

Examen de Reposición

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo por lo que deben aparecer todos los pasos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, utilizando únicamente bolígrafo de tinta azul o negra para resolver la prueba, en un cuaderno de examen o en hojas debidamente grapadas. No son procedentes apelaciones sobre preguntas resueltas con lápiz (parcial o totalmente) o que presenten alguna alteración. No se permite el uso de celular ni de dispositivos con conectividad inalámbrica. Puede utilizar calculadora científica no programable.

1. Calcule los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{4}{x}}$ [4 puntos]

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(3x + 1) + \sqrt{9x^2 + 1} \right]$ [4 puntos]

2. Determine los valores de las constantes a y b de manera que la función $f, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < 1 \\ b & \text{si } x = 1 \\ \frac{1 - \cos(x - 1)}{(x - 1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$.

[4 puntos]

3. Calcule la primera derivada de la función g de criterio:

[4 puntos]

$$g(x) = \sec(x) \cdot \ln[\sin(5^x) + x^3]$$

4. Construya un cuadro de variación (cuadro resumen) y trace una gráfica de la función f que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones: [4 puntos]

■ Dominio de f es $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$, $f(0) = -4$, $f(4) = 0$, $f(5) = 1$

■ $f'(x) > 0, \forall x \in]0, 3[\cup]3, 5[$
 $f'(x) < 0, \forall x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]5, +\infty[$

■ $f''(x) > 0, \forall x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, 3[\cup]5, +\infty[$
 $f''(x) < 0, \forall x \in]3, 5[$

■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Continúa al dorso...

5. Plantee y resuelva el siguiente problema:

La fundidora en donde usted trabaja ha sido contratada para diseñar y construir un tanque de acero en forma de prisma rectangular recto, de base cuadrada, abierto por arriba y con una capacidad de 500 m^3 . El tanque se tiene que hacer soldando placas delgadas de acero a lo largo de sus bordes. Como ingeniero de producción su trabajo consiste en determinar las dimensiones de la base y la altura que harán que la cantidad de material utilizado para su construcción sea mínima. ¿Qué dimensiones le dirá a la fundidora que use? [4 puntos]

6. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{y}{y^2 - 2y - 3} dy$ [4 puntos]

b) $\int x^2 \cos x dx$ [4 puntos]

7. Determine si la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$ converge o diverge. [4 puntos]

8. Plantee las integrales necesarias que le permitan calcular el área de la región descotada con gris, la cual está limitada por las gráficas de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5 - \frac{5}{6}x$. Debe calcular los límites de integración. [4 puntos]

