

Examen de Suficiencia

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sin utilizar la Regla de L'Hôpital, calcule los límites siguientes:

(a) $\lim_{z \rightarrow h} \frac{z^2 - z - hz + h}{z^3 - h^3}$, con $h \in \mathbb{R}$ (5 pts)

(b) $\lim_{w \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt[3]{w-2}}{\sqrt{4w-8} - 2}$ (5 pts)

(c) $\lim_{t \rightarrow -\infty} (\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t)$ (5 pts)

2. Determine todos los valores que debe tomar la constante real α de manera que la función f sea continua en \mathbb{R} , si f está definida de la manera siguiente: (5 pts)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & \text{si } x > \alpha \\ 3x-1 & \text{si } x = \alpha \\ x+3 & \text{si } x < \alpha \end{cases}$$

3. Determine, en caso de existir, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función f definida por $f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x - x^2}$ (5 pts)

4. Determine la primera derivada de cada una de las funciones que se enuncian a continuación:

(a) $f(x) = \tan x \sqrt{5 \cos x + 1}$ (5 pts)

(b) $f(x) = \frac{x^2 + 3 \cos x}{1 + 2 \ln(x+1)}$ (5 pts)

5. Sea f una función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Encuentre los valores para las constantes a, b, c y d , de manera que $A(1, 2)$ sea un mínimo relativo de f y, simultáneamente, que $B(-1, 14)$ sea un punto de inflexión de f . (5 pts)

6. Plantee y resuelva los problemas siguientes:

(a) Dos postes de 4 m y 6 m de altura, respectivamente, se encuentran separados $7,5\text{ m}$ y se va a utilizar un alambre para asegurarlos; dicho alambre será fijado en los extremos superiores de ambos postes y en el suelo, en un punto entre los dos postes. ¿En qué posición en el suelo debe sujetarse el cable para que la cantidad de alambre a utilizar sea mínima? (5 pts)

(b) Si se dispone de $1\,200\text{ cm}^2$ de material para construir una caja con base cuadrada y abierta en la parte superior, encuentre el volumen máximo posible de la caja. (5 pts)

7. Calcule cada una de las integrales siguientes:

(a) $\int_0^1 x^2 \sqrt{2x+1} \, dx$ (5 pts)

(b) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} \, dx$ (5 pts)

(c) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$ (5 pts)

(d) $\int \sin(\ln x) \, dx$ (5 pts)