PHY 550 : Plasmas in Space Science and Technology

Encadrants :

-Pascal Chabert

- Benjamin Esteves

Devoir Maison TP

Hugo Negrel

Décembre 2022

Table des matières

1 Introduction

Ce compte-rendu porte sur sur la PC8 du cours PHY 550. Le sujet porte sur l'étude d'un moteur spatial à propulsion éléctrique. Un plasma est crée par ionisation d'un gaz neutre (du Xenon, de l'Argon ou du Krypton dans notre cas) via un faisceaux d'électrons accélérés par un champ électrique et magnétique. Ce flux ionique ira ensuite être accéléré par un ensembre de trois grilles et par conséquent générer une poussée par action-réaction. La première partie de ce TP sera sur les processus mis-en-jeu lors de l'ionisation du plasma par collision. La seconde partie de ce TP est dédié à l'étude du couplage entre champ électromagnetique et électron libre. Enfin, la dernière partie concernera le fonctionnement du propulseur dans les différents régimes.

2 Processus d'ionisation du gaz

Le plasma est crée par la collision des électrons avec les atomes neutres du gaz. La réaction souhaité est la suivante $e^- + X_e \longrightarrow e^- + X_e^+ + e^-$. En pratique, on supposera que cette réaction est minoritaire et que par conséquent le taux d'ionisation reste faible. En particulier, $\frac{dn_g}{dt} \approx 0$. On se concentrera donc sur la variation de la densité d'électron par un raisonnement de conservation. Pendant l'instant dt, le gain d'electron vient du taux d'ionisation $nn_gK_{iz}dt$ tandis que la perte d'électron correspond au nombre d'électron s'échappant du propulseur. On évalue cette perte à $nu_B\frac{A_eff}{V}dt$ étant donné que c'est le flux d'ion sortant. En supposant un flux ambipolaire, on a $n_iu_i = n_iu_B = n_eu_e$, avec $n = n_i = n_e$ par quasi-neutralité du plasma. A_{eff} représente l'aire d'ouverture des grilles du propulseur. Au final, on peut affirmer que

$$\frac{dn}{dt} = nn_gK_{iz} - nu_B\frac{A_eff}{V}$$

Concernant la température des électrons, il faut considérer que celle-çi est fixé par le caractère stationnaire du processus d'ionisation : on crée autant de charge qu'on en perd. En effet, ayant alors $\frac{dn}{dt} = 0$, on a alors

$$K_{iz}(T_e) = \frac{u_BA_{eff}}{n_gV}$$

En supposant que le taux d'ionisation prend une forme similaire à celle de la loi d'Arrhenius i.e $K_{iz} = K_{iz0}\exp -\frac{E_{iz}}{k_BT_e}$, avec K_{iz0} quasiment indépendant de la température, on en déduit immédiatement que

$$T_e = \frac{-E_{iz}}{k_B}\left[\ln\frac{u_BA_{eff}}{n_gK_{iz0}V}\right]^{-1}$$

3 Couplage entre le champ électromagnétique et le plasma

Le champ électromagnétique est crée par circulation d'un courant alternatif à la fréquence ω dans une bobine. Le but du procédé est de transmettre une partie de l'énergie du champ au plasma afin de le chauffer et ainsi favoriser le processus d'ionisation décrit à la section précedente. On sait que l'on a $\phi = Li = N\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \approx N\mu_0\frac{NI_{coil}}{l}\pi r_c^2$
On obtient directement alors $L = \frac{N_{coil}^2\mu_0\pi r_c^2}{l}$
Les équations de Maxwell nous apprennent qu'il est possible de définir un vecteur dit de "Poynting", vecteur traduisant la propagation de l'énergie dans un milieu quelconque. Il est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}{2\mu_0}$$

En déterminant les champ $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, on trouve que :

$$P = -\frac{1}{2}E_\theta H_z 2\pi r_c l$$

$$= i\pi\frac{N^2I_{coil}^2}{l}\left[\frac{kr_0J_1(kr_0)}{\omega\epsilon_0\epsilon_pJ_0(kr_0)} + \frac{1}{2}\omega\mu_0(r_c^2 - r_0^2)\right]$$

De plus, de manière générique, dans un circuit électrique $P = \frac{1}{2} Z_{ind} I_{coil}^2$. En supposant que on a simplement $Z_{ind} = R_{ind} + i\omega L_{coil}$. On a alors immédiatement $iX_{ind} = i\omega L_{ind} = 2\frac{Im[P]}{I_{coil}^2}$ et $R_{ind} = 2\frac{Re[P]}{I_{coil}^2}$. Regardant l'équation précedente, il vient immédiatement :

$$X_{ind} = \left[\omega\mu_0(r_c^2 - r_0^2) + \Im\left(\frac{kr_0 J_1(kr_0)}{\omega\epsilon_0\epsilon_p J_0(kr_0)}\right)\right]\frac{2N^2\pi}{l}$$

et

$$R_{ind} = \Re\left(\frac{ikr_0 J_1(kr_0)}{\omega\epsilon_0\epsilon_p J_0(kr_0)}\right)\frac{2N^2\pi}{l}$$

En manipulant un peu le terme X_{ind}, on trouve que le second terme peut se mettre de la forme $i\omega L_{coil}(1 - \frac{r_0^2}{r_c^2})$. On a alors finalement :

$$L_{ind} = L_{coil}\left(1 - \frac{r_0^2}{r_c^2}\right) + \Im\left(\frac{kr_0 J_1(kr_0)}{\omega\epsilon_0\epsilon_p J_0(kr_0)}\right)\Bigg]\frac{2\pi N^2}{l}$$

On peut faire plus d'approximation. En particulier, si on note ν_m la fréquence de collision entre neutre et ions, et qu'on suppose $\nu_m \ll \omega$,ce qui revient à dire qu'on a ici un plasma à basse pression. Une autre hypothèse qui est implicitement faite est que pour que le plasma ne soit pas transparent aux OEM, il faut $\omega \ll \omega_{pe}$. Afin d'établir que $kr_0 \approx \pm\frac{r_0}{\delta}\left(\frac{\nu_m}{2\omega} - i\right)$, on va montrer la relation équivalente $\sqrt{\epsilon_p} \approx i\frac{\omega_{pe}}{\omega} - \frac{\nu_m\omega_{pe}}{2\omega^2}$, sachant que $\delta = \frac{c}{\omega_{pe}}$. La racine carré complexe sera choisis comme la détermination principale. On a

$$\begin{aligned}
\epsilon_p &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\nu_m)} \\
&\approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2(1 - i\frac{\nu_m}{\omega})} \\
&\approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1 + i\frac{\nu_m}{\omega}\right)
\end{aligned}$$

On pose $R = \Re(\epsilon_p) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$ er $I = \Im(\epsilon_p) = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\frac{\nu_m}{\omega}$. On considère que $|\epsilon_p| \approx R$. On a conformément à la racine complexe et à l'approximation $\omega \ll \omega_{pe}$, $\sqrt{R} = i\frac{w_p}{w}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\epsilon_p} &= \sqrt{R} + \frac{iI}{2\sqrt{R}} \\
&= i\frac{\omega_{pe}}{\omega} - \frac{\nu_m\omega_{pe}^2}{2\omega^3}\frac{\omega}{\omega_{pe}} \\
\sqrt{\epsilon_p} &= i\frac{\omega_{pe}}{\omega} - \frac{\nu_m\omega_{pe}}{2\omega^2}
\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat que l'on voulait montrer. Ainsi, dans le régime de basse pression, on utilisera l'approximation : $kr_0 \approx \pm\frac{r_0}{\delta}\left(\frac{\nu_m}{2\omega} - i\right)$. Dans notre démarche de simplification, il est aussi possible d'aboutir à : $L_{ind} \approx L_{coil}\left(1 - \frac{r_0^2}{r_c^2}\right)$, ce qui revient à dire que le second terme est quasi-nul. D'après les propriétés données sur les fonctions spéciales de Bessel, si on fait l'approximation nécessaire $kr_0 \approx \frac{-ir_0}{\delta}$ dans J_1 et J_0, on obtient alors que $\frac{J_1(kr_0)}{J_0(kr_0} \approx i\frac{I_1(\frac{r_0}{\delta})}{I_0(\frac{r_0}{\delta})} \approx i$. Donc, on a

$$\frac{ikr_0 J_1(kr_0)}{\epsilon_p J_0(kr_0)} \approx \frac{r_0}{\delta\epsilon_p}\left(\frac{\nu_m}{2\omega} - i\right)$$

Donc

$$\Im\left(\frac{ikr_0 J_1(kr_0)}{\epsilon_p J_0(kr_0)}\right) \approx \frac{r_0}{\delta\epsilon_p}$$

En supposant une fois de plus que $\omega \ll \omega_{pe}$ et que $\nu_m \ll \omega$, on obtient alors que $\omega^2\epsilon_p \approx -\omega_{pe}^2$. On réecrit alors $\frac{r_0}{\delta\epsilon_p\omega^2} \approx \frac{r_0^2\delta}{c^2 r_0}$, qui est alors bien $\ll 1$. L'approximation reste donc valable pour $\nu_m \ll \omega \ll \omega_{pe}$. De la même manière,

$$\Re\left(\frac{ikr_0 J_1(kr_0)}{\epsilon_p J_0(kr_0)}\right) \approx \frac{r_0\nu_m}{2\delta\epsilon_p\omega}$$

On obtient alors immédiatement que

$$R_{ind} = \frac{2\pi N^2}{l\omega\epsilon_0}\frac{r_0 n_m}{2\delta\epsilon_p\omega}$$

Une fois de plus, en prenant $|\omega^2\epsilon_p| \approx \omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{m_e\epsilon_0}$, on obtient alors

$$R_{ind} \approx \frac{\pi N^2}{l\epsilon_0}\frac{r_0 nu_m m_e\epsilon_0}{\delta n_e e^2}$$

$$R_{ind} \approx \frac{\pi N^2}{l}\frac{r_0}{\delta\sigma_m}$$

où l'on a posé $\sigma_m = \frac{n_e e^2}{m_e\nu_m}$ la conductivité électrique du plasma. Nous arrivons maintenant à la fin du raisonnement. Nous allons faire un raisonnement énergetique pour en déduire la densité électronique du plasma en fonction du courant circulant dans la bobine. De manière très générale, la puissance perdue dans un plasma s'écrit : $P_{loss} = \epsilon_T(T_e)\Gamma_{wall}\frac{A}{V}$. Le terme ϵ_T comprend toutes les pertes d'énergies possible pour un électron : collision élastique neutre-électron, collision inélastique neutre-électron ainsi que les pertes du aux fuites sur les bords du propulseur. D'un autre côté, le plasma reçoit la puissance réactive $P_{abs} = \frac{1}{2}R_{ind}I_{coil}^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi N^2}{l}\frac{r_0}{\delta\sigma_m}I_{coil}^2$. En posant l'égalité $P_{abs} = P_{loss}V$, et en remplacant δ et σ_m par leurs expressions, ainsi que $\Gamma A = \Gamma_{wall}A_{wall} + \Gamma_{out}A_{out} = 2u_B n_e(h_R 2\pi r_0 l + h_l\pi r_0^2)$, on obtient alors que

$$n_e^{3/2} = \frac{\pi N^2 r_0 m_e\nu_m e}{2le^2c\sqrt{m_e\epsilon_0}u_B\epsilon_T 2u_B(h_R 2\pi r_0 l + h_l\pi r_0^2)}I_{coil}^2$$

$$n_e^{3/2} = \frac{\pi N^2 r_0\sqrt{m_e}\nu_m}{4lec\sqrt{\epsilon_0}u_B\epsilon_T(h_R\pi r_0 l + h_l\pi r_0^2)}I_{coil}^2$$

ce qui est bien l'expression recherchée.

4 Modèle de propulseur

4.1 Etude des paramètres du propulseur plasma en fonction de la puissance RF

La théorie cinétique de Boltzmann nous apprend q'un gaz neutre à l'équilibre thermodynamique admet une fonction de distribution de la forme

$$f(\mathbf{v}) = n_g(\frac{m_g}{2\pi kT_g})^{3/2}\exp -\frac{m||\mathbf{v}||^2}{2kT}$$

En intégrant sur toutes les vitesses telles que $|v_z|$ aille de 0 à $+\infty$ dans l'espace des vitesses et selon une section $A_{open,g}$ d'axe Oz dans l'espace des positions, on obtient alors le résultat suivant $\Gamma_{out} = \frac{n_g v_g A_{open}}{4}$. EN régime stationnaire, on a naturellement $Q_0 = \Gamma_{out}$ soit $n_{g0} = \frac{4Q_0}{v_{g0}A_{open,g}}$. La statistique de Boltzmann nous apprend aussi que $p_0 = n_{g0}k_B T_{g0}$, ce qui est précisemment la loi des gaz parfaits.

On considère un flot Q_0 de 29sccm (standard cubic centimeter per minute) pour le moment. Il s'agit du débit de gaz neutre entrant. Un autre paramètre d'entrée sera la courant I_{coil} circulant dans la bobine fournissant la RF (Radio Frequency) power. En premier lieu, nous ferons varier I_{coil} et donc la RF power. En second lieu alors, on fixera le courant et on regardera alors le débit varier.

1)La première tâche était de tracer les quantités n_e, T_e, n_g, T_g et p_g lorsqu'on augmente la puissance radio fréquence, responsable de l'ionisation du gaz neutre en plasma. On remarque que n_e et n_g évoluent de façon antagoniste, ce qui est intuitif puisque les moléculales de gaz doivent casser pour libérer les électrons. Les courbes semblent cependant arriver sur une asymptote limite assez rapidement. T_e croît linéairement par rapport à la puissance délivré. Si on suppose en première approximation $n_e = cst$, on peut dire que T_e est directement proportionnel à l'énergie interne des électrons, et donc que lorsque on augmente la puissance délivré linéairement, ainsi soit-il de l'énergie interne. Par collision entre neutre et électron/ion, on constate évidemment que la température du gaz augmente avec la température électronique. La température T_g augmentant plus lentement que ce que la densité de gaz ne diminue, il en résulte une diminution de la pression p_g par application de la loi des gaz parfaits.

2)On fait de même mais cette fois en faisant varier le courant I_{coil}. Il est publiquement connu que $P \propto I_{coil}^2$. Il est donc cohérent de voir le même résultat, modulo des légeres variations de pente pour les graphiques logarithmiques, ou des changements de nature de courbes pour les graphiques linéaires (droite $\longrightarrow$ parabole).

3)Il fallait ensuite comparer la théorie, dont les formules ont été dérivé plus haut, et la simulation fournis. Comme prévu, en ce qui concerne n_e, on obtiens une ionisation inférieur à ce qui aurait été prévisible par la théorie. Cependant, on voit sur le bout de courbe que les deux densité se rejoignent, confirmant que les approximations faites ne sont valables que pour des régimes à hautes densités électroniques. De la même manière pour T_e, la température est plus importante en théorie ($T_e \approx 3.5eV$). En ce qui concerne le gaz, on peut se prononcer de la même manière.

4) En comparant la densité de courant simulé avec la loi de Child-Langmuir, on obtient la puissance maximale d'intérêt pour notre propulseur. On la trouve à environ 1430W. Fournir une puissance plus importante que celle là est tout à fait inutile puisqu'il n'est pas possible d'extraire plus de courant que permis par J_{CL}. On trouve alors la poussée correspondante d'environ 0.03N.

5)Etonnamment, le rapport poussée-puissance diminue lorsque la dite puissance RF augmente. Même si la poussée augmente, il y a quand même un effet de saturation, qui peut avoir plusieurs causes, comme par exemple l'asymptote de n_e constaté en 1). A partir d'une certaine puissance, il devient de plus en difficile d'ioniser le gaz neutre.

6) On observe que la résistance de l'induit (le gaz) dimininue au fur et à mesure que la puissance augmente. On peut constatet par l'expression de R_{ind} que $R_{ind} \propto \frac{1}{\sqrt{n_e}}$. Il est alors direct que la resistance induite diminue.

4.2 Etudes des efficacités du propulseur electrique en fonction du débit Q_0

1) On remarque que l'efficacité d'utilisation de masse diminue, contrairement à l'efficacité de puissance électrique qui augmente. En revanche, celle de masse diminue plus vite, signifiant que l'on risque d'avoir un maximum. Ce maximum se situe à $Q_0 \approx 1.510^{19}s^{-1}$. Pour $L = 0.03m$, on remarque que ce maximum recule, c'est à dire pour des Q_0 plus faible. Cependant, si le débit n'est pas assez important, le propulseur ne peut pas démarrer correctement, il n'y a pas assez de gaz. On en conclu alors que $L = 0.03m$ est sans doute moins intéressant que $L = 0.1$.

2) Cette fois, on constate que le rapport poussée-puissance augmente avec l'augmentation du débit, jusqu'à arriver à un maximum. Pour $L = 0.03m$, le constat est le même, à ceci près que la limite est située plus haute. On fait le même constat pour l'argon et le krypton. De ce point de vue, c'est le xenon le meilleur gaz pour le propuleur électrique.

3)Au vu du comportement hératique pour l'argon et l krypton en ce qui concerne les valeurs de poussée, il est clair que le meilleur choix est le xenon.

5 Conclusion

En conclusion, après une élaboration théorique au prix de quelques hypothèses, il a été possible de comparer ces résultats à la simulation numérique du propulseur fournis. Comme prévu, la théorie prédit des résultats meilleurs que ceux qui ont été simulé, à cause des nombreuses approximations faites. La principale conclusion est que d'après les graphiques tracés, le xenon est le gas le plus efficace, que ce soit en terme de poussée et d'efficacité de poussé-puissance.