

专业： 电子信息工程
姓名： _____
学号： _____
日期： 2022 年 5 月 4 日
地点： 线上

浙江大学实验报告

课程名称： 信号分析与处理 指导老师： 杨欢 季瑞松 成绩： _____
实验名称： 离散傅里叶变换 实验类型： 基础规范型 同组学生姓名： 无

一、实验目的和要求

1. 掌握 DFT 变换
2. 掌握 DFT 性质
3. 掌握利用 DFT 计算线性卷积
4. 掌握快速傅立叶变换 (FFT)

二、实验内容

1. 求以下有限长离散时间信号的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\Omega})$
 - 已知 $x(n) = (0.9e^{j\frac{\pi}{3}})^n, 0 \leq n \leq 10$
 - 已知 $x(n) = 2^n, -10 \leq n \leq 10$
2. 因果 LTI 系统 $y(n) = 0.81y(n-2) + x(n) - x(n-2)$ 求
 - $H(z)$
 - 冲激响应 $h(n)$
 - 单位阶跃响应 $u(n)$
 - $H(e^{j\Omega})$, 并画出幅频和相频特性
3. 已知序列 $x(n) = \cos(0.82\pi n) + 2\sin(\pi n), 0 \leq n \leq 50$, 绘制 $x(n)$ 及其离散傅里叶变化 $X(k)$ 的幅度、相位图。
4. 设 $x(n) = \sin(0.2\pi n) + \text{randn}(n), 0 \leq n \leq N-1$, 其中 $\text{randn}(n)$ 为高斯白噪声。求出 $N = 4^m, m = 2, 3, 4$ 的 MATLAB 采用不同算法的执行时间。
5. 利用 DFT 实现两序列的卷积运算, 并研究 DTF 点数和混叠的关系。
给定 $x(n) = nR_{16}(n), h(n) = R_8(n)$, 用 FFT 和 IFFT 分别求线性卷积和混叠结果输出, 并用函数 $\text{stem}(n, y)$ 画出相应的图形
6. 研究高密度频谱和高分辨率频谱
设有连续信号

实验名称： 离散傅里叶变换 姓名： 王涵 学号： 3201004515

$$x(t) = \cos(2\pi \times 6.5 \times 10^3 t) + \cos(2\pi \times 7 \times 10^3 t) + \cos(2\pi \times 9 \times 10^3 t)$$

- 以采样频率 $f_s = 32\text{kHz}$ 对信号 $x(t)$ 采样，分析下列三种情况的幅频特性。
- 采集数据长度 $N=16$ 点，做 $N=16$ 点的 DFT，并画出幅频特性。
- 采集数据长度 $N=16$ 点，补零到 256 点，做 $N=256$ 点的 DFT，并画出幅频特性。
- 采集数据长度 $N=256$ 点，做 $N=256$ 点的 DFT，并画出幅频特性。

观察三种不同频率特性图，分析和比较它们的特点以及形成的原因。

三、实验数据记录与处理

1. 求以下有限长离散时间信号的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\Omega})$

- (1) 已知 $x(n) = (0.9e^{j\frac{\pi}{3}})^n, 0 \leq n \leq 10$

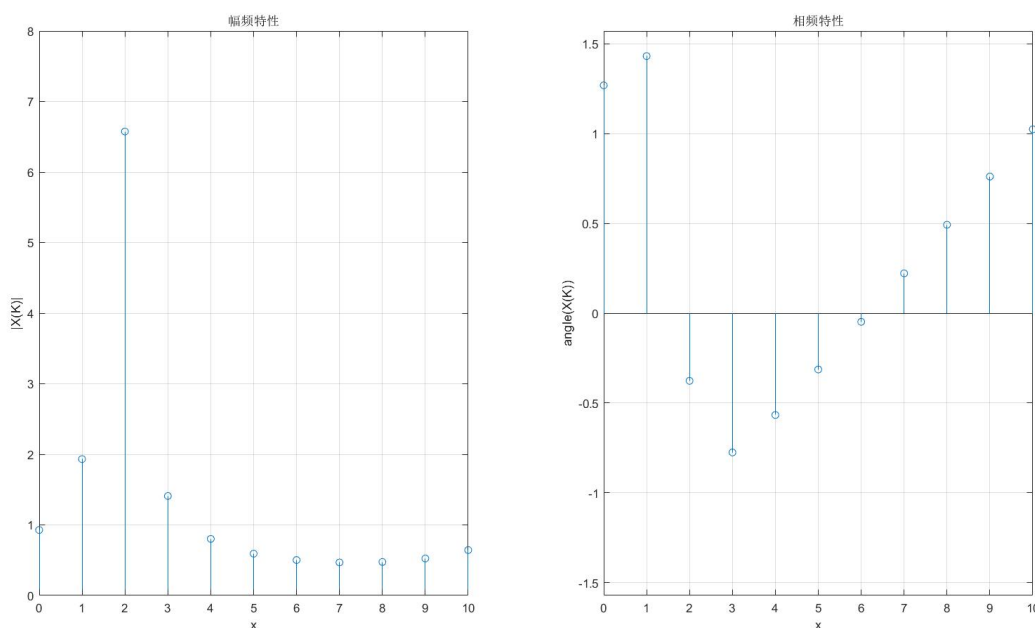


图 1 幅频特性和相频特性

- (2) 已知 $x(n) = 2^n, -10 \leq n \leq 10$

实验名称： 离散傅里叶变换 姓名： 王涵 学号： 3201004515

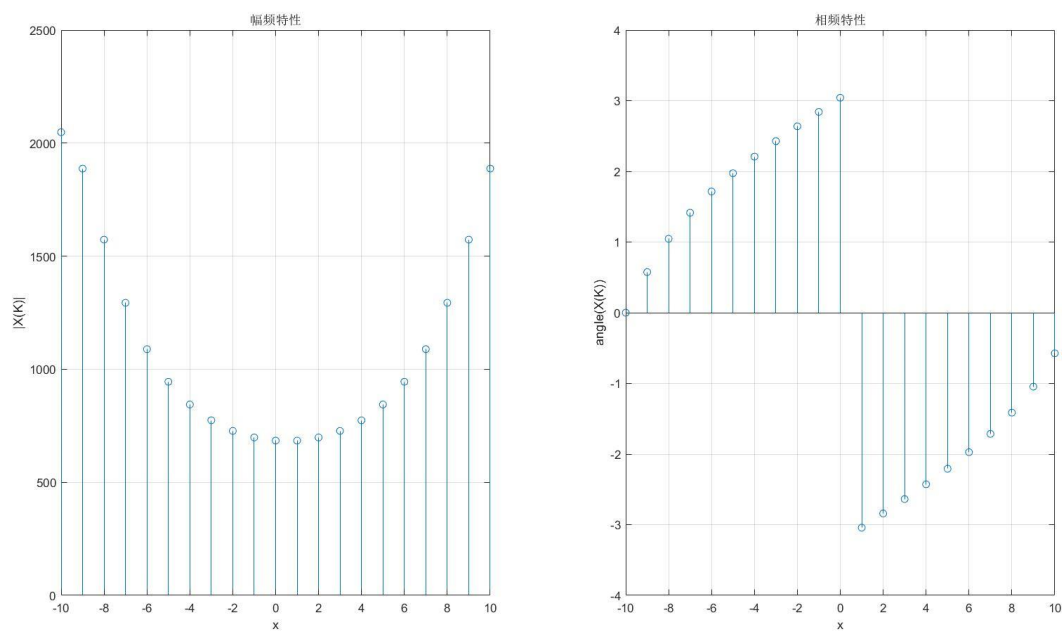


图 1 幅频特性和相频特性

3. 因果 LTI 系统 $y(n] = 0.81y[n-2] + x[n] - x[n-2]$ 求

- $H(z)$
- 冲激响应 $h[n]$
- 单位阶跃响应 $g[n]$

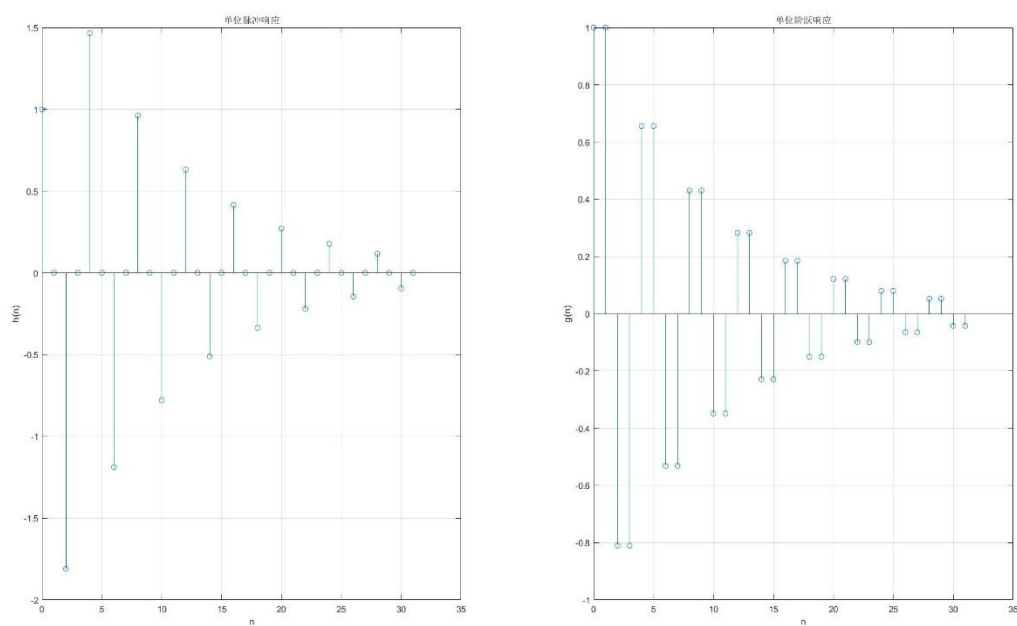


图 2 冲激响应和单位阶跃响应

实验名称： 离散傅里叶变换 姓名： 王涵 学号： 3201004515

● $H(e^{j\Omega})$ ，并画出幅频和相频特性

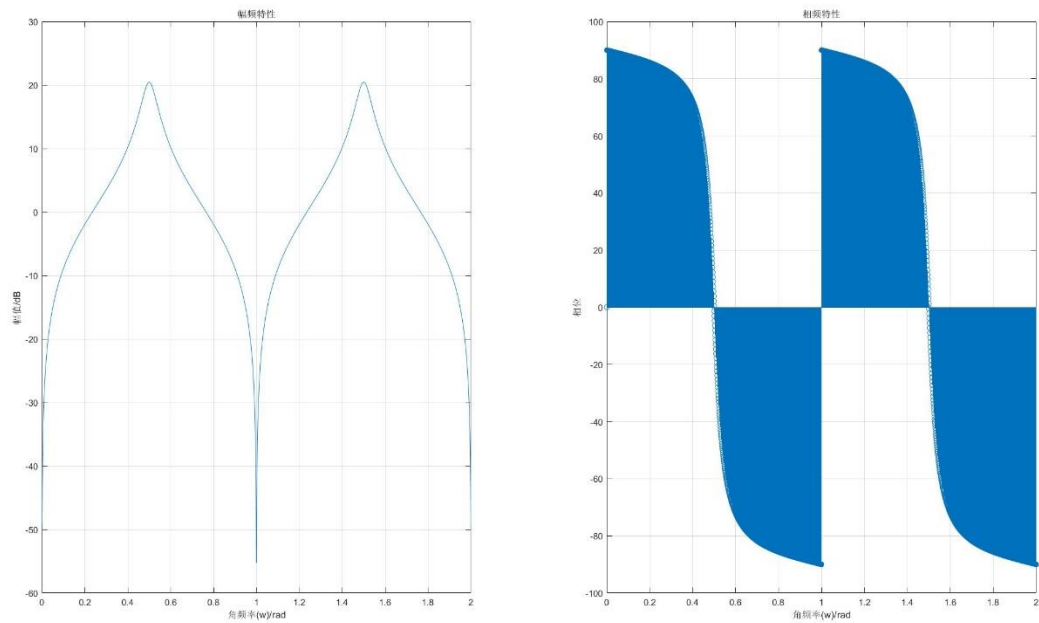


图 3 冲激响应和单位阶跃响应

3. 已知序列 $x(n) = \cos(0.82\pi n) + 2 \sin(\pi n)$ ， $0 \leq n \leq 50$ ，绘制 $x(n)$ 及其离散傅里叶变化 $X(k)$ 的幅度、相位图。

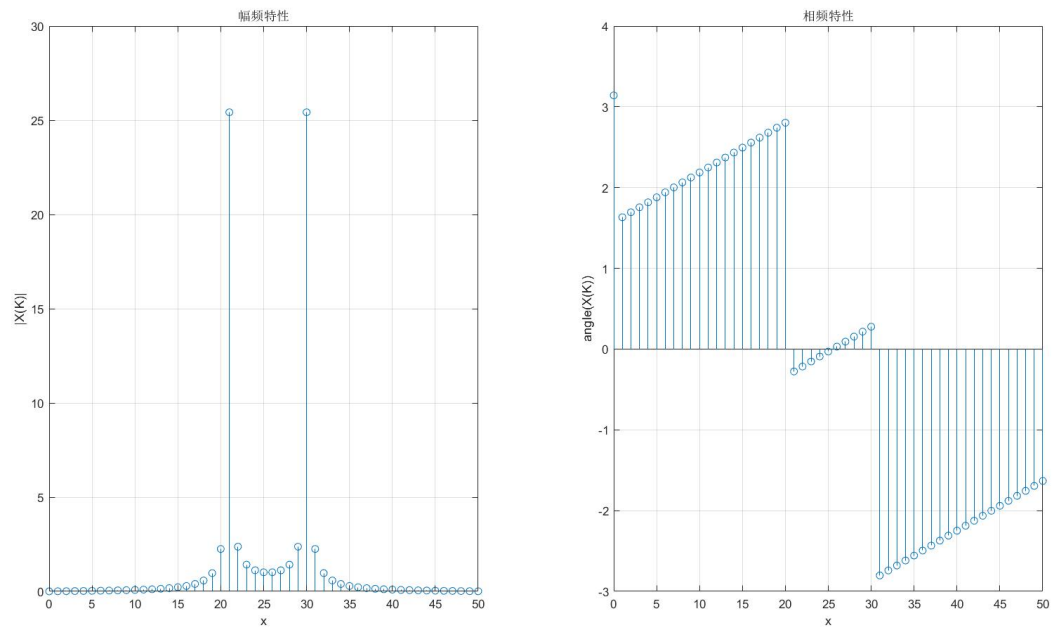


图 4 幅频特性和相频特性

实验名称： 离散傅里叶变换 姓名： 王涵 学号： 3201004515

4. 设 $x(n) = \sin(0.2\pi n) + \text{randn}(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, 其中 $\text{randn}(n)$ 为高斯白噪声。求出 $N = 4^m$, $m = 2, 3, 4$ 的 MATLAB 采用不同算法的执行时间。

由于程序执行时间较短，因此我们在此采用多次执行计算累计时间的方式比较不同算法的执行时间：

```
m is 2 | 1000 times | DFT Time is 0.082
m is 2 | 1000 times | FFT Time is 0.044
m is 3 | 1000 times | DFT Time is 1.106
m is 3 | 1000 times | FFT Time is 0.001
m is 4 | 1000 times | DFT Time is 16.597
m is 4 | 1000 times | FFT Time is 0.003
```

图 2 不同算法的执行时间截图

5. 利用 DFT 实现两序列的卷积运算，并研究 DTF 点数和混叠的关系。

给定 $x(n) = nR_{16}(n)$, $h(n) = R_8(n)$, 用 FFT 和 IFFT 分别求线性卷积和混叠结果输出，并用函数 `stem(n, y)` 画出相应的图形

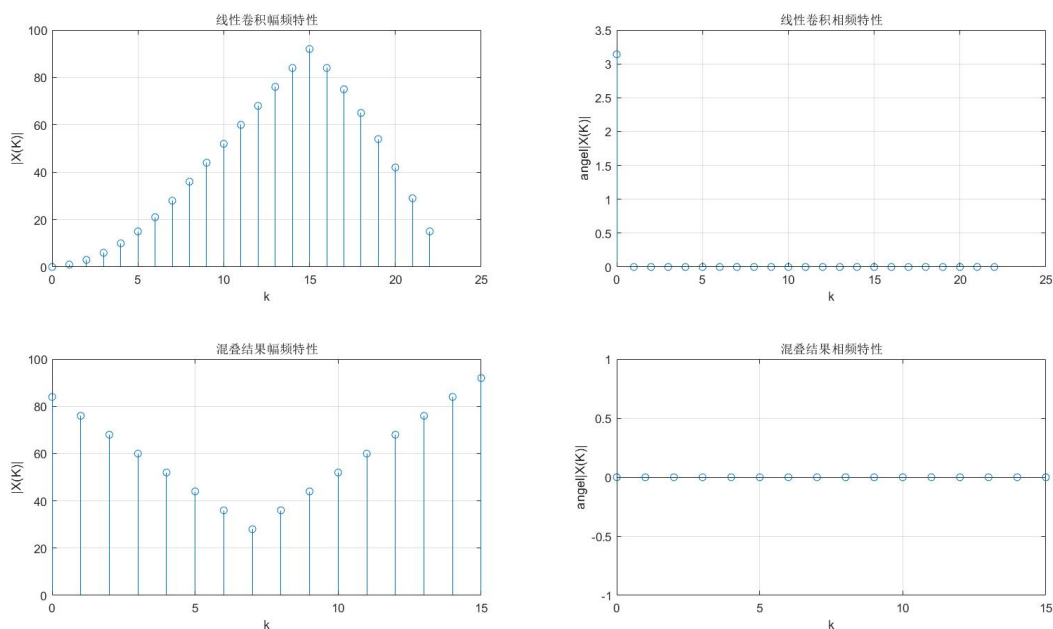


图 6 不同算法的执行时间截图

6. 研究高密度频谱和高分辨率频谱

连续信号为: $x(t) = \cos(2\pi \times 6.5 \times 10^3 t) + \cos(2\pi \times 7 \times 10^3 t) + \cos(2\pi \times 9 \times 10^3 t)$

实验名称： 离散傅里叶变换 姓名： 王涵 学号： 3201004515

- 采集数据长度 $N=16$ 点，做 $N=16$ 点的 DFT，并画出幅频特性。

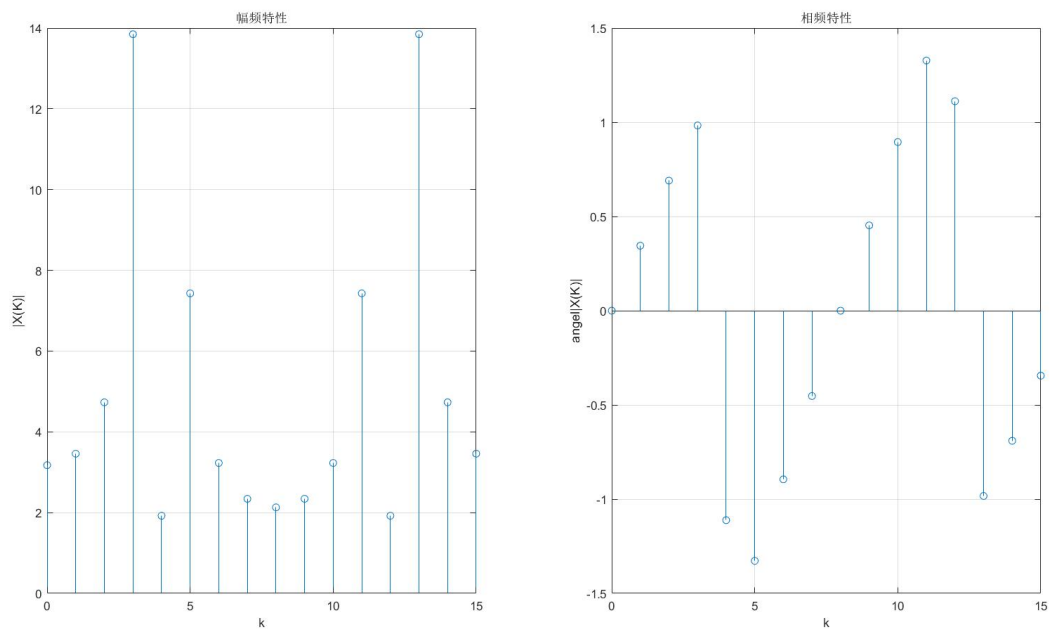


图 7 采集数据长度 $N=16$ 点，做 $N=16$ 点的 DFT 图像

- 采集数据长度 $N=16$ 点，补零到 256 点，做 $N=256$ 点的 DFT，并画出幅频特性。

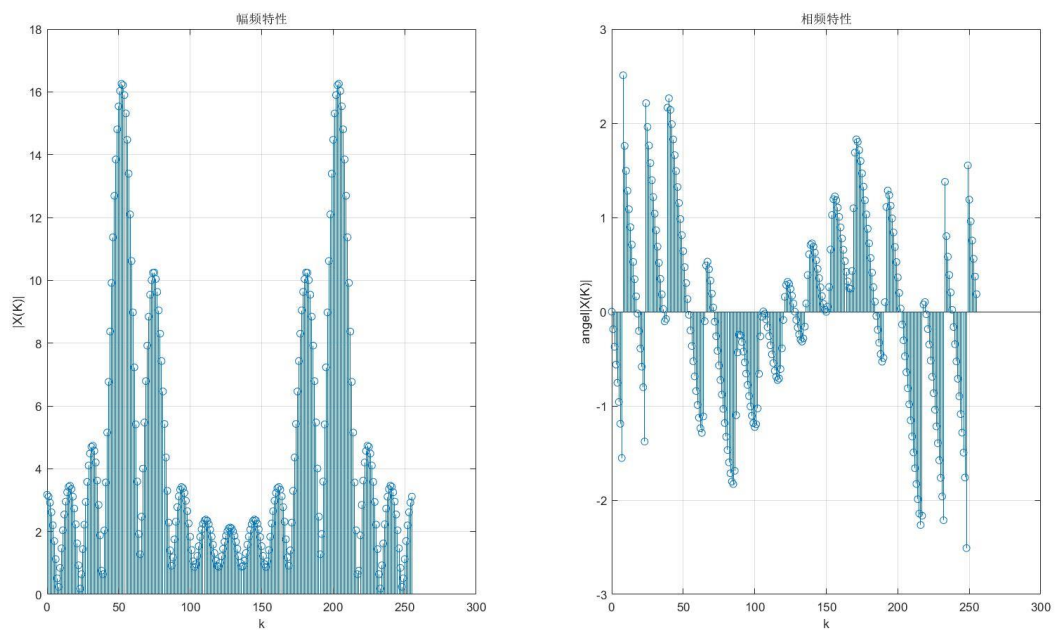


图 8 采集数据长度 $N=16$ 点，补零到 256 点，做 $N=256$ 点的 DFT 图像

- 采集数据长度 $N=256$ 点，做 $N=256$ 点的 DFT，并画出幅频特性。

实验名称： 离散傅里叶变换 姓名： 王涵 学号： 3201004515

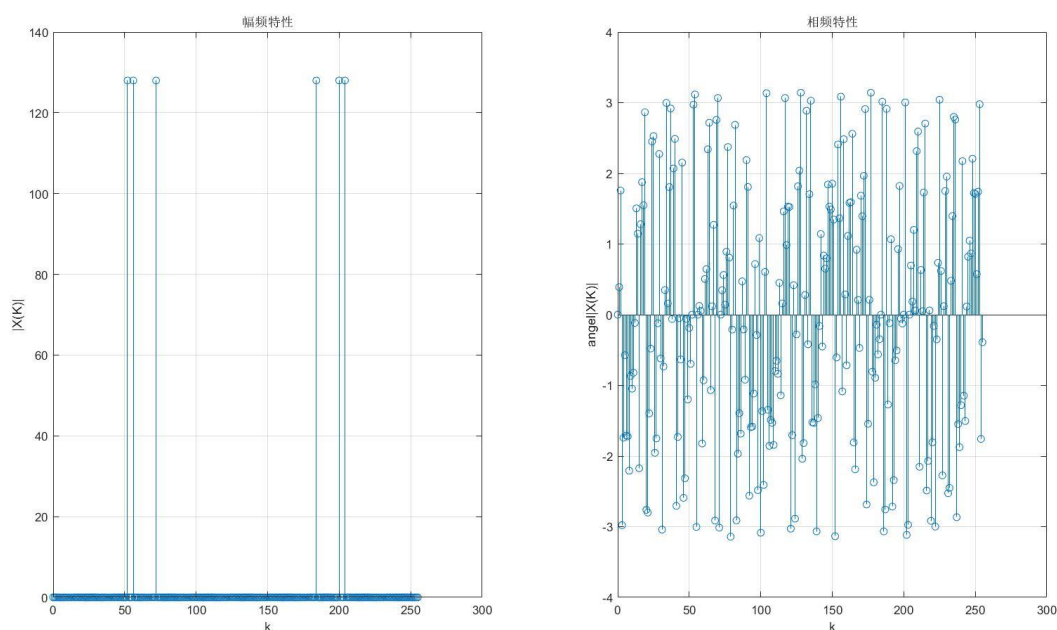


图 9 采集数据长度 N=256 点，做 N=256 点的 DFT 图像

装

订 四、实验结果和分析

线 1. 实验一和实验三：

这两个实验原理相同。实验中对原信号进行离散傅里叶变换（DFT）计算，可以得到该信号的频域函数，求幅度与相位之后可以得到幅频特性、相频特性图像。根据 DFT 的计算公式，带入公式进行理论计算，再用 matlab 画出结果的幅频和相频特性，发现与程序得到的结果相同，由此验证了正确性

2. 实验二：

(1)对因果序列进行 Z 变换，

$$y(n) - 0.81y(n-2) = x(n) - x(n-2)$$

按照第三章的计算得到， $H(z) = (1 - z^{-2}) / (1 - 0.81z^{-2})$

(2)使用 matlab 的内置函数计算单位阶跃响应和冲激响应，并于理论结果进行比较，发现结果相近；

(3)计算信号的幅频和相频特性，记录不同频率下的信号的响应，画出幅频相频图。

3. 实验四：

本实验结果见上。为了避免测量精度对实验结果带来过大影响，我们采用多次测量求总时间的方式，对 DFT、FFT 进行 1000 次重复运算，通过计算累计时间比较不同算法的性能。

通过结果我们可以直观地观测到 FFT 算法的优越性，FFT 的计算时间均小于 DFT，尤其是 $m=4$ 时，计算时间的差异非常的明显。根据计算原理可知，DFT 算法的复杂度为 $O(N^2)$ ，FFT 算法的复杂度为 $O(N * \log_2 N)$ ，FFT 算法复杂度远小于 DFT 算法的复杂度，因此其运算时间远小于 DFT 运算时间；且随着 m 取值增大，即 N 取值增大，FFT 算法计算速度的优越性越来越显著。

4. 实验五：

当两个序列全部补零到长度为 $L \geq M+N-1$ 时，两序列做卷积不会出现混叠现象，当但序列长度小于

实验名称： 离散傅里叶变换 姓名： 王涵 学号： 3201004515

M+N-1 时，做卷积会出现混叠现象；因此该题中，为了防止混叠，我将序列补零到长度为 23，另一组序列补零到 16，使其发生混叠。观察两组实验结果，体会了混叠结果与未发生混叠结果的差异。最后，通过理论计算，将计算结果和实验结果对比，发生结果一致。

5. 实验六：

(1) 我们已知三个信号的频率为 $f_1 = 6.5\text{kHz}$, $f_2 = 7\text{kHz}$, $f_3 = 9\text{kHz}$, 而采样频率为 $f_s = 32\text{kHz}$, 且时域中采样点个数为 N, 于是有频率分辨率计算公式为:

$$f_0 = \frac{f_s}{N}$$

注意到，时域中采样序列个数 N 与频率分辨率有关，N 越大，FFT 变化后得到的信号频谱的频率分辨率 f_0 越小，越容易辨别频率相近的信号；如果时域中采样数据长度不变，若通过补零的方式增长 FFT 数据序列，频率分辨率不变，依旧无法分辨频率相近的信号。

(2) 当采样数据长度为 N=16, 并做 N=16 点的 FFT 时，FFT 变化后频谱密度和频谱分辨率都较小，频率分辨率 $f_0 = 2\text{kHz}$, 无法区分 $f_1 = 6.5\text{kHz}$, $f_2 = 7\text{kHz}$ 两个信号频率分量，因而很难反映出原连续信号的频谱，只能大致分辨出两个频率分量。

(3) 当采样数据长度为 N=16, 并做 N=256 点的 FFT 时，FFT 求解得到的频谱密度增大，但由于采样数据长度依旧为 N=16, 频谱分辨率不变，依旧为 $f_0 = 2\text{kHz}$, 依然很难反映出原连续信号的频谱，只能大致分辨出两个频率变量。

(4) 当采样数据长度为 N=256, 并做 N=256 点的 FFT 时。FFT 变化后频谱密度和频谱分辨率都增大，频率分辨率 $f_0 = 0.125\text{kHz}$, 可以区分 $f_1 = 6.5\text{kHz}$, $f_2 = 7\text{kHz}$, $f_3 = 9\text{kHz}$ 三个信号频率分量。通过对比图 7、图 10, 我们可以发现，当采样数据长度为 256 时可以较好的还原连续信号的频谱，得到频谱密度和频谱分辨率都较大的频谱图像。

(5) 综上，我们可以发现，在 FFT 变化选取采样数据长度时，应该尽可能使得采样数据长度较长，此时做 FFT 变化得到的频谱分辨率 w_0 较高，可以较好地反应原信号的频谱。且若不改变采样数据长度，仅仅通过补零的方式使得 FFT 序列长度变长，此时 FFT 变化求得的频谱密度增大，但频谱分辨率 f_0 不变，并不能更好地反应原信号的频谱。

五、讨论、心得

通过本次线上 MATLAB 实验，我进一步了解了 MATLAB 语法的使用，并学会了使用 MATLAB 进行信号的 DFT、FFT、Z 变换等操作，这不仅帮助我回顾了课内的理论知识，还帮助我加深了对于不同操作的理解；其中 FFT 相较于 DFT 较高的计算速度对我感受尤为明显，这提示我们应该学会对于时间复杂度较高算法的优化。