



Report

Resolution numerique de l'equation des ondes en regime temporel.

Authors: Hugo Negrel
Nathan Masse

Promotion : 2023

Contents

I	Exercice 1. Probleme stationnaire avec coefficients variables et conditions de Dirichlet	5
II	Exercice 2. Equation des ondes avec integration exacte de la matrice de masse	9
III	Exercice 3. Equation des ondes en utilisant la methode de condensation de masse	11
IV	Exercice 4. Complements	14
V	Conclusion	16

Introduction

La methode des elements finis est base sur la theorie des formulation variationelles. Cette derniere permet de donner la fois une approche rigoureuse pour etudier les questions relatives l'existence et l'unicite de la solution ainsi que d'ouvrir la voie vers leur resolution numerique proprement dite. La resolution de ces equations est d'une grande importance, car elles modelisent enormement de phenomenes physiques bien reelles.

Il s'agit dans ce projet d'etudier la propagation d'ondes dans un espace separe en deux sous-espaces ayant des proprietes physiques differentes, en l'occurrence leur elasticite, avec en plus un terme source.

Dans un premier temps, pour debuter la resolution, nous etudierons le systeme stationnaire en reponse a une sollicitation interne.

Nous nous servirons ensuite des algorithmes de resolution en stationnaire afin de resoudre, en discretisant le temps et en etablissant un schema stable sous certaines conditions, le systeme sur chaque intervalle de temps infinitesimale.

Enfin, nous ameliorerons les performances de l'algorithme en simplifiant les calculs par certaines approximations comme la condensation de masse, et nous demontrerons la condition CFL liant pas temporel Δt au pas spatial Δh .

Part I

Exercice 1. Probleme stationnaire avec coefficients variables et conditions de Dirichlet

Q1) Le probleme a resoudre est le suivant :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

La formule d'integration par partie de la divergence est :

$\forall \vec{u} \in (H^1(\Omega))^3, \forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{u})v \, dx = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} v \cdot \vec{u} \, dx + \int_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n} v \, dx$$

La condition de Dirichlet homogene nous apporte une information quand a l'espace de Sobolev auquel u appartient. Il s'agit d'une condition aux limites dites essentielles. Nous allons donc chercher $u \in H_0^1(\Omega)$. En multipliant la premiere equation de (1) par une fonction test v in $u \in H_0^1(\Omega)$ et en utilisant la formule de la divergence, on obtient la formule variationnelle suivante :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \sigma \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2)$$

Le terme de bord $\int_{\partial\Omega} \sigma \vec{u} \cdot \vec{n} v \, dx$ est nul car $u \in H_0^1(\Omega)$.

Q2) Appliquons le theoreme de Lax-Milgram :

On pose $l : v \mapsto \int_{\Omega} f v \, dx$

et $a : (u, v) \mapsto a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx$, avec par hypothese $\sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}$

$H_0^1(\Omega)$ est bien un espace de Hilbert comme sous-espace ferme de l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$. Il est ferme car $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ s.c. } \gamma_0 = 0\}$ est le noyau d'une application de continue sur $H^1(\Omega)$.

Les applications $l(\cdot)$ et $a(\cdot, \cdot)$ sont trivialement (bi-)lineaire. Par Cauchy-Schwarz :

$$|l(v)| \leq \|f\|_{H_1(\Omega)} \|v\|_{H_1(\Omega)}$$

De plus,

$$|a(u, v)| \leq \sigma_{\max} |u|_1 |v|_1 \leq \sigma_{\max} \|u\|_{H_1(\Omega)} \|v\|_{H_1(\Omega)}$$

Par Cauchy-Schwarz. Avec $|u|_1^2 = \int_{\Omega} |\vec{\nabla} u|^2 \, dx$ la semi-norme. On a trivialement $|u|_1 \leq \|u\|_{H_1(\Omega)}$, etant donne que $|u|_1^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H_1(\Omega)}^2$ Cela nous assure la continuite de $a(\cdot, \cdot)$ et $l(\cdot)$ dans $H^1(\Omega)$.

En ce qui concerne la coercivite, nous allons utiliser une celebre inegalite. L'inegalite de Poincare stipule que

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} v^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} |\vec{\nabla} v|^2 \, dx$$

avec Ω un ouvert borne.

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sigma |\vec{\nabla} u|^2 \, dx \geq C \int_{\Omega} \sigma u^2 \, dx \geq C \sigma_{\min} \int_{\Omega} u^2 \, dx = C \sigma_{\min} \|u\|_{H_1(\Omega)}^2$$

Les hypotheses du Theoreme de Lax-Milgram sont donc toutes verifiees. On en deduit alors que le probleme est bien pose.

Q3) On a a present, etant donne que $u_h \in V_h^0 = \operatorname{Vect}(w_1, \dots, w_{N_0})$:

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_0} u_h(M_i) w_i(x, y)$$

Avec les w_i , les fonctions de bases, c'est a dire tels que $w_i(M_j) = \delta_{ij}$ sur chacun des sommets des triangles interieur a Ω (ou encore appele degres de libertes des elements finis de Lagrange). En remplaant dans (2), cela donne (FV_h):

$$\sum_{i=1}^{N_0} u_h(M_i) \int_{\Omega} \sigma \vec{\nabla} w_i \cdot \vec{\nabla} v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h^0(\Omega) \quad (3)$$

ou encore plus simplement :

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^0(\Omega)$$

Q4) Cette equation est verifie $\forall v_h \in V_h^0(\Omega)$ si et seulement si elle est verifie sur une base de $V_h(\Omega)$. On obtient alors N_0 equations : $\forall j \in \{1, \dots, N_0\}$

$$\sum_{i=1}^{N_0} u_h(M_i) \int_{\Omega} \sigma \vec{\nabla} w_i \cdot \vec{\nabla} w_j \, dx = \int_{\Omega} f w_j \, dx$$

En introduisant

$$\vec{U}^0 = \begin{pmatrix} u_h(M_1) \\ u_h(M_2) \\ \vdots \\ u_h(M_i) \\ \vdots \\ u_h(M_{N_0}) \end{pmatrix}$$

puis,

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N_0\} \quad \mathbf{K}_{i,j}^0 = \int_{\Omega} \sigma \vec{\nabla} w_i \cdot \vec{\nabla} w_j \, dx$$

ainsi que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N_0\} \quad \mathbf{M}_{i,j}^0 = \int_{\Omega} w_i w_j \, dx$$

et finalement $\mathbf{A}^0 = \mathbf{M}^0 + \mathbf{K}^0$. La matrice \mathbf{A}^0 est symetrique definie positive, car $a(.,.)$ est coercive. Elle est en consequence inversible. Il s'agit de plus d'une matrice creuse, c'est a dire "contenant beaucoup" de zeros. On introduit aussi $(\vec{L}^0)_i = \int_{\Omega} f w_i \, dx$, nous permettant finalement de mettre FV_h sous la forme

$$\mathbf{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0 \quad (4)$$

Q5) On se place maintenant dans \mathbf{R}^N . Dans la technique de pseudo-elimination, nous preferons ranger les matrices d'une faon qui nous arrange, sans bien sr changer la solution pour autant. Nous allons ajouter les sommets presents sur Ω , mais en prenant leur fonction de base comme etant nulle. En utilisant les indices \mathcal{I} pour les sommets interieurs et \mathcal{B} pour ceux du bord, on introduit les matrices par bloc :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{\mathcal{B}\mathcal{B}} & \mathbf{A}_{\mathcal{B}\mathcal{I}} \\ \hline \mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{B}} & \mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{N^2}$$

Par convention, $\mathbf{A}_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_d$ et sous \tilde{V}_h^0 , $\mathbf{A}_{\mathcal{B}\mathcal{I}} = \mathbf{A}_{\mathcal{I}\mathcal{B}} = 0$. De plus, on introduit de meme :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u_h(M_{N_0+1}) \\ u_h(M_{N_0+2}) \\ \vdots \\ u_h(M_N) \\ \vec{U}^0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N$$

ainsi que :

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vec{L}^0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N$$

On a alors (4) sous la forme equivalente :

$$\tilde{\mathbf{A}}\vec{U} = \tilde{\vec{L}} \quad (5)$$

Q6) Dans la transformation \mathcal{F}_l , les inconnues sont les 4 et 2 coefficients de respectivement \mathcal{B}_l et \mathcal{S}_l . Or, avec les 3 de conditions $\mathcal{F}_l(\hat{M}_i^l) = M_i^l$, portant chacune 2 equations, on a assez d'equations pour trouver les 6 inconnues. On rappelle que dans le triangle de reference $\tilde{\mathcal{T}}_l$, les sommets sont simplement $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Cela rend le systeme particulierement simple a resoudre. On obtient alors immediatement :

$$\mathbf{B}_l = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{S}_l = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Avec bien entendu

$$M_1^l = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad M_2^l = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad M_3^l = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Q7) De maniere evidente, dans le triangle de reference local $\tilde{\mathcal{T}}_l$, on a:

$$\hat{w}_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y} \quad \hat{w}_2 = \hat{x} \quad \hat{w}_3 = \hat{y}$$

On a $\det(\mathbf{B}_l) = x_2 y_3 - y_2 x_3$ et par consequent :

$$\mathbf{M}^{\text{elem}}_{i,j} = \int_{\mathcal{T}_l} w_i(M) w_j(M) dx = \det(\mathbf{B}_l) \int_{\tilde{\mathcal{T}}_l} \hat{w}_i(\hat{M}) \hat{w}_j(\hat{M}) d\hat{x} = \det(\mathbf{B}_l) \begin{cases} 1/12 & \text{si } i = j \\ 1/24 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Q12) La fonction u etant $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$, son gradient au sens usuel est identique a son gradient au sens des distributions. Donc

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{9} \cos(\frac{2\pi}{9}x) \sin(\pi y) \\ \pi \sin(\frac{2\pi}{9}x) \cos(\pi y) \end{pmatrix}$$

Donc $f = u - \nabla \cdot \nabla(u) = u - \Delta u = u(1 + \frac{4\pi^2}{81} + \pi^2)$ car $\sigma = 1$ sur Ω .

Soit $f = \sin(\frac{2\pi}{9}x) \sin(\pi y)(1 + \frac{4\pi^2}{81} + \pi^2)$.

On peut tracer la solution exacte et la solution experimentale pour cette solution.

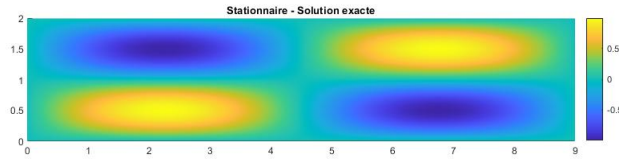


Figure 1: Solution exacte $u = \sin(\frac{2\pi}{9}x) \sin(\pi y)$

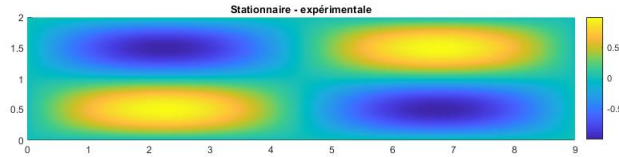


Figure 2: Solution experimentale avec la methode des elements finis pour un pas de maillage $h = 0.02$

La methode des elements finis semble efficace pour approcher la solution pour ce probleme.

Q13) On peut, si h est suffisamment petit, dire que $\pi_h u \simeq u$. Par continuite de la norme,

$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \simeq \|\pi_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$. Or,

$$\|\pi_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i,j=1}^{N_0} (u_h(M_i) - \pi_h u(M_i)) \int_{\Omega} w_i w_j dx (u_h(M_j) - \pi_h u(M_j)) = (\vec{u}_h - \vec{u} | \mathbf{M}^0 | \vec{u}_h - \vec{u}).$$

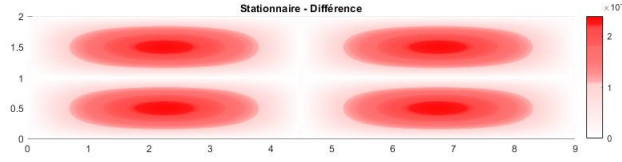


Figure 3: Différence entre les solutions exactes et approchées

Q14) Exactement de la même manière, $|u - u_h|_1 \simeq |\pi_h u - u_h|_1$. Or,

$$|\pi_h u - u_h|_1^2 = \sum_{i,j=1}^{N_0} (u_h(M_i) - \pi_h u(M_i)) \int_{\Omega} \nabla w_i \cdot \nabla w_j \, dx (u_h(M_j) - \pi_h u(M_j)) = (\vec{u}_h - \vec{u} | \mathbf{K}^0 | \vec{u}_h - \vec{u}).$$

Comme prévu, l'erreur de la semi-norme est moins bien contrôlée que la norme $L^2(\Omega)$, ce qui est cohérent avec le cours.

Les erreurs sont logiquement concentrées dans les zones où la fonction prend des valeurs plus élevées, mais n'excèdent pas 2×10^{-4} .

Resolution Numerique

Nous allons utiliser la méthode des éléments finis pour résoudre le problème de propagation des ondes avec pour terme source: $f = 600 \exp\left(-\left(\frac{2x-9}{7.2}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{0.8}\right)^2\right)$. Les deux expériences s'appuient en revanche sur des milieux différents.

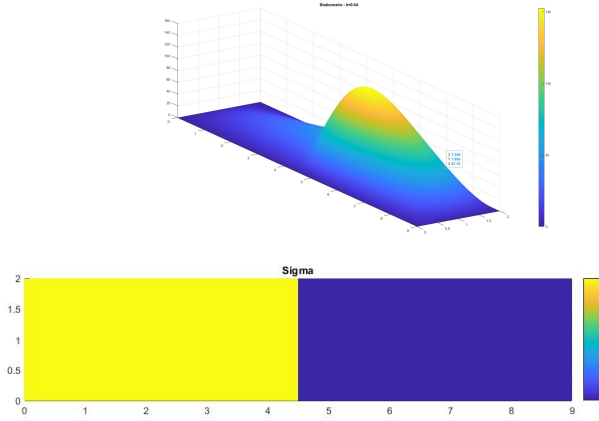


Figure 4: $\sigma_1 = 5, \sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

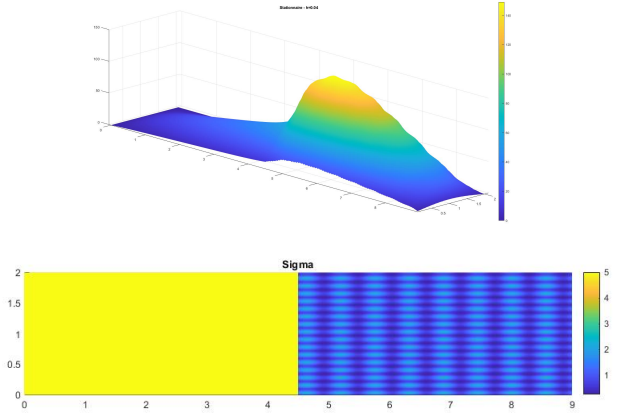


Figure 5: $\sigma_1 = 5, \sigma_2 = \frac{1}{4}(2 + \sin(\frac{32}{9}\pi x))(2 + \sin(16\pi y))$

Les particularités du milieu de propagation de l'onde se reflètent bien dans la propagation de l'onde, les motifs sinusodaux que l'on fait apparaître dans le domaine Ω_2 forment des perturbations spatialement périodiques. Dans les deux domaines, on retrouve également la forme explosive du terme source en exponentielle.

Part II

Exercice 2. Equation des ondes avec integration exacte de la matrice de masse

Le probleme est maintenant le suivant :

Trouver $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, t_{max}] \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, t_{max}] \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (6)$$

ou $u_0 = u_0(x, y)$ et $u_1 = u_1(x, y)$ sont des donnees du probleme.

Q1) On definit les formes bilineaires suivantes :

$$\forall v, w \in H_0^1(\Omega), \quad m(v, w) = \int_{\Omega} vw \, dx, \quad k(v, w) = \int_{\Omega} \sigma \nabla v \cdot \nabla w \, dx$$

On multiplie la premiere equation de (6) par une fonction-test v de $H_0^1(\Omega)$ independante du temps, puis on integre sur Ω . On a donc :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma u) v \, dx = 0$$

En utilisant la formule d'integration par partie utilise en Exercice 1, ainsi que le fait que $\gamma_0 u = 0$ sur $\partial\Omega$, puis en sortant la derivee temporelle de l'integrale (v est independant du temps), on obtient bien l'equation :

$$\frac{d^2}{dt^2} m(u, v) + k(u, v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (7)$$

Q2) Par definition,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{K}(t) + \frac{d}{dt} \mathcal{P}(t)$$

Or,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \, dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) \, dx$$

et

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} k(u, u) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \frac{\partial \nabla u}{\partial t} \, dx$$

En intervertissant derivee spatial et temporelle et en utilisant la formule de la divergence (avec u nul sur le bord), on voit immediatement que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}(t) = -\frac{d}{dt} \mathcal{K}(t), \iff \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, t_{max}]$$

Ce qui est bien le resultat annonce.

Q3) De la meme maniere qu'en Exercice 1, on change d'espace fonctionnel. On se place dans $V_h^0(\Omega) \times [0, t_{max}] \subset H_0^1(\Omega) \times [0, t_{max}]$. La (FV_h) s'ecrit donc de maniere equivalente :

$$\frac{d^2}{dt^2} m(u_h, v_h) + k(u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h^0(\Omega) \quad (8)$$

Q4) On note de maniere classique :

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} u_h(M_1, t) \\ \vdots \\ u_h(M_{N_0}, t) \end{pmatrix}$$

et on ecrit (8) sur une base de $V_h^0(\Omega)$:

$\forall j \in \{1, \dots, N_0\}$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_i w_j \, dx \frac{\partial^2 u(M_i, t)}{\partial t^2} + \int_{\Omega} \sigma \nabla w_i \cdot \nabla w_j \, dx u_h(M_i, t) = 0$$

soit ecrit sous forme vectorielle :

$$\mathbf{M}^0 \frac{d^2 \vec{V}(t)}{dt^2} + \mathbf{K}^0 \vec{V}(t) = 0 \quad (9)$$

Q5) On utilise l'operateur d'interpolation sur u_0 et on place les coordonnees de $\pi_h u$ dans la base (w_1, \dots, w_{N_0}) dans un vecteur colonne \vec{U} . De meme pour u_1 . On doit les avoir suppose respectivement dans $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. En resume :

$$\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} u_0(M_1) \\ \vdots \\ u_0(M_{N_0}) \end{pmatrix} \quad \vec{U}_1 = \begin{pmatrix} u_1(M_1) \\ \vdots \\ u_1(M_{N_0}) \end{pmatrix}$$

Q6) On decompose u dans la base $V_h^0(\Omega)$. On voit alors immediatement que :

$$\mathcal{P}_h(t) = \frac{1}{2}(\vec{V}|\mathbf{K}^0|\vec{V}) \quad \mathcal{K}_h(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\vec{V}|\mathbf{M}^0|\frac{d}{dt}\vec{V}\right)$$

La raison de la denomination matrices de raideur et de masse est ici explicite. On en deduit : $\forall t \in [0, t_{max}]$,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_h(t) = (\vec{V}|\mathbf{M}^0|\frac{d}{dt}\vec{V}) + \left(\frac{d}{dt}\vec{V}|\mathbf{K}^0|\frac{d}{dt}\vec{V}\right) = (\vec{V}|\mathbf{M}^0|\frac{d}{dt}\vec{V}) - \left(\frac{d}{dt}\vec{V}|\mathbf{M}^0|\vec{V}\right) = 0$$

Par symetrie de \mathbf{M}^0 et en utilisant (9). Precisons que les matrices sont inversibles car definies positives.

Q7) On introduit la valeur artificielle \vec{V}^{-1} telle que $\vec{U}_1 = \frac{\vec{V}^1 - \vec{V}^{-1}}{2\Delta t}$. Du schema saute-mouton, on en deduit l'equation :

$$\vec{V}^1 = 2\vec{V}^0 - \vec{V}^{-1} - \Delta t^2 \mathbf{M}^{0^{-1}} \mathbf{K}^0 \vec{V}^0$$

En rajoutant \vec{V}^1 et en divisant pas 2, et en remplaant \vec{V}^0 par sa condition aux limites, on a alors :

$$\vec{V}^1 = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{M}^{0^{-1}} \mathbf{K}^0\right) \vec{U}_0 + \Delta t \vec{U}_1$$

Q9) Le trace du pas temporel maximal Δt en fonction du pas spatial h nous suggere une relation lineaire entre ces deux parametres.

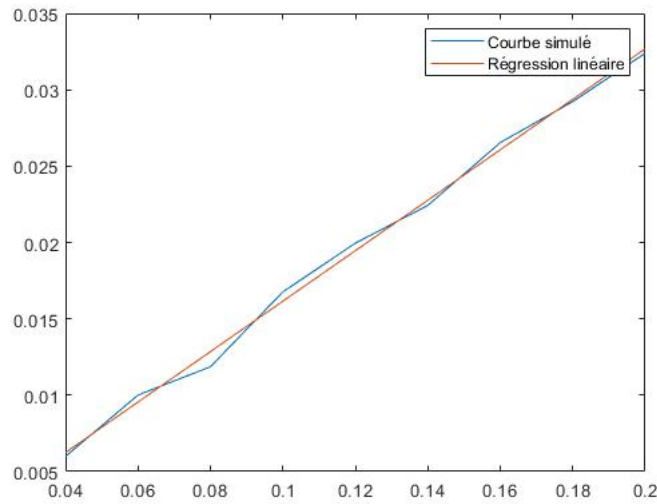


Figure 6: pas temporel maximal Δt en fonction de h

Q10) Pour des raisons encores inconnues a ce jour, la resolution algorithmique du probleme via la routine principal_temporel donne une energie divergente.

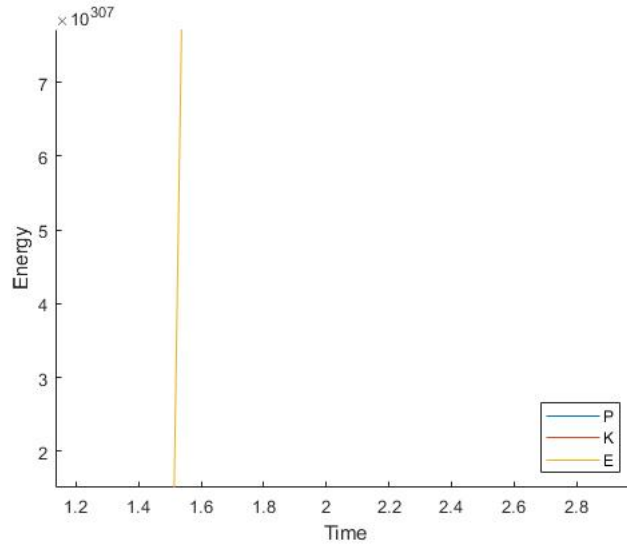


Figure 7: Energie en fonction du temps.

Part III

Exercice 3. Equation des ondes en utilisant la methode de condensation de masse

Q1) D'apres la formule de quadrature des trapezes : $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\int_{\mathcal{T}_l} \lambda_i \lambda_j dx \simeq \frac{\text{Aire}(\mathcal{T}_l)}{3} (\lambda_i \lambda_j(S_1) + \lambda_i \lambda_j(S_2) + \lambda_i \lambda_j(S_3))$$

ou S_1, S_2 et S_3 sont les sommets du triangle \mathcal{T}_l . Or, les coordonnees barycentriques pris en ces sommets verifient $\lambda_i \lambda_j(S_k) = \delta_{ij} \delta_{jk}$. Il est donc clair que la matrice de masse sera diagonale, etant donne que sur $\mathcal{T}_l, w_i|_{\mathcal{T}_l} = \lambda_i$

Q2) Par definition de la matrice de masse :

$\forall I, J \in \{1, \dots, N\}$

$$(\mathbf{M}^0)_{I,J} = \sum_l \int_{\mathcal{T}_l} w_i|_{\mathcal{T}_l} w_j|_{\mathcal{T}_l} dx \simeq \delta_{IJ} \sum_{\mathcal{T}_l \subset \text{supp}(w_i)} \frac{\text{Aire}(\mathcal{T}_l)}{3} = (\mathbf{M}^{\text{cond}})_{I,J}$$

Car il est evident que $\lambda_i \lambda_j(S_1) + \lambda_i \lambda_j(S_2) + \lambda_i \lambda_j(S_3) = 1$ des lors que $i = j$. De plus, par la notation du cours, $l_g(l, i) = I, l_g(l, j) = J$.

Q3) On trace la courbe :

Une rapide regression lineaire donne une loi de la forme $\overline{\Delta t} = 0.0003 + 0.3072h$.

Comme attendu, la constante CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) augmente lorsque h augmente. En effet, intuitivement, pour qu'un schema soit stable, il faut que la resolution du calcul numerique se propage plus vite que la solution exacte. La solution exacte se propage a la vitesse c . Pour une vitesse donnee, plus le pas d'espace est petit, alors plus le pas de temps doit l'etre aussi : $V_{num} = \frac{h}{\Delta t}$. Cette croissance est donc tout a fait coherente. Le cours MA103 nous apprend que on doit avoir $\overline{\Delta t} = \frac{h}{c}$. Il aurait donc ete ideal d'avoir une pente de 0.5 et une ordonnee a l'origine de 0.

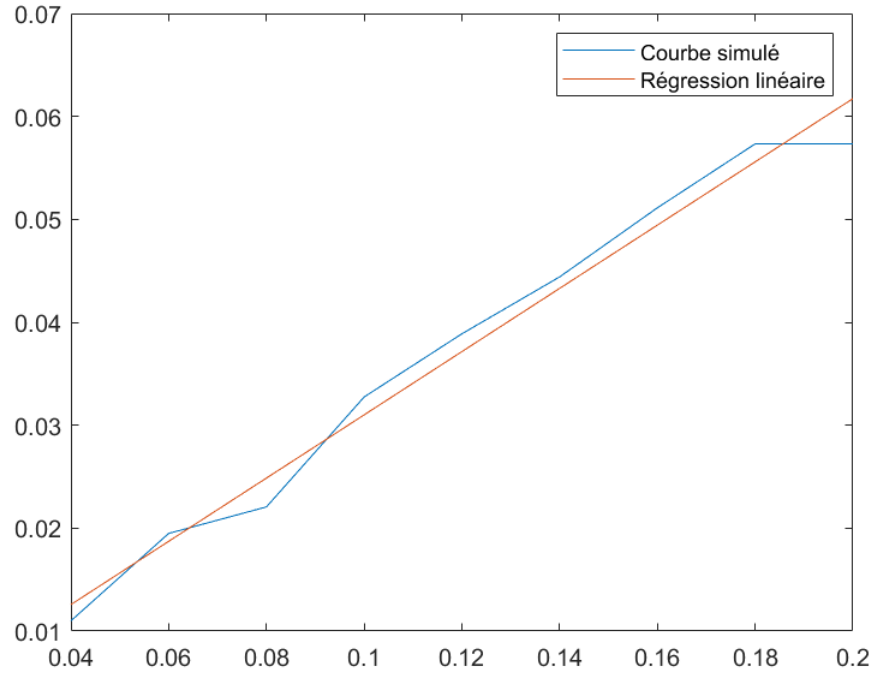


Figure 8: Constante CFL en fonction du pas de maillage h

Q4) On obtient la figure 7 : On remarque que l'énergie mécanique reste naturellement constant durant la

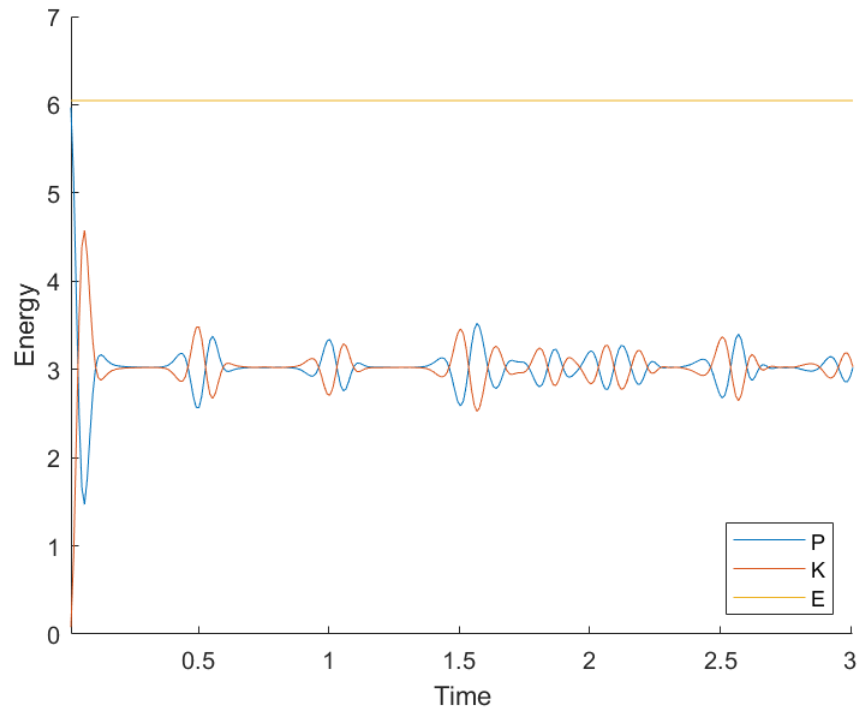


Figure 9: Energie cinétique, potentielle et mécanique pour $\Delta t = 0.95\overline{\Delta t}$

simulation, ce que nous allons démontrer dans l'exercice 4. L'énergie cinétique et potentielle moyenne est de 75

Joules, et les courbes sont periodiques, ce qui n'est selon moi pas previsible *a priori*. Si j'utilise un cfl factor de 1.1, la simulation ne converge pas, car l'energie reste nul (figure 8) comme il le sera demontre dans l'exercice 4.

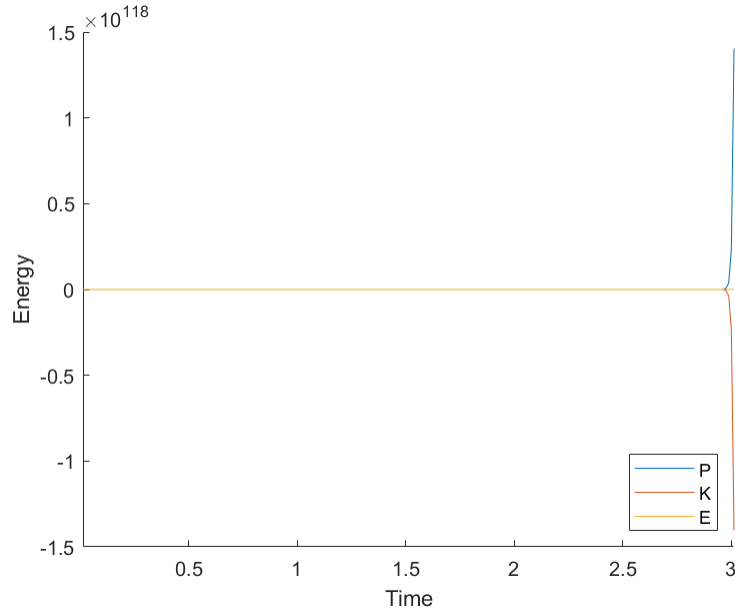


Figure 10: Energie cinetique, potentielle et mecanique pour $\Delta t = 1.1\overline{\Delta t}$

Q5) J'ai decide de fournir ma simulation sous un format video .AVI. On voit bien que l'onde dans Ω_2 se propage plus vite que dans Ω_1 . Le support spatial de l'onde est d'abord une sphere. On observe ensuite des reflexions, puis des interferences. Les discontinuite sont bien visibles sur la video, notamment celle sur la vitesse de l'onde.

(Voir video Exo 3 Q5.avi)

Q6) On observe cette fois que l'onde se propage moins vites dans Ω_2 que dans ω_1 , comme prevu. Lorsque la vitesse de propagation diminue, a Δt constant, il faut aussi affiner le maillage pour garantir la condition CFL.

(Voir video Exo 3 Q6.avi)

Part IV

Exercice 4. Complements

Q1) Comme convenu, on note :

$$\mathcal{K}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right)^T \mathbf{M}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right)$$

ou encore

$$\mathcal{K}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right)^T \mathbf{M}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - 2\vec{V}^n + \vec{V}^{n-1}}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right)^T \mathbf{M}^0 \left(\frac{\vec{V}^n - \vec{V}^{n-1}}{\Delta t} \right)$$

D'après le schéma saute-mouton,

$$\mathbf{M}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - 2\vec{V}^n + \vec{V}^{n-1}}{\Delta t} \right) = -\mathbf{K}^0 \vec{V}^n \Delta t$$

Donc :

$$\mathcal{K}^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right)^T \mathbf{M}^0 \left(\frac{\vec{V}^n - \vec{V}^{n-1}}{\Delta t} \right) - \frac{1}{2} \left(\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n \right)^T \mathbf{K}^0 \vec{V}^n$$

On fait pareil pour le premier terme, en utilisant le fait que la matrice \mathbf{M}^0 est symétrique :

$$\mathcal{K}^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\vec{V}^n - \vec{V}^{n-1}}{\Delta t} \right)^T \mathbf{M}^0 \left(\frac{\vec{V}^n - \vec{V}^{n-1}}{\Delta t} \right) - \frac{1}{2} \left(\vec{V}^n - \vec{V}^{n-1} \right)^T \mathbf{K}^0 \vec{V}^n - \frac{1}{2} \left(\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n \right)^T \mathbf{K}^0 \vec{V}^n$$

On remarque que le premier terme vaut $\mathcal{K}_h^{n-\frac{1}{2}}$. On définit de même :

$$\mathcal{P}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \vec{V}^{n+1T} \mathbf{K}^0 \vec{V}^n$$

et alors, comme \mathbf{K}^0 est symétrique $\mathcal{P}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \vec{V}^{nT} \mathbf{K}^0 \vec{V}^{n+1}$, donc :

$$\mathcal{P}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{P}_h^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \vec{V}^{nT} \mathbf{K}^0 \left(\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n-1} \right)$$

On remarque après développement de $\mathcal{K}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{K}_h^{n-\frac{1}{2}}$ que l'on a $\mathcal{K}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{K}_h^{n-\frac{1}{2}} = - \left(\mathcal{P}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{P}_h^{n-\frac{1}{2}} \right)$ Cela donne :

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{E}_h^{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{K}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{K}_h^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{P}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{P}_h^{n-\frac{1}{2}} = 0 \iff \frac{\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{E}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0$$

On a donc bien le résultat recherché.

Q2) Le résultat est immédiat, en substituant \mathbf{M}^0 par $\hat{\mathbf{M}}^0 + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K}^0$:

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right)^T \hat{\mathbf{M}}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{2} \right)^T \mathbf{K}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{2} \right) + \frac{1}{2} \vec{V}^{n+1T} \mathbf{K}^0 \vec{V}^n$$

On peut réécrire le dernier terme :

$$\vec{V}^{n+1T} \mathbf{K}^0 \vec{V}^n = 4 \frac{\vec{V}^{n+1T}}{2} \mathbf{K}^0 \frac{\vec{V}^n}{2}$$

On développe le second produit scalaire :

$$\left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{2} \right)^T \mathbf{K}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{2} \right) = \frac{\vec{V}^{n+1T}}{2} \mathbf{K}^0 \frac{\vec{V}^{n+1}}{2} - 2 \frac{\vec{V}^nT}{2} \mathbf{K}^0 \frac{\vec{V}^{n+1}}{2} + \frac{\vec{V}^nT}{2} \mathbf{K}^0 \frac{\vec{V}^n}{2}$$

En sommant les deux dernieres equations, on trouve :

$$\vec{V}^{n+1\top} \mathbf{K}^0 \vec{V}^n + \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{2} \right)^\top \mathbf{K}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{2} \right) = \frac{\vec{V}^{n+1\top}}{2} \mathbf{K}^0 \frac{\vec{V}^{n+1}}{2} + 2 \frac{\vec{V}^n\top}{2} \mathbf{K}^0 \frac{\vec{V}^{n+1}}{2} + \frac{\vec{V}^n\top}{2} \mathbf{K}^0 \frac{\vec{V}^n}{2}$$

Ce que l'on peut reecire :

$$\vec{V}^{n+1\top} \mathbf{K}^0 \vec{V}^n + \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{2} \right)^\top \mathbf{K}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{2} \right) = \left(\frac{\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n}{2} \right)^\top \mathbf{K}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n}{2} \right)$$

En conclusion,

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right)^\top \hat{\mathbf{M}}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n}{2} \right)^\top \mathbf{K}^0 \left(\frac{\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n}{2} \right)$$

Encore une fois, c'est bien le resultat recherche.

Q3) Pour que l'energie $\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}$ soit positive, une condition suffisante est que la matrice $\hat{\mathbf{M}}^0$ soit symetrique defini-positive. Elle est trivialement symetrique et on doit avoir de meme :

$$\forall \vec{V} \in \mathbf{R}^N, \vec{V}^T \hat{\mathbf{M}}^0 \vec{V} > 0$$

Cela equivaut a :

$$\forall \vec{V} \in \mathbf{R}^N,$$

$$\vec{V}^T \mathbf{M}^0 \vec{V} - \frac{\Delta t^2}{4} \vec{V}^T \mathbf{K}^0 \vec{V} > 0 \iff \Delta t < 2 \left(\frac{\vec{V}^T \mathbf{K}^0 \vec{V}}{\vec{V}^T \mathbf{M}^0 \vec{V}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

On definit alors le pas de temps limite :

$$\overline{\Delta t} = 2 \sup_{\vec{V} \in \mathbf{R}^N} \left(\frac{\vec{V}^T \mathbf{K}^0 \vec{V}}{\vec{V}^T \mathbf{M}^0 \vec{V}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Q4) On pose $\|\vec{V}\|_{\mathbf{M}_0}^2 = \vec{V}^T \mathbf{M}^0 \vec{V}$. Par definition de $\hat{\mathbf{M}}^0$, on a alors

$$\|\vec{V}\|_{\mathbf{M}_0}^2 = \vec{V}^T \mathbf{M}^0 \vec{V} + \frac{\Delta t^2}{4} \vec{V}^T \mathbf{K}^0 \vec{V}$$

Or, vu la condition trouve en Q3), on peut affirmer que :

$$\vec{V}^T \mathbf{K}^0 \vec{V} \leq \frac{\overline{\Delta t}^2}{4} \vec{V}^T \mathbf{M}^0 \vec{V}$$

On a donc

$$\|\vec{V}\|_{\mathbf{M}_0}^2 \leq \vec{V}^T \mathbf{M}^0 \vec{V} + \frac{\Delta t^2}{\overline{\Delta t}^2} \vec{V}^T \mathbf{M}^0 \vec{V}$$

soit encore

$$\|\vec{V}\|_{\mathbf{M}_0}^2 \left(1 - \frac{\Delta t^2}{\overline{\Delta t}^2} \right) = \|\vec{V}\|_{\hat{\mathbf{M}}_0}^2$$

Etant donne que $\Delta t < \overline{\Delta t}$, on peut sans encombre faire une division et on a alors :

$$\|\vec{V}\|_{\mathbf{M}_0} \leq \frac{\|\vec{V}\|_{\hat{\mathbf{M}}_0}}{\left(1 - \frac{\Delta t^2}{\overline{\Delta t}^2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

C.Q.F.D

Q5) On rappelle que $T = n\Delta t$. De plus, dans la Q1) on montre que $\forall n \in \mathbf{N}, \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}}$. C'est une recurrence evidente. On ecrit alors :

$$\|\vec{V}^{n+1}\|_{\mathbf{M}_0} = \|\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n + \vec{V}^n\|_{\mathbf{M}_0} \leq \|\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n\|_{\mathbf{M}_0} + \|\vec{V}^n\|_{\mathbf{M}_0}$$

En effet, on peut montrer que $\|\cdot\|_{\mathbf{M}_0}$ est bien une norme (ce qui justifie l'inegalite triangulaire), etant donne que \mathbf{M}_0 est symetrique definie positive. $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$\|\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n\|_{\mathbf{M}_0} \leq C' \|\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n\|_{\hat{\mathbf{M}}_0}, \text{ avec } C' = \frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta t^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Il est alors de plus evident que $\|\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n\|_{\hat{\mathbf{M}}_0} = \sqrt{2\mathcal{K}_h^{n+\frac{1}{2}}} \leq \sqrt{2\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}}}$ En repetant le procede n fois, on arrive a la conclusion que :

$$\|\vec{V}^{n+1}\|_{\mathbf{M}_0} \leq nC' \sqrt{2\mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}}} + \|\vec{V}^0\|_{\mathbf{M}_0}$$

En prenant $C = T \frac{C'}{\Delta t}$, on trouve alors :

$$\|\vec{V}^{n+1}\|_{\mathbf{M}_0} \leq C \sqrt{2\mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}}} + \|\vec{V}^0\|_{\mathbf{M}_0}$$

Q6) On peut interpreter $\rho(\mathbf{M}^{0^{-1}}\mathbf{K})$ comme etant la plus grande valeur propre en valeur absolue du probleme au valeur propre generalisee :

$$\text{Trouver } (\vec{V}, \lambda) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \text{ telle que } \mathbf{K}^0 \vec{V} = \lambda \mathbf{M}^0 \vec{V}$$

En prenant le produit scalaire selon \vec{V} , on trouve immediatement :

$$\lambda = \frac{\vec{V}^T \mathbf{K}^0 \vec{V}}{\vec{V}^T \mathbf{M}^0 \vec{V}} \leq \rho(\mathbf{M}^{0^{-1}}\mathbf{K}) = \sup(\text{Sp}(\mathbf{M}^{0^{-1}}\mathbf{K}))$$

Cela permet d'affirmer que :

$$\rho(\mathbf{M}^{0^{-1}}\mathbf{K}) = \sup_{\vec{V} \in \mathbf{R}^N} \frac{\vec{V}^T \mathbf{K}^0 \vec{V}}{\vec{V}^T \mathbf{M}^0 \vec{V}}$$

Combine avec la condition Q3), on retrouve la condition enonce en Exercice 2 :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\rho(\mathbf{M}^{0^{-1}}\mathbf{K})}$$

Part V

Conclusion

La resolution stationnaire des equations n'est pas probante en soit mais permet de verifier l'efficacite de l'algorithme primaire en comparant a des solutions exactes. Une fois cette brique elementaire bien implementee, nous avons pu construire un schema temporel effectif, puis apres ammelioration, efficace, pour resoudre le probleme donne. Bien que ici restreint a un rectangle en 2D, le projet que nous avons construit est capable, sous reserve de quelques modifications des maillages et du code, de resoudre des problemes plus complexes de propagation d'ondes et d'apporter ainsi des reponses a des problemes physiques reels. L'ensemble des questions theoriques de cette enonce nous ont permis d'etre assure de la justesse des algorithmes et des techniques de resolution ce qui a ete tres formateur.