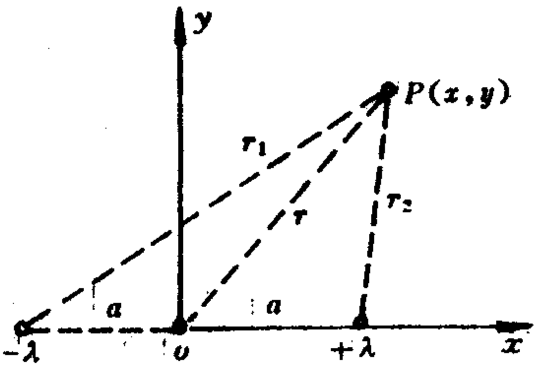
$r=2a\cos\theta$，　$\mathrm{d}r=-2a\sin\theta\mathrm{d}\theta$

故有

$$U_p=\int\mathrm{d}U=-\frac{a\sigma}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a\sigma}{\pi\varepsilon_0}$$

9.35 单位长度上分别带电为 λ 和 $-\lambda$ 的两条无限长平行直导线，相距为 $2a$，如图所示。求任一点 P 的电势（设两导线间的中点 O 为电势零点）。



题 9.35 图

解 带正电和负电的直导线分别在 P 点产生的电势为

$$U_+ = \int_{r_2}^{a} \boldsymbol{E}_+ \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{r_2}^{a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

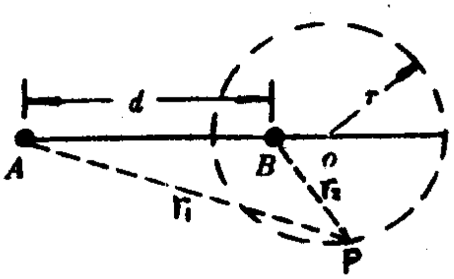
$$U_- = \int_{r_1}^{a} \boldsymbol{E}_- \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{r_1}^{a} \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

所以 P 点的电势为

$$U_P = U_+ + U_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

因为 $r_1 = \sqrt{(x+a)^2+y^2}$， $r_2 = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$

所以 $$U_P = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$



解 9.36 图

*9.36 点电荷 q_1 与 q_2 置于相距为 d 的 A、B 两点（如图试证电势为零的等势面是一球面，球心 O 在 AB 的延长线上，$AO=$

$\frac{q_1^2 d}{q_1^2-q_2^2}$，半径 $r=\frac{q_1 q_2 d}{q_1^2-q_2^2}$。

解 设图中 P 点满足电势等于零的条件，即

$$U_p=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}=0$$

于是有

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{q_1}{q_2} \tag{1}$$

然后再求满足这一关系的点的轨迹。设以 A 为原点，P 的坐标为(x，y，z)，则由(1)式得

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}=\frac{q_1}{q_2}$$

即为

$$x^2-\frac{2q_1^2\mathrm{d}}{q_1^2-q_2^2}x+y^2+z^2=-\frac{q_1^2\mathrm{d}^2}{q_1^2-q_2^2}$$

经配方运算后得到

$$(x-\frac{q_1^2\mathrm{d}}{q_1^2-q_2^2})+y^2+z^2=\frac{q_1^2q_2^2\mathrm{d}}{(q_1^2-q_2^2)^2}$$

与标准球面方程比较，可见球半径是 $r=\frac{q_1q_2\mathrm{d}}{q_1^2-q_2^2}$，且球心 O 在 AB 延长线上，$AO=\frac{q_1^2 d}{q_1^2-q_2^2}$。