

---

# Rapport de projet d'AMS X01

---

---

## Encadrants :

-François ALOUGE

-Sonia FLISS



# Introduction à l'homogénéisation périodique

Hugo Negrel

Mars 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Problème elliptique avec les conditions de Neumann</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Problème elliptique avec les conditions de Dirichlet</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Problème elliptique avec les conditions périodiques</b>	<b>6</b>

# 1 Introduction

Ce rapport met en lumière une application de la méthode des éléments finis sur le cas particulier des problèmes elliptiques. La première partie concerne l'étude d'une équation aux dérivées partielles dans un régime stationnaire avec des conditions de Neumann aux bords. La seconde partie sera très similaire, à l'exception des conditions de bords qui seront de Dirichlet homogène. Enfin, on adaptera la technique mise-en-oeuvre pour traiter le cas d'une solution périodique dans un réseau de taille  $[0, L]^2$

## 2 Problème elliptique avec les conditions de Neumann

En multipliant par une fonction test  $v \in H^1(\Omega)$  et en utilisant la formule de Green (on suppose les conditions de régularités vérifiées, en particulier  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  et  $\forall(i, j), A_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ , le terme de bord s'annulant par la condition de Neumann), on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \vec{\nabla} v \cdot A(x, y) \cdot \vec{\nabla} u \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

On pose donc  $a : (u, v) \mapsto \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \nabla v A(x, y) \nabla u \, dx$  et  $l : v \mapsto \int_{\Omega} f v \, dx$ . La continuité de  $l$  dans  $H^1(\Omega)$  est évidente, tout comme celle de  $a$  étant donné la majoration du tenseur  $A : \forall(x, y) \in \Omega \quad \forall(i, j) \quad |A_{i,j}| \leq C$ . La coercivité de  $a$  dans  $H^1(\Omega)$  est aussi immédiate étant donné la propriété de positivité de  $A : \forall u \in H^1(\Omega), \quad a(u, u) \geq C' \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad C' = \min(1, c) \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad c$  étant la constante de coercivité de  $A$ . D'après le théorème de Lax-Milgram, on en déduit l'existence et l'unicité de  $u \in H^1(\Omega)$ , solution du problème variationnelle. Le problème est donc bien posé.

Pour la résolution informatique, on discrétise les espaces par une méthode conforme, c'est à dire qu'on prend  $V_h \in H^1(\Omega)$  et tels que  $\dim(V_h) = N \leq \infty$ . On construit donc une approximation du problème variationnelle, et en décomposant la solution  $u_h$  dans la base de  $V_h$ , i.e  $u_h = \sum_{i=1}^N u_h(M_I) w_I$ , où  $M_I$  sont les noeuds du maillages et  $w_I$  les polynômes de Lagrange de degré 1 tels que  $w_I(M_J) = \delta_{I,J}$ . En notant

$$\mathbf{M}_{I,J} = \int_{\Omega} w_I w_J \, dx,$$

et

$$\mathbf{K}_{I,J} = \int_{\Omega} \nabla w_I \nabla w_J \, dx,$$

on a

$$(\mathbf{K} + \mathbf{M}) \vec{U} = \vec{L}.$$

On trouve que les intégrales peuvent être calculés exactement dans le cas d'éléments finis de Lagrange d'ordre . Un rapide calcul donne :

$$(1) \quad \int_{T_I} w_I w_J \, dx = \begin{cases} |D|/24 & \text{si } I = J, \\ |D|/12 & \text{si } I \neq J, \end{cases}$$

et

$$\int_{T_I} \nabla w_I \nabla w_J \, dx = \frac{(y_{(I+1) \bmod 3, (I+2) \bmod 3} y_{(J+1) \bmod 3, (J+2) \bmod 3} - x_{(I+1) \bmod 3, (I+2) \bmod 3} x_{(J+1) \bmod 3, (J+2) \bmod 3})}{|2D|}.$$

On a  $\vec{L}_I = \int_{\Omega} f w_I(x) \, dx$ . En remplaçant  $f$  par  $\pi_h f = \sum_{i=1}^N f(M_I) w_I$ , on reconnaît la matrice de masse.  $\vec{L} \simeq \mathbf{M} \vec{F}_h$ ,

où  $\vec{F}_h \in \mathbf{R}^N$  est le vecteur colonne contenant la valeur de  $f$  sur les noeuds  $M_I$ .

Les figures 1 et 2 affichent les erreurs relatives en fonction du pas, en échelle logarithmique. Je rappelle que l'on choisit ici  $A = 1$  et  $u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$ .

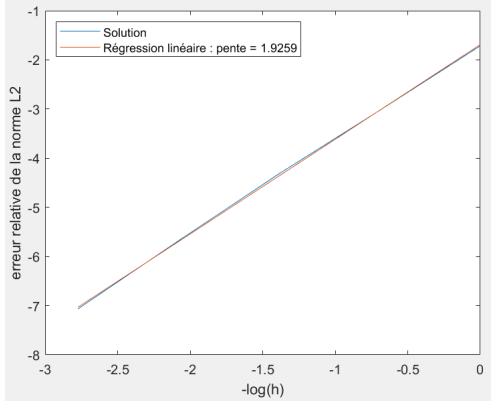


Figure 1:  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  en fonction de  $h$ .

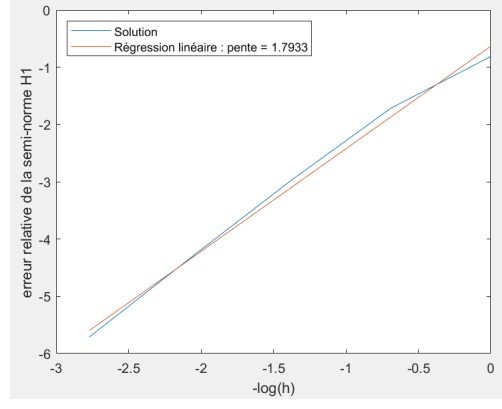


Figure 2:  $|u - u_h|_{H_0^1(\Omega)}$  en fonction de  $h$ .

Un rapide calcul donne par ailleurs  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  et  $|u|_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\pi$ . On trouve un pas d'environ 2.25 pour la norme  $L^2(\Omega)$  et un pas de 1.8 pour la semi norme  $|\cdot|_1$ . Cela reste cohérent avec la théorie car la vitesse de convergence devait être en  $h^2$  pour la norme  $L^2(\omega)$  et en  $h$  pour la semi-norme **au minimum**. La pente est donc parfaitement autorisé à prendre ces valeurs.

Dans le cas où  $A$  dépend de  $x$  et  $y$  (mais reste un scalaire), les erreurs trouvés sont sur les figures 3 et 4.

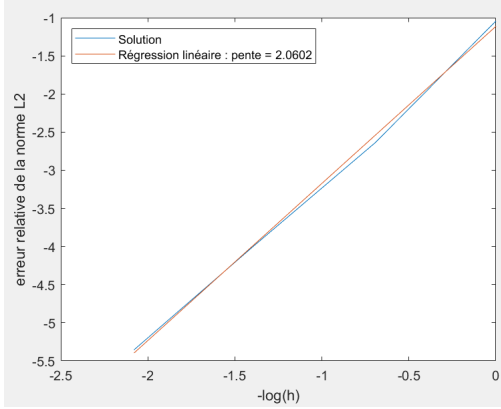


Figure 3:  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  avec  $A$  non constant

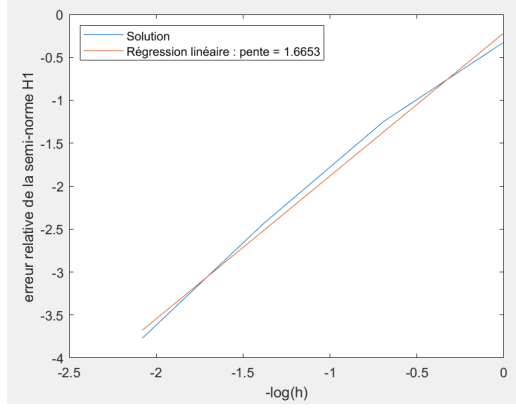


Figure 4:  $|u - u_h|_{H_0^1(\Omega)}$  avec  $A$  non constant

De la même manière, on trouve un pas de 2.0602 pour la norme  $L^2(\Omega)$  et un pas de 1.6653 pour la semi-norme  $H^1(\Omega)$ . La présence du tenseur  $\mathbf{A}$  ne dérange que de manière légère la vitesse de convergence car ce dernier est uniformément borné sur le domaine.

Je représente la solution figure 5 et 6 pour le terme source  $f(x, y) = \cos(\cos(x))\sin(\sin(y))$ . Je remarque que la solution reste quasiment strictement identique, c'est pourquoi j'ai décidé d'en afficher que 2 : lorsque  $A = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 2$  et  $A = \sin(32\pi x)\sin(32\pi y) + 2$ . La figure aurait du présenter de légères oscillations autour de la solution plus 'lente' que propose la figure 5. Mon choix de représentation de solution ne mets pas cela en avant.

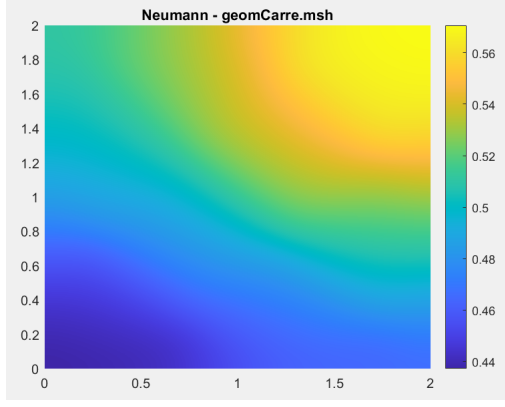


Figure 5: Solution dans le cas  $f = 1$ .

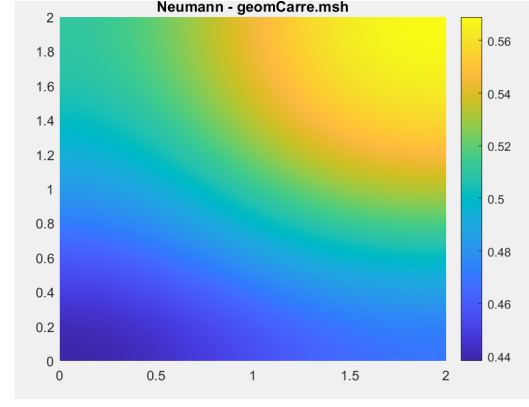


Figure 6: Solution dans le cas  $f = 16$ .

### 3 Problème elliptique avec les conditions de Dirichlet

La condition devient naturelle car elle apparaît dans l'espace fonctionnel dans lequel on va chercher la solution :  $H_0^1(\Omega)$ . On munit par ailleurs cet espace de la norme de  $H^1(\Omega)$ . Le terme de bord va donc apparaître lors de l'intégration par partie avec la formule de Green. Cependant, l'espace des fonctions tests étant le même que celui où on va chercher la solution, le terme de bord va s'annuler quand même :  $v|_{\partial\Omega} = 0$ . La formule variationnelle est donc strictement identique à celle de la Q1), on change juste  $H^1(\Omega)$  par  $H_0^1(\Omega)$ .

La matrice de masse et raideur est la même que précédemment, seulement, elle est plus petite car ne contient que les sommets se situant uniquement sur les noeuds intérieurs. Si  $N_0$  est le nombre de noeud intérieur, on prend la somme dans le cas Neumann se fait uniquement jusqu'à  $N_0$  et non  $N$ .

J'ai construit la matrice  $\mathbf{P}$  de la manière suivante : Je crée une matrice sparse de taille  $N_0 \times N$ . Je parcours les noeuds, et lorsque je rencontre le  $i$ ème noeud interne numéroté  $x$ , je mets un 1 à la ligne  $i$  et à la colonne  $x$ .

J'ai choisi de prendre le tenseur  $A(x, y) = \sin(2\pi x) + 2$  et  $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y)$ . On vérifie qu'on a naturellement  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Les figures 7 et 8 présentent les erreurs trouvées dans ce cas, avec leurs régressions linéaires associés. On trouve respectivement un pas de 1.8772 pour la norme  $L^2$ , ce qui est en dessous de la limite autorisé. Les erreurs de calculs se sont peut-être accumulés ou le pas n'a pas été assez petits. En revanche, en ce qui concerne la semi-norme  $H^1(\Omega)$ , on trouve 1.7814, ce qui est bien meilleur que le pas unitaire minimum annoncé par la théorie pour les éléments  $P_1$  de Lagrange.

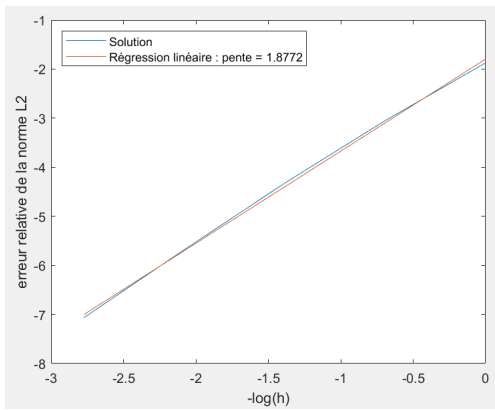


Figure 7:  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  en fonction de  $h$ .

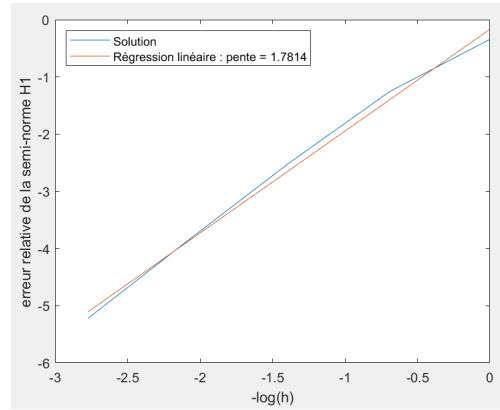


Figure 8:  $|u - u_h|_{H_0^1(\Omega)}$  en fonction de  $h$ .

## 4 Problème elliptique avec les conditions périodiques

Encore une fois, la formule variationnelle en elle-même n'évolue pas, seul l'espace fonctionnel va changer. Les conditions sur les gradients  $A\nabla u$  sur chacun des bords va permettre de faire naturellement disparaître le terme de bord :  $\int_{\partial\Omega} A\nabla u \cdot \vec{n} \, d\Gamma$ , où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire sortant normale au bord. Les conditions de bord sur  $u$  vont être pris en compte dans l'espace fonctionnel :  $H_{\#}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u \text{ est } \Omega\text{-périodique}\}$ . Cet espace est bien un espace de Hilbert, et on le munit de la norme de  $H^1(\Omega)$ . le théorème de Lax-Milgram nous affirme alors de l'existence et unicité de d'une solution.

Pour créer la matrice  $\mathbf{P}$ , la technique est cette fois un peu plus compliquée. On l'a crée sparse de taille  $N_b \times N$ , où  $N_b = 2N_{bord} + N_0 + 1$  où  $N_{bord}$  représente le nombre de noeuds sur **une** des faces, tandis qu'on rajoute 1 pour prendre en compte les coins. Pour les noeuds intérieurs, la technique est identique à celle pour les conditions de Dirichlet. Pour les noeuds de bord, on parcourt les bords 1 et 2. Si on est au ième sommet  $x$  situé sur le bord 1, on fait correspondre un noeud  $y$  de la face 3. On rajoute alors un 1 dans la matrice sparse à la ligne  $i$  et aux colonnes  $x$  et  $y$ . On fait bien sûr de même pour les bords 2 et 4. Enfin, on n'oublie pas les coins : on met quatre 1 dans la même ligne. Le résultat est affiché sur la figure 9 pour  $A(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + 2$  et  $u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$ . Il saute aux yeux que le résultat est bien cohérent, la période selon  $y$  étant deux fois plus courtes que sur l'axe  $x$ . La périodicité est aussi évidente.

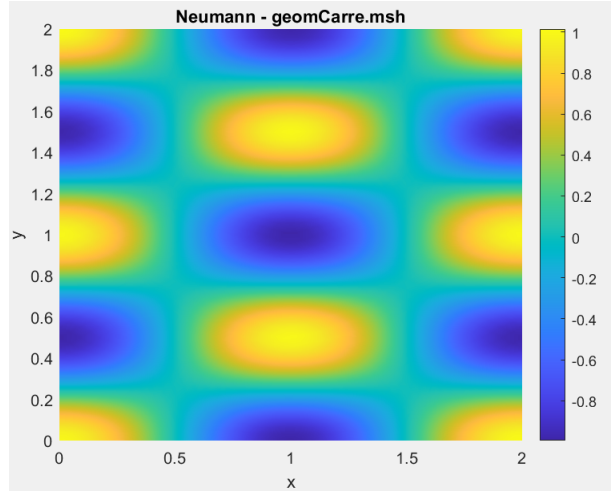


Figure 9: Solution dans le cas périodique.

En figure 10 et 11 se trouve le tracé des erreurs. Encore une fois, on observe des pas légèrement meilleurs que ce qui était prévisible par la théorie, en particulier en ce qui concerne la semi-norme de  $H^1$ .

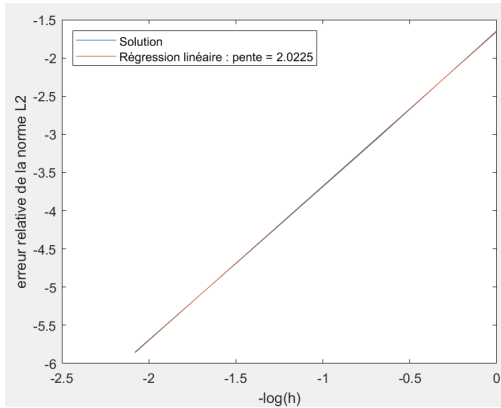


Figure 10:  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  en fonction de  $h$ .

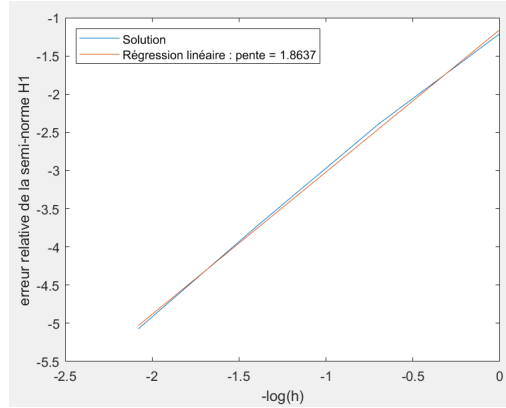


Figure 11:  $|u - u_h|_{H_0^1(\Omega)}$  en fonction de  $h$ .

Les techniques mises-en-oeuvre pour prendre en compte les conditions aux limites naturelles se sont révélés très

efficace, avec des erreurs relatives évoluant conformément à la théorie des éléments finis. Un seul échec a été le manque de différence entre les solutions calculés pour les différentes fréquences du tenseur  $A$ .