

---

# X01-Homogénéisation : mise-en-oeuvre et validation

---

---

## Encadrants :

-François ALOUGE

-Sonia FLISS



# Introduction à l'homogénéisation périodique

Hugo Negrel

Mars 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Solution exacte</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Solution du problème homogénéisé</b>	<b>5</b>
3.1	Les problèmes de cellule . . . . .	5
3.2	Discrétisation des problèmes de cellule . . . . .	6
3.3	Première validation . . . . .	7
3.4	Calcul du tenseur homogénéisé et deuxième validation . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Comparaison de la solution exacte et la solution du problème homogénéisé</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>12</b>

# 1 Introduction

Ce rapport répond au deuxième TP dans le cadre du cours X01 de master 2 d'Analyse, Modélisation et Simulation (AMS). Cela concerne ici présent la résolution par des méthodes numériques du problème de cellule et d'homogénéisation dans un domaine de dimension 2. Ainsi, la première partie concerne la résolution exacte de l'équation de diffusion pour plusieurs tenseurs périodiques A différents. La seconde partie concerne la résolution du problème de cellule afin de déterminer les deux correcteurs. La troisième partie met en jeu la résolution du problème du problème homogénéisé avec la matrice effective trouvée dans la partie précédente. Enfin, ce rapport se conclura par une prise de recul sur les résultats trouvés grâce à des estimations d'erreurs lorsque le paramètre  $\epsilon$  tend vers 0.

# 2 Solution exacte

On considère le problème générale suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A_\epsilon \nabla u_\epsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$f$  est supposé de régularité  $L^2(\Omega)$ ,  $A_\epsilon = A(\frac{x}{\epsilon})$  est un tenseur  $\epsilon$ -périodique satisfaisant l'hypothèse de coercivité et de continuité uniforme. De la même manière que dans le TP1, on montre très facilement que la formulation forte est équivalente à la formulation variationnelle suivante :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} v \cdot A_\epsilon(x_1, x_2) \cdot \vec{\nabla} u_\epsilon \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

, qui admet une unique solution d'après le théorème de Lax-Milgram. La continuité du second et premier membre sont évidents. De même pour la coercivité avec la semi-norme de  $H_0^1(\Omega)$ . On réutilise donc le code du TP1, en omettant la matrice de masse dans la matrice EF. Le code sera testé pour des matrices de diffusion A différentes. Le cas test se fera pour  $A = Id$ . On s'impose la solution  $u(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$  et on en déduit alors la fonction source correspondante.  $f(x_1, x_2) = (1 + 2\pi^2) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$  est la fonction source dans ce cas simple.

La fonction source diffère selon les cas étudiés.

- $A = Id$  :  $f = (1 + 2\pi^2) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$
- cas (i) :  $f = 3\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$
- cas (ii) :  $f = -\pi^2(2 \cos(2\pi x_1) \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) - (2 + \sin(2\pi x_1)) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) - 4 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2))$
- cas (iii) :  $f = -\pi^2(2 \cos(2\pi x_1) \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) - (2 + \sin(2\pi x_1)) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) - (4 + \sin(2\pi x_1)) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2))$

- cas (iv) :  $f = -\pi^2(2 \cos(2\pi x_1)(4 + \sin(2\pi x_2)) \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) + 2(2 + \sin(2\pi x_1)) \cos(2\pi x_2) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_2) - 2(2 + \sin(2\pi x_1))(4 + \sin(2\pi x_2)) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2))$ ;

On obtient selon le tenseur considéré:

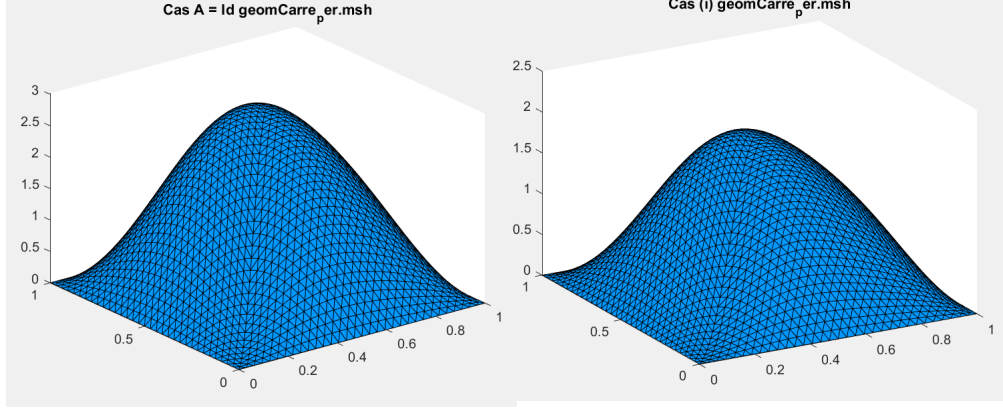


Figure 1: Solution exacte pour  $A = \text{Id}$

Figure 2: Solution exacte pour le cas (i)

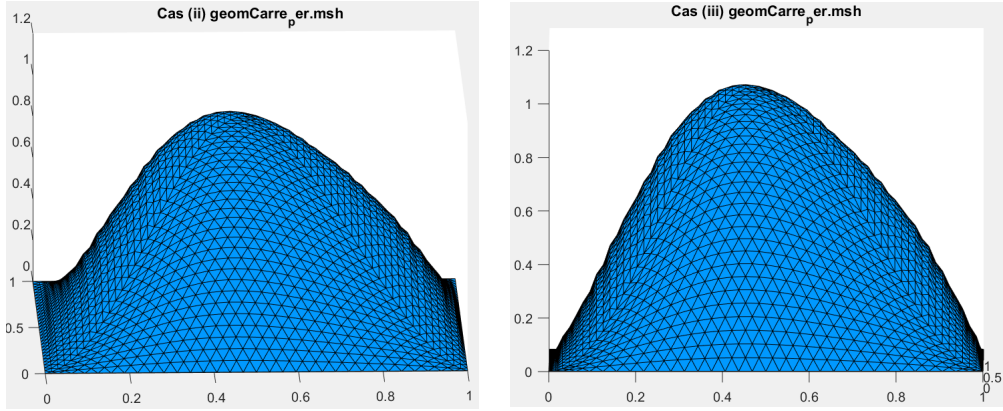


Figure 3: Solution exacte pour cas (ii)

Figure 4: Solution exacte pour le cas (iii)

Ce qui est intéressant est l'apparition de petites oscillations sur les figures, en particulier le long de la pente lorsque le tenseur  $A$  n'est plus homogène. C'est compatible avec ce qui est attendu, et justifie à priori une décomposition en puissance de  $\epsilon$  comme présenté dans le cours.

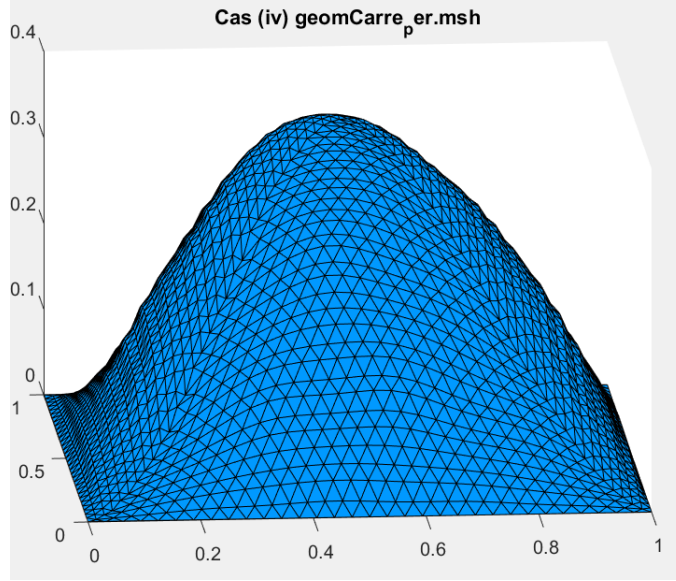


Figure 5: Solution exacte dans le cas (iv)

### 3 Solution du problème homogénéisé

#### 3.1 Les problèmes de cellule

On munit l'espace  $V = \{\psi \in H^1_{\#}(Y) / \int_Y \psi(y) dy = 0\}$  de la norme  $\|\cdot\|_{H^1(Y)}$ .  $V$  est un espace de Hilbert comme sous-espace fermé d'un espace de Hilbert, étant donné que l'application  $\psi \mapsto \int_Y \psi dy$  est continue dans  $H^1(Y)$ . On pose

$$a : (u, v) \mapsto a(u, v) = \int_Y (A(y) \nabla_y w_i(y), \nabla_y \phi(y)) dy$$

,  $\forall (u, v) \in V$ . Par propriété de coercivité de  $A$ , on a directement  $a(u, u) \geq c \|u\|_{H^1_0(\cdot)}$ . Cette forme est de plus bilinéaire et continue, étant donné la propriété de continuité uniforme de  $A$ . La forme  $l : u \mapsto l(u) = - \int_Y (A(y) e_i, \nabla_y u(y)) dy$  est bien linéaire et continue dans  $V$ . D'après le théorème de Lax-Milgram, on a bien une unique solution dans  $V$  au problème variationnel.

Pour faciliter la discretisation numérique de la condition de moyenne nulle des fonctions tests, on se replace dans l'espace  $H^1_{\#}(Y)$  (muni de la norme de  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ ) et on change  $a$ . On prend maintenant :  $a' : (u, v) \mapsto \int_Y (A(y) \nabla_y w_i^\eta(y), \nabla_y \phi(y)) + \eta \int_Y w_i^\eta(y) \phi(y) dy$ . Il est tout aussi direct de voir que,  $\eta$  étant positif, on a  $a'(u, u) \geq \min(1, \eta) \|u\|_{H^1(\Omega)}$ .  $a'$  reste bilinéaire et continue. Une nouvelle fois, d'après le théorème de Lax-Milgram, on a une unique solution à la formulation

variationnelle : Trouver  $w_i^\eta \in V$  tels que  $\forall \phi \in V$

$$\int_Y (A(y) \nabla_y w_i^\eta(y), \nabla_y \phi(y)) + \eta \int_Y w_i^\eta(y) \phi(y) dy = - \int_Y (A(y) e_i, \nabla_y u(y)) dy$$

Naturellement, la constante de coercivité diminue avec  $\eta$ , ce qui laisse entendre que la constante de contrôle des données sera de moins en moins bonne, c'est à dire de plus en plus grande :

$$\|w_i^\eta\|_{H^1(\Omega)} \leq C' \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

où l'on a  $C' \propto 1/c$ . Cela a pour conséquence que cela rend la matrice "de moins en moins inversible", c'est à dire que l'inversion de la matrice risque d'être moins stable et d'avantage assujettis aux erreurs d'arrondis (le conditionnement augmente).

Remarquons que  $\int_Y w_i^\eta dy = 0$  et donc que  $\int_Y (w_i^\eta - w_i) dy = 0$ . En effet, cela est immédiat en prenant  $\phi(y) = \text{cte}$ . On soustrait donc (3) par (2) et en prenant  $\phi = w_i^\eta - w_i \in V$ , on a alors

$$\int_Y (A(y) \nabla (w_i^\eta - w_i), \nabla (w_i^\eta - w_i)) dy + \eta \int_Y (w_i^\eta - w_i)^2 dy = \eta \int_Y w_i (w_i - w_i^\eta) dy$$

. En se plaçant dans l'espace  $V$ , on peut utiliser l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, ainsi qu'en utilisant le fait que  $A$  est un tenseur coercif et continue, on montre facilement que la norme  $|\phi|^2 = \int_Y (A(y) \nabla \phi(y), \nabla \phi(y)) dy$  est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . Comme  $\eta \geq 0$ , on a naturellement

$$|w_i - w_i^\eta|^2 \leq \int_Y (A(y) \nabla (w_i^\eta - w_i), \nabla (w_i^\eta - w_i)) dy + \eta \int_Y (w_i^\eta - w_i)^2 dy$$

. De plus,

$$\eta \left| \int_Y w_i (w_i - w_i^\eta) dy \right| \leq \eta \|w_i\|_{L^2(\Omega)} \|w_i - w_i^\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta \|w_i\|_{L^2(\Omega)} \|w_i - w_i^\eta\|_{H^1(\Omega)}$$

et par équivalence des normes  $|\cdot|$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ , on a par minoration :

$$C'' \|w_i - w_i^\eta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |w_i - w_i^\eta|^2 \leq \|w_i\|_{L^2(\Omega)} \eta \|w_i - w_i^\eta\|_{H^1(\Omega)}$$

Finalement,  $\exists C \geq 0$ , indépendante de  $\eta$ ,

$$\|w_i - w_i^\eta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \eta$$

ce qui était le résultat à démontrer.

### 3.2 Discrétisation des problèmes de cellule

La formulation variationnelle est simple à résoudre, il suffit d'utiliser le code du TP1 dans le cas périodique en rajoutant simplement le paramètre  $\eta$ . En

ce qui concerne le second membre, on se rend compte que l'on peut retrouver la matrice de raideur si l'on remarque que  $e_i = \nabla x_i$ . En stockant les valeurs abscisses et ordonnées de chacun des sommets dans des listes, il est alors aisé de calculer le second membre dans le cas  $x_1 = x$  et  $x_2 = y$ . On peut donc calculer exactement  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L} = -X^T \mathbf{K} \mathbf{K} = -\mathbf{K} \mathbf{K} X$$

par symétrie de  $\mathbf{K} \mathbf{K}$  et où  $X$  est la liste des abscisses dans le cas  $i = 1$  et la liste des ordonnées pour  $i = 2$  des points de Lagrange. En ce qui concerne la méthode de pseudo-élimination, on fait exactement comme dans le TP1 i.e on utilise la matrice de passage adéquate.

### 3.3 Première validation

On sait que lorsque  $A = Id$  et dans le cas (i), les correcteurs seront nécessairement nulles. On peut le démontrer avec la formulation variationnelle, ou l'intuiter en remarquant Q1) qu'il n'y a point d'oscillation sur la solution exacte, ce qui laisse penser que  $u_1 = 0$  d'après l'ansatz :  $u_\epsilon(x, \frac{x}{\epsilon}) = u_0(x) + \epsilon u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 u_2 + \dots$ . J'ai choisi la valeur de  $\eta = 0.01$ , valeur ni trop grosse pour avoir une bonne approximation ni trop petite pour éviter des erreurs de calculs numériques trop grossiers lors de l'inversion de la matrice éléments finis.

La simulation numérique nous le confirme :

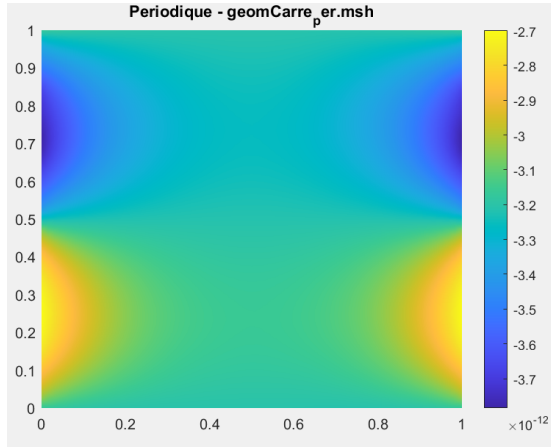


Figure 6: Correcteur  $w_{x_1}$  pour  $\eta = 0.01$

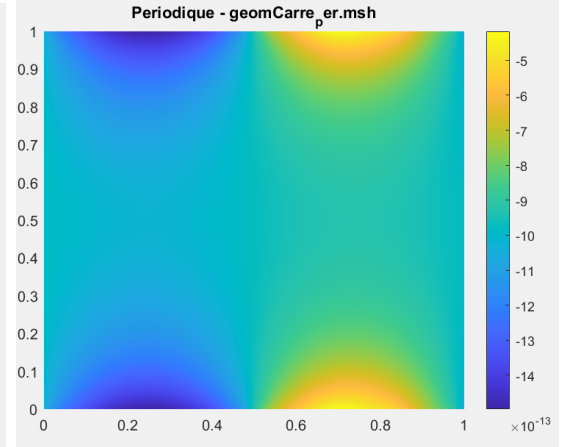


Figure 7: Correcteur  $w_{x_2}$  pour  $\eta = 0.01$

### 3.4 Calcul du tenseur homogénéisé et deuxième validation

Le calcul des coefficients du tenseur  $A_{eff}$  dans la base  $(e_x, e_y)$  est très simple, il suffit d'utiliser pour cela une fois de plus que  $\nabla y_i = e_i$  et donc d'invoquer le tenseur de raideur dans le calcul éléments finis. Le calcul est montré à la fin

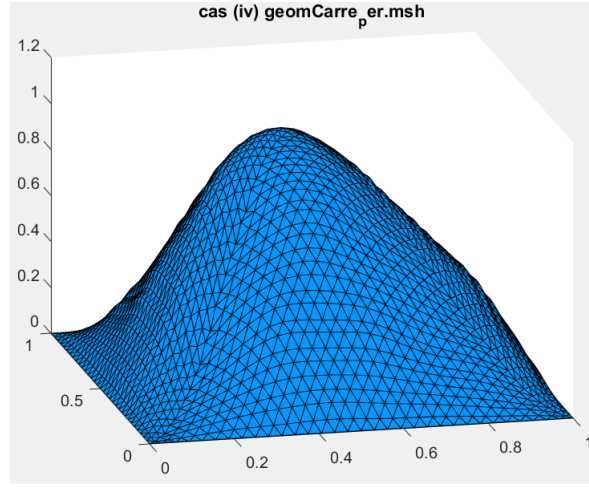


Figure 8: Solution du problème homogénéisé dans le cas (iv)

du code résolvant le problème de cellule. On obtient après résolution des deux correcteurs les bonnes matrices  $A_{eff}$ . Pour avoir la matrice, il faut faire tourner deux fois le code 'Principal-periodic-cell' afin de trouver les deux correcteurs.

Une fois la matrice obtenue, il est alors très simple de résoudre le problème homogénéisé, on se retrouve dans le même cas que pour le TP1 avec les conditions de Dirichlet.

## 4 Comparaison de la solution exacte et la solution du problème homogénéisé

On observe que la solution homogénéisée est lisse comparé à la solution du problème complet : les ondelettes apparaissant en Q1 ont disparu.

Pour le cas (iv), on obtient la figure 9 et 10.

En ce qui concerne l'influence de  $\epsilon$ , on voit que l'amplitude des oscillations de fréquence  $\approx \epsilon$  diminuent lorsque  $\epsilon$  se rapproche de 0. Cela est dû à la convergence bien particulière qu'est la convergence double-échelle, effaçant les oscillations de fréquence  $\epsilon$ .

Cependant, dans l'optique d'avoir un résultat plus quantitatif, on souhaite regarder l'évolution des normes  $L(Y)^2$  et  $H^1(Y)$ . Cependant, c'est bien  $\epsilon$  que l'on fera varier et non le pas du maillage. Les erreurs, cf figures 11 et 12, ré-augmentent très rapidement comme on peut le voir sur les courbes d'erreurs lorsque le pas devient du même ordre de grandeur que  $\epsilon$ . J'ai décidé de faire varier  $\epsilon$  de 0.5 jusqu'à  $10^{-4}$  avec un pas de 0.1. J'ai aussi pris un pas de maillage de 1/64 environ, afin de ne pas avoir trop de temps de calculs. Je présenterai les courbes dans le cas (iv) car il s'apparente au cas le plus général proposé : A dépendant de x et y. La solution  $u_0$  **n'est pas** égale à  $u(x_1, x_2) =$



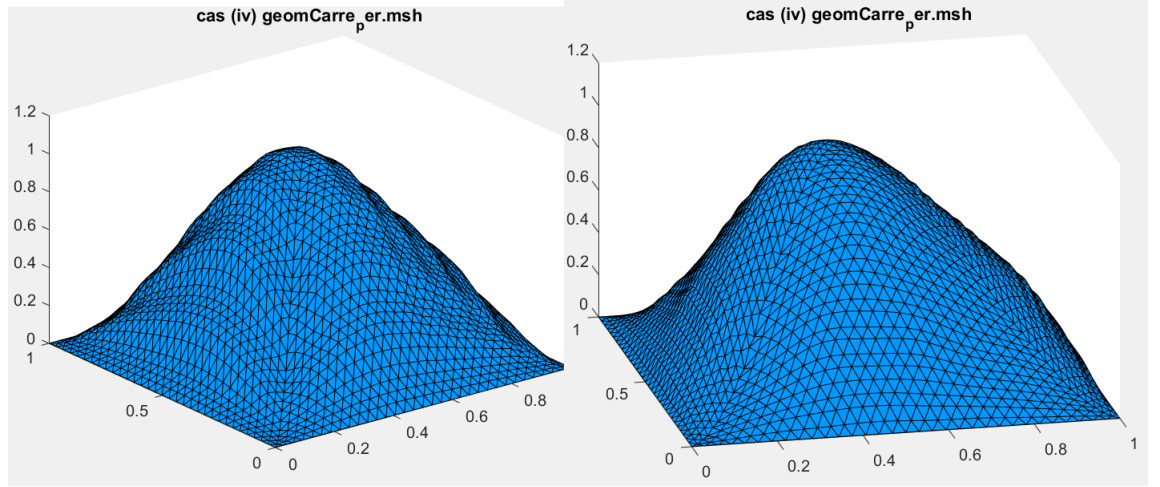


Figure 9: Solution exacte pour le cas (iv) avec  $\epsilon = 0.1$  Figure 10: Solution exacte pour le cas (iv) avec  $\epsilon = 0.01$

$\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$  lorsque  $\epsilon \neq 1$ . On ne s'étonnera pas en conséquence de voir une assymétrie par rotation apparaître même si u n'en laisse pas transparaître. Pour calculer l'erreur, il faut donc comparer  $u_0$  et  $u_{0,h}$ , tous deux calculés numériquement. Il faut donc d'abord calculer  $u_0$  en résolvant le problème homogénéisé, et puis la comparer à  $u_{0,h}$  comme fait dans le TP1.

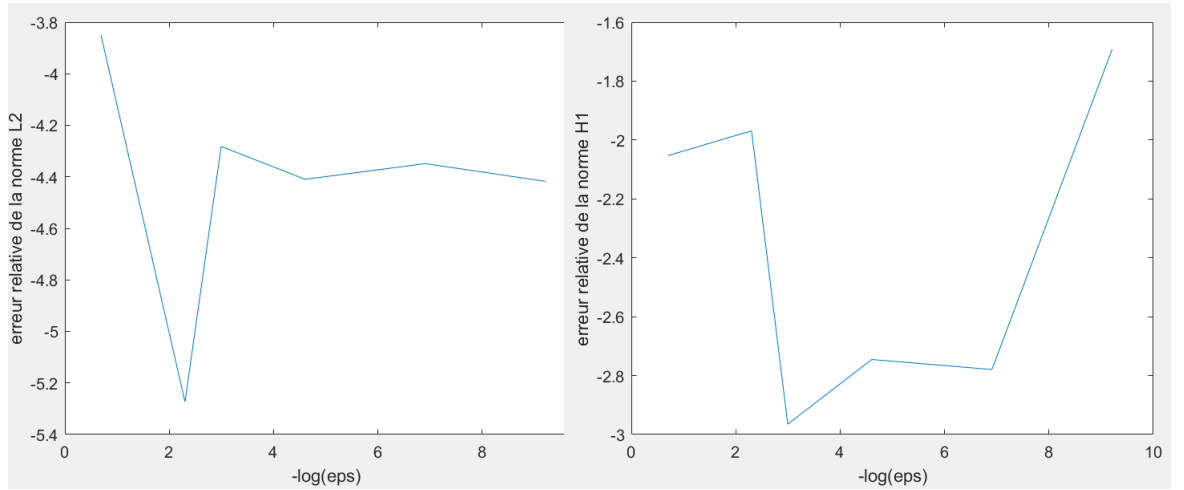


Figure 11: Evolution de la norme L2 en fonction de  $\epsilon$  Figure 12: Evolution de la norme H1 en fonction de  $\epsilon$

Si on veut améliorer l'estimation dans  $H^1$ , le cours nous apprend que c'est

possible. Sous certaines hypothèses de régularités des solutions que je ne détaille pas, on peut montrer que  $\|u_\epsilon - (u_0 + \epsilon(\partial_{x_1} u_0(x)w_1(x/\epsilon) + \partial_{x_2} u_0(x)w_2(x/\epsilon)))\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\epsilon)$ . On a montré cela rigoureusement dans  $R^d$ , mais on l'appliquera ici sans soucis à ce domaine borné en négligeant les effets de couche limites. L'enjeu est donc de calculer les dérivées partielles de  $u_0$  sur chacun des sommets de la triangulation. Pour cela, l'idée serait de se ramener au triangle de référence par une transformation canonique affine, la même que celle utilisée dans le calcul des matrices de raideur et de masse. On introduit comme au TP1 la transformation affine

$$\begin{aligned} F &: \hat{M} \rightarrow M \\ \hat{x} &\mapsto F(\hat{x}) = A\hat{x} + B \end{aligned}$$

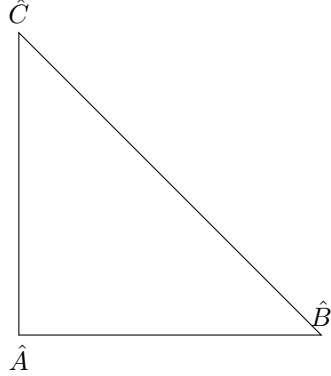
Sur le triangle de référence, les axes  $e_{\hat{x}_1}$  et  $e_{\hat{x}_2}$  sont bien définis et seront les mêmes sur chacun des éléments finis de  $\Omega$ , ce qui facilite grandement la tâche. On pose donc par composition:

$$\partial_{x_1} u_0 = \partial_{\hat{x}_1} u_0 \partial_{x_1} \hat{x}_1 + \partial_{\hat{x}_2} u_0 \partial_{x_1} \hat{x}_2$$

On a tout de suite  $\partial_x \hat{x} = A^{-1}$ , et on peut déduire du calcul précédent la formule plus générale

$$\partial_x u_0 = (A^{-1})^T \partial_{\hat{x}} u_0$$

Concentrons-nous maintenant sur le terme  $\partial_{\hat{x}_j} u_0$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . On a évidemment la décomposition  $u_0(\hat{x}) = \hat{\lambda}_i(\hat{x})u_0(x_i)$ , avec  $x_i \in \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ . Naturellement,  $\partial_{\hat{x}_j} u_0(\hat{x}) = u_0(x_i) \partial_{\hat{x}_j} \hat{\lambda}_i(\hat{x})$ . Dans le cas  $j = 1$ ,  $\partial_{\hat{x}_1} u_0 = -u_0(\hat{A}) + u_0(\hat{B})$  et pour  $j = 2$ ,  $\partial_{\hat{x}_2} u_0 = -u_0(\hat{A}) + u_0(\hat{C})$  au vu des fonctions de bases locales  $\hat{\lambda}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ ,  $\hat{\lambda}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1$  et  $\hat{\lambda}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_2$ . On remarque que les dérivées ne dépendent pas de  $(x_1, x_2)$  et donc qu'on a les mêmes valeurs de  $\partial_{\hat{x}_j} u_0(\hat{x})$  sur tout le triangle.



Ci-dessus un triangle de référence. Le sommet  $\hat{A}$  est de coordonnée  $(0,0)$ , le sommet  $\hat{B}$  de coordonnée  $(1,0)$  et le sommet  $\hat{C}$  est de coordonnée  $(0,1)$ .

Afin de se convaincre que la méthode n'est pas absurde, la figure 13 représente le gradient de  $u_0$ , compatible avec l'idée du gradient que l'on se fait avec la figure 8.

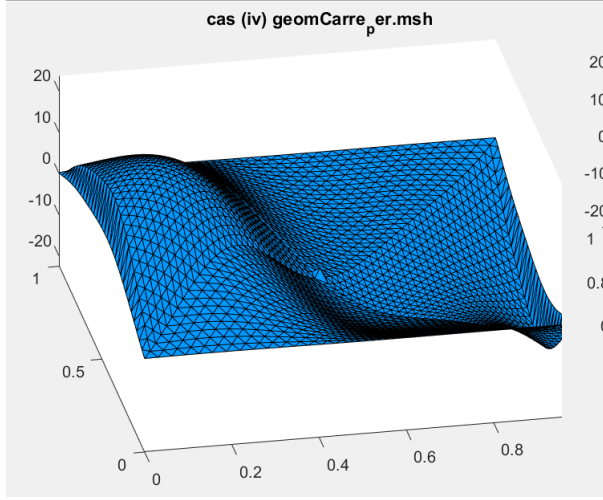


Figure 13: Gradient de  $u_0$  selon  $e_{x_1}$

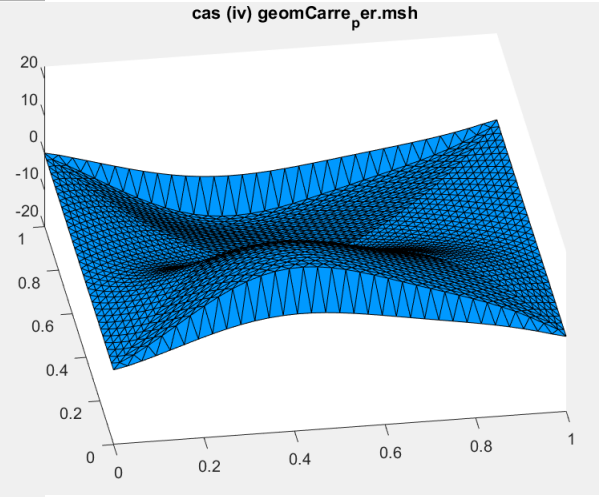


Figure 14: Gradient de  $u_0$  selon  $e_{x_2}$

Finalement, j'obtiens cette courbe d'erreur pour la norme  $H^1$  (figure 15), témoins d'une amélioration quant à l'approximation de la solution  $u_\epsilon$  en tant que fonction de  $H^1(\Omega)$ . Le ralentissement observé pour  $\epsilon$  petit s'explique une fois de plus par les limites du résultat lorsque la discrétisation devient visible pour la période du tenseur. On n'observe cependant bien une pente de -1 pour le début de courbe, ce qui est conforme à ce qu'on pouvait attendre.

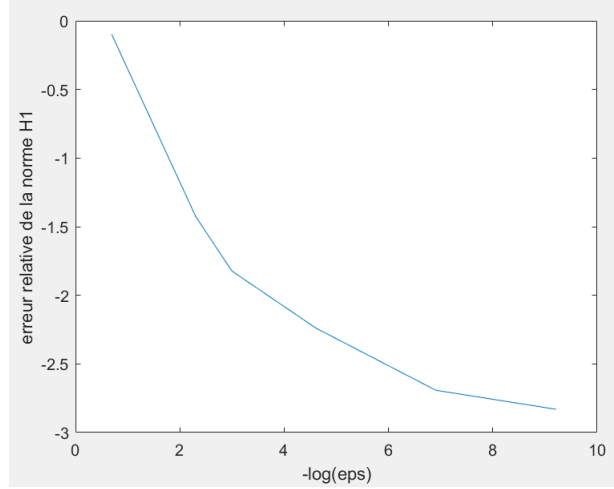


Figure 15: Norme  $H^1$  lorsque  $\epsilon$  varie

## 5 Conclusion

En conclusion,  $\epsilon$  doit être bien contrôlé selon le pas de maillage utilisé. Les résultats théoriques entre  $u_0$  et  $u_\epsilon$  ne prennent ici pas en compte la discrétisation des espaces vectoriels en jeux, ce qu'il faut prendre en compte dans l'interprétation des résultats de convergence, on ne peut s'attendre à une pente parfaite quasi-parfaite comme dans le TP1. La difficulté est donc de choisir  $\epsilon$  assez petit pour avoir une bonne approximation, mais quand même pas trop pour ne pas être du même ordre de grandeur que le pas du maillage.

Plusieurs méthodes enrichissantes ont pu être mise en place ici: la calcul de la matrice effective par le biais des correcteurs, qui a très bien fonctionné, ou encore la prise en compte des contraintes d'espace via l'intervention d'un paramètre  $\eta$ . Un test intéressant aurait pu être un tenseur  $A$  non diagonale et non homogène, afin de traiter le cas le plus général possible. Cependant, si le tenseur est symétrique, étant donné qu'il est défini positif sur tous le domaine, il aurait toujours été alors possible de se ramener au cas diagonale d'après la théorie spectrale.

En ce qui concerne l'approximation  $H^1$ , la théorie a été établie ainsi que l'implémentation associé. Il y a bien une amélioration de l'approximation de la solution au sens de la norme  $H^1$ .

En résumé, la solution se calcule alors de cette manière :

- On fixe un paramère  $\epsilon$  et  $\eta$  selon le pas de maillage choisi au préalable.
- On calcule les deux correcteurs associés au problème et on en déduit la matrice effective.
- On résout le problème homogénéisé.
- On résout le problème de diffusion tels que décrit au début du TP.
- On calcule les dérivées partielles de  $u_0$  en chacun des triangles.
- On compare les résultats en terme de norme  $L^2$  et  $H^1$  grâce aux matrices de raideur et de masse.