Compte-rendu du TP1 : Méthodes GMRES et FOM

Ines BESBES
Sara ROOL

March 2025

1 Introduction

Dans ce TP, on cherche à résoudre le système linéaire : $Ax = b$. Pour ce faire, on a codé en Matlab une fonction **kyrlov** qui permet d'implémenter deux techniques itératives qui appartiennent à la famille des méthodes de sous-espaces de Krylov : GMRES et FOM.
On va tester ces méthodes avec 3 matrices A différentes :

- $A = mat1$ de dimension 573*573
- $A = pde225\_5e - 1$ de dimension 225*225
- $A = hydcar20$ de dimension 99*99

2 Rappel des méthodes

2.1 GMRES

GMRES (Generalized Minimal Residual Method), vise à minimiser la norme du résidu $r = Ax - b$ au sein d'un sous-espace de Krylov défini par les puissances successives de A appliquées au vecteur b.

2.2 FOM

La méthode FOM (Full Orthogonalization Method) est similaire à la méthode GMRES, mais au lieu de minimiser le résidu, elle impose que le résidu soit orthogonal au sous-espace de Krylov.

3 Evolution de la norme du résidu

3.1 Norme du résidu

La norme du résidu $\|\mathbf{r}\|$ permet de quantifier l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte du système. Dans la fonction **krylov**, lorsque la norme relative du résidu est en dessous d'un certain seuil de tolérance ϵ, l'algorithme s'arrête, indiquant que la solution est suffisamment proche de l'exacte.

3.2 Matrice : mat1

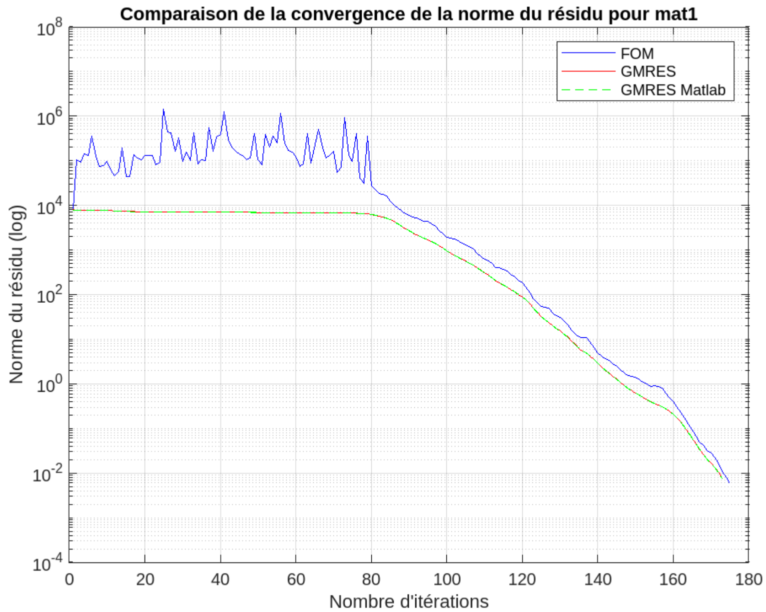

Figure 1: Convergence de la norme du résidu (log) en fonction du nombre d'itération pour les différentes méthodes itératives : GMRES, FOM et GMRES Matlab pour $A = mat1$

Interprétation : On observe une forte instabilité pour FOM, avec des oscillations importantes, surtout pendant les 80 premières itérations. GMRES reste plus stable et donc plus efficace, bien que la convergence reste lente lors des 80 premières itérations. Les deux méthodes convergent similairement après les 80 premières itérations.

3.3 Matrice : pde225_5e-1

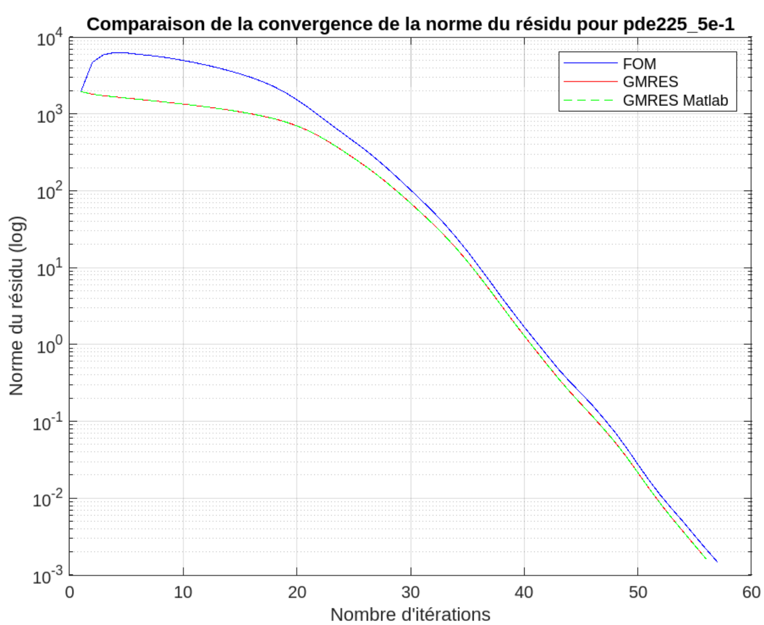

Figure 2: Convergence de la norme du résidu (log) en fonction du nombre d'itération pour les différentes méthodes itératives : GMRES, FOM et GMRES Matlab pour $A = pde225\_5e-1$

Interprétation : Les deux méthodes présentent une convergence fluide et régulière, avec des trajectoires presque similaires. Cependant, FOM présente une performance légèrement inférieure, particulièrement visible durant les 25 voire 30 premières itérations. Dans cette phase, le résidu de FOM est plus élevé que celui de GMRES. Après ces 30 itérations, les deux méthodes continuent de converger, avec des résidus qui deviennent très petits et quasi égaux.

3.4 Matrice : hydcar20

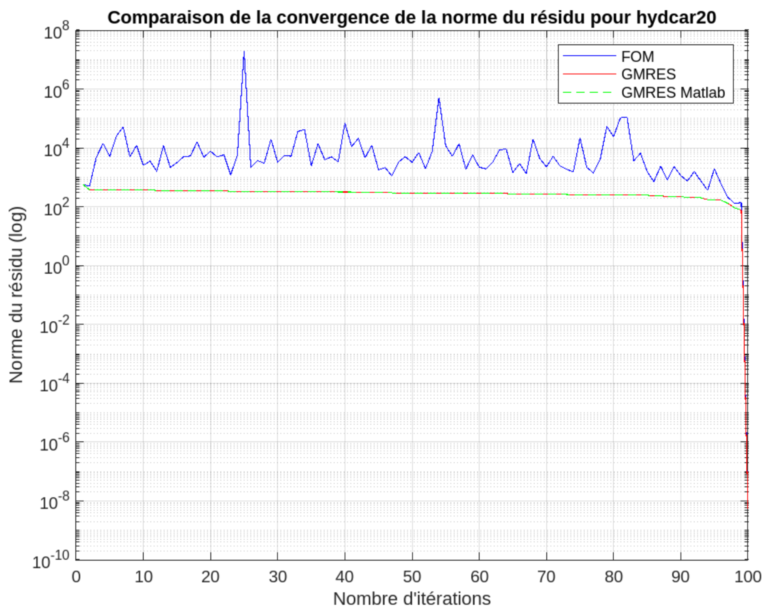

Figure 3: Convergence de la norme du résidu (log) en fonction du nombre d'itération pour les différentes méthodes itératives : GMRES, FOM et GMRES Matlab pour $A = hydcar20$

Interprétation : Comme précédemment avec $mat1$, la méthode FOM est très instable, avec de fortes oscillations. GMRES offre une convergence beaucoup plus stable et régulière. On observe qu'à la dernière itération, l'erreur chute drastiquement pour les deux méthodes.

3.5 Estimateur de la norme du résidu

Pour éviter de calculer la norme du résidu à chaque itération, on peut passer par son estimateur. En effet, l'estimateur est plus efficace et plus stable numériquement. De plus, le calcul direct de l'erreur nécessite de connaître la solution exacte ou de recalculer le résidu, ce qui est coûteux en termes de temps de calcul et sensible aux erreurs d'arrondi. En revanche, l'estimateur se calcule avec des quantités déjà disponibles dans l'algorithme (matrice de Hessenberg et résidu), ce qui est plus économique.

La méthode FOM résout le système linéaire $H \cdot y = \beta \cdot e_1$ avec H une matrice de Hessenberg supérieure. L'estimateur de l'erreur est donné par :

$$\text{estimateur}_{\text{FOM}} = |H_{j+1,j}\, y_j(j)|$$

où $H_{j+1,j}$ est l'élément sous-diagonal de H et $y_j(j)$ est le dernier élément de la solution y_j.

La méthode GMRES minimise la norme du résidu $\min \|\beta e_1 - H\bar{y}\|$ en utilisant une factorisation QR ($H = QR$). L'estimateur de l'erreur est alors :

$$\text{estimateur}_{\text{GMRES}} = |e_1'(j+1)|$$

avec $e_1' = Q^T \beta e_1$, cela représente la norme du résidu minimal atteint à l'itération j.

En vérifiant la norme relative de l'estimateur, nous constatons que celle-ci est cohérente. Cependant, nous remarquons que l'estimateur de GMRES pour la dernière itération de la matrice $hydcar20$

n'est pas très exacte. Cela est peut être dû à un changement trop brutal de la norme du résidu. Nous constatons également que l'estimateur de FOM est plus précis car il est directement lié à l'erreur réelle et subit moins d'approximations qu'avec GMRES, où l'optimisation et la factorisation QR peuvent dégrader la précision.

Itération	**FOM**	**GMRES**
1	0.000000×10^{0}	9.247041×10^{-1}
50	1.293310×10^{-13}	9.144836×10^{-1}
100	1.390931×10^{-12}	5.000732×10^{-1}
150	8.041696×10^{-9}	4.942808×10^{-1}
174	5.744315×10^{-7}	7.365428×10^{-2}

Table 1: Comparaison FOM et GMRES avec $A = mat1$

Itération	**FOM**	**GMRES**
1	0.000000×10^{0}	5.826288×10^{-1}
56	5.742442×10^{-12}	1.194555×10^{-1}

Table 2: Comparaison FOM et GMRES avec $A = pde225\_5e - 1$

Itération	**FOM**	**GMRES**
1	2.256857×10^{-16}	1.375288×10^{-1}
99	6.499730×10^{-1}	1.395632×10^{10}

Table 3: Comparaison FOM et GMRES avec $A = hydcar20$

4 Evolution du nombre d'itérations selon la tolérance

Le nombre d'itérations dépend directement de la précision exigée ϵ, car l'algorithme s'arrête dès que le résidu atteint cette valeur. Ainsi, un grand ϵ signifie que la solution trouvée est moins précise mais obtenue rapidement. Dans le cas contraire, un ϵ petit signifie que la solution finale est plus proche de la vraie solution mais coûte plus cher en termes de temps de calcul. L'enjeu est donc de trouver une bonne tolérance pour équilibrer précision et efficacité.

4.1 Matrice : mat1

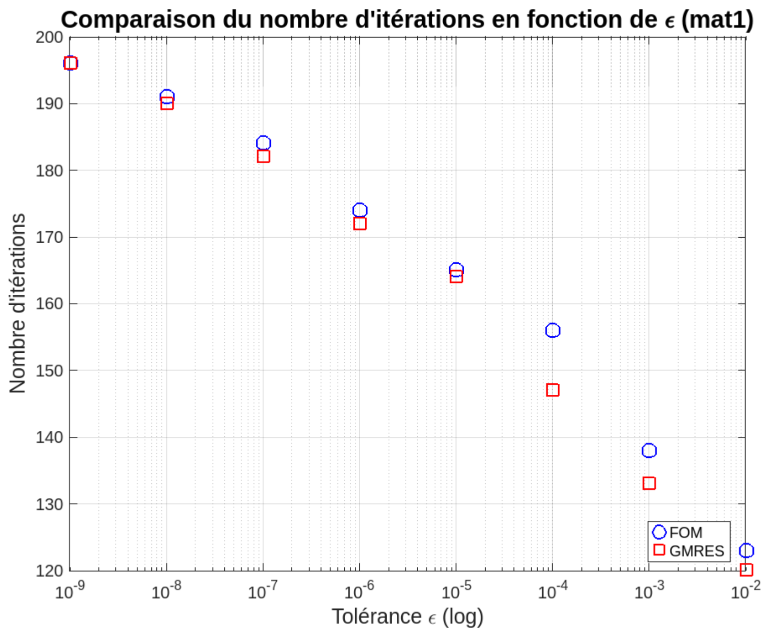

Figure 4: Comparaison de l'évolution du nombre d'itérations en fonction du seuil de tolérance avec la matrice mat1

Interprétation : On observe que le nombre d'itérations diminue lorsque la tolérance ϵ augmente. De plus, GMRES semble converger plus rapidement que FOM, surtout pour les tolérances plus grandes, et donc à partir de $\epsilon = 10^{-4}$. Pour $\epsilon < 10^{-4}$, il n'y a pas de différence majeure entre GMRES et FOM. De plus, la matrice A possède un condtionnement relativement élevé :

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \approx 8.99 \times 10^6$$

Ceci implique que les erreurs numériques s'accumulent significativement, dégradant la précision des calculs.

4.2 Matrice : pde225_5e-1

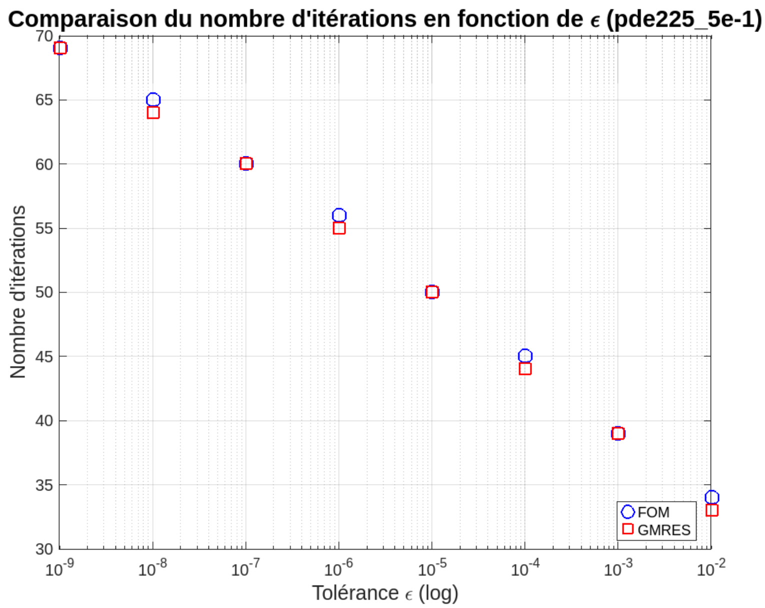

Figure 5: Comparaison de l'évolution du nombre d'itérations en fonction du seuil de tolérance avec la matrice pde225_5e-1

Interprétation : GMRES et FOM suivent une tendance très similaire, avec GMRES nécessitant légèrement moins d'itérations pour converger. Le conditionnement de la matrice A semble bien car les algorithmes convergent progressivement avec une diminution du nombre d'itérations à mesure que ϵ augmente. En effet,

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \approx 1.04 \times 10^2$$

est plus petit que le condtionnement de la matrice *mat1* ce qui explique également une convergence plus rapide.

4.3 Matrice : hydcar20

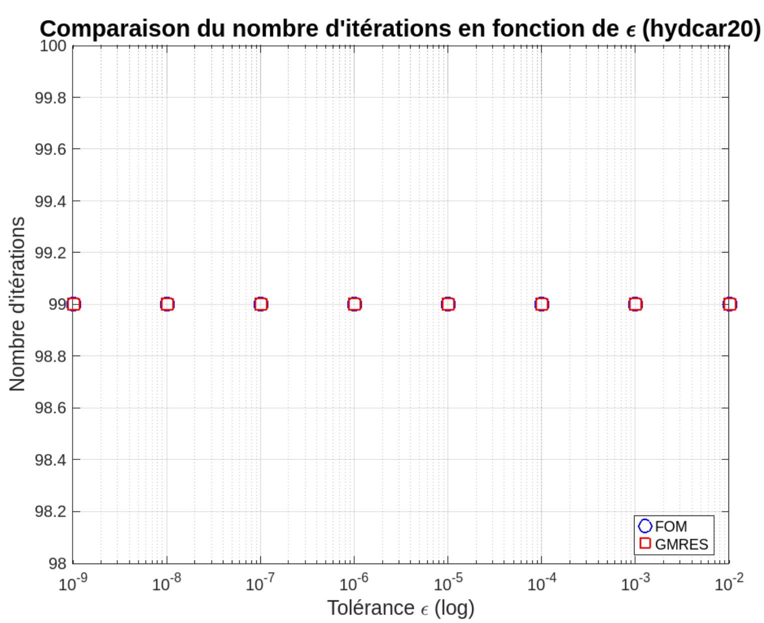

Figure 6: Comparaison de l'évolution du nombre d'itérations en fonction du seuil de tolérance avec la matrice hydcar20

Interprétation : Contrairement aux autres matrices, le nombre d'itérations reste constant (99) pour tout ϵ, pour FOM et GMRES. Cela peut être dû au fait que la matrice hydcar20 est mal conditionnée, et les méthodes de Krylov ont du mal à améliorer leur convergence même avec une tolérance plus grande.

4.4 Tableau récapitulatif

	mat1		pde225_5e-1		hydcar20.mat	
ϵ	FOM	GMRES	FOM	GMRES	FOM	GMRES
1e-2	123	120	34	33	99	99
1e-3	138	133	39	39	99	99
1e-4	156	147	45	44	99	99
1e-5	165	164	50	50	99	99
1e-6	174	172	56	55	99	99
1e-7	184	182	60	60	99	99
1e-8	191	190	65	64	99	99
1e-9	196	196	69	69	99	99

Table 4: Comparaison des itérations pour différentes matrices et valeurs de ϵ.

Interprétation : On remarque que *mat1* est la matrice nécessitant le plus grand nombre d'itérations parmi les trois matrices, ce qui paraît normal car c'est celle avec la plus grande dimension (573 contre 99 et 225). D'autre part, dans la plupart des cas, GMRES converge plus rapidement que FOM, particulièrement pour *mat1* et *pde225_5e-1*.