Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
MA1102 Cálculo diferencial e integral

I semestre 2023
Tiempo: 2 horas y 30 min
Puntaje Total: 30 pts

# Solución Primer Examen Parcial Extraordinario

1. Construya la tabla de verdad para la proposición $(p \to \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$. **3 Pts**

**Solución:**

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $\neg p$ | $p \to \neg q$ | $(\neg p \vee q)$ | $(p \to \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F | V | F |
| V | F | V | F | V | F | F |
| F | V | F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V |

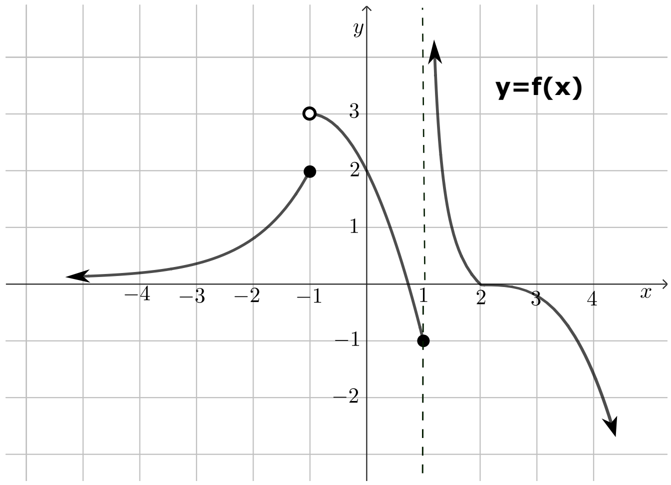
2. Demuestre la proposición $p$ a partir de las premisas: **3 Pts**

1) $\neg p \to (r \wedge s)$
2) $m \to \neg r$
3) $m$

**Solución:**

1) $\neg p \to (r \wedge s)$ Premisa
2) $m \to \neg r$ Premisa
3) $m$ Premisa
4) $\neg r$ MP 2) y 3)
5) $\neg r \vee \neg s$ ADI 4)
6) $\neg(r \wedge s)$ DM 5)
7) $\neg(\neg p)$ MT 1) y 6)
8) $p$ DN 7)

3. Considere la gráfica de una función $f$.




Determine en caso de que existan los siguientes límites, de lo contrario, justifique. **3 Pts**

a. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ c. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

**Solución:**

a. 3 b. 2 c. no existe pues $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$

d. $-\infty$ e. 0

4. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{z \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z - \pi}$ **3 Pts**

**Solución:**

$u = z - \pi$

$z \to \pi \Rightarrow u \to 0$

$$\lim_{z \to \pi} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - \pi}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(u + \pi)}{u}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u \cos \pi + \cos z \operatorname{sen} \pi}{u}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{-\operatorname{sen} u}{u}$$

$$= -1$$

b) $\lim\limits_{y\to-\infty}(\sqrt{y^2-2y-1}+y)$ **4 Pts**

**Solución:**

$$
\begin{aligned}
&\lim_{y\to-\infty}(\sqrt{y^2-2y-1}+y)\\
&=\lim_{y\to-\infty}\frac{y^2-2y-1-y^2}{\sqrt{y^2-2y-1}-y}\\
&=\lim_{y\to-\infty}\frac{-2y-1}{-y\sqrt{1-\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}}-y}\\
&=\lim_{y\to-\infty}\frac{y\left(-2-\frac{1}{y}\right)}{-y\sqrt{1-\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}}-y}\\
&=\lim_{y\to-\infty}\frac{-2-\frac{1}{y}}{-\sqrt{1-\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}}-1}\\
&=\frac{-2}{-2}\\
&=1
\end{aligned}
$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{(-2x^3+x)/(x-1)}$ **3 Pts**

**Solución:**

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+x}{x-1}=-\infty\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{(-2x^3+x)/(x-1)}=+\infty
\end{aligned}
$$

5. Considere la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{a|x-1|}{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ b & \text{si} \quad x = 1 \\ \\ ax - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

donde $a$ y $b$ son constantes reales. Determine los valores de $a$ y $b$ para que la función sea continua en $x = 1$. **4 Pts**

**Solución:**

$h(1) = b$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{a|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-a(x-1)}{x-1} = -a$$

$$\lim_{x \to 1^+} (ax - 1) = a - 1$$

Para que sea continua en $x = 1$ se debe cumplir $b = -a = a - 1$

$$-a = a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = -a \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

6. Considere la función $g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Utilice la **definición de derivada** para determinar $g'(x)$. **4 Pts**

**Solución:**

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h-1} - \dfrac{1}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x-1-(x+h-1)}{(x-1)(x+h-1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x-1)(x+h-1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x-1)(x+h-1)}$$

$$= -\frac{1}{(x-1)^2}$$

7. Calcule (no simplifique), la primera derivada de la función $f$ definida por: **3 Pts**

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\cos^4(x) + 3^{\tan(x)}$$

**Solución:**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cos^4(x) - 4\sqrt[3]{x}\cos^3(x)\operatorname{sen} x + 3^{\tan(x)}\ln 3\sec^2(x)$$