

Estimation de la bathymétrie des rivières à partir de mesures de surface

Ines BESBES & Sara ROOL

March 2025

1 Introduction

Lors de ce TP, on utilisera des mesures de la surface de l'eau, afin d'estimer la bathymétrie, c'est-à-dire la mesure de la profondeur et de la forme du fond des cours d'eau. Pour cela, on va appliquer une méthode d'optimisation appelée Variational Data Assimilation (VDA). On étudiera également l'impact de différents termes de régularisation pour améliorer la précision des résultats.

2 Le modèle de flux direct et le problème inverse

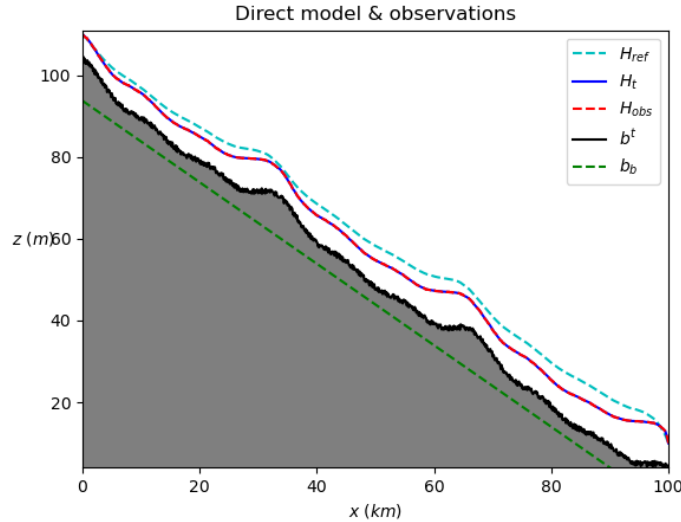


Figure 1: Estimation de l'élévation de la surface de l'eau obtenue avec le modèle direct

2.1 Avantages et inconvénients du terme de régularisation d'ordre 0 : $\|b - b_b\|^2$

L'introduction d'un terme de régularisation est essentielle pour stabiliser le problème inverse et faire en sorte que la solution se rapproche le plus de la réalité. Ici, le terme de régularisation $\|b - b_b\|^2$, où b_b représente une bathymétrie de référence (*background*), a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre tout en permettant de contraindre la solution à rester proche d'une estimation a priori.

Toutefois, son inconvénient provient du fait qu'il dépende fortement de b_b . En effet, une mauvaise estimation initiale peut entraîner un biais significatif de la solution finale. De plus, ce terme ne régularise ni la pente ni la courbure de la solution, ce qui peut donc mener à des reconstructions bruitées.

2.2 Relation entre b_b et b_{1st}

Il est important de distinguer b_b de la première estimation b_{1st} , utilisée comme point de départ dans le processus d'optimisation. En effet, ces deux termes ont des rôles différents : b_b intervient directement dans le terme de régularisation pour guider la solution vers une forme attendue, tandis que b_{1st} influence uniquement la convergence de l'algorithme, sans influencer la solution finale.

2.3 Avantages et inconvénients des différentes expressions du terme de régularisation

On peut envisager d'autres formes de régularisation.

D'une part, le terme d'ordre 1, $\|\partial_x b - \text{mean}_x(\partial_x H)\|^2$, vise à contrôler la pente de la bathymétrie, en cherchant à faire correspondre le gradient de $b(x)$ à celui du profil moyen de la surface libre. Ce type de régularisation aide à obtenir des solutions plus lisses, mais il nécessite une estimation précise de la pente de la surface (et donc du gradient), qui peut être imprécise ou bruitée.

D'autre part, le terme de régularisation d'ordre 2, $\|\partial_{xx} b\|^2$, réduit les changements brusques en rendant la solution plus lisse. Il est certes efficace pour supprimer les petites variations indésirables mais il peut aussi effacer des détails importants de la bathymétrie réelle.

3 Simulations et analyses

3.1 Simulations directes

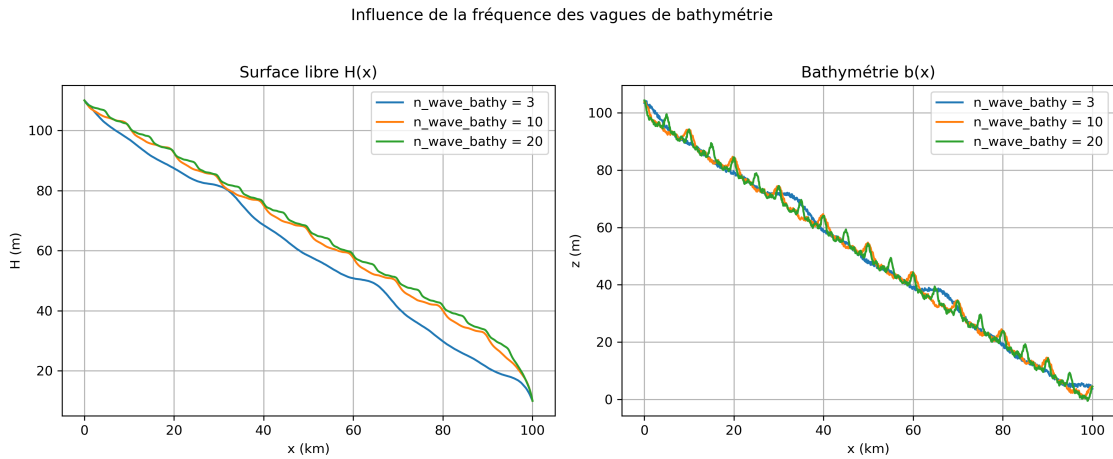


Figure 2: Influence du nombre de vagues dans la bathymétrie

On observe qu'avec $n_wave_bathy = 3$, on voit peu de grandes ondulations. Avec $n_wave_bathy = 10$, on observe plus d'ondulations de taille moyenne. Avec $n_wave_bathy = 20$, le fond présente de nombreuses petites ondulations rapprochées. La pente générale du fond reste identique dans les trois cas, ce qui explique pourquoi la tendance générale de la surface libre reste similaire.

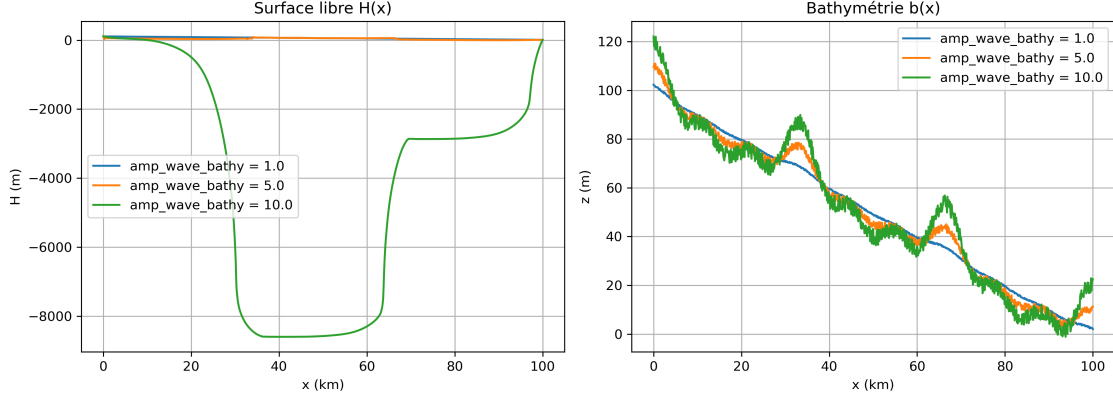


Figure 3: Influence de l'amplitude des vagues dans la bathymétrie

On observe que pour les petites amplitudes (1.0) et moyennes (5.0), la surface de l'eau reste presque plate. Par contre, quand l'amplitude est grande (10.0), la surface s'effondre brutalement au milieu, formant un creux très profond d'environ 8000 mètres. Cela montre qu'il existe un seuil critique d'amplitude au-delà duquel le comportement de la surface change complètement.

De fait, l'amplitude des vagues bathymétriques apparaît comme la propriété la plus sensible par rapport à la "signature" de surface. On observe un comportement non-linéaire marqué: au-delà d'un certain seuil d'amplitude (entre 5.0 et 10.0), la surface libre subit des modifications importantes, passant d'un profil quasi-plat à un creux profond. Cela suggère l'existence d'un régime critique dans le modèle d'écoulement.

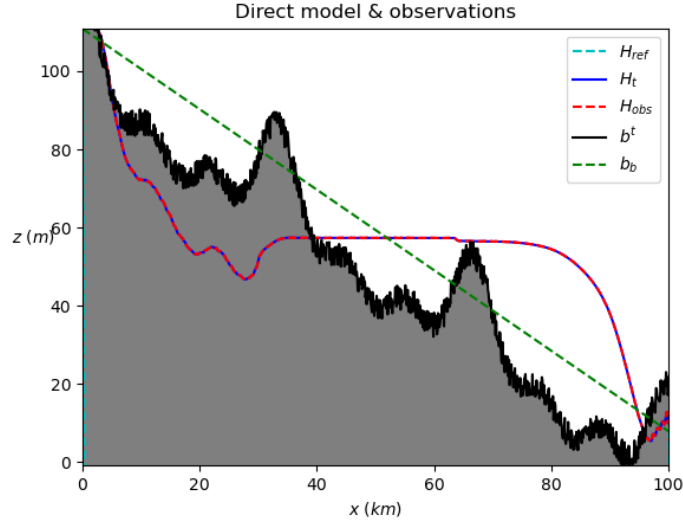


Figure 4: Résultats du modèle direct avec une amplitude des vagues fixée à 10

3.2 Problème inverse : inférence de $b(x)$

3.2.1 Investigations fondamentales

Le problème inverse est mal posé ce qui signifie qu'il existe une infinité de bathymétries $b(x)$ qui peuvent satisfaire les mêmes observations de surface $H(x)$. On sait que la solution dépend d'une condition initiale $b(x_0)$. Si on connaît la condition initiale, on peut propager cette information et retrouver une unique solution dans le cadre du modèle, mais cette solution reste "conditionnelle" à

cette donnée ponctuelle. Donc, à moins de disposer d’une information complémentaire, on ne peut pas identifier $b(x)$ de manière certaine.

Lorsque plusieurs solutions $b(x)$ sont mathématiquement possibles, l’approche numérique choisie vise à en sélectionner une en résolvant un problème d’optimisation. On obtient ainsi la solution b^* qui minimise un coût total combinant l’écart entre la surface d’eau simulée et les observations, ainsi qu’un terme de régularisation imposant des contraintes supplémentaires (comme la lissité ou la proximité à un profil de référence). Cette solution n’est donc pas forcément la vraie bathymétrie, mais celle qui est la plus cohérente avec les observations et les hypothèses a priori fixées dans le modèle.

3.2.2 VDA avec $prior = h_{ref} = 10$

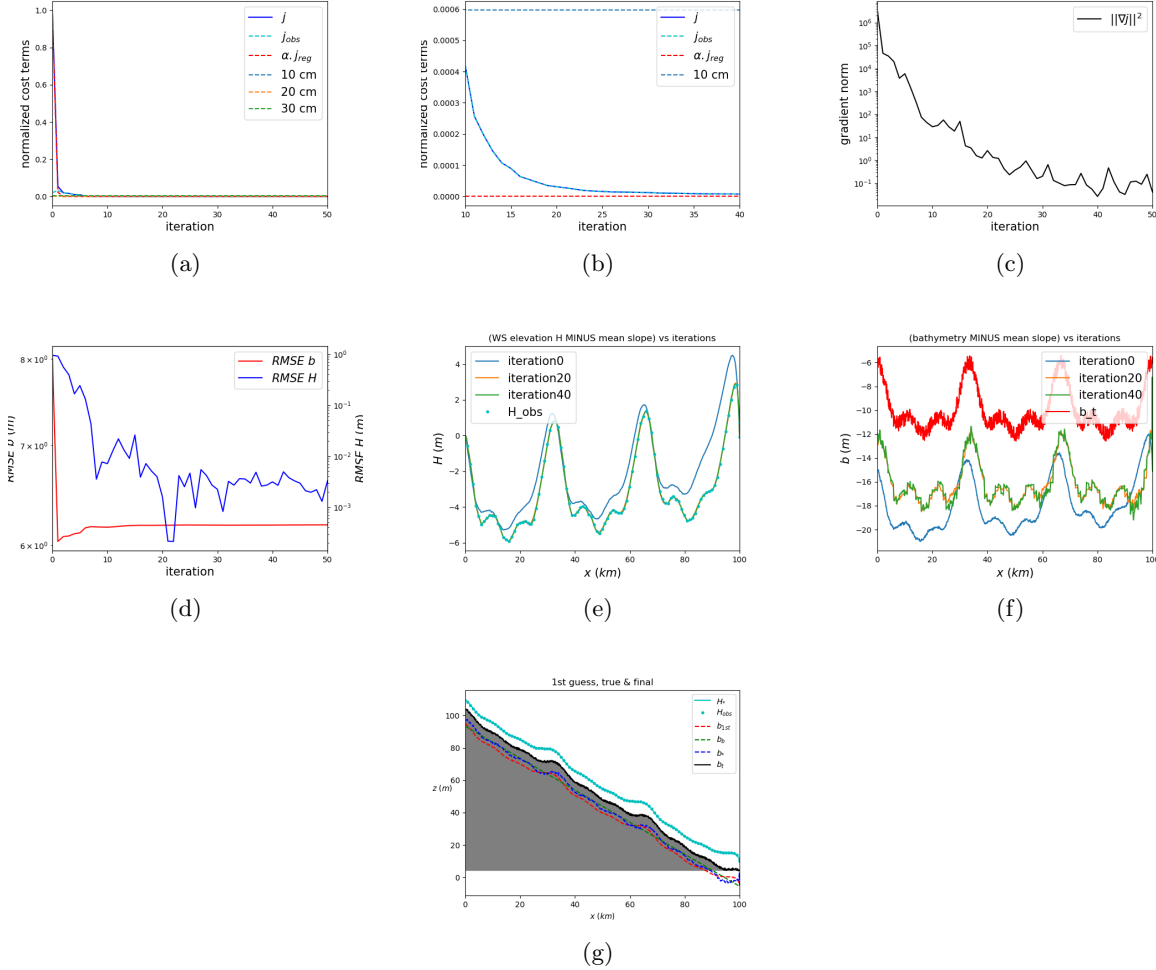


Figure 5: Résultats de la VDA obtenus avec $prior_depth = 10$

On observe dans le graphique 6g la première estimation (bleu clair), la vraie bathymétrie (ligne rouge pointillée) et la solution finale (ligne noire). La zone grise représente le fond, et on voit que la solution finale se rapproche bien de la vraie bathymétrie, surtout dans les zones où il y a des ondulations importantes. La méthode VDA a donc réussi à reconstruire les principales caractéristiques du fond de la rivière à partir des mesures de surface.

En effet, on voit sur le graphique 6d que l’erreur sur la hauteur d’eau diminue significativement au cours des itérations, ce qui montre que le modèle reproduit de mieux en mieux les observations de surface. Cela se confirme aussi sur le graphique 6a, qui montre l’évolution des différentes mesures d’erreur au fil des itérations. On remarque que toutes les courbes restent très basses et stables, ce qui indique que l’algorithme trouve rapidement une bonne solution et ne s’en écarte pas beaucoup pendant

les 40 itérations.

D'autre part, le graphique 6c montre comment la force du gradient diminue pendant l'optimisation. On observe une chute très rapide au début indiquant que l'algorithme trouve rapidement la direction de descente, puis affine progressivement la solution. Les petites bosses représentent des moments où l'algorithme explore de nouvelles directions.

De plus, on voit clairement sur le graphique 6e que la solution finale (verte) reproduit bien les ondulations de la surface observée, alors que la solution initiale (bleue) en était plus éloignée.

3.2.3 VDA avec $prior = href = 10$ et ajout de bruit à b_{1st}

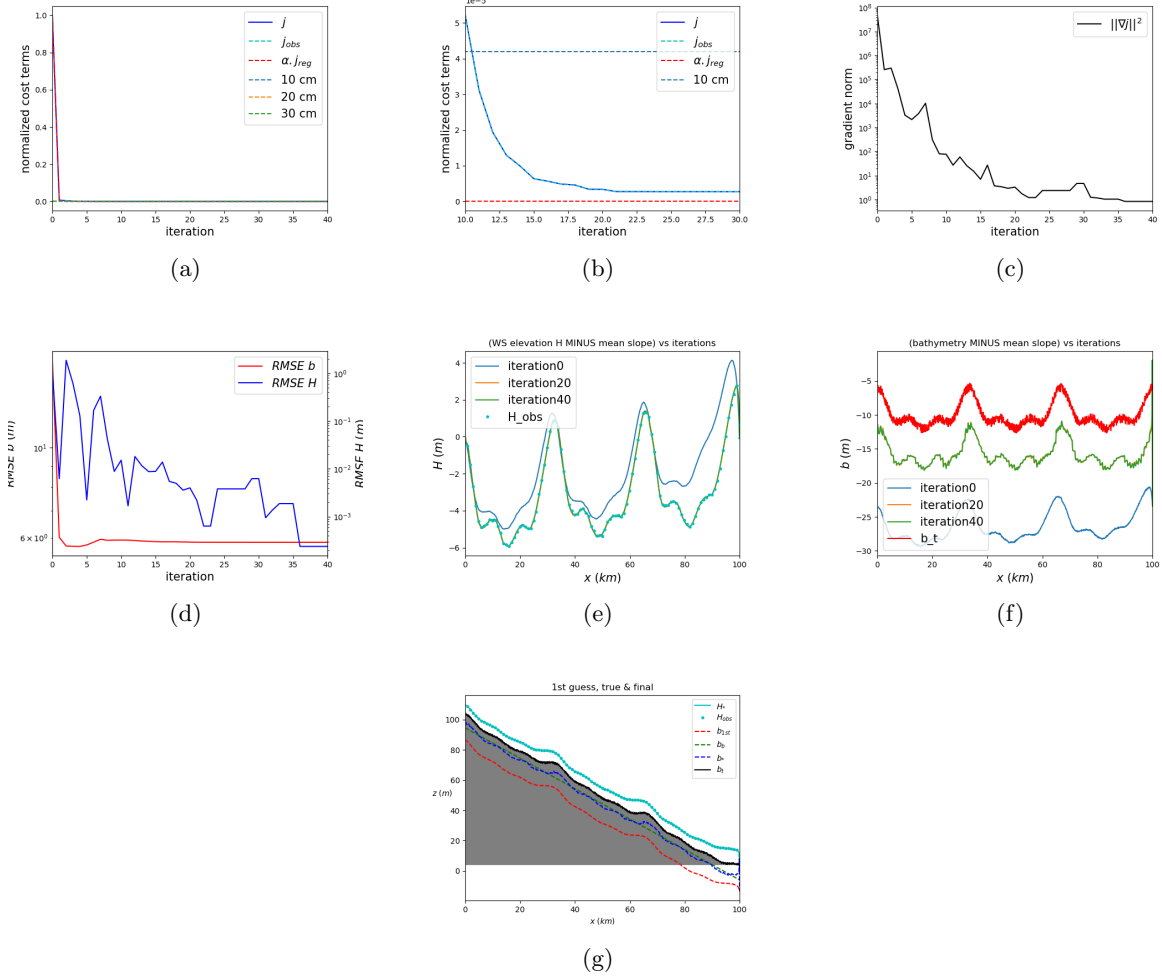


Figure 6: Résultats de la VDA obtenus avec $prior_depth = 10$ et bruit rajouté à b_{1st}

On observe dans les graphiques 6a et 6b que la convergence est un peu plus lente au début, et les coûts finaux sont légèrement plus élevés. Cela suggère que le bruit rend l'optimisation plus difficile. Cela se confirme également dans le graphique 6d, où l'erreur RMSE pour la bathymétrie est plus élevée, surtout au début. Cela confirme que le bruit rend la reconstruction de la bathymétrie plus difficile. De plus, le graphique 6c montre que la norme du gradient diminue moins rapidement au début, ce qui signifie que l'algorithme a besoin de plus d'itérations pour trouver la bonne direction à cause du bruit. Enfin, on observe dans les graphiques 6e, 6f et 6g que surface d'eau finale est toujours proche des observations, mais la bathymétrie reconstruite semble moins lisse et moins précise, avec plus d'oscillations autour de la "vraie" bathymétrie. Cela indique que le bruit introduit des erreurs dans l'estimation du fond.

3.2.4 Influence de α_{reg}

Lorsque le terme de régularisation est nul, l'algorithme présente une convergence instable. Le coût total diminue rapidement au début 9a, et reste stable ensuite, traduisant un problème mal posé. La norme du gradient 9c et l'erreur sur la bathymétrie présentent des oscillations 9d, ce qui montre que l'algorithme a du mal à trouver un minimum fiable et peut aboutir à des solutions non physiques.

Avec une régularisation constante ($\alpha_{reg} \approx 1.2$), l'optimisation devient plus stable. Le coût total décroît de façon plus régulière 10a. La bathymétrie converge vers un profil plus lisse voir trop lisse 10b, et la norme du gradient décroît sans oscillations 10c. Cependant, l'erreur RMSE sur les hauteurs d'eau ne diminue pas 10d, ce qui montre que l'algorithme ne parvient pas à reconstruire une solution plus fidèle et que le terme de régularisation est trop grand.

La régularisation décroissante permet de débiter avec une solution lisse et stable, puis d'affiner progressivement les détails en relâchant la régularisation. Le coût total diminue de façon régulière 11a, avec un bon équilibre entre régularisation et ajustement aux données. La bathymétrie estimée devient plus précise au fil des itérations 11b, sans le lissage excessif du cas constant. La norme du gradient 11c chute rapidement, puis oscille beaucoup. L'erreur RMSE baisse également mais beaucoup plus lentement 11d.

Les différentes stratégies de régularisation ont un impact clair sur la qualité de la bathymétrie estimée. Sans régularisation ($\alpha_{reg} = 0$), la solution est très sensible au bruit et peut produire des profils irréguliers ou non physiques. Dans notre cas, grâce aux bonnes observations ce n'est pas le cas, et la solution ressemble au résultat attendu, 9g. Avec une régularisation constante, la solution devient trop lissée 10g, ce qui suggère que le terme de régularisation est trop grand. La stratégie la plus efficace est celle avec α_{reg} décroissant. Cela permet de stabiliser la solution, puis permet d'affiner progressivement les détails, aboutissant ainsi à une estimation plus fidèle et réaliste du fond 11g.

3.2.5 Nos propres cas test

Dans cette étude, nous considérons deux configurations de paramètres pour la VDA, en faisant varier les observations. La première configuration utilise un profil linéaire pour le paramètre b_{1st} , sans régularisation. La seconde, en revanche, est basée sur un profil bruité, avec une régularisation décroissante : on fixe $\alpha_{reg} = 0.1$ initialement, puis on diminue cette valeur de 0.1 à chaque itération.

Cas des rivières non surveillées : Deux jeux d'observations sont utilisés. Le premier présente une fréquence d'échantillonnage de 20 avec un bruit de 1. Le second dispose d'une fréquence de 10 et d'un bruit réduit à 0.5.

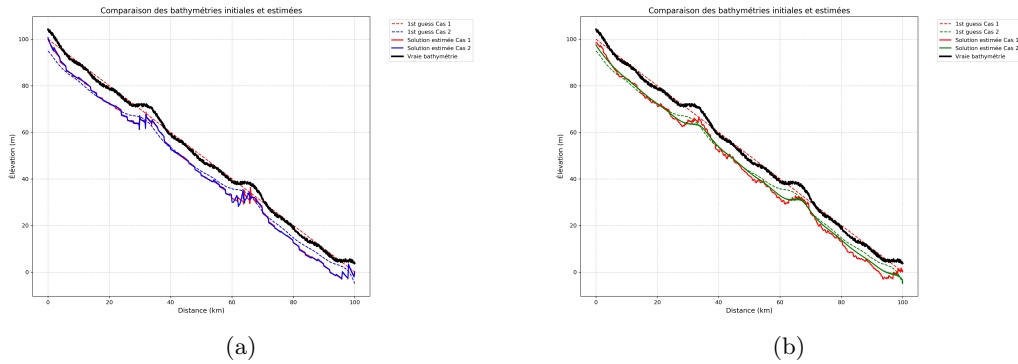


Figure 7: Résultats obtenus via la méthode VDA dans le cas des rivières non surveillées

On remarque que dans le second cas 7b, où les observations sont moins bruitées, les résultats sont plus lisses surtout pour la VDA avec régularisation (cas2). À l'inverse, le premier cas 7a, avec un bruit plus important et une fréquence d'échantillonnage plus faible, présente davantage d'irrégularités, notamment au niveau des "bosses". Cela souligne l'importance de la qualité des observations, qui influence fortement le résultat final.

Malgré des observations différentes, il est intéressant de constater que dans les deux cas, on converge vers une bathymétrie similaire, même si le profil initial est linéaire ou bruité.

Cas avec des rivières partiellement surveillées

On conserve les mêmes jeux d'observations que dans le cas précédent.

Dans les rivières non surveillées, la profondeur est estimée uniquement à partir d'observations de surface (H_{obs}) combinées à une régularisation, sans aucune mesure directe. À l'inverse, dans les rivières partiellement surveillées, une ou plusieurs mesures précises de la bathymétrie (b_{mesure}) sont disponibles à des points donnés, ce qui améliore la qualité de l'estimation.

Dans notre cas, la bathymétrie estimée b^* est contrainte à coïncider exactement avec la valeur mesurée au point $d = 95$ km. Ce point est stratégiquement choisi car il correspond à une zone où l'estimation est habituellement bruitée, notamment en raison de perturbations dû aux limites du modèle.

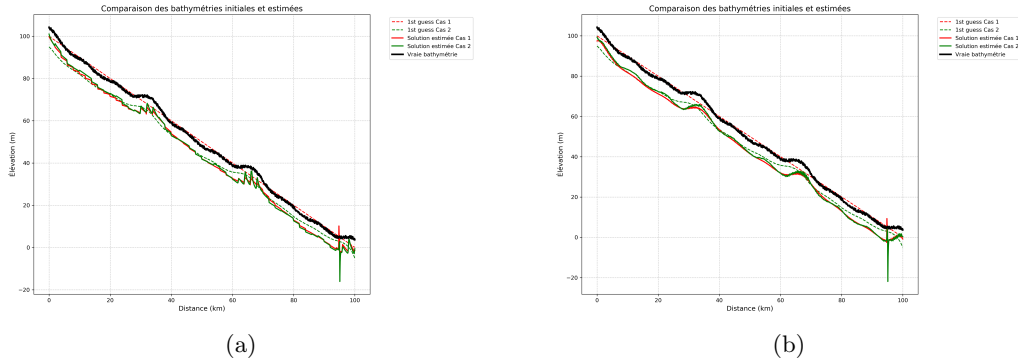


Figure 8: Résultats obtenus via la méthode VDA dans le cas des rivières partiellement surveillées.

On observe sur la figure 8 que l'estimation au niveau de $d = 95$ km présente un bruit plus important que dans le cas des rivières non surveillées. Cependant, les irrégularités observées dans la bathymétrie estimée (notamment au niveau des "bosses") sont moins marquées que dans le cas sans mesure directe. Cet effet est particulièrement visible pour le second jeu d'observations 8b, dont le résultat final est nettement plus lisse. C'est une méthode efficace pour pallier le manque d'observations, en particulier dans le cas du premier jeu de données 8a, où une simple mesure ponctuelle améliore l'estimation.

4 Annexe

4.1 Graphiques avec $\alpha_{reg} = 0$

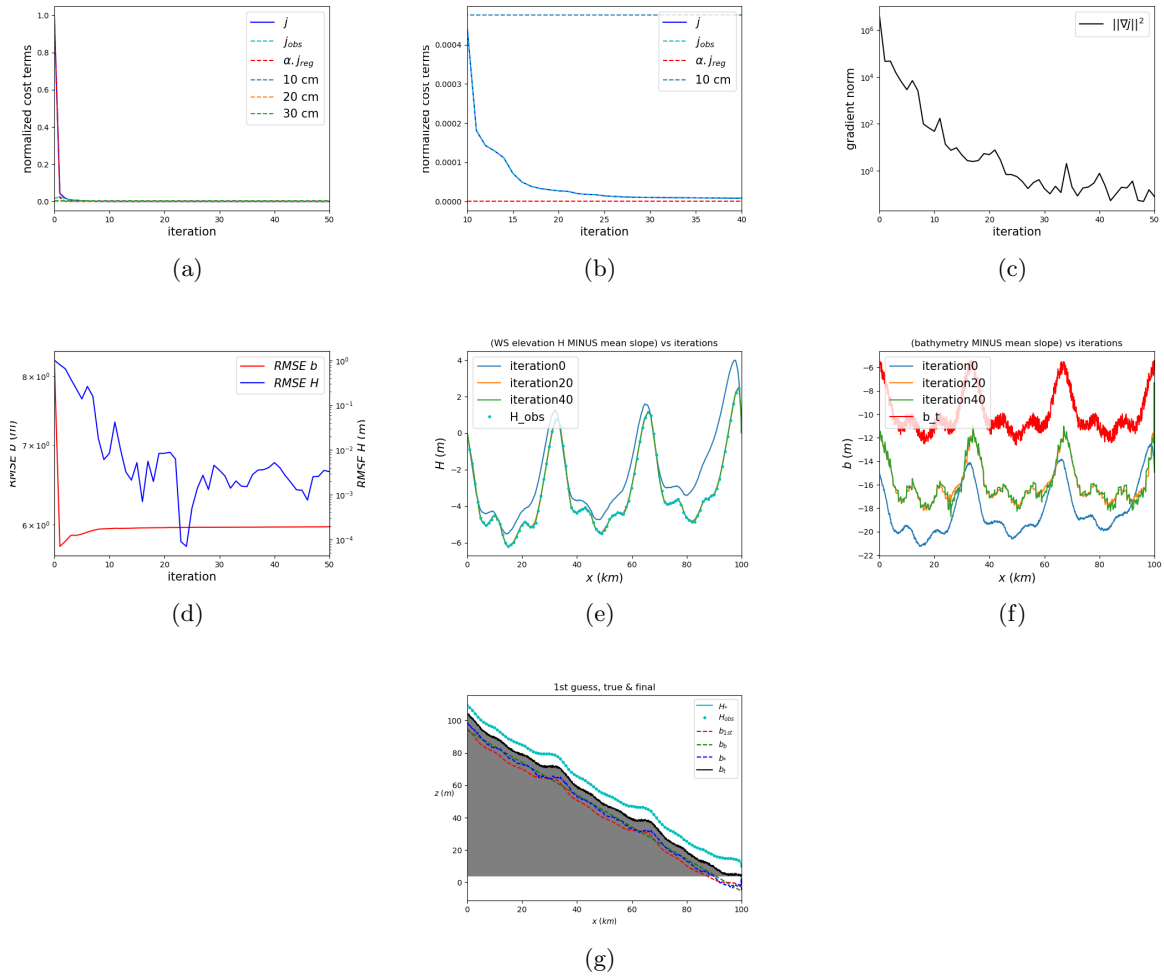


Figure 9: Résultats de la VDA obtenus avec $\alpha_{reg} = 0$

4.2 Graphiques avec α_{reg} constant

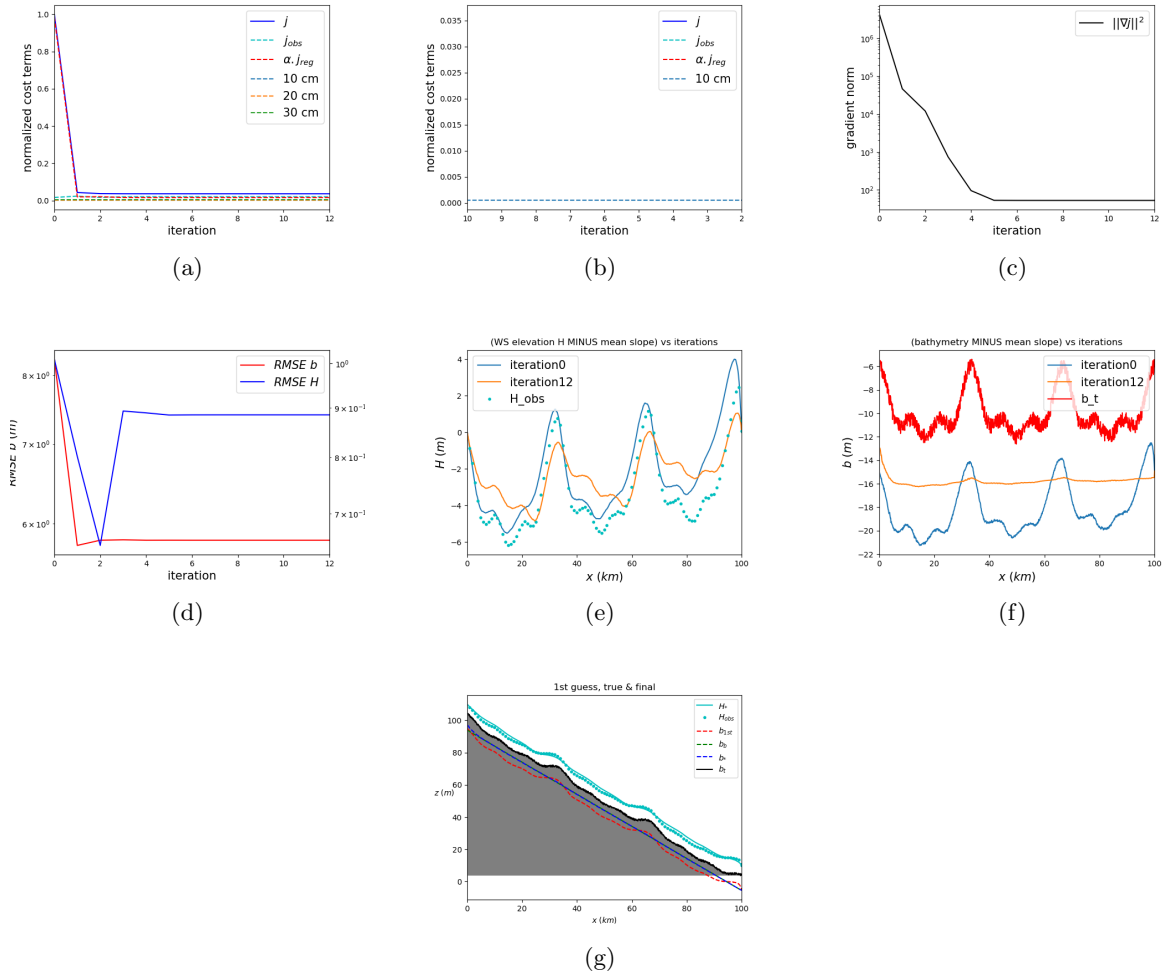


Figure 10: Résultats de la VDA obtenus avec α_{reg} constant

4.3 Graphiques avec α_{reg} décroissant

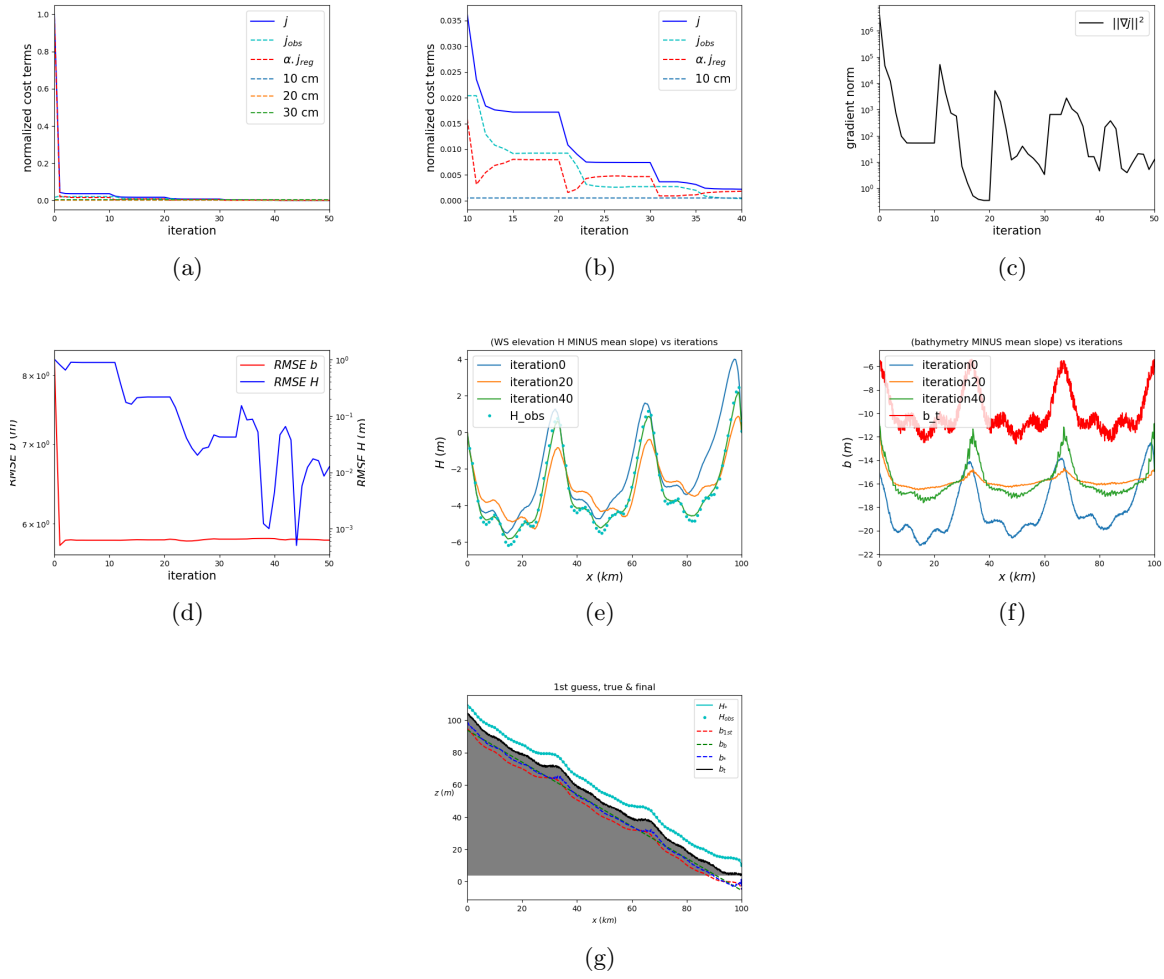


Figure 11: Résultats de la VDA obtenus avec α_{reg} décroissant