Cálculo Diferencial e Integral

Alexander Borbón Alpízar

2018

Índice general

Capítulo 1

Lógica proposicional

En matemática hay algunos términos que se utilizan de manera frecuente, se debe iniciar conociendo la definición de dichos conceptos.

Definición 1.

- Las **definiciones** se utilizan para describir y caracterizar los objetos matemáticos.
- Los **axiomas** son proposiciones que se aceptan sin demostración y son la base de las teorías matemáticas, se presuponen como "evidentes".
- Un **teorema** es una proposición cuya validez se puede verificar a partir de los axiomas y las definiciones dadas.
- Una **demostración o prueba** es una serie de pasos estructurados en donde se verifica y constata de forma irrefutable y convincente que una proposición es verdadera.
- Un **corolario** es un teorema que se deduce de forma directa a partir de un teorema anterior o es un caso particular de él.
- Un **lema** es un teorema que es necesario para demostrar un teorema posterior pero que no tiene relación directa con el tema que se esté desarrollando (aunque puede ser un teorema central en el desarrollo de otro tema).
- Un **escolio** es un resultado que se obtiene durante el desarrollo de una demostración pero que no tiene relación con el tema desarrollado.
- Una **conjetura** es una proposición de la que no se puede asegurar su validez.
- Una **paradoja** es una proposición que no puede ser ni verdadera ni falsa.

Ejemplo 1.

- Una circunferencia se **define** como el conjunto de los puntos que se encuentran a la misma distancia (llamada radio) de un punto (llamado centro).
- Uno de los **axiomas** en geometría euclídea indica que por dos puntos cualesquiera pasa una única recta por ellos.
- Un **teorema** en geometría euclídea es que los ángulos internos de cualquier triángulo suman $180°$.
- Una **paradoja** muy famosa es la conocida como la paradoja del barbero: "El único barbero de la ciudad dice que afeitará a todos aquellos que no se afeiten a sí mismos. Entonces ¿Quién afeitará al barbero?"

1.1. Conectivas lógicas y tablas de verdad

Definición 2.

Una **proposición** es un enunciado el cual se puede indicar claramente si es verdadero o falso.

Toda proposición debe cumplir los principios de:

- **Identidad:** Si una proposición es verdadera entonces siempre es verdadera.
- **No-contradicción:** Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez.
- **Tercero excluido:** Una proposición es falsa o es verdadera, no existe otra opción.

Ejemplo 2.

1. Las siguientes son proposiciones:
   - Ayer llovió toda el día[a].
   - Hoy fui a jugar fútbol.
   - El televisor se dañó.
   - $2 + 4 = 7$
   - El cuadrado de todo número impar es impar.
2. Las siguientes NO son proposiciones:
   - ¡Muy bien!
   - ¿Por qué juegas tenis?

[a] En este tipo de expresiones se sobreentiende entre las personas que conversan, el día y el lugar al que se refiere, de no ser así se tendría que escribir la fecha exacta y el lugar exacto al que hacen referencia.

Estas proposiciones se conocen como proposiciones simples o atómicas, a partir de ellas se pueden formar proposiciones más complejas o moleculares mezclando las proposiciones simples con los conectores lógicos de: negación, conjunción, disyunción, disyunción exclusiva, implicación y equivalencia. Las proposiciones simples se pueden denotar con letras mayúsculas: P, Q, R, ...

1.1.1. Negación ($\neg$)

Si P es una proposición, por ejemplo, P: *me gusta tocar la guitarra*, entonces su negación se denota como $\neg P$ que sería $\neg P$: **NO** me gusta tocar la guitarra. Como otro ejemplo, si P: $3 < 4$ entonces su negación sería $\neg P$: $3 \geq 4$.

Una tabla de verdad de una proposición compleja permite determinar la veracidad de una afirmación al estudiar todos las posibles posibilidades dadas por las proposiciones simples que la forman. En la tabla de verdad se utilizan las abreviaturas V: verdadero y F: falso.

La tabla de verdad para la negación se muestra a continuación, el primer reglón de la tabla indica que si P es una proposición verdadera entonces su negación debe ser falsa.

P	$\neg P$
V	F
F	V

1.1.2. Conjunción ($\wedge$)

Si P: Me gusta el tenis y Q: Me gusta bailar, entonces la conjunción de ambas se denota como $P \wedge Q$ y se lee "Me gusta el tenis **y** me gusta bailar", se conoce como un "y" lógico.

La tabla de verdad para la conjunción es:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.1.3. Disyunción ($\vee$)

Si P: Ayer jugué fútbol y Q: Ayer toqué guitarra, entonces la disyunción de ambas se denota como $P \vee Q$ y se lee "Ayer jugué fútbol **o** toqué quitarra".

La tabla de verdad para la disyunción es:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.1.4. Disyunción exclusiva ($\veebar$)

Si P: Ayer jugué fútbol y Q: Ayer toqué guitarra, entonces la disyunción exclusiva de ambas se denota como $P \veebar Q$ y se puede leer "Ayer jugué fútbol **o** toqué quitarra, **pero no ambas**" u otra forma de leerlo es "Ayer **o** jugué fútbol **o** toqué quitarra".

La tabla de verdad para la disyunción exclusiva es:

P	Q	$P \veebar Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.1.5. Implicación ($\Rightarrow$)

Si P: Amanece lloviendo y Q: Tengo que usar paraguas, entonces la implicación de ambas se denota como $P \Rightarrow Q$ y se lee "**Si** amanece lloviendo **entonces** tengo que usar paraguas".

La tabla de verdad para la implicación es:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.1.6. Doble implicación ($\Leftrightarrow$)

Si P: Iré a ver jugar a la selección y Q: La selección juega contra Argentina, entonces la doble implicación de ambas se denota como $P \Leftrightarrow Q$ y se lee "Iré a ver jugar a la selección **si y sólo si** la selección juega contra Argentina" lo cual implica dos cosas: "**Si** voy a ver jugar a la selección **entonces** es porque juega contra Argentina" y "**Si** la selección juega contra Argentina **entonces** voy a verla jugar". En la doble implicación se dice que Q es necesario y suficiente para que se cumpla P, es decir, si fui a ver a la selección es porque necesariamente la selección juega contra Argentina y suficiente porque sólo esta razón basta para que vaya a ver jugar a la selección. Esto también implica que cada vez que se cumple P también se cumple Q y viceversa.

En conclusión la doble implicación $P \Leftrightarrow Q$ es lo mismo que $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

La tabla de verdad para la doble implicación es:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.1.7. Tablas de verdad de proposiciones complejas

Conociendo las tablas de verdad para las conectivas lógicas, ahora se pueden realizar tablas de verdad para expresiones más complejas.

Ejemplo 3.

Realice la tabla de verdad para la proposición $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (\neg P \vee Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (\neg P \vee Q)$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Ejemplo 4.

Realice la tabla de verdad para la proposición $[\neg(P \wedge \neg Q)] \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)]$	$Q \Rightarrow P$	$[\neg(P \wedge \neg Q)] \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V

Definición 3.

Si el resultado final de una tabla de verdad es siempre verdadero entonces se dice que la proposición es una **tautología**. Si, por el contrario, siempre es falsa se dice que es una **falacia** o **contradicción**. Si no es una tautología o falacia se dice que es una **contingencia** o **eventualidad**.

Ejemplo 5.

Verifique que la proposición $(P \Rightarrow Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ es una tautología

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$(P \Rightarrow Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

Ejemplo 6.

Una falacia muy simple de probar es $P \wedge \neg P$

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

Definición 4.

Se dice que P **implica tautológicamente** a Q si y sólo si $P \Rightarrow Q$ es una tautología y se dice que P es **tautológicamente equivalente** a Q si y sólo si $P \Leftrightarrow Q$ es una tautología.

Ejemplo 7.

Verifique mediante una tabla de verdad que $P \Rightarrow Q$ es tautológicamente equivalente a $\neg P \vee Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Definición 5.

La **contrapositiva** de la proposición $P \Rightarrow Q$ es $\neg Q \Rightarrow \neg P$ y la **recíproca** de $P \Rightarrow Q$ es $Q \Rightarrow P$.

La contrapositiva de $P \Rightarrow Q$ es una proposición cierta mientras que la recíproca no necesariamente es cierta.

Ejemplo 8.

Escriba la contrapositiva y la recíproca de las proposiciones siguientes:

1. P: Si $5 > 3$ entonces $x = 4$
   Contrapositiva: Si $x \neq 4$ entonces $5 \leq 3$
   Recíproca: Si $x = 4$ entonces $5 > 3$

2. P: Si almuerzo en el ITCR entonces me quedo a estudiar.
   Contrapositiva: Si no me quedo a estudiar entonces no almuerzo en el ITCR.
   Recíproca: Si me quedo a estudiar entonces almuerzo en el ITCR.

1.2. Leyes e inferencias lógicas

Para demostrar una proposición a partir de otras que se conocen se pueden utilizar las leyes lógicas y las inferencias lógicas:

Leyes lógicas	**Equivalencia**
Implicación y Disyunción (ID)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
Contrapositiva	$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$
Doble Negación (DN)	$\neg\neg P \equiv P$
De Morgan (DM)	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Conmutativa (Con)	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ $P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociativa (Aso)	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
Distributiva (Dis)	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Reglas de Inferencia	**Premisas**	**Conclusión**
Simplificación (Simp)	$P \wedge Q$	P Q
Adjunción (Adj)	P Q	$P \wedge Q$
Adición (Adi)	P	$P \vee Q$
Separación (Sep) o Modus Ponens (MP)	$P \Rightarrow Q$ P	Q
Contraposición o Modus Tollens (MT)	$P \Rightarrow Q$ $\neg Q$	$\neg P$
Silogismo Disyuntivo (SD)	$P \vee Q$ $\neg P$	Q
Silogismo Hipotético (SH)	$P \Rightarrow Q$ $Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$
Dilema Constructivo (DC)	$P \vee Q$ $P \Rightarrow R$ $Q \Rightarrow S$	$R \vee S$
Dilema Destructivo (DD)	$\neg R \vee \neg S$ $P \Rightarrow R$ $Q \Rightarrow S$	$\neg P \vee \neg Q$

Ejemplo 9.

Demostrar $R \wedge (P \vee Q)$ dadas las premisas $P \vee Q$, $Q \Rightarrow R$, $P \Rightarrow T$, $\neg T$

(1) $P \vee Q$	
(2) $Q \Rightarrow R$	
(3) $P \Rightarrow T$	
(4) $\neg T$	
(5) $\neg P$	MT 3,4
(6) Q	SD 1,5
(7) R	MP 2,6
$\therefore R \wedge (P \vee Q)$	Adj 7,1

Ejemplo 10.

Demostrar $R \wedge Q$ dadas las premisas $P \Rightarrow Q$, $\neg R \Rightarrow \neg S$, $P \wedge S$

(1) $P \Rightarrow Q$	
(2) $\neg R \Rightarrow \neg S$	
(3) $P \wedge S$	
(4) P	Simp 3
(5) Q	MP 1,4
(6) S	Simp 3
(7) R	MT 2,6
$\therefore R \wedge Q$	Adj 5,7

Ejemplo 11.

Simbolice las proposiciones involucradas de la siguiente argumentación y demuestre la validez de la conclusión:

Si Luis va al partido de fútbol, entonces Laura se irá a nadar. Si Manuel ve televisión toda la noche, entonces Carolina se irá a nadar. Si Laura va a nadar o Carolina va a nadar, Jorge las acompañará. De hecho, Jorge dijo que no las acompañará. En consecuencia, no ocurre que: Luis fue al partido de fútbol o Manuel ve televisión toda la noche.

P: Luis va al partido de fútbol

Q: Laura se irá a nadar

R: Manuel ve televisión toda la noche

S: Carolina se irá a nadar

T: Jorge las acompañará

(1) $P \Rightarrow Q$	
(2) $R \Rightarrow S$	
(3) $(Q \vee S) \Rightarrow T$	
(4) $\neg T$	
(5) $\neg(Q \vee S)$	MT 3,4
(6) $\neg Q \wedge \neg S$	DM 5
(7) $\neg Q$	Simp 6
(8) $\neg P$	MT 1,7
(9) $\neg S$	Simp 6
(10) $\neg R$	MT 2,9
(11) $\neg P \wedge \neg R$	Adj 8,10
$\therefore \neg(P \vee R)$	DM 11

†

1.3. Cuantificadores

1.3.1. Cuantificador existencial

El símbolo utilizado para el cuantificador existencial es $\exists$, la expresión $\exists x P(x)$ se lee "Existe un x tal que se cumple $P(x)$"

Ejemplo 12.

$\exists x \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$

Lo cual es cierto ya que si $x = 4$ se cumple que $4 \in \mathbb{N}$ y $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$

1.3.2. Cuantificador universal

El símbolo utilizado para el cuantificador universal es $\forall$, la expresión $\forall x P(x)$ se lee "Para todo x se cumple $P(x)$"

Ejemplo 13.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
   Lo cual es cierto ya que no importa el valor que tome x, siempre se cumple que $x^2 \geq 0$
2. $\forall x > 0, -x < 0$
   Lo cual es cierto ya que para todos los valores de x positivos se cumple que $-x$ es negativo.

1.3.3. Negación de Cuantificadores

De manera intuitiva, la negación de la expresión "para toda x se cumple $P(x)$" es que "existe al menos un x que no cumple $P(x)$".

Así se tiene que $\neg(\forall x, P(x)) \equiv \exists x, \neg P(x)$

Ejemplo 14.

Considere la expresión $\forall x, |x| = x$

Esta expresión es falsa, ya que para cualquier número negativo no se cumple, es decir, $\exists x, |x| \neq x$, por ejemplo, si $x = -3$

Además, la negación de la expresión "existe un x tal que $P(x)$" es "para toda x no se cumple $P(x)$".

Así se tiene que $\neg(\exists x, P(x)) \equiv \forall x, \neg P(x)$

Ejemplo 15.

Considere la expresión $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

Esta expresión es falsa, ya que todos los números negativos al cuadrado son positivos, es decir $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

1.4. Métodos de demostración

En esta sección se estudiará la forma en que se puede demostrar que una proposición de la forma $P \Rightarrow Q$ es cierta.

De acuerdo a la tabla de verdad del implica se tendría que demostrar que si la hipótesis (P) es cierta entonces la conclusión (Q) también lo es. La hipótesis no necesariamente es única, es decir, una demostración puede partir de varias hipótesis.

1.4.1. Demostración directa

Se asume que P es verdadera y, mediante las reglas de la lógica y utilizando las definiciones, axiomas y otros teoremas conocidos se deduce que Q es verdadera.

Ejemplo 16.

Demuestre que si $m < 0$ entonces la función $f(x) = mx + b$ es decreciente

Demostración

En este caso la hipótesis es que $m < 0$ y se debe demostrar que $f(x) = mx + b$ es decreciente

Pero recuerde que para que una función sea decreciente se debe cumplir que si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$

Así, partimos con $x_1 < x_2$ y tenemos que concluir que $f(x_1) > f(x_2)$ sabiendo que $m < 0$.

$x_1 < x_2$

$\Rightarrow mx_1 > mx_2$ ya que $m < 0$ (hipótesis)

$\Rightarrow mx_1 + b > mx_2 + b$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Por lo que la función es decreciente.

†

1.4.2. Por contradicción

En este caso se asume que la hipótesis P es cierta y se parte de que $\neg Q$ es cierta, por medio de las reglas de la lógica y utilizando las definiciones, axiomas y otros teoremas conocidos se deduce $\neg P$, por lo que se tendría $P \wedge \neg P$ que sería una falacia o contradicción. Por lo tanto, como conclusión, la hipótesis que $\neg Q$ es falsa y, por tanto Q es cierta, que es lo que se quería demostrar.

En el fondo acá lo que se está demostrando es la contrapositiva de $P \Rightarrow Q$, es decir, se demuestra que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ y se cumple que $\neg Q \Rightarrow \neg P \equiv P \Rightarrow Q$, por lo que se demuestra la original.

Ejemplo 17.

Demuestre que una función lineal sólo tiene una intersección con el eje x

Demostración (por contradicción)

Supongamos que una función lineal tiene más intersecciones con el eje x, es decir, que existen x_1 y x_2 distintos $x_1 \neq x_2$ tal que ambos son intersecciones con el eje x de la función $f(x) = mx + b$, es decir, que $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Como $f(x_1) = mx_1 + b = 0$ entonces $x_1 = \dfrac{-b}{m}$

Y como $f(x_2) = mx_2 + b = 0$ entonces $x_2 = \dfrac{-b}{m}$

Por lo que $x_1 = x_2$ que contradice la hipótesis, por lo tanto la intersección es única.

†

1.4.3. Reducción al absurdo

Este método es muy similar al anterior, se parte de que la hipótesis P es cierta y que $\neg Q$ es cierta, por medio de las reglas de la lógica y utilizando las definiciones, axiomas y otros teoremas conocidos se llega a alguna afirmación que ya se sepa con anterioridad que es falsa (por lo que se llega a un absurdo). Por lo tanto, como conclusión, la hipótesis de donde se partió $\neg Q$ es falsa y, por tanto Q es cierta, que es lo que se quería demostrar.

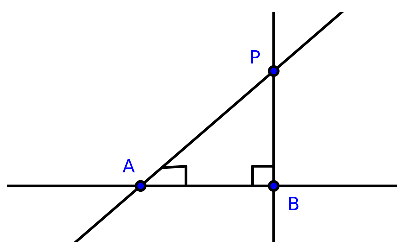
Ejemplo 18.

Sean A y B son dos puntos distintos de una recta y P un punto externo a ella. Si $\overline{AB} \perp \overline{AP}$ entonces $\overline{AB}$ no es perpendicular a $\overline{BP}$

Demostración (por reducción al absurdo)

Supongamos que $\overline{AB}$ sí es perpendicular a $\overline{BP}$, así se tendría que $\overline{AB} \perp \overline{AP}$ y $\overline{AB} \perp \overline{BP}$.

Así se tendría un triángulo con dos ángulos rectos (ver figura), lo cual es un absurdo ya que la suma de los tres ángulos de un triángulo es de 180° (un triángulo no puede tener dos ángulos rectos).



†

1.4.4. Otros métodos

Para demostrar que $P \Rightarrow Q$ es falso sólo basta con dar un contraejemplo en donde no se cumpla.

Para demostrar $P \Leftrightarrow Q$ se deben demostrar $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$

Capítulo 2

Límites

2.1. Idea intuitiva de límite

Los límites permiten investigar el comportamiento de una función alrededor de un punto.

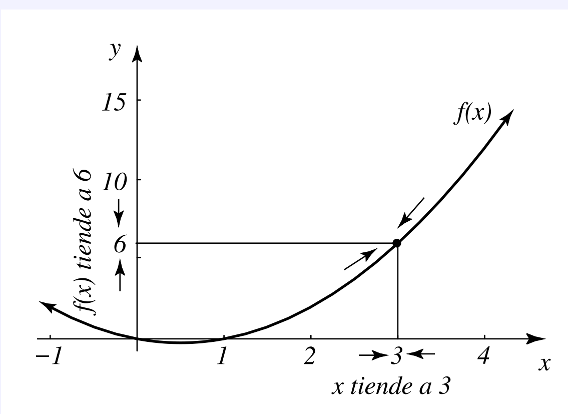
Para calcular un límite de manera intuitiva se hace una tabla con valores que se aproximen al valor deseado y se observa el valor al que se aproxima la función; la gráfica también puede ayudar en este proceso.

Ejemplo 19.

Si $f(x) = x^2 - x$, investigue el comportamiento de esta función para valores cercanos a 3.

Para investigar el comportamiento se realiza una tabla:

x	2	2.5	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1	3.5	4
$f(x)$	2	3.75	5.51	5.95	5.995	?	6.005	6.05	6.51	8.75	12



A partir de los datos de la tabla y observando la gráfica de la función se puede suponer que la función se aproxima a 6 conforme x se aproxima a 3, es decir, $f(x) \to 6$ conforme $x \to 3$ o, en notación de límites

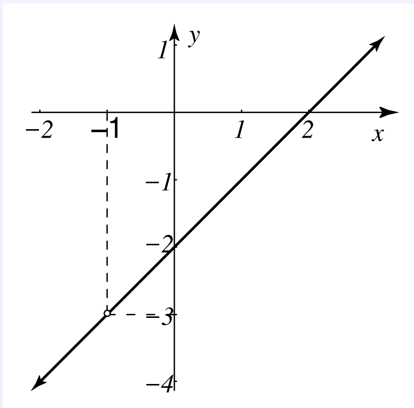
$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

Ejemplo 20.

Realice una conjetura del valor de $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}$

Se realiza una tabla:

x	-2	-1.5	-1.1	-1.01	-1.001	-1	-0.999	-0.99	-0.9	-0.5	0
$f(x)$	-4	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001	?	-2.999	-2.99	-2.9	-2.5	-2



La conjetura es

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x+1} = -3$$

Ejemplo 21.

Realice una conjetura del valor de $\lim\limits_{x\to 2{,}2}(-x^6+4x^4+2x^2+10)$

Se realiza una tabla:

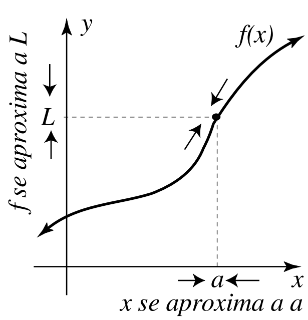
x	2.1	2.15	2.19	2.199	2.1999	2.2	2.2001	2.201	2.21	2.25	2.3
$f(x)$	10.85	5.94	1.28	0.1323	0.0155	?	-0.0105	-0.1278	-1.321	-7.106	-15.52

De la tabla anterior se puede conjeturar que $\lim\limits_{x\to 2{,}2}(-x^6+4x^4+2x^2+10)=0$, sin embargo, no es así; en realidad

$$\lim_{x\to 2{,}2}(-x^6+4x^4+2x^2+10) = \frac{39}{15625} \approx 0{,}002496$$

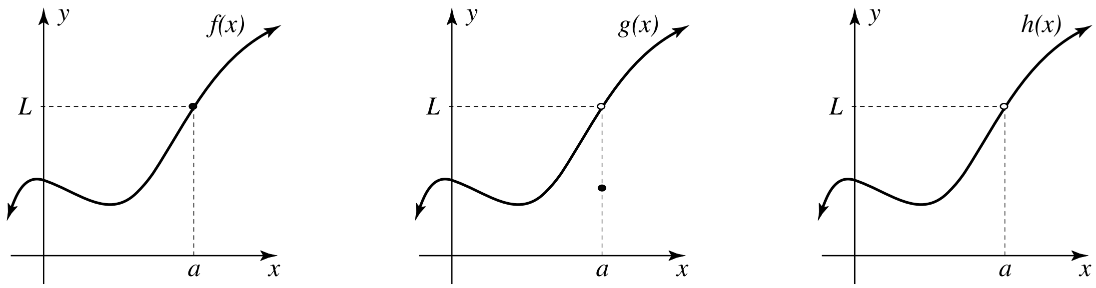
De los ejemplos anteriores se pueden deducir los siguientes resultados:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ significa que la función $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a L conforme x se aproxima a a.



2. Debe quedar muy claro que al calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ se está interesado en un vecindario alrededor de a pero nunca se toma el valor de a, es decir, $x \neq a$.

Observe los siguientes casos:



Aunque las tres funciones representadas son distintas, se cumple que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$

3. En el tercer ejemplo se observa que el uso de tablas y gráficos para aproximar un límite es una herramienta importante pero nos puede llevar a cometer errores, por lo que se necesitan técnicas más confiables para obtener el valor exacto del límite.

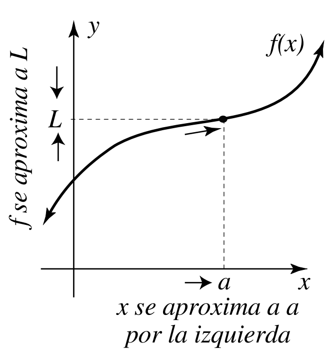
4. En los ejemplos 1 y 3 se observa que el valor que se obtiene en el límite es el mismo valor que se hubiera obtenido al evaluar directamente el valor buscado en la función, más adelante veremos que esta es la primer técnica para calcular límites.

2.1.1. Límites laterales

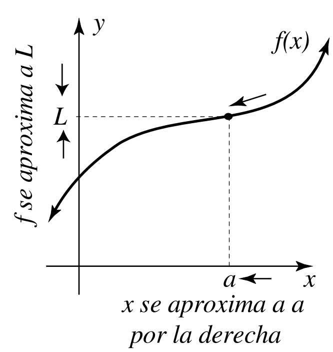
En los ejemplos anteriores, al aproximar los límites se construyó una tabla aproximándose al valor de x por ambos lados, sería muy natural que se quiera aproximar sólo por la izquierda o por la derecha, éstos se conocen como los límites laterales, así:

1. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a L conforme x se aproxima a a tomando valores menores que a (se aproxima a a por la izquierda).

2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a L conforme x se aproxima a a tomando valores mayores que a (se aproxima a a por la derecha).



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Teorema 1.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ sí y sólo si } \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Ejemplo 22.

Al tomar el Ejemplo 1 de la sección anterior se cumple que

$\lim_{x\to 3^-} (x^2 - x) = 6$

$\lim_{x\to 3^+} (x^2 - x) = 6$

Y, por lo tanto, $\lim_{x\to 3}(x^2 - x) = 6$

Ejemplo 23.

Considere la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, mediante una tabla, investigue los posibles valores para cada uno de los límites dado.

1. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0
$f(x)$	-1	-1	-1	?

   Parecería que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

2. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

x	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	?	1	1	1

   Parecería que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

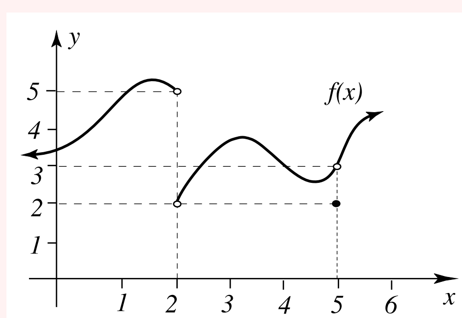
3. $\lim_{x\to 0} f(x)$

   Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ entonces $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Ejercicio 1.

En la figura se muestra la gráfica de una función f, utilícela para dar los valores (si existen) de los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
2. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
3. $\lim_{x\to 2} f(x)$
4. $\lim_{x\to 5^-} f(x)$
5. $\lim_{x\to 5^+} f(x)$
6. $\lim_{x\to 5} f(x)$



Ejercicio 2.

Realice la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla, de manera simultánea, las siguientes condiciones:

1. $f(-2) = 1$
2. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -1$
3. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$
5. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1$
6. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

2.2. Técnicas para calcular límites

Como se observó en la sección anterior, aproximar un límite utilizando tablas es útil, sin embargo, puede producir errores; esto nos lleva a buscar técnicas eficaces para encontrar el valor de los límites.

Antes de iniciar, es de suma importancia indicar que si un límite existe, su valor es único; es decir, no es posible que un mismo límite de dos valores distintos.

2.2.1. Sustitución directa

Para esta técnica se utilizan las siguientes propiedades:

Teorema 2 (Propiedades de los Límites)**.**

Si c es una constante, además $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ (es decir, que existen y dan estos valores) entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$
3. $\lim\limits_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \cdot L$
4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \cdot M$
5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$, con $n \in \mathbb{N}$
7. $\lim\limits_{x\to a} c = c$
8. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
9. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, con $n \in \mathbb{N}$
10. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, con $n \in \mathbb{N}$ (Si n es par entonces $a > 0$)
11. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, con $n \in \mathbb{N}$ (Si n es par entonces $L > 0$)

Nota: En conclusión, lo que indican estas propiedades es que si se tiene una función polinomial, racional o radical y a pertenece al dominio de la función entonces el límite se puede obtener directamente evaluando $f(a)$. Más adelante se verá con detalle que si una función $f(x)$ es continua entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$; interesante es que la mayoría de las funciones que se han estudiado anteriormente (polinomios, racionales, exponencial, logarítmica, etc) son continuas en su dominio.

Ejemplo 24.

Determine el resultado de los siguientes límites utilizando las propiedades anteriores, justifique cada paso con la propiedad correspondiente.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-4x+3)$

   $= \lim\limits_{x\to 2}(2x^2-4x) + \lim\limits_{x\to 2} 3 \qquad \text{(Prop 1)}$

   $= \lim\limits_{x\to 2} 2x^2 - \lim\limits_{x\to 2} 4x + \lim\limits_{x\to 2} 3 \qquad \text{(Prop 2)}$

   $= 2\cdot \lim\limits_{x\to 2} x^2 - 4\cdot \lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 3 \qquad \text{(Prop 3)}$

   $= 2\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 3 \qquad \text{(Prop 7, 8, 9)}$

   $= 3$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+1}{x+2}$

   $= \dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x+2)} \qquad \text{(Prop 4)}$

   $= \dfrac{\lim\limits_{x\to -1} x^2 + \lim\limits_{x\to -1} 1}{\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 2} \qquad \text{(Prop 1)}$

   $= \dfrac{(-1)^2+1}{-1+2} \qquad \text{(Prop 7, 8, 9)}$

   $= 2$

Nota: Se hubiera obtenido lo mismo si se evalúa directamente.

Ejemplo 25.

Determine, mediante evaluación directa, los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{13x-1}{x^2}}$

   $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{13x-1}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{13\cdot 2-1}{2^2}} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x+1}{3x^2+2}$

   $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x+1}{3x^2+2} = \dfrac{2\cdot(-1)^2-(-1)+1}{3\cdot(-1)^2+2} = \dfrac{4}{5}$

2.2.2. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Aunque muchos límites se pueden encontrar mediante una sustitución directa, en esta sección y en las siguientes el interés principal se dará sobre las formas indeterminadas.

Se va a iniciar en el caso que al evaluar directamente se de la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$, el límite aun se puede encontrar utilizando algunas técnicas que tratan de eliminar el término que provoca esta forma.

Límites que involucran factorización

En los límites de la forma $\frac{0}{0}$ lo que se busca es simplificar el factor que provoca dicha forma.

Ejemplo 26.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

Observe que al evaluar directamente se obtiene la forma $\dfrac{0}{0}$, lo que se hace es factorizar el numerador y el denominador y simplificar.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

La eliminación del término $x-1$ se puede realizar porque en el límite la x se aproxima al 1 pero nunca toma este valor, por lo que $x \neq 1$. Ahora que se eliminó el término que hacía la forma indeterminada, se puede evaluar el límite de manera directa.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

†

Ejemplo 27.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} &= \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+1)} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x-1)}{(x+1)} = 3
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 28.

Determine el valor de $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{y^5-32}{y^2+y-6}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 2} \frac{y^5-32}{y^2+y-6} &= \lim_{y\to 2} \frac{\cancel{(y-2)}(y^4+2y^3+4y^2+8y+16)}{\cancel{(y-2)}(y+3)} \\
&= \lim_{y\to 2} \frac{y^4+2y^3+4y^2+8y+16}{y+3} \\
&= \frac{80}{5} = 16
\end{aligned}$$

†

Límites que involucran racionalización

En este caso también se busca eliminar el término que provoca la forma indeterminada, sólo que se debe racionalizar primero antes de factorizar.

Ejemplo 29.

Determine el valor de $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sqrt{5t-1}-2}{t-1}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{5t-1}-2}{t-1} &= \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{5t-1}-2}{t-1} \cdot \frac{\sqrt{5t-1}+2}{\sqrt{5t-1}+2} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{5t-1-4}{(t-1)(\sqrt{5t-1}+2)} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{5\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(\sqrt{5t-1}+2)} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{5}{\left(\sqrt{5t-1}+2\right)} \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 30.

Determine el valor de $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u^2}{\sqrt{1-u^2}-1}$

Se tiene la forma $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0}\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}-1} &= \lim_{u\to 0}\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}-1}\cdot\frac{\sqrt{1-u^2}+1}{\sqrt{1-u^2}+1}\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\cancel{u^2}\left(\sqrt{1-u^2}+1\right)}{\cancel{1}-\cancel{u^2}-\cancel{1}}\\
&= \lim_{u\to 0}-\left(\sqrt{1-u^2}+1\right)\\
&= -2
\end{aligned}$$

†

Límites que involucran valor absoluto

Si se tiene un límite de la forma $\frac{0}{0}$ y contiene un valor absoluto que al ser evaluado da cero entonces el límite debe ser evaluado por medio de los límites laterales recordando que:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \text{ sí y sólo si } \lim_{x\to a^-} f(x)=L=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

Ejemplo 31.

Determine el valor de $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

Se tiene la forma $\frac{0}{0}$.

Para este ejemplo recuerde que $|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0\\ -x & \text{si} \quad x<0\end{cases}$

Al calcular los límites laterales:

- Por la izquierda, es decir, $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$

  Si $x\to 0^-\Rightarrow x<0\Rightarrow |x|=-x$, por lo que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}}\\
&= \lim_{x\to 0^-} -1=-1
\end{aligned}$$

- Por la derecha, es decir, $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$

  Si $x\to 0^+\Rightarrow x>0\Rightarrow |x|=x$, por lo que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\\
&= \lim_{x\to 0^+} 1=1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

†

Ejemplo 32.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to \frac{3}{2}} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

Recuerde que $|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x-3) & \text{si} \quad x < \frac{2}{3} \end{cases}$

Al calcular los límites laterales:

- Por la izquierda:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to \frac{3}{2}^-} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} &= \lim_{x\to \frac{3}{2}^-} \frac{x\cancel{(2x-3)}}{-\cancel{(2x-3)}} \\ &= \lim_{x\to \frac{3}{2}^-} -x \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

- Por la derecha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} &= \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} \frac{x\cancel{(2x-3)}}{\cancel{2x-3}} \\ &= \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} x \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\displaystyle\lim_{x\to \frac{3}{2}^-} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} \neq \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|}$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to \frac{3}{2}} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|}$ no existe.

†

Ejemplo 33.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{|2-x|}{4x^2-16}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

Recuerde que $|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x < 2 \\ -(2-x) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Al calcular los límites laterales:

- Por la izquierda:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} \frac{|2-x|}{4x^2-16} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{2-x}}{4\cancel{(x-2)}(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{4(x+2)} \\
&= -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

- Por la derecha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{|2-x|}{4x^2-16} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{x-2}}{4\cancel{(x-2)}(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4(x+2)} \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{|2-x|}{4x^2-16} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{|2-x|}{4x^2-16}$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{|2-x|}{4x^2-16}$ no existe.

†

Límites que involucran cambio de variable

Hay algunos casos en los que realizar una racionalización es demasiado complicado por lo que es mejor utilizar un cambio de variable (esta técnica también es aplicable en otros límites que se verán más adelante).

Ejemplo 34.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 21} \frac{\sqrt[4]{195x+1}-8}{\sqrt[3]{195x+1}-16}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$. Se va a hacer el cambio de variable:

Sea $u^{12} = 195x + 1$, si $x \to 21$ entonces $u \to 2$, así

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 21} \frac{\sqrt[4]{195x+1}-8}{\sqrt[3]{195x+1}-16} &= \lim_{u\to 2} \frac{\sqrt[4]{u^{12}}-8}{\sqrt[3]{u^{12}}-16} \\
&= \lim_{u\to 2} \frac{u^3-8}{u^4-16} \\
&= \lim_{u\to 2} \frac{\cancel{(u-2)}(u^2+2u+4)}{\cancel{(u-2)}(u^3+2u^2+4u+8)} \\
&= \lim_{u\to 2} \frac{u^2+2u+4}{u^3+2u^2+4u+8} \\
&= \frac{12}{32} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 35.

Determine el valor de $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{5t-1}+1}{3t}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$. Se va a hacer un cambio de variable:

Sea $u^7 = 5t-1$, entonces $t = \dfrac{u^7+1}{5}$; si $t \to 0$ entonces $u \to -1$, así

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[7]{5t-1}+1}{3t} &= \lim_{u\to -1} \frac{\sqrt[7]{u^7}+1}{3\cdot \frac{u^7+1}{5}} \\
&= \lim_{u\to -1} \frac{5(u+1)}{3(u^7+1)} \\
&= \lim_{u\to -1} \frac{5\cancel{(u+1)}}{3\cancel{(u+1)}(u^6-u^5+u^4-u^3+u^2-u+1)} \\
&= \lim_{u\to -1} \frac{5}{3(u^6-u^5+u^4-u^3+u^2-u+1)} \\
&= \frac{5}{3\cdot 7} = \frac{5}{21}
\end{aligned}$$

†

Límites trigonométricos

Para evaluar los límites con forma $\dfrac{0}{0}$ que involucren funciones trigonométricas se utilizan dos resultados importantes que se asumirán sin demostración.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} = 0}$$

Nota: Si desea observar la demostración de estos límites, puede consultar la bibliografía, en este trabajo no se considera dar estas demostraciones ahora porque el resultado es directo cuando se vea la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 36.

Determine el valor de $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5u)}{5u}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$. Se va a hacer el cambio de variable:

Sea $t = 5u$, si $u \to 0$ entonces $t \to 0$, así

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5u)}{5u} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

Nota: En general $\lim\limits_{f(x)\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$

Ejemplo 37.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos(x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ejemplo 38.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{5x}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{5x} &= \frac{1}{5} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(2x)}{2x} \\ &= \frac{2}{5} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \\ &= \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ejemplo 39.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \csc(2x) \cdot \cot(2x)$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \csc(2x) \cdot \cot(2x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(2x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4x^2 \cos(2x)}{4\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(2x)} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)} \cdot \frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)} \cdot \cos(2x) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

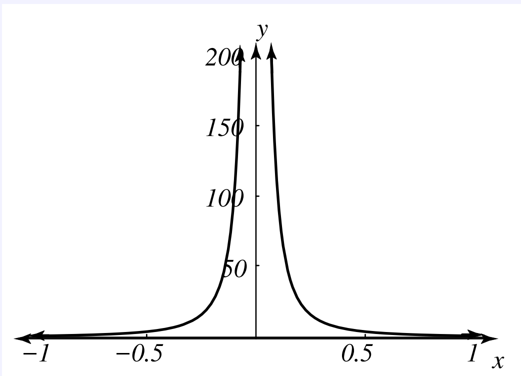
2.2.3. Forma indeterminada $\frac{k}{0}$ (límites infinitos y asíntotas verticales)

Ejemplo 40.

1. Mediante una tabla, investigue el comportamiento de $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

   Observe que se tiene la forma $\frac{1}{0}$, para investigar el comportamiento de la función se realiza la tabla:

x	-0.3	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.3
$f(x)$	11.11	100	10000	1000000	?	1000000	10000	100	11.11



Por lo que se conjetura que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = {}^{+}\infty$$

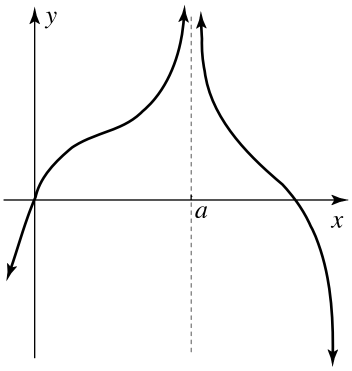
En este ejemplo se observa que la función crece sin límite conforme x se aproxima a 0, para denotar este comportamiento se escribe

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = {}^{+}\infty$$

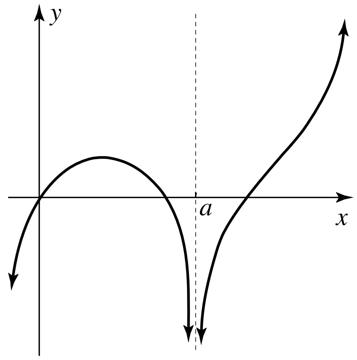
Esto no significa que el límite exista, sino que expresa la forma en que no existe, así:

- $\lim_{x\to a} f(x) = {}^{+}\infty$ significa que la función $f(x)$ toma valores arbitrariamente grandes (tanto como se quiera) conforme x se aproxima a a.
- $\lim_{x\to a} f(x) = {}^{-}\infty$ significa que la función $f(x)$ toma valores arbitrariamente grandes negativos (tanto como se quiera) conforme x se aproxima a a.

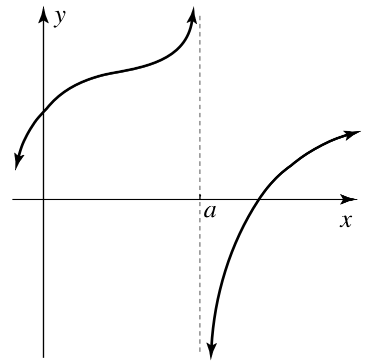
También se pueden definir los límites laterales que tiendan a infinito de una manera similar, de manera gráfica:



$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

En estos casos se dice que $x = a$ es una asíntota vertical de la función.

Así, se tiene que

$$\boxed{\frac{k}{0} \to \pm\infty}$$

Para saber si el infinito es positivo o negativo se debe encontrar "el signo" de 0 y se utiliza la regla de signos común para la división.

Ejemplo 41.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{2x}{x-2}$

Observe que se tiene la forma $\dfrac{4}{0}$.

Si $x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow x - 2 \to 0^-$.

La forma ahora es $F\left(\dfrac{4}{0^-} \to -\infty\right)$

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{2x}{x-2} = -\infty$

Ejemplo 42.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{-2}{x+1}$

Observe que se tiene la forma $\dfrac{-2}{0}$.

Si $x \to -1^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x + 1 \to 0^+$.

La forma ahora es $F\left(\dfrac{-2}{0^+} \to -\infty\right)$

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{-2}{x+1} = -\infty$

Ejemplo 43.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{3-x}$

Este límite se tiene que hacer calculando los límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{3-x}$

  Si $x \to 3^- \Rightarrow x < 3 \Rightarrow 3-x > 0 \Rightarrow 3-x \to 0^+ : F\left(\dfrac{1}{0^+} \to {}^+\infty\right)$

  Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{3-x} = {}^+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{3-x}$

  $x \to 3^+ \Rightarrow x > 3 \Rightarrow 3-x < 0 \Rightarrow 3-x \to 0^- : F\left(\dfrac{1}{0^-} \to {}^-\infty\right)$

  Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{3-x} = {}^-\infty$

Y como $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{3-x} \neq \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{3-x}$, se concluye que $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{3-x}$ no existe.

2.2.4. Formas indeterminadas $\frac{k}{\infty}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ (límites al infinito y asíntotas horizontales)

Ejemplo 44.

Realice una tabla para observar el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$ cuando x toma valores grandes.

x	10	100	1000	10000
$f(x)$	0.02	0.0002	0.000002	0.00000002

Por lo que la conjetura es que $\lim\limits_{x\to {}^+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$

Nota: Observe que la forma de este límite es $\dfrac{2}{\infty}$

Ejemplo 45.

Realice una tabla para observar el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{1-3x^2}{x^2+2}$ cuando x toma valores grandes.

x	10	100	1000
$f(x)$	-2.93	-2.9993	-2.999993

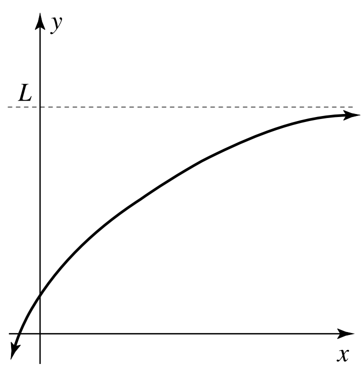
Por lo que la conjetura es que $\lim\limits_{x\to {}^+\infty} \dfrac{1-3x^2}{x^2+2} = -3$

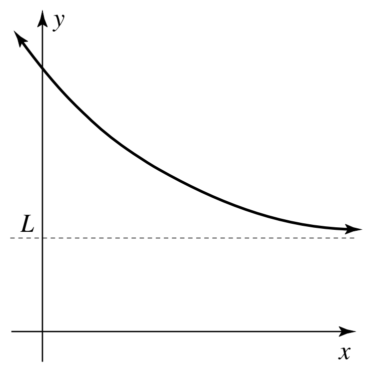
Nota: Observe que la forma de este límite es $\dfrac{\infty}{\infty}$

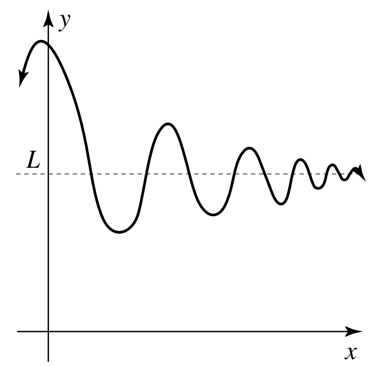
Para estos casos se tiene que:

- $\displaystyle\lim_{x\to{}^+\infty} f(x) = L$ significa que la función se aproxima tanto como se quiera a L conforme x toma valores cada vez mayores.
- $\displaystyle\lim_{x\to{}^-\infty} f(x) = L$ significa que la función se aproxima tanto como se quiera a L conforme x toma valores cada vez mayores negativos.

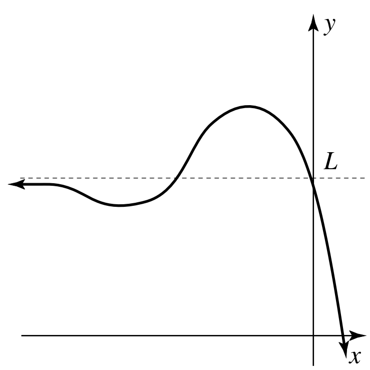
Gráficamente se tienen las siguientes posibilidades:







En estos casos $\displaystyle\lim_{x\to{}^+\infty} f(x) = L$, aquí se dice que $y = L$ es una asíntota horizontal.



Aquí $\displaystyle\lim_{x\to{}^-\infty} f(x) = L$, $y = L$ es una asíntota horizontal.

En el primer ejemplo se observa que si una constante se divide cada vez por valores mayores, el resultado es cada vez más pequeño (tendiendo a cero), es decir, se tiene el resultado

$$\boxed{\frac{k}{\infty} \to 0}$$

En el segundo ejemplo se tenía la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, esta forma puede dar cualquier valor como resultado y para calcular un límite con esta forma se debe realizar trabajo algebraico previo que la elimine.

Si el límite que se calcula es una división de polinomios entonces, por lo general, funciona “sacar a factor común” la variable de mayor grado tanto en el numerador como en el denominador.

Ejemplo 46.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to^+\infty} \dfrac{1-3x^2}{x^2+2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to^+\infty} \frac{1-3x^2}{x^2+2} &= \lim_{x\to^+\infty} \frac{-3x^2+1}{x^2+2} \\
&= \lim_{x\to^+\infty} \frac{x^2\left(-3+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to^+\infty} \frac{\left(-3+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}\right)}{\left(1+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}\right)} \\
&= -3
\end{aligned}$$

Propiedades del infinito

Estas son algunas propiedades del infinito que nos pueden ayudar al calcular límites (aquí se hace un abuso del lenguaje al hablar simplemente del infinito, cuando lo correcto sería tomar límites que tiendan a infinito, nos valemos de este recurso para mejorar la comprensión), en todos los casos se toma a c como constante.

1. ${}^+\infty + c = {}^+\infty$
2. ${}^-\infty + c = {}^-\infty$
3. $c \cdot {}^+\infty = {}^+\infty$, $c > 0$.
4. $c \cdot {}^+\infty = {}^-\infty$, $c < 0$.
5. $c \cdot {}^-\infty = {}^-\infty$, $c > 0$.
6. $c \cdot {}^-\infty = {}^+\infty$, $c < 0$.
7. ${}^+\infty + {}^+\infty = {}^+\infty$
8. ${}^-\infty + {}^-\infty = {}^-\infty$
9. ${}^+\infty \cdot {}^+\infty = {}^+\infty$
10. ${}^-\infty \cdot {}^+\infty = {}^+\infty \cdot {}^-\infty = {}^-\infty$
11. ${}^-\infty \cdot {}^-\infty = {}^+\infty$

Nota: La forma ${}^+\infty - {}^+\infty$ es una forma indeterminada que puede dar cualquier valor, para calcular un límite con esta forma se debe primero realizar trabajo algebraico para eliminarla.

Ejemplo 47.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to{}^-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+3}$

Se tiene la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to{}^-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+3} = \lim_{x\to{}^-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{3}{x^3}\right)} = \lim_{x\to{}^-\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}$$

En este caso se tiene la forma $F\left(\frac{\left(1+\frac{2}{{}^-\infty}+\frac{1}{({}^-\infty)^2}\right)}{{}^-\infty\left(1+\frac{3}{({}^-\infty)^3}\right)} = \frac{(1+0+0)}{{}^-\infty(1+0)} = \frac{1}{{}^-\infty} \to 0\right)$

Por lo tanto $\displaystyle\lim_{x\to{}^-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+3} = 0$

Ejemplo 48.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to{}^+\infty} \frac{2x^2+x+2}{3x-1}$

Se tiene la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to{}^+\infty} \frac{2x^2+x+2}{3x-1} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{3-\frac{1}{x}}$$

En este caso se tiene la forma $F\left(\frac{{}^+\infty\left(2+\frac{1}{{}^+\infty}+\frac{2}{({}^+\infty)^2}\right)}{3-\frac{1}{{}^+\infty}} = \frac{{}^+\infty(2+0+0)}{3-0} = \frac{{}^+\infty\cdot 2}{3} = {}^+\infty\right)$

Por lo tanto $\displaystyle\lim_{x\to{}^+\infty} \frac{2x^2+x+2}{3x-1} = {}^+\infty$

Ejemplo 49.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to{}^+\infty} \frac{3x^3+1}{2x^3+2x^2+x}$

Se tiene la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to{}^+\infty} \frac{3x^3+1}{2x^3+2x^2+x} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{x^3\left(3+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{3+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

En este caso se tiene la forma $F\left(\frac{3+\frac{1}{({}^+\infty)^3}}{2+\frac{2}{{}^+\infty}+\frac{1}{({}^+\infty)^2}} = \frac{3+0}{2+0+0} = \frac{3}{2}\right)$

Notas:

- Observe que en los tres ejemplos anteriores se hubiera obtenido el mismo resultado tomando los monomios de mayor grado del numerador y el denominador, este resultado es válido y se puede utilizar, así:
  - $\displaystyle\lim_{x\to{}^-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+3} = \lim_{x\to{}^-\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to{}^-\infty} \frac{1}{x} = 0$

- $\displaystyle \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{2x^2+x+2}{3x-1} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{2x^2}{3x} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{2x}{3} = {}^+\infty$
- $\displaystyle \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{3x^3+1}{2x^3+2x^2+x} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

- Cuando se calcula un límite (de cualquier forma), una vez que se evalúa el límite se debe evaluar en toda la expresión de una vez, no es válido evaluar "por pedazos" porque entonces un límite podría dar cualquier cosa, se tomará como ejemplo el último ejemplo anterior:

$$\lim_{x\to{}^+\infty} \frac{3x^3+1}{2x^3+2x^2+x} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{x^4\left(\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(\cancelto{0}{\frac{2}{x}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

cuando en realidad ya se vio que este límite da $\dfrac{3}{2}$

Ejemplo 50.

Determine el valor de $\displaystyle \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1}$

Se tiene la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to{}^+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

Pero como $x \to {}^+\infty$ entonces se está interesado en los valores positivos, por lo que $|x| = x$

$$= \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{\sqrt{\left(1+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}\right)}}{\left(2-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 51.

Determine el valor de $\displaystyle \lim_{x\to{}^-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1}$

Se tiene la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to{}^-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1} = \lim_{x\to{}^-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to{}^-\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

Pero como $x \to {}^-\infty$ entonces se está interesado en los valores negativos, y en este caso $|x| = -x$

$$= \lim_{x\to{}^-\infty} \frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to{}^-\infty} \frac{-\sqrt{\left(1+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}\right)}}{\left(2-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 52.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to{}^+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

Se tiene la forma $\infty-\infty$, en este caso se debe racionalizar.

$$\lim_{x\to{}^+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to{}^+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim_{x\to{}^+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to{}^+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

De aquí se obtiene la forma $F\left(\frac{1}{\sqrt{({}^+\infty)^2+1}+{}^+\infty}=\frac{1}{\sqrt{{}^+\infty}+{}^+\infty}=\frac{1}{{}^+\infty+{}^+\infty}=\frac{1}{{}^+\infty}=0\right)$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to{}^+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0$

Ejemplo 53.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to{}^+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

Se tiene la forma $\infty-\infty$, en este caso se debe racionalizar.

$$\lim_{x\to{}^+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to{}^+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\lim_{x\to{}^+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to{}^+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

En este caso se obtiene la forma $F\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Así,

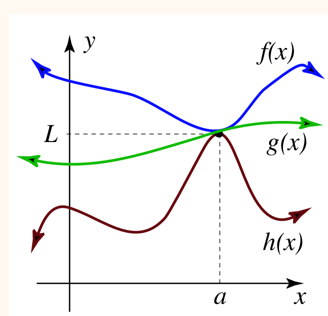
$$=\lim_{x\to{}^+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to{}^+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to{}^+\infty}\frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to{}^+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to{}^+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\cancel{\frac{1}{x}}_{0}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

Existen algunos casos de límites al infinito con expresiones trigonométricas que se resuelven utilizando el Teorema del Emparedado que se enuncia a continuación.

Teorema 3 (Teorema del emparedado)**.**

Si f, g y h son funciones tales que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ alrededor del punto $x=a$ y además $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L=\lim\limits_{x\to a}h(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$.



Ejemplo 54.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to^{+}\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x}$

Se sabe que

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$
$$x-1 \leq x+\operatorname{sen} x \leq x+1$$
$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{x+\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{x+1}{x}$$

Nota: La desigualdad se mantiene porque se divide entre un positivo, ya que $x \to {}^{+}\infty$.

$$\lim_{x\to^{+}\infty} \frac{x-1}{x} \leq \lim_{x\to^{+}\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x} \leq \lim_{x\to^{+}\infty} \frac{x+1}{x}$$
$$1 \leq \lim_{x\to^{+}\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

$\therefore \lim\limits_{x\to^{+}\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Ejemplo 55.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to^{-}\infty} \dfrac{2+\cos x}{x}$

Se sabe que

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$
$$1 \leq 2+\cos x \leq 3$$
$$\frac{1}{x} \geq \frac{2+\cos x}{x} \geq \frac{3}{x}$$

Nota: La desigualdad cambia ya que se divide entre un negativo, ya que $x \to {}^{-}\infty$.

$$\lim_{x\to^{-}\infty} \frac{1}{x} \geq \lim_{x\to^{-}\infty} \frac{2+\cos x}{x} \geq \lim_{x\to^{-}\infty} \frac{3}{x}$$
$$0 \geq \lim_{x\to^{-}\infty} \frac{2+\cos x}{x} \geq 0$$

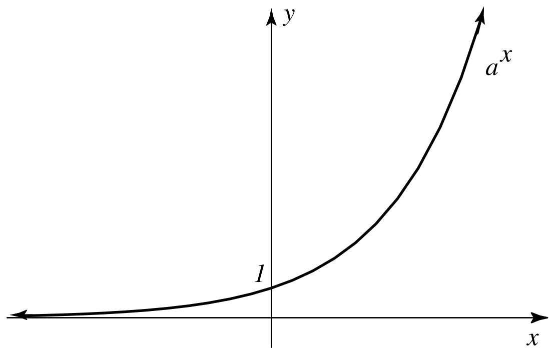
$\therefore \lim\limits_{x\to^{-}\infty} \dfrac{2+\cos x}{x} = 0$

2.2.5. Función Exponencial y Función Logarítmica

A continuación se muestran las gráficas de la función exponencial y la función logarítmica y, a partir de ellas, se observarán algunas de sus propiedades.

Función Exponencial (a^x)

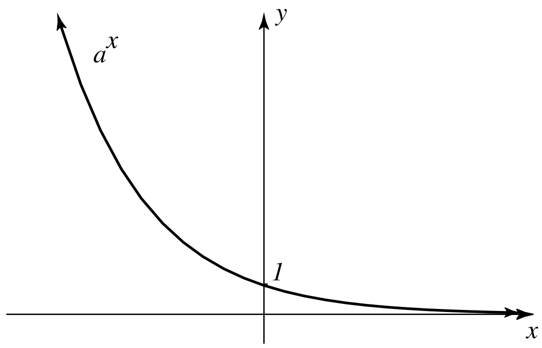
- Si $a > 1$



De aquí:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} a^x = 1^-$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1^+$
- $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$

- Si $0 < a < 1$

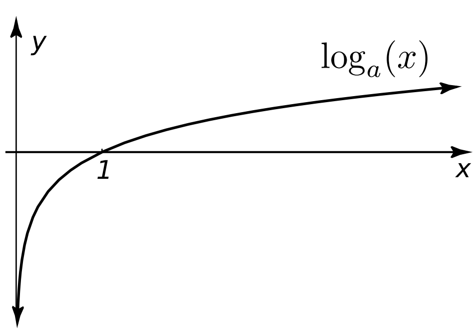


De aquí:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} a^x = 1^+$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1^-$
- $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$

Función Logarítmica ($\log_a x$)

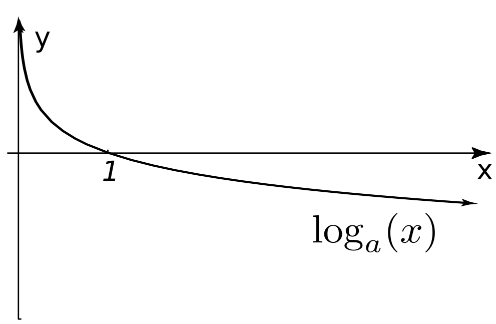
- Si $a > 1$



De aquí:

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} \log_a x = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \log_a x = 0^-$

- Si $0 < a < 1$



De aquí:

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} \log_a x = 0^-$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \log_a x = 0^+$

Al tener en cuenta estos resultados se pueden calcular límites que presenten estas funciones.

Ejemplo 56.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 3} 2^{\frac{1}{3-x}}$

Se tiene la forma $F\left(2^{\frac{k}{0}}\right)$, se deben calcular los límites laterales.

- $\lim\limits_{x\to 3^-} 2^{\frac{1}{3-x}}$

  Si $x \to 3^- \Rightarrow x < 3 \Rightarrow 3 - x > 0 \Rightarrow 3 - x \to 0^+$

  Así $F\left(2^{\frac{1}{0^+}} = 2^{+\infty} = {}^+\infty\right)$

  $\therefore \lim\limits_{x\to 3^-} 2^{\frac{1}{3-x}} = {}^+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 3^+} 2^{\frac{1}{3-x}}$,

  Si $x \to 3^+ \Rightarrow x > 3 \Rightarrow 3 - x < 0 \Rightarrow 3 - x \to 0^-$

  Así $F\left(2^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0\right)$

  $\therefore \lim\limits_{x\to 3^+} 2^{\frac{1}{3-x}} = 0$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} 2^{\frac{1}{3-x}} \neq \lim\limits_{x\to 3^+} 2^{\frac{1}{3-x}}$, entonces $\lim\limits_{x\to 3} 2^{\frac{1}{3-x}}$ no existe.

Ejemplo 57.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$

Se tiene la forma $F\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{0}}\right)$, se deben calcular los límites laterales.

- $\lim\limits_{x\to -2^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$

  Si $x \to -2^- \Rightarrow x < -2 \Rightarrow x + 2 < 0 \Rightarrow x + 2 \to 0^-$

  Así $F\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{0^-}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0\right)$

  $\therefore \lim\limits_{x\to -2^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}} = 0$

- $\lim\limits_{x\to -2^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$

  Si $x \to -2^+ \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow x + 2 \to 0^+$

  Así $F\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{0^+}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = {}^+\infty\right)$

  $\therefore \lim\limits_{x\to -2^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}} = {}^+\infty$

Por lo tanto, como $\lim\limits_{x\to -2^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}} \neq \lim\limits_{x\to -2^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$ entonces se concluye que $\lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$ no existe.

Ejemplo 58.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+3}{\ln(5-2x)}$

Se tiene la forma $F\left(\frac{7}{\ln(1)} = \frac{7}{0}\right)$, se deben calcular los límites laterales.

- $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x+3}{\ln(5-2x)}$

  Si $x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -2x > -4 \Rightarrow 5-2x > 1 \Rightarrow 5-2x \to 1^+$

  $F\left(\dfrac{7}{\ln(1^+)} = \dfrac{7}{0^+} = {}^+\infty\right)$

  $\therefore \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x+3}{\ln(5-2x)} = {}^+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x+3}{\ln(5-2x)}$

  Si $x \to 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow -2x < -4 \Rightarrow 5-2x < 1 \Rightarrow 5-2x \to 1^-$

  Así $F\left(\frac{7}{\ln(1^-)} = \frac{7}{0^-} = {}^-\infty\right)$

  $\therefore \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x+3}{\ln(5-2x)} = {}^-\infty$

Por lo tanto, como $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x+3}{\ln(5-2x)} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x+3}{\ln(5-2x)}$ entonces se concluye que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+3}{\ln(5-2x)}$ no existe.

Ejemplo 59.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{(\ln(2x+3))^2}$

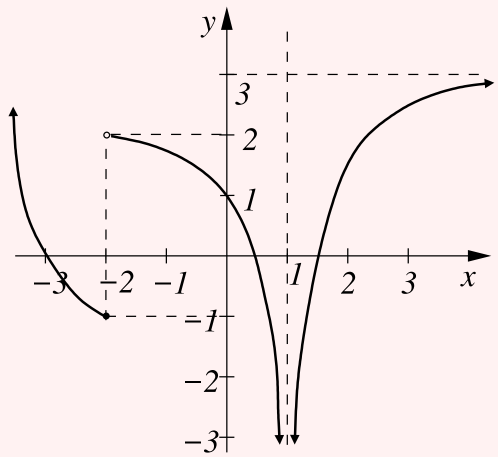
$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{(\ln(2x+3))^2} = {}^+\infty$ ya que se tiene la forma $F\left(\frac{-1+2}{(\ln(2\cdot -1+3))^2} = \frac{1}{(\ln(1))^2} = \frac{1}{(0)^2} = \frac{1}{0^+} = {}^+\infty\right)$

Nota: En este caso no se necesitó calcular los límites laterales ya que si se acerca a 0 por la derecha o por la izquierda se cumple que $(0)^2 = 0^+$.

Ejercicio 3.

Utilice la gráfica de la función f para determinar el valor (si existe) de los límites siguientes

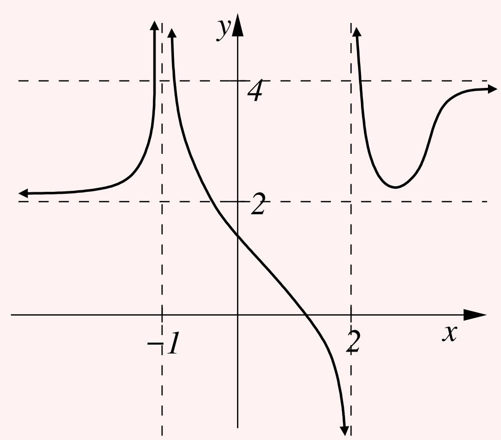
1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$
6. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
7. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$



Ejercicio 4.

Utilice la gráfica de la función f para determinar el valor (si existe) de los límites siguientes

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$



Ejercicio 5.

Realice una posible gráfica para la función f de forma que se cumplan, de manera simultánea, las siguientes condiciones:

1. $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
2. $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = -2$
3. $f(1) = 1$
4. $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$
5. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$
6. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
7. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$
8. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

Ejercicio 6.

Realice una posible gráfica para la función f de forma que se cumplan, de manera simultánea, las siguientes condiciones:

1. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
2. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$
4. $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$
5. $\forall x > 3, -1 \leq f(x) \leq 1$
6. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ no existe
7. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$

Capítulo 3

Continuidad

De manera intuitiva, una función es contínua si no presenta “brincos”, ni “cortes” o “huecos”. Otra definición que es muy común es: una función es contínua si su gráfica puede ser trazada sin tener que levantar el lápiz.

Estas definiciones se pueden utilizar de manera intuitiva, sin embargo, con los límites ahora se tienen las herramientas necesarias para definir mejor esta idea.

Para que una función sea contínua en un punto $x = a$ se debe cumplir que tanto por la izquierda como por la derecha la función se vaya aproximando a $f(a)$.

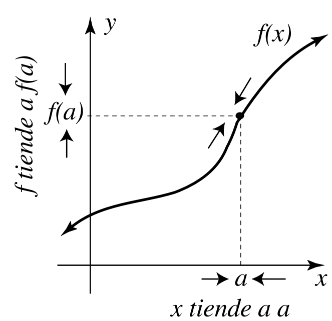
Definición 6.

Una función f es contínua en un número a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Esta definición requiere que se cumplan tres cosas:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



Definición 7.

Una función f es contínua desde la derecha en $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es contínua desde la izquierda en $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Definición 8.

Una función f es contínua en un intervalo si es contínua en todo número de ese intervalo (en los extremos se entiende que es continua por la derecha o por la izquierda según corresponda).

Teorema 4.

Si f y g son funciones contínuas en $x = a$ y c es una constante, entonces las funciones siguientes también son contínuas en $x = a$

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $c \cdot f$
4. $f \cdot g$
5. $\dfrac{f}{g}$, si $g(a) \neq 0$

Recuerde que en los límites la primer técnica que se vio fue la sustitución directa, en ésta se dieron varias propiedades en las que se cumplía que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, de estas propiedades se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 5.

Los tipos siguientes de funciones son contínuas en todo su dominio:

1. Polinomios
2. Racionales
3. Raíces
4. Trigonométricas
5. Trigonométricas inversas
6. Exponenciales
7. Logarítmicas

Ejemplo 60.

Indique el o los intervalos en donde es contínua la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\ln(x-1)}$

$\sqrt{x+2}$ tiene como dominio $x \geq -2$

$\ln(x-1)$ tiene como dominio $x > 1$

$\ln(x-1) = 0$ si $x \neq 2$

$\therefore f(x)$ es contínua en $]1, 2[$ y $]2, +\infty[$

Ejemplo 61.

Indique el o los intervalos en donde es contínua la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x-1}$

$\sqrt{1-x^2}$ tiene como dominio $[-1,1]$

$2x-1 \neq 0$ si $x \neq \dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ es contínua en $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right[$ y $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$

Ejemplo 62.

Para la función f dada, determine si es contínua en todos los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

En esta función, cada uno de los polinomios es contínuo en su dominio respectivo, el único punto que queda por verificar es en $x = 0$

Se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(0) \stackrel{?}{=} \lim_{x \to 0^+} f(x) \quad & \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^-} (x^2+1) \stackrel{?}{=} 0+1 \stackrel{?}{=} \lim_{x \to 0^+} (x+1) \\ & \Rightarrow \quad 1 = 1 = 1 \end{aligned}$$

Por lo que la función dada sí es contínua para todo número real.

Ejemplo 63.

Para la función f dada, determine si es contínua en todos los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Los trozos de la función son contínuos en sus correspondientes dominios, se debe verificar la continuidad para $x = 1$. Se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) \stackrel{?}{=} f(1) \quad & \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \stackrel{?}{=} 1 \\ & \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} \stackrel{?}{=} 1 \\ & \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} (x+2) \stackrel{?}{=} 1 \\ & \Rightarrow \quad 3 \neq 1 \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ no es contínua en $x = 1$ y, por lo tanto, no es contínua en todos los números reales.

Ejemplo 64.

Para la función f dada, determine si es contínua en todos los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Cada trozo es contínuo en su dominio correspondiente, sólo falta verificar para $x = 2$. Se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(2) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-x-2}{x-2} \stackrel{?}{=} 3 \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 2^+} (2x-1) \\ &\Rightarrow \quad \lim_{x\to 2^-} (x+1) \stackrel{?}{=} 3 \stackrel{?}{=} 3 \\ &\Rightarrow \quad 3 = 3 = 3 \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ es contínua para todo número real.

Ejemplo 65.

Para la función f dada, determine si es contínua en todos los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si} \quad x < -3 \\ 2(x+1) & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 0 \\ \frac{x^3+2x}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Cada uno de los trozos es contínuo en su dominio correspondiente, se debe verificar que es contínua en $x = -3$ y $x = 0$.

1. En $x = -3$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(-3) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to -3^+} f(x) \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+2x-3}{x+3} \stackrel{?}{=} 2(-3+1) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to -3^+} 2(x+1) \\ &\Rightarrow \quad \lim_{x\to -3^-} (x-1) \stackrel{?}{=} -4 \stackrel{?}{=} -4 \\ &\Rightarrow \quad -4 = -4 = -4 \end{aligned}$$

2. En $x = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(0) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} 2(x+1) \stackrel{?}{=} 2(0+1) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+2x}{x} \\ &\Rightarrow \quad 2 \stackrel{?}{=} 2 \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0^+} (x^2+2) \\ &\Rightarrow \quad 2 = 2 = 2 \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ es contínua para todo número real.

Ejemplo 66.

Determine el o los valores de a (si es posible) de modo que $f(x)$ se contínua, en donde

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1 \\ 3ax & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Se debe cumplir:

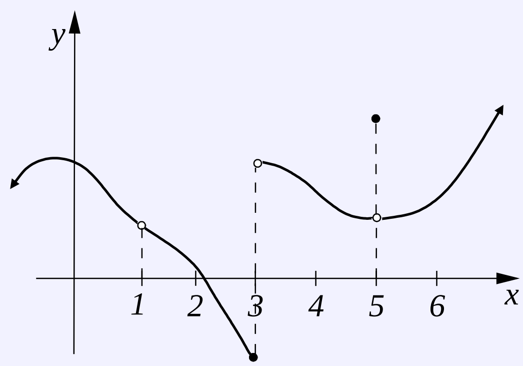
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x \to 1^-} 3ax = 3a = \lim_{x \to 1^+} (ax^2 + 1) \\ &\Rightarrow \quad 3a = 3a = a + 1 \end{aligned}$$

De aquí $3a = a + 1 \ \Rightarrow \ a = \dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ es contínua si $a = \dfrac{1}{2}$

Ejemplo 67.

Según la figura, ¿en cuáles valores de x es f discontínua? ¿Por qué?



Es discontínua en:

- $x = 1$ ya que $f(1)$ no existe.
- $x = 3$ ya que $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe (da distinto por la izquierda y por la derecha).
- $x = 5$ ya que $\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$.

Capítulo 4

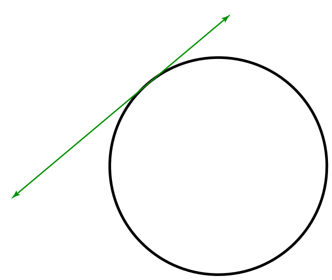
Derivadas

4.1. El problema de la recta tangente

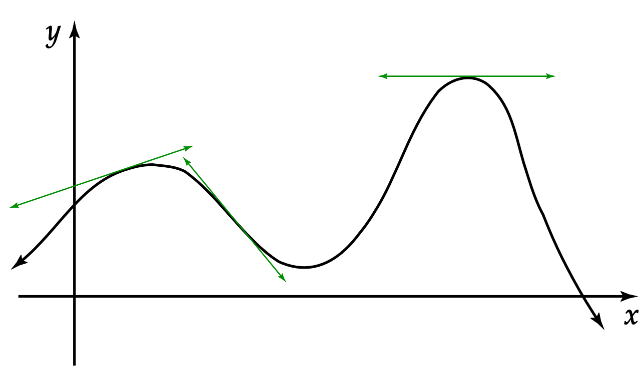
En esta sección se dará una idea de lo que se entiende por una recta tangente a la función $f(x)$ y el problema que se trabajará es encontrar el criterio de esta recta.

4.1.1. Idea intuitiva de recta tangente

Seguramente, el primer recuerdo que se tenga al hablar sobre rectas tangentes es en geometría, donde se define que la recta tangente a un círculo es la que interseca al círculo en un punto.

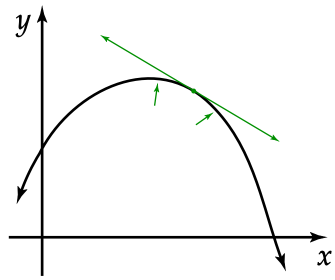


Esta definición es correcta en este contexto pero a veces se trata de utilizar también esta definición para funciones, sin embargo se tienen algunos inconvenientes. Veamos de manera gráfica una función con varias rectas tangentes en algunos de sus puntos.

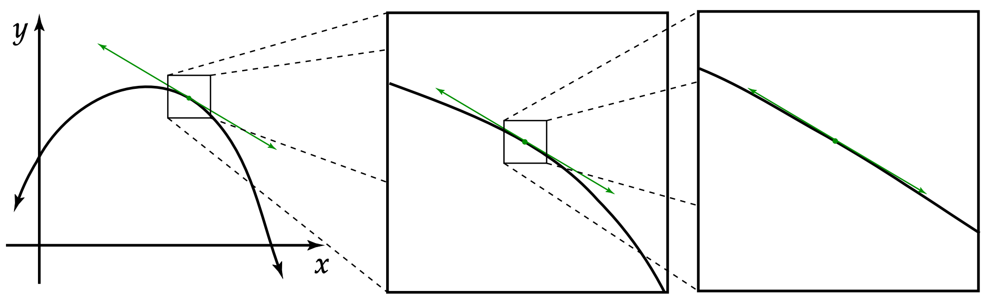


Si se alarga alguna de las rectas tangentes seguro intersecará a la función en otro punto. Se verán ahora otras ideas que pueden resultar más convenientes.

1. La recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x = a$ es la recta que se obtiene al "enderezar" la función en ese punto.



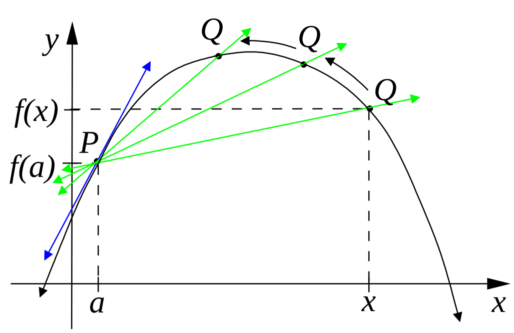
2. Si se hacen acercamientos susesivos a la función $f(x)$ en los alrededores del punto $x = a$, si la función tiende a convertirse en una recta, esta recta es la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = a$.



4.1.2. El problema de la recta tangente

En este caso lo que se va a buscar es un procedimiento para encontrar la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x = a$.

Hasta el momento sólo se conoce el procedimiento para encontrar el criterio de una recta si se conocen dos puntos al buscar primero la pendiente y luego la intersección, el problema es que en este caso ¡sólo se conoce un punto!. Sin embargo, en este problema también se encontrará la pendiente primero y se hará acercándose a la tangente por medio de rectas secantes.



La pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$ está dada por

$$m_{\overline{PQ}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ahora, si se hace que el punto Q se aproxime a P (haciendo que x tienda a a) se logra que la pendiente tienda al valor de la pendiente de la recta tangente. Así

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Una vez que se determina la pendiente se puede encontrar la intersección con el procedimiento ya conocido.

Esta pendiente de la recta tangente se conoce como la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$, es decir:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Ejemplo 68.

Encuentre el criterio de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

En este caso

$$\begin{aligned} m = f'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \\ &= \lim_{x \to 1} x + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

El criterio de la recta, hasta el momento, es $y = 2x + b$, al sustituir el punto $(1, 1)$ se obtiene

$$1 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -1$$

Por lo tanto, la recta tangente tiene por criterio $y = 2x - 1$

†

Ejemplo 69.

Determine el criterio de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2 - x$ en $x = -2$.

En este caso

$$m = f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x+2} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-3)}{\cancel{x+2}} \\
&= -5
\end{aligned}$$

El criterio de la recta, hasta el momento, es $y = -5x + b$, al sustituir el punto $(-2, 6)$ se obtiene

$$6 = -5 \cdot -2 + b \Rightarrow b = -4$$

Por lo tanto, la recta tangente tiene por criterio $y = -5x - 4$

†

4.2. La derivada como función

Ya se sabe, de la sección anterior, que la derivada de una función f en un punto a se define como

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si se hace el cambio de variable $h = x - a$ se obtiene

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esta es otra definición alternativa de derivada, ambas son equivalentes.

Ahora, si se usa esta última fórmula, pero para encontrar la derivada de una función $f(x)$ en un punto cualquiera $(x, f(x))$, en este caso:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Nota: Si $y = f(x)$ es una función entonces las siguientes notaciones se utilizan para representar la derivada: $f'(x) = y' = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$

Ejemplo 70.

Si se tiene la función $f(x) = x^2 - x$, determine una fórmula para $f'(x)$ utilizando la definición y utilice esta fórmula para determinar $f'(1), f'(-2), f'(10)$

En este caso

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) - x^2 + x}{h}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x} - h - \cancel{x^2} + \cancel{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h-1)}{\cancel{h}} \\
&= 2x - 1
\end{aligned}
$$

Así, $f'(x) = 2x - 1$.

De aquí se obtiene fácilmente que $f'(1) = 1, f'(-2) = -5, f'(10) = 19$

†

Ejemplo 71.

Determine, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = \sqrt{x+1}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + h + \cancel{1} - \cancel{x} - \cancel{1}}{h\left(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}\right)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

†

Ejemplo 72.

Determine, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = x^3 + x$

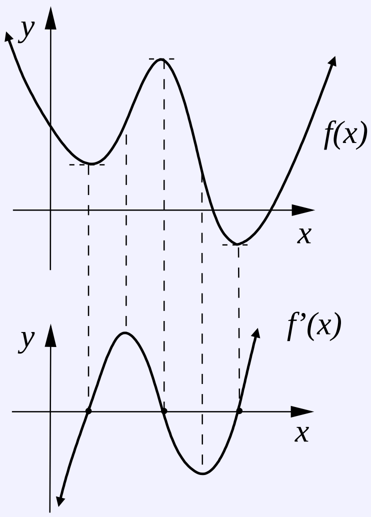
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h) - (x^3 + x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + \cancel{x} + h - \cancel{x^3} - \cancel{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2 + 1)}{\cancel{h}} \\
&= 3x^2 + 1
\end{aligned}
$$

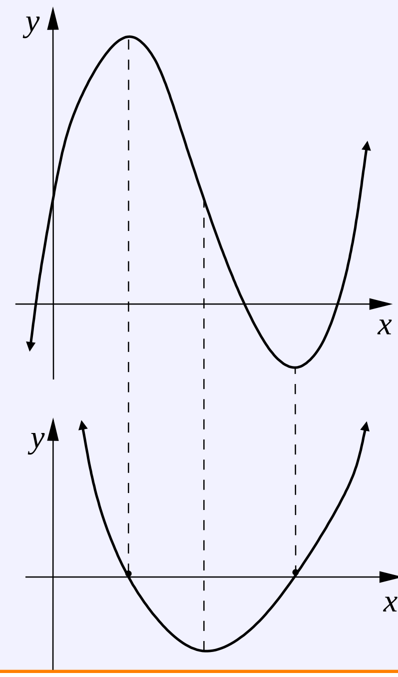
Así, $f'(x) = 3x^2 + 1$.

†

Ejemplo 73.

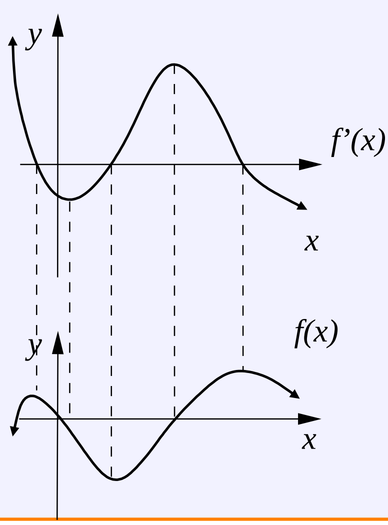
En cada caso, dada la gráfica de f, realice la gráfica de su derivada f'

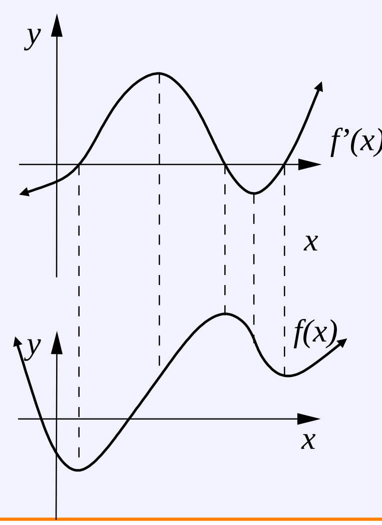
1. 

2. 

Ejemplo 74.

En cada caso, dada la gráfica de f', realice la gráfica de la función original f

1. 

2. 

Definición 9.

Una función f es derivable en un punto $x = a$ si $f'(a)$ existe.
Una función f es derivable en un intervalo abierto si es derivable en todo número del intervalo.

Teorema 6.

Si f es diferenciable en $x = a$, entonces f es contínua en $x = a$.

Nota: Se debe tener cuidado con este teorema ya que lo contrario NO es cierto, es decir, existen funciones que son contínuas en un punto pero no diferenciables.

Ejemplo 75.

Determine el o los intervalos en donde es derivable la función $f(x) = |x|$

Para determinar la derivada de esta función se debe realizar por casos:

1. Primer caso (si $x > 0, f(x) = |x| = x$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Segundo caso (si $x < 0, f(x) = |x| = -x$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)- -x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{x}-h+\cancel{x}}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

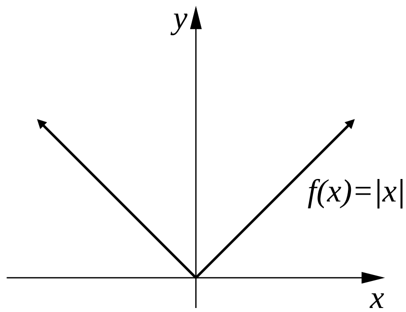
3. Tercer caso (si $x = 0$)

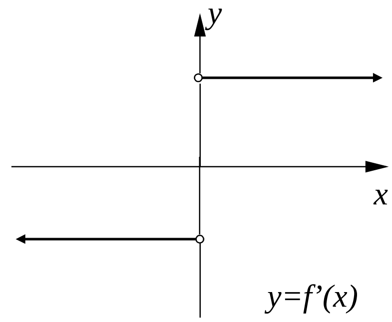
$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \end{aligned}$$

   En donde:

   - $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$
   - $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$

Por lo que $|x|$ es derivable en cualquier número excepto en $x = 0$.





†

Ejemplo 76.

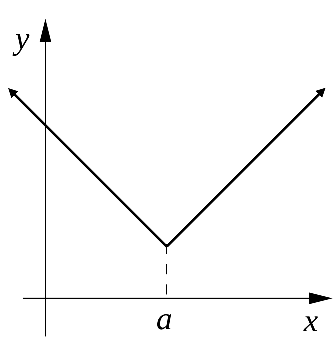
Determine el o los intervalos en donde es derivable la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

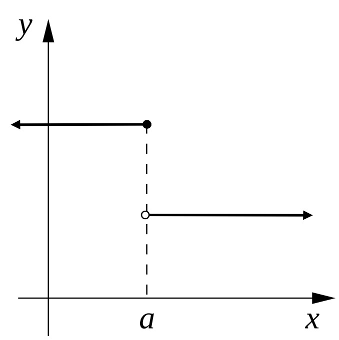
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}-\cancel{x}-h}{x(x+h)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{x(x+h)\cancel{h}} \\
&= \frac{-1}{x^2}
\end{aligned}$$

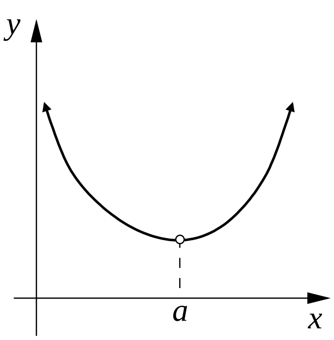
Por lo tanto, la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es derivable para todo número excepto $x = 0$ (donde la función no era contínua).

†

Nota: Para que una función sea derivable, su gráfica debe ser "suave", es decir, debe ser contínua (no tiene brincos ni saltos) y no puede presentar "picos". Las siguientes funciones NO son derivables en $x = a$







4.3. Propiedades de las derivadas

4.3.1. Derivadas de potencias

- Si se tiene la función $f(x) = c$, con c constante, determinemos su derivada $f'(x)$

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

  Por lo tanto

  $$\boxed{[c]' = 0}$$

- Ahora se buscará la derivada de la función $f(x) = x$

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = 1$$

  Por lo tanto

  $$\boxed{[x]' = 1}$$

- Si $f(x) = x^2$ se tiene que

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

  Por lo tanto

  $$\boxed{\left[x^2\right]' = 2x}$$

- De manera similar se puede determinar que

  $$\boxed{\left[x^3\right]' = 3x^2} \qquad \boxed{\left[x^4\right]' = 4x^3}$$

Observando el patrón que siguen estas derivadas se puede generalizar para obtener la fórmula general

$$\boxed{[x^n]' = nx^{n-1}}$$

Nota: Esta fórmula también se cumple para potencias negativas y fracciones, incluso para cualquier número real.

Ejemplo 77.

Determine la derivada de la función $f(x) = x^{900}$

$$f'(x) = 900x^{899}$$

Ejemplo 78.

Determine la derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Observe que $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, así $f'(x) = -1x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$

Ejemplo 79.

Determine la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$

Observe que $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, así $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ejemplo 80.

Determine la derivada de la función $f(x) = x^{\pi}$

$$f'(x) = \pi x^{\pi-1}$$

4.3.2. Derivada de la suma, resta y multiplicación por una constante

Si c es una constante y f y g son dos funciones diferenciables, entonces

1. $\boxed{[c \cdot f(x)]' = c \cdot [f(x)]' = c \cdot f'(x)}$
2. $\boxed{[f(x) + g(x)]' = [f(x)]' + [g(x)]' = f'(x) + g'(x)}$
3. $\boxed{[f(x) - g(x)]' = [f(x)]' - [g(x)]' = f'(x) - g'(x)}$

Ejemplo 81.

Determine $[x^7 + 5x^3 - x^e + 1]'$

$$\begin{aligned} [x^7 + 5x^3 - x^e + 1]' &= [x^7]' + [5x^3]' - [x^e]' + [1]' \\ &= 7x^6 + 5[x^3]' - ex^{e-1} + 0 \\ &= 7x^6 + 15x^2 - ex^{e-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 82.

Determine $\dfrac{d}{dx}\left(2x^5 - \sqrt[3]{x} - 3\right)$

$\dfrac{d}{dx}\left(2x^5 - \sqrt[3]{x} - 3\right) = 10x^4 - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Ejemplo 83.

Determine $\dfrac{d}{du}\left(3xu^5 - 2u^3 + x^2\sqrt{u} + x\right)$

$\dfrac{d}{du}\left(3xu^5 - 2u^3 + x^2\sqrt{u} + x\right) = 15xu^4 - 6u^2 + \dfrac{x^2}{2\sqrt{u}}$

Ejemplo 84.

Encuentre el o los valores de x para los cuales la curva $y = x^3 - 4x + 1$ tiene una recta tangente horizontal.

Para que la recta tangente sea horizontal debe tener 0 por pendiente, es decir, $y' = 0$.

$$\begin{aligned}
y' = 0 \quad &\Rightarrow \quad [x^3 - 4x + 1]' = 0 \\
&\Rightarrow \quad 3x^2 - 4 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{3} \\
&\Rightarrow \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

La curva $y = x^3 - 4x + 1$ tiene una recta tangente horizontal en $\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ †

4.3.3. Derivadas de las funciones exponencial y logarítmica

Para encontrar la derivada de las funciones exponencial y logarítmica se utilizan las siguientes fórmulas:

1. $\boxed{[a^x]' = a^x \cdot \ln a}$
2. $\boxed{[e^x]' = e^x}$
3. $\boxed{[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}}$
4. $\boxed{[\ln x]' = \dfrac{1}{x}}$

Ejemplo 85.

Calcule $[e^x + \log_2 x + x]'$

$$[e^x + \log_2 x + x]' = e^x + \frac{1}{x\ln 2} + 1$$

Ejemplo 86.

Calcule $\left[\log_\pi x - \left(\sqrt{2}\right)^x\right]'$

$$\left[\log_\pi x - \left(\sqrt{2}\right)^x\right]' = \frac{1}{x\ln\pi} - \left(\sqrt{2}\right)^x \cdot \ln(\sqrt{2})$$

4.3.4. Derivadas del producto y del cociente

Al contrario de lo que se podría pensar, en este caso las reglas no son simplemente separar los términos, sino que si f y g son diferenciables entonces

1. $\boxed{[f(x)\cdot g(x)]' = [f(x)]'\cdot g(x) + f(x)\cdot[g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$

2. $\boxed{\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{[f(x)]'\cdot g(x) - f(x)\cdot[g(x)]'}{(g(x))^2} = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$

Ejemplo 87.

Calcule la derivada de la función $f(x) = 2^x\cdot x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [2^x]'\cdot x + 2^x\cdot[x]' \\ &= 2^x\ln 2\cdot x + 2^x \end{aligned}$$

Ejemplo 88.

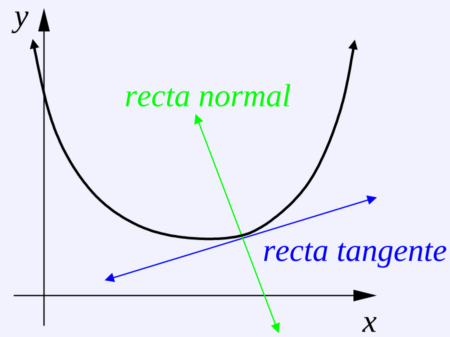
Calcule la derivada de la función $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{[\ln x]'\cdot x^2 - \ln x\cdot[x^2]'}{x^4} \\ &= \frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x^2} - \ln x\cdot 2\cancel{x}}{\cancel{x^4}} \\ &= \frac{1-2\ln x}{x^3} \end{aligned}$$

Ejemplo 89.

Determine la ecuación de la recta normal a la curva $y = x \cdot \ln x$ en el punto $(e^2, 2 \cdot e^2)$.

Nota: La recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente que pasa por el punto de tangencia.



Se calcula primero la pendiente de la recta tangente en el punto.

$$m_t = y' = \ln x + 1$$

Y evaluando en el punto $x = e^2$ se tiene

$$y'(e^2) = 3$$

Pero como la normal es perpendicular a la tangente entonces $m_n = -\dfrac{1}{3}$.

Por lo que la normal, por el momento es $y = \dfrac{-1}{3}x + b$.

Ahora se sustituye el punto $(e^2, 2 \cdot e^2)$ en esta ecuación.

$$2e^2 = \frac{-1}{3} \cdot e^2 + b \Rightarrow b = \frac{7}{3}e^2$$

Por lo tanto, la recta normal buscada es $y_n = \frac{-1}{3}x + \frac{7}{3}e^2$

†

4.3.5. Derivadas de las funciones trigonométricas

- Primero se determinará la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\operatorname{sen} h \cos x}{h} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\left[-\operatorname{sen} x \cdot \cancelto{0}{\frac{1-\cos h}{h}} + \cos x \cdot \cancelto{1}{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}\right] \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\boxed{[\operatorname{sen} x]' = \cos x}$$

- De manera similar se puede encontrar que

$$\boxed{[\cos x]' = -\operatorname{sen} x}$$

- Ahora se determinará la derivada de la función $f(x) = \tan x$

$$
\begin{aligned}
[\tan x] &= \left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right] \\
&= \frac{[\operatorname{sen} x]' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot [\cos x]'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\boxed{[\tan x]' = \sec^2 x}$$

- De igual forma se obtienen los siguientes resultados.

$$\boxed{[\sec x]' = \sec x \cdot \tan x}$$

$$\boxed{[\csc x]' = -\csc x \cdot \cot x}$$

$$\boxed{[\cot x]' = -\csc^2 x}$$

Ejemplo 90.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \sqrt{x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= [\operatorname{sen} x]' \cdot \sqrt{x} + \operatorname{sen} x \cdot \left[\sqrt{x}\right]' \\
&= \cos x \sqrt{x} + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 91.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \dfrac{\csc x}{\tan x - 1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[\csc x]' \cdot (\tan x - 1) - \csc x \cdot [\tan x - 1]'}{(\tan x - 1)^2} \\ &= \frac{-\csc x \cdot \cot x \cdot (\tan x - 1) - \csc x \cdot \sec^2 x}{(\tan x - 1)^2} \end{aligned}$$

4.3.6. Derivada de la función inversa (las trigonométricas inversas)

Si se tiene una función inversa $y = f^{-1}(x)$ entonces se cumple que

$$\boxed{y' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Así, por ejemplo, si se tiene el arcoseno (se debe recordar que esta función es la inversa de la función seno) que se define como:

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \text{ siempre que } \operatorname{sen} y = x, \text{ con } \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

entonces

$$y' = \frac{1}{\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\operatorname{sen}^{-1} x)}}$$

Este último paso es cierto ya que

$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) > 0$ si $\dfrac{-\pi}{2} \leq \operatorname{sen}^{-1} x \leq \dfrac{\pi}{2}$ ó $\dfrac{-\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Entonces

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\operatorname{sen}^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\left[\operatorname{sen}^{-1} x\right]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

De manera similar se obtiene que

$$\boxed{\left[\cos^{-1} x\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}} \qquad \boxed{\left[\tan^{-1} x\right]' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

$$\boxed{\left[\cot^{-1} x\right]' = \frac{-1}{1 + x^2}} \qquad \boxed{\left[\sec^{-1} x\right]' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}}$$

$$\left[\csc^{-1} x\right]' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Ejemplo 92.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x}{\tan^{-1} x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[x]' \cdot \tan^{-1} x - x \cdot [\tan^{-1} x]'}{\left(\tan^{-1} x\right)^2} \\ &= \frac{\tan^{-1} x - x \cdot \frac{1}{x^2+1}}{\left(\tan^{-1} x\right)^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 93.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x}{\tan^{-1} x}$ $g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x \cdot \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= [\operatorname{sen}^{-1} x]' \cdot \sqrt{x} + \operatorname{sen}^{-1} x \cdot \left[\sqrt{x}\right]' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{x} + \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

4.3.7. Regla de la cadena

Si tanto f como g son funciones derivables entonces

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Ejemplo 94.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$

$$f'(x) = \cos(e^x) \cdot [e^x]' = \cos(e^x) \cdot e^x$$

Ejemplo 95.

Encuentre la derivada de la función $g(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$

$$g'(x) = -\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) \cdot \left[\sqrt{x}\right] = \frac{-\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 96.

Encuentre la derivada de la función $h(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

$$h'(x) = 2^{\operatorname{sen} x} \cdot \ln 2 \cdot [\operatorname{sen} x]' = 2^{\operatorname{sen} x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$$

Ejemplo 97.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \left(\tan^{-1} x\right)^2$

$$f'(x) = 2\tan^{-1} x \cdot [\tan^{-1} x]' = \frac{2 \cdot \tan^{-1} x}{x^2+1}$$

Ejemplo 98.

Encuentre la derivada de la función $y = \sqrt{3x^2+x}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+x}} \cdot [3x^2+x]' = \frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x}}$$

Ejemplo 99.

Encuentre la derivada de la función $g(x) = \operatorname{sen}\left(\cos(\tan x)\right)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(\cos(\tan x)) \cdot [\cos(\tan x)]' \\ &= \cos(\cos(\tan x)) \cdot -\operatorname{sen}(\tan x) \cdot [\tan x]' \\ &= \cos(\cos(\tan x)) \cdot -\operatorname{sen}(\tan x) \cdot \sec^2 x \end{aligned}$$

Ejemplo 100.

Encuentre la derivada de la función $h(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \tan^{-1}(x^2+1)$

$$\begin{aligned} h'(x) &= [e^{\operatorname{sen} x}]' \cdot \tan^{-1}(x^2+1) + e^{\operatorname{sen} x} \cdot \left[\tan^{-1}(x^2+1)\right]' \\ &= e^{\operatorname{sen} x} \cdot [\operatorname{sen} x]' \cdot \tan^{-1}(x^2+1) + e^{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2+1} \cdot [x^2+1]' \\ &= e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot \tan^{-1}(x^2+1) + e^{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2+1} \cdot 2x \end{aligned}$$

Ejemplo 101.

Encuentre la derivada de la función $\dfrac{\pi^{x^e}}{\tan(x^2)}$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\left[\pi^{x^e}\right]' \cdot \tan(x^2) - \pi^{x^e} \cdot [\tan(x^2)]'}{\tan^2(x^2)} \\
&= \frac{\pi^{x^e} \cdot \ln(\pi) \cdot [x^e]' \cdot \tan(x^2) - \pi^{x^e} \cdot \sec^2(x^2) \cdot [x^2]'}{\tan^2(x^2)} \\
&= \frac{\pi^{x^e} \cdot \ln(\pi) \cdot e \cdot x^{e-1} \cdot \tan(x^2) - \pi^{x^e} \cdot \sec^2(x^2) \cdot 2x}{\tan^2(x^2)}
\end{aligned}$$

4.3.8. Derivadas de orden superior

Hasta el momento se ha encontrado la derivada de una función $f(x)$ y se ha visto que ls derivada es una función $f'(x)$ por lo que a esta función se le puede calcular su derivada obteniendo la segunda derivada de $f(x)$, esta se puede volver derivar y así susesivamente, así:

$f(x)$ es la función original.

$f'(x)$ es la primera derivada.

$[f'(x)]' = f''(x)$ es la segunda derivada.

$[f''(x)]' = f'''(x)$ es la tercera derivada.

$[f'''(x)]' = f^{(4)}(x)$ es la cuarta derivada.

$\vdots$

$f^{(n)}(x)$ es la n-ésima derivada.

Notación: Otras notaciones que se utilizan para las derivadas de orden superior son

$$f''(x) = y'' = D^2 f(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

En física, por ejemplo, si $s(t)$ representa la distancia entonces:

$s'(t) = v(t)$ es la velocidad.

$s''(t) = v'(t) = a(t)$ es la aceleración.

Ejemplo 102.

Considere la función $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$, determine $f''(x)$

$$\begin{aligned} & f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x \\ \Rightarrow \quad & f''(x) = \cos x + \cos x - x \cdot \operatorname{sen} x = 2\cos x - x \cdot \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Ejemplo 103.

Considere la función $g(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$, determine $g'''(x)$

$$\begin{aligned} & g'(x) = 6x^2 - 2x + 2 \\ \Rightarrow \quad & g''(x) = 12x - 2 \\ \Rightarrow \quad & g'''(x) = 12 \end{aligned}$$

Ejemplo 104.

Considere la función $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$, determine $h''(x)$

$$\begin{aligned} & h'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} \\ \Rightarrow \quad & h''(x) = \frac{[e^x \cdot x - e^x]' \cdot x^{\cancel{2}} - (e^x \cdot x - e^x) \cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}} \\ \Rightarrow \quad & h''(x) = \frac{(e^x \cdot x + \cancel{e^x} - \cancel{e^x}) \cdot x - 2e^x(x-1)}{x^3} \\ \Rightarrow \quad & h''(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} \end{aligned}$$

Ejemplo 105.

Considere la función $y = \operatorname{sen}(\tan x)$, determine y''

$$\begin{aligned} & y' = \operatorname{sen}(\tan x) \cdot \sec^2 x \\ \Rightarrow \quad & y'' = -\operatorname{sen}(\tan x) \cdot \sec^4 x + \cos(\tan x) \cdot 2\sec^2 x \cdot \tan x \end{aligned}$$

4.3.9. Derivación implícita

Hasta el momento todas las funciones que se han derivado se han podido expresar de la forma $y = f(x)$, tales como $y = \sqrt{x^3 + 1}$ ó $y = x \cdot \operatorname{sen} x$.

Sin embargo, hay funciones que son difíciles de expresar en esta forma o es imposible hacerlo, algunas de estas funciones son $x^2+y^2=25$, $x^3-y^3=2xy$, $e^{x\cdot y}=y^3-x$, $\operatorname{sen}(x+y)=\sqrt{y}\cdot\cos(x\cdot y)$

En estos casos, lo que se hace es derivar de manera implícita, se toma la variable y como una función de x $(y=f(x))$ y se aplica la regla de la cadena, luego se despeja y'.

Ejemplo 106.

Considere que y está definida de forma implícita en términos de x mediante la expresión $x^2+y^2=25$, determine y'

$$\begin{aligned} x^2+y^2=25 &\Rightarrow 2x+2y\cdot y'=0 \\ &\Rightarrow y'=\frac{-x}{y} \end{aligned}$$

Si en este ejercicio se pidiera la derivada en el punto $(0,5)$, simplemente se sustituyen las variables x y y por sus respectivos valores obteniendo $y'=\dfrac{-0}{5}=0$ (la derivada en este punto es cero).

Ejemplo 107.

Considere que y está definida de forma implícita en términos de x mediante la expresión $x^3-y^3=2xy$, determine y'

$$\begin{aligned} x^3-y^3=2xy &\Rightarrow 3x^2-3y^2\cdot y'=xy+2x\cdot y' \\ &\Rightarrow 3x^2-xy=2x\cdot y'+3y^2\cdot y' \\ &\Rightarrow y'=\frac{3x^2-xy}{2x+3y^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 108.

Considere que y está definida de forma implícita en términos de x mediante la expresión $e^{xy}=y^3-x$, determine y'

$$\begin{aligned} e^{xy}=y^3-x &\Rightarrow e^{xy}\cdot(y+xy')=3y^2y'-1 \\ &\Rightarrow e^{xy}\cdot xy'-3y^2y'=-1-e^{xy}\cdot y \\ &\Rightarrow y'=\frac{-1-e^{xy}\cdot y}{e^{xy}\cdot x-3y^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 109.

Considere que y está definida de forma implícita en términos de x mediante la expresión $\operatorname{sen}(x+y)=\sqrt{y}\cdot\cos(x\cdot y)$, determine y'

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sen}(x+y)=\sqrt{y}\cdot\cos(x\cdot y)\\
\Rightarrow\quad & \cos(x+y)\cdot(1+y')=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'\cdot\cos(x\cdot y)-\sqrt{y}\cdot\operatorname{sen}(x\cdot y)\cdot(y+xy')\\
\Rightarrow\quad & \cos(x+y)\cdot y'-\frac{\cos(x\cdot y)}{2\sqrt{y}}\cdot y'+\sqrt{y}\cdot\operatorname{sen}(x\cdot y)\cdot xy'=-\sqrt{y}\cdot\operatorname{sen}(x\cdot y)\cdot y-\cos(x+y)\\
\Rightarrow\quad & y'=\frac{-y\sqrt{y}\cdot\operatorname{sen}(x\cdot y)-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-\frac{\cos(x\cdot y)}{2\sqrt{y}}+x\sqrt{y}\cdot\operatorname{sen}(x\cdot y)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 110.

Determine el criterio de la recta tangente a la curva $x^3+y^3=6xy$ en el punto $(3,3)$.

Se quiere encontrar la recta tangente $y=mx+b$. Al derivar de manera implícita se obtiene

$$\begin{aligned}
x^3+y^3=6xy \quad & \Rightarrow\quad 3x^2+3y^2\cdot y'=6y+6xy'\\
& \Rightarrow\quad 3y^2y'-6xy'=6y-3x^2\\
& \Rightarrow\quad y'=\frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}\\
& \Rightarrow\quad y'=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}
\end{aligned}$$

En el punto $(3,3)$ se cumple que $m=y'=\dfrac{2\cdot 3-3^2}{3^2-2\cdot 3}=-1$

Por el momento la tangente tiene el criterio $y=-x+b$. Al sustituir el punto $(3,3)$ por donde pasa dicha recta se obtiene

$$3=-3+b\Rightarrow b=6$$

Por lo tanto, la recta tangente a la curva $x^3+y^3=6xy$ en el punto $(3,3)$ es $y=-x+6$.

4.3.10. Derivación logarítmica

Esta técnica se utiliza para derivar expresiones de la forma $y=f(x)^{g(x)}$ o para simplificar la derivada de funciones con muchas multiplicaciones o divisiones.

Lo que se hace es aplicar logaritmo natural a ambos lados del igual

$$\ln y=\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)$$

Luego se "baja" el exponente por propiedades de logaritmos

$$\ln y=g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)$$

Y se deriva de manera implícita.

Ejemplo 111.

Determine la derivada de $y = x^x$

$$\begin{aligned} y = x^x \quad &\Rightarrow \quad \ln y = \ln\left(x^x\right) \\ &\Rightarrow \quad \ln y = x \cdot \ln(x) \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1 \\ &\Rightarrow \quad y' = y(\ln x + 1) \\ &\Rightarrow \quad y' = x^x(\ln x + 1) \end{aligned}$$

Ejemplo 112.

Determine la derivada de $y = x^{\operatorname{sen} x}$

$$\begin{aligned} y = x^{\operatorname{sen} x} \quad &\Rightarrow \quad \ln y = \ln\left(x^{\operatorname{sen} x}\right) \\ &\Rightarrow \quad \ln y = \operatorname{sen} x \cdot \ln(x) \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \\ &\Rightarrow \quad y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 113.

Determine la derivada de $y = (\tan x)^{x^2-1}$

$$\begin{aligned} y = (\tan x)^{x^2-1} \quad &\Rightarrow \quad \ln y = \ln\left((\tan x)^{x^2-1}\right) \\ &\Rightarrow \quad \ln y = (x^2-1) \cdot \ln(\tan x) \\ &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln(\tan x) + (x^2-1) \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x \\ &\Rightarrow \quad y' = (\tan x)^{x^2-1}\left[2x \cdot \ln(\tan x) + (x^2-1) \cdot \frac{\sec^2 x}{\tan x}\right] \end{aligned}$$

Ejemplo 114.

Determine la derivada de $y = \tan x \cdot (x^2 - x + 2) \cdot e^x$

$$\begin{aligned} y = \tan x \cdot (x^2 - x + 2) \cdot e^x \quad &\Rightarrow \quad \ln y = \ln\left(\tan x \cdot (x^2 - x + 2) \cdot e^x\right) \\ &\Rightarrow \quad \ln y = \ln(\tan x) + \ln(x^2 - x + 2) + \ln(e^x) \\ &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x + \frac{1}{x^2 - x + 2} \cdot (2x - 1) + 1 \\ &\Rightarrow \quad y' = \tan x \cdot (x^2 - x + 2) \cdot e^x \cdot \left[\frac{sec^2 x}{\tan x} + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2} + 1\right] \end{aligned}$$

Ejemplo 115.

Determine la derivada de $y = \dfrac{2^{x-1} \cdot \operatorname{sen} x}{\arctan x \cdot \sqrt{-x}}$

$$\begin{aligned} y = \frac{2^{x-1} \cdot \operatorname{sen} x}{\arctan x \cdot \sqrt{-x}} \quad &\Rightarrow \quad \ln y = \ln\left(\frac{2^{x-1} \cdot \operatorname{sen} x}{\arctan x \cdot \sqrt{-x}}\right) \\ &\Rightarrow \quad \ln y = \ln(2^{x-1}) + \ln(\operatorname{sen} x) - \ln(\arctan x) - \ln\left(\sqrt{-x}\right) \\ &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{\cancel{2^{x-1}} \cdot \ln 2}{\cancel{2^{x-1}}} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\arctan x \cdot (x^2 + 1)} - \frac{1}{\sqrt{-x} \cdot 2\sqrt{-x}} \cdot -1 \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{2^{x-1} \cdot \operatorname{sen} x}{\arctan x \cdot \sqrt{-x}} \cdot \left[\ln 2 + \cot x - \frac{1}{(x^2 + 1) \arctan x} + \frac{1}{2|x|}\right] \end{aligned}$$

Ejercicio 7.

Resuelva las situaciones que se presentan a continuación

1. Si $f(x) = \ln x \cdot g(x)$, donde $g(e) = 1$ y $g'(e) = -2$ determine $f'(e)$ R/ $\dfrac{1}{e} - 2$
2. Si $f(x) = \operatorname{sen}(g(x))$ y se sabe que $g(1) = 0$ y $g'(1) = 1$, determine $f'(1)$ R/ 1
3. Si $f(x) = h\left(e^x \cdot g(x)\right)$, donde $g(0) = 2$, $g'(0) = -1$ y $h'(2) = 3$, determine $f'(0)$ R/ 3
4. Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{x} + x \cdot g(x^2)$, donde $f'(1) = 4$, determine $g'(1)$ R/ 3

Ejercicio 8.

Resuelva los siguientes problemas de rectas tangentes y normales.

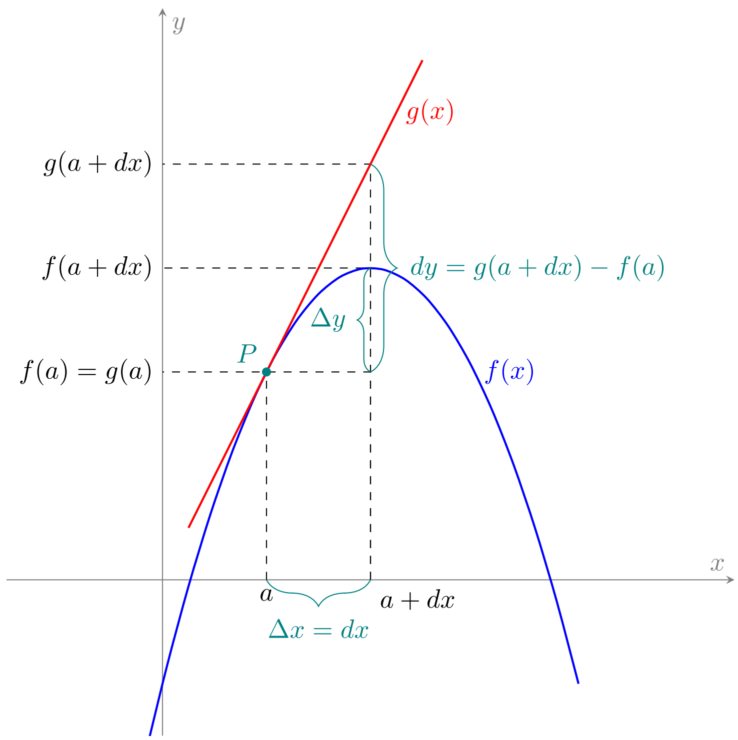
1. Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el punto $(1,1)$.
R/ $y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{3}{2}$
2. Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = e^{-x} - x$ en el punto $(-1, e+1)$.
R/ $y = (-e-1)x$
3. Determine los puntos en la función $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ en donde la recta tangente es paralela a la recta $y = -2x - 1$
R/ $\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-23}{27}\right)$, $(-2, 3)$
4. Determine los puntos en la función $f(x) = \dfrac{5}{x}$ en donde la recta tangente es perpendicular a la recta $y = \dfrac{1}{3}x + 2$
R/ $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}, \dfrac{5}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\right)$, $\left(-\sqrt{\dfrac{5}{3}}, \dfrac{-5}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\right)$
5. Determine la recta normal a la curva $x^2 + y^2 = 16$ en el punto $(1, \sqrt{15})$
R/ $y = \sqrt{15}x$
6. Determine la recta normal a la función $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x}$ en el punto $(-1, 1)$
R/ $y = \dfrac{-1}{3}x + \dfrac{4}{3}$

4.4. Diferencial de una función

Suponga que se tiene una función $f(x)$ y un punto $P = (a, f(a))$ de dicha función. Por P se traza la recta tangente a la función $f(x)$, esta recta se llamará $g(x)$.

Si al punto a se le suma una distancia Δx (cuando esta distancia tiende a cero se conoce como el diferencial en x ó dx) entonces el cambio real de la función f en y se conoce como Δy, mientras que el cambio de la recta tangente se conoce como el diferencial en y y se denota dy.

Δy y dy tienden al mismo valor conforme Δx tiende a cero y además $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.



Se va a determinar primero la ecuación de la recta tangente $g(x)$, esta recta tiene como pendiente $f'(a)$ y pasa por el punto $(a, f(a))$, así:

$$g(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x-a) \quad \Rightarrow \quad g(x) = f'(a) \cdot x - f'(a) \cdot a + f(a)$$

Se nota entonces que $dy = g(a+dx) - f(a)$, así:

$$\begin{aligned} dy &= g(a+dx) - f(a) \\ &= f'(a) \cdot (a+dx) - f'(a) \cdot a + \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} \\ &= \cancel{f'(a) \cdot a} + f'(a) \cdot dx - \cancel{f'(a) \cdot a} \\ &= f'(a) \cdot dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, en un punto general x, el diferencial de la función $f(x)$ se denota dy y se cumple que

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

Ejemplo 116.

Realice una aproximación de $\sqrt{4{,}01}$ utilizando el diferencial de la función.

Se cumple que $\sqrt{4{,}01} = \sqrt{4+0{,}01} = \sqrt{4} + dy = 2 + dy$, con $f(x) = \sqrt{x}$

En este caso $dy = f'(x) \cdot dx \Rightarrow dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$.

Así, para $x = 4$ y $dx = 0{,}01$ se tiene $dy \approx \dfrac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}01 = 0{,}0025$.

Por lo tanto $\sqrt{4{,}01} \approx 2 + 0{,}0025 = 2{,}0025$ (el valor real es 2.002498).

Capítulo 5

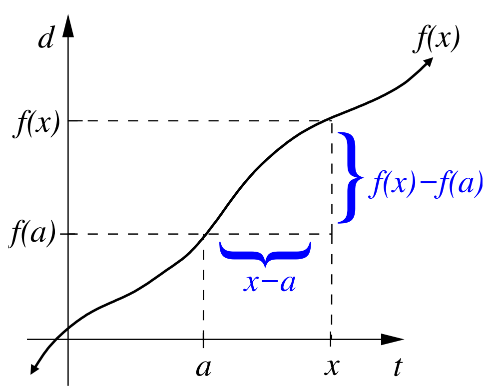
Aplicaciones de la Derivada

5.1. La derivada como razón de cambio

En la sección anterior se mostró la derivada de manera gráfica como la pendiente de la recta tangente, en esta sección se generalizará más este término al mostrar la derivada como una razón de cambio.

5.1.1. La velocidad como razón de cambio

En física, la *velocidad* se define como la distancia entre el tiempo $\left(v = \frac{d}{t}\right)$; la *velocidad promedio* es la distancia total recorrida entre el tiempo total, así, si se recorrió, por ejemplo, $100km$ en 2 horas se dice que en promedio se iba a una velocidad de $50\frac{km}{h}$, pero la velocidad varía durante el viaje, si se quiere saber la velocidad a la que se iba a los a minutos, si se tiene la gráfica



Lo que se hace es encontrar la velocidad promedio en un lapso corto de tiempo y el lapso se hace tender a cero.

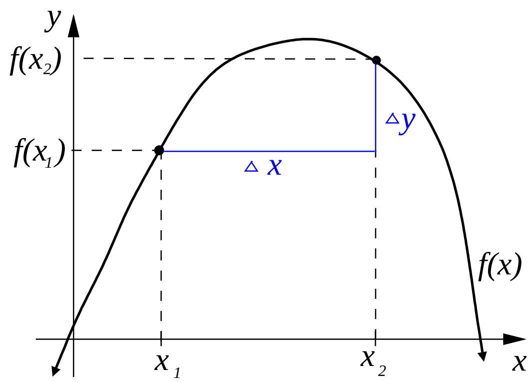
Velocidad promedio: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Velocidad instantánea: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (Esto en el instante a)

¡La derivada de la distancia es la velocidad!

En este caso se ve que la velocidad se define como el cambio de la distancia con respecto al tiempo.

5.1.2. Otras razones de cambio



Δx se conoce como el cambio en x ($\Delta x = x_2 - x_1$)

Δy se conoce como el cambio en y ($\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$)

Y el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

es la razón promedio de cambio de y con respecto a x.

La razón instantánea de cambio de y con respecto a x se define como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Que es ¡la derivada!

Es decir, las razones de cambio instantáneas son derivadas, estas son muy útiles en muchas ramas, algunos ejemplos son:

- Física: El cambio del trabajo con respecto al tiempo (potencia). El cambio de velocidad con respecto al tiempo (aceleración).
- Química: El cambio en la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (velocidad de reacción).
- Fabricante de acero: El cambio del costo de producir x toneladas de acero por día (costo marginal).
- Biólogo: El cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo.

5.1.3. Razones de Cambio Relacionadas

La idea de los problemas de tasas relacionadas es observar cómo cambia una variable conforme se altera(n) otra(s) cuyo cambio es conocido o se puede averiguar.

Para resolver estas aplicaciones no hay un procedimiento general sin embargo se pueden sugerir ciertos pasos a seguir:

1. Lea bien el problema y comprenda lo que se plantea, si se puede realizar un diagrama para entenderlo mejor, hágalo.
2. Defina cuáles son las variables del problema y cuáles son las constantes (en estos problemas es importante observar cuáles valores se mantienen constantes durante todo el tiempo y cuáles tienen variación). Defina claramente además qué le pide el problema y obtenga los datos del instante solicitado. Tenga cuidado en el signo de las variaciones ya que si la distancia disminuye, un líquido sale y el volumen baja, por ejemplo, entonces la razón es negativa.
3. Determine la ecuación que relaciona las variables dadas y, utilizando ecuaciones auxiliares (si fuera necesario), deje esta ecuación en términos sólo de las variables cuya variación es conocida o se pide.
4. Derive la ecuación de forma implícita con respecto al tiempo.
5. Sustituya los datos del problema y obtenga la solución. Analice que la solución sea coherente con el problema y de la respuesta.

Ejemplo 117.

Se bombea aire a un globo esférico, de tal modo que su volumen aumenta con una rapidez de $100\frac{cm^3}{s}$. ¿Con qué rapidez aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de $50cm$?

Se observa que el volumen del globo y el radio cambian conforme al tiempo, es decir, ambas variables son funciones del tiempo.

Se dice que el volumen aumenta con una rapidez de $100\frac{cm^3}{s}$, es decir, el cambio del volumen con respecto al tiempo se mantiene constante y es de $\dfrac{dV}{dt} = 100\dfrac{cm^3}{s}$.

Se pide la rapidez con que cambia el radio cuando el diámetro es de $50cm$, es decir, cuando el radio es de $25cm$.

Así, se pide $\dfrac{dr}{dt}$ cuando $r = 25$.

Se sabe que el volumen de una esfera es $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ y se nota que se conoce $\dfrac{dV}{dt}$ y se pide $\dfrac{dr}{dt}$ por lo que no se necesitan ecuaciones auxiliares.

Se deriva esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

Se sustituyen los valores en el instante $\dfrac{dV}{dt} = 100\dfrac{cm^3}{s}$ y $r = 25$.

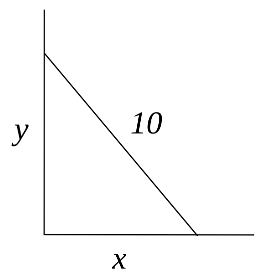
$100 = 4\pi 25^2 \cdot \dfrac{dr}{dt} \Rightarrow \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{25\pi}$

Por lo tanto, el radio del globo cambia a razón de $\dfrac{1}{25\pi}\dfrac{cm}{s}$

†

Ejemplo 118.

Una escalera de $10m$ de longitud se apoya en un muro vertical. Si su extremo inferior se resbala y aleja de la pared a una velocidad de $1\frac{m}{s}$ ¿Con qué velocidad se desliza el extremo superior por el muro cuando el extremo inferior está a $6m$ de la pared?



Se tiene $\dfrac{dx}{dt} = 1\dfrac{m}{s}$ y es constante.

Se pide $\dfrac{dy}{dt}$ en el instante cuando $x = 6$.

Por Pitágoras se tiene $y^2 + x^2 = 10^2$, se deriva con respecto al tiempo.

$$2y\frac{dy}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} = 0$$

Note que en instante en que $x = 6$, por Pitágoras se cumple que $y = 8$. Se sustituyen los datos en la expresión.

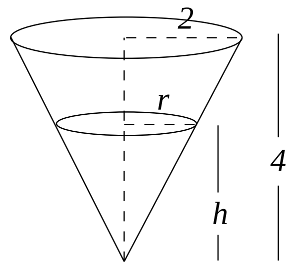
$2 \cdot 8 \cdot \dfrac{dy}{dt} + 2 \cdot 6 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-3}{4}$

En este caso el valor negativo es de esperar ya que la distancia y está disminuyendo, por tanto el extremo de la pared resbala a una taza de $\dfrac{-3}{4}\dfrac{m}{s}$

†

Ejemplo 119.

Se tiene un tanque de agua en forma de cono circular invertido, con radio de la base igual a $2m$ y $4m$ de altura. Si se le bombea agua, con un gasto de $2\dfrac{m^3}{min}$, calcule la velocidad con que sube el nivel del agua cuando el agua alcanza un nivel de tres metros.



Se tiene $\dfrac{dV}{dt} = 2\dfrac{m^3}{min}$ y es constante.

Se pide $\dfrac{dh}{dt}$ en el instante cuando $h = 3$.

El volumen del cono es $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Como no se tiene $\dfrac{dr}{dt}$ entonces se utiliza una ecuación auxiliar para sustituirla.

Por semejanza se sabe que $\dfrac{2}{4} = \dfrac{r}{h} \Rightarrow h = \dfrac{h}{2}$

Por lo tanto $V = \dfrac{\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h}{3} \Rightarrow V = \dfrac{\pi h^3}{12}$

Se deriva con respecto al tiempo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

Se sustituyen los valores en el instante $\dfrac{dV}{dt} = 2\dfrac{m^3}{min}$ y $h = 3$.

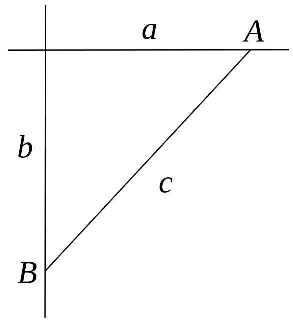
$2 = \dfrac{\pi}{4} \cdot 3^2 \cdot \dfrac{dh}{dt} \Rightarrow \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{8}{9\pi} \approx 0,28\dfrac{m}{min}$

Por lo que el nivel de agua sube a una taza de $0,28\dfrac{m}{min}$ en el instante dado.

†

Ejemplo 120.

El automóvil A viaja hacia el oeste a $50\frac{k}{h}$ y el automóvil B hacia el norte a $60\frac{k}{h}$. Los dos se dirigen al cruce de dos carreteras. ¿A qué velocidad se acercan entre sí cuando A está a 0,3k y B a 0,4k de cruce?



Se sabe que $\dfrac{da}{dt} = -50\dfrac{k}{h}$ y es constante, en este caso es negativo porque la distancia a está disminuyendo.

También se conoce $\dfrac{db}{dt} = -60\dfrac{k}{h}$ que es constante.

Se pide $\dfrac{dc}{dt}$ en el instante en que $a = 0{,}3$, $b = 0,4$

Por Pitágoras se sabe que $c^2 = a^2 + b^2$.

Al derivar con respecto al tiempo se tiene:

$$2c\frac{dc}{dt} = 2a\frac{da}{dt} + 2b\frac{db}{dt}$$

Para sustituir se necesita saber el valor de c en el instante, pero por Pitágoras se tiene que $c = 0{,}5$. Sustituyendo estos valores.

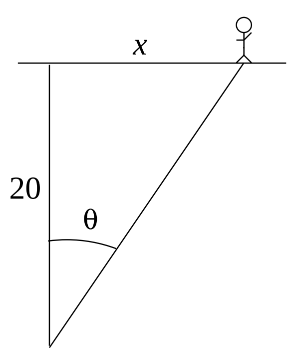
$2 \cdot 0{,}5\dfrac{dc}{dt} = 2 \cdot 0,3 \cdot -50 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot -60 \Rightarrow \dfrac{dc}{dt} = -78\dfrac{k}{h}$

Es decir, los autos se aproximan entre sí a $78\dfrac{k}{h}$ (el signo nos indica que se aproximan, si hubiera dado positivo los autos se alejan).

†

Ejemplo 121.

Una persona camina en línea recta a una velocidad de $4\dfrac{m}{s}$. En el piso, a $20m$ de distancia del camino, hay un faro, que se mantiene dirigido hacia el caminante. ¿A qué velocidad gira el faro cuando el sujeto se encuentra a $15m$ del punto del camino más cercano al faro?



Se sabe $\dfrac{dx}{dt} = 4\dfrac{m}{s}$.

Se pide $\dfrac{d\theta}{dt}$ cuando $x = 15$.

Se cumple que $\tan\theta = \dfrac{x}{20}$, se deriva y se obtiene

$$\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\frac{dx}{dt}$$

Se necesita el valor de θ en el instante, pero se cumple que $\tan\theta = \dfrac{15}{20} \Rightarrow \theta = 0{,}64$. Se sustituyen los valores para obtener $\dfrac{d\theta}{dt}$.

$\sec^2 0{,}64 \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{20} \cdot 15 \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dt} = 0{,}128$

Es decir, el faro gira a una velocidad de $0{,}128\dfrac{rad}{s}$

†

5.2. Formas Indeterminadas y Regla de L'Hôpital

Si el límite de un cociente presenta la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$ entonces se cumple que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla también se cumple para los límites laterales y para los límites al infinito.

Notas:

- Observe que la regla de L'Hôpital sólo se puede utilizar en límites de la forma $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$, en esta sección se verán otros límites que se pueden transformar a estas formas para poder utilizar la regla.
- Al utilizar la regla se debe derivar el numerador y el denominador de la fracción por separado, es un error común derivar la expresión como cociente.

Ejemplo 122.

Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \text{ Forma } \frac{0}{0}, \text{ L'H} \\ = & \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ = & 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 123.

Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \text{ Forma } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'H} \\ = & \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} \text{ Forma } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'H} \\ = & \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} \\ = & +\infty \end{aligned}$$

Ejemplo 124.

Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \text{ Forma } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'H} \\ = & \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} \\ = & \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}} \\ = & 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 125.

Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \text{ Forma } \frac{0}{0}, \text{ L'H} \\
= & \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \text{ Forma } \frac{0}{0}, \text{ L'H} \\
= & \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x \cdot \tan x}{3x} \text{ Forma } \frac{0}{0}, \text{ L'H} \\
= & \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \cdot \tan^2 x + \sec^4 x}{3} \\
= & \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 126.

Calcule $\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \text{ Forma } \frac{0}{0}, \text{ L'H} \\
= & \lim_{x \to \pi^-} \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} \text{ Forma: } \frac{-1}{-1 \cdot 0^+} \\
= & +\infty
\end{aligned}$$

5.2.1. Productos Indeterminados $(0 \cdot \infty)$

Si se presenta la forma $0 \cdot \infty$ se puede realizar una transformación de la expresión para poder aplicar la regla de L'Hôpital, así:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \qquad \text{ó} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Nota:

- En este procedimiento se realiza un abuso del lenguaje al tratar al término ∞ como un número cuando lo correcto es utilizar la notación de límite, se utiliza este recurso para mejorar la comprensión.

Ejemplo 127.

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0^+} x\ln x \quad \text{Forma } 0\cdot\infty \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'H} \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \\
= & \lim_{x\to 0^+} -x \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 128.

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \big((1-e^x)\cdot\ln(x^2)\big)$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0^+} \big((1-e^x)\cdot\ln(x^2)\big) \quad \text{Forma } 0\cdot\infty \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{1-e^x}} \quad \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'H} \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}{\frac{e^x}{(1-e^x)^2}} \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{2(1-e^x)^2}{x\cdot e^x} \qquad \text{Forma } \frac{0}{0}, \text{ L'H} \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{4(1-e^x)\cdot -\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}+x\cdot\cancel{e^x}} \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{-4(1-e^x)}{1+x} \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

5.2.2. Diferencias Indeterminadas ($+\infty - +\infty$ ó $-\infty - -\infty$)

Si se presenta alguna de las formas indeterminadas $+\infty - +\infty$ ó $-\infty - -\infty$ entonces:

- Si se puede realizar la resta y simplificarla entonces esto se hace primero, es muy probable que quede una forma para aplicar L'Hôpital.
- Si no se puede realizar la resta entonces la expresión se transforma de la siguiente manera:

$$\infty - \infty = \infty\cdot\left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Ahora se calcula el límite del término $\frac{\infty}{\infty}$ utilizando L'Hôpital; si este límite da distinto de 1 entonces ya el límite original se calcula sustituyendo (el límite dará $+\infty$ ó $-\infty$), sino (si el límite da 1) entonces se tiene un límite de la forma $\infty \cdot 0$ que se trata como en el caso anterior.

Nota:

- En el último procedimiento se utiliza $\infty - \infty$ para hacer referencia a los dos casos $+\infty - +\infty$ ó $-\infty - -\infty$ que son tratados de igual manera.
- Observe que los casos $+\infty - -\infty$ ó $-\infty - +\infty$ no son indeterminados ya que dan $+\infty$ y $-\infty$ de forma directa.

Ejemplo 129.

Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x) \quad \text{Forma } +\infty - +\infty \\
= & \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) \\
= & \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{Forma } \frac{0}{0}, \text{ L'H} \\
= & \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} \\
= & \ 0
\end{aligned}
$$

†

Ejemplo 130.

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - \ln(x-1))$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x \to +\infty} (e^x - \ln(x-1)) \quad \text{Forma } +\infty - +\infty \\
= & \lim_{x \to +\infty} e^x \cdot \left(1 - \frac{\ln(x-1)}{e^x} \right)
\end{aligned}
$$

Ahora se verifica cuánto da $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{e^x}$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{e^x} \quad \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'H} \\
= & \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{e^x} \\
= & \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x \cdot (x-1)} \\
= & \ 0
\end{aligned}
$$

Volviendo al límite original

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{\ln(x-1)}{e^x}}_{0}\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

†

5.2.3. Potencias Indeterminadas (0^0, ∞^0 ó 1^∞)

Si un límite presenta alguna de las formas 0^0, ∞^0 ó 1^∞, entonces se puede transformar utilizando la propiedad

$$a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b\cdot\ln a} = e^{\frac{\ln a}{\frac{1}{b}}}$$

En este caso primero se obtiene el límite de la fracción $\dfrac{\ln a}{\frac{1}{b}}$ que se le puede aplicar regla de L'Hôpital y luego volver al límite original.

Ejemplo 131.

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+} x^x \quad \text{Forma } 0^0 \\
&= \lim_{x\to0^+} e^{\ln(x^x)} \\
&= \lim_{x\to0^+} e^{x\cdot\ln(x)} \\
&= \lim_{x\to0^+} e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}} \quad \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'H} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to0^+} -x} \\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 132.

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (5+3x)^{\frac{1}{\ln x}}$

$$\begin{array}{cll}
 & \lim\limits_{x\to+\infty} (5+3x)^{\frac{1}{\ln x}} & \text{Forma } \infty^0 \\
= & \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln(5+3x)^{\frac{1}{\ln x}}} & \\
= & \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(5+3x)} & \\
= & \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(5+3x)}{\ln x}} & \\
= & e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(5+3x)}{\ln x}} & \text{Forma } \dfrac{\infty}{\infty}, \text{ L'H} \\
= & e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{5+3x}}{\frac{1}{x}}} & \\
= & e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{5+3x}} & \\
= & e^1 = e &
\end{array}$$

†

Ejemplo 133.

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$

$$\begin{array}{cll}
 & \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x & \text{Forma } 1^\infty \\
= & \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} & \\
= & \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)} & \\
= & \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} & \\
= & e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} & \text{Forma } \dfrac{0}{0}, \text{ L'H} \\
= & e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}\cdot\frac{2}{\cancel{x^2}}}{\frac{-1}{\cancel{x^2}}}} & \\
= & e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{1-\frac{2}{x}}} & \\
= & e^{-2} &
\end{array}$$

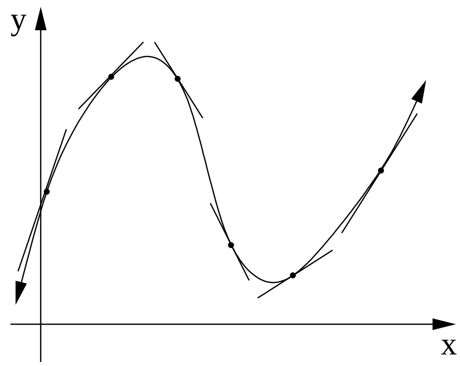
†

5.3. Trazo de gráficas

Las derivadas brindan mucha información sobre la gráfica de una función, en este apartado se verá esta información y se trazarán algunas gráficas.

5.3.1. Primera derivada

Observando el siguiente gráfico se observa que la pendiente de la recta tangente es positiva cuando la función crece y negativa cuando decrece; así, se cumple el siguiente teorema.



Teorema 7 (Crecimiento y decrecimiento de la función)**.**

Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo ($\nearrow$).
Si $f'(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo ($\searrow$).

Ejemplo 134.

Determine los intervalos en donde la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente o decreciente.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x-2)(x+1)$

	$-\infty$	-1	0	2 $+\infty$
$12x$	$-$	$-$ o	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$ o	$+$
$x+1$	$-$ o	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Crece: $]-1, 0[$ y $]2, +\infty[$

Decrece: $]-\infty, -1[$ y $]0, 2[$

†

Ejemplo 135.

Determine los intervalos en donde la función $f(x) = 2x^4 + 16x^2 + 5$ es creciente o decreciente.

$f'(x) = 8x^3 + 32x = 8x(x^2 + 4)$

	$-\infty$ 0	$+\infty$
$8x$	$-$	0 $+$
x^2+4	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

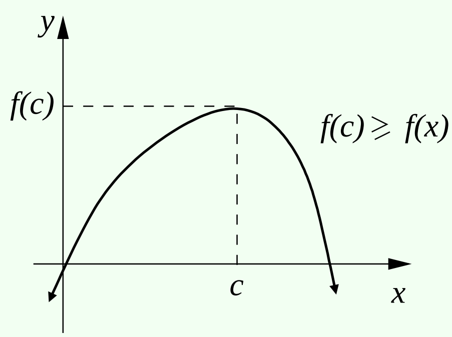
Crece: $]0, +\infty[$

Decrece: $]-\infty, 0[$

†

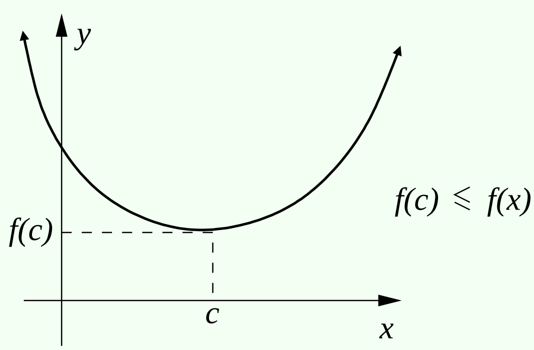
Definición 10 (Máximo local)**.**

Una función f tiene un máximo local en c si se cumple que $f(c) \geq f(x)$ para toda x cercana a c (por ambos lados).



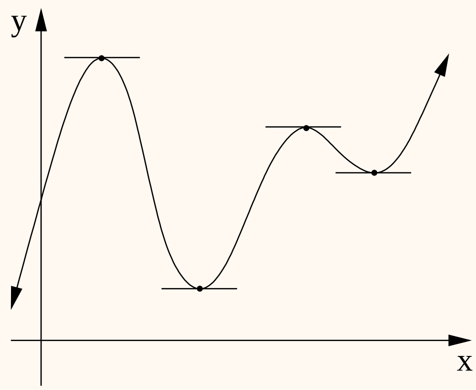
Definición 11 (Mínimo local)**.**

Una función f tiene un mínimo local en c si se cumple que $f(c) \leq f(x)$ para toda x cercana a c (por ambos lados).



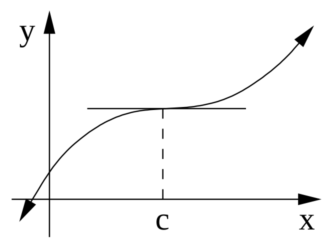
Teorema 8 (Teorema de Fermat)**.**

Si f tiene un máximo o un mínimo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

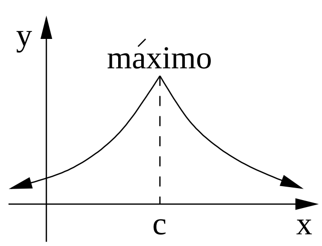


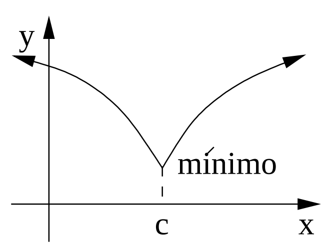
Notas:

- El teorema quiere decir que si la derivada existe entonces en los máximos y en los mínimos locales hay tangentes horizontales ($f'(c) = 0$).
- Se debe tener cuidado ya que lo contrario NO es cierto, es decir, si $f'(c) = 0$ no necesariamente se tiene un mínimo o un máximo.



- También se puede dar el caso que la función no sea derivable en c pero que tenga un máximo o un mínimo en ese valor.





Dado que una función tiene máximos o mínimos en los punto donde la derivada es cero o se indefine entonces se tiene la siguiente definición.

Definición 12 (Puntos críticos)**.**

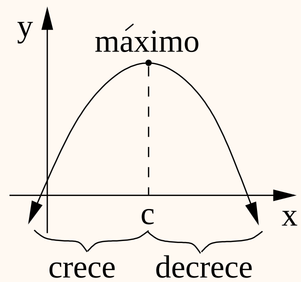
Se llaman puntos críticos (o números críticos) de una función f a los valores $x = c$ del dominio de f en donde $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Se debe observar que al hacer una tabla de signos para la primera derivada se obtienen también los valores críticos de la función; sin embargo, la primera derivada también ofrece un procedimiento para saber si estos valores son máximos o mínimos.

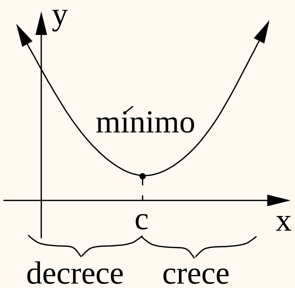
Teorema 9 (Criterio de la primera derivada)**.**

Si c es un número crítico de la función f entonces:

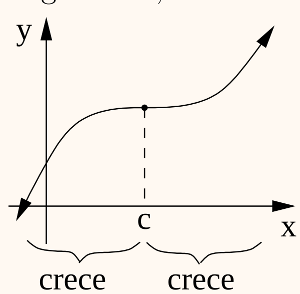
1. Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

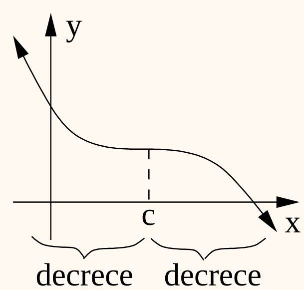


2. Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.



3. Si f' no cambia de signo en c, entonces f no tiene un extremo local en c.



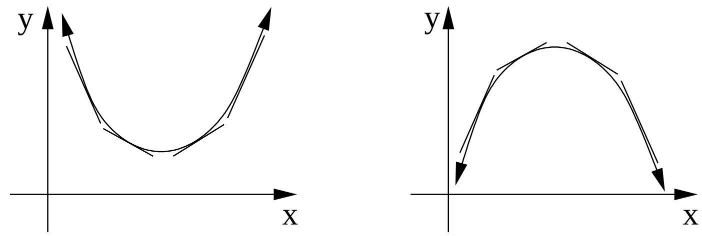


Ejemplo 136.

1. Determine los máximos y los mínimos locales de los ejemplos anteriores.
   a) En $x = -1$ se alcanza un mínimo que es $f(-1) = 0$
   En $x = 0$ se alcanza un máximo que es $f(0) = 5$
   En $x = 2$ se alcanza un mínimo que es $f(2) = -27$
   b) En $x = 0$ se alcanza un mínimo que es $f(0) = 5$

5.3.2. Segunda derivada

Desde que se estudian las funciones cuadráticas se utilizan los términos *cóncavo hacia arriba* y *cóncavo hacia abajo*, pero estos nunca se definen formalmente; ahora ya se cuenta con las herramientas necesarias para hacerlo.



Definición 13 (Concavidad)**.**

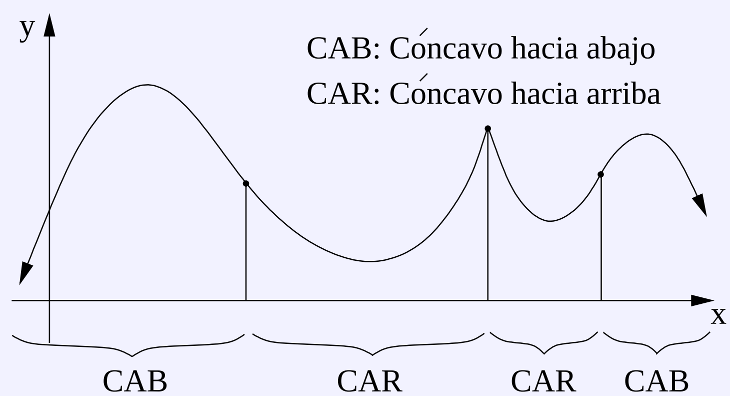
- Si la gráfica de f está arriba de sus rectas tangentes en un intervalo, entonces se dice que f es cóncava hacia arriba en ese intervalo.
- Si la gráfica de f queda abajo de sus rectas tangentes en un intervalo, entonces se dice que f es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Definición 14 (Puntos de inflexión)**.**

Los puntos donde la función cambia de concavidad se llaman punto de inflexión.

Ejemplo 137.

1. Indique los intervalos donde la siguiente gráfica es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.



Al observar las gráficas anteriores se puede deducir de manera visual el siguiente teorema.

Teorema 10 (Concavidad)**.**

- Si $f''(x) > 0$ para toda x en un intervalo I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo I ($\cup$)
- Si $f''(x) < 0$ para toda x en un intervalo I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo I ($\cap$)

Ejemplo 138.

Determine los intervalos en donde la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 10$ es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, indique además los puntos de inflexión.

$f'(x) = 4x^3 - 12x$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x+1)(x-1)$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

12	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$ o	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$ o	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$5 \quad 5$

Los puntos de inflexión son $(-1,5)$ y $(1,5)$.

†

Ejemplo 139.

Describa la curva $y = x^4 - 4x^3$ en cuanto a extremos locales, concavidad y puntos de inflexión; indique en una sola tabla los datos obtenidos.

$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

$-\infty \quad 0 \quad 3 \quad +\infty$

$4x^2$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$ o	$+$
y'	$-$	$-$	$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$0 \quad -27$

$-\infty \quad 0 \quad 2 \quad +\infty$

$12x$	$-$ o	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$ o	$+$
y''	$+$	$-$	$+$
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$0 \quad -16$

$-\infty \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad +\infty$

y'	$-$	$-$	$-$	$+$
y''	$+$	$-$	$+$	$+$
y	$\searrow\cup$	$\searrow\cap$	$\searrow\cup$	$\nearrow\cup$

$0 \quad -16 \quad -27$

Los puntos $(0,0)$ y $(2,-16)$ son puntos de inflexión, el punto $(3,-27)$ es un mínimo.

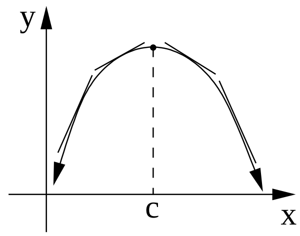
†

Teorema 11 (Criterio de la segunda derivada)**.**

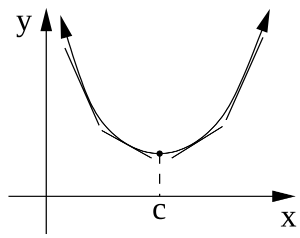
Si f'' es continua en los alrededores de c entonces:

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en c.
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ entonces f tiene un máximo local en c.

Nota: Si $f''(c) = 0$ entonces este criterio no decide, es decir, $f(c)$ podría ser máximo, mínimo o podría no ser ninguno de los dos.



Observe que la pendiente de las tangentes disminuye ($f''(c) < 0$), la gráfica es cóncava hacia abajo por lo que la función tiene un máximo en c.



Si $f''(c) > 0$ la función es cóncava hacia arriba en $x = c$ por lo que presenta un mínimo en ese punto.

Ejemplo 140.

Determine los máximos y los mínimos de la función $y = x^3 - 3x^2$

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, $y' = 0$ si $x = 0$ ó $x = 2$

$y'' = 6x - 6$, ahora, $y''(0) = -6$ y $y''(2) = 6$

Por lo tanto, en $(0,0)$ hay un máximo y en $(2,-4)$ hay un mínimo.

5.3.3. Resumen para el trazo de una gráfica

1. Encuentre el dominio de la función
2. Encuentre las intersecciones con los ejes.

   Es decir, determine los valores en donde $f(x) = 0$ y el punto $(0, f(0))$ si existe.
3. Determine las asíntotas:

   a) Asíntotas horizontales

   - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ entonces $y = k$ es asíntota horizontal.
   - Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m$ entonces $y = m$ es asíntota horizontal.

   b) Asíntotas verticales

   Determine los valores en donde el denominador de la función se hace cero y calcule los límites laterales en estos puntos, si da infinito alguno de estos límites entonces en ese punto hay una asíntota vertical.

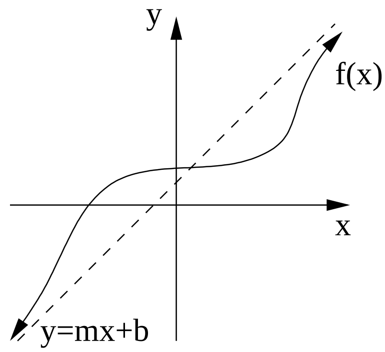
   Es decir, se da en los puntos x_0 tales que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

c) Asíntotas oblicuas

Es la recta $y = mx + b$, donde $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$; la asíntota existe siempre que m y b existan.

Puede existir una asíntota oblicua distinta para $+\infty$ y para $-\infty$.

Si hay asíntotas horizontales no pueden haber oblicuas.



4. Intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento)

   Se calcula la primera derivada y se hace su tabla de signos, se calculan máximos y mínimos locales.

5. Concavidad y puntos de inflexión

   Se realiza la tabla de signos para la segunda derivada.

6. Cuadro resumen

   Se realiza un cuadro resumen con todos los datos anteriores y se traza la curva.

Ejemplo 141.

Realice la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$

1. Dominio: $\mathbb{R} - \{-1\}$
2. Intersección con el eje x y con el eje y: $(0, 0)$
3. Asíntotas:

   a) Asíntotas horizontales:

   $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, por lo que $y = 1$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

   $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, por lo que $y = 1$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

   b) Asíntotas verticales:

   La única posibilidad es en $x = -1$, que es el único valor en donde la función se indefine.

   $\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$

Ya que $x \to -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x+1 \to 0^-$ y la forma es $F : \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$$

Ya que $x \to -1^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x+1 \to 0^+$ y la forma es $F : \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$.

Por lo que $x = -1$ es asíntota vertical.

c) Asíntotas oblícuas:

En este caso no puede haber asíntota oblícua en ninguna de los dos infinitos ya que en ambos casos hay asíntotas horizontales.

4. Intervalos de monotonía

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, su tabla de signos es:

	$-\infty$	-1	$+\infty$
1	$+$	‖	$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

5. Intervalos de concavidad

La segunda derivada de la función es $f''(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3}$, su tabla de signos es:

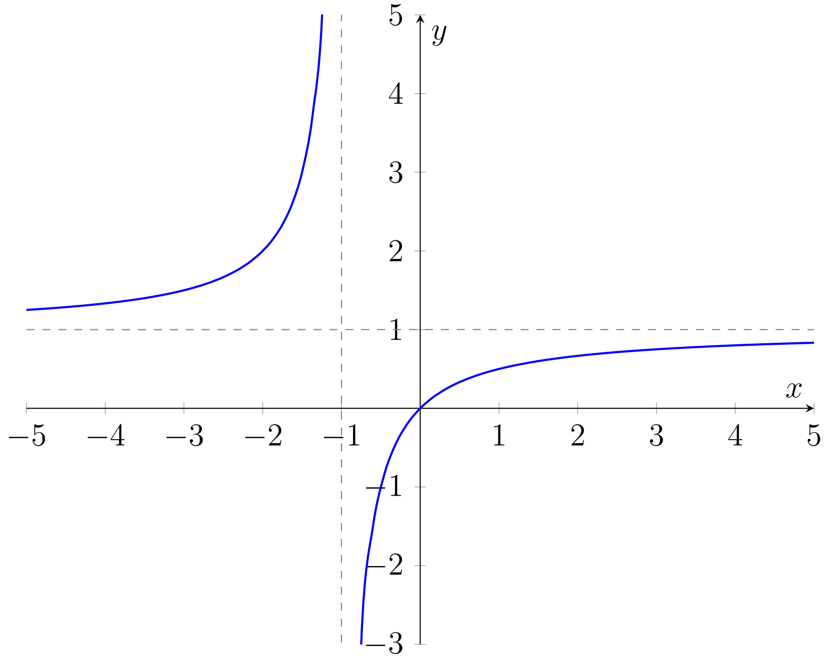
	$-\infty$	-1	$+\infty$
-2	$-$	‖	$-$
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	$\cup$	‖	$\cap$

6. Cuadro resumen:

	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow\cup$	‖	$\nearrow\cap$

$1 \quad +\infty \quad -\infty \quad 1$

7. Gráfica:



Ejemplo 142.

Realice la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

1. Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
2. No hay intersección con el eje x ni con el eje y.
3. Asíntotas:

   a) Asíntotas horizontales:

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$, por lo que no hay asíntota horizontal en $+\infty$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$, por lo que no hay asíntota horizontal en $-\infty$.

   b) Asíntotas verticales:

   La única posibilidad es en $x = 0$, que es el único valor en donde la función se indefine.

   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$

   Ya que $x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x \to 0^-$ y la forma es $F : \dfrac{1}{0^-} = -\infty$.

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

   Ya que $x \to 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \to 0^+$ y la forma es $F : \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

   Por lo que $x = 0$ es asíntota vertical.

c) Asíntotas oblícuas:

1) En $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por lo que en $+\infty$ sí hay asíntota oblícua y es $y = x$.

2) En $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por lo que en $-\infty$ sí hay asíntota oblícua y es $y = x$.

4. Intervalos de monotonía

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$, su tabla de signos es:

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

$(x+1)$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
x^2	$+$	$+$ 0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$-2 \qquad 2$

Así, se tiene un punto máximo local en $(-1,-2)$ y un punto mínimo local en $(1,2)$.

5. Intervalos de concavidad

La segunda derivada de la función es $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, su tabla de signos es:

$-\infty \quad 0 \quad +\infty$

2	$+$	$+$
x^3	$-$ 0	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

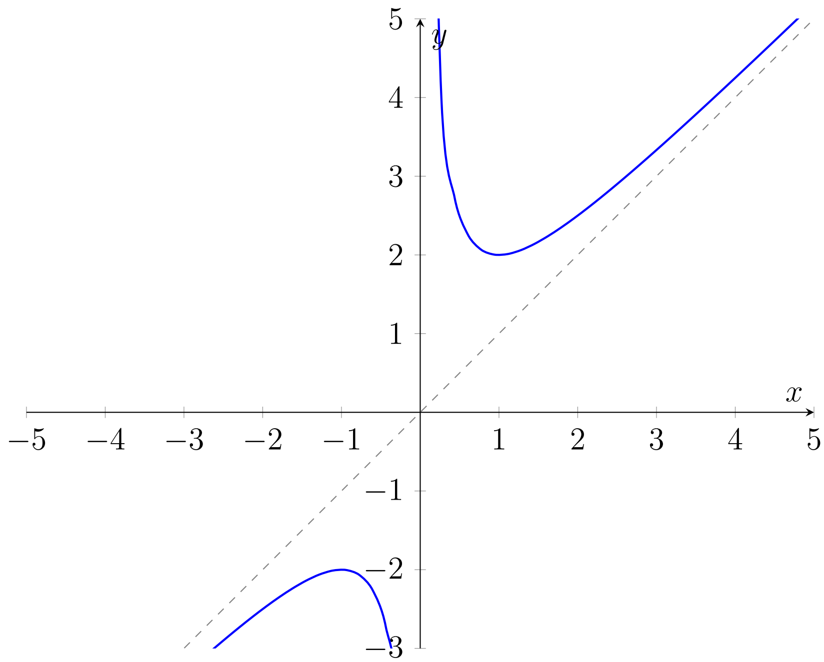
6. Cuadro resumen:

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

$f(x)$	$\nearrow\cap$	$\searrow\cup$	$\searrow\cap$	$\nearrow\cup$

$y = x \quad -2 \quad -\infty \quad +\infty \quad 2 \quad y = x$

7. Gráfica:



Ejemplo 143.

Realice la gráfica de la función $f(x) = e^{\left(-x^2\right)}$

1. Dominio: $\mathbb{R}$

2. La única intersección que se da es con el eje y: $(0, 1)$.

3. Asíntotas:

   a) Asíntotas horizontales:

   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\left(-x^2\right)} = 0$, por lo que la asíntota horizontal en $+\infty$ es $y = 0$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\left(-x^2\right)} = 0$, por lo que la asíntota horizontal en $-\infty$ es $y = 0$.

   b) Asíntotas verticales:

   Como el dominio es $\mathbb{R}$ no pueden haber asíntotas verticales.

   c) Asíntotas oblícuas:

   Como hubo asíntotas horizontales en ambos infinitos no pueden haber asíntotas oblícuas.

4. Intervalos de monotonía

   La derivada de la función es $f'(x) = -2x \cdot e^{\left(-x^2\right)}$, su tabla de signos es:

	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	$+$	0	$-$
$e^{\left(-x^2\right)}$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

Así, se tiene un punto máximo local (y es el máximo absoluto) en $(0, 1)$.

5. Intervalos de concavidad

   La segunda derivada de la función es $f''(x) = 2e^{(-x)^2} \cdot (2x^2 - 1)$, su tabla de signos es:

   $-\infty \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad +\infty$

$2e^{(-x)^2}$	$+$	$+$	$+$
$\sqrt{2}x - 1$	$-$	$-$ o	$+$
$\sqrt{2}x + 1$	$-$ o	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

   0 0,61 0,61 0

   Por lo que se tienen como puntos de inflexión: $(-0{,}71, 0{,}61)$ y $(0{,}71, 0{,}61)$.

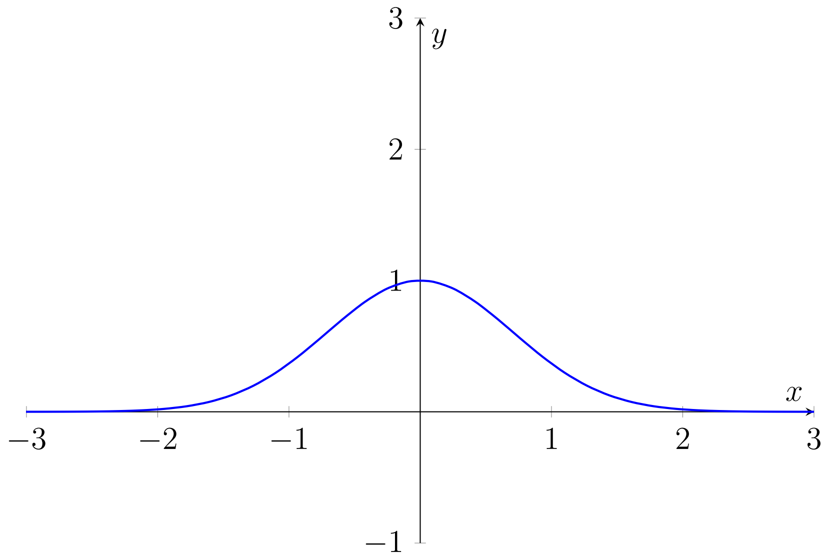
6. Cuadro resumen:

   $-\infty \quad -0{,}71 \quad 0 \quad 0{,}71 \quad +\infty$

$f(x)$	$\nearrow \cup$	$\nearrow \cap$	$\searrow \cap$	$\searrow \cup$

   0 0,61 1 0,61 0

7. Gráfica:



Ejercicio 9.

1. Realice la gráfica para las siguientes funciones

   a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}, f'(x) = -\dfrac{4x}{(x+1)^2(x-1)^2}, f''(x) = \dfrac{4(3x^2+1)}{(x+1)^3(x-1)^3}$

   b) $f(x) = x^3 - x$

   c) $f(x) = x^4 + 4x^3$

   d) $y = \dfrac{x}{x^2-9}, y' = -\dfrac{x^2+9}{(x+3)^2(x-3)^2}, y'' = \dfrac{2x(x^2+27)}{(x+3)^3(x-3)^3}$

   e) $y = \dfrac{x}{x^2+9}, y' = -\dfrac{(3+x)(3-x)}{(x^2+9)^2}, y'' = \dfrac{2x(x-\sqrt{27})(x+\sqrt{27})}{(x^2+9)^3}$

   f) $y = \dfrac{x^2}{x-1}, y' = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}, y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

   g) $f(x) = x + 3x^{\frac{2}{3}}, y' = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}}, y'' = -\dfrac{2}{3x^{\frac{4}{3}}}$

   h) $y = x \cdot e^x, y' = e^x(x+1), y'' = e^x(x+2)$

   i) $y = \dfrac{\ln x}{x-1}$

5.4. Valores máximos y mínimos

Entre los problemas que se pueden resolver utilizando cálculo diferencial, el de maximizar o minimizar una función es de los más importantes y útiles.

Anteriormente se definieron los máximos y mínimos locales, ahora en los ejercicios de esta sección y la siguiente se va a buscar los máximos y mínimos absolutos de la función. En esta sección se trabajará con una función contínua en un intervalo cerrado y la siguiente sección tratará problemas de optimización.

Definición 15 (Máximo absoluto o mínimo absoluto)**.**

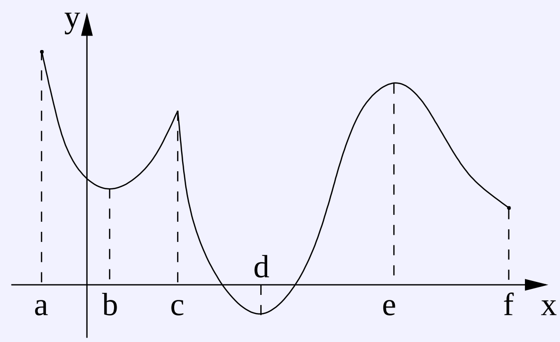
El máximo absoluto o máximo global es el valor más grande de los máximos locales y el mínimo absoluto o mínimo global es el valor más pequeño de los mínimos locales, incluyendo los extremos si es un intervalo.

Estos valores se conocen como los valores extremos de f.

Ejemplo 144.

Según la siguiente gráfica, determine los valores de x en donde la función presenta:

1. máximos locales
2. mínimos locales
3. máximo absoluto
4. mínimo absoluto

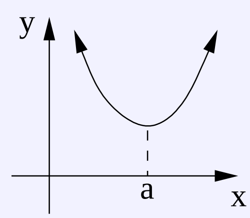


1. $x = c$ y el máximo local es $f(c)$, $x = e$ y el máximo local es $f(e)$
2. $x = b$ y el mínimo local es $f(b)$, $x = d$ y el mínimo local es $f(d)$
3. $x = a$ y el máximo absoluto es $f(a)$
4. $x = d$ y el mínimo absoluto es $f(d)$

†

Ejemplo 145.

Indique los valores de x en donde la función de la gráfica dada presenta máximo o mínimos locales e indique cuáles son los valores extremos de la función.



Mínimo local: $x = a$ y el mínimo local es $f(a)$

Mínimo absoluto: $x = a$ y el mínimo absoluto es $f(a)$

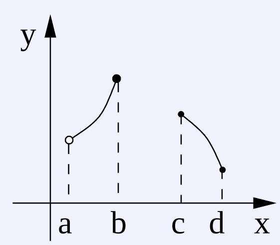
Máximo local: no hay

Máximo absoluto: no hay

†

Ejemplo 146.

Indique los valores de x en donde la función de la gráfica dada presenta máximo o mínimos locales e indique cuáles son los valores extremos de la función.



Mínimo local: no hay

Mínimo absoluto: no hay

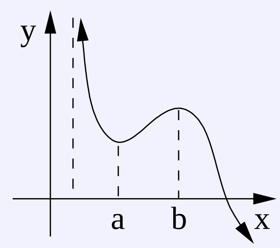
Máximo local: $x = d$ y el máximo local es $f(d)$

Máximo absoluto: no hay

†

Ejemplo 147.

Indique los valores de x en donde la función de la gráfica dada presenta máximo o mínimos locales e indique cuáles son los valores extremos de la función.



Mínimo local: $x = a$ y el mínimo local es $f(a)$

Mínimo absoluto: $x = b$ y el mínimo absoluto es $f(b)$

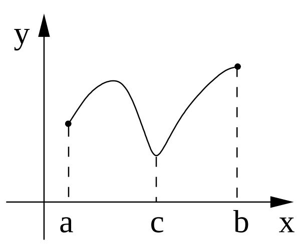
Máximo local: no hay

Máximo absoluto: no hay

†

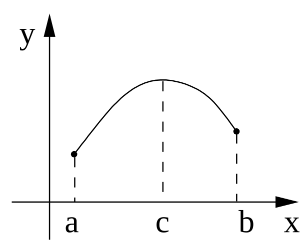
Teorema 12 (Teorema del valor extremo)**.**

Si f es continua sobre un intervalo $[a, b]$ entonces f alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en $[a, b]$



$f(b)$ máximo absoluto

$f(c)$ mínimo absoluto



$f(c)$ máximo absoluto

$f(a)$ mínimo absoluto

Nota: Si no se cumplen las condiciones del teorema no se puede asegurar nada (observe el ejemplo b anterior).

Por lo tanto, para encontrar los valores extremos de una función en un intervalo cerrado se deben seguir los siguientes pasos:

1. Encuentre los valores críticos de f en $[a, b]$ y evalúelos.
2. Determine los valores de f en los extremos del intervalo ($f(a)$ y $f(b)$)
3. El valor más grande de los hallados es el máximo global y el más pequeño es el mínimo global.

Ejemplo 148.

Encuentre el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $\frac{-1}{2} \leq x \leq 4$.

Valores críticos

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ Nunca se indefine

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$

Ahora $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{8}, f(0) = 1, f(2) = -3, f(4) = 17$

Por lo tanto:

Máximo absoluto: 17

Mínimo absoluto: -3

†

Ejemplo 149.

Encuentre el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

Valores críticos

$f'(x) = 3x^2 - 3$ Nunca se indefine

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ ó $x = 1$

Ahora $f(0) = 1, f(1) = -1, f(3) = 19$

Por lo tanto:

Máximo absoluto: 19

Mínimo absoluto: -1

†

Ejemplo 150.

Encuentre el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 3$.
Sug: Para derivar $|x|$, expréselo como $\sqrt{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2}} \cdot \cancel{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{|x|}$

Este se indefine si $x = 0$ y no se cumple que $f'(x) = 0$ para ningún valor.

Así $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(3) = 3$

Por lo tanto:

Máximo absoluto: 3

Mínimo absoluto: 0

†

5.5. Problemas de Optimización

Los métodos para hallar máximos y mínimos vistos para graficar funciones tienen muchas aplicaciones en la vida real.

Por ejemplo, en negocios se busca minimizar los costos y maximizar las ganancias. En la naturaleza la luz siempre busca recorrer la distancia mínima, etc.

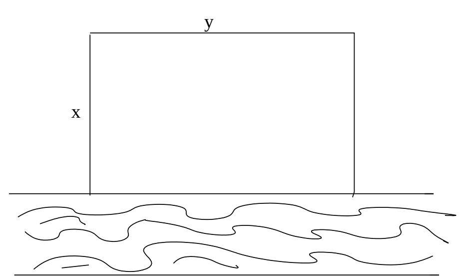
En esta sección se busca resolver este tipo de problemas.

Procedimiento:

1. Comprenda el problema: Léalo con cuidado, defina la(s) incógnita(s) y las cantidades dadas.
2. Dibuje un diagrama: Casi siempre resulta útil hacer un dibujo para comprender mejor el problema y plantearlo.
3. Defina claramente las variables en el diagrama y defina cuál es la variable a maximizar.
4. Despeje la variable que se debe maximizar.
5. Exprese la ecuación en términos de una variable y defina el dominio esta variable.
6. Utilice los métodos vistos para maximizar o minimizar (según sea el caso) la ecuación. En estos casos se busca el máximo o el mínimo absolutos.

Ejemplo 151.

Un granjero tiene 2400 metros de cerca y desea cercar un campo rectangular que limita un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?



Hay que maximizar el área $A = x \cdot y$

Pero hay dos variables, sin embargo se sabe que la cerca mide 2400 metros, es decir:

$$2x + y = 2400 \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

Por lo que:

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2 \text{ con } x \in [0, 1200]$$

Ahora, la derivada es $A' = 2400 - 4x$

Y esta derivada se hace cero si

$$2400 - 4x = 0 \Rightarrow x = 600$$

Como $A''(600) = -4 < 0$ entonces se tiene que el valor encontrado es un máximo.

En los extremos se tiene que $A(0) = A(1200) = 0$. Por lo que en $x = 600$ se tiene el máximo absoluto.

Si $x = 600 \Rightarrow y = 1200$, por lo tanto, estas son las dimensiones que hacen que el área del terreno sea máxima según el diagrama.

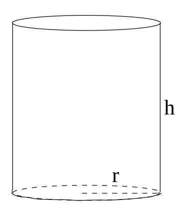
†

Notas:

- En este ejemplo se realizó el procedimiento general para mostrar todos los pasos dados, sin embargo, se puede notar que aquí la función área es cuadrática y cóncava hacia abajo, por lo tanto tiene su máximo absoluto en el vértice (que es el punto que se encontró), siempre que se trabaje con funciones cuadráticas se puede simplificar el procedimiento de esta manera.
- Se debe tener claro al dar la respuesta qué es lo que se está preguntando, en este caso son las dimensiones que hacen que el área sea máxima. Si se pregunta cuál es el área máxima se tendría que responder $600 \cdot 1200 = 720000m^2$

Ejemplo 152.

Se va a producir una lata para que contenga 1 litro de aceite ($1000cm^3$). Encuentre las dimensiones que minimizarán el costo del metal para fabricar la lata.



Se debe minimizar el costo del material, es decir, se debe utilizar el mínimo de material (el área).

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Pero se debe cumplir que la lata contenga de volumen $1000cm^3$.

$$\pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Por lo tanto

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \text{ con } r \in]0, +\infty[$$

Así $A' = 4\pi r - \dfrac{2000}{r^2} = \dfrac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$

Por lo que $A' = 0$ si $\pi r^3 - 500 = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$

Como $A'' = 4\pi + \dfrac{2000 \cdot 2\cancel{r}}{r^{\cancel{4}}} = 4\pi + \dfrac{4000}{r^3}$

Y se cumple que $A''\left(\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\right) = 12\pi > 0$ por lo que se obtiene un mínimo en el valor encontrado.

Los extremos del intervalo están abiertos, como dato extra se puede observar que $\lim\limits_{x\to 0^+} 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r} = \lim\limits_{x\to +\infty} 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r} = +\infty$.

Por lo tanto, el mínimo encontrado es el mínimo absoluto.

Por último, si $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ entonces

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2}$$

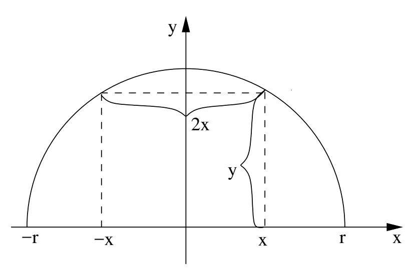
Que al racionalizar y simplificar se obtiene $h = 2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} = 2r$

Por lo tanto, la lata se minimiza cuando $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ y $h = 2r$

†

Ejemplo 153.

Encuentre el área del rectángulo más grande que se puede inscribir en un semicírculo de radio r.



Se debe maximizar el área del rectángulo $A = 2xy$.

Pero la fórmula del semicírculo de radio r es $x^2 + y^2 = r^2$, es decir $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (se toma la positiva porque se está trabajando con la parte de arriba del semicírculo).

Así, $A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$ con $x \in [0, r]$

De aquí $A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} + \dfrac{-2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \dfrac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Se cumple que $A' = 0$ si $r^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$

Este es un máximo ya que $A(0) = A(r) = 0$ que son menores al valor encontrado (único punto crítico).

Lo que se pregunta en este ejercicio es el área, se tiene

$$A = 2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = r^2$$

Por lo tanto, el mayor área del rectángulo es de r^2 unidades al cuadrado.

†

Ejemplo 154.

Halle dos números de producto mínimo y diferencia 100.

Sean x y y los dos números. Se pide minimizar el producto $P = xy$.

Pero se dice que la diferencia entre los números debe ser de 100, es decir que $x - y = 100 \Rightarrow x = 100 + y$

Así

$$P = (100 + y)y = 100y + y^2 \text{ con } y \in \mathbb{R}$$

Se cumple que $P' = 100 + 2y$ y $P' = 0$ si $100 + 2y = 0 \Rightarrow y = -50$

Este es un mínimo ya que la función es una cuadrática cóncava hacia arriba.

Si $y = -50$, entonces $x = 100 - 50 = 50$.

Por lo tanto, el producto se minimiza cuando los números son -50 y 50.

†

Ejemplo 155.

Halle un número positivo tal que la suma del número y su recíproco sea tan pequeña como sea posible.

Sea x el número buscado.

Se quiere minimizar $y = x + \dfrac{1}{x}$ con $x \in]0, +\infty[$

Se tiene que $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$, que se hace cero si $x = \pm 1$

Como x debe ser positivo se descarta -1 y se trabaja con $x = 1$

Observe que en los extremos $\lim\limits_{x\to 0+} x + \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x + \dfrac{1}{x} = +\infty$ por lo que $x = 1$ es el más pequeño de los puntos críticos y, por tanto, el mínimo absoluto.

Así, el número que cumple lo que se pide es 1.

†

Ejemplo 156.

Encuentre la distancia más corta del punto $(0, 2)$ a la parábola $y = 4 - x^2$

Los puntos de la parábola dada tienen la forma $(x, 4 - x^2)$.

La distancia del punto $(0, 2)$ al punto $(x, 4 - x^2)$ está dado por

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

Pero una raíz cuadrada se minimiza cuando lo de adentro de la raíz se minimiza (entre más pequeño sea lo de adentro de la raíz menor será el valor de la raíz), por lo tanto, se debe minimizar la expresión

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

De aquí $f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})$, que se hace cero si $x = 0$ ó $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Por el criterio de la primera derivada se tiene

$$-\infty \quad -\sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad 0 \quad \sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad +\infty$$

$2x$	$-$	$-$	0 $+$	$+$
$\sqrt{2}x - \sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	0 $+$
$\sqrt{2}x + \sqrt{3}$	$-$	0 $+$	$+$	$+$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$+\infty \quad \sqrt{\tfrac{7}{4}} \quad 2 \quad \sqrt{\tfrac{7}{4}} \quad +\infty$$

Por lo que se observa que el mínimo absoluto se alcanza cuando $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Por lo tanto, la distancia mínima entre el punto $(0, 2)$ y la parábola $y = 4 - x^2$ es de $\sqrt{\dfrac{7}{4}}$ unidades.

†

Ejercicio 10.

1. Hallar el punto de la gráfica $y = \sqrt{x}$ que dista menos del punto $(4, 0)$. R/ $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$
2. Muestre que de todos los rectángulos de perímetro fijo p, el que encierra mayor área es el cuadrado.

Capítulo 6

Integrales

6.1. Integral Indefinida

La integral y la derivada son funciones inversas entonces la notación $\int f(x)dx$ se utiliza tradicionalmente para denotar la antiderivada de f y se llama la integral indefinida. Así

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \text{ si } F'(x) = f(x)}$$

Ejemplo 157.

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ ya que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$

6.1.1. Integrales directas

Las primeras antiderivadas se tomarán de la tabla de derivadas (tomadas al revés), está será la tabla de integrales directas:

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kdx = k \cdot x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C$$

Ejemplo 158.

Utilice las integrales directas para encontrar las siguientes integrales indefinidas

1. $\displaystyle\int 10x^4 - 2\sec^2 x dx = 2x^5 - 2\tan x + C$
2. $\displaystyle\int x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} + x + \arctan x + C$

6.1.2. Integración por sustitución

De la sección de derivadas se sabe que

$$\frac{d}{dx}\left(f\left(g(x)\right)\right) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Así

$$\int f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) dx = f\left(g(x)\right)$$

O, si se ve de otra manera, si se tiene

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x) dx$$

Se hace la sustitución $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$

Por lo que la integral queda

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

Una integral más simple que la anterior.

Lo que quiere decir este procedimiento es que se debe buscar una función cuya derivada está en la integral.

Ejemplo 159.

Determine $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{x^2+1}dx &= \int \frac{1}{x^2+1}\cdot 2xdx, \text{ sea } u = x^2+1 \Rightarrow du = 2xdx \\
&= \int \frac{1}{u}du \\
&= \ln|u| + C \\
&= \ln|x^2+1| + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 160.

Determine $\displaystyle\int 2x\left(x^2+1\right)^{50}dx$

$$\begin{aligned}
\int 2x\left(x^2+1\right)^{50}dx &= \int \left(x^2+1\right)^{50}\cdot 2xdx, \text{ sea } u = x^2+1 \Rightarrow du = 2xdx \\
&= \int (u)^{50}du \\
&= \frac{u^{51}}{51} + C \\
&= \frac{\left(x^2+1\right)^{51}}{51} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 161.

Determine $\displaystyle\int \cos(5x)dx$

$$\begin{aligned}
&\int \cos(5x)dx, \text{ sea } u = 5x \Rightarrow du = 5dx \Rightarrow \frac{du}{5} = dx \\
=& \int \cos(u)\cdot\frac{du}{5}dx \\
=& \frac{1}{5}\cdot\int \cos(u)dx \\
=& \frac{1}{5}\cdot \operatorname{sen} u + C \\
=& \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 162.

Determine $\int \sqrt{2x-1}dx$

$$\begin{aligned}
& \int \sqrt{2x-1}dx, \text{ sea } u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx \\
= & \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{2} \\
= & \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + C \\
= & \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 163.

Determine $\int \operatorname{sen}^2(3x) \cdot \cos(3x)dx$

$$\begin{aligned}
& \int \operatorname{sen}^2(3x) \cdot \cos(3x)dx, \text{ sea } u = \operatorname{sen}(3x) \Rightarrow du = \cos(3x) \cdot 3dx \Rightarrow \frac{du}{3} = \cos(3x)dx \\
= & \int u^2 \frac{du}{3} \\
= & \frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{3} + C \\
= & \frac{\operatorname{sen}^3(3x)}{9} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 164.

Determine $\int 4\cos^3(4x) \cdot \operatorname{sen}(4x)dx$

$$\begin{aligned}
& \int 4\cos^3(4x) \cdot \operatorname{sen}(4x)dx, \text{ sea } u = \cos(4x) \Rightarrow du = -4\operatorname{sen}(4x)dx \Rightarrow -du = 4\operatorname{sen}(4x)dx \\
= & \int u^3 \cdot -du \\
= & -\frac{u^4}{4} + C \\
= & \frac{-\cos^4(4x)}{4} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 165.

Determine $\int x\sqrt{2x-1}dx$

$$\begin{aligned}
& \int x\sqrt{2x-1}dx, \text{ sea } u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx \\
= & \int \frac{u+1}{2} \cdot \sqrt{u}\frac{du}{2}, \text{ además, si } u = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{u+1}{2} \\
= & \frac{1}{4} \cdot \int (u+1) \cdot u^{\frac{1}{2}} du \\
= & \frac{1}{4} \cdot \int u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} du \\
= & \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + C \\
= & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 11.

Determine $\int x\sqrt{2x-1}dx$ mediante el cambio $u^2 = 2x-1$

Ejemplo 166.

Determine $\int x\sqrt{x-3}dx$

$$\begin{aligned}
& \int x\sqrt{x-3}dx, \text{ sea } u = x-3 \Rightarrow du = dx, \text{ además, si } u = x-3 \Rightarrow x = u+3 \\
= & \int (u+3)\sqrt{u}dx \\
= & \int u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{1}{2}} dx \\
= & \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \cancel{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{\cancel{3}}{2}} + C \\
= & \frac{2(x-3)^{\frac{5}{2}}}{5} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 12.

Determine $\int x\sqrt{x-3}dx$ mediante el cambio $u^2 = x-3$

6.1.3. Integración por partes

Si se recuerda la regla para la derivada de la multiplicación de dos funciones

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Al integrar estos términos se obtiene

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Así, al despejar

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Si se utiliza la siguiente notación

$$\begin{array}{llll} & u = f(x) & & dv = g'(x)\,dx \\ \Rightarrow & du = f'(x)\,dx & \Rightarrow & v = g(x) \end{array}$$

Entonces se obtiene

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

La idea entonces es partir la integral en dos términos, uno de ellos será u y el otro será dv.

Para la escogencia del u se puede utilizar como referencia la prioridad:

Logaritmicas, Trigonometricas

I L A T E

Inversas, Algebraicas, Exponenciales

Ejemplo 167.

Determine $\int xe^x\,dx$

Sea

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & x & \qquad & dv & = & e^x\,dx \\ du & = & dx & & v & = & e^x \end{array}$$

Así

$$\begin{aligned} \int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$

†

Ejemplo 168.

Determine $\int x^2\cdot\ln x\,dx$

Sea
$$\begin{array}{rcl} u & = & \ln x \\ du & = & \dfrac{1}{x}\,dx \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} dv & = & x^2\,dx \\ v & = & \dfrac{x^3}{3} \end{array}$$

Así
$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \ln x\,dx &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C \end{aligned}$$

†

Ejemplo 169.

Determine $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

Sea
$$\begin{array}{rcl} u & = & x^2 \\ du & = & 2x\,dx \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} dv & = & \operatorname{sen} x\,dx \\ v & = & -\cos x \end{array}$$

Así
$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen} x\,dx &= -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x\,dx \\ &= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x - 2\int \operatorname{sen} x\,dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C \end{aligned}$$

†

Ejemplo 170.

Determine $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$

Sea
$$\begin{array}{rcl} u & = & x \\ du & = & dx \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} dv & = & e^{2x}\,dx \\ v & = & \dfrac{e^{2x}}{2} \end{array}$$

Así
$$\begin{aligned} \int xe^{2x}\,dx &= \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx \\ &= \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C \end{aligned}$$

†

Ejemplo 171.

Determine $\int x^2 e^x \, dx$

Sea

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & x^2 & \quad & dv & = & e^x \, dx \\ du & = & 2x \, dx & & v & = & e^x \end{array}$$

Así

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x \, dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int e^x \cdot x \, dx \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & x & \quad & dv & = & e^x \, dx \\ du & = & dx & & v & = & e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \end{aligned}$$

†

Ejemplo 172.

Determine $\int x^3 \ln x \, dx$

Sea

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & \ln x & \quad & dv & = & x^3 \, dx \\ du & = & \dfrac{1}{x} \, dx & & v & = & \dfrac{x^4}{4} \end{array}$$

Así

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x \, dx &= \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4} \, dx \\ &= \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C \end{aligned}$$

†

Ejemplo 173.

Determine $\int \ln x \, dx$

Sea

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & \ln x & \quad & dv & = & dx \\ du & = & \dfrac{1}{x} \, dx & & v & = & x \end{array}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= x\ln x - \int dx\\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

†

Ejemplo 174.

Determine $\int \ln^2 x\, dx$

Sea

$$\begin{aligned} u &= \ln^2 x \\ du &= 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dv &= dx \\ v &= x \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x\, dx &= x\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx\\ &= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C\end{aligned}$$

†

Ejemplo 175.

Determine $\int \tan^{-1} x\, dx$

Sea

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1} x \\ du &= \frac{1}{1+x^2}\, dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dv &= dx \\ v &= x \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1} x\, dx &= x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx\\ &= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C\end{aligned}$$

†

Ejemplo 176.

Determine $\int \cos(\ln x)\; dx$

Sea

$$\begin{aligned} u &= \cos(\ln x) \\ du &= \frac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\, dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dv &= dx \\ v &= x \end{aligned}$$

Así

$$\int \cos(\ln x)\ dx \quad = \quad x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx$$

Sea

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}(\ln x) \\ du &= \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} dv &= dx \\ v &= x \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} &\int \cos(\ln x)\ dx = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ dx \\ \Rightarrow\ & 2\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) \\ \Rightarrow\ & \int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)}{2} + C \end{aligned}$$

†

Ejemplo 177.

Determine $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

Sea

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen} x \\ du &= \cos x\,dx \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} dv &= e^x\,dx \\ v &= e^x \end{aligned}$$

Así

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx \quad = \quad e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx$$

Sea

$$\begin{aligned} u &= \cos x \\ du &= -\operatorname{sen} x\,dx \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} dv &= e^x\,dx \\ v &= e^x \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} &\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x - \int -e^x \operatorname{sen} x dx \right) \\ \Rightarrow\ & \int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x cos x - \int e^x \operatorname{sen} x dx \\ \Rightarrow\ & 2\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x cos x \\ \Rightarrow\ & \int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} + C \end{aligned}$$

†

6.1.4. Integrales de expresiones trigonométricas

Para esta sección se utilizarán las integrales siguientes:

$$\begin{aligned}
\int \tan x dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx \quad \text{Sea } u = \cos x \Rightarrow -du = \operatorname{sen} x dx \\
&= -\int \frac{1}{u}\, du \\
&= -\ln|u| + C \\
&= -\ln|\cos x| + C \\
&= \ln|\cos|^{-1} + C \\
&= \ln\frac{1}{|\cos x|} + C \\
&= \ln|\sec x| + C
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C}$$

$$\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx \\
&= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx \quad \text{Sea } u = \sec x + \tan x \Rightarrow du = \sec x \tan x + \sec^2 x\, dx \\
&= -\int \frac{1}{u}\, du \\
&= \ln|u| + c \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C}$$

Ejemplo 178.

Determine $\int \tan^3 x\, dx$

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x\, dx &= \int \tan^2 x \tan x\, dx \\
&= \int \left(\sec^2 x - 1\right) \tan x\, dx \\
&= \int \sec^2 x \tan x\, dx - \int \tan x\, dx \\
&= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C
\end{aligned}$$

†

En esta sección se estudiarán varios casos:

- Si se tiene una integral con senos y cosenos se tienen tres posibilidades:

  1. Si la potencia del seno es positiva e impar, aparte un factor de seno y convierta los restantes factores en cosenos. Realice la sustitución $u = \cos x$

Ejemplo 179.

Determine $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int \left(1-\cos^2 x\right) \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx \quad \text{Sea } u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x \, dx \\
&= -\int \left(1-u^2\right) u^4 \, du \\
&= -\int (u^4 - u^6) \, du \\
&= \frac{-u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \frac{-\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 180.

Determine $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x} \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x} \, dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx \\
&= \int \frac{(1-\cos^2 x) \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx \quad \text{Sea } u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int \frac{1-u^2}{u^2} \cdot -du \\
&= \int \left(\frac{-1}{u^2} + 1\right) du \\
&= \frac{1}{u} + u + C \\
&= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C
\end{aligned}$$

†

  2. Si la potencia de cosenos es positiva e impar, aparte un factor de coseno y convierta los restantes factores en senos. Haga el cambio $u = \operatorname{sen} x$

Ejemplo 181.

Determine $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \cdot \cos x \, dx \quad \text{Sea } u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x \, dx \\
&= \int u^2 \left(1-u^2\right)^2 \cdot du \\
&= \int u^2 \left(1-2u^2+u^4\right) du \\
&= \int (u^2-2u^4+u^6) du \\
&= \frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{2\operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 182.

Determine $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x} \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x} \, dx &= \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx \\
&= \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx \quad \text{Sea } u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x \, dx \\
&= \int \frac{1-u^2}{u} \, du \\
&= \int \left(\frac{1}{u} - u\right) du \\
&= \ln|u| - \frac{u^2}{2} + C \\
&= \ln|\operatorname{sen} x| - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C
\end{aligned}$$

†

3. Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares y no negativas, se deben utilizar las identidades

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \ , \ \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

y se debe proceder como en el caso 2.

Ejemplo 183.

Determine $\int \cos^4 x\, dx$

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}\, dx \\
&= \int \left(\frac{1}{4}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1+\cos(4x)}{8}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{3}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{\cos(4x)}{8}\right) dx \\
&= \frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+C
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 184.

Determine $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx &= \int \frac{(1-\cos(2x))}{2}\frac{(1+\cos(2x))}{2}\, dx \\
&= \int \frac{1-\cos^2(2x)}{4}\, dx \\
&= \int \frac{1-\frac{1-\cos^2(4x)}{2}}{4}\, dx \\
&= \int \frac{2-1+\cos(4x)}{8}\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos(4x))\, dx \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{-\operatorname{sen}(4x)}{4}\right)+C \\
&= \frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+C
\end{aligned}$$

†

- Si se tiene integral con secantes y tangentes se tiene las siguientes posibilidades:
  1. Si la potencia de la secante es positiva y par, aparte un factor de secante al cuadrado y convierta los restantes factores en tangentes. Realice el cambio $u = \tan x$, recuerde que $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$.

Ejemplo 185.

Determine $\int \sec^4(3x)\tan^3(3x)\ dx$

$$
\begin{aligned}
& \int \sec^4(3x)\tan^3(3x)\ dx \\
= & \int \left(\tan^2(3x)+1\right)\tan^3(3x)\cdot\sec^2(3x)\,dx \quad \text{Sea } u=\tan(3x) \Rightarrow \frac{du}{3}=\sec^2(3x)\ dx \\
= & \frac{1}{3}\int \left(u^2+1\right)u^3\,du \\
= & \frac{1}{3}\int (u^5+u^3)\,du \\
= & \frac{1}{3}\frac{u^6}{6}+\frac{1}{3}\frac{u^4}{4}+C \\
= & \frac{\tan^6(3x)}{18}+\frac{\tan^4(3x)}{12}+C
\end{aligned}
$$

†

Ejemplo 186.

Determine $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^5 x}\,dx$

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{\sec^2 x}{\tan^5 x}\,dx \quad \text{Sea } u=\tan x \Rightarrow du=\sec^2\ dx \\
= & \int \frac{1}{u^5}\,du \\
= & \frac{-1}{4u^4}+C \\
= & \frac{-1}{4\tan^4 x}+C
\end{aligned}
$$

†

2. Si la potencia de la tangente es positiva e impar, aparte un factor de secante y uno de tangente y convierta los restantes factores en secantes. Haga el cambio $u=\sec x$. Recuerde que: $\tan^2 x=\sec^2 x-1$

Ejemplo 187.

Determine $\int \tan^5 x\sec^7 x\,dx$

$$
\begin{aligned}
& \int \tan^5 x \sec^7 x \, dx \\
= & \int \tan^4 \sec^6 x \cdot \sec x \tan x \, dx \\
= & \int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \cdot \sec^6 x \cdot \sec x \tan x \, dx \quad \text{Sea } u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x \, dx \\
= & \int \left(u^2 - 1\right) u^6 \, du \\
= & \int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) u^6 \, du \\
= & \int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) u^6 \, du \\
= & \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
= & \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
= & \frac{\sec^{11} x}{11} - \frac{2\sec^9 x}{9} + \frac{\sec^7 x}{7} + C
\end{aligned}
$$

†

Ejemplo 188.

Determine $\int \tan^3 x \cdot \sec^3 x \, dx$

$$
\begin{aligned}
& \int \tan^3 x \cdot \sec^3 x \, dx \\
= & \int \tan^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \tan x \cdot \sec x \, dx \\
= & \int (\sec^2 x - 1) \cdot \sec^2 x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx \quad \text{Sea } u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x \, dx \\
= & \int (u^2 - 1) \cdot u^2 \, du \\
= & \int (u^4 - u^2) \, du \\
= & \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\
= & \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C
\end{aligned}
$$

†

3. Si la potencia de la secante es positiva e impar y la de la tangente es positiva y par entonces se convierten todas las tangentes a secantes, quedan todas las secantes con potencias impares, cada una de estas se calcula por separado.

Ejemplo 189.

Determine $\int \sec^3 x\, dx$

$$\int \sec^3 x\, dx \quad = \quad \int \sec x \sec^2 x\, dx$$

Sea
$$\begin{aligned} u &= \sec x & dv &= \sec^2 x \\ du &= \sec x \tan x\, dx & v &= \tan x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$
$$\Rightarrow \quad \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \left(\sec^2 x - 1\right)\, dx$$
$$\Rightarrow \quad \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 - \sec x\, dx$$
$$\Rightarrow \quad \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$
$$\Rightarrow \quad 2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C$$
$$\Rightarrow \quad \int \sec^3 x\, dx = \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2} + C$$

†

- Por último, para evaluar las integrales $\int \operatorname{sen} mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$ ó $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx$ se emplean las identidades:
  - $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\right]$
  - $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$
  - $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$

Ejemplo 190.

Determine $\int \operatorname{sen}(4x)\cos(5x)\, dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(4x)\cos(5x)\, dx &= \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(4x-5x) + \operatorname{sen}(4x+5x)\right]\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int \left[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(9x)\right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\cdot -\cos(-x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos(9x)}{9} + C\\
&= \frac{-1}{2}\cos(-x) - \frac{1}{18}\cos(9x) + C
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 191.

Determine $\displaystyle\int \cos(7\theta)\cos(5\theta)\ d\theta$

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta)\cos(5\theta)\ d\theta &= \int \frac{1}{2}\left[\cos(7\theta-5\theta)+\cos(7\theta+5\theta)\right]\ d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int[\cos(2\theta)+\cos(12\theta)]\,d\theta\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}+\frac{\operatorname{sen}(12\theta)}{12}\right]+C
\end{aligned}$$

†

6.1.5. Integración por sustitución trigonométrica

Ahora se analizarán integrales con términos de la forma $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ y $\sqrt{x^2-a^2}$. Se analizará un primer ejemplo.

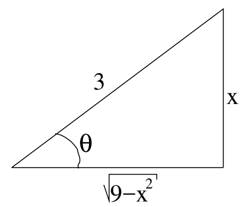
Ejemplo 192.

Determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx \quad \text{Sea } x = 3\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = 3\cos\theta\,d\theta,\ \text{con } 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\
&= \int \frac{\sqrt{9-(3\operatorname{sen}\theta)^2}}{(3\operatorname{sen}\theta)^2}\cdot 3\cos\theta\,d\theta\\
&= \int \frac{\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta}}{3\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta\\
&= \int \frac{\sqrt{9(1-\operatorname{sen}^2\theta)}}{3\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta\\
&= \int \frac{3\sqrt{\cos^2\theta}}{3\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta\\
&= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta\\
&= \int \cot^2\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

$$= \int (\csc^2\theta - 1)\, d\theta$$
$$= -\cot\theta - \theta + C$$

Pero se debe regresar a la variable original x, de la sustitución se observa que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{3}$, de donde se puede realizar el triángulo siguiente.



Del gráfico se observa que $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ y $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

Así $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

Se observa que el cambio simplificó la integral, en estos casos, los cambios que hay que hacer son:

Término	Sustitución	Propiedad
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\operatorname{sen}\theta$	$1-\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan\theta$	$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

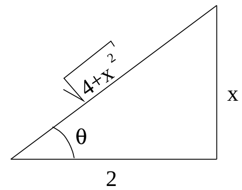
†

Ejemplo 193.

Determine $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx \quad \text{Sea } x = 2\tan\theta \Rightarrow dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int \frac{1}{(2\tan\theta)^2\sqrt{(2\tan\theta)^2+4}} \cdot 2\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta\sqrt{4\tan^2\theta+4}}\, d\theta$$
$$= \int \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta\cdot 2\sqrt{\sec^2\theta}}\, d\theta$$
$$= \int \frac{\sec\theta\cos^2\theta}{4\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$
$$= \frac{-1}{4\operatorname{sen}\theta} + C$$

De la sustitución $\tan\theta = \dfrac{x}{2}$, por lo que se tiene el triángulo:



Por lo que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

Así $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{-\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$

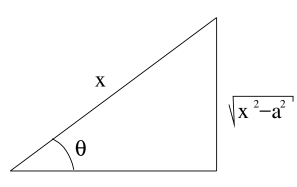
†

Ejemplo 194.

Determine $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx \quad \text{Sea } x = a\sec\theta \Rightarrow dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
= & \int \frac{1}{\sqrt{(a\sec\theta)^2 - a^2}} \cdot a\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
= & \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}\,d\theta \\
= & \int \frac{\sec\theta\cancel{\tan\theta}}{\cancel{\tan\theta}}\,d\theta \\
= & \int \sec\theta d\theta \\
= & \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_1
\end{aligned}$$

Ahora, del cambio, como $\sec\theta = \dfrac{x}{a}$ entonces



Por lo que $\sec\theta = \dfrac{x}{a}$ y $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

Así:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1 \\
&= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C_1 \\
&= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C
\end{aligned}
$$

†

Ejemplo 195.

Determine $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx \quad \text{Sea } u = x^2+4 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx \\
=\ & \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
=\ & \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}} + C \\
=\ & \sqrt{u} + C \\
=\ & \sqrt{x^2+4} + C
\end{aligned}
$$

†

Ejemplo 196.

Determine $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

Primero se completan cuadrados en el denominador:

$$
\begin{aligned}
(3-2x-x^2) &= -(x^2+2x-3) \\
&= -(x^2+2x+1-1-3) \\
&= -((x+1)^2-4) \\
&= 4-(x+1)^2
\end{aligned}
$$

Así:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx \\
=\ & \int \frac{x}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,dx \quad \text{Sea } u = x+1 \Rightarrow du = dx, \text{ además } x = u-1 \\
=\ & \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}\,du \\
=\ & \int \left(\frac{u}{\sqrt{4-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\right)\,du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sqrt{4-u^2} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\
&= -\sqrt{4-(x+1)^2} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \\
&= -\sqrt{3-2x-x^2} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C
\end{aligned}
$$

†

Ejemplo 197.

Determine $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x-8}}\,dx$

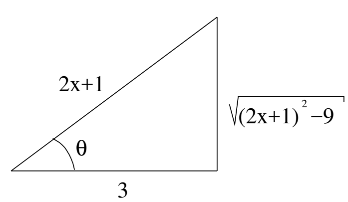
Completación de cuadrados:

$$
\begin{aligned}
4x^2+4x-8 &= 4x^2+4x+1-9 \\
&= (2x+1)^2-9
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x-8}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2-9}}\,dx \quad \text{Sea } 2x+1 = 3\sec\theta \Rightarrow 2dx = 3\sec\theta\tan\theta d\theta \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}\cdot\frac{3\sec\theta\tan\theta}{2}\,d\theta \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}\cdot\frac{3\sec\theta\tan\theta}{2}\,d\theta \\
&= \int \frac{1}{\cancel{3}\cancel{\tan\theta}}\cdot\frac{\cancel{3}\sec\theta\cancel{\tan\theta}}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C
\end{aligned}
$$

Y como $\sec\theta = \dfrac{2x+1}{3}$ entonces



de donde se obtiene que $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{(2x+1)^2-9}}{3}$, así

$$
\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x-8}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+1}{3} + \frac{\sqrt{(2x+1)^2-9}}{3}\right| + C
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-9}}{3}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-9}\right| - \ln 3\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-9}\right| + C_1
\end{aligned}$$

†

6.1.6. Integración por fracciones parciales

Esta técnica consiste en separar una fracción "compleja" en fracciones más sencillas.

Por ejemplo, si se sabe que

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

Se puede calcular fácilmente la integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx \\
&= \int \frac{1}{x-3}dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx \\
&= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C
\end{aligned}$$

La idea entonces es convertir las fracciones complejas en fracciones simples de acuerdo al siguiente procedimiento.

Fracción Impropia

Si la fracción es impropia (si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador) entonces realice la división de los polinomios.

Ejemplo 198.

Determine $\displaystyle\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx$

$$\begin{array}{rrrr}
(\ x^3 & & -x & +3) \div (x^2+x-2) = x-1+\dfrac{2x+1}{x^2+x-2} \\
-x^3 & -x^2 & +2x & \\ \hline
 & -x^2 & +x & +3 \\
 & x^2 & +x & -2 \\ \hline
 & & 2x & +1
\end{array}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx &= \int \left(x-1+\frac{2x+1}{x^2+x-2}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}-x+\ln|x^2+x-2|+C\end{aligned}$$

†

Ejemplo 199.

Determine $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x^2+x+1}\,dx$

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^2 \quad -x\right) \div \left(x^2+x+1\right) = 1+\dfrac{-2x-1}{x^2+x+1} \\ \underline{-x^2 \quad -x-1} \\ \qquad -2x-1 \end{array}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-x}{x^2+x+1}\,dx &= \int \left(1-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx \\ &= x-\ln\left(x^2+x+1\right)+C\end{aligned}$$

†

Ejemplo 200.

Determine $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x^2+1}\,dx$

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^2-x\right) \div \left(x^2+1\right) = 1+\dfrac{-x-1}{x^2+1} \\ \underline{-x^2 \qquad -1} \\ \qquad -x-1 \end{array}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-x}{x^2+1}\,dx &= \int \left(1-\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= x-\frac{\ln|x^2+1|}{2}-\arctan x+C\end{aligned}$$

†

Fracción no impropia

Si la fracción no es impropia entonces factorice completamente el denominador en factores de la forma

$$(ax+b)^m \text{ y } (ax^2+bx+c)^n$$

1. Factores lineales:

   Por cada factor lineal de la forma $(ax+b)^m$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de las m fracciones siguientes:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+...+\frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

Ejemplo 201.

Determine $\displaystyle\int \frac{3x-3}{x^2-x-2}\,dx$

$$\begin{aligned}\frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} \quad &\Rightarrow \quad 3x-3=A(x+1)+B(x-2)\\ &\Rightarrow \quad 3x-3=(A+B)x+(A-2B)\\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=3\\ A-2B=-3\end{cases}\\ &\Rightarrow \quad A=1, B=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-3}{x^2-x-2}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}\right)dx\\ &= \ln|x-2|+2\ln|x+1|+C\end{aligned}$$

†

Ejemplo 202.

Determine $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx=\int \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}dx$$

$$\begin{aligned}&\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\\ \Rightarrow\ & 5x^2+20x+6=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx\\ \Rightarrow\ & 5x^2+20x+6=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A\\ \Rightarrow\ & \begin{cases} A+B=5\\ 2A+B+C=20\\ A=6\end{cases}\\ \Rightarrow\ & A=6, B=-1, C=9\end{aligned}$$

$$=\int\left(\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \quad 6\ln|x| - \ln|x+1| - \frac{9}{x+1} + C$$

†

2. Factores cuadráticos:

   Por cada factor cuadrático de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de n fracciones siguientes:

$$\frac{A_1 + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2 + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + ... + \frac{A_n + B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ejemplo 203.

Determine $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}\,dx$

$$\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{2x^3-4x-8}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2x^3-4x-8}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}\\
\Rightarrow\;& 2x^3-4x-8 = A(x-1)(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x(x-1)\\
\Rightarrow\;& 2x^3-4x-8 = (A+B+C)x^3 + (-A-C+D)x^2 + (4A+4B-D)x + (-4A)\\
\Rightarrow\;& \begin{cases} A+B+C=2\\ -A-C+D=0\\ 4A+4B-D=-4\\ -4A=-8 \end{cases}\\
\Rightarrow\;& A=2, B=-2, C=2, D=4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x+4}{x^2+4}\right)dx\\
&= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \int \frac{2x}{x^2+4}dx + 4\int \frac{1}{x^2+4}dx\\
&= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln|x^2+4| + 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 204.

Determine $\displaystyle\int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}\,dx$

$$\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 8x^3+13x=(Ax+B)(x^2+2)+Cx+D\\
&\Rightarrow \quad 8x^3+13x=Ax^3+Bx^2+(2A+C)x+(2B+D)\\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} A=8\\ B=0\\ 2A+C=13\\ 2B+D=0\end{cases}\\
&\Rightarrow \quad A=8, B=0, C=-3, D=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}\,dx &= \int\left(\frac{8x}{x^2+2}-\frac{3x}{(x^2+2)^2}\right)dx\\
&= 4\ln|x^2+2|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2}+C
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 205.

Determine $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^3-2x-4}\,dx$

$$\int \frac{3x+4}{x^3-2x-4}\,dx=\int\frac{3x+4}{(x-2)(x^2+2x+2)}dx$$

$$\begin{aligned}
&\frac{3x+4}{(x-2)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}\\
&\Rightarrow \quad 3x+4=A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-2)\\
&\Rightarrow \quad 3x+4=(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+(2A-2C)\\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=0\\ 2A-2B+C=3\\ 2A-2C=4\end{cases}\\
&\Rightarrow \quad A=1, B=-1, C=-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)dx\\
&= \ln|x-2|-\frac{\ln|x^2+2x+2|}{2}+C
\end{aligned}$$

†

6.2. Integral Definida

6.2.1. Sumas, la notación $\sum$

La notación de sumatoria es muy útil para representar sumas de manera simplificada.

Para denotar una sumatoria se utiliza el símbolo

$$\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

Lo que dice que se deben sumar los términos de f evaluados en k desde m hasta n con un paso de uno en uno.

Ejemplo 206.

Desarrolle las siguientes sumas.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 2k = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$
3. $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} (2j - 1) = (2 \cdot 0 - 1) + (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) = -1 + 1 + 3 + 5 = 8$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} f(i) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} f\left(2 + k \cdot \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4)$

Ejemplo 207.

Escriba las siguientes sumas en notación simplificada de sumatoria.

1. $\displaystyle 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \sum_{k=1}^{5} (2k + 1)$
2. $\displaystyle 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = \sum_{k=1}^{6} 2$
3. $\displaystyle f(1) + f\left(1 + \frac{1}{4}\right) + f\left(1 + \frac{2}{4}\right) + f\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \sum_{k=1}^{4} f\left(1 + (k-1)\frac{1}{4}\right)$

Las sumatorias también se pueden especificar desde un número dado hasta un número cualquiera n.

Ejemplo 208.

Escriba el desarrollo de las siguientes sumas.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + k + k + ... + k}_{n \text{ veces}}$

Esta forma de expresar las sumas tiene la ventaja que se pueden determinar las fórmulas para encontrarlas de manera general, de esta forma:

$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + c + ... + c}_{n \text{ veces}} = n \cdot c$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + ... + 2 + 1$$

Sumando estas dos expresiones se cumple

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \underbrace{(n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ veces}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Se cumple además:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (f(k) + g(k)) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c \cdot f(k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} f(k)}$$

Todas estas fórmulas se definen cuando la suma inicia en 1 y finaliza en n.

Ejemplo 209.

Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} 2k^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{30} 2k^2 &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{30} k^2 \\
&= 2 \cdot \frac{30(30+1)(2 \cdot 30+1)}{6} \\
&= 18910
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 210.

Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} (5k^2 + 2k - 1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{15} (5k^2 + 2k - 1) &= 5 \cdot \sum_{k=1}^{15} k^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{15} 1 \\
&= 5 \cdot \frac{15(15+1)(2 \cdot 15+1)}{6} + 2 \cdot \frac{15(15+1)}{2} - 15 \\
&= 6425
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 211.

Simplifique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 2k - 2)$

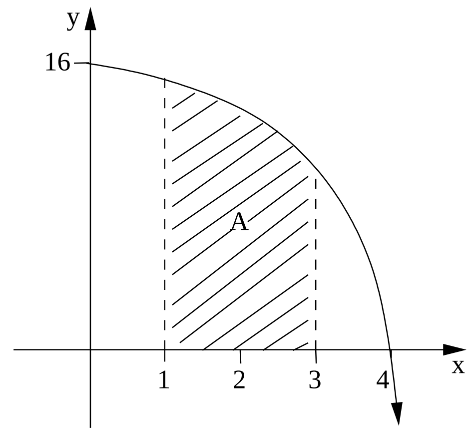
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 2k - 2) &= 6 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 2 \\
&= \cancel{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}} + \cancel{2} \cdot \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - 2n \\
&= n((n+1)(2n+1) + n + 1 - 2) \\
&= n(2n^2 + 4n) \\
&= 2n^2(n+2)
\end{aligned}$$

†

6.2.2. Sumas de Riemann

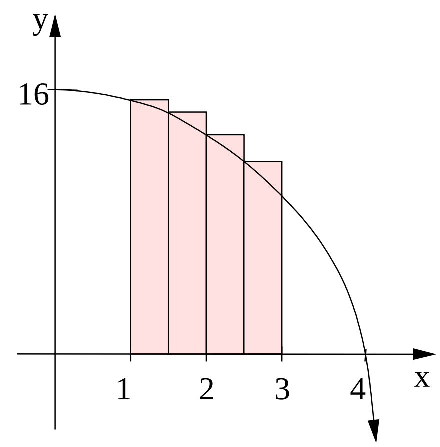
En esta sección el problema que se trata de resolver es encontrar el área que se encierra entre una curva y el eje x desde un punto $x = a$ a un punto $x = b$.

Para iniciar, se buscará el área entre la curva $y = 16 - x^2$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 3$.



Se debe observar que esta área no se puede encontrar de forma directa con las fórmulas conocidas hasta ahora, lo que se puede hacer son algunas aproximaciones tratando de rellenar el área con rectángulos.

Se iniciará con una aproximación muy "mala", se tratará de llenar el área con cuatro rectángulos, por tanto, se partirá la base en cuatro partes iguales y se introducirán los rectángulos, las alturas se tomarán con la función al lado izquierdo del rectángulo.



La base de todos estos rectángulos mide lo mismo $\Delta x = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$

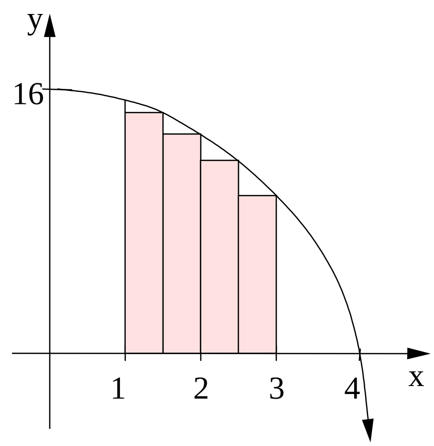
Ahora, la altura del primer rectángulo es $f(1)$, la del segundo es $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, el tercero es $f(2)$ y el del cuarto es $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

Por lo tanto, el área de los cuatro rectángulos es

$$A \approx \frac{1}{2} \cdot f(1) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(2) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{1}{2}\cdot\left(f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)+f\left(\frac{5}{2}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{4}\left(f\left(1+(k-1)\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{4}\left(16-\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{4}\left(-\frac{k^2}{4}-\frac{k}{2}+\frac{63}{4}\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{4(4+1)(2\cdot 4+1)}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4(4+1)}{2}+63\right)\\
&\approx 25{,}25
\end{aligned}$$

Se nota que en este caso la altura de los rectángulos se tomó del lado izquierdo, se observa que el área de los rectángulos da más que el área buscada. Esta área también se pudo encontrar tomando la altura del lado derecho.

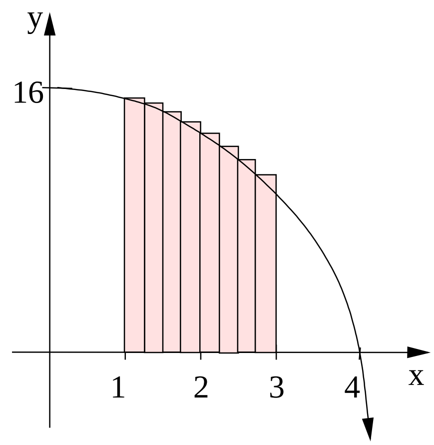


$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot f(2)+\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot f(3)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\left(f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{4}\left(f\left(1+k\cdot\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{4}\left(16-\left(1+\frac{k}{2}\right)^2\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{4}\left(-\frac{k^2}{4}-k+15\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{4(4+1)(2\cdot 4+1)}{6}-\frac{4(4+1)}{2}+60\right)\\
&\approx 21{,}25
\end{aligned}$$

Si se observa, esta área es menor al área que se busca, así se puede decir con seguridad que $21{,}25 < A < 25{,}25$.

Como se dijo anteriormente, esta aproximación es "muy mala", como ejercicio, mejore esta aproximación utilizando ocho rectángulos.

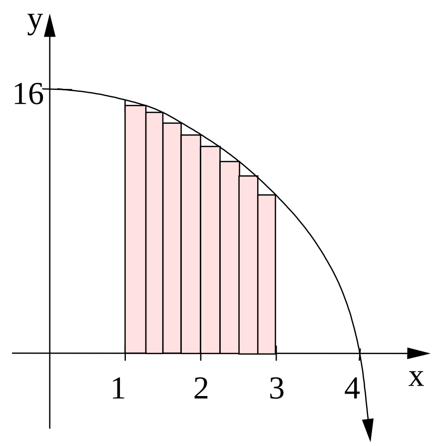
Por la izquierda



Distancia: $\Delta x = \dfrac{3-1}{8} = \dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{4}\cdot\left(f(1)+f\left(\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)+f(2)+f\left(\frac{9}{4}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{11}{4}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{8}\left(f\left(1+(k-1)\cdot\frac{1}{4}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{8}\left(16-\left(\frac{k}{4}+\frac{3}{4}\right)^2\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{8}\left(-\frac{k^2}{16}-\frac{3k}{8}+\frac{247}{16}\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{16}\cdot\frac{8(8+1)(2\cdot 8+1)}{6}-\frac{3}{8}\cdot\frac{8(8+1)}{2}+\frac{247}{16}\cdot 8\right)\\
&\approx 24{,}31
\end{aligned}$$

Por la derecha



Distancia: $\Delta x = \dfrac{3-1}{8} = \dfrac{1}{4}$

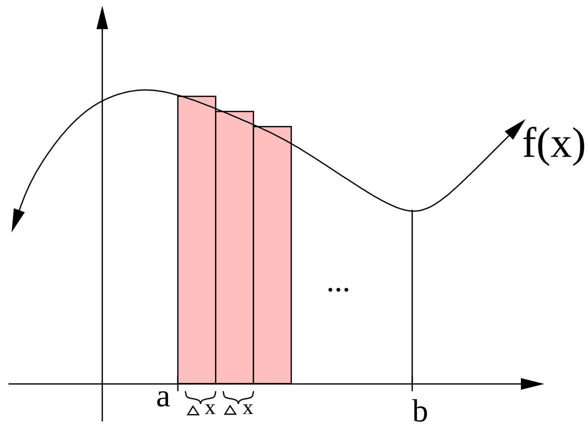
$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{4}\cdot\left(f\left(\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)+f(2)+f\left(\frac{9}{4}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{11}{4}\right)+f(3)\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{8}\left(f\left(1+k\cdot\frac{1}{4}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{8}\left(16-\left(1+\frac{k}{4}\right)^2\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{8}\left(-\frac{k^2}{16}-\frac{k}{2}+15\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{16}\cdot\frac{8(8+1)(2\cdot 8+1)}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{8(8+1)}{2}+15\cdot 8\right)\\
&\approx 22{,}31
\end{aligned}$$

Por lo que $22{,}31 < A < 24{,}31$

Se observa que entre mayor sea la cantidad de rectángulos, mejor es la aproximación, para encontrar el área buscada lo que se hace es introducir una infinita cantidad de rectángulos (se toma el límite conforme el número de rectángulos tienda a infinito).

Ahora se hará el procedimiento general para una función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, las alturas se tomarán por la izquierda del rectángulo.

Se inicia introduciendo una cantidad n de rectángulos.



Se divide el intervalo en n partes $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

La altura del primer rectángulo es $f(a)$, la del segundo $f(a+\Delta x)$, luego $f(a+2\cdot\Delta x)$, etc. Así, la altura del k-ésimo rectángulo es

$$f\left(a+(k-1)\cdot\Delta x\right)$$

Y el área será

$$A_k = \Delta x \cdot f\left(a+(k-1)\cdot\Delta x\right)$$

El área de los n rectángulos es

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f\left(a+(k-1)\cdot\Delta x\right)$$

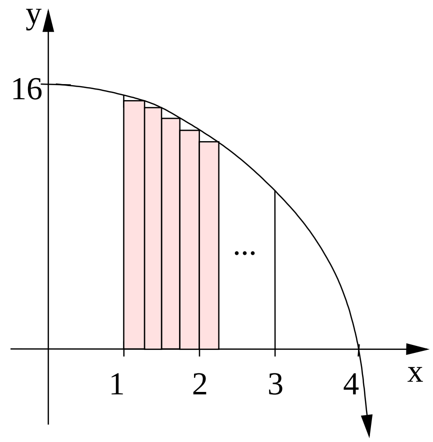
Y tomando un infinito número de rectángulos se tiene

$$\boxed{A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f\left(a+(k-1)\cdot\Delta x\right)}$$

Si se toma la altura por la derecha se obtiene

$$\boxed{A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f\left(a+k\cdot\Delta x\right)}$$

Así, al retomar el ejemplo inicial ($f(x) = 16 - x^2$ de $x = 1$ a $x = 3$) y se calculará por la derecha, de esta forma se tiene



$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \cdot f\left(1 + k \cdot \frac{2}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(16 - \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(15 - \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(15n - \frac{4}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} - \frac{4}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{78n^2 - 12n - 8n^2 - 12n - 4}{6n} \\
&= 2 \cdot \frac{70}{6} \\
&= \frac{70}{3} = 23.\overline{3}
\end{aligned}$$

Nota:

En los ejemplos y ejercicios por lo regular se indica si el cálculo se debe hacer por la derecha o por la izquierda, si no se indica, se puede hacer por cualquiera de los dos lados, en este caso se prefiere por la derecha ya que la fórmula es más simple.

Ejemplo 212.

Calcule el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Se va a partir el intervalo en n subintervalos igualmente espaciados, en donde cada uno de ellos mide $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$

El cálculo se hará tomando las alturas de los rectángulos por la derecha.

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f\left(a + k\cdot \Delta x\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(0 + k \cdot \frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6n^{\cancel{2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

†

Ejercicio 13.

1. Calcule el área bajo la curva de la función $f(x) = x - x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$. R/ $\dfrac{1}{6}$
2. Encuentre el área bajo la curva de la función $g(x) = 2x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$. R/ $\dfrac{52}{3}$

6.2.3. La integral definida

Como se vio en la sección anterior, el método de Riemann sirve para econtrar el área bajo la curva de una función f en un intervalo $[a, b]$, esto con la fórmula

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x^*) \cdot \Delta x$$

donde x^* es el valor tomado por la derecha o por la izquierda del rectángulo.

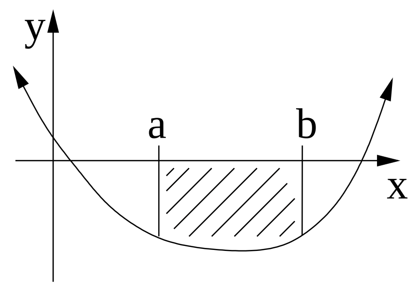
Esta suma de términos infinitos se va a llamar *la integral definida* y se denotará como

$$\int_a^b f(x)dx$$

De esta forma

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x^*) \cdot \Delta x}$$

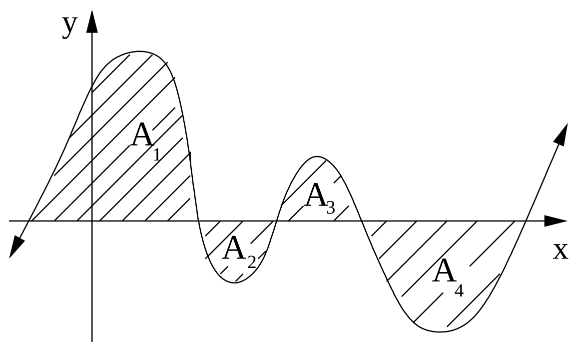
Aunque hasta el momento se ha hablado del área bajo la curva, no es cierto que este límite la represente, ¿qué sucede si el área buscada está debajo del eje x?



Aquí las evaluaciones de f son negativas y, por lo tanto, el límite de las sumas da un valor negativo.

Así, se puede observar que la integral es positiva si la función está sobre el eje x y negativa si está por debajo del eje x.

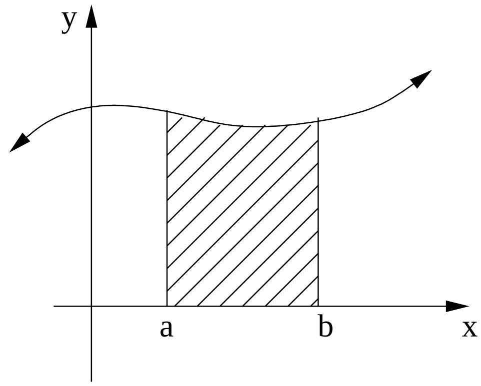
Por lo tanto, en futuros ejercicios y ejemplos en los que se pida el área bajo la curva se tendrán que calcular las áreas positivas y restarle las negativas.



Así, $A = A_1 + A_3 - A_2 - A_4$.

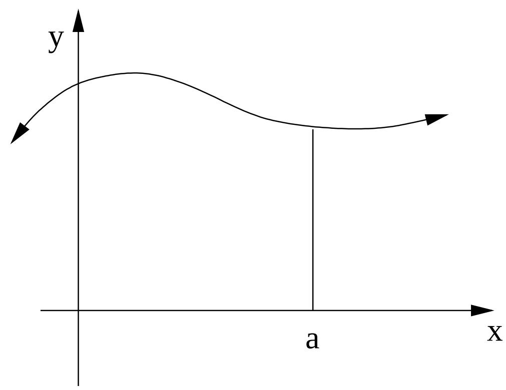
Algunas propiedades de la integral definida

1. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

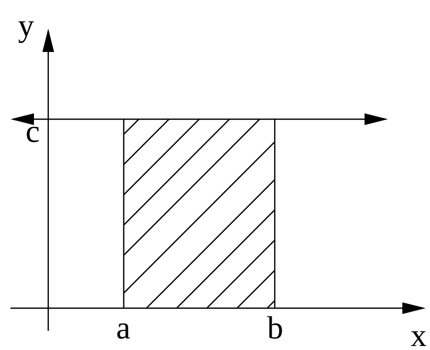


Aquí se tiene $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} > 0$ de a a b y $\Delta x = \dfrac{a-b}{n} < 0$ de b a a, por ello es la diferencia de signos.

2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$



3. $\displaystyle\int_a^b cdx = c(b-a)$ con c constante.

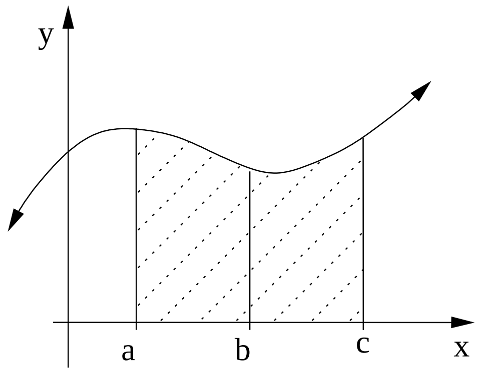


4. $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)-g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

6. $\displaystyle\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx$

7. $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

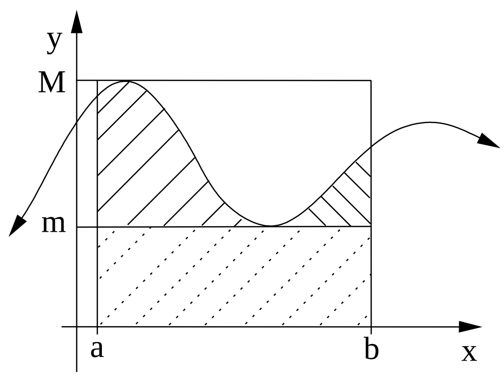


8. Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

9. Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

10. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$ entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$



Ejemplo 213.

Utilice las propiedades para hallar el valor de $\displaystyle\int_0^1 3 + 4x^2 dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 3 + 4x^2 dx &= \int_0^1 3dx + 4 \cdot \int_0^1 x^2 dx \\
&= 3(1-0) + 4 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Nota: La integral $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ se calculó en la sección de sumas de Riemann.

†

Ejemplo 214.

Utilice las propiedades para hallar el valor de $\displaystyle\int_8^{10} f(x)dx$ si se sabe que $\displaystyle\int_0^{10} f(x)dx = 17$ y $\displaystyle\int_0^8 f(x)dx = 12$

Se cumple que

$$\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^8 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx$$

De aquí

$$\int_8^{10} f(x)dx = 5$$

†

Ejemplo 215.

Sabiendo que $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}dx = \frac{38}{3}$, ¿Cuánto es $\displaystyle\int_9^4 \sqrt{t}dt$?

$$\begin{aligned}\int_9^4 \sqrt{t}dt &= -\int_4^9 \sqrt{t}dt \\ &= -\frac{38}{3}\end{aligned}$$

†

Ejemplo 216.

Evalúe $\displaystyle\int_1^1 x^2 \cos x dx$

$$\int_1^1 x^2 \cos x dx = 0$$

†

6.2.4. Teorema Fundamental del Cálculo

El teorema fundamental del cálculo es el resultado más importante en este campo de la matemática.

Este teorema relaciona el cálculo diferencial (derivadas) con el cálculo integral (integrales), dos temas que, en principio, no parecen tener conexión.

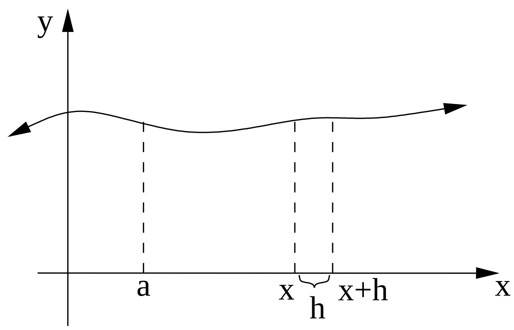
De hecho, lo que indica el teorema es que la integral y la derivada son funciones inversas.

Teorema 13 (Teorema Fundamental del Cálculo, primera parte)**.**

Si f es continua en $[a, b]$, entonces se cumple que:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Lo que quiere decir el teorema es que si se tiene una función f y primero se integra hasta un valor x y luego el resultado se deriva, se vuelve a obtener $f(x)$.



$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot f(x)}{\cancel{h}} = f(x)$$

Teorema 14 (Teorema Fundamental del Cálculo, segunda parte)**.**

Si f es continua en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es cualquier antiderivada de f, esto es, una función tal que $F' = f$.

Lo que quiere decir que si se conoce una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Ejemplo 217.

Determine la derivada de $f(x) = \displaystyle\int_1^x \operatorname{sen} t\, dt$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\int_1^x \operatorname{sen} t\, dt \\ &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

†

Ejemplo 218.

Determine la derivada de $g(x) = \int_{-1}^{x^3} t^2\,dt$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{-1}^{x^3} t^2\,dt \\ &= (x^3)^2 \cdot [x^3]' \\ &= x^6 \cdot 3x^2 \\ &= 3x^8 \end{aligned}$$

†

Ejemplo 219.

Determine la derivada de $h(x) = \int_{x^2}^{5} \arctan t\,dt$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{5} \arctan t\,dt \\ &= -\frac{d}{dx}\int_{5}^{x^2} \arctan t\,dt \\ &= \arctan(x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

†

Ejemplo 220.

Determine la derivada de $f(x) = \int_{x}^{3x^2} e^{(-t)^2}\,dt$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{x}^{3x^2} e^{(-t)^2}\,dt \\ &= \frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{3x^2} e^{(-t)^2}\,dt - \int_{0}^{x} e^{(-t)^2}\,dt\right) \\ &= e^{(-3x^2)^2} \cdot -6x - e^{(-x)^2} \\ &= -6xe^{9x^4} - e^{x^2} \end{aligned}$$

†

Ejemplo 221.

Si f es una función integrable, determine f y a de modo que se cumpla que

$$2 - \int_{a}^{x} f(t)\,dt = x^2 - x$$

Al derivar a ambos lados se obtiene

$$-f(x) = 2x - 1 \Rightarrow f(x) = -2x + 1$$

Ahora se realiza el cálculo de la integral con esta función para determinar el valor de a.

$$\begin{aligned}
& 2 - \int_a^x (-2x+1)\, dt = x^2 - x \\
\Rightarrow\ & 2 - (-x^2 + x)\big|_a^x = x^2 - x \\
\Rightarrow\ & 2 + x^2 - x - a^2 + a = x^2 - x \\
\Rightarrow\ & -a^2 + a + 2 = 0 \\
\Rightarrow\ & a = -1 \vee a = 2
\end{aligned}$$

Por lo que $f(x) = -2x + 1$ y $a = -1$ ó $a = 2$

†

Ejemplo 222.

Calcule $\displaystyle\int_1^4 x^2\, dx$

$$\begin{aligned}
\int_1^4 x^2\, dx &= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 \\
&= \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} \\
&= 21
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 223.

Calcule $\displaystyle\int_1^3 16 - x^2\, dx$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 16 - x^2\, dx &= 16x - \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 \\
&= 16 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} - \left(16 - \frac{1^3}{3}\right) \\
&= \frac{70}{3}
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 224.

Calcule $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x}\, dx$

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x|\big|_3^5 \\ &= \ln 5 - \ln 3\end{aligned}$$

†

Ejemplo 225.

Calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx &= -\cos x|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\cos\pi + \cos(-\pi) \\ &= 0\end{aligned}$$

†

Ejemplo 226.

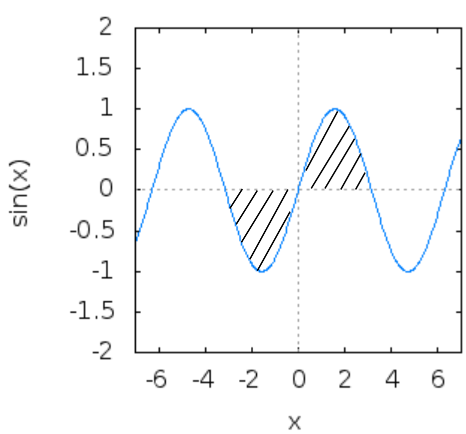
Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{3} e^x\,dx$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} e^x\,dx &= e^x|_{-1}^{3} \\ &= e^3 - e^{-1}\end{aligned}$$

†

Ejemplo 227.

Observe que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0$, esto no representa el área bajo la curva de la función, encuentre el valor de esta área.



$$A = -\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} x\,dx + \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos x|_{-\pi}^{0} - \cos x|_{0}^{\pi} \\
&= \cos 0 - \cos(-\pi) - \cos\pi + \cos 0 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

†

Ejemplo 228.

¿Dónde está el error en el siguiente cálculo?

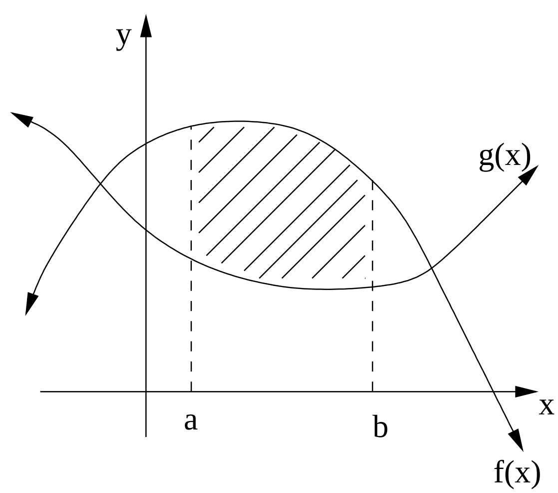
$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

El error está en que la función NO es continua, el teorema fundamental del cálculo no se puede utilizar.

†

6.3. Área entre curvas

Suponga que se tienen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ y se quiere encontrar el área comprendida entre estas curvas desde $x = a$ hasta $x = b$.



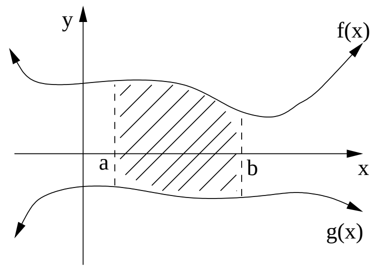
Se obtiene que el área es

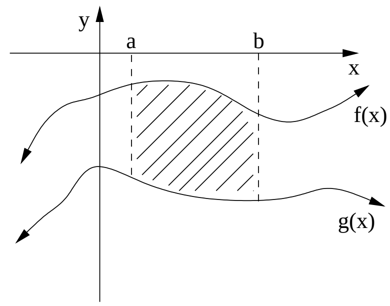
$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

siempre y cuando f y g sean contínuas y $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

En otras palabras, se debe encontrar la integral de la función mayor menos la función menor.

Note que no hay problema si alguna (o ambas) de las funciones es negativa (se encuentra debajo del eje y), la fórmula sigue funcionando igual.

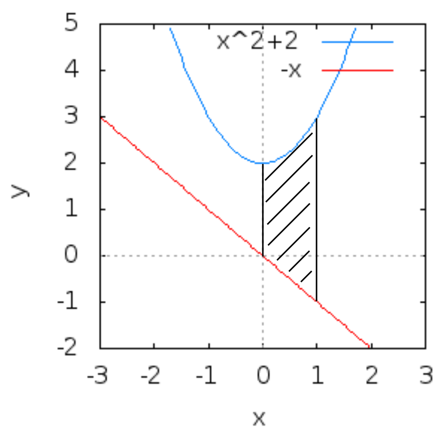




Ejemplo 229.

Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura



$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x^2 + 2 + x)\, dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$

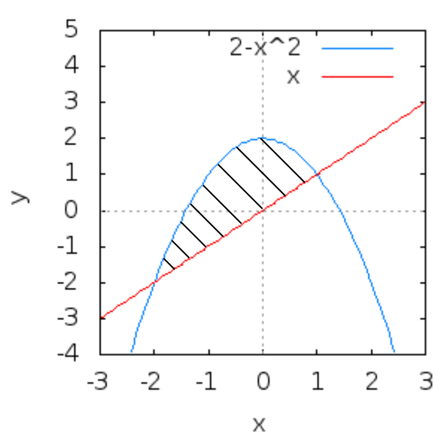
†

Ejemplo 230.

Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $y = 2 - x^2$, y $g(x) = x$.

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de las curvas son

$$2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ó } x = -2$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x)\, dx \\ &= 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{-2}^1 \\ &= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

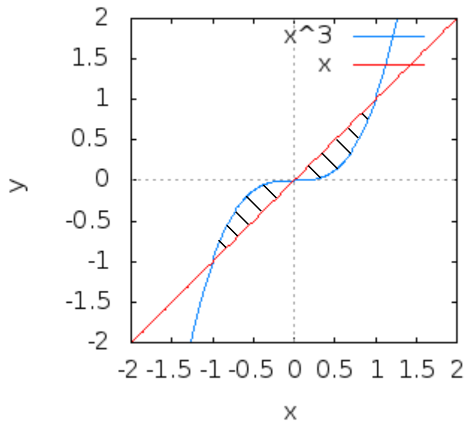
†

Ejemplo 231.

Calcule el área encerrada entre las curvas $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$.

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de las curvas son

$$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = 1 \text{ ó } x = -1$$



$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx \\
&= \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right|_{0}^{1} \\
&= 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

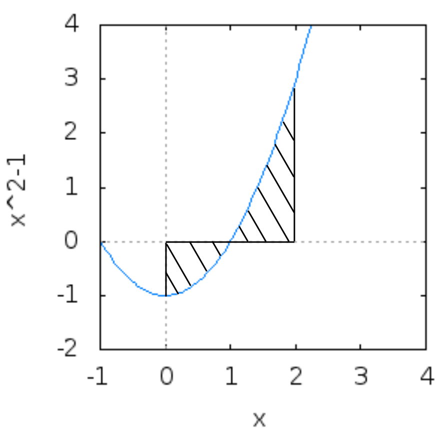
†

Ejemplo 232.

Hallar el área que forma la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2$ con el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 2$

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de la curva con el eje x son

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

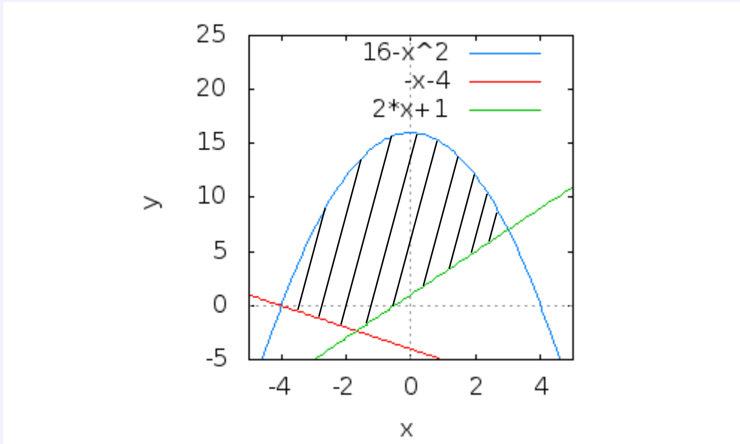


$$\begin{aligned}
A &= \int_{0}^{\sqrt{2}} (0 - x^2 + 2)\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} (x^2 - 2 - 0)\,dx \\
&= \left.-\frac{x^3}{3} + 2x\right|_{0}^{\sqrt{2}} + \left.\frac{x^3}{3} - 2x\right|_{\sqrt{2}}^{2} \\
&= -\frac{\sqrt{2}^3}{3} + 2\sqrt{2} + \frac{8}{3} - 4 - \frac{\sqrt{2}^3}{3} + 2\sqrt{2} \\
&= 2{,}438
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 233.

Calcule el área sombreada



Intersecciones:

- $-x^2+16=-x-4 \Rightarrow -x^2+x+20=0 \Rightarrow x=5$ ó $x=-4$
- $-x^2+16=2x+1 \Rightarrow -x^2-2x+15=0 \Rightarrow x=-5$ ó $x=3$
- $-x-4=2x+1 \Rightarrow x=\dfrac{-5}{3}$

Así

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-4}^{\frac{-5}{3}} (-x^2+16-(-x-4))\,dx + \int_{\frac{-5}{3}}^{3} (-x^2+16-2x-1)\,dx \\
&= \int_{-4}^{\frac{-5}{3}} (-x^2+x+20)\,dx + \int_{\frac{-5}{3}}^{3} (-x^2-2x+15)\,dx \\
&= -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+20x\Big|_{-4}^{\frac{-5}{3}} + -\frac{x^3}{3}-x^2+15x\Big|_{\frac{-5}{3}}^{3} \\
&= -\frac{\left(\frac{-5}{3}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{-5}{3}\right)^2}{2}+20\cdot\frac{-5}{3}+\frac{(-4)^3}{3}-\frac{(-4)^2}{2}+20\cdot -4-\frac{3^3}{3}-3^2+15\cdot 3+\frac{\left(\frac{-5}{3}\right)^3}{3} \\
&\quad +\left(\frac{-5}{3}\right)^2-15\cdot\frac{-5}{3} \\
&= \frac{147}{2}=73{,}5
\end{aligned}
$$

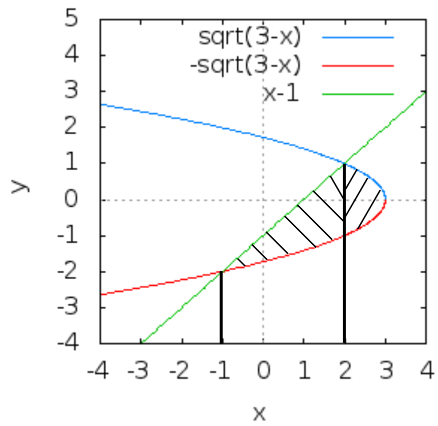
†

Ejemplo 234.

Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $x=3-y^2$ y $y=x-1$

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de las curvas son

$$\pm\sqrt{3-x} = x-1 \Rightarrow 3-x = x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ ó } x=-1$$

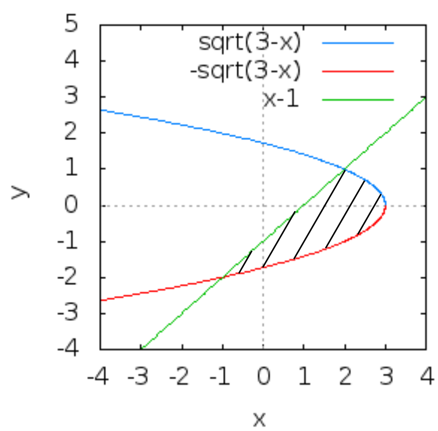


$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \left(x-1+\sqrt{3-x}\right)\, dx \\ &\quad + \int_{2}^{3} \left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}\right)\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x - \frac{2(3-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-1}^{2} - \frac{4(3-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{2}^{3} \\ &= 2-2-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-1+\frac{16}{3}-0+\frac{4}{3} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Sin embargo, esta área se puede calcular de manera más sencilla si se toma con respecto a y.

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de las curvas en y son

$$3-y^2 = y-1 \Rightarrow y^2+y-2=0 \Rightarrow y=1 \text{ ó } y=-2$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} (3-y^2-y-1)\, dy \\ &= \int_{-2}^{1} (-y^2-y+2)\, dy \\ &= -\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\Bigg|_{-2}^{1} \\ &= -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{8}{3}+2+4 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

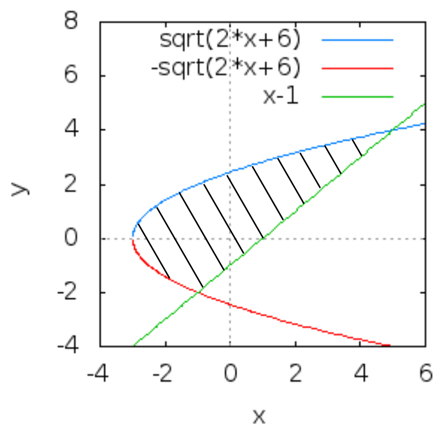
†

Ejemplo 235.

Determine el área encerrada por la recta $y = x-1$ y la parábola $y^2 = 2x+6$

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de las curvas en y son

$$y+1 = \frac{y^2-6}{2} \Rightarrow y^2-2y-8=0 \Rightarrow y=-2 \text{ ó } y=4$$

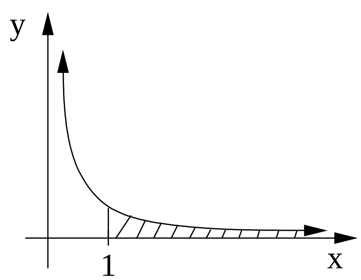


$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{4} \left(y + 1 - \frac{y^2-6}{2} \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left(-y^2 + 2y + 8 \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{-y^3}{3} + y^2 + 8y \right) \Bigg|_{-2}^{4} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{-4^3}{3} + 4^2 + 8 \cdot 4 \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{-(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 8 \cdot -2 \right) \\
&= \frac{40}{3} + \frac{14}{3} = 18
\end{aligned}
$$

†

6.4. Integrales impropias

Suponga que se quiere calcular el área bajo la curva de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ de 1 en adelante.



Esta área es $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Pero para calcular esto se debe expresar la integral como

$$
\begin{aligned}
\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{-1}{x^2} dx &= \lim_{b \to \infty} \frac{-1}{x} \Bigg|_1^b \\
&= \lim_{b \to \infty} \frac{-1}{b} + \frac{1}{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Este es el procedimiento que se debe seguir al calcular integrales al infinito, así :

1. Si f es continua en $[a, \infty[$ entonces

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

2. Si f es continua en el intervalo $]-\infty, b]$ entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

3. Si f es continua en el intervalo $]-\infty, \infty[$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

   donde c es cualquier número real.

Nota:

Si el límite existe, se dice que la integral converge, de lo contrario la integral diverge.

Ejemplo 236.

Determine si la integral $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ es convergente o divergente, en caso de que converja indique el valor al que converge.

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln(x)\big|_{1}^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty} (\ln(b) - \ln(1)) \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln(b) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

La integral diverge.

†

Ejemplo 237.

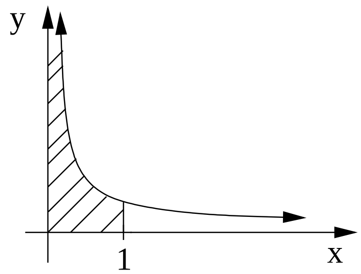
Determine si la integral $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx$ es convergente o divergente, en caso de que converja indique el valor al que converge.

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-x}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\big|_{0}^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

La integral converge a 1.

†

Ahora suponga que se quiere encontrar $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$



$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \\
&= \lim_{a\to 0+} \int_a^1 x^{\frac{-1}{3}}\,dx \\
&= \lim_{a\to 0+} \left.\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right|_a^1 \\
&= \lim_{a\to 0+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3a^{\frac{2}{3}}}{2}\right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Este procedimiento se va a realizar para los casos en donde hayan asíntotas verticales (discontinuidades infinitas).

Así:

1. Si f es continua en $[a,b[$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

2. Si f es continua en $]a,b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$$

3. Si f es continua a $[a,b]$ excepto en algún c en $]a,b[$ en el cual f tiene una discontinuidad infinita, entonces:

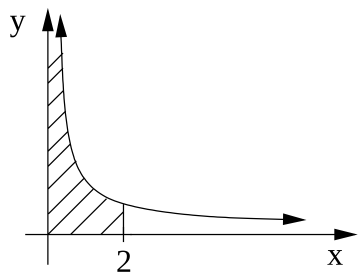
$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ejemplo 238.

Determine si la integral $\int_0^2 \frac{1}{x^3}\,dx$ es convergente o divergente, en caso de que converja indique el valor al que converge.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{x^3}dx &= \lim_{a\to 0+}\int_a^2 \frac{1}{x^3}\,dx\\ &= \lim_{a\to 0+} \left.\frac{-x^-2}{2}\right|_a^2\\ &= \lim_{a\to 0+} \frac{-1}{8}+\frac{1}{2a^2}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Por lo que la integral diverge.



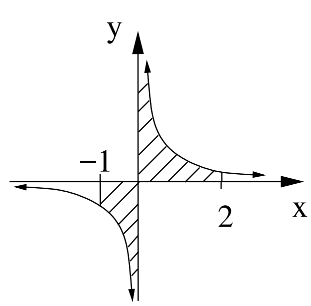
†

Ejemplo 239.

Determine si la integral $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}\,dx$ es convergente o divergente, en caso de que converja indique el valor al que converge.

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^3}\,dx$$

Pero ya se sabe que la segunda integral diverge por lo que la integral diverge.



†

Ejemplo 240.

Determine si la integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$ es convergente o divergente, en caso de que converja indique el valor al que converge.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx \\
=\ & \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx \\
=\ & \lim_{a\to 0+} \int_a^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx + \lim_{b\to +\infty} \int_1^{b} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx
\end{aligned}$$

Por lo que la integral converge a π.

Ahora

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx \quad \text{Sea } u^2 = x \Rightarrow 2u\,du = dx \\
=\ & \int \frac{2u}{u(u^2+1)}\,du \\
=\ & 2\int \frac{1}{u^2+1}du \\
=\ & 2\arctan u \\
=\ & 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
=\ & \lim_{a\to 0+} 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)\Big|_a^1 + \lim_{b\to +\infty} 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)\Big|_1^b \\
=\ & \lim_{a\to 0+} \left(2\arctan\left(\sqrt{1}\right) - 2\arctan\left(\sqrt{a}\right)\right) + \lim_{b\to +\infty} \left(2\arctan\left(\sqrt{b}\right) - 2\arctan\left(\sqrt{1}\right)\right) \\
=\ & 2\arctan(1) - 2\arctan(0) + 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\arctan(1) \\
=\ & \pi
\end{aligned}$$

†