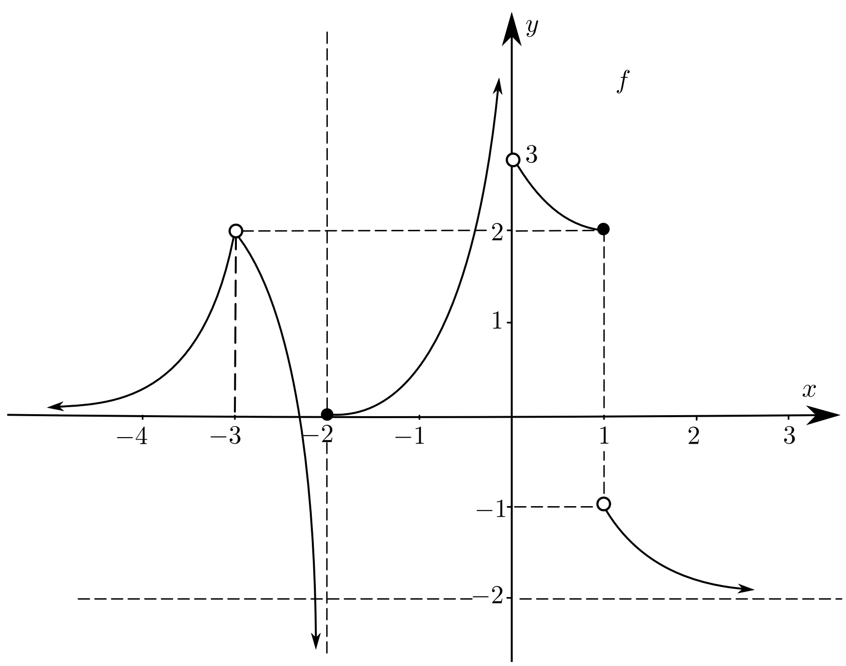
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
MA1102 Cálculo diferencial e integral

II semestre 2023
Tiempo: 2 horas y 30 min
Puntaje Total: 32 pts

Primer Examen Parcial

Instrucciones: Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada y utilice cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos electrónicos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

#1. Considere la gráfica de la función f.



Determine en cada caso la información que se le solicita. **3 Pts**

a) El valor de k para el cual $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ $\quad k = -2$ (**0.5 puntos)**

b) El valor de a para el cual $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ $\quad a = -2$ (**0.5 puntos)**

c) ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? Justifique. No existe, porque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) + \infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 3$. **(1 punto)**

d) ¿Existe $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x+3}$? Justifique.

No existe $f'(-3)$, pues f no es continua en $x = -3$ **(1 punto)**

#2. Calcule, si existe, el siguiente límite (No utilice la regla de L'Hôpital)

$$\lim_{y \to 2} \frac{y-2}{\sqrt{y-1} + 2\sqrt[4]{y-1} - 3}$$

Sugerencia: Haga la sustitución $u = \sqrt[4]{y-1}$ **4 Pts**

Solución:

. . . .

$$u = \sqrt[4]{y-1} \Rightarrow u^4 = y - 1 \Rightarrow y = u^4 + 1 \qquad \textbf{(1 punto)}$$

$$y \to 2 \Rightarrow u \to 1$$

. . . .

$$u = \sqrt[4]{y-1} \Rightarrow u^2 = \sqrt{y-1}$$

$$\lim_{y \to 2} \frac{y-2}{\sqrt{y-1} + 2\sqrt[4]{y-1} - 3} = \lim_{u \to 1} \frac{(u^4+1)-2}{u^2+2u-3} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

. . . .

$$\lim_{u \to 1} \frac{u^4-1}{u^2+2u-3} = \lim_{u \to 1} \frac{(u^2-1)(u^2+1)}{(u+3)(u-1)} = \lim_{u \to 1} \frac{(u^2-1)(u^2+1)}{(u+3)(u-1)} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

. . . .

$$= \lim_{u \to 1} \frac{(u-1)(u+1)(u^2+1)}{(u+3)(u-1)} = \lim_{u \to 1} \frac{(u+1)(u^2+1)}{u+3} = 1 \qquad \textbf{(1 punto)}$$

. . . .

#3. Calcule los siguientes límites (sin utilizar la regla de L'Hôpital)

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{x\operatorname{sen}(x)}$

Sugerencia: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$ **4 Pts**

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{x\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{\cos x+\sqrt{\cos(2x)}}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-\cos(2x)}{x\operatorname{sen}(x)\left[\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}\right]}$$ **(2 puntos)**

....

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-\cos(2x)}{x\operatorname{sen}(x)\left[\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-\left(\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)\right)}{x\operatorname{sen}(x)\left[\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\operatorname{sen}(x)\left[\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}\right]}$$ **(1 punto)**

....

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\left[\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos 0+\sqrt{\cos 0}} = \frac{1}{2}$$ **(1 punto)**

....

b) $\lim\limits_{u\to 3} \dfrac{2-|4-2u|}{u^3-27}$ **4 Pts**

Solución:

$$|4-2u| = \begin{cases} 4-2u & \text{si} \quad 4-2u \geq 0 \Longleftrightarrow u \leq 2 \\ \\ -(4-2u) & \text{si} \quad 5-2u < 0 \Longleftrightarrow u > 2 \end{cases}$$ **(1 punto)**

$$\lim_{u\to 3} \frac{2-|4-2u|}{u^3-27} = \lim_{u\to 3} \frac{2-^{-}(4-2u)}{u^3-27} = \lim_{u\to 3} \frac{2+4-2u}{(u-3)(u^2+3u+9)}$$ **(1 punto)**

$$\lim_{u\to 3} \frac{2+4-2u}{(u-3)(u^2+3u+9)} = \lim_{u\to 3} \frac{6-2u}{(u-3)(u^2+3u+9)} = \lim_{u\to 3} \frac{2(3-u)}{(u-3)(u^2+3u+9)}$$ **(1 punto)**

$$\lim_{u\to 3} \frac{2(3-u)}{(u-3)(u^2+3u+9)} = \lim_{u\to 3} \frac{-2\,(u-3)}{(u-3)(u^2+3u+9)} = \lim_{u\to 3} \frac{-2}{u^2+3u+9} = -\frac{2}{27}$$ **(1 punto)**

$c)$ $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} 4^{1/\ln(7-2x)}$ **3 Pts**

Solución:

$$x \to 3^- \Rightarrow x < 3 \Rightarrow -2x > -6 \Rightarrow 7 - 2x > 1 \Rightarrow \ln(7-2z) > 0 \quad \textbf{(1 punto)}$$

. . . .

$$x \to 3^- \Rightarrow \frac{1}{\ln(7-2x)} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty \quad \textbf{(1 punto)}$$

. . . .

$$\lim_{x\to 3^-} 4^{1/\ln(7-2x)} = 4^{+\infty} = +\infty \quad \textbf{(1 punto)}$$

. . . .

$d)$ $\lim\limits_{y\to-\infty} \dfrac{2y+\sqrt{y^2+1}}{y^2+1}$ **3 Pts**

Solución:

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{2y+\sqrt{y^2+1}}{y^2+1} = \lim_{y\to-\infty} \frac{2y+\sqrt{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y\to-\infty} \frac{2y+|y|\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

....

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{2y+|y|\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y\to-\infty} \frac{2y-y\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

....

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{2y-y\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y\to-\infty} \frac{y\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right)}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y\to-\infty} \frac{2-\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}}{y\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

....

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{2-\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}}{y\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} = \frac{2-\sqrt{1+0}}{-\infty\cdot(1+0)} = \frac{1}{-\infty} = 0 \qquad \textbf{(1 punto)}$$

....

#4. Determine los valores de a, b, c de tal modo que la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si} \quad x < 0 \\ 3b - 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 2x + c & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. **4 Pts**

Solución:

$$f(0) = 3b - 1$$ **(1 punto)**

....

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (ax^2 + b) = b$$ **(1 punto)**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x + c) = c$$

....

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow 3b - 1 = b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$ **(1 punto)**

....

$$a \in \mathbb{R},\ b = c = \frac{1}{2}$$ **1 (punto)**

....

#5. Calcule (no simplifique), la primera derivada de la función f definida por: **5 Pts**

$$f(x) = \frac{5^{\sec(1-2x)} - 4\ \tan^2(x+2)}{\ln(x)}$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{\left[5^{\sec(1-2x)} - 4\ \tan^2(x+2)\right]' \cdot \ln(x) - \left(5^{\sec(1-2x)} - 4\ \tan^2(x+2)\right) \cdot [\ln(x)]'}{(\ln(x))^2} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

. . . .

$$\left[5^{\sec(1-2x)}\right]' = 5^{\sec(1-2x)} \cdot \sec(1-2x)\ \tan(1-2x) \cdot (-2) \cdot \ln 5 = G(x) \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

. . . .

$$\left[4\ \tan^2(x+2)\right]' = 4\ \cdot 2\ \tan(x+2) \cdot \sec^2(x+2) \cdot 1 = 8\ \tan(x+2) \cdot \sec^2(x+2) = H(x) \qquad \textbf{(1.5 puntos)}$$

. . . .

$$f'(x) = \frac{[G(x) - H(x)] \cdot \ln(x) - \left(5^{\sec(1-2x)} - 4\ \tan^2(x+2)\right) \cdot 1/x}{\ln^2(x)} \qquad \textbf{(1 puntos)}$$

. . . .

#6. Utilizando la **definición de derivada** verifique que, si $F(x) = g(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ y g una función derivable, entonces $F'(x) = g'(x)$. **2 Pts**

Solución:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) + c - [g(x) + c]}{h}$$ **(1 punto)**

. . . .

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) + c - g(x) - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$ **(1 punto)**

. . . .