

---

# PHY 514 : Analyse de sensibilité pour la conception multi-physique de lanceurs

---

---

## Encadrants :

-Loïc Brevault

- Mathieu Balesdent



# Analyse de sensibilité pour la conception multi-physique de lanceurs

Hugo Negrel

Mars 2023

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I</b>		<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduction des objectifs</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Techniques d'analyse de sensibilité dans l'optimisation multi-disciplinaire</b>	<b>3</b>
3.1	Cadre théorique . . . . .	3
3.2	L'analyse de sensibilité . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Application dans un cadre simple</b>	<b>5</b>
4.1	Hypothèses simplificatrices et cadre d'application . . . . .	5
4.2	Détermination des HSIC . . . . .	7
4.3	Variante de la méthode . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Présentation des résultats</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Perspectives</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion partie 1</b>	<b>11</b>
<b>II</b>		<b>12</b>
<b>8</b>	<b>Introduction des objectifs</b>	<b>12</b>
<b>9</b>	<b>La méthode LAMDA</b>	<b>12</b>
9.1	Contexte . . . . .	12
9.2	Calcul de la vraisemblance . . . . .	13
<b>10</b>	<b>Application à un exemple</b>	<b>15</b>
<b>11</b>	<b>Application à un modèle de satellite détecteur d'incendie</b>	<b>17</b>
11.1	Présentation du modèle . . . . .	17
11.2	Détermination des fonctions de densités de probabilités . . . . .	17
11.3	Calcul des HSIC . . . . .	18
<b>12</b>	<b>Conclusion</b>	<b>19</b>

# 1 Introduction

Le projet **Analyse de sensibilité pour la conception multi-physique de lanceurs** a été réalisé sous la tutelle de Loïc Brevault et Mathieu Balesdent à l'ONERA, centre aérospatiale à Palaiseau. Le sujet du projet s'inscrit dans un cadre plus large: L'optimisation multi-disciplinaire. Cela concerne les systèmes complexes i.e ceux comprenant un très grand nombre de sous-systèmes ,et donc de degré de liberté, interagissant entre eux. L'industrie de l'aérospatiale s'inscrit parfaitement dans ce cadre. En effet, l'aérospatiale est par nature très multi-disciplinaire, de par le nombre de processus physiques différents qui rentrent en jeu : chimie/pyrotechnie, trajectographie, aérodynamique, thermodynamique ... pour ne citer qu'eux. Afin de combiner tout ces différents éléments proprement dans un seul et même système, une théorie mathématique rigoureuse et bien posée est plus que nécessaire. Bien que l'optimisation soit un enjeu central dans le thème du projet, on ne s'attardera que sur les méthodes probabilistes et statistiques dans ce projet.

## Part I

### 2 Introduction des objectifs

Dans cette première partie, l'objectif principal sera le calcul de grandeur probabiliste, les Hilbert-Schmidt Independence Criterion (HSIC). On utilisera pour cela des outils statistiques et des estimateurs, tout en abordant différentes stratégies.

Dans la première partie, je mettrai en place la théorie mathématique derrière l'analyse de sensibilité, et montrerai comment l'analyse de sensibilité se place en tant que domaine de l'optimisation multi-disciplinaire. En seconde partie, je donnerai les résultats obtenues et leurs interprétations afin de finalement proposer des perspectives en troisième et dernière partie.

### 3 Techniques d'analyse de sensibilité dans l'optimisation multi-disciplinaire

#### 3.1 Cadre théorique

Comme dit en introduction, l'optimisation multi-disciplinaire est devenu de nos jours indispensable. La complexité des systèmes croissant avec les progrès réalisés ces dernières décennies dans quasiment tout les domaines scientifiques, il est nécessaire de savoir "hiérarchiser" les différentes physiques entrant en ligne de mire pour savoir faire des compromis lorsqu'il le faudra. On définit un système comme étant un ensemble de **domaines** couplés entre eux. C'est de la qualité de "l'entente" entre les domaines que le comportement global du système ressortira.

De manière très général, une pratique commune dans le travail de l'ingénieur est de mettre le problème qu'il doit résoudre comme étant la solution d'une certaine fonction, appelée fonction objectif, ou encore fonction coût, à minimiser. On rentre alors dans le cadre de l'optimisation, branche des mathématiques relativement récente et dont la recherche est encore très active. La plupart des problèmes de minimisation sont très durs à résoudre que ce soit analytiquement ou numériquement, et de nombreux problèmes restent ouvert à ce sujet. Dans le contexte de l'optimisation multi-disciplinaire, on le présente de cette manière:

- (1)  $\min_{\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}} F_{\text{obj}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$
- (2)  $\mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0$
- (3)  $\mathbf{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$
- (4)  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}, i \neq j, \mathbf{y}_{i,j} = c_{i,j}(\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_{\cdot i}, \mathbf{x}_i)$
- (5)  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \mathbf{r}_i(\mathbf{z}, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = 0$

La fonction coût  $f$  représente ce qu'on doit minimiser avec nos trois jeux de variables  $\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ .

- La variable  $\mathbf{z}$  est appelé vecteur des variables de conceptions. Il fait référence aux différents degré de liberté d'un système. Chaque domaine  $i$  a son propre vecteur de variables de conception  $\mathbf{z}_i$ . Pour se faire une idée, cela peut être la résistance du matériaux, la masse de carburant, une certaine géométrie... Tout ce qui est concevable par l'ingénieur.

- $\mathbf{x}$  est le vecteur de variable d'états. Ce sont l'ensemble des paramètres qui décrivent l'état du système en fonctionnement. La position par exemple pourrait être un vecteur d'état, tout comme son orientation, la quantité d'ergols restante etc... Fondamentalement, la différence entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$  ne provient que du point de vue ingénieur, les valeurs de  $\mathbf{x}$  sont fixées par les équations d'états  $\mathbf{r}$ . Du moins on suppose qu'elles le sont dans notre processus d'optimisation. Par conséquent on ne les prendra pas en compte dans ce projet. On les considère donc comme ne faisant pas partie du problème d'optimisation.
- $\mathbf{y}$  représente les variables de couplages entre les domaines, c'est à dire traduit l'influence d'un domaine sur un autre. On désigne par  $\mathbf{y}_i$  l'ensemble des variables de couplages entre les disciplines et la discipline  $i$ .

Les fonctions  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$  sont les vecteurs contraintes respectivement d'égalité et d'inégalité comme on les retrouve usuellement dans les problèmes d'optimisation.

Dans les sections suivantes, la variable de conception sera notée  $x$ , et non  $z$  par abus du langage mathématique commun. On gardera cependant en tête qu'il ne s'agit pas d'une variable d'état.

Le terme un peu moins fréquent est le terme de couplage entre les disciplines  $i$  et  $j$ . C'est le terme qui donne tout le caractère multi-disciplinaire au problème, car par exemple, la température de la chambre de combustion doit pouvoir être compatible les propriétés de l'environnement mécanique, électronique etc... Afin de trouver les bonnes variables de couplages, diverses techniques existent. Celle que j'ai employé est l'un des plus classiques : la méthode de Gauss-Seidel.

Les figures 1 et 2 [3] illustrent mon propos.

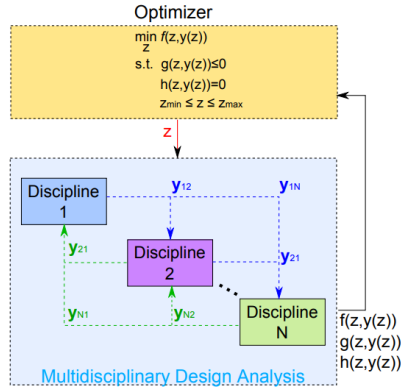


Figure 1: Optimisation Multi-Disciplinaire en formulation MDF

Tout l'enjeu est alors de résoudre ce problème de minimisation. Des formulations alternatives du problème peuvent être présentées, mais seule celle-là nous servira dans cette première moitié de projet. La complexité du problème, outre sa forte non-linéarité et non convexité, provient du fait que le nombre de variables est extrêmement important, pouvant facilement atteindre plusieurs milliers. L'approche la plus pragmatique alors serait de se demander quelles variables sont les plus importantes et qui influent le plus sur la fonction objectif  $F_{obj}$ . C'est l'objet de la section suivante.

### 3.2 L'analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité répond au besoin de l'ingénieur de savoir quelles variables sont importantes de celles qui ne le sont pas. L'esprit humain peut dans certains cas intuitivement la réponse grâce à son sens physique, cependant, lorsque le problème devient trop complexe, une théorie est nécessaire. Celle que je vais présenter utilise des outils de probabilité et d'analyse fonctionnelle. [1].

Afin d'aborder une approche aléatoire, on va considérer les variables non plus comme des réelles, mais comme des variables aléatoires réelles. On remplacera donc  $x_1, x_2, x_3$  par  $X_1, X_2, X_3$  et chacune de ces variables aléatoires suivra une loi. Afin de déterminer quelles variables sont les plus influentes, les indices de Sobol ou les indices HSIC (Hilbert-Schmidt Independance Criterion) [1] sont de bons candidats. On s'occupera pour ce rapport principalement des HSIC, que l'on implémentera en seconde lieu. Les indices HSIC se basent sur l'idée de ramener des distributions de probabilité à des espaces de Hilbert particuliers : les HRKS (Hilbert Reproducing Hilbert Kernel Space). Ce sont des espaces de Hilbert fonctionnels, à valeurs de  $\chi$  dans  $\mathbb{R}$ .  $\chi$  est un espace topologique borelien quelconque. Dans ce travail, on aura  $\chi = \mathbb{R}^n$ , où  $n$  est le nombre de variable de la fonction que l'on souhaite minimiser. Les HRKS

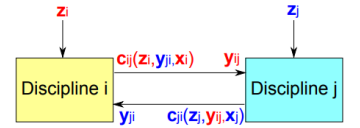


Figure 2: Couplage entre la discipline  $i$  et  $j$

$\mathcal{H}$  doivent être munis à la fois d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$  et d'une fonction  $k : \chi \times \chi \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant deux propriétés. La première est assez naturelle, on impose que elle soit bien définie sur  $\mathcal{H}$  par rapport à sa première variable :  $k : \begin{matrix} \chi & \rightarrow & \mathcal{H} \\ x & \mapsto & k(x, \cdot) \end{matrix}$  et la deuxième que cette fonction ait la propriété dite de "reproduction", c'est-à-dire que l'on ait

$$\forall f \in \mathcal{H}, \forall x \in \chi, \quad (f, k(x, \cdot))_{\mathcal{H}} = f(x)$$

Dans  $\mathbb{R}^n$ , le kernel que l'on prendra est le plus commun : le kernel gaussien. Il est défini par :  $k(x, x') = \exp - \frac{\|x - x'\|_{\mathbb{R}^n}^2}{2\sigma^2}$ . Prenons une variable aléatoire à valeurs dans  $\chi$ . On introduit alors une fonction qui ramène son étude dans  $\mathcal{H}$ . On pose  $\mu_{\mathbb{P}_X} = \mathbb{E}_X[k(X, \cdot)]$ , pourvu que  $\mathbb{E}[k(X, X)] < \infty$ . Pour que le raisonnement soit vraiment solide, il faut aussi préciser que l'étude de  $\mu_{\mathbb{P}_X}$  désigne de façon unique X. Il faut donc supposer l'injectivité de l'application qui à X associe  $\mu_{\mathbb{P}_X}$ , ce que nous ferons par la suite. Se trouver dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  a de convenable en cela que nous sommes alors capable de mesurer des distances. On pose alors  $\gamma_k(\mathbb{P}_X, \mathbb{P}_Z) = \|\mu_{\mathbb{P}_X} - \mu_{\mathbb{P}_Z}\|_{\mathcal{H}}$ . On remarque que l'on a bien  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Z$  si et seulement si  $\gamma_k = 0$ , ce qui est une propriété essentielle de notre métrique. Ainsi,  $\gamma_k$  permet de quantifier à quel point deux distributions de probabilité sont 'éloignées' l'une de l'autre. Avant de définir précisément ce que sont les HSIC, il faut encore définir une dernière quantité analogue.

En toute généralité, considérons un nouvel espace HRKS  $\mathcal{G}$  avec son propre kernel  $l$ , et dont les fonctions sont définis sur l'espace topologique  $\chi'$ . On définit alors l'espace produit  $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$ , qui reste un HRKS et dont le kernel est défini par :

$$k : \begin{matrix} \chi^2 \times \chi'^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, x'), (z, z')) & \mapsto & w((x, x'), (z, z')) = k(x, x')j(z, z') \end{matrix}$$

On introduit alors la fonction  $\mu$  de la loi conjointe :

$$\mu_{\mathbb{P}_{(X, Z)}} = \mathbb{E}_{(X, Z)}[w((X, Z), \cdot)]$$

Finalement, on définit l'indice HSIC entre les variables aléatoires X et Z un peu à la manière d'une covariance:

$$HSIC(X, Z)_{\mathcal{H}, \mathcal{G}} = \gamma_w(\mathbb{P}_{(X, Z)}, \mathbb{P}_X \mathbb{P}_Z) = \|\mu_{\mathbb{P}_{(X, Z)}} - \mu_{\mathbb{P}_X \mathbb{P}_Z}\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}}$$

Une fois de plus, on voit alors que  $\gamma_v = 0$  si et seulement si  $\mathbb{P}_{(X, Z)} = \mathbb{P}_X \mathbb{P}_Z$ . Cela n'assure pas l'indépendance mais seulement que la covariance est nulle : la valeur de X n'influence pas celle de Y.

## 4 Application dans un cadre simple

### 4.1 Hypothèses simplificatrices et cadre d'application

Après avoir exposé le cadre très général dans lequel s'établit l'optimisation pluri-disciplinaire, je vais exposer les différentes hypothèses faites ainsi que le cadre de travail pour cette première partie de projet.

On rappelle que l'on souhaite faire l'analyse de sensibilité entre deux quantités distinctes: la fonction  $F_{\text{obj}}$  à minimiser et ses différentes variables  $X \in \mathbb{R}^n$ . En pratique,  $F_{\text{obj}}$  a aussi les variables de couplages en argument, mais on ne s'en occupe pas pour l'instant. Si on considère maintenant aussi  $F_{\text{obj}}$  comme une variable aléatoire Y, qui prend valeur dans  $\mathbb{R}$ , il faut donc étudier l'espace produit entre la "sortie", (c'est à dire la fonction objectif  $F_{\text{obj}}$ ) et "l'entrée" (les variables X dont nous voulons évaluer l'influence). Ainsi, on choisit naturellement  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^d$  et  $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ , où n est la dimension du vecteur aléatoire. De plus, on prendra respectivement le kernel gaussien de dimension n pour  $\mathcal{H}$  et le kernel gaussien de dimension 1 pour  $\mathcal{G}$ . On va donc se servir du HSIC à cette tâche. Pour conclure cette partie, il reste une dernière précision à ajouter. En effet, il serait à priori idiot de calculer les HSIC sur l'ensemble du domaine de définition de  $F_{\text{obj}}$  de manière uniforme. En particulier en optimisation puisque on ne s'intéresse qu'au domaine dit de faisabilité  $\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{g}(X) \leq 0, \mathbf{h}(X) = 0, f(X) \leq q\}$ . Qu'importe t'il que  $F_{\text{obj}}$  soit sensible à  $X_1$  ou à  $X_{40}$  si l'on est loin du domaine de faisabilité... Afin de ne pas trop restreindre le domaine, on va relaxer les contraintes et s'intéresser au domaine :  $\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{g}(X) \leq \mathbf{T}, |\mathbf{h}(X)| \leq \epsilon, f(X) \leq q\}$ . Il paraît donc astucieux de ne pas s'intéresser uniquement à  $F_{\text{obj}}$  en tant que tel. Je vais considérer en tout trois cas :

- Le zero-thresholding :  $f_{\text{zero}} = F_{\text{obj}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ . Dans ce cas, La fonction f prendra simplement la valeur 0 lorsque X est en dehors du domaine. On considère dans ce cas l'ensemble du domaine de définition de X, en tuant l'influence de  $F_{\text{obj}}$  par X en dehors du domaine.

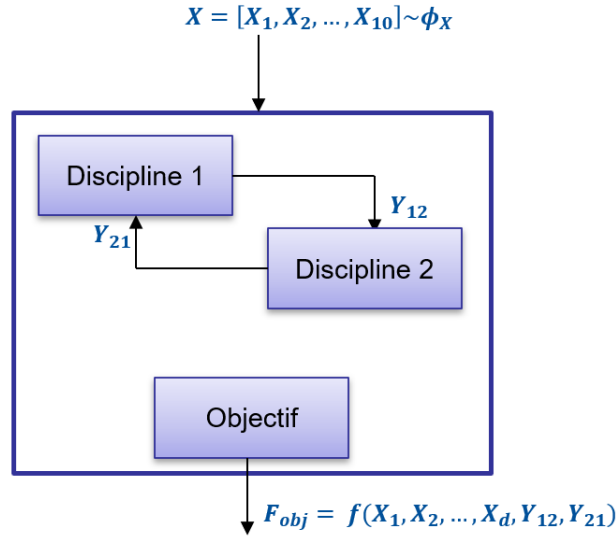


Figure 3: Modèle simplifié du projet

- Le conditional thresholding :  $f_{\text{cond}}(X) = F_{\text{obj}}(X) | (X \in \mathcal{D})$ . C'est similaire au zero-thresholding mais cette fois on restreint le domaine de définition de  $X$  à l'ensemble  $\mathcal{D}$ , ce qui peut paraître un détail mais à son intérêt dans la pratique.
- L'indicator-thresholding :  $f_{\text{ind}}(X) = \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(X)$ . Cette forme a la bonne manie de nous faire savoir quelles variables sont importante pour trouver le domaine  $\mathcal{D}$ , et ceux indépendamment du comportement de  $f$ .

Ainsi, on posera alors  $Y = f$  et non  $Y = F_{\text{obj}}$ , où  $f$  sera une des fonctions proposés précédemment. Nous préciserons laquelle lorsque cela sera nécessaire.

On ne considerera pas de contrainte d'égalité ou d'inégalité via les fonctions  $\mathbf{g}$  ou  $\mathbf{h}$  pour le domaine de faisabilité, mais uniquement le quantile  $q$  de la fonction objectif.

Précisons que  $X'$  ne représente pas nécessairement l'ensemble des variables de  $F_{\text{obj}}$ .  $X'$  représente uniquement l'ensemble des variables sur lequel on souhaite réaliser l'analyse de sensibilité, c'est à dire que l'on souhaite calculer  $\text{HSIC}(X', f)$ . Cependant, on ne souhaitera ici réaliser des HSIC qu'avec une seule variable aléatoire à la fois, donc ( $d = 1$ ). Chacun des  $X_i$  peut suivre en théorie sa propre loi, mais ils sont dans tout les cas supposés indépendants.

Bien sûr, comme on ne connaît pas la loi de  $f$ , on va utiliser des estimateurs statistiques et non réellement des probabilités. Dans [1], un estimateur du HSIC est fourni :  $\widehat{\text{HSIC}}(X', f)_N = \frac{1}{N^2} \text{tr}(KHLH)$ , avec  $K_{i,j} = k(x_i, x_j)$ ,  $L_{i,j} = l(y_i, y_j)$ , et  $H_{i,j} = \delta_{i,j} - \frac{(\mathbf{1}\mathbf{1}^T)_{i,j}}{N}$ . Les  $(x_i, y_i), i \in \{1, \dots, N\}$  sont des réalisations de la loi conjointe de  $(X', f)$ . Notons que pour connaître la réalisation de  $f$ , on calcule simplement  $f(X)$ . Tout est maintenant en place.

Le cas que je traiterai est le suivant :  $X = (X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9)$  où on a  $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}(a_i, b_i)$ . Les  $a_i$  et  $b_i$  sont des réels dont la valeur n'a pas d'importance. Par exemple, pour  $X_1$ , on a  $a_1 = 150$  et  $b_1 = 200$ . On ne va considérer que deux disciplines, la discipline 1 et 2. Les variables de couplages seront notés  $y_{1,2}$  et  $y_{2,1}$ .

La fonction objectif sera

$$F_{\text{obj}}(X, Y_{12}, Y_{21}) = \left( \frac{Y_{12}^{0.25}}{100} - 5 + X_2 \right)^2 + 10 \left( \frac{\log(X_0)}{100} - Y_{21}^{0.5} \right) - \frac{X_1 X_8}{1000}$$

On rappelle que l'on doit avoir  $c_{12}(X, Y_{21}) = Y_{12}$  et  $c_{12}(X, Y_{21}) = Y_{12}$  vérifiés par  $(Y_{12}, Y_{21})$ . On pose ici :

$$\begin{aligned} c_{21}(X, Y_{12}) &= 100((X_0^{0.3} + X_2^{0.2})/X_8^{0.6} \log(Y_{12}/(Y_{12} + 100))) + 500 + 5 \cos((Y_{12} + X_0)^{0.4})^2 \\ c_{12}(X, Y_{21}) &= 0.036 X_0^{0.758} X_1^{0.0035} + X_2/(\cos(X_3) + 1.5)^2 X_4^{0.006} X_6^{0.04} (100 X_6/(\cos(X_3) + 1.5)^2)^{0.3} (X_7 X_8)^{0.49} \\ &\quad + X_0 X_9 + 10(Y_{21}^{0.25})^3 + (X_7^{0.5}/X_5) + 20 \end{aligned}$$

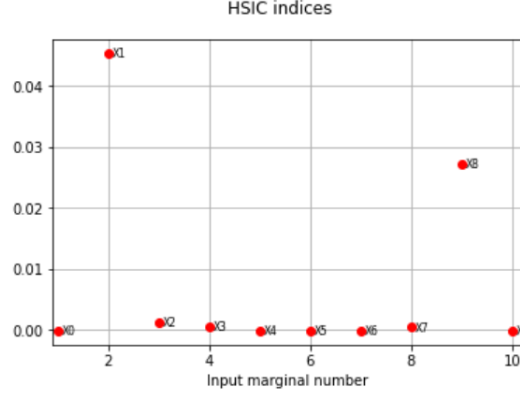


Figure 4: HSIC pour  $f = F_{\text{obj}}$

## 4.2 Détermination des HSIC

Afin de connaître le  $\widehat{HSIC}(X_i, f)$  pour chacune des variables, nous allons utiliser une librairie python appelée OpenTurns. C'est une librairie spécialisée dans l'implémentation d'outils probabilistes et statistiques qui nous sera très utile.

Dans un premier lieu, nous allons suivre la démarche suivante : on crée 500 échantillons de  $X$  suivant la loi décrite plus haut, puis par l'algorithme de Gauss-Seidel (non décrite), réalisé avec une précision arbitraire, on en déduit 500 échantillons de  $(Y_{12}, Y_{21})$  qui vérifient les contraintes de couplages. On en déduit ensuite 500 échantillons de  $f$ . Nous avons alors tout ce qu'il faut pour calculer l'estimateur. La librairie OpenTurns offre la possibilité de calculer le HSIC R2, qui fait plus sens pour comparer les variables entre elles. C'est un HSIC normalisé ayant pour expression

$$\widehat{R}_{HSIC}^2(X_i, Z) = \frac{\widehat{HSIC}(X_i, Z)}{\sqrt{\widehat{HSIC}(X_i, X_i)} \sqrt{\widehat{HSIC}(Z, Z)}}$$

Nous pouvons pour vérifier rapidement voir les HSIC avec  $f = F_{\text{obj}}$  afin de constater un résultat intuitif. Seul les HSIC des variables  $X_1$  et  $X_8$  possèdent des valeurs non négligeables, ce qui est rassurant au vu de leur place dans l'expression de  $F_{\text{obj}}$ . En revanche, on constate que  $X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_9$  ont des HSIC nuls, ce qui peut sembler à priori évident. Ils auraient cependant pu intervenir via  $Y_{21}$  et  $Y_{12}$ .

S'est ensuite posé la question de construire la fonction  $f$ . Pour définir le domaine  $\mathcal{D}$ , on utilise une commande pour connaître une estimation du quantile à 20 % grâce aux échantillons de  $F_{\text{obj}}$ .

Pour le zero-thresholding, il suffit de vérifier simplement si on a bien  $F_{\text{obj}}(X[i]) < q_{20\%}$ . Si non, on associe alors la valeur 0. On peut ensuite calculer l'estimateur.

Pour le conditional thresholding, il faut en amont sélectionner les échantillons qui nous intéressent. Il faut donc a priori réaliser plus de 500 échantillons pour que  $|\{X \in S / X \in \mathcal{D}\}| \geq 500$ , où  $S$  est l'ensemble des échantillons de  $X$  *a priori*. Après avoir sélectionné les bons, on calcule les correspondant  $F_{\text{obj}}$ . On a donc bien calculer  $f(X) = F_{\text{obj}}(X) | (X \in \mathcal{D})$ . On calcule alors l'estimateur.

En ce qui concerne l'indicator thresholding, on ne fait pas appel à la fonction  $F_{\text{obj}}$ , mais on associe seulement la valeur 1 lorsque que  $X \in \mathcal{D}$  et 0 sinon. On calcule alors le HSIC entre  $X$  et cette liste de 0 et 1.

Selon la fonction  $f$  choisie, les HSIC seront différents et par conséquent l'interprétation des informations sera de natures différentes. Il faut tout de même garder en tête que la valeur des HSIC n'est pas déterminante en soi, il dépend fortement du contexte dans laquelle on le calcule. Par exemple, si  $X_1$  a un HSIC de 3 pour le zero thresholding et de 1 pour le conditional thresholding, cela ne signifie absolument pas que  $X_1$  est trois fois plus important dans le premier cas que le second, ça n'est pas aussi simple.

## 4.3 Variante de la méthode

Une étape qui prend particulièrement de temps en pratique est l'algorithme de Gauss-Seidel, permettant de résoudre une équation de point fixe et de respecter le couplage entre les différentes disciplines. On aurait donc grand intérêt à être astucieux et éviter de répéter cette étape à chaque fois. L'algorithme de Gauss-Seidel permet d'effectuer la Multi-Disciplinary Analysis (MDA), qui consiste à trouver les  $y_{ij}$  solutions des contraintes. On reviendra d'avantage sur ce point en partie 2. Pour cela, on propose de procéder de manière différente :

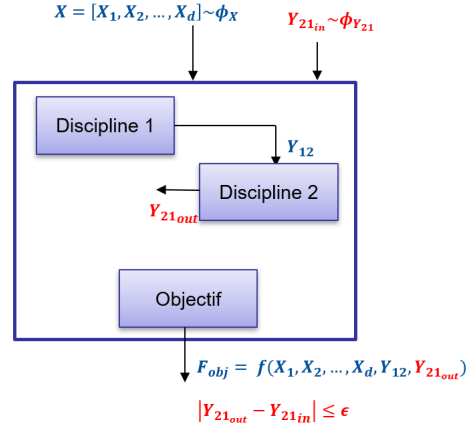


Figure 5: Approche découplée avec contrainte

- Générer 10 000 échantillons de  $X$  et appliquer l'algorithme de Gauss-Seidel. Pour chaque échantillon du vecteur  $X$  (de taille 10), on en déduit le couple  $(Y_{12}, Y_{21})$
- Grâce à OpenTurns, on peut en déduire une fonction de distribution de  $Y_{21}$ . Il existe une approche paramétrique et non paramétrique pour faire cela, c'est-à-dire soit on essaie de projeter sur une loi déjà connue de type gaussien, lognormal... , soit on construit totalement la fonction de répartition par somme de petite loi gaussienne bien localisée. Après avoir essayé la première, nous avons décidé de nous ramener à une loi non paramétrique.
- On adopte ensuite deux approches distinctes:
  - Comme on a la loi de  $Y_{21}^{\text{in}}$ , on en pioche des échantillons et on en déduit  $Y_{12}$ . On peut de nouveau alors calculer  $Y_{21}^{\text{out}}$  avec la  $c_{21}$ . On en déduit alors  $F_{\text{obj}}$ . C'est l'approche sans contrainte.
  - L'approche avec contrainte est identique modulo une contrainte supplémentaire. On veut que  $Y_{21}^{\text{in}}$  et  $Y_{21}^{\text{out}}$  vérifient  $|Y_{21}^{\text{in}} - Y_{21}^{\text{out}}| < \epsilon$ . Cela requiert cependant de prendre d'avantage d'échantillon que dans le cas découplé pour que l'on en ait assez vérifiant la contrainte.
- On calcule les HSIC pour  $f$ , sachant que l'on a pas eu alors besoin de faire appel à l'algorithme du point fixe.

Le schéma de la figure 5 [3] représente l'approche découplée avec contrainte.

## 5 Présentation des résultats

En soit, on regardera aussi la  $p$ -value des estimateurs utilisés, afin de quantifier notre degré de confiance. Dans notre cas, on notera l'hypothèse nulle :  $\mathcal{H}_{0,i} = \{ \text{les variables } X_i \text{ et } Z \text{ sont bien indépendantes i.e } HSIC(X_i, Z) = 0 \}$ . Ainsi, on aura donc  $p_{\text{value}}^i = \mathbb{P}[\widehat{HSIC}_N(X_i, Z) > \widehat{HSIC}_N(X_i, Z)^{\text{obs}} | \mathcal{H}_{0,i} \text{ est vraie}]$ . Classiquement, on choisit un niveau  $\alpha$ , et si  $p_{\text{value}}^i > \alpha$ , on rejette  $\mathcal{H}_{0,i}$ . Dans le cas contraire, on garde l'hypothèse nulle. Une  $p_{\text{value}}$  proche de zero signifiera donc que l'on peut rejeter  $\mathcal{H}_{0,i}$  avec une bonne confiance. J'ai décidé de présenter de cette manière de faire. Je comparerai la méthode couplée et découplée en trois sous-parties, chaque sous partie correspondant à une fonction  $f$  différente. Ces deux résultats ne sont pas directement comparable, puisque dans le premiers cas, nous avons 10 variables (le vecteur  $X$ ) tandis que le second cas comprend 11 variables d'entrées.

Les figures 6 et 7 comparent les deux méthodes lorsque  $f = f_{\text{thresh}}$ , les figures 8 et 9 lorsque  $f = f_{\text{cond}}$  et les figures 10 et 11 lorsque  $f = f_{\text{ind}}$ . J'ai pris  $\epsilon = 0.1$  pour faire les figures situés à droite (cas sans couplage entre la discipline 1 et 2, voir figure 5). On peut constater des valeurs négatives pour le HSIC et la  $p_{\text{value}}$ , c'est dû au fait qu'il ne s'agit que d'estimateur, et non de valeurs exactes. De manière générale, on observe que les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_8$  sont celles qui jouent le plus gros rôles, quel que soit  $f$ . Prenons une valeur qui semble ne jouer que peu de rôle,  $X_5$  par exemple. On voit que son HSIC est toujours faible, autour de 0, ce qui laisse supposer une indépendance. Que ce soit pour être dans  $\mathcal{D}$  ou la valeur de  $F_{\text{obj}}$ ,  $X_5$  n'est pas déterminant. Cela se confirme d'autant plus sur les valeurs de  $p_{\text{value}}$ , qui sont toutes au dessus des niveaux classiques : 0.1 ou 0.05. On peut donc



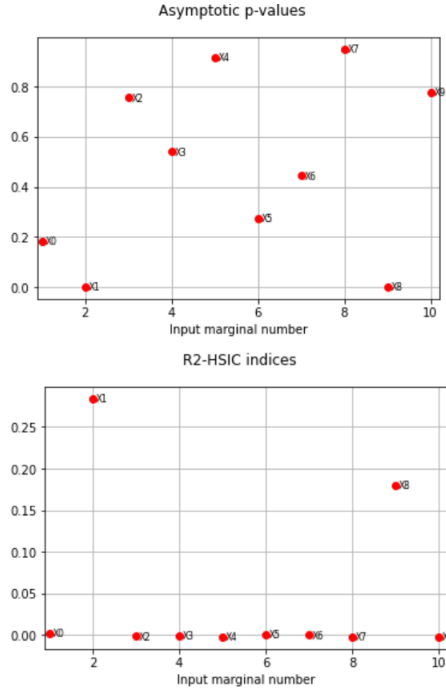


Figure 6:  $f = f_{\text{thresh}}$  avec couplage

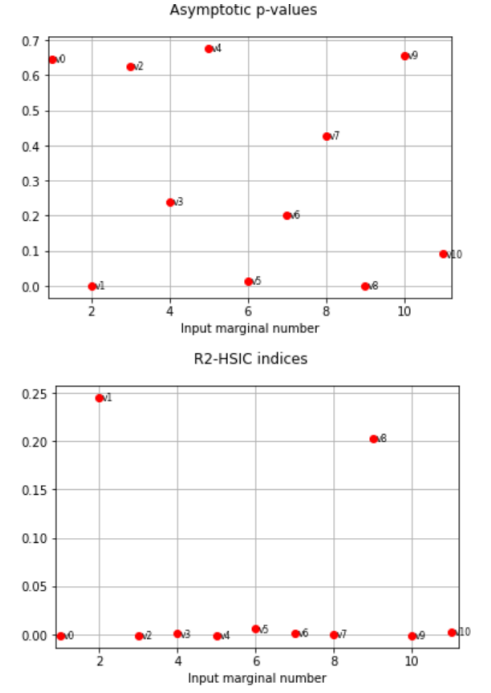


Figure 7:  $f = f_{\text{thresh}}$  sans couplage et avec contrainte

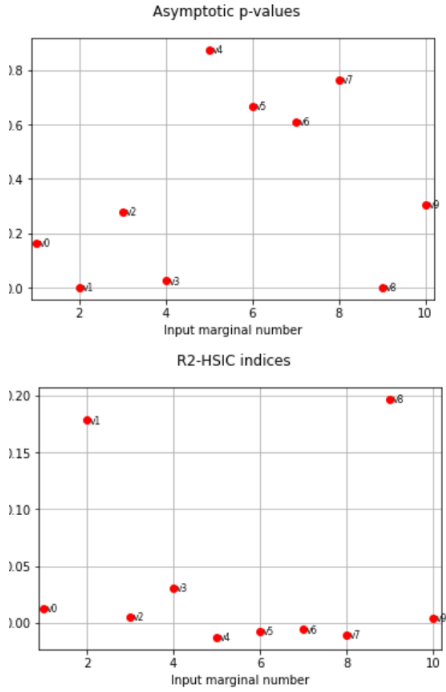


Figure 8:  $f = f_{\text{cond}}$  avec couplage

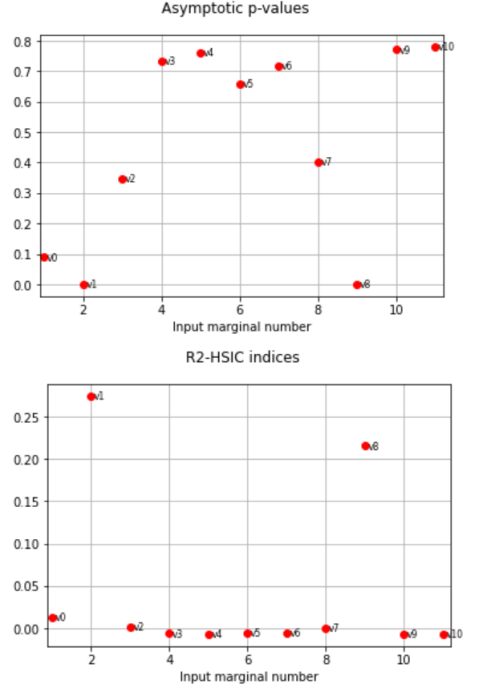


Figure 9:  $f = f_{\text{cond}}$  sans couplage et avec contrainte

garder l'hypothèse  $\mathcal{H}_{0,5}$  en ayant confiance.

Les HSIC semblent assez peu dépendant de la contrainte de couplage, le comportement est globalement identique. En revanche, en ce qui concerne les  $p_{\text{value}}$ , leur comportement est bien plus sensible à  $\epsilon$ .

Il faut se rappeler après tout qu'il est difficile de comparer de manière brut les résultats statistiques entre les deux méthodes. Des résultats peuvent paraître contradictoire. La  $p_{\text{value}}$  sur la figure 7 de  $X_5$  est quasiment

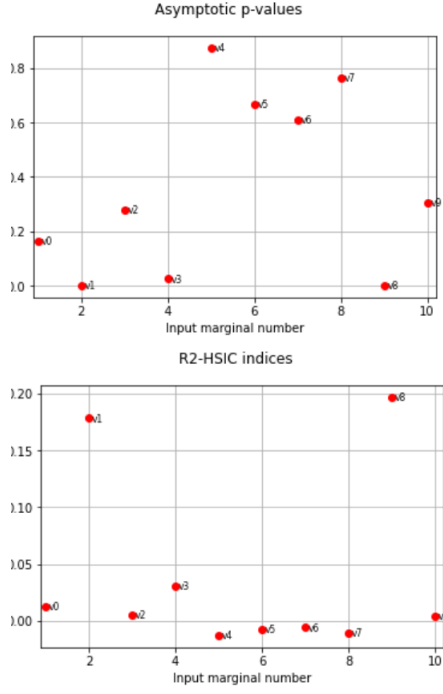


Figure 10:  $f = f_{\text{ind}}$  avec couplage

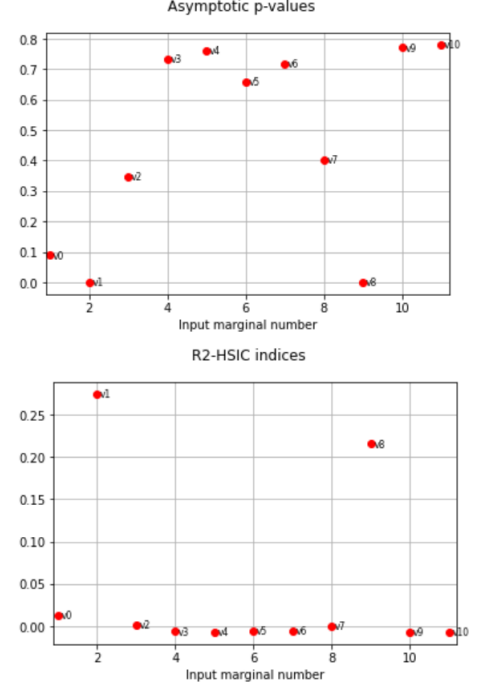


Figure 11:  $f = f_{\text{ind}}$  sans couplage et avec contraintes

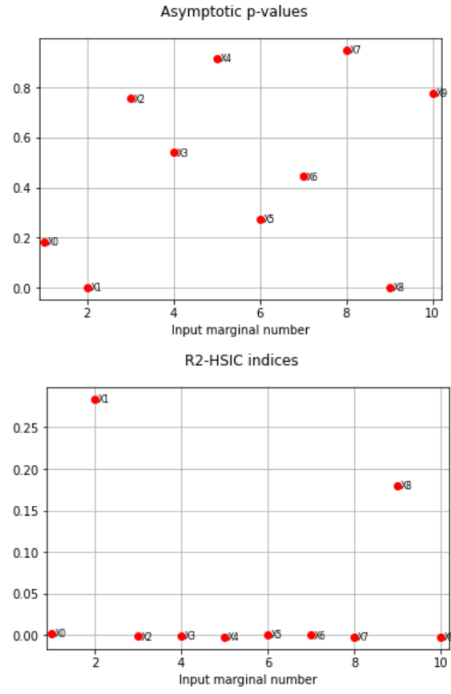


Figure 12:  $f = f_{\text{thresh}}$  avec couplage et  $\epsilon = 0.1$

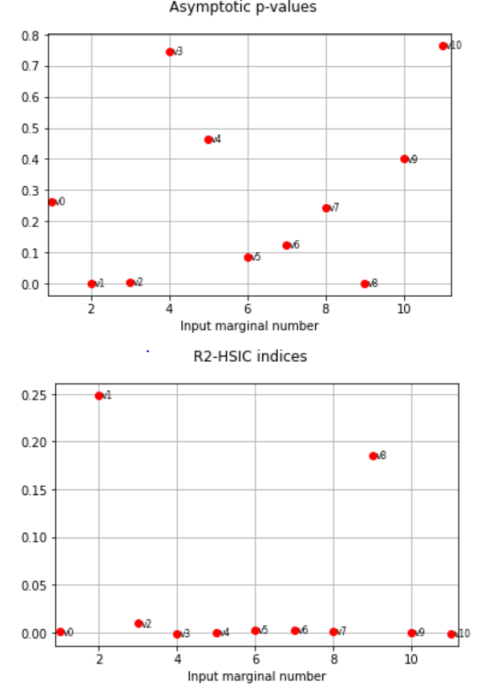


Figure 13:  $f = f_{\text{thresh}}$  avec couplage et  $\epsilon = 0.001$

nul, ce qui pourrait laisser penser que  $\mathcal{H}_{0,5}$  est vraie.

## 6 Perspectives

Concernant les perspectives d'avenir, il faudrait faire une analyse plus fine des résultats statistiques obtenus dans la dernière partie. C'est-à-dire établir une procédure rigoureuse grâce à la  $p_{\text{value}}$  afin de discréditer les variables peu influentes sur la fonction objectif. L'analyse que j'en ai tiré reste pour le moment assez superficiel et je n'ai pas eu le temps de tout prendre en compte, notamment le traitement pour chacune des variables. Les bases sont cependant posés. La valeur des  $p_{\text{value}}$  pouvait grandement changer entre deux séries d'échantillons, plus particulièrement si je change la valeur de  $\epsilon$ . Une autre avancée serait d'exploiter plus en profondeur le gain obtenus en relâchant la contrainte de couplage entre les disciplines, notamment sur le temps de calcul, ou en mettant plus de disciplines par exemple.

## 7 Conclusion partie 1

Le contexte de la démarche et les bases théoriques ont été présenté en début de rapport. En particulier, celui de l'optimisation multi-disciplinaire, si important pour l'ingénierie spatiale. Nous avons ensuite pu faire une première application de l'analyse de sensibilité dans un cadre très simplifié : un système composé de deux disciplines et de dix variables d'entrée. Afin de déterminer la sensibilité d'une variable sur une fonction, on a utilisé l'indice HSIC, plus précisément son estimateur, ainsi que la  $p_{\text{value}}$ . Les résultats obtenus grâce à la librairie openturns ont été présenté pour différentes fonctions  $f$ . Cette démarche générale permettra de trouver les variables déterminantes selon le problème que l'on se pose.

## Part II

### 8 Introduction des objectifs

Dans cette deuxième partie de projet, j'ai concentré mes efforts sur un moyen de déterminer une fonction de distribution, en ne connaissant uniquement que la loi de probabilité des variables d'entrées et la relation fonctionnelle  $f$ . L'objectif est d'éviter à tout prix la résolution d'un système de contrainte couplé dans la formulation Multi Disciplinary Feasible (MDF). Ce processus de résolution étant appelé Multi-Disciplinary Analysis (MDA) et peut être très coûteux. On l'a fait dans la partie 1 grâce à une méthode du point fixe, l'algorithme de Gauss-Seidel. Il s'agit principalement, comme l'illustre les figures 1 et 2, de trouver les  $y_{ij}$  satisfaisant les contraintes. En effet, rappelons que pour connaître la loi de  $Y_{21}$ , on avait construit un histogramme **après** avoir effectué la MDA et ainsi calculer sa CDF avec une technique d'ajustement non paramétrique par la suite. Il n'y a donc pas eu de réel gain, mais le but était alors le calcul des HSIC sans de Gauss-Seidel *a priori*, quitte à tricher un peu.

Afin de réellement percevoir un gain de temps, on ne peut pas résoudre les contraintes de couplages en amont avec l'algorithme de Gauss-Seidel, il faut trouver une autre manière de déterminer la loi de  $u_{21}$ . C'est là tout l'objet de cette seconde partie de projet. On peut rapidement énoncer que pour éviter la MDA, d'autres formulations existent comme l'Individual Discipline Feasible (IDF), ou la Collaborative Optimization (CO) par exemple. On n'emploiera pas ce chemin-là, on utilisera plutôt des outils statistiques avec encore une fois la librairie **OpenTurns**. Cette partie s'inspirera en grande partie des travaux réalisés dans [4].

Dans cette partie, les variables de couplages ne seront plus notées  $y_{12}$  et  $y_{21}$ , mais  $u_{21}$  et  $u_{12}$ , par soucis de cohérence avec [4].

### 9 La méthode LAMDA

#### 9.1 Contexte

Je rappelle ici rapidement la démarche générale. On souhaite calculer les HSIC afin de faire de l'analyse de sensibilité, pour répondre à la question suivante : Dans le domaine d'intérêt  $\mathcal{D}$ , quelles variables influencent le plus  $f_{obj}$ ? Tout ceci dans le but de résoudre un problème d'optimisation dans un cadre particulièrement riche et complexe. Pour calculer ces HSIC, on a considéré les variables d'entrées,  $X$ , comme des variables aléatoires. On a ensuite décidé de faire de même pour  $Y_{21}$ , en supposant connaître sa loi, pour éviter de résoudre la MDA. L'intérêt de la manoeuvre étant de gagner un temps considérable de calcul. Cependant, comme je l'ai expliqué dans la section précédente, on a triché pour connaître cette loi, car on a dû précisément résoudre la MDA. La méthode Likelihood-Based Approach to Multidisciplinary Analysis (LAMDA) va nous permettre de contourner ce problème. Cette approche va offrir plusieurs avantages :

- On découple les disciplines 1 et 2, ce qui réduit considérablement la complexité de l'algorithme.
- La méthode proposée permet de calculer la PDF exact, du moins en théorie, car nous allons devoir faire des approximations techniques.

Pour illustrer la méthode LAMDA, nous allons nous appuyer, à l'image de la partie 1, sur un système à deux disciplines couplées [4]. (figure 14)

On ne considérera cette fois pour plus de clarté tout en restant général que 3 variables d'états : le vecteur  $x_1$  pour la discipline 1, le vecteur  $x_2$  pour la discipline 2 et le vecteur  $x_s$  pour les variables de conceptions partagées. Pour découpler le problème, on ne considère plus la relation fonctionnel  $c_{12}(x_1, x_2, x_s, u_{21})$ , on l'ignore tout simplement. Jusque-là, tout est comme dans la première partie. On n'obtient alors plus une représentation circulaire, mais linéaire de la propagation des données dans la formulation du système (figure 15). Pour garder la compatibilité du système, on doit imposer  $u_{12} = U_{21}$ , condition équivalente à la contrainte en partie 1  $|Y_{21} - Y_{21_{out}}| < \epsilon$ . Notons tout de même que l'on a pas découpé de la même manière qu'en partie 1, puisque c'est la variable de couplage  $u_{12}$  qu'on considère en entrée, et non  $u_{21}$ . Cela n'est en rien décisif pour la suite.

Contrairement à la partie 1, LAMDA va considérer ici dans un premier temps  $u_{12}$  comme une constante. Cependant, chacune des variables de conceptions seront considérées des variables aléatoires non corrélées et de loi normale (donc indépendante). La problématique est alors de connaître la probabilité de l'événement  $U_{12}(x, u_{12}) = u_{12}$ . En effet, comme  $x$  est un vecteur aléatoire, toutes les valeurs de  $x$  ne sont pas équiprobables et par conséquent la probabilité que  $U_{12}(x, u_{12}) = u_{12}$  peut être représenté par une fonction de probabilité. A l'image d'un statisticien, on peut considérer  $u_{12}$  comme un paramètre. On introduit alors la vraisemblance (ou likelihood en anglais) :

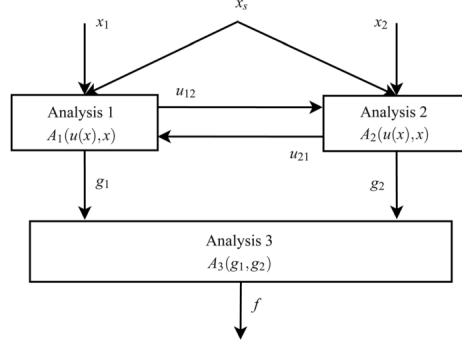


Figure 14: Système Multi-Disciplinaire initial

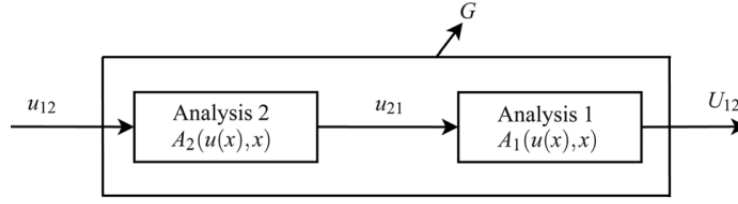


Figure 15: Représentation des disciplines découplées

$L_{U_{12}}(x) = \mathbb{P}[U_{12} = x|u_{12}]$ . La vraisemblance permet de quantifier la probabilité que ce paramètre est celui qui est le mieux ajusté pour l'événement  $U_{12} = x$ . On s'intéresse donc en particulier à  $L_{u_{12}}(u_{21})$  afin de garantir la compatibilité. On peut ensuite intuitivement estimer pour la fonction de distribution de  $u_{12}$ ,  $f(u_{12}) \propto L(u_{12})$ . En introduit une constante de normalisation, on a alors :

$$f(u_{12}) = \frac{L(u_{12})}{\int L(u_{12}) du_{12}}$$

## 9.2 Calcul de la vraisemblance

On est donc ramené à évaluer  $L_{U_{12}}(u_{21})$ . Pour évaluer, on peut y voir plus claire en écrivant que  $L_{U_{12}}(u_{21}) = \mathbb{P}[U_{12} = x|u_{12}] \approx \int_{u_{12}}^{u_{12}+\epsilon} f_{U_{12}|u_{12}}(x) dx \approx \epsilon f_{U_{12}|u_{12}}(u_{12})$ , avec  $\epsilon$  un paramètre petit arbitraire. Pour l'implémentation numérique, on va devoir faire des approximations. Tout d'abord, pour calculer la densité de probabilité, on va procéder par différence de fonction de répartition. De plus, pour estimer la fonction de répartition, on utilisera l'algorithme First Order Reliability Method (FORM). Je vais maintenant m'attarder à la description de cette méthode. Dans un cadre général, supposons que l'on veuille calculer, avec  $X = (X_1, X_2)$ ,

$$\mathbb{P}[X \in \mathcal{D}] = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\mathcal{D}}(x) df_{X_1, X_2}(x)$$

. Ici,  $\mathcal{D}$  est un certain domaine, qu'on estime être le domaine d'échec. Il n'est pas envisageable d'estimer une telle intégrale analytiquement. L'algorithme FORM permet au prix d'une petite approximation de déterminer cette intégrale. Dans notre cas initiale, on aimerait alors calculer  $\mathbb{P}[U_{12} \leq u_{12}|u_{12}]$ . On voit tout de suite que le domaine de défaillance est  $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid U_{12}(x, u_{12}) > u_{12}\}$ . Son complémentaire est appelé le domaine fonctionnel. Pour cela, on doit

- Trouver une transformation dite iso-probabiliste.
- Trouver le 'design point'.
- Enfin, estimer l'intégrale.

En d'autre termes, on va faire un changement de variable, estimer la forme de  $\mathcal{D}$  dans ce nouvel espace pour enfin calculer l'intégrale. Si on note  $\mathcal{X}^d$  l'espace de  $X$ , et  $\mathcal{U}^d$  l'espace des variables aléatoires gaussiennes centrées

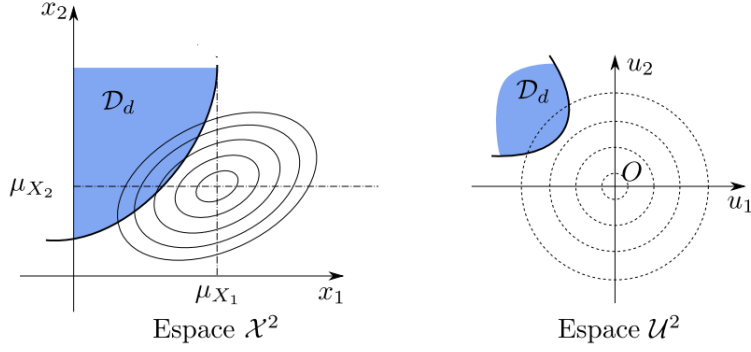


Figure 16: Schéma de la transformation ([2])

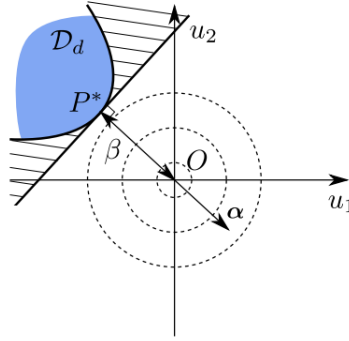


Figure 17: Schéma avec le design point ([2])

réduites appelé espace standard. On introduit une fonction  $T$  :  $\begin{matrix} \mathcal{X}^d & \rightarrow & \mathcal{U}^d \\ X & \mapsto & v = T(X) \end{matrix}$ , avec  $u \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ . Cette transformation est nommée iso-probabiliste car elle possède la propriété suivante :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{X}^d}[U_{12}(X, u_{12}) < u_{12}] = \mathbb{P}_{\mathcal{U}^d}[U_{12}(v, u_{12}) < u_{12}]$$

, où  $\mathbb{P}_{\mathcal{X}^d}$  et  $\mathbb{P}_{\mathcal{U}^d}$  sont respectivement les mesures de probabilités sur  $\mathcal{X}^d$  et  $\mathcal{U}^d$ . Par conséquent, mesurer  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{X}^d$  ou dans  $\mathcal{U}^d$  est strictement la même chose. Je ne discuterai pas l'existence ni même la construction de telle fonction, on peut cependant retenir que c'est la transformée de Rosenblatt qui est employé dans **OpenTurns** par défaut. Il est tout de même intéressant de noter que cette transformations marchent même lorsque  $X$  est un vecteur aléatoire dont les composants sont corrélés.

Le 'design point' est défini comme étant le point le plus proche de l'origine appartenant à l'adhérence de  $\mathcal{D}$  :  $\partial\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid U_{12}(x, u_{12}) = u_{12}\}$ . Ce point est déterminé grâce au problème d'optimisation suivant :

$$(6) \quad \begin{aligned} \min_v \quad & \beta = v^T v \\ \text{s.t.} \quad & U_{12}(v, u_{12}) \leq 0 \end{aligned}$$

Il s'agit donc ici d'un pur problème géométrique, il est par ailleurs direct de voir que  $v^T v$  représente bien le carré d'une distance par rapport à l'origine dans ce contexte. On note  $\beta^*$  la solution du problème d'optimisation. La figure 17 de [2] illustre de nouveau le résultat. Cette recherche du design point se fait grâce à un algorithme de descente de gradient. Cet algorithme suppose cependant déjà être dans l'espace adéquat et utilise des approximations par hyperplans.

Le design point est noté  $P^*$ . Ce problème d'optimisation peut être résolu grâce à l'algorithme de Rackwitz-Fiessler. Cet algorithme a été proposé dans le cadre dans lequel on va l'utiliser : la minimisation d'une distance dans un espace standard. Sans nécessairement rentrer dans les détails, cet algorithme va introduire un espace intermédiaire  $\mathcal{Z}$  de  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{U}$  et va itérativement utiliser l'algorithme pour trouver le design point.

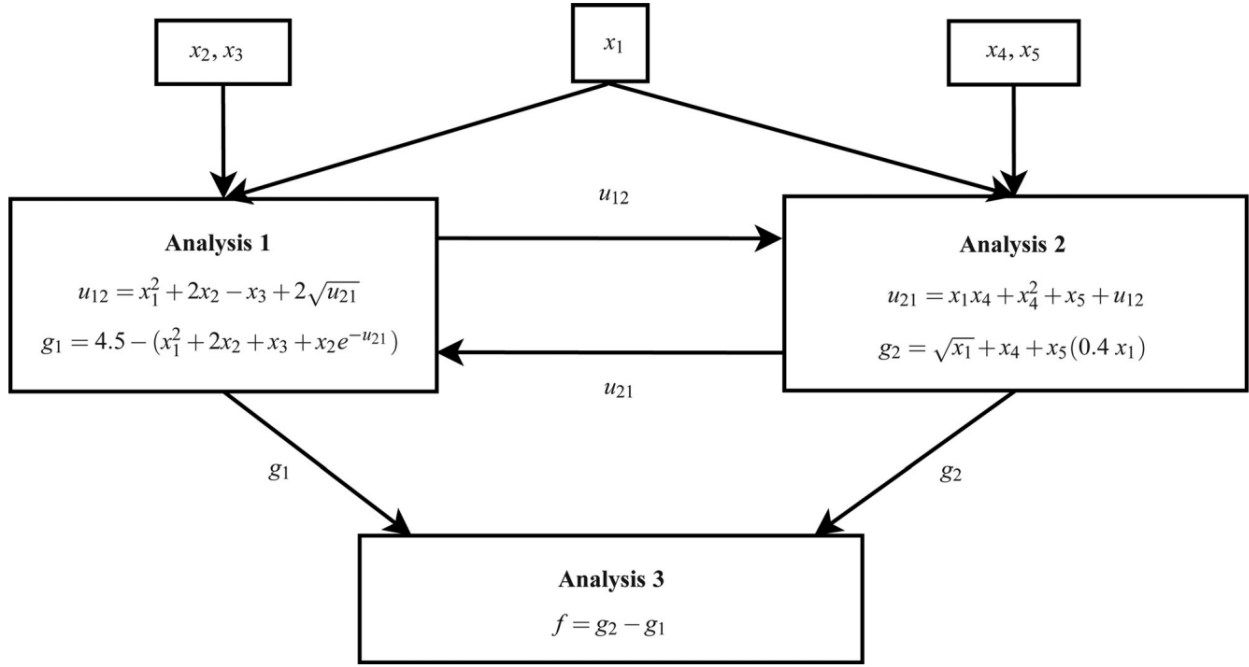


Figure 18: Modèle jouet de [4]

Une fois que l'on a résolu ce problème, on peut alors utiliser  $\beta^*$  pour calculer la fonction de répartition. En effet, dans l'espace standard, étant donné que la variable  $v$  est invariante par rotation, on peut faire le calcul avec une seule variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Si on note  $\Phi$  la fonction de répartition d'une gaussienne standard, on a alors  $\mathbb{P}_{\mathcal{X}}[U_{12} \notin \mathcal{D}] = \mathbb{P}_{\mathcal{U}}[v \notin \mathcal{D}] \approx \Phi(-\beta^*) = 1 - \Phi(\beta^*)$ . C'est la seconde approximation évoquée plus tôt. Maintenant, pour calculer la vraisemblance, on va résoudre ce problème pour un certain  $u_{12}$  et pour  $u_{12} + \epsilon$ , avec  $\epsilon$  une constante arbitrairement petite choisie au préalable. Ensuite, par différence finie, on en déduira la densité de probabilité car on sait bien que

$$f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx} \approx \frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{\epsilon}$$

Ainsi, deux évaluations seront nécessaire pour connaître la densité de probabilité en un point. En théorie, il y aura aussi besoin d'estimer l'intégrale  $\int L(u_{12}) du_{12}$ . Pour cela, on utilise une technique de quadrature dû à Simpson sur chacune des composantes si  $u_{12}$  est un vecteur. On peut en effet écrire d'après Fubini,  $\int L(u_{12}) du_{12} = \int \cdots \int L(u_{12}) du_{12}^1 \cdots du_{12}^m$ . La règle '3/8' de Simpson consiste à écrire que

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} (f(a) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + f(b))$$

Après cela, on arrivera finalement à calculer  $f(u_{12})$  après avoir normalisé  $L(u_{12})$ . Procédons maintenant à un exemple.

## 10 Application à un exemple

On va traiter dans cette section à un exemple sans contexte, juste pour essayer. La figure 18 le présente.

On a ici  $d = 5$ . Les équations sont directement présentés sur la figure 18. Le but de la manoeuvre est de déterminer la densité de probabilité de  $u_{12}$ . On va donc découpler le système, et considérer  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  comme des variables aléatoires. On prendra ici :  $x_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(1, 0.1)$  pour  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . On va faire varier  $u_{12}$  entre 7 et 11. J'ai réussi à reproduire le résultat de [4] avec un code que je fournirai. La comparaison est illustré sur les figures 19 et 20. J'ai pris  $\epsilon = 0.1$

On constate immédiatement que les résultats sont très similaires. On pourrait par ailleurs aussi faire de même pour les fonctions de distributions (figure 21 et 22).

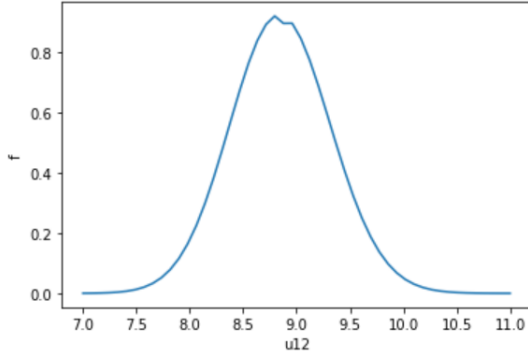


Figure 19: fonction de densité de  $u_{12}$  calculée par mon code

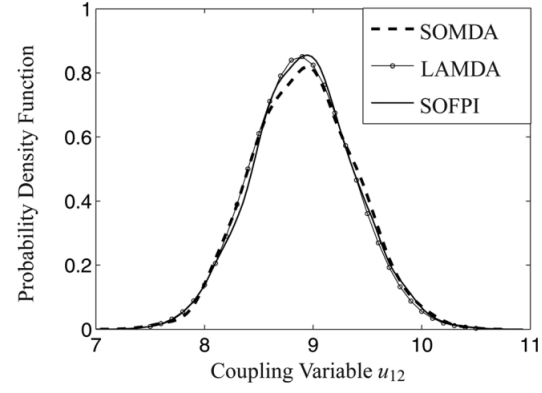


Figure 20: fonction de densité de  $u_{12}$  [4]

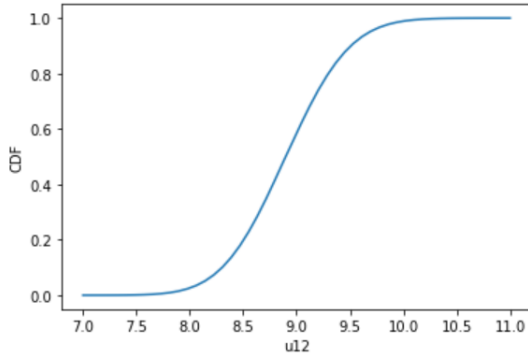


Figure 21: fonction de distribution de  $u_{12}$  calculée par mon code

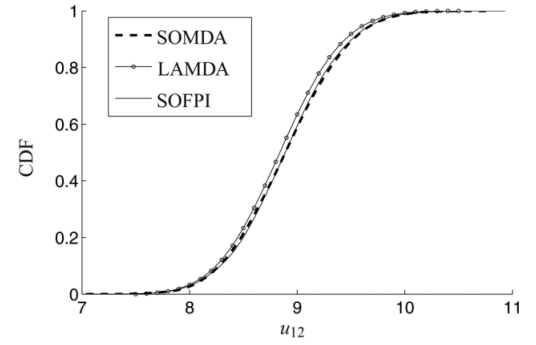


Figure 22: fonction de distribution de  $u_{12}$  [4]

Pour s'assurer de la pertinence du résultat, on peut réaliser le calcul analytique de l'espérance et la variance de  $u_{12}$ . En effet, au premier ordre, on fait l'approximation  $\mathbb{E}[\sqrt{X}] \approx \sqrt{\mathbb{E}[X]}$  et  $\mathbb{E}[X^2] \approx \mathbb{E}[X]^2$  puisque les variables aléatoires sont centrées en 1 avec une faible variance. On a le système suivant

$$(7) \quad \begin{cases} \mathbb{E}[u_{12}] = \mathbb{E}[x_1]^2 + 2\mathbb{E}[x_2] - \mathbb{E}[x_3] + 2\sqrt{\mathbb{E}[u_{21}]} \\ \mathbb{E}[u_{21}] = \mathbb{E}[x_1]\mathbb{E}[x_4] + \mathbb{E}[x_4]^2 + \mathbb{E}[x_5] + \mathbb{E}[u_{12}] \end{cases}.$$

On trouve alors que  $\mathbb{E}[u_{12}] \approx 8.9$ , ce qu'on constate bien sur la figure. De même pour la variance, au premier ordre, on écrit :

$$u_{12} \underset{x \approx 1}{=} \mathbb{E}[u_{12}] + \sum_{i=1}^d \frac{du_{12}}{dx_i} (x_i - 1)$$

En prenant la variance, on arrive alors à la relation (au premier ordre):

$$\text{Var}[u_{12}] = \sum_{i=1}^d \left( \frac{du_{12}}{dx_i} \right)^2 \text{Var}[x_i]$$

En calculant les dérivées successives, on calcule que  $\sqrt{\text{Var}[u_{12}]} = 0.333$ , ce qui semble faire justice à ce qu'on observe. Cette technique peut nous permettre de sentir où la PDF se situera sur l'axe des réels, ce qui est important car le calcul de la PDF ne peut se faire que sur un intervalle restreint. Une fois obtenus, on pourrait propager cette PDF dans toutes les disciplines, et obtenir ainsi la PDF de  $g_1$ ,  $g_2$ , de  $u_{21}$  ou encore  $f$ . [4] en profite pour le faire avec  $f$ . J'ai aussi réussi à le reproduire. Pour faire cela, j'ai utilisé une méthode de Monte-Carlo. A partir de la PDF de  $u_{12}$ , je réalise  $Nb_{sample} = 5000$  tirages aléatoires de  $u_{12}$  et de  $x$ . Je calcule  $g_1$  et  $u_{21}$  à partir de cet échantillon. Ensuite, je calcule  $g_2$  et enfin  $f$ . A partir de l'échantillon de  $f$ , je peux en déduire une PDF. J'ai utilisé le même outil qu'en partie 1 : un estimateur de PDF non paramétrique.



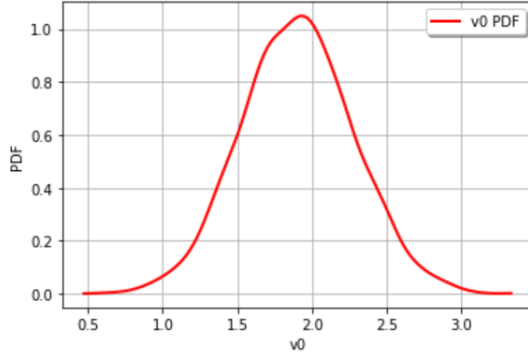


Figure 23: Pdf de f après propagation par Monte Carlo

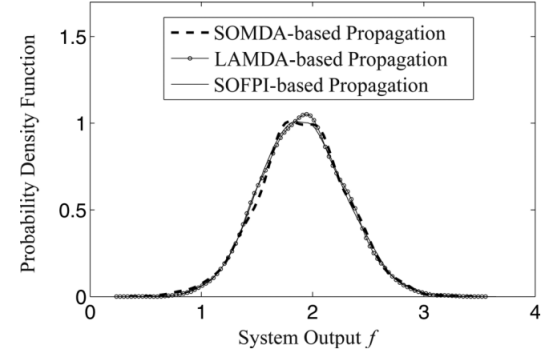


Figure 24: PDF de f d'après [4]

J'obtiens la figure 23:

Encore une fois, le résultat est assez convaincant.

L'objectif initial a donc été rempli, on a pu estimer la PDF de  $u_{12}$  sans faire aucune MDA. On pourrait donc ensuite calculer les HSIC avec la même méthode qu'en partie 1.

## 11 Application à un modèle de satellite détecteur d'incendie

### 11.1 Présentation du modèle

Dans cette dernière partie de rapport, nous allons utiliser la méthode illustré précédemment sur un cas plus concret mais plus compliqué. Le modèle est illustré par la figure 25 :

Le satellite possède 3 disciplines. Une discipline relatif à son orbite (I), une concernant la puissance au sens large distribué dans le système (II) et enfin une concernant le contrôle d'altitude (III). Chaque disciplines sont interconnectés et on des variables de couplages ( $\theta_{slew}, \nu, \Delta t_{orbite}, \Delta t_{eclipse}, I_{max}...$ ). Les variables de conceptions apparaissent clairement ( $H, P_{other}, F_s, \theta, L_{sp}...$ ), tout comme les variables de sorties ( $\tau_{tot}, P_{tot}, A_{sa}$ ). Les variables de conceptions qui apparaissent sur la figure 25 obéissent à des lois gaussiennes, mais restent indépendantes.

On va se concentrer sur la discipline du contrôle d'orbite et celle sur la puissance d'alimentation. On commence par donner les différentes relations entre les variables. On suppose le satellite sur une orbite circulaire. D'après Newton, on sait que  $\nu = \sqrt{\frac{\mu}{R_E + H}}$  et d'après la troisième loi de Kepler, on a  $\Delta t_{orbit} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_E + H)^3}{\mu}}$ . La période d'éclipse d'un satellite est la durée durant laquelle le satellite reste dans l'ombre de la Terre. On peut la calculer avec la formule :

$$\Delta t_{eclipse} = \frac{\Delta t_{orbite}}{\pi} \arcsin \frac{R_E}{R_E + H}$$

Etant donné qu'il y a beaucoup de variable, je ne décris pas l'ensemble des relations entre elles, on gardera cependant en tête qu'elle sont bien nécessaire pour l'analyse qui va suivre. On peut se référer à [4] si le lecteur est intéressé.

### 11.2 Détermination des fonctions de densités de probabilités

La grandeur qui va nous intéresser pour la suite est la puissance réservé pour le contrôle de l'altitude, note  $P_{ACS}$ . On va donc découpler les disciplines II et III, et on va chercher la PDF de  $P_{ACS}$ . Bien que les grandeurs soient reliés de façon plus enchevêtré, on applique exactement la même procédure que pour le cas test. Le résultat est affiché sur les figures 26 et 27.

On constate qu'en moyenne, la discipline II demande une puissance de 67W. Aussi, j'ai pu faire propager ce résultat et par conséquent obtenir la PDF de  $P_{tot}$ . (figure 28)

Les PDF de  $\tau_{tot}$  et  $A_{sa}$  ont aussi été fait, mais pas illustré ici, pour plus de concision. On pourra les retrouver dans le notebook.

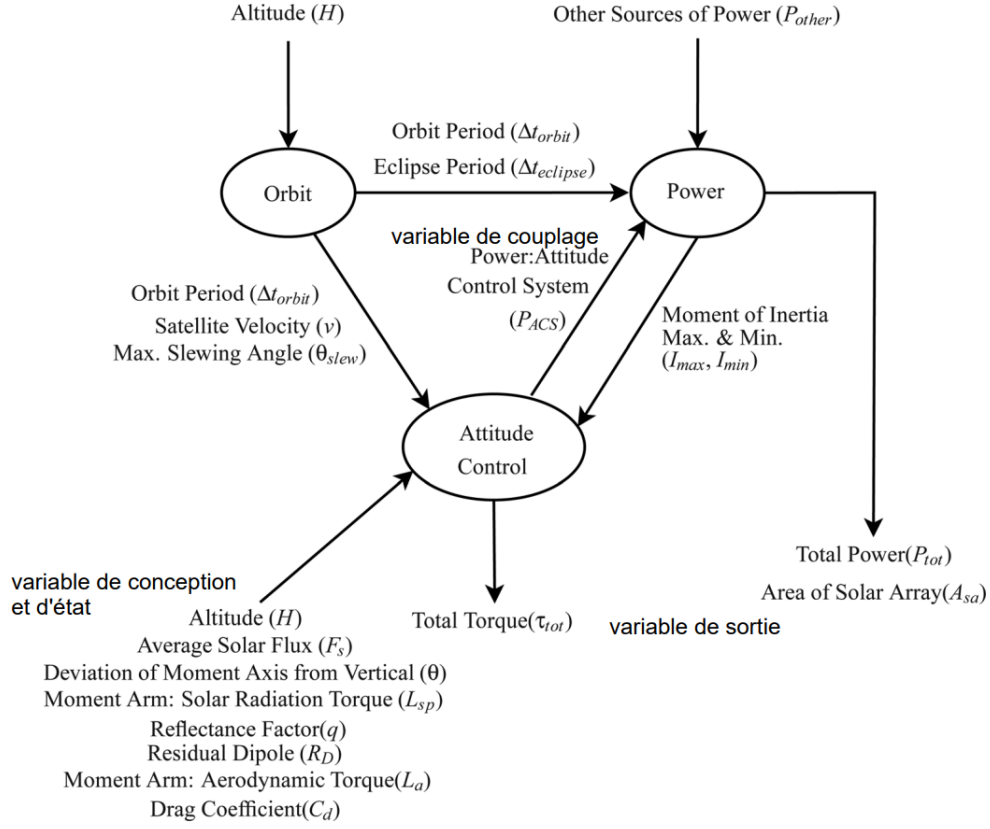


Figure 25: Satellite à 3 disciplines [4]

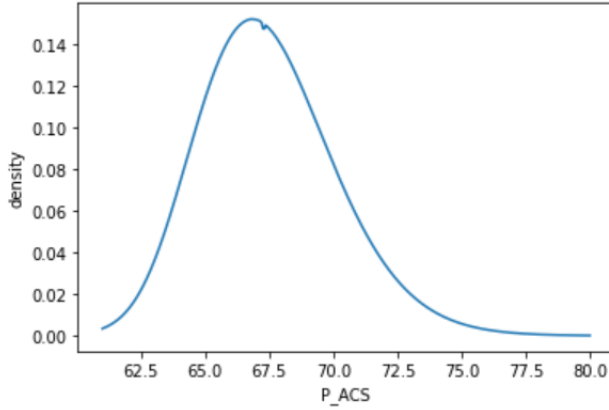


Figure 26: PDF de  $P_{ACS}$  avec mon code

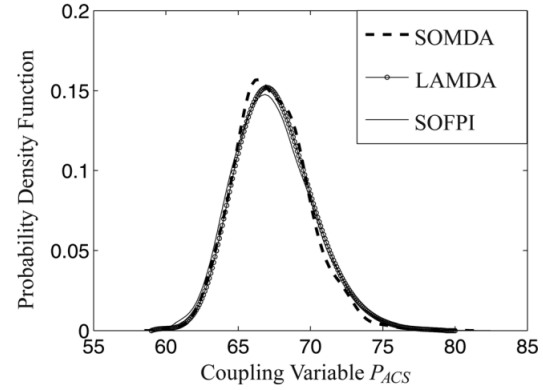


Figure 27: PDF de  $P_{ACS}$  [4]

### 11.3 Calcul des HSIC

Le calcul des HSIC est maintenant réalisable. Tout comme en première partie, on génère des échantillons de  $P_{ACS}$  et de  $P_{other}$ . On en déduit le  $P_{tot}$  correspondants. On utilise encore un kernel en 'squared exponential' pour la covariance.

De même, on pourrait le faire pour  $\tau_{tot}$  et  $A_{sa}$ . Par soucis de concision, j'ai décidé de ne pas le mettre dans le rapport. On peut analyser sur ce diagramme que seul  $P_{other}$  semble avoir une vraie influence sur  $P_{tot}$ , ce qui est cohérent étant donné que  $P_{other} \approx 1000W$ , tandis que  $P_{CSA} \approx 67W$ . Voir figure 30.

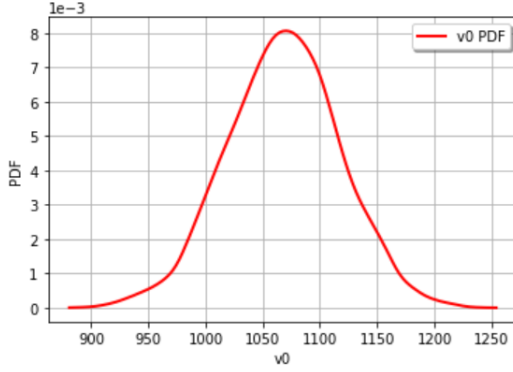


Figure 28: PDF de  $P_{tot}$  avec mon code

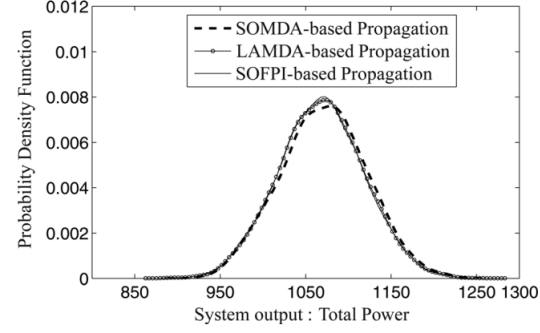


Figure 29: PDF de  $P_{tot}$  [4]

## 12 Conclusion

Ce projet aura permis de s'intéresser à plusieurs aspects de l'optimisation multi-disciplinaire. En première partie, on s'est occupé à définir le contexte et enjeux de l'optimisation multi-disciplinaire [3], ainsi qu'un exemple d'application de l'analyse de sensibilité dans un cas simple en utilisant un outil statistique relativement récent : les HSIC [1]. Ces derniers ont bien été implémentés, et ceux pour différentes fonctions objectifs, selon la nature de la sensibilité que l'on souhaite quantifier. Cependant, une étape coûte trop cher dans les cas un peu plus réaliste, celle de résoudre la MDA par un algorithme de point fixe. Pour cela, il a été proposé de découpler les disciplines et d'utiliser une loi de probabilité pour la valeur prise par la variable de couplage. Cependant, pour trouver cette loi, on a dû tricher. C'est alors l'objet de la partie 2 que de trouver une manière de le faire sans faire de MDA à aucun moment. J'ai alors implémenté la méthode LAMDA [4] avec succès pour un cas test, et un cas d'un satellite de détection d'incendie. Cette dernière nous a alors finalement permis de tracer les HSIC. LAMDA propose donc un cadre pour calculer quasi exactement une fonction de densité, et ceci en gardant la contrainte de compatibilité du système. Par ailleurs, c'est facilement implémentable pour le cas où il y a bien plus de variable d'entrées.

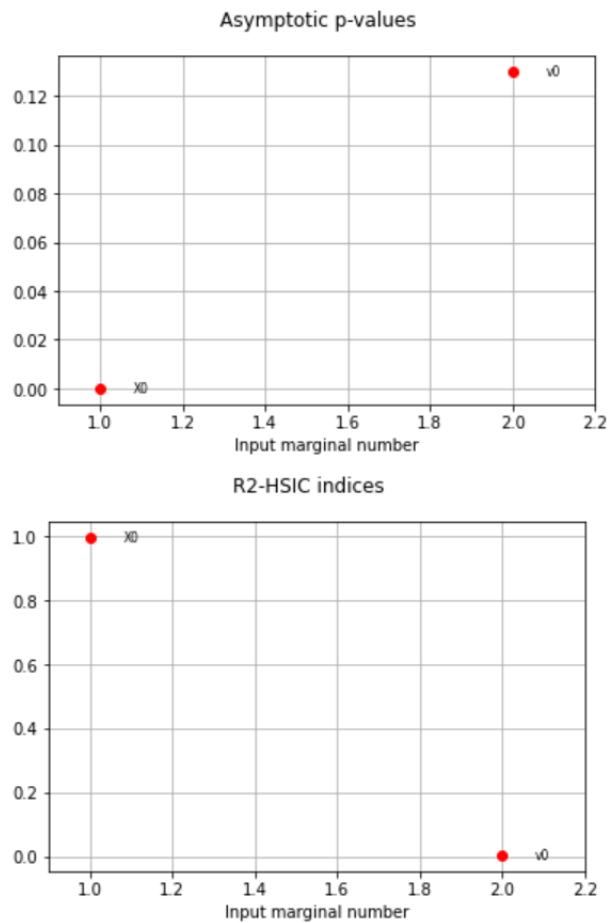


Figure 30: HSIC de  $P_{ACS}$  et  $P_{other}$ .  $X_0$  correspond à  $P_{other}$  et  $v_0$  à  $P_{ACS}$ .

## References

- [1] Sebastien Da Veiga Adrien Spagnol Rodolphe Le Riche. *Global sensitivity analysis for optimization with variable selection*. 2018.
- [2] Antoine DUMAS. “Développement de méthodes probabilistes pour l’analyse des tolérances des systèmes mécaniques sur-contraints”. In.
- [3] L. Brevault M. Balesdent. “Mutlidisciplinay design optimization, application to aerospace vehicle design”. In: ().
- [4] Sankaran Mahadevan Shankar Sankararaman. *Likelihood-Based Approach to Multidisciplinary Analysis Under Uncertainty*. 2012.