

# Projet de Modélisation et Calcul Scientifique

Ines Besbes & Sara Rool

August 2, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Contexte</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation du problème</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Approximation spatiale du Laplacien</b>	<b>3</b>
3.1	Approximation à l'ordre 2 de l'opérateur Laplacien . . . . .	3
3.2	Schéma aux différences finies en un point n'appartenant au bord . . . . .	4
3.3	Conditions de Dirichlet et modélisation du système $AU = F$ . . . . .	4
3.4	Vérification des résultats . . . . .	5
3.5	Prise en compte de la condition de Neumann . . . . .	6
3.6	Modification de la matrice A . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Approximation des termes advectifs</b>	<b>7</b>
4.1	Introduitin du nombre de Péclet . . . . .	7
4.2	Cas où $V = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix}$ . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Marches en temps</b>	<b>9</b>
5.1	Schéma de Crank-Nicolson . . . . .	9
5.2	Diminution de 80% de la concentration pour la première condition initiale . . . . .	10
5.3	Condition initiale 2, plus réaliste . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>

# 1 Contexte

Dans le cadre de notre projet de modélisation et calcul scientifique, on propose d'étudier les phénomènes dispersifs, avec une application spécifique à la modélisation fluviale. Une usine déverse un produit dans une rivière de largeur constante  $b$  et animée d'une vitesse  $V$ . Notre objectif est d'analyser le comportement du produit, tout en supposant qu'il est :

- Non miscible à l'eau
- Non réactif avec l'eau
- Moins dense que l'eau donc il flotte

Le produit est ensuite transporté suite à un phénomène de dispersion, l'advection, traduit par l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

On observe également un phénomène diffusif du produit dans l'eau de la rivière.

## 2 Modélisation du problème

### Equation de convection-diffusion

On considère les équations de conservation de la masse et de la concentration. On note  $C(x, y, t)$  et  $\rho(x, y, t)$  la concentration et la masse volumique du produit, respectivement, à la position  $(x, y)$  et à l'instant  $t$ . On va procéder étape par étape pour arriver à l'équation différentielle partielle qui décrit la variation de la concentration  $C$  en fonction du temps et de l'espace.

### Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$$

### Conservation de la concentration

$$\frac{\partial(\rho C)}{\partial t} + \text{div}(\Phi) = 0$$

avec  $\Phi = \rho C \mathbf{V} - \lambda \nabla C$ , où  $\lambda$  est le coefficient de diffusion constant.

### Flux dispersif $\Phi$

Le flux dispersif  $\Phi$  se compose de deux parties : advective ( $\Phi_c = \rho C \mathbf{V}$ ) et diffusive ( $\Phi_d = -\lambda \nabla C$ ). Ainsi,  $\Phi = \rho C \mathbf{V} - \lambda \nabla C$ .

### Divergence du flux dispersif

La divergence de  $\Phi$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{div}(\Phi) &= \text{div}(\rho C \mathbf{V}) - \text{div}(\lambda \nabla C) \\ &= C \cdot \text{div}(\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla C - \lambda \Delta C \end{aligned}$$

Puisque  $\lambda$  est constant,  $\text{div}(\lambda \nabla C) = \lambda \Delta C$ , où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien.

Pour simplifier cette équation, on applique la règle du produit pour la dérivation de  $\rho C$  et  $\rho C \mathbf{V}$ . La dérivation temporelle de  $\rho C$  est :

$$\frac{\partial(\rho C)}{\partial t} = C \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial C}{\partial t}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho C)}{\partial t} + \operatorname{div}(\Phi) &= C\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V})\right) + \rho \frac{\partial C}{\partial t} - \lambda \Delta C + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla C \\ &= \rho \frac{\partial C}{\partial t} - \lambda \Delta C + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla C\end{aligned}$$

D'où :

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} - \lambda \Delta C + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla C = 0$$

En divisant toute l'équation par  $\rho$ , on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho} \Delta C + \mathbf{V} \cdot \nabla C = 0$$

En identifiant  $\mu = \frac{\lambda}{\rho}$ , on arrive à l'équation finale :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \mu \Delta C + \mathbf{V} \cdot \nabla C = 0$$

### 3 Approximation spatiale du Laplacien

On considère pour commencer l'approximation de l'opérateur Laplacien en 2D sur l'ouvert  $\Omega = ]0, a[ \times ]0, b[$  avec des conditions à la limite de type Dirichlet homogène sur  $\partial\Omega$  :

$$\begin{aligned}-\mu \Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega,\end{aligned}$$

avec  $f : \Omega \rightarrow R$  un terme source.

#### 3.1 Approximation à l'ordre 2 de l'opérateur Laplacien

Pour montrer l'approximation de l'opérateur Laplacien en utilisant la méthode des différences finies, on se sert des formules de Taylor.

**Développement de Taylor pour  $u(x_{i+1}, y_j)$  et  $u(x_{i-1}, y_j)$ :**

Le développement de Taylor de  $u(x, y_j)$  autour de  $x_i$  jusqu'au second ordre est donné par :

1. Pour  $u(x_{i+1}, y_j)$  :

$$u(x_{i+1}, y_j) = u(x_i, y_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)h_x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)h_x^2 + O(h_x^3)$$

2. Pour  $u(x_{i-1}, y_j)$  :

$$u(x_{i-1}, y_j) = u(x_i, y_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)h_x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)h_x^2 + O(h_x^3)$$

En soustrayant ces deux équations, les termes de première dérivée s'annulent et on obtient :

$$u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)h_x^2 + O(h_x^3)$$

En réarrangeant les termes pour isoler  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , on a :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{2u(x_i, y_j) - u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2} + O(h_x^2)$$

Cette expression est une approximation à l'ordre 2 de  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  en  $(x_i, y_j)$ .

De manière similaire, pour approximer  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  en  $(x_i, y_j)$ , on utilise le développement de Taylor de  $u(x_i, y_{j+1})$  et  $u(x_i, y_{j-1})$  autour de  $y_j$ , ce qui donne :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{2u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{h_y^2} + O(h_y^2)$$

Cette formule est également une approximation d'ordre deux de la dérivée seconde par rapport à  $y$ .

### 3.2 Schéma aux différences finies en un point n'appartenant au bord

Pour un point  $(x_i, y_j)$  n'appartenant pas au bord, le schéma aux différences finies d'ordre 2 pour l'opérateur Laplacien  $\Delta u$  est donné par :

$$\Delta u(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h_x^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h_y^2}$$

où  $h_x$  et  $h_y$  sont les pas de discrétisation en  $x$  et en  $y$ , respectivement.

### 3.3 Conditions de Dirichlet et modélisation du système $AU = F$

Pour écrire les conditions de Dirichlet homogènes discrètes sur le bord  $\partial\Omega$  et mettre le schéma aux différences finies sous la forme  $AU = F$ , on va discrétiser les conditions de Dirichlet sur le bord du domaine.

#### Conditions de Dirichlet homogènes discrètes

Si on discrétise le bord du domaine  $\partial\Omega$ , on peut fixer les valeurs de  $u$  sur le bord à zéro. En utilisant la notation  $U_{i,j}$  pour représenter la valeur discrète de  $u$  en un point du maillage  $(x_i, y_j)$ , les conditions de Dirichlet homogènes discrètes sur le bord sont données par :

1. Sur le bord inférieur ( $j = 0$ ) :

$$U_{i,0} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N_x + 1$$

2. Sur le bord supérieur ( $j = N_y + 1$ ) :

$$U_{i,N_y+1} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N_x + 1$$

3. Sur le bord gauche ( $i = 0$ ) :

$$U_{0,j} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq N_y + 1$$

4. Sur le bord droit ( $i = N_x + 1$ ) :

$$U_{N_x+1,j} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq N_y + 1$$

#### Matrice $A$

La matrice  $A$  est de taille  $(N_x \cdot N_y) \times (N_x \cdot N_y)$ . Elle est définie comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C & B & C & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C & B & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & C \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{bmatrix}$$

où :

- $B$  est un bloc tridiagonal de taille  $N_x \times N_x$ , défini comme suit:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\mu}{h_x^2} & \frac{\mu}{h_x^2} \left( 2 + \frac{2h_x^2}{h_y^2} \right) & -\frac{\mu}{h_x^2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{h_x^2} & \frac{\mu}{h_x^2} \left( 2 + \frac{2h_x^2}{h_y^2} \right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice  $C$  est une matrice diagonale définie comme suit:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{h_y^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{h_y^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- $I$  représente la matrice identité de la même dimension que  $B$ .

## Vecteur $F$

Soit  $F$  le vecteur des termes sources, défini comme suit pour un maillage de taille  $(Nx+2) \times (Ny+2)$ , où les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sont appliquées respectivement sur les bords  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  :

$$F = \begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{1,0} \\ \vdots \\ f_{Nx+1,0} \\ f_{0,1} \\ \vdots \\ f_{Nx+1,Ny+1} \end{bmatrix}$$

où chaque terme  $f_{i,j}$  représente soit un terme source spécifique à la position  $(x_i, y_j)$  dans le domaine, soit un ajustement dû aux conditions aux limites.

## 3.4 Vérification des résultats

La solution exacte  $u(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$  satisfait l'équation différentielle avec le terme source donné par  $f(x, y) = \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$  pour  $\mu = 1$ . On calcule le Laplacien de  $u(x, y)$  :

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ &= -\frac{\pi^2}{a^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{\pi^2}{b^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ &= -\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $-\mu \Delta u(x, y) = f(x, y)$ , confirmant que  $u(x, y)$  est la solution exacte du problème.

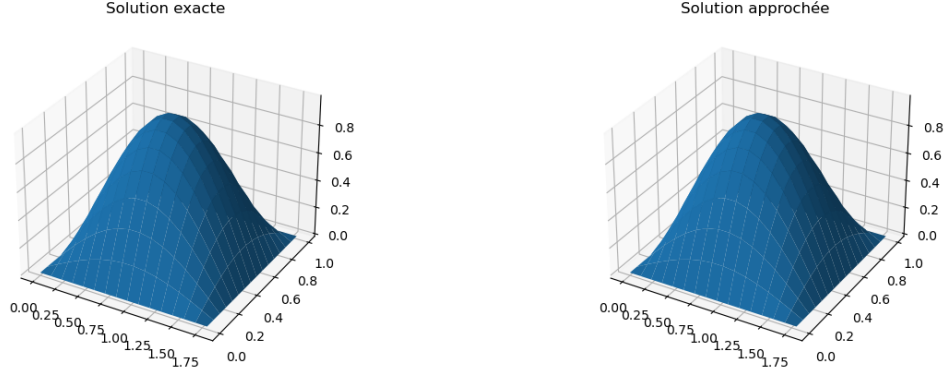


Figure 1: Comparaison de la solution exacte et de la solution approchée avec les conditions de Dirichlet

La norme L2 entre notre solution exacte et approchée est  $\approx 0.0275$ . Ainsi, l'erreur d'approximation converge bien lorsque l'on raffine le maillage.

### 3.5 Prise en compte de la condition de Neumann

L'équation de Neumann avec condition de Neumann sur le bord  $\Gamma_1$  est donnée par :

$$\begin{aligned} -\mu\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Par les formules de Taylor, on a :

$$\begin{aligned} u(a - h_x, y) &= u(a, y) - h_x \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u(a, y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h_x^3) \\ u(a - 2h_x, y) &= u(a, y) - 2h_x \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} + \frac{(2h_x)^2}{2} \frac{\partial^2 u(a, y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h_x^3) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} 4u(a - h_x, y) - u(a - 2h_x, y) &= 3u(a, y) + 2h_x \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} + \mathcal{O}(h_x^3) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} &= \frac{4u(a - h_x, y) - u(a - 2h_x, y) - 3u(a, y)}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2) \end{aligned}$$

### 3.6 Modification de la matrice A

Pour prendre en compte la condition de Neumann, il faut modifier la dernière ligne de chaque matrice B défini précédemment.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\mu}{h_x^2} & \mu(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}) & \frac{-\mu}{h_x^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-\mu}{h_x^2} & \mu(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}) & \frac{-\mu}{h_x^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{-\mu}{h_x^2} & \mu(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}) & \frac{-\mu}{h_x^2} \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2h_x} & \frac{-4}{2h_x} & \frac{3}{2h_x} \end{pmatrix}$$

La nouvelle solution s'écrit :  $u(x, y) = \sin(\frac{\pi y}{b})(\cos(\frac{\pi x}{a}) - 1)$ . Le nouveau terme source s'écrit donc :

$$f = (\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}) \cos(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b}) - \frac{\pi^2}{b^2} \sin(\frac{\pi y}{b})$$

car  $f = -\mu \Delta u$

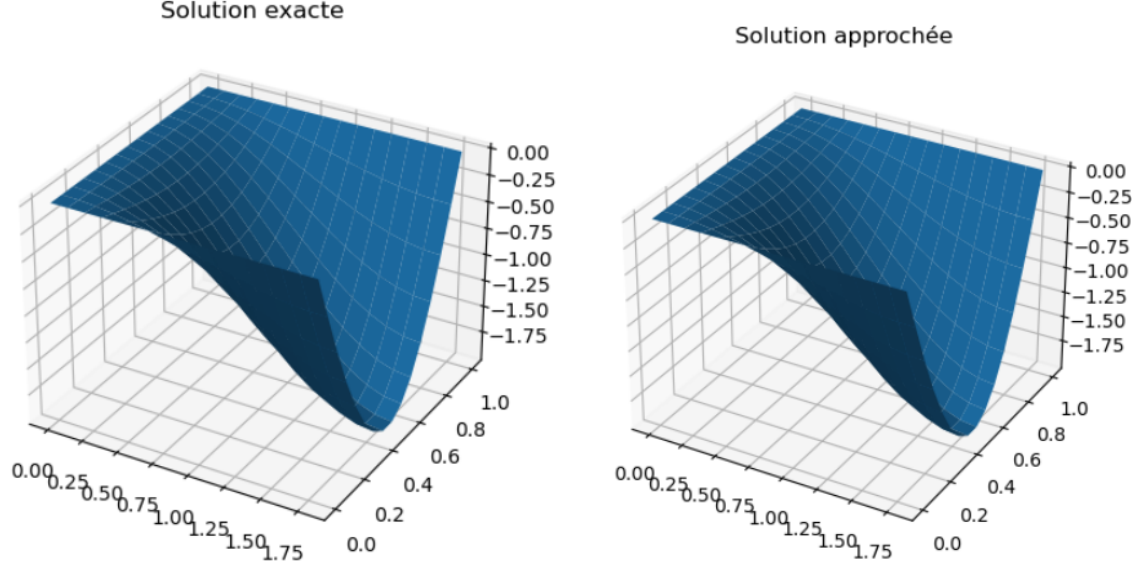


Figure 2: Comparaison de la solution exacte et de la solution approchée avec les conditions de Neumann

La norme L2 entre notre solution exacte et approchée est  $\approx 0.0455$ . Ainsi, l'erreur d'approximation converge bien lorsque l'on raffine le maillage.

## 4 Approximation des termes advectifs

Sous l'influence de l'écoulement de la rivière, l'effet advectif tend à déplacer le produit dans la direction du vecteur  $V$ . Ce phénomène est décrit par le terme de dérivée directionnelle  $V \cdot \nabla u$ . On aborde désormais un problème de diffusion-advection stationnaire :

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u + V \cdot \nabla u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{aligned}$$

avec  $V \in \mathbb{R}^2$ .

### 4.1 Introduction du nombre de Péclet

Si le nombre de Péclet est très grand  $Pe_l \gg 1$ , alors  $\frac{lv}{\mu} \gg 1$  et donc  $lv \gg \mu$ . Pour une valeur de  $l \approx 1$ , le terme  $v$  prend le dessus, cela signifie que l'advection domine largement sur la diffusion. Dans ce régime, le transport du produit est principalement dû au mouvement global du fluide.

### 4.2 Cas où $V = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix}$

$$u(x_{i+1}, y_j) = u(x_i, y_j) + h_x \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h_x^3)$$

$$u(x_{i-1}, y_j) = u(x_i, y_j) - h_x \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h_x^3)$$

On obtient :

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2)$$

De manière analogue en  $y$ , on obtient :

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2h_y} + \mathcal{O}(h_y^2)$$

Ainsi

$$V \cdot \nabla u(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} \end{pmatrix} = v_x \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2)$$

On modifie notre matrice B dans la diagonale pour prendre en compte le terme advectif. Ainsi B peut se réécrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\mu}{h_x^2} - \frac{v_x}{2h_x} & \mu(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}) & \frac{-\mu}{h_x^2} + \frac{v_x}{2h_x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-\mu}{h_x^2} - \frac{v_x}{2h_x} & \mu(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}) & \frac{-\mu}{h_x^2} + \frac{v_x}{2h_x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{-\mu}{h_x^2} - \frac{v_x}{2h_x} & \mu(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}) & \frac{-\mu}{h_x^2} + \frac{v_x}{2h_x} \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2h_x} & \frac{-4}{2h_x} & \frac{3}{2h_x} \end{pmatrix}$$

La solution reste la même  $u(x, y) = \sin(\frac{\pi y}{b})(\cos(\frac{\pi x}{a}) - 1)$ . Le terme source cependant change :

$$-\mu \Delta u + V \cdot \nabla u = f$$

Ainsi,

$$f = (\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}) \cos(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b}) - \frac{\pi^2}{b^2} \sin(\frac{\pi y}{b}) - v_x \frac{\pi}{a} \sin(\frac{\pi x}{a}) \cos(\frac{\pi y}{b})$$

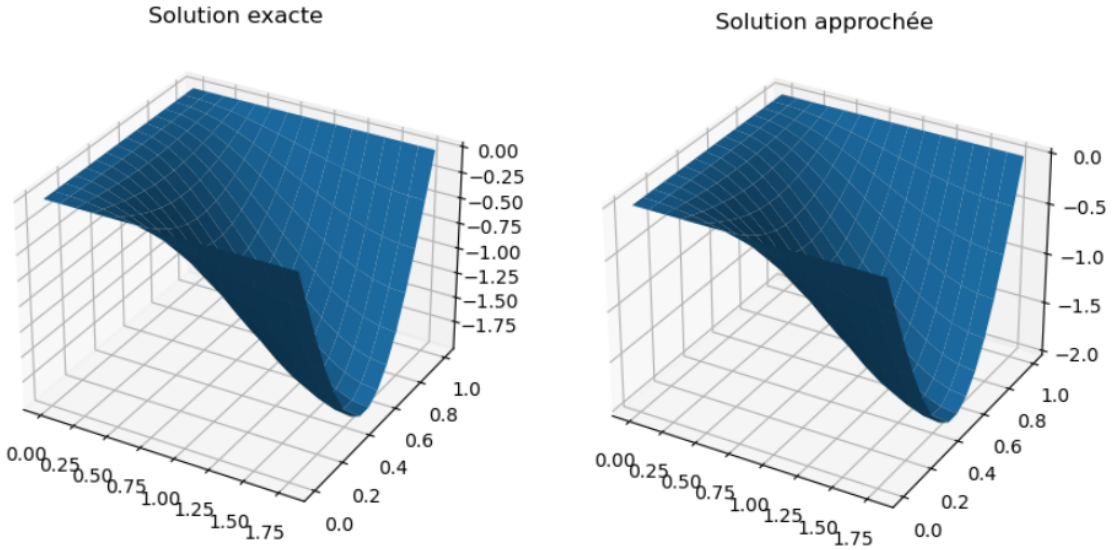


Figure 3: Comparaison de la solution exacte et de la solution approchée avec les termes advectifs

La norme L2 entre notre solution exacte et approchée est  $\approx 0.0968$ . Ainsi, l'erreur d'approximation converge bien lorsque l'on raffine le maillage.



## 5 Marches en temps

Lorsqu'on discrétise l'espace, le problème semi-discret prend la forme d'un problème de Cauchy, exprimé comme suit :

$$\frac{dU(t)}{dt} + AU(t) = 0$$

avec la condition initiale  $U(t=0) = U_0$ , où  $U$  représente la quantité inconnue.

On utilise un coefficient de diffusion fixe  $\mu = 0.01$  et on choisit une condition initiale gaussienne centrée en  $(x_0, y_0)$ , située suffisamment loin de la frontière  $\partial\Omega$  et ayant un rayon  $r_0$ . Cette condition initiale est donnée par :

$$C_0(x, y) = e^{-\left(\frac{x-x_0}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{r_0}\right)^2}.$$

L'équation de diffusion-advection est donnée par:

$$-\mu\Delta u + V \cdot \nabla u = f \quad \text{dans } \Omega,$$

avec des conditions aux limites appropriées.

### 5.1 Schéma de Crank-Nicolson

Le schéma de Crank-Nicolson est un schéma stable et consistant d'ordre 2. Il s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\delta t} + A \left( \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{1}{\delta t} \text{Id} + \frac{A}{2} \right) U^{n+1} &= \left( \frac{1}{\delta t} \text{Id} - \frac{A}{2} \right) U^n \\ \Leftrightarrow U^{n+1} &= \left( \frac{1}{\delta t} \text{Id} + \frac{A}{2} \right)^{-1} \left( \frac{1}{\delta t} \text{Id} - \frac{A}{2} \right) U^n \end{aligned}$$

où  $U^n$  est l'approximation de  $U(t)$  au temps  $t_n$ ,  $\delta t$  est le pas de temps, et  $A$  inclut à la fois la diffusion et l'advection.

Or  $\left( \frac{1}{\delta t} \text{Id} + \frac{A}{2} \right)$  est inversible si et seulement si  $\delta(t) \cdot \frac{\|A\|}{2} < 1 \iff \delta(t) < \frac{2}{\|A\|}$

Le régime de l'écoulement, dans le cas où  $V = (1, 0)$ , est un écoulement uniforme dans la direction  $x$ . Ce régime advectif signifie que le produit advectif  $V \cdot \nabla C$  va principalement influencer la propagation de la concentration dans la direction  $x$ .

Il n'est pas raisonnable de considérer le schéma d'Euler explicite car ce dernier peut devenir instable, surtout pour des problèmes advectifs, à moins que le pas de temps  $\delta$  ne soit suffisamment petit, ce qui est déterminé par le nombre de Courant (CFL). Pour des écoulements avec advection dominante, respecter la condition CFL peut exiger des pas de temps très petits, rendant le calcul inefficace.

## 5.2 Diminution de 80% de la concentration pour la première condition initiale

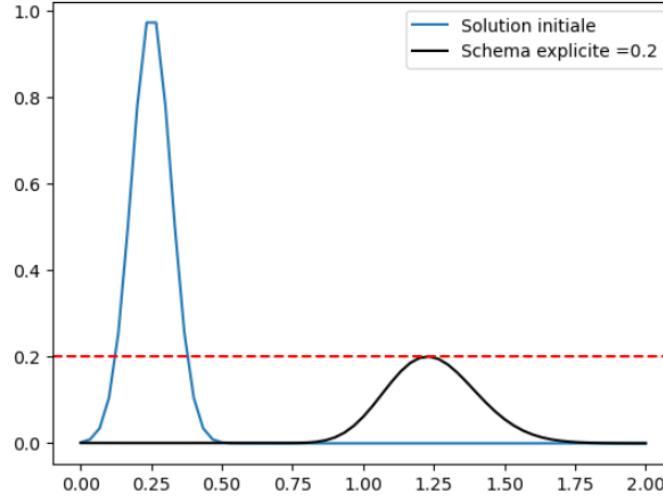


Figure 4: Concentration à l'instant initial et à l'instant  $t = 1s$ , 2D

On observe grâce au graphe ci-dessus que la concentration aura baissé de 80% au bout d'une seconde. De plus, la figure en 3D ci-dessous révèle clairement le phénomène d'advection ; on observe effectivement que la dispersion de la substance se fait principalement dans la direction de l'axe  $x$ .

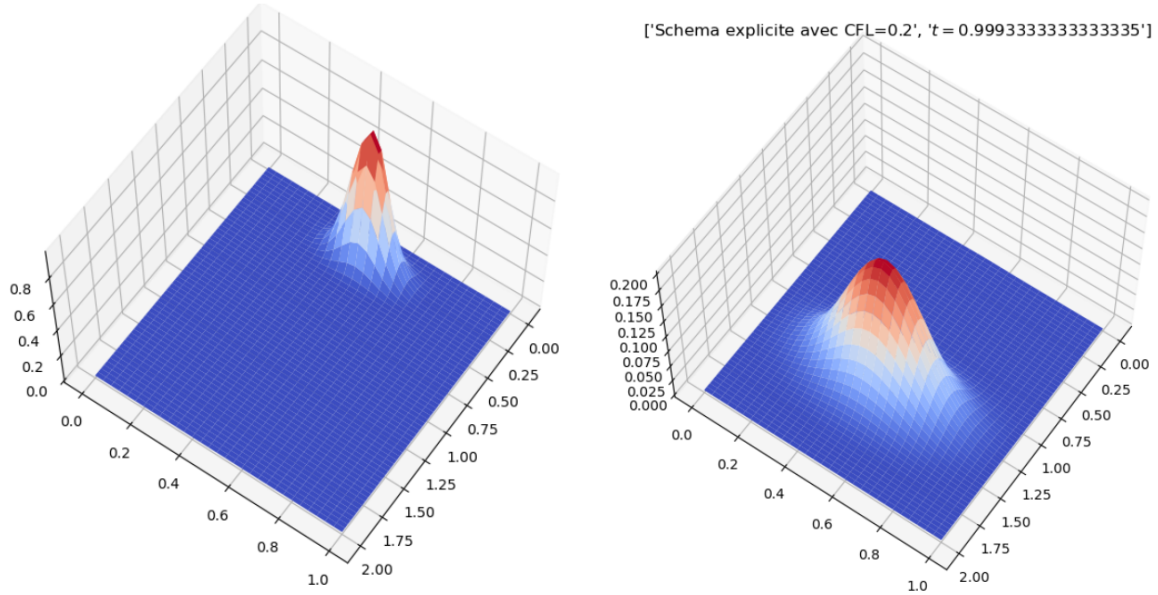


Figure 5: Concentration à l'instant initial et à l'instant  $t = 1s$ , 3D

## 5.3 Condition initiale 2, plus réaliste

On considère maintenant la condition initiale suivante qui est moins régulière mais plus réaliste :

$$C_0(x, y) = \begin{cases} r_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 & \text{si } r_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant le même code avec une modification de la condition initiale, on remarque qu'il faut 0.55s pour perdre 80% de la concentration. Initialement, la tâche apparaît avec une diffusion moins élevée

et une concentration plus faible ayant pour valeur 0,01 contre 1 pour la première condition initiale. De plus, l'effet advectif semble être moins prononcé, entraînant une dissipation plus rapide de la tâche.

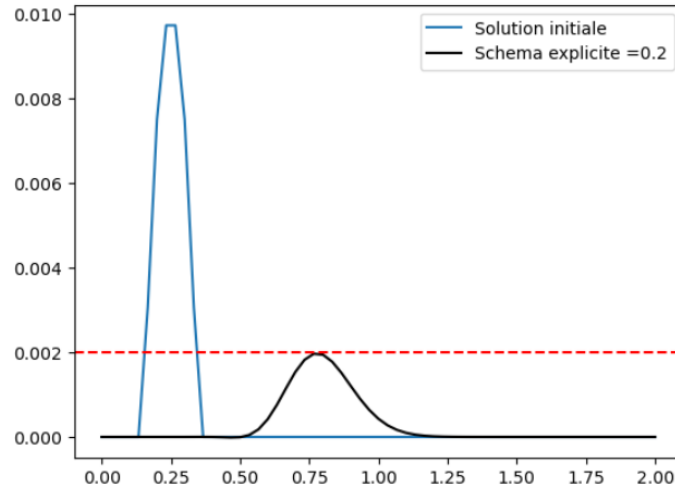


Figure 6: Concentration à l'instant initial et à l'instant  $t = 0.55s$ , 2D

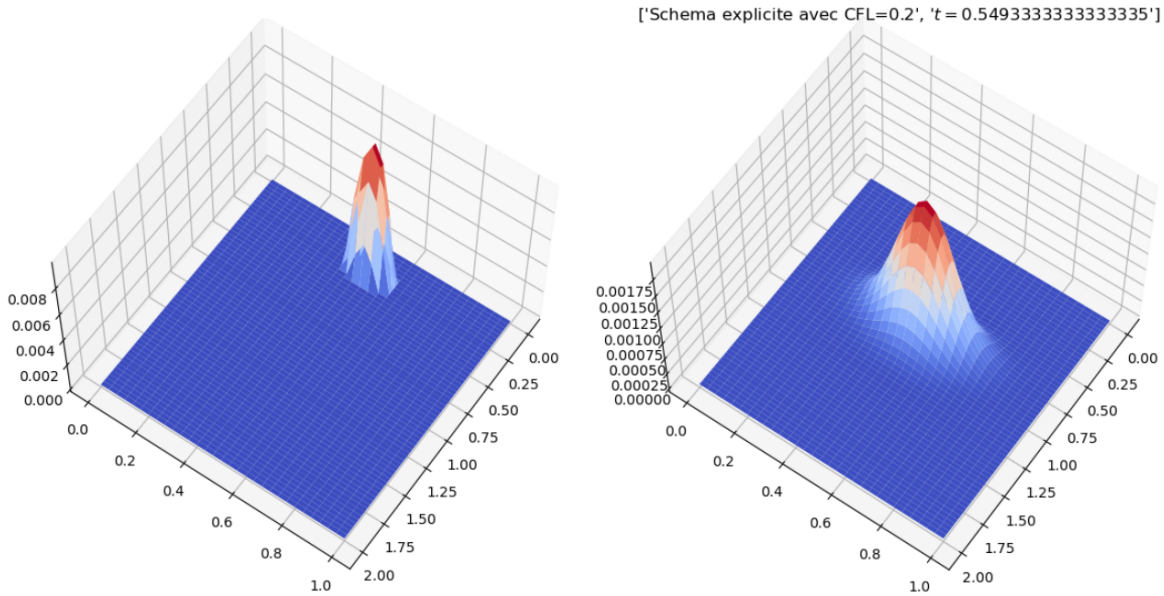


Figure 7: Concentration à l'instant initial et à l'instant  $t = 0.55s$ , 3D

## 6 Conclusion

Pour conclure, les résultats obtenus montrent que la dynamique de la concentration est fortement influencée par les conditions initiales et les propriétés physiques du système, telles que le coefficient de diffusion ( $\mu$ ) et le champ advectif ( $V$ ).

Par ailleurs, ce projet a démontré l'utilité des méthodes numériques pour étudier les processus de diffusion et d'advection dans des contextes environnementaux complexes.