



# Report

## Analyse et approximation par elements finis d'EDP.

Authors: Hugo Negrel  
Thomas Levasseur

Promotion : 2023

# Contents

<b>1</b>	<b>Exercice 1</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Exercice 2</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Exercice 3</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Exercice 4</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Bonus</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>

# 1 Exercice 1

Cet exercice traite de la résolution du problème de Poisson par une méthode des éléments finis non conforme. On suppose  $f \in L^2(\Omega)$ .

Plus précisément, il s'agit de :

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

On peut montrer l'équivalence de (1) avec la formulation variationnelle suivante :

Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2)$$

Dans cette méthode non conforme, nous discrétisons l'espace  $H_0^1(\Omega)$  par des espaces vectoriels non internes à ce dernier. On remplace donc  $H_0^1(\Omega)$  par  $V_{h1}^{nc} = \{v_h \in \mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h); \langle [v_h], 1 \rangle = 0, \forall F \in \mathcal{F}_h\}$ .

Le problème que nous allons tenté de résoudre est donc en résumé : Trouver  $u \in V_{h1}^{nc}$  tel que :

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx, \quad \forall v_h \in V_{h1}^{nc}. \quad (3)$$

Q1)  $V_{h1}^{nc}$  étant naturellement de dimension fini, on y introduit une base de polynôme de Lagrange de degré 1 :  $\{\psi^F, F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}\}$ . La formulation variationnelle nous fournit donc  $\dim(V_{h1}^{nc})$  équations, c'est à dire :

$$(\nabla u_h, \nabla \psi^F) = (f, \psi^F) \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}.$$

En décomposant  $u_h$  sur cette base, on a  $u_h = \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}} \frac{(u_h, 1)_F}{|F|} \psi^F$ .

L'équation (3) est alors équivalente à

$$\mathbf{K}_{FF'}^{nc} U_h = B,$$

où  $U_h = \left( \frac{(u_h, 1)_{F_1}}{|F_1|}, \dots, \frac{(u_h, 1)_{F_N}}{|F_N|} \right)$ ,  $B = \left( \int_{\Omega} f \psi^{F_1} \, dx, \dots, \int_{\Omega} f \psi^{F_N} \, dx \right)$  et  $\mathbf{K}_{FF'}^{nc} = (\nabla \psi^F, \nabla \psi^{F'})$ , avec  $N = |\mathcal{F}_h^{\text{int}}|$  et  $F_i \in \mathcal{F}_h^{\text{int}} \forall i \in \llbracket 1, \dots, N \rrbracket$ .

Au vu de la propriété donnée par l'énoncé,  $\nabla \psi^F|_K = \frac{|F|}{|K|} (\mathbf{n}_K)|_F$ , on peut calculer  $\mathbf{K}_{FF'}^{nc}$  exactement.

En effet,  $(\nabla \psi^F, \nabla \psi^{F'}) = \sum_{K \in \mathcal{T}} (\nabla \psi^F, \nabla \psi^{F'})_K$ . Or, si  $F \neq F'$ , étant donné que la fonction lagrangienne  $\psi^F$  n'est non nulle que sur les deux mailles adjacentes par rapport  $F$ , il est clair que seul un terme est gardé sur cette somme. Deux cas se distinguent : soit il existe une et une seule maille  $K$  ayant  $F$  et  $F'$  comme face, soit il y en a pas et alors évidemment  $\mathbf{K}_{FF'}^{nc} = 0$ .

Dans le premier cas, sur cette maille, on a :

$$(\nabla \psi^F, \nabla \psi^{F'}) = \int_{\mathbf{K}} \nabla \psi^F|_K \cdot \nabla \psi^{F'}|_K \, dx = \int_{\mathbf{K}} \frac{|F||F'|}{|K|^2} \mathbf{n}_K|_F \cdot \mathbf{n}_K|_{F'} \, dx = \frac{|F||F'|}{|K|} \mathbf{n}_K|_F \cdot \mathbf{n}_K|_{F'}$$

Maintenant si  $F = F'$ , deux mailles  $K_1$  et  $K_2$  adjacentes à la face  $F$  existent. La somme va donc comporter deux termes :  $(\nabla \psi^F, \nabla \psi^F) = (\nabla \psi^F, \nabla \psi^F)_{K_1} + (\nabla \psi^F, \nabla \psi^F)_{K_2} = \int_{\mathbf{K}_1} \frac{|F|^2}{|K_1|} \mathbf{n}_K|_F^2 \, dx + \int_{\mathbf{K}_2} \frac{|F||F'|}{|K_2|} \mathbf{n}_K|_F^2 \, dx = |F|^2 \left( \frac{1}{|K_1|} + \frac{1}{|K_2|} \right)$

En résumé, on a alors :

$$\mathcal{K}_{FF'}^{nc} \simeq \begin{cases} \frac{|F||F'|}{|K|} \mathbf{n}_K|_F \cdot \mathbf{n}_K|_{F'} & \text{si } F \neq F' \\ |F|^2 \left( \frac{1}{|K_1|} + \frac{1}{|K_2|} \right) & \text{si } F = F' \end{cases} \quad (4)$$

et en ce qui concerne  $B_F$ , on a

$$B_F = \frac{f(x_F)}{3} (|K_1| + |K_2|)$$

où  $|K_1|$  et  $|K_2|$  sont les mesures des triangles partageant la face  $F$ .

Q4) Il est très rapide de calculer que  $\Delta u = -2\pi^2 u$ . Il est donc clair qu'il faut prendre  $f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ . Il est de plus évident de constater que sur le bord du pavé  $[0, 1] \times [0, 1]$ ,  $u = 0$ . Etant donné que  $f = 2\pi^2 u$ , il s'agit

en réalité d'un problème aux valeurs propres à l'opérateur laplacien. Fort heureusement, les espaces propres sont dégénérées, il n'y a donc qu'une seule solution non nulle, celle que nous allons approcher.

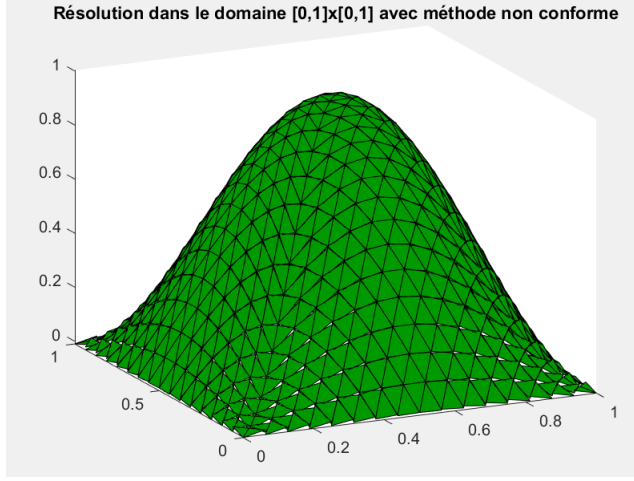


Figure 1: Solution  $u_h$  pour le cas  $N=1$ .

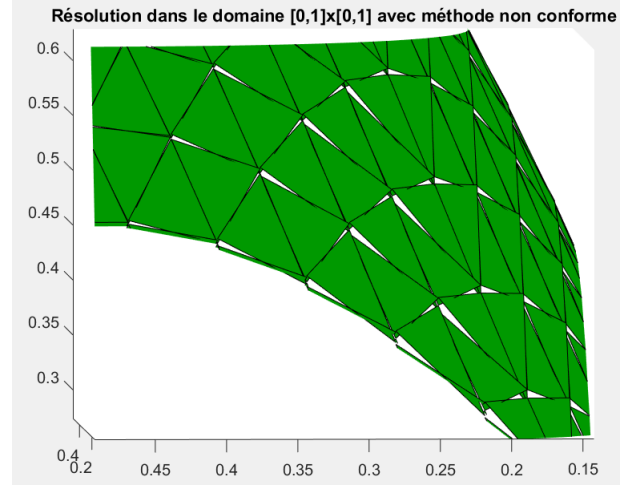


Figure 2: Zoom sur la solution pour le cas  $N=1$ .

En particulier, si nous zoomons sur les faces, nous pouvons constater qu'en effet, il n'a pas continuité entre les faces, si ce n'est qu'en leur centre.

Q5) Etant donné la définition de la base lagrangienne utilisé, il est clair que  $|V_{h1}^{nc}| = |\mathbf{F}_h^{int}|$ . En effet, un polynôme d'interpolation est défini sur chacune des faces intérieures, et une solution de  $V_{h1}^{nc}$  est combinaison linéaire de ces polynômes. D'où le résultat. Grâce aux formules fournies par l'énoncé, on peut estimer

$$\|\nabla(u - u_h)\|^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{int}} \|\nabla(u - u_h)\|_K^2,$$

de par le gradient brisé, avec l'erreur par maille :

$$\|\nabla(u - u_h)\|_K^2 = \frac{|K|}{3} \sum_{F \in \mathcal{F}_K} \nabla(u - u_h)^2(x_F),$$

et comme  $\nabla\psi^F|_K$  est indépendant de  $x$ , on en déduit que

$$\nabla u_h|_K = \sum_{F \in \mathcal{F}_K} U_h^F \frac{|F|}{|K|} \mathbf{n}_K|_F = U_h^{F_1} \frac{|F_1|}{|K|} \mathbf{n}_K|_{F_1} + U_h^{F_2} \frac{|F_2|}{|K|} \mathbf{n}_K|_{F_2} + U_h^{F_3} \frac{|F_3|}{|K|} \mathbf{n}_K|_{F_3},$$

tandis que

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ \pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{pmatrix}.$$

L'implémentation de l'erreur ne pose pas de soucis particulier, sauf peut-être lorsqu'il faut trouver la direction de la normale sortante. Je propose une astuce dans le programme pour la trouver.

Finalement, je trace l'erreur en fonction de  $|V_{h1}|$ :

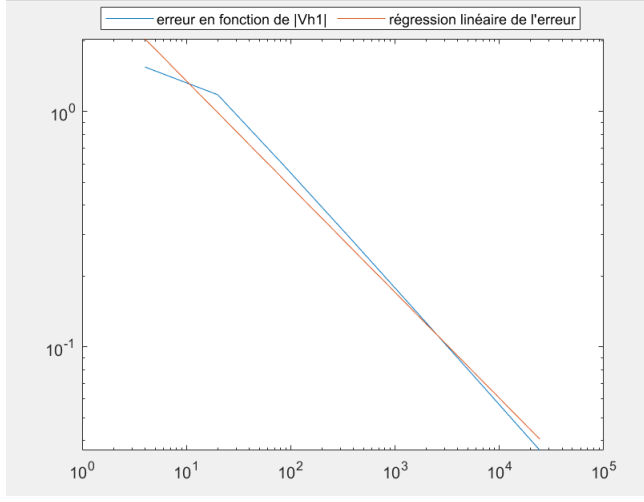


Figure 3: Erreur en fonction de la dimension de l'espace pour le cas  $N^{\circ}1$ .

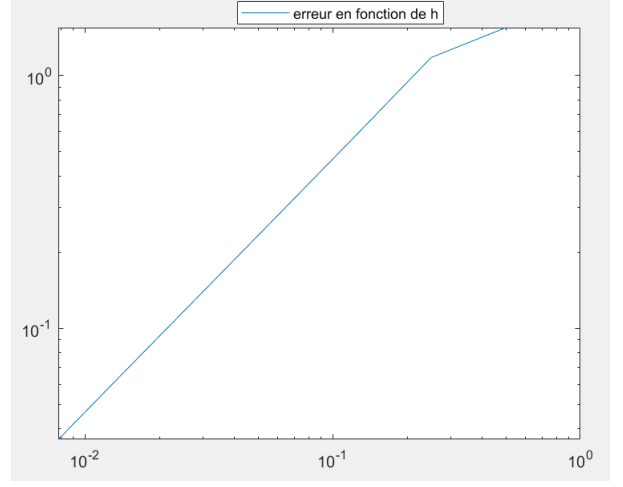


Figure 4: Erreur en fonction de h dans le cas  $N^{\circ}1$ .

De cette manière, avec la régression linéaire, on trouve  $\alpha \simeq -1/2$  et  $\beta \simeq 1$

Q8-9) Le domaine est défini ici comme  $\Omega = [-1, -1] \times [1, 1] \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$  En coordonnée polaire, le laplacien

s'écrit :  $\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$  Calculons le pas à pas pour  $u = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2\theta}{3})$ :

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{3} u,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) = \frac{4}{9} \frac{\sin(\frac{2\theta}{3})}{r^{\frac{4}{3}}},$$

et on a directement

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{4}{9} \frac{\sin(\frac{2\theta}{3})}{r^{\frac{4}{3}}}.$$

Dans le domaine, on a bien  $\Delta u = 0$ . En revanche, on constate immédiatement que  $u \neq 0$  sur le bord du domaine. Le problème est alors le suivant :

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2\theta}{3}) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

On peut cependant se ramener au cas homogène modulo une certaine fonction. En effet, comme  $g \in C^\infty(\Omega)$ ,  $g \in H^{1/2}(\Omega)$ . Cela implique l'existence d'une fonction  $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$  tel que  $\tilde{g} = g$  sur  $\partial\Omega$ . Bien sûr, on vérifie immédiatement que  $\tilde{g} = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2\theta}{3})$ . On pose  $\tilde{u} = u - \tilde{g}$ , en multipliant par une fonction test  $v \in H_0^1(\Omega)$ , en intégrant et en appliquant la formule de Green, on obtient la formulation variationnelle :

Trouver  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \tilde{g} \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On utilise l'opérateur de projection  $I_{h1}^{nc}$  dans l'espace  $V_{h1}^{nc}$ . On implémentera donc la version discrétisée de  $\tilde{g}$  en introduisant les fonctions lagrangiennes sur les arêtes du bord, de telle manière que

$$\tilde{g}_h(x_{F_i}) = \begin{cases} \tilde{g}(x_{F_i}) & \text{si } F_i \notin \mathcal{F}_h^{int}, \\ 0 & \text{si } F_i \in \mathcal{F}_h^{int}. \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{K}U_h = -B_g G,$$

avec  $B_g \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}_h^{int}| \times |\mathcal{F}_h^{ext}|}$  tel que  $B_g(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = \int_{\Omega} \nabla \psi^{F_i}(x) \nabla \psi^{F_j}(x) \, dx$  et  $G \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}_h^{ext}|}$  tel que  $G(F_h^i) = \tilde{g}(x_{F_h^i})$  définies sur les arêtes. Il est immédiat de constater que la matrice  $B_g$  sera aussi creuse. On peut résumer

l'expression de la matrice  $B_g$  de cette manière-là

$$B_g(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = \begin{cases} \frac{|F_i||F_j|}{|K|} \mathbf{n}_K|_{F_i}, \mathbf{n}_K|_{F_j} & \text{si } \mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \in \mathcal{F}_K, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7)$$

On obtient la figure suivant :

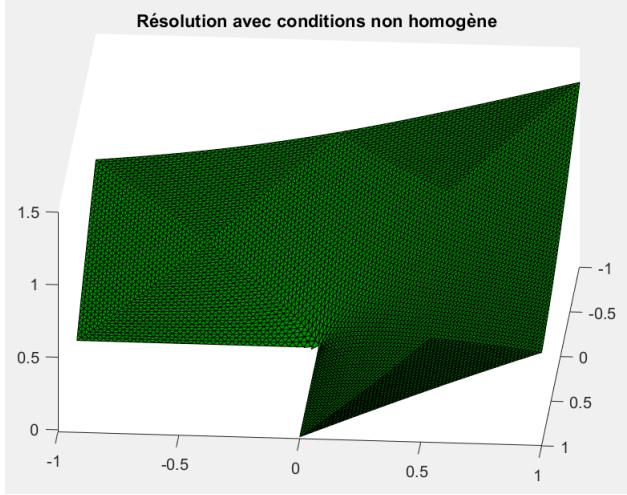


Figure 5: Solution dans l'espace non conforme pour le cas  $N^{\circ}2$ .

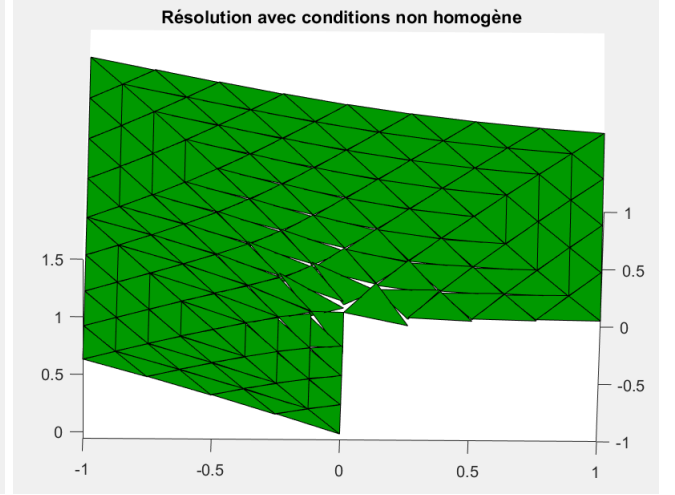


Figure 6: Zoom sur la solution pour le cas  $N^{\circ}2$ .

En mettant un maillage plus faible, on peut observer les discontinuités sur le coin rentrant. On peut donc supposer que c'est ici que les erreurs de calculs auront tendance à avoir lieu.

Q10) Pour ce qui est des erreurs, on trace de nouveau  $\|\nabla(u - u_h)\|$  en fonction de  $|V_{h1}^{nc}|$  et  $h$ . L'erreur se calcule exactement de la même manière qu'en Q5, à la différence près que le gradient devra bien être calculé dans les coordonnées cartésiennes et non polaires. Des précautions sont à prendre lors de l'évaluation de la fonction aux points.

Pour ce qui est de  $\|\nabla(u - u_h)\|$  en fonction de  $|V_{h1}^{nc}|$ , on obtient la figure suivant :

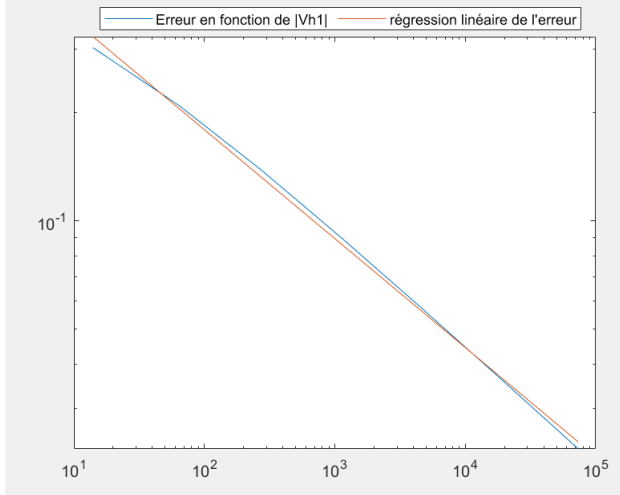


Figure 7: Erreur en fonction de  $|V_{h1}|$  dans le cas  $N^{\circ}2$ .

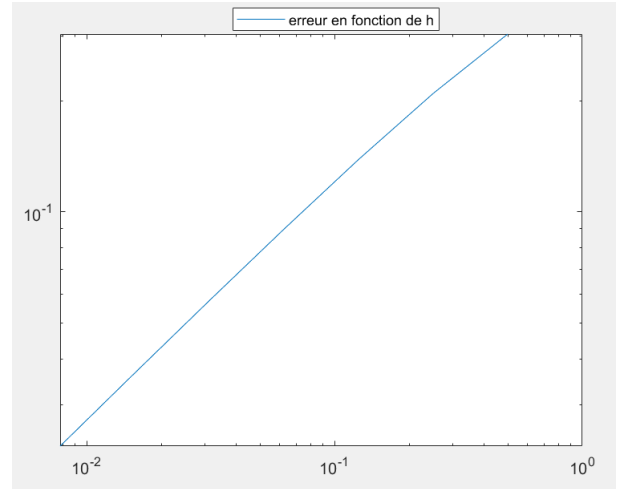


Figure 8: Erreur en fonction de  $h$  dans le cas  $N^{\circ}2$ .

La régression linéaire fournit cette fois :  $\alpha \simeq -0.3$  et  $\beta \simeq 1/2$ .

## 2 Exercice 2

Cet exercice est simple, il suffit d'appliquer la formule de reconstruction du potentiel, définie sur les sommets du maillage :

$$s_h(x) = \frac{1}{\mathcal{T}_x} \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{T}_x} u_h(x_{F_i}),$$

avec  $\mathcal{T}_x$  l'ensemble des faces ayant  $x$  comme sommet. Dans le programme, on se place donc sur chacun des sommets, et on trouve les faces ayant un sommet en commun. On y fait alors la moyenne. Ce procédé est simple mais marche particulièrement bien. Pour le cas 1, j'obtiens cette figure, pour 24 448 faces intérieures. Le cas 2 est obtenu pour 4544 faces intérieures.

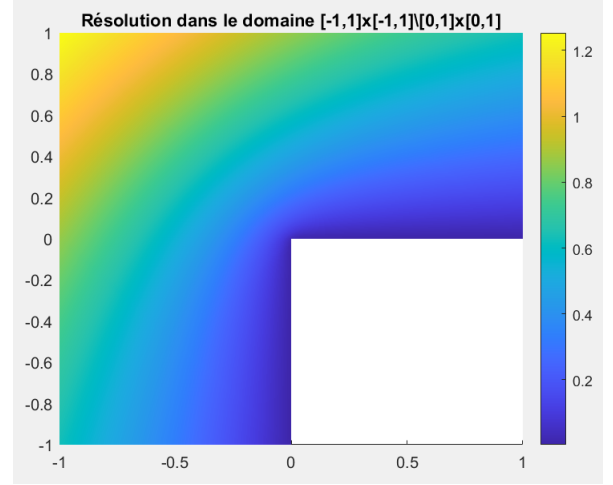
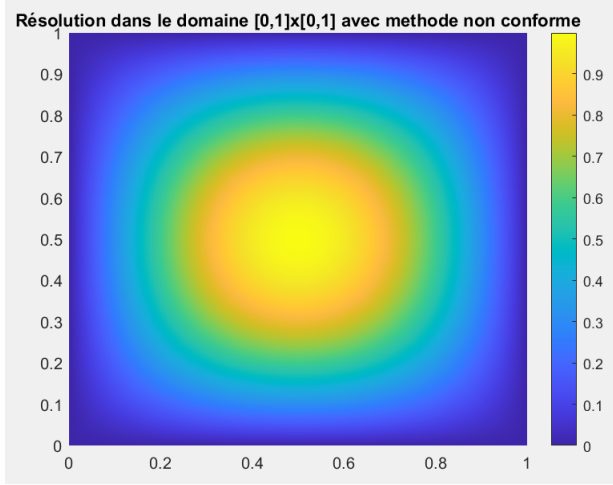


Figure 9: Reconstruction du potentiel dans le cas  $N^{\circ}1$ . Figure 10: Reconstruction du potentiel dans le cas  $N^{\circ}2$ .

## 3 Exercice 3

On cherche à mettre en oeuvre la procédure de reconstruction de flux équilibré  $\sigma_h$ .  $\sigma_h$  est donné par:

$$\sigma_h|_K(\mathbf{x}) := -\nabla u_h|_K + \mathbf{f}_h|_K,$$

où

$$\mathbf{f}_h|_K(\mathbf{x}) := \frac{f|_K}{d}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) \forall K \in \tau_h.$$

On remplace également  $f_k$  par la valeur moyenne de  $f$  sur  $K$ . La difficulté principale de cette procédure est l'implémentation du gradient et de  $\mathbf{f}_h|_K$  qui sont des fonctions dont la valeur en un point va surtout dépendre du triangle du maillage dans lequel se trouve ce point. Commençons par l'implémentation de la fonction  $\mathbf{f}_h|_K$ . La première étape consiste à stocker pour chaque triangle du maillage la valeur moyenne de  $f$  sur ce triangle. Pour cela, on construit un vecteur  $f_h$  de taille le nombre de triangles du maillage et on utilise pour calculer la valeur moyenne:

$$\frac{1}{|K|} \int_K f(x) \approx \frac{1}{3} \sum_{F \in \mathcal{F}_K} f(\mathbf{x}_F).$$

La seconde étape consiste ensuite à déterminer pour un point  $\mathbf{x}$  dans quel triangle du maillage se trouve le point, afin d'appliquer la bonne valeur de  $\mathbf{f}_h$ . Pour cela, on définit d'abord la fonction  $\text{InK}$  qui pour un point de coordonnées  $\mathbf{x}$  donné et un triangle  $i$  vérifie si le point appartient au triangle ou non. Muni de cette fonction, on implémente ensuite la fonction  $\text{trouveK}$  qui renvoie l'indice du triangle dans lequel se trouve le point. Une fois cette fonction implémentée, on peut appliquer à chaque point la bonne valeur de  $\mathbf{f}_h|_K(\mathbf{x})$  comme donné dans la définition dans la fonction  $\mathbf{f}_h$ .

Le calcul de  $-\nabla u_h|_K$  se fait en décomposant  $u_h$  sur la base  $\Psi^F$ :

$$u_h|_K = \sum_{F \in \mathcal{F}_K} U_h^F \Psi^F,$$

puis

$$\nabla u_h|_K = \sum_{F \in \mathcal{F}_K} U_h^F \nabla \Psi^F,$$

et finalement, en utilisant  $\nabla \Psi^F = \frac{|F|}{|K|} \mathbf{n}_K|_F$ , on obtient:

$$\nabla u_h|_K = \sum_{F \in \mathcal{F}_K} U_h^F \frac{|F|}{|K|} \mathbf{n}_K|_F.$$

Les  $U_h^F$  sont stockés dans la matrice  $UU_h$ . Pour calculer ce gradient en un point  $\mathbf{x}$ , on commence par trouver le triangle du maillage dans lequel se trouve le point, on récupère ensuite les coordonnées des trois sommets de ce triangle. Pour chaque couple de sommets définissant une face, on recherche grâce à la fonction *find\_index* l'indice  $j$  de la face correspondante afin d'aller rechercher dans  $UU_h$  la bonne valeur de  $U_h^F$ . On calcule ensuite grâce aux coordonnées des points les mesures  $|F|$ ,  $|K|$  et les vecteurs normaux sortant. Une fois tout cela calculé, il suffit d'appliquer la formule.

Une fois calculer  $\mathbf{f}_h|_K$  et  $\nabla u_h|_K$ , on peut calculer par une simple somme la fonction  $\sigma_h|_K$ .

On plot grâce à la Figure 3 les composantes selon  $x$  et selon  $y$  de  $-\nabla u_h$  et  $\sigma_h$  évaluées en les barycentres des triangles pour visualiser le gradient et leur flux:

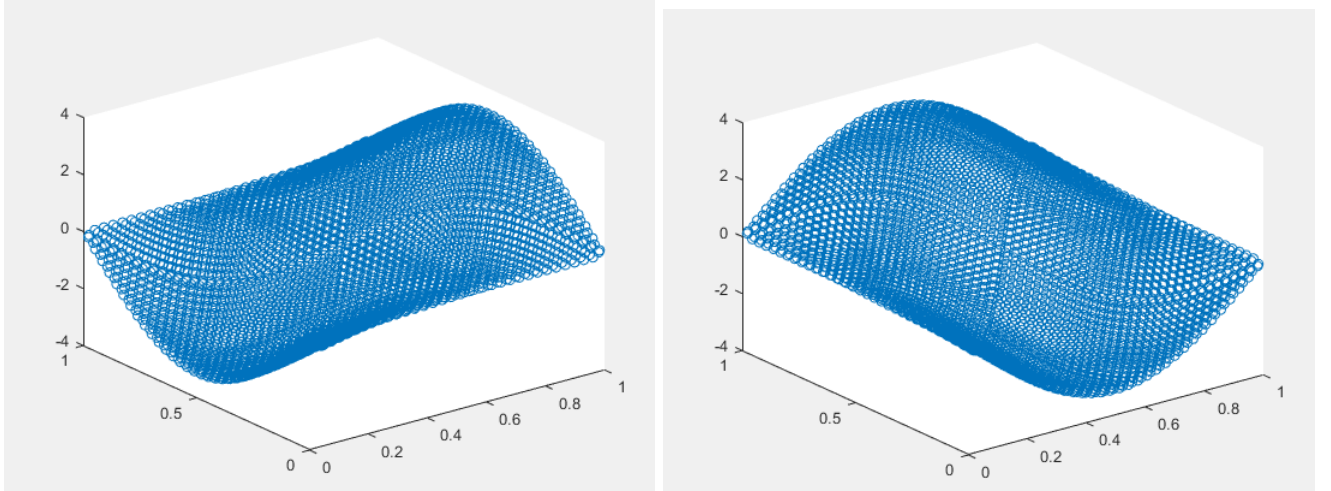


Figure 11: Composante selon  $x$  de  $-\nabla u_h$  (évaluée au barycentre de chaque maille).

Figure 12: Composante selon  $y$  de  $-\nabla u_h$  (évaluée au barycentre de chaque maille).

On obtient les mêmes courbes pour  $\sigma_h$  étant donné que  $\sigma_h + \nabla u_h = \mathbf{f}_h$  qui s'annule en les barycentres (On se rappellera que:  $\mathbf{f}_h|_K(\mathbf{x}) := \frac{f|_K}{d}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_K)$ ).

## 4 Exercice 4

On cherche dans cette section à calculer l'estimateur  $\eta(u_h)$  donné par l'équation:

$$\eta^2(u_h) = \sum_{K \in \tau_h} (\|\nabla u_h + \sigma_h\|_K^2 + \|\nabla(u_h - s_h)\|_K^2).$$

On commence par calculer le premier terme  $\|\nabla u_h + \sigma_h\|_K$ .



Il vient assez facilement que  $\|\nabla u_h + \sigma_h\|_K = \|\mathbf{f}_h\|$  puis :

$$\|\mathbf{f}_h\|_K^2 = \int_K \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{f}_h \, dx,$$

$$\|\mathbf{f}_h\|_K^2 = \int_K \frac{f_K^2}{d^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K)^2,$$

et finalement:

$$\|\mathbf{f}_h\|_K^2 \approx \frac{|K|}{3} \frac{f_K^2}{d^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_K} (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_K)^2.$$

En terme de structure de donnée, on construit un vecteur  $Eta\_k2$  de taille  $N_{Tri}$ .  $N_{Tri}$  est le nombre de triangle du maillage dans lequel on va stocker  $\|\mathbf{f}_h\|_K^2 \approx \frac{|K|}{3} \frac{f_K^2}{d^2} \sum_F (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_K)^2$  et un nombre  $\eta_k^2 = \sum_K \|\mathbf{f}_h\|_K^2$ . On a alors le premier terme de l'estimateur  $\eta$ . Il reste alors à calculer  $\sum_{K \in \tau_h} \|\nabla(u_h - s_h)\|_K^2$ . De la même manière que pour le calcul de l'erreur dans l'exercice 1, on montre que  $\|\nabla(u_h - s_h)\|_K^2 = \frac{|K|}{3} |(\nabla(u_h - s_h)(x_{F_1}) \frac{|F_1|}{|K|} \mathbf{n}_K|_{F_1} + \nabla(u_h - s_h)(x_{F_2}) \frac{|F_2|}{|K|} \mathbf{n}_K|_{F_2} + \nabla(u_h - s_h)(x_{F_3}) \frac{|F_3|}{|K|} \mathbf{n}_K|_{F_3})|^2$ . Je précise que pour estimer  $s_h$  sur le milieu des faces, j'ai fait une moyenne de ses valeurs sur les sommets adjacents de la face en question. La décomposition dans l'espace  $V_{h1}^{nc}$  est bien valable puisque  $u_h \in V_{h1}^{nc}$  et  $s_h \in V_{h1} \subset V_{h1}^{nc}$ . Voilà les graphes demandés:

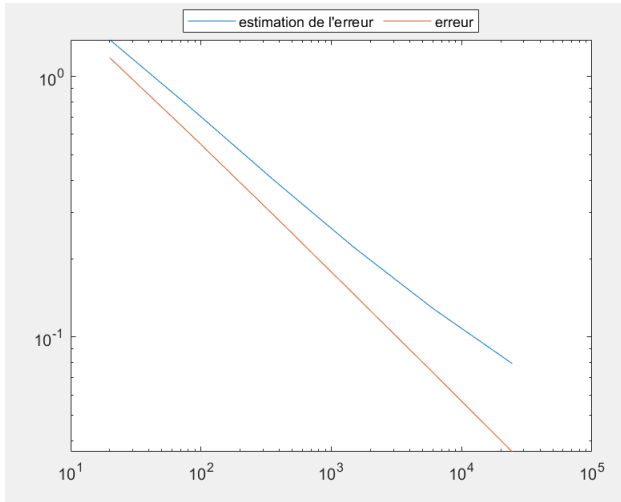


Figure 13: Comparaison de l'erreur et de l'estimateur selon  $|V_{h1}|$  dans le cas  $N^\circ 1$ .

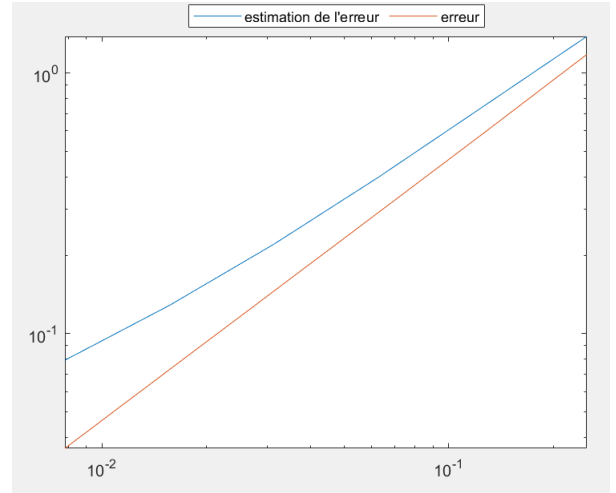


Figure 14: Comparaison de l'erreur et de l'estimateur selon  $h$  dans le cas  $N^\circ 1$ .

Et pour ce qui est du deuxième cas :

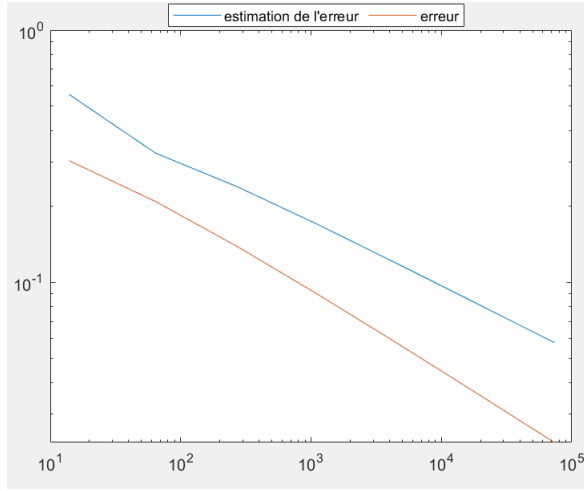


Figure 15: Comparaison de l'erreur et de l'estimateur selon  $|V_{h1}|$  dans le cas  $N^2$ .

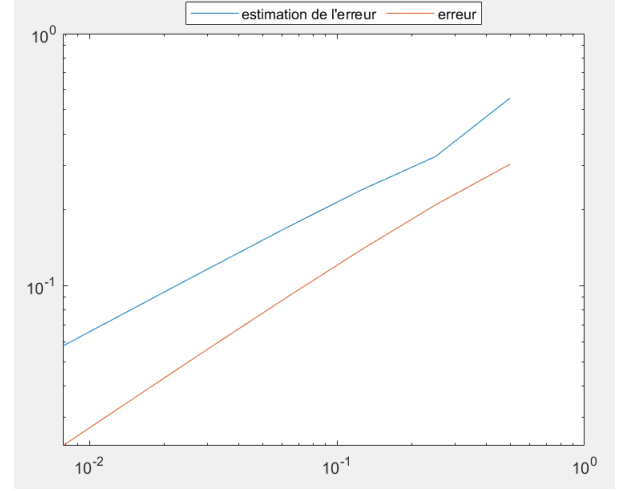


Figure 16: Comparaison de l'erreur et de l'estimateur selon  $h$  dans le cas  $N^2$ .

Enfin, pour ce qui est de l'indice d'efficacité, j'obtiens les graphes suivants:

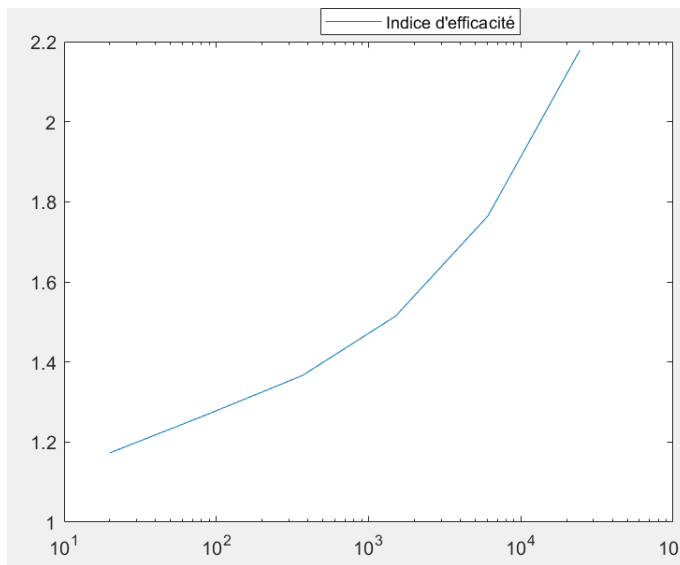


Figure 17: Indice d'efficacité dans le cas  $N^1$ .

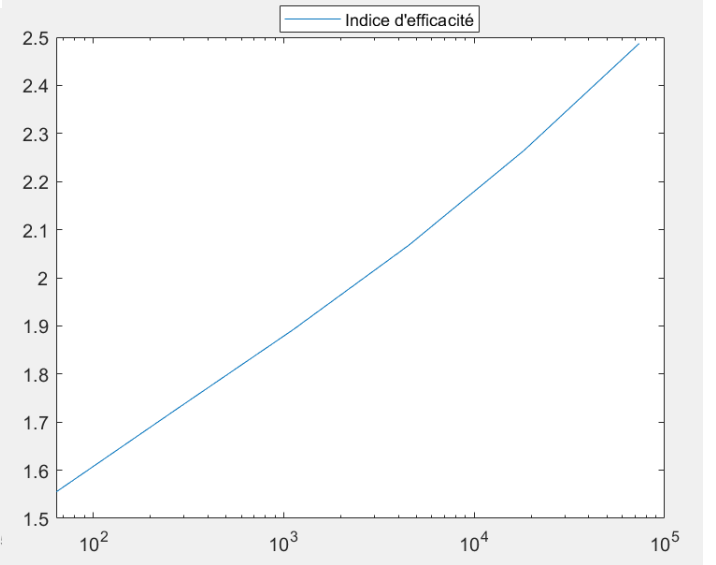


Figure 18: Indice d'efficacité dans le cas  $N^2$ .

Il est bizarre que l'indice d'efficacité augmente lorsque  $|V_{h1}|$  augmente, on aurait pu esperer l'inverse. Si on veut éviter cette aproximation, il faut construire les fonctions de bases locales, décomposer  $s_h$  dans cette base et ensuite regarder la valeur. On constate cependant que l'estimateur d'erreur et l'erreur ont globalement la même pente lorsqu'on les compare par rapport à  $|v_{h1}|$  et  $h$ , ce qui reste remarquable. D'après le cours, l'indice d'efficacité devrait rester constante, mais du fait que les droites ne sont pas forcément parallèles, ce dernier augmente.

**Cas  $N^1$**

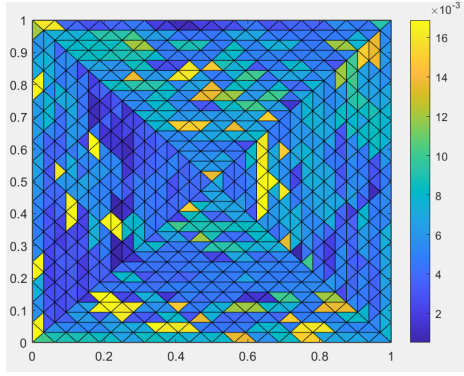


Figure 19: Calcul de l'estimateur d'erreur maille par maille.

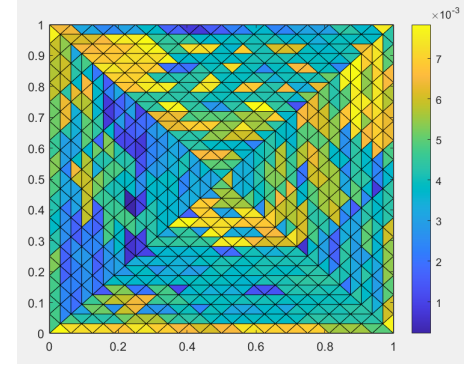


Figure 20: Calcul de l'erreur maille par maille.

**Cas N°2** Ces figures ne semblent pas me révéler ce à quoi je m'attendais. L'erreur dans le cas 2 ne se trouve pas

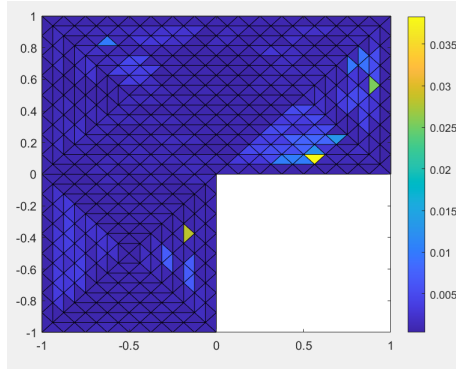


Figure 21: Calcul de l'estimateur d'erreur maille par maille.

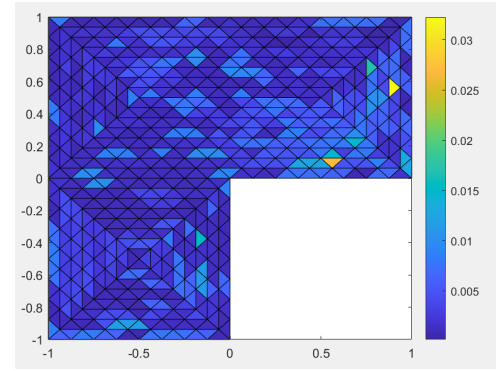


Figure 22: Calcul de l'erreur maille par maille.

dans le coin, ce qui est très étonnants. De même, dans le cas 1, l'erreur devrait se trouver majoritairement sur la 'singularité', c'est à dire aux coordonnées  $(1/2, 1/2)$ .

## 5 Bonus

Dans cette section, je vais démontrer le résultat donné au début de l'énoncé :  $\nabla\psi^F|_K = \frac{|F|}{|K|}\mathbf{n}_K^F$ . Pour cela, on peut facilement montrer que  $\nabla\psi^F$  est colinéaire à la normale sortante de la face  $F$  de la maille  $K$ . En effet,  $\psi^F$  est un polynôme de degré 1, et donc son gradient est uniforme dans la maille. Or, comme  $\psi^F(x_{F'}) = 0$  et  $\psi^F(x_{F''}) = 0$ , on en déduit que  $\nabla\psi^F \cdot \mathbf{n}_K|_F = 0$ , puisque précisément, le segment reliant les deux milieux de faces  $F'$  et  $F''$  sont colinéaires au segment de la face  $F$ . Donc  $\nabla\psi^F = C\mathbf{n}_K|_F$ . En ce qui concerne la norme, il suffit donc d'utiliser la formule usuelle de la pente. On sait que la fonction  $\psi^F$  vaut +1 sur la face  $F$  et -1 sur le sommet opposé. Cette croissance se fait sur la hauteur du triangle. Or, d'après la formule de l'aire d'un triangle, on sait que  $hauteur = \frac{2*aire}{base} = \frac{2|K|}{|F|}$ . Donc  $|\nabla\psi^F| = \frac{2}{\frac{2|K|}{|F|}} = \frac{|F|}{|K|}$ . Finalement,  $\nabla\psi^F = \frac{|F|}{|K|}\mathbf{n}_K|_F$ , comme annoncé.

## 6 Conclusion

Dans ce TP, nous avons appliqué au problème de Poisson la méthode des éléments finis non conformes. Dans l'exercice 1, nous avons trouvé une solution approchée  $u_h$  de  $u$ , puis comme nous connaissions la solution exacte  $u$ , nous avons pu faire une analyse de l'erreur  $\|\nabla(u - u_h)\|$  et ainsi mettre en évidence des relations du type  $\|\nabla(u - u_h)\| < Ch^\beta$  ou  $\|\nabla(u - u_h)\| < C|V_{h1}^{nc}|^\alpha$ . Dans l'exercice 2, on a mis en oeuvre la reconstruction du potentiel  $s_h$  afin de nous ramener dans l'espace interne. Dans l'exercice 3, nous avons calculer le gradient de  $u_h$  sur chaque maille et nous avons ainsi pu reconstruire le flux équilibré. Finalement, nous avons mené dans

l'exercice 4 une analyse à posteriori de l'erreur en calculant notamment l'estimateur  $\eta(u_h)$  et en traçant l'indice d'efficacité  $I_{eff}$ .