Escuela de Matemática

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Práctica del curso

Cálculo Diferencial e Integral

Selección de ejercicios con respuestas

2022

Compartir

https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/no_revisado

Revista digital

Matemática, Educación e Internet. (https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/).

Contenido

Capítulo 1 **Lógica proposicional** 3

1.1 Proposiciones y valores de verdad 3
1.2 Cuantificadores 7
1.3 Inferencias Lógicas 8

Capítulo 2 **Límites** 12

2.1 Conceptos básicos 12
2.2 Preguntas sobre conceptos teóricos 13
2.3 Cálculo de límites en un punto 15
2.4 Cálculo de límites al infinito 17
2.5 Continuidad 21

Capítulo 3 **Derivada de una función** 24

3.1 Derivadas por definición 24
3.2 Cálculo de derivadas 24
3.3 Regla de la cadena 25
3.4 Valor Numérico 26
3.5 Conceptos teóricos 28
3.6 Derivación implícita 29
3.7 Derivación logarítmica 30
3.8 Derivadas de orden superior 30
3.9 Otros ejercicios 31

Capítulo 4 **Aplicaciones de la derivada** 32

4.1 Movimiento rectilíneo 32
4.2 Rectas tangentes y rectas normales 33
4.3 L'Hôpital y formas indeterminadas 35
4.4 Conceptos teóricos 36
4.5 Tasas de cambio relacionadas 36
4.6 Extremos, crecimiento, decrecimiento y concavidad. 39
4.7 Trazo de curvas 41
4.8 Problemas de Optimización 45

Capítulo 5 **Integración** 50

5.1 Integrales básicas y sustitución 50
5.2 Integración de potencias trigonométricas 51

5.3 Sustitución trigonométrica 52
5.4 Integración por partes 53
5.5 Fracciones parciales 53
5.6 Práctica General 54

Capítulo 6 Integral definida 57

6.1 Integración definida 57
6.2 Sumas de Riemann 58
6.3 Teorema fundamental del cálculo 59
6.4 Cálculo de áreas 60
6.5 Integrales impropias 66

Bibliografía 67

Solución de los ejercicios 68

Créditos

Esta práctica: "Práctica del curso Cálculo Diferencial e Integral. Selección de ejercicios" es el resultado de la selección de ejercicios de las prácticas consignadas en la bibliografía que aparece al final de este documento. En la elaboración de este material participaron los siguientes profesores:

Sandra Maria Schmidt Quesada	Coordinadora
Natalia Rodríguez Granados	
Melvin Ramírez Bogantes	
Adriana Solís Arguedas	
Andrés Márquez González	
David Lowell Loveladay	
David Masis Flores	
Emanuelle Soto Cascante	
Gilberto Vargas Mathey	
Ivonne Sánchez Fernández	
Javier Vargas López	
Jorge Luis Chinchilla Valverde	
Jose Luis Espinoza Barboza	
Juan Pablo Prendas Rojas	
Lourdes Quesada Villalobos	
Luis Fernando Mora Picado	
Manuel Calderón Solano	
Norberto Oviedo Ugalde	
Nuria Vanessa Figueroa F.	
Rebeca Solís Ortega	
Reiman Acuna Chacón	
Walter Mora Flores	

Asistentes: Stefannie Vargas S. y Karla Garro C., Yislein Madrigal R.

Citar como:
S. Schmidt et al. "Práctica del curso Cálculo Diferencial e Integral. Selección de ejercicios." Revista digital, Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/no_revisado/

Capítulo 1

Lógica proposicional

1.1 Proposiciones y valores de verdad

1.1.1 Determine si la oración es una proposición:

1) Marte es más grande que Venus.
2) Todos los cuadrados son rectángulos.
3) $\sqrt[3]{64} = 8$
4) Algunos números racionales son enteros.
5) Si estas paredes hablaran...

1.1.2 Simbolice las siguientes proposiciones utilizando la representación dada a continuación:

$$P = \text{“está lloviendo”},\ Q = \text{“el sol está brillando”},\ R = \text{“hay nubes en el cielo”}$$

1) Está lloviendo y el Sol está brillando.
2) Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo.
3) No es cierto que el Sol no está brillando.
4) Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo.
5) Si no está lloviendo y no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando.
6) El Sol está brillando si, y sólo si, no está lloviendo.
7) No es el caso que esté lloviendo o el Sol esté brillando, pero hay nubes en el cielo.

1.1.3 Simbolice, a partir de las proposiciones simples anteriores, las proposiciones compuestas que se enuncian a continuación.

1) $(P \wedge Q) \rightarrow R$
2) $\neg P \longleftrightarrow (Q \vee R)$
3) $\neg R \rightarrow Q$

4) $(P \longrightarrow R) \longrightarrow Q$

1.1.4 Determine la negación de las proposiciones siguientes y su simbolización:

1) "Está lloviendo y hay nubes en el cielo". Además, generalice, de manera simbólica, una regla para $\neg(P \wedge R)$
2) "El Sol está brillando o hay nubes en el cielo". Además, generalice, de manera simbólica, una regla para $\neg(Q \vee R)$.
3) "No está lloviendo". Además, generalice, de manera simbólica, una regla para $\neg(\neg P)$.

1.1.5 Simbolice la proposición y su negación, enuncie (en palabras) la negación

1) Ayer llovió e hizo frío.
2) Sandra viene mañana o el viernes.
3) El sujeto no estaba armado, pero llevaba gorra o capucha.
4) n es entero o bien racional y positivo.

1.1.6 Enuncie (en palabras) la negación

1) Algunas aves no pueden volar
2) Un día en 1998 cayó nieve en el Irazú.
3) Ningún humano puede vencer a Superman.
4) Para cada $y \in \mathbb{R}$ existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^2 = y$.

1.1.7 Simbolice la proposición y enuncie el contrapositivo

1) Si lo detienen le van a poner multa.
2) Si llego tarde y no traigo excusa, no podré hacer quiz.
3) Cada vez que trasnocho estudiando, me va bien en el siguiente quiz.

1.1.8 Proporcione la negación, la recíproca y la contrapositiva de cada una de las proposiciones siguientes:

1) Si soy listo, entonces soy millonario.
2) Si $2 + 2 = 4$, entonces $2 + 4 = 8$.

3) Si Juan llega demasiado pronto o María demasiado tarde, entonces el jefe se molesta.

4) Si hay nubes en el cielo y el Sol no está brillando, entonces no iré al estadio.

5) Si a es un número real y $a > 0$, entonces $a^2 > 0$.

1.1.9 ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas?

1) Si $3 + 3 = 6$, entonces $4 = 4$.

2) Si $5 \cdot 7 = 35$, entonces $10 - 3 = 13$.

3) $(3 + 5 = 8) \vee (5 - 3 = 4)$.

4) $(5 - 3 = 8) \longrightarrow (1 - 7 = 6)$.

5) $(4 + 6 = 9) \longleftrightarrow (5 - 2 = 4)$

6) La capital de Costa Rica es San José y 17 no es un número primo.

1.1.10 Mediante tablas de verdad compruebe que $\neg p \vee q$ y $p \rightarrow q$ son lógicamente equivalentes para dos proposiciones cualesquiera p y q.

1.1.11 Haga una tabla de verdad para las siguientes proposiciones

1) $\neg [p \vee (\neg q)]$

2) $x \wedge [y \vee (\neg z)]$

1.1.12 Muestre por medio de una tabla de verdad que la conclusión en el siguiente razonamiento es incorrecto.

> "Si yo fuera el presidente de Costa Rica, entonces viviría en Zapote. No soy el presidente de Costa Rica. Por lo tanto, no vivo en Zapote."

1.1.13 ¿Es $p \wedge (q \vee r)$ lógicamente equivalente a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$?

1.1.14 Dadas las siguientes proposiciones:

- $p : 5 > 10$.
- q : Si $x^2 + 1 = 0$, entonces x es un número real.
- r : El punto medio de un segmento, equidista de los extremos del segmanto.
- t : Si $x + 3 = 0$, entonces $x = -3$.

Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

1) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge \neg t$

2) $[(p \longleftrightarrow q) \rightarrow \neg r \wedge t] \vee (p \vee r)$

1.1.15 Si tenemos las proposiciones $p(x) : x^2 - 16 = 0$, $q(x) : x - 12 = 0$ y $r(x) : x^2 > 9$. Hallar el valor de verdad de

1) $[p(2) \wedge \neg q(2)] \longleftrightarrow r(4)$.

2) $[\neg p(4) \rightarrow r(5)] \vee \neg q(4)$.

3) $[(p(1) \wedge p(3)) \longleftrightarrow (r(2) \vee p(3))] \rightarrow [\neg(p(2) \vee q(2))]$.

1.1.16 Construir la tabla de verdad de las siguientes proposiciones.

1) $(p \longleftrightarrow \neg q) \longleftrightarrow (q \rightarrow p)$.

2) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q)$.

3) $[(p \vee \neg r) \wedge (p \vee r)] \wedge [(q \rightarrow p) \wedge (q \vee p)]$.

1.1.17 Determine, con base en tablas de verdad, si cada una de las propiedades que se enuncian es una tautología, una contradicción o una contingencia.

1) $(P \rightarrow Q) \longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$

2) $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \neg Q)$

3) $(P \rightarrow Q) \longleftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

4) $((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow P$

1.1.18 Use una tabla de verdad para determinar si es una tautología

1) $y \vee (z \rightarrow y)$

2) $[a \rightarrow (\neg b)] \vee (a \wedge b)$

3) $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (r \rightarrow q)$

1.1.19 Use una tabla de verdad para determinar si las siguientes proposiciones son equivalentes

1) $\neg(p \vee q)$ y $(\neg p) \wedge (\neg q)$

2) $x \wedge (y \vee z)$ y $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

3) $\neg [p \wedge (q \rightarrow r)]$ y $(p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (\neg r)]$

1.1.20 Determine el valor de la proposición:

$$\text{Si } 5+4=11\,,\text{ entonces } 6+6=12$$

1.1.21 Construir la tabla de verdad de la siguiente proposición:

$$\neg\,[\neg\,[p \vee (\neg q \rightarrow p)]] \vee (q \wedge \neg p)$$

1.1.22 Determinar si la proposición $[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ es una tautología.

1.2 Cuantificadores

1.2.1 Simbolice la proposición existencial o universal

1) Algunas aves no pueden volar
2) Un día en 1998 cayó nieve en el Irazú.
3) En todos los triángulos la suma de los ángulos es 180°.
4) Para cada $y \in \mathbb{R}$ existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^2 = y$.
5) Para cada número real x existe un número real y mayor que x.
6) Existe un número real y mayor que todos los números reales x.

1.2.2 Determine si la implicación es verdadera o falsa, enuncie su recíproco y determine si es verdadero o falso

1) Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ entonces $x^2 > 0$.
2) Para que exista $1/n$ se necesita que $n \neq 0$.
3) Si $t = 3$ o $t = -3$ entonces $t^2 = 9$ (donde t es un número real).
4) Si todos los cuadrados son restángulos, todos los triángulos son redondos.

1.2.3 Determine el valor lógico de las siguientes proposiciones,

1) $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0$
2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\,[x + y = 7]$.

1.2.4 De las siguientes proposiciones, hallar el valor de verdad.

1) $(\forall x \in \mathbb{R} : |x| = x) \land (\exists x \in \mathbb{R} : x + 1 \nless x)$.

2) $(\forall x \in \mathbb{R} : x^3 = x) \longrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : 2x = x)$.

1.2.5 Negar las siguientes proposiciones.

1) $\exists x : x + 7 < y$.

2) $\forall x : p(x) \land \exists y : q(y)$.

3) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = x$.

4) $(\exists y)\,[p(x)] \longrightarrow (\forall x)(\neg q(x))$.

5) $(\exists x)\,[\neg p(x)] \lor (\forall x)\,[q(x)]$.

1.2.6 Considere el siguiente razonamiento:

> Para cada x e y, si x es mayor que y, entonces no ocurre que y sea mayor que x. Dos es mayor que uno. Por tanto, no ocurre que uno sea mayor que dos.

Utilice cuantificadores y el método de demostración directa para probar su validez.

1.3 Inferencias Lógicas

1.3.1 Demuestre

1) $$\begin{array}{ll} 1. & x \land z \\ 2. & (\neg x) \lor y \\ \hline & y \lor (\neg z) \end{array}$$

2) $$\begin{array}{ll} 1. & p \lor q \\ 2. & q \longrightarrow r \\ 3. & \neg r \\ \hline & p \end{array}$$

3) $$\begin{array}{ll} 1. & (a \lor d) \longrightarrow (\neg c) \\ 2. & c \land b \\ \hline & \neg d \end{array}$$

1.3.2 Construir una prueba formal de la validez para cada uno de los argumentos siguientes:

1) Demostrar Q si

   (1.) $M \rightarrow N$
   (2.) $N \rightarrow O$
   (3.) $(M \rightarrow O) \rightarrow (N \rightarrow P)$
   (4.) $(M \rightarrow P) \rightarrow Q$

2) Demostrar $T \vee S$ si

   (1.) $Q \vee T$
   (2.) $Q \rightarrow R$
   (3.) $\neg R$

1.3.3 Deducir t a partir de las siguientes premisas:
$(p \wedge q) \rightarrow r, \quad \neg(q \rightarrow r), \quad s \vee p, \quad s \rightarrow t.$

1.3.4 Analice el siguiente razonamiento y establezca su validez.

Si la ballena es un mamifero, entonces toma oxígeno del aire. Si toma su oxígeno del aire, entonces no necesita branquias. La ballena es un mamífero y vive en el oceano. Por lo tanto no necesita Branquias.

1.3.5 Estudie la validez del siguiente argumento:

Si sigue lloviendo, entonces el río se crece. Si sigue lloviendo y el río se crece, entonces el puente será arrastrado por las aguas. Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado por las aguas, entonces no será suficiente un solo camino para toda la ciudad. O bien un solo camino es suficiente para toda la ciudad o bien los ingenieros han cometido un error. Por tanto, los ingenieros han cometido un error.

1.3.6 Demostrar $T \wedge S$ a partir de las siguientes premisas:

(1) $E \rightarrow S$

(2) $\neg T \rightarrow \neg J$

(3) $E \wedge J$

1.3.7 Demostrar que $x < 4 \;$ y $\; y < 6$ si se satisfacen las siguientes premisas:

(1) $P: \; x + 2 < 6 \Rightarrow x < 4$

(2) $Q: \; y < 6 \vee x + y \nless 10$

(3) $R: \; x + y < 10 \wedge x + 2 < 6$

1.3.8 Demostrar $x^2 = 9$ si se cumple:

(1) $x = 3 \longrightarrow 2x^2 = 18$

(2) $x = 3 \vee x = -3$

(3) $x = -3 \longrightarrow 2x^2 = 18$

(4) $2x^2 = 18 \longrightarrow x^2 = 9$

1.3.9 La demostración de $\neg p$ corresponde a las leyes de lógica y las reglas de inferencia siguientes, indique cada una.

(1) $\neg(p \wedge q)$

(2) $\neg q \longrightarrow r$

(3) $s \longrightarrow \neg r$

(4) $\neg s \longrightarrow \neg(p \vee \neg q)$

(5) $\neg p \vee \neg q$

(6) $\neg s \vee \neg r$

(7) $\neg r \longrightarrow q$

(8) $\neg(p \vee \neg q) \vee q$

(9) $(\neg p \wedge q) \vee q$

(10) q

1.3.10 Demostrar $D \longrightarrow C$ a partir de las premisas:

(1) $A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$

(2) $D \longrightarrow A$

(3) B

(4) D

1.3.11 En cada caso, demuestre cada proposición a partir de las premisas dadas. Justifique cada paso.

1)
$$\begin{array}{ll} (1) & (\neg p \vee \neg q) \longrightarrow (r \wedge s) \\ (2) & r \longrightarrow t \\ (3) & \neg t \\ \hline & \therefore p \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{ll}
(1) & (R \vee Q) \rightarrow \neg T \\
(2) & \neg Q \vee R \\
(3) & P \vee Q \\
(4) & P \rightarrow (R \wedge S) \\
\hline
 & \therefore \neg(T \wedge \neg U)
\end{array}$$

Capítulo 2

Límites

2.1 Conceptos básicos

2.1.1 Determine, a partir del gráfico dado, los siguientes límites.

1) $\lim\limits_{t\to 3^+} g(t)$

2) $\lim\limits_{t\to -1^-} g(t)$

3) $\lim\limits_{t\to -1^+} g(t)$

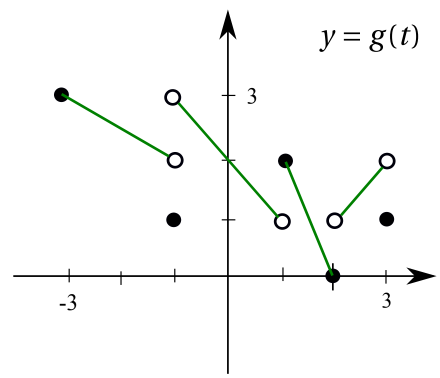
4) $\lim\limits_{t\to 1^-} g(t)$

5) $\lim\limits_{t\to 1^+} g(t)$

6) $\lim\limits_{t\to 2^-} g(t)$

7) $\lim\limits_{t\to 2^+} g(t)$

8) $\lim\limits_{t\to 3^-} g(t)$

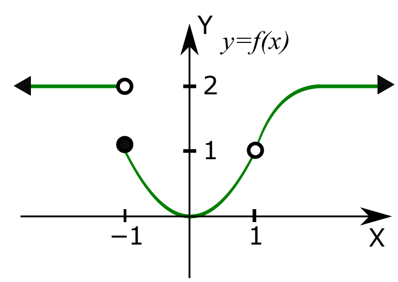


1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

4) $\lim\limits_{t\to 1^-} f(x)$



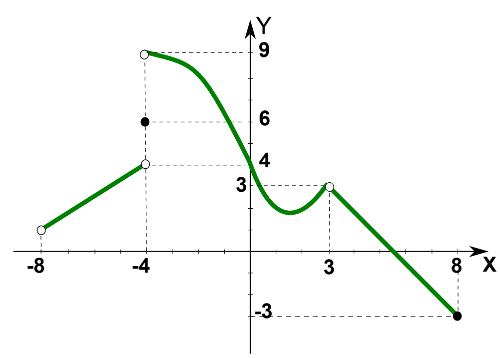
1) $\lim\limits_{x\to -8} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

4) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

5) $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$



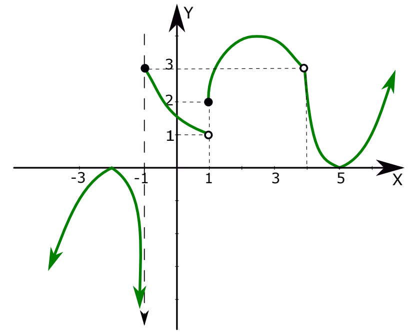
1) $\lim\limits_{x \to -2} h(x)$

2) $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$

3) $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$

4) $\lim\limits_{x \to 4} h(x)$

5) $\lim\limits_{x \to 5} h(x)$



1) $\lim\limits_{x \to -4} m(x)$

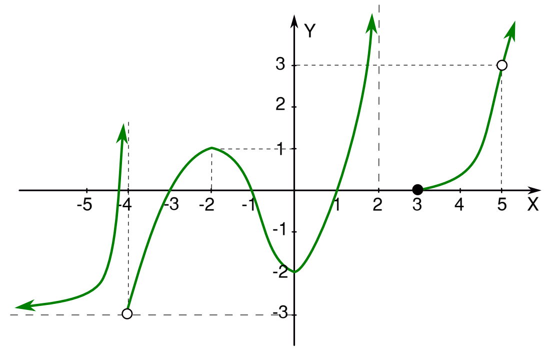
2) $\lim\limits_{x \to -2} m(x)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} m(x)$

4) $\lim\limits_{x \to 2} m(x)$

5) $\lim\limits_{x \to 3} m(x)$

6) $\lim\limits_{x \to 5} m(x)$



2.2 Preguntas sobre conceptos teóricos

2.2.1 Las siguientes preguntas evalúan conceptos teóricos.

1) ¿ Bajo que condiciones se satisface que $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \dfrac{x-2}{x+3}$?.

2) ¿Porqué es correcto afirmar que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-2}{x+3}$?

3) Sea f una función tal que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$, ¿ es posible que $f(3) = 5$?. Justifique su respuesta.

4) Considere la función $g : \mathbb{R} - \{-2, -3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x^2}{(x+2)(x+3)} & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

determine para cuáles reales, el límite existe.

5) Muestre por medio de un ejemplo que $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ puede existir aunque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existan.

6) Considere las funciones $f(x)=\dfrac{(x-1)}{|x-1|}$ y $g(x)=\dfrac{|x-1|}{(x-1)}$

   a) Verifique (analizando límites reales) que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ no existen.

   b) Verifique que $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)]=1$

   Nota: Este ejercicio muestra que $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)]$ puede existir aunque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existan.

7) Determine el o los valores de a de modo que $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exista.

8) Determine el valor de k de modo que $\lim\limits_{x\to k^-}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2k+1}{4x^2-1}}=0$

9) Encuentre los números reales a y b tales que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$

10) Sean f y g funciones tales que $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=2$ y $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=1$. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ y $\lim\limits_{x\to a}[g(x)]$ existen. Determine el valor de $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$.

2.2.2 Considere $g(x)=\begin{cases} x^2-5 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x+2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 4x^2+2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Calcule

1) $g(-1)$

2) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

5) $g(1)$

6) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

7) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

8) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

9) $g(0)$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

11) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

12) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

2.3 Cálculo de límites en un punto

Inmediatos, forma "$\frac{0}{0}$" y otros

2.3.1 Simplifique la expresión y calcule su límite

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 5x - 3x^2 - 15}$

2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x - x^2}{1 + \sqrt{1 + x}}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$

4) $\lim\limits_{b \to a^2} \dfrac{a^3 - b - ab + a^2}{2a^3 - 2ab + b - a^2}$

5) $\lim\limits_{w \to a} \dfrac{2w^3 - 4aw^2 + 2a^2w}{w^4 + aw^3 - 2a^2w^2}$

6) $\lim\limits_{t \to \frac{5}{2}} \dfrac{4 - \sqrt{2t + 11}}{2t - 5}$

7) $\lim\limits_{p \to 1} \dfrac{p^3 + p^2 - 2}{2 - \sqrt{p + 3}}$

8) $\lim\limits_{t \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5 + t}}{1 - \sqrt{5 - t}}$

9) $\lim\limits_{w \to -1} \dfrac{w + 1}{3w + \sqrt{6w^2 + 3}}$

10) $\lim\limits_{a \to 1} \dfrac{\sqrt{1 + 8a} - 3}{\sqrt{4a} - 2}$

11) $\lim\limits_{d \to -1} \dfrac{\sqrt{3d^2 - 5d - 2} - \sqrt{1 - 5d}}{\sqrt{d^2 - d} - \sqrt{3 - d^2}}$

12) $\lim\limits_{t \to -1} \dfrac{t^2 + t}{\sqrt[3]{2t + 1} + \sqrt[3]{t + 2}}$

13) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$

14) $\lim\limits_{y \to 4} \dfrac{\sqrt{y} - |2 - y|}{y - 4}$

15) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{5z + 1} - \sqrt[4]{5z + 1}}{z}$

16) $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{2 - \sqrt[6]{3a + 64}}{5a}$

17) $\lim\limits_{y \to 32} \dfrac{\sqrt[5]{y^2} - 3 \cdot \sqrt[5]{y} + 2}{y - 4 \cdot \sqrt[5]{y^3}}$

18) $\lim\limits_{p \to -1} \dfrac{p + 2}{\ln(p + 2)}$

19) $\lim\limits_{z \to \left(\frac{2}{3}\right)^+} \dfrac{|-3z + 2|}{18z^2 - 8}$

20) $\lim\limits_{p \to -2} \dfrac{1 - \sqrt{p + 3}}{(p + 2)^2}$

21) $\lim\limits_{y \to 2} \dfrac{\sqrt[4]{5 - 2y} - 1}{1 + \sqrt[3]{2y - 5}}$

22) $\lim\limits_{x \to -2} 2.1^{(|x| - 2)/(x + 2)}$

23) $\lim\limits_{y \to 5} \dfrac{2 - \sqrt[4]{4y - 4}}{\sqrt{y - 1} - 2}$

24) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + ct} - 1}{t}$

25) $\lim\limits_{x\to 3^-} (2)^{\dfrac{-x-3}{\ln(x-2)}}$

26) $\lim\limits_{x\to -4^-} \left(\dfrac{1}{7}\right)^{\dfrac{5}{4+x}}$

27) $\lim\limits_{b\to -1} \left(\dfrac{5}{4}\right)^{\dfrac{|b|-1}{b+1}}$

28) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\dfrac{-5}{\ln(3-x)}}$

29) $\lim\limits_{x\to 3} (5)^{\dfrac{1}{x-3}}$

30) $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln\left(\dfrac{x}{-2+x}\right)$

31) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2t-1}{t^2-t^4}$

32) $\lim\limits_{h\to -3} \dfrac{1}{h^2-9}$

33) $\lim\limits_{y\to 5} \dfrac{1}{y} - \dfrac{2-y}{(5-y)^2}$

34) $\lim\limits_{y\to 4^+} \left(\dfrac{3}{7}\right)^{\dfrac{2^y-1}{-4\ln(5-y)}}$

35) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[4]{(x+2)^4}}{|(x+1)^2-1|}$

36) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{1+\sqrt[5]{x-2}}$

37) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\dfrac{-\pi}{\pi-x}} + 2007}{\dfrac{1}{\ln(\pi+1-x)}}$

Trigonométricos

2.3.2 Calcule

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x\operatorname{sen} x}{\cos x-1}$

2) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t-\operatorname{sen}(2t)}{t+\operatorname{sen}(3t)}$

3) $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{1-\cos^3 n}{\operatorname{sen}^2 n}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

5) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\tan y-\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen}^3 y}$

6) $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos a}}{\operatorname{sen}^2 a}$

7) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sec(2z)\cdot\tan(3z)}{4z}$

8) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sec y-1}{y^3\csc y}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x+x^2\cos x}{x\tan x}$

10) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\tan(3z)}{8z\cos z}$

11) $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{4}{\operatorname{sen}(3x-3)}\right)$

12) $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z - \tan z}{z^2 \cdot \operatorname{sen}(2z)}$

13) $\displaystyle \lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2\cos(2t)-2}$

14) $\displaystyle \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{7}{\tan(x)}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(2x-3\pi)}{2x-\pi}\right]$

15) $\displaystyle \lim_{t\to -4\pi/3} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$

16) $\displaystyle \lim_{w\to \pi/4} \frac{\operatorname{sen} w - \cos w}{1-\tan w}$

17) $\displaystyle \lim_{x\to \pi/2} \frac{\cot x \ \cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

18) $\displaystyle \lim_{\beta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5\beta}{\beta}$

19) $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{5\operatorname{sen}^2(3z)}{2z^2}$

20) $\displaystyle \lim_{u\to 0^+} \frac{\sqrt{u}}{\operatorname{sen} u}$

21) $\displaystyle \lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{\operatorname{sen}(\pi y)}$

22) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{7}\right)^{\cot|x|}$

23) $\displaystyle \lim_{\alpha\to \pi} \frac{1-\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\pi-\alpha}$

24) $\displaystyle \lim_{x\to -\pi/6} \frac{\tan(x+\pi/6)}{6x+\pi}$

25) $\displaystyle \lim_{\beta\to 5\pi/6} 3\operatorname{sen}\beta - 2\cos\beta$

26) $\displaystyle \lim_{\beta\to \pi/2} \operatorname{sen}(\cos\beta)\sec^2\beta$

27) $\displaystyle \lim_{w\to 0} \left(\frac{\sec(w)-1}{w^2\csc(w)}\right)$

28) $\displaystyle \lim_{u\to a} \frac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} a}{u-a}$ con a constante

29) $\displaystyle \lim_{u\to a} \frac{\cos u - \cos a}{u-a}$ con a constante

2.4 Cálculo de límites al infinito

Conceptos Básicos

2.4.1 Considere las funciones siguientes y sus representaciones gráfica. En cada caso, y si existen, determine a partir de la gráfica los límites, o los valores de la función, que se indican.

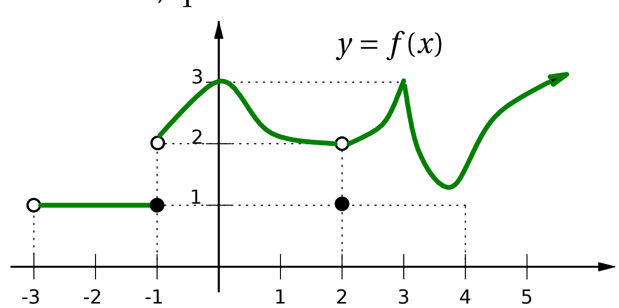
1) *a*) $\displaystyle \lim_{x\to -3^+} f(x)$

b) $\displaystyle \lim_{x\to -1} f(x)$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 2} f(x)$

d) $f(-1)$; $f(2)$

e) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} f(x)$



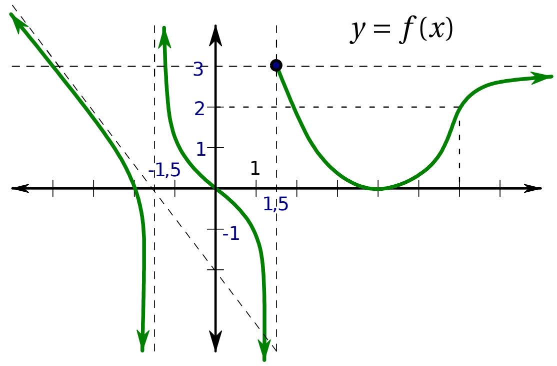
2) *a*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-3/2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to3/2} f(x)$

d) $f(3/2)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



3) *a*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$

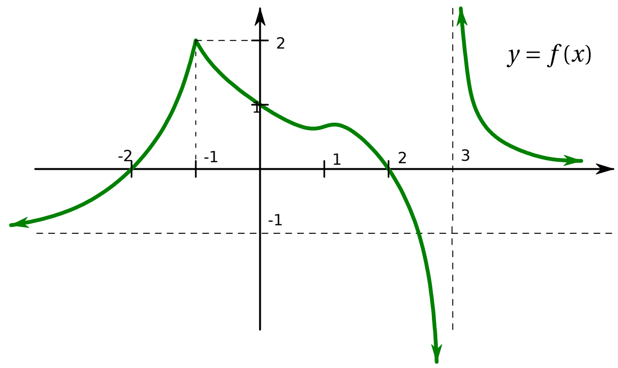
c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



4) *a*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

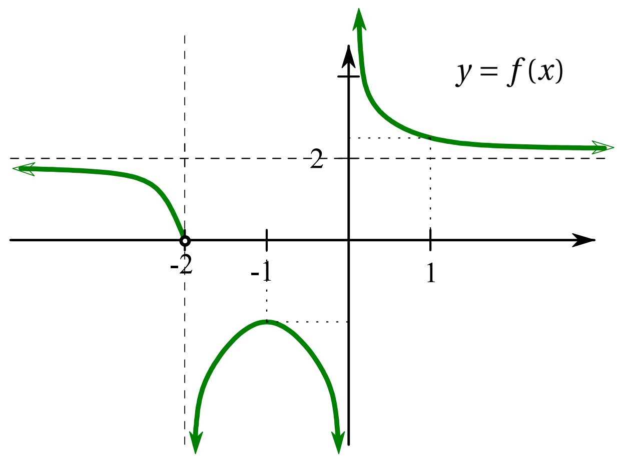
b) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



5) *a*) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-3} g(x)$

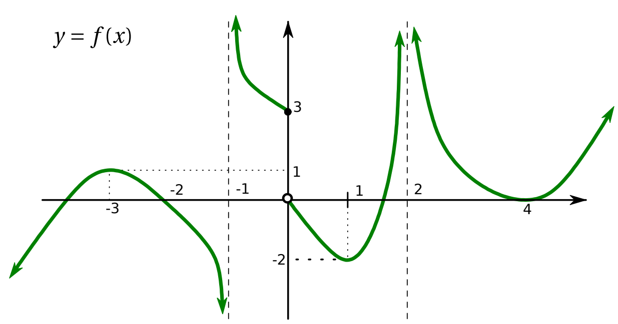
c) $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to0} g(x)$

e) $\lim\limits_{x\to1} g(x)$

f) $\lim\limits_{x\to2} g(x)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$



6) *a*) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

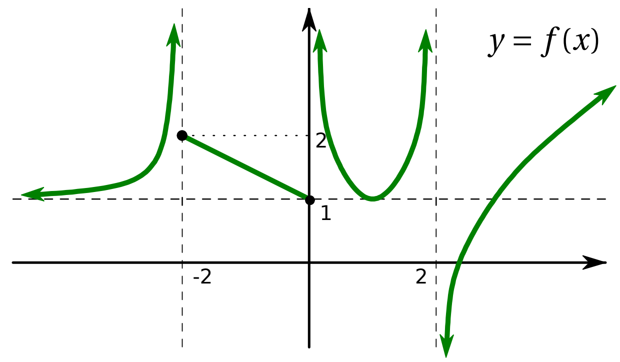
d) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

g) $f(-2)$

h) $f(0)$



2.4.2 Para cada uno de los siguientes casos, construya la gráfica de una función f que cumpla simultáneamente las condiciones dadas.

1) *a*) $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

b) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$

d) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$

h) $f(0) = 0$

---

2) *a*) $D_f = \mathbb{R} -]0, 1]$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2$

f) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

h) $f(-1) = f(3) = 0$

i) $f(0) < 0$

---

3) *a*) $D_f = [-3, +\infty[$

b) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 1$

c) $f(x) \neq 0, \forall x \in]0, +\infty[$

d) $f(x) = 2, \forall x \in [-1, 1]$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

f) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$

g) $f(-3) = f(3) = -1$

h) $\lim\limits_{x\to -1}$ no existe.

i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe

j) $\forall x_0 \in [0,+\infty[$

---

4) *a*) $D_f =]-3,+\infty[- \{-2,3\}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -2^-} h(x) = 4$

d) $\lim\limits_{x\to -2^+} h(x) = 5$

e) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = -\infty$

Cálculo de límites al infinito

2.4.3 Calcule cada uno de los límites siguientes

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$

2) $\lim\limits_{y\to -\infty} \dfrac{y^3-2y+1}{y-5} + \dfrac{y^2+6}{y^2-y}$

3) $\lim\limits_{r\to -\infty} \dfrac{3r+2}{\sqrt{4r^2-r+1}}$

4) $\lim\limits_{q\to \infty} \dfrac{e^q-e^{-q}}{2}$

5) $\lim\limits_{t\to \infty} \ln(t^2-4) - \ln(4t^2+1)$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{2^x+4^x}{3^x-5^x} + \dfrac{|x+1|-1}{x}\right]$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x+3}{-x^3+1}$

9) $\lim\limits_{z\to +\infty} \dfrac{3z^2-5z+1}{\sqrt[3]{z^6+1}-z}$

10) $\lim\limits_{b\to +\infty} \left(\dfrac{b^2}{3b+x} - \dfrac{b^3}{3b^2-4}\right)$

11) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1}{2x^{\frac{4}{3}}+2x-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^5}}$

12) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{4x^2-6}-\sqrt{4x^2-x}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^5+3x^7}{2x^8}$

14) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}+x\right)$

15) $\lim\limits_{x\to +\infty} (e)^{\frac{x^2+x-2}{4x^3-1}}$

16) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\dfrac{x^2+5x+6}{x+1}}$

17) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{\dfrac{35}{\ln(x-6)}}$

18) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{9x^2+1}-3x$

2.5 Continuidad

2.5.1 Determine si la función es continua en el valor dado de $c = -1$ si

$$g(x) = \begin{cases} 8x - 5 & \text{si} \quad x < -1 \\ 10x - 2x^2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

2.5.2 Determine el conjunto de valores de la variable donde la función es continua

1) $r(t) = \begin{cases} 6 - t & \text{si} \quad t < -2 \\ 10 + t & \text{si} \quad -2 \geq t < 1 \\ 5 + 6t & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$

2) $h(y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 - 1}{y - 1} & \text{si} \quad y < -1 \\ \dfrac{1}{y^2 - 4} & \text{si} \quad -1 < y < 3 \\ \dfrac{2y^2 - 9y + 4}{y^2 - 3y - 4} & \text{si} \quad y \geq 3 \end{cases}$

2.5.3 Encuentre los valores de a y b para que la función sea continua en $\mathbb{R}$

1) $g(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad t \leq -1 \\ at + b & \text{si} \quad -1 < t \leq 3 \\ -2 & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$

2) $r(u) = \begin{cases} u + 1 & \text{si} \quad u \leq 0 \\ u^2 + a & \text{si} \quad 0 < u \leq b \\ 7 - u & \text{si} \quad u > b \end{cases}$

2.5.4 A continuación se presentan ciertas afirmaciones, determine si cada una de ellas es verdadera o falsa, justicando su respuesta.

1) Sea f una función tal que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe, entonces necesariamente f debe estar definida en $x = 1$.

2) Sean f y g funciones, si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe, necesariamente $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

3) El límite $\lim_{x\to 3} \dfrac{(a+1)(x-3)}{|3-x|}$ existe únicamente si $a = -1$.

4) Sea g una función continua en $\mathbb{R}$, si $\lim_{x\to 2} g(x) = 5$, entonces puede darse que $g(2) \neq 5$

5) Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x+4)}{2x+8} & \text{si } x < -4 \\ \dfrac{\sqrt{(x+8)}}{4} & \text{si } x > -4 \end{cases}$ entonces

i. El límite $\lim_{x\to -4} f(x)$ existe

ii. f es continua en $x = -4$

2.5.5 Considere la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si } x \neq \pm 1 \\ m & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

¿ Es f continua en $x = -1$?. ¿Cuánto debe valer m para que f sea continua en $x = 1$?

2.5.6 Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^2+5 & \text{si } x \leq k \\ x^2+9 & \text{si } x > k \end{cases}$

Determine el o los valores de k, de modo que f sea continua en $\mathbb{R}$.

2.5.7 Para cada una de las siguientes funciones, halle el valor de a y b para que la función correspondiente sea continua en el valor de x que se indica.

a) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{ax} & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{ax}}{b} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

b) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{a} & \text{si } x < 1 \\ b & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{a^2x-1}{1+a} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$.

2.5.8 Considere las siguientes funciones:

$g(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x < 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \\ 2ax+3b & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y $f(x) = \begin{cases} cx^2+4 & \text{si } x < 6 \\ cx+b & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$

Determine condiciones suficientes para a, b y c; para que la función $f \circ g$ sea continua en $x = 2$.

2.5.9 Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ que cumple:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = 6 \quad \text{y} \quad f(x) = 0 \ \text{si y solo si} \quad x = 2$$

Considere la función: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{a \cdot f(x)}{x^2 - 5x + 6} + 4x & \text{si} \quad x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad x = 2 \\ \dfrac{b \cdot \operatorname{sen}(x-2)}{f(x)} + a & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Determine el valor de a y b para que g sea continua en $\mathbb{R}$.

2.5.10 Para cada una de las siguientes funciones, determine si es continua en todos los reales.

1) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \\ -x + e + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

4) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

2.5.11 Determine los valores de a y c (si es posible) de modo que f sea continua:

1) $f(x) = \begin{cases} x + 2c & \text{si} \quad x < -2 \\ 3ax + a & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2a & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ a & \text{si} \quad x = 1 \\ x^2 + a & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} -3 \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + c & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Capítulo 3

Derivada de una función

3.1 Derivadas por definición

3.1.1 Use la definición para calcular la derivada de f.

1) $f(x) = 1 - 3x + x^2$ en $x = -6$

2) $f(v) = \dfrac{2v+3}{v-4}$ en $v = 3$

3) $f(v) = \sqrt{v+3}$ en $v = 1$

4) $f(y) = \sqrt{2y^2 - 5}$ en $y = 2$

5) $f(x) = 5\cos(x - \pi)$ en $x = \pi$

6) $f(r) = \operatorname{sen} r - 3\cos r$ en $r = \pi/3$

7) $g(x) = cx^2 + bx + 1$

8) $h(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}}$

9) $g(x) = x + \sqrt{x}$

10) $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

3.2 Cálculo de derivadas

3.2.1 Calcule la derivada de las siguientes funciones

1) $f(x) = 2x^8 - 3x^5 + 5$

2) $f(x) = 3x^{4/3} - 6x^{2/3} - 2$

3) $g(z) = \sqrt{z} - \dfrac{1}{\sqrt{z}}$

4) $h(z) = 3z + \dfrac{1}{z} - \dfrac{2}{z^2} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{z}}$

5) $f(s) = \left(s^2 + s + 1\right)\left(s^2 + 2\right)$

6) $f(v) = \left(v^2 + 2v\right)(v+1) - 6v^2 + 5$

7) $f(y) = \dfrac{6\sqrt{y^5} - 9\sqrt{y}}{3\sqrt{y^3}}$

8) $f(t) = \dfrac{40t^5 - t^3\sqrt{t}}{5t^2\sqrt{t}}$

9) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

10) $f(t) = t^2 - \sqrt{3} + \dfrac{1}{3-t}$

11) $f(r) = \dfrac{\operatorname{sen} r}{1+r} - \dfrac{\cos r}{1-r}$

12) $f(u) = (2u-5)\,\dfrac{u+1}{u+2}$

13) $f(p) = (1-2p)(3p+2)\left(p^2+1\right)$

14) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}\left(1 - \dfrac{3}{x+1}\right)$

15) $f(t) = \dfrac{4 - \dfrac{1}{1-t}}{t-2}$

16) $f(u) = \dfrac{u+1}{u-1} \cdot \dfrac{u^2+2}{5+u}$

17) $f(r) = \dfrac{(4r+6)(2+3r)}{r(1-2r)}$

18) $g(x) = 2x^{-2} \arctan x$

19) $g(x) = (\arccos x)(\operatorname{arc\,sen} x)$

20) $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

21) $f(u) = \dfrac{1+\ln u}{1-\ln u}$

22) $f(u) = \dfrac{u \ln u}{1-e^u}$

23) $f(z) = \sqrt[3]{z}\, \ln z$

24) $g(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

25) $g(t) = \dfrac{\ln t}{t+1}$

26) $h(x) = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

27) $h(z) = \dfrac{e^z}{\arccos z}$

28) $h(z) = \dfrac{\operatorname{arc\,cot} z}{\sqrt{z}}$

3.3 Regla de la cadena

3.3.1 Calcule la derivada de las siguientes funciones

1) $f(y) = \left[\left(y^2+3\right)^4 - 1\right]^3$

2) $f(\theta) = \operatorname{sen}(5\theta)\sec^2(5\theta)$

3) $f(x) = \left(\dfrac{x-7}{x+2}\right)^3$

4) $f(t) = \dfrac{3t^4}{\sqrt{t^2-5t}}$

5) $f(x) = \dfrac{\tan^3(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + 2}$

6) $f(x) = e^{2x^2-5x+3}$

7) $f(q) = \left(q - 3e^{q/3}\right)^5$

8) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

9) $f(x) = \ln\left(t\sqrt{t^2+1}\right)$

10) $f(p) = \ln\left[\dfrac{\left(p^3-1\right)e^{-p^2}}{\sqrt{1-5p}}\right]$

11) $f(z) = \sqrt{1+\ln z} + \ln\left(1+\sqrt{z}\right)$

12) $f(x) = e^{3x} g\left(\ln^2 x\right)$, donde g es derivable.

13) $f(y) = \ln^2(2y+6)$

14) $f(z) = \ln^2\left[\ln\left(2z^3-8z\right)\right]$

15) $f(x) = \dfrac{e^x + \tan(x+1)}{\operatorname{sen}(2x)}$

16) $f(w) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{w-1}}{w^3\cos\left(w^2\right)}\right)$

17) $h(z) = \arccos^2\left(\dfrac{e^{-z}}{z}\right)$

18) $f(x) = \arctan^3(\ln(x^2+e^x))$

19) $h(x) = \ln(3^{g(x^3+4)}+1)$

20) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-2x^2}(x+3)}{(4x-1)^2}$

21) $f(v) = \sqrt{\dfrac{(v-1)^3}{(2v+7)(5-v)^2}}$

22) $f(t) = t^{\ln t}$

23) $f(w) = e^w w^{1-w}$

24) $g(z) = \sec\left(e^{1-2z}\right)$

25) $h(u) = e^{u\operatorname{sen}u} + \ln^3\left(3-2u^2\right)$

26) $h(u) = \cos^4\lfloor \operatorname{sen}\left(ku^3\right)\rfloor$

27) $g(u) = \ln^2(\operatorname{sen}u) + \ln\left(1-e^{2u}\right)$

28) $g(u) = \ln\left(\sec\left(u^3\right) + \tan\left(u^3\right)\right)$

3.3.2 Si f es una función derivable, obtenga la derivada de las siguientes funciones

1) $y = \dfrac{f(\ln z)}{ze^z}$

2) $y = f\left(e^{-u}\right)e^{f(u)}$

3) $y = f\left(w^{2n}\right) - [f(w)]^n$

4) $y = e^{4w} f\left(\ln^3 w\right)$

3.4 Valor Numérico

3.4.1 Calcule el valor numérico que se indica

1) $(f\cdot g)'(2)$, dado que $f(2) = -1$, $g(2) = 3$, $f'(2) = 1$ y $g'(2) = -2$

2) $h'(-1)$, dado que $h(x) = x^2p(x)$, $p(-1) = 4$ y $p'(-1) = 2$

3) $(f/g)'(5)$, dado que $f(5) = -2$, $g(5) = -1/2$, $f'(5) = 4$ y $g'(5) = 2$

4) $q'(4)$, dado que $q(x) = f(x)/\sqrt{x}$, $f(4) = -3$ y $f'(4) = 0$

5) Suponga que $f(5) = 4$, $g(5) = 2$, $f'(5) = -6$ y $g'(5) = 5$. Encuentre los valores de:

   a) $(f+g)'(5)$
   b) $(f\cdot g)'(5)$
   c) $(f/g)'(5)$
   d) $(g/f)'(5)$
   e) $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(5)$.

6) Dado que $q(6) = 2$, $p'(2) = -1$ y $q'(6) = 4$, determine: $(p\circ q)'(6)$.

7) Dado que $h(t) = \dfrac{f(3-t)}{t}$ donde f es alguna función con $f(1) = 3$ y $f'(1) = -1$, determine: $h'(2)$.

8) Dado que $h(x) = \sqrt{f\left(e^{x^2-x}\right)}$, $f(1) = 4$ y $f'(1) = 6$, determine: $h'(0)$.

9) Dado que $g(y) = \ln f(2^y)$, $f(1) = \ln 2$ y $f'(1) = -3$, determine: $g'(0)$.

10) Si $H(x) = f(g(x))$ donde $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ y $f'(6) = 7$, halle $H'(3)$.

11) Sean f y g funciones derivables. Si $H(x) = 2f(x)\ln(g(x))$, $g(x) > 0$, determine $H'(3)$ dado que $g(3) = e$, $g'(3) = -2$, $f(3) = 3$ y $f'(3) = 1/2$.

12) Sea g una función derivable tal que $g(1) = 3$ y $g'(1) = 2$. Determine:

   a) $F'(0)$ si $F(x) = g(e^{ax})\cdot e^{-ax}$, a constante real.

   b.) $H'(0)$ si $H(x) = [g(2^x)]^2\cdot 2^{-x}$.

13) Sea f una función derivable, entonces:

   a) Si $x[f(x)]^3 + xf(x) = 6$ y $f(3) = 1$, hallar $f'(3)$.

   b) Si $[g(x)]^2 + 12x = x^2g(x)$ y $g(4) = 12$, hallar $g'(4)$

14) Sean f y g funciones tales que $f(5) = 4$, $g(5) = 2$, $f'(5) = -6$ y $g'(5) = 5$. Determine $(f \cdot g)'(5)$ y $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(5)$.

15) Sea f una función derivable tal que $h(x) = x^2 f(x) + \dfrac{f(x)}{x}$. Si se sabe que $f(1) = 2$ y $h'(1) = 5$, encuentre $f'(1)$.

16) Sea f una función derivable tal que $x\,[f(x)]^3 + x f(x) = 6$ y $f(3) = 1$. Halle $f'(3)$.

3.5 Conceptos teóricos

3.5.1 Esta sección es para reforzar la teoría de derivación

1) Si f es una función derivable y g una función tal que $g(x) = x f(x)$, utilice la definición para demostrar que $g'(x) = f(x) + x f'(x)$.

2) Si f es una función derivable y g una función tal que $g(x) = 3f^2(x)$, utilice la definición para demostrar que $g'(x) = 6f(x)f'(x)$.

3) Encuentre una función f y un número real a tales que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$.

4) Suponga que f es una función que satisface la ecuación:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2 y + x y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Suponga también que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Encuentre $f(0)$, $f'(0)$ y $f'(x)$.

5) Suponga que la función $h(x)$ satisface $h'(x) = -x h(x)$. Muestre que la función $y = x h(x)$ satisface la ecuación:

$$xy' = \left(1 - x^2\right) y$$

6) Sea g una función continua que cumple $g'(x) = \dfrac{1}{x}$. Muestre que $y = \dfrac{1}{1 + x + g(x)}$ cumple la ecuación diferencial $xy' = y\,(y g(x) - 1)$.

7) Verifique que si $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right) - \arctan x$, entonces $f'(x) = 0$.

8) Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ para todo $x \neq 0$:

   a) Verifique que $f''(x) = f(x) \cdot \frac{1}{x^2}$.

   b) Hallar condiciones sobre a, b, c tales que $ax^2 \cdot f''(x) + bx \cdot f'(x) + c \cdot f(x) = 0$ donde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

9) Si f es una función tal que $f'(x) = e^{-2x}$ y $u = \ln\left(x^2\right)$, utilice la regla de la cadena para demostrar que $\frac{d}{dx}[f(u)] = \frac{2}{x^5}$.

10) Encuentre $f'(x)$ si se sabe que $\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$.

3.6 Derivación implícita

3.6.1 Calcule la derivada que se solicita.

1) $\frac{dz}{dx}$ en $(-3, 0)$, dado $x^2z + xz^2 = 3x + 9$.

2) $\frac{dx}{dt}$ en $(4, -4)$, dado $x + t + e^{x+t} = 1$

3) $\frac{dz}{dw}$, dado $z^2 = \ln(w + z)$

4) $\frac{dx}{dy}$, dado $4x\ln(2x + y) = 4$

3.6.2 Suponga que la ecuación $e^y = y^2 \cdot e^x$ define a y como función de x. Determine $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$. En ambos casos exprese su respuesta sólo en términos de y.

3.6.3 Sabiendo que las ecuaciones siguientes definen a y como función implícita de la variable x, obtenga y'.

1) $x^3 - \operatorname{sen} y + x\ln^2 y = ye^{2x}$

2) $x + \cos x + xy^2 = e^y$

3) $x + e^{xy} - y^3 - y = 3$

3.7 Derivación logarítmica

3.7.1 Calcule la primera derivada de cada una de las funciones siguientes:

1) $f(x) = (x+1)^{x^2}$

2) $g(x) = \sqrt{(2x)^x}$

3) $h(x) = \left(x^3 + x\right)^{3x-2}$

3.7.2 Utilice la derivación logarítmica para calcular la primera derivada de cada una de las funciones siguientes:

1) $y = \dfrac{(x+3)^2}{e^x \cos(x)}$

2) $h(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2\left(x^3-2\right)}{\left(5x^3+1\right)^2}$

3.8 Derivadas de orden superior

3.8.1 Calcule la derivada que se indica.

1) $\dfrac{d^3z}{dq^3}$ si $z = e^{1-4q}$

2) $\dfrac{d^2x}{ds^2}$ si $x = \dfrac{1-2s}{1+2s}$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en $(-1,4)$ si $x^2 - xy = 5$

4) y''' si $y = \dfrac{1-x}{1+x}$,

5) y'' si $y^3 + 3x + 7 = 6y$

6) y'' si $2y - y\ln y = 3x + 2$

3.9 Otros ejercicios

3.9.1 Una ecuación diferencial es aquella en que interviene una función desconocida y sus derivadas.
Resuelva los siguientes problemas relativos a ecuaciones diferenciales.

1) Considere la ecuación $f''(x)+4\cdot f'(x)+4\cdot f(x)=0$. Pruebe que $f(x)=(3x-5)e^{-2x}$ satisface la ecuación anterior.

2) Halle las constantes A, B y C tales que la función $y=Ax^2+Bx+C$ satisfaga la ecuación:

$$y''+y'-2y=x^2$$

3.9.2 Sea $F(x)=f(x)\cdot g(x)$, donde f y g tienen derivadas de todos los órdenes.

1) Demuestre que $F''(x)=f''(x)\cdot g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$.

2) Encuentre fórmulas similares para $F'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

3.9.3 Verifique que la función $y=e^{2x}+xe^{2x}$ satisface la ecuación $y''-4y'+4y=0$.

3.9.4 Verifique que la función $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\cos x+10e^{-x}$ satisface la ecuación $\frac{dy}{dx}+y=\operatorname{sen}x$.

3.9.5 Verifique que la función $g(x)=\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}$ satisface la siguiente igualdad:

$$g''(x)+\frac{2}{x}g'(x)=-\pi^2 g(x)$$

3.9.6 Pruebe que para $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ se cumple que $\left(4x^3+4x\right)y''=4y'\left(1-3x^2\right)$.

3.9.7 De un polinomio de tercer grado $Q(x)$ se sabe que $Q(1)=0$, $Q'(1)=2$, $Q''(1)=4$ y $Q'''(1)=12$. Calcular $Q(2)$ (Sugerencia: Sea $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$).

Capítulo 4

Aplicaciones de la derivada

4.1 Movimiento rectilíneo

4.1.1 Un objeto se lanza hacia arriba desde cierta altura, y t segundos después su altura, en metros, es $h(t) = 40 + 6t - 4,9t^2$.

1) Calcule su velocidad promedio durante el primer segundo.
2) Calcule su velocidad promedio durante el intervalo $[1, 2]$.
3) Calcule su velocidad promedio durante el intervalo $[1, 1.01]$.
4) ¿Cuál es su velocidad instantánea 1 s después de ser lanzado?
5) ¿Con qué velocidad golpea el suelo?

4.1.2 Una piedra se deja caer desde un puente de 150m de altura, y t segundos después su altura, en metros, es $h(t) = 150 - 4.9t^2$.

1) Calcule su velocidad promedio para $3 \leq t \leq 4$.
2) Calcule su velocidad promedio para $3 \leq t \leq 3.1$.
3) Calcule su velocidad promedio para $3 \leq t \leq 3.001$.
4) ¿Cuál es su velocidad instantánea a los tres segundos?
5) ¿Con qué velocidad golpea el suelo?

4.1.3 Un objeto se deja caer desde cierta altura h_0, en metros sobre el suelo, y t segundos después su altura, en metros, es $h(t) = h_0 - 4.9t^2$.Al caer al suelo su velocidad es de -15 m/s.¿Desde que altura se dejó caer?

4.1.4 Un automóvil se dirige hacia una pared. El conductor aplica los frenos y t segundos después la distancia entre el automóvil y la pared es $d(t) = 40 - 18t + 2t^2$.

1) ¿Cuál es la velocidad del automóvil t segundos después de aplicar los los frenos?
2) ¿Cuánto tiempo tardaría en deternerse si no choca antes?

3) ¿Cuánto tiempo tardaría en chocar con la pared si no se detiene antes?

4) ¿Chocará con la pared?

4.1.5 El espacio recorrido por un móvil viene dado por la ecuación $s(t) = 7t + 25$. Compruebe que la velocidad media es constante en cualquier intervalo.

4.2 Rectas tangentes y rectas normales

4.2.1 Encuentre la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva: $f(x) = 1 - x^2$, en el punto $(2, -3)$. Grafique la parábola y sus respectivas rectas tangente y la normal.

4.2.2 Encuentre una parábola que tenga la ecuación $f(x) = ax^2 + bx$, cuya recta tangente en el punto $(1, 1)$ tenga por ecuación $y = 3x - 2$.

4.2.3 ¿Para qué valores de a y b la recta $2x+y = b$ es tangente a la parábola $f(x) = ax^2$ cuando $x = 2$?

4.2.4 Verifique que la recta $y = -x$ es tangente a la curva con ecuación $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. Determine el o los puntos P de tangencia y encuentre la ecuación de la recta normal a la curva en el punto P.

4.2.5 Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva $f(x) = x \ln x$ que sea paralela a la recta $2x - 2y + 3 = 0$. ¿En cuál punto la gráfica de $f(x)$ posee una recta tangente horizontal?

4.2.6 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado: $w = \dfrac{1}{\sqrt{2u + 5}}$ en $u = -2$.

4.2.7 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ en $x = 8$.

2) $y = \operatorname{sen} x + 2 \cos x$ en $x = \pi/2$.

4.2.8 Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y = 4u^2 - 5u + 6$ es paralela a la recta con ecuación $y = 7u - 2$.

4.2.9 Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y = \dfrac{2x}{(3-x)^2}$ es paralela a la recta con ecuación $10x - y = 5$.

4.2.10 Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y = e^{u^2+2u}$ es horizontal.

4.2.11 Encuentre la ecuación de la recta tangente a $3x^2 + 5y^2 = 48$ en $(-1,3)$. (La ecuación anterior representa una elipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ donde a y b son los semiejes).

4.2.12 Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{6} = 0$ en $(3,-2)$.(la ecuación anterior representa una hipérbola).

4.2.13 Halle los puntos de la curva $f(x) = x^3 - 3x + 5$ en los que la recta tangente es perpendicular a la recta $y = -\dfrac{x}{9}$. ¿En cuáles puntos la gráfica de f posee rectas tangentes horizontales?

4.2.14 Determine la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto donde $x = 0$, donde su ecuación es $y = (2x+1)\left(x^2 + 3x + 1\right)^{1/(x+1)}$.

4.2.15 Sea $f(x) = \left(x^3 - 4x^2\right) g(x)$. Se sabe que la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y = g(x)$ en el punto de tangencia $(-2,5)$ es $y = \dfrac{x}{4} + 5$. Determine $f'(-2)$.

4.2.16 Sea $y = f(x)$ definida por $f(x) = x^2 + 3\ln(x+3)$. Determinar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$. Verificar que la curva tiene otra recta tangente paralela a la recta anterior y determinarla.

4.2.17 Sea $g(x) = [f(x)]^4$ donde f es una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$ y $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Calcule una ecuación para la recta tangente a la gráfica de g en $x = 1$.

4.2.18 Encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12,3)$.

4.2.19 Hallar la derivada de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \geq -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \end{cases}$

y, si existe, hallar la ecuación de la recta tangente en $x = -1$.

4.3 L'Hôpital y formas indeterminadas

4.3.1 Calcule cada uno de los límites siguientes e indique la forma indeterminada que se presenta.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sqrt{2}}{x}$

3) $\displaystyle\lim_{v\to \pi/2} \operatorname{sen}(\cos v)\sec v$

4) $\displaystyle\lim_{r\to 0^+} (e^r-1)\ln r$

5) $\displaystyle\lim_{r\to \pi/2} r\tan r-\frac{\pi}{2}\sec r$

6) $\displaystyle\lim_{q\to 0} q^{\left(\frac{3}{4+\ln q}\right)}$

7) $\displaystyle\lim_{t\to (\pi/2)^-} (\tan t)^{2t-\pi}$

8) $\displaystyle\lim_{\theta\to (\pi/2)^-} (\operatorname{sen}\theta)^{\sec\theta}$

9) $\displaystyle\lim_{n\to \infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$
con r y t constantes, $t>0$

10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^x-x}{\operatorname{sen}^2(2x)}$

11) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

12) $\displaystyle\lim_{z\to +\infty} \left(ze^{1/z}-z\right)$

13) $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^+} (x-\pi/2)^{\cos x}$

14) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

15) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos(3x)-e^{-x}}$

16) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\ln(2x-1)}$

17) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\operatorname{arc\,sen} x)(\csc x)$

18) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec x}\right)$

19) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x)$

20) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos(2x))^{1/x^2}$

21) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$

22) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x-\operatorname{sen} x}$

23) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(kx)+\tan(nx)}{\arctan(nx)}$, $n\neq 0$.

24) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \left(e^{2y}-y\right)^{y^{-1}}$

25) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{-1}{x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{x}\right)}$

26) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x-1)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{x-1}\right)$

27) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-(1+x)}{x^n}$, $n=1,2,3,\ldots$

4.4 Conceptos teóricos

4.4.1 Halle el error en los procedimientos siguientes:

1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2}$

2) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

4.4.2 Sean a, b y c constantes tales que $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + \operatorname{sen}(bx) + \operatorname{sen}(cx) + \operatorname{sen}(dx)}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$. Encuentre el valor de $a + b + c + d$.

4.4.3 ¿Para qué valores de a y b es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

.

4.4.4 ¿Para qué valor de a es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e$$

4.4.5 Sea $f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Verifique que f es continua en $x = 0$.

4.5 Tasas de cambio relacionadas

4.5.1 Resolver los siguientes problemas sobre tasas relacionadas:

1) Un hombre está parado en el borde de un muelle, remolcando hacia sí con una cuerda una lancha. Él recoje la cuerda a 40 cm/s, y sus manos se mantienen 2 m más altas que el punto en que la cuerda está atada a la lancha. ¿A qué velocidad se acerca la lancha al muelle cuando le faltan 3 m para llegar?

2) Una piedra cae en una laguna, creando una onda circular que cree centrada en el punto de contacto. El radio de la onda aumenta a 30 cm/s. ¿A qué velocidad crece el área del círculo encerrado por la onda cuando su radio es 1 m?

3) Una esfera de hielo se derrite de manera tal que su superficie decrece a 2 cm^2 por minuto. ¿A qué velocidad disminuye el radio de la esfera cuando es 15 cm?

4) Un tanque cónico tiene su vértice abajo, y mide 2 m de altura y 2 m de radio en la parte superior. Por su extremo inferior está saliendo agua a razón de 25 m^3 por segundo. Al mismo tiempo, al tanque le entra agua por su parte superior a una tasa constante de litros por segundo. Si el nivel de agua desciende a 5 m/s cuando es igual a un metro, ¿A qué tasa le está entrando agua al tanque?

5) Una canoa de desagüe mide tres metros de largo, y sus extremos son triángulos isósceles de 10 cm de altura y 10 cm de base, con su vértice hacia abajo. Si la canoa está recibiendo agua a 50 cm^3/s y esta agua no sale, ¿a qué velocidad aumenta el nivel del agua cuando ha alcanzado los 8 cm?

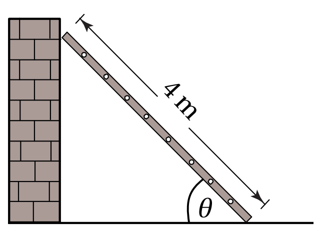
6) Una piscina mide 12 m de largo y 6 m de ancho. Su profundidad es 1.2 m en un estremo y 2.7 m en el otro extremo, aumentando en línea recta de un extremo al otro. Si se bombea agua en la piscina a 3 m^3 por minuto, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando es 1 m en el extremo más profundo?

7) Una escalera de 4 m de longitud está apoyada en una pared vertical. Su extremo inferior resbala, alejándose de la pared a 25 cm/s. ¿A qué velocidad aumenta el ángulo entre la pared y la escalera cuando el extremo superior está 2 m sobre el suelo?

8) Un avión vuela a una altura constante de 10 000 m sobre terreno horizontal, en linea recta y a velocidad constante. Un radar en tierra, delante del avión, percibe un ángulo de elevación que aumenta a 0.5° por segundo cuando el avión está a 14 km de distancia del radar. ¿Cuál es la velocidad del avión en kilómetros por hora?

9) De un tubo sale arena a razón de 16 dm^3/s. Si la arena forma una piramide cónica en el suelo cuya altura es siempre $\dfrac{1}{4}$ del diámetro de la base, ¿con qué rapidez aumenta la altura de la pirámide cuando tiene 4 dm de altura?

10) Una escalera de 4 m se apoya contra un muro y su base se comienza a resbalar. Cuando la base está a 3,7 m del muro, la base se aleja a razón de 1,5 m/s.



a. ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre el suelo y la parte superior de la escalera sobre el muro en ese instante?

b. ¿Cuál es la razón de cambio del área del triángulo formado por la escalera, el muro y el suelo en ese instante?

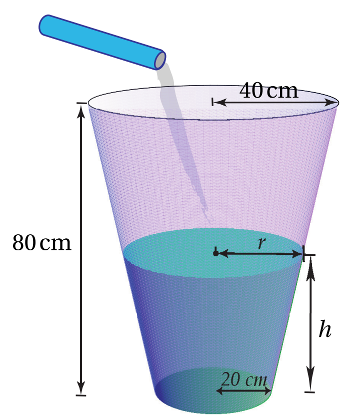
c. ¿Cuál es la razón de cambio del ángulo θ entre la escalera y el suelo en ese instante?

11) Una mujer, en un muelle, tira de un bote a razón de 15 m/min sirviéndose de una soga amarrada al bote a nivel de agua. Si las manos de la mujer se hallan a 4,8 m por arriba del nivel del agua, ¿con qué rapidéz el bote se aproxima al muelle cuando le falta por recoger 6 m de cuerda?

12) Un automóvil que se desplaza a razón de 9 m/s, se aproxima a un cruce. Cuando el auto está a 36 m de la intersección un camión que viaja a razón de 12 m/s cruza la intersección. El auto y el camión se encuentran en carreteras que forman un ángulo recto entre sí. ¿Con qué rapidez se separan 2s después de que el camión pasa dicho cruce?

13) Un avión vuela con velocidad constante, a una altura de 3000 m, en una trayectoria recta que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instante dado, el observador advierte que el ángulo de elevación del avión es de $\frac{\pi}{3}$ radianes y aumenta a razón de $\frac{1}{60}$ rad/s. Determine la velocidad del avión.

14) Se bombea agua a un tanque que tiene forma de cono truncado circular recto a una razón uniforme de 2 l/min (1 litro equivale a 1000 cm^3). El tanque tiene una altura de 80cm y radios inferior y superior de 20 cm y 40 cm, respectivamente.¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 30 cm?



Nota: El volumen V de un cono truncado circular recto de altura h y radios inferior y superior a y b, respectivamente, viene dado por: $V = \frac{h\pi}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

15) Una ardilla en la base de un árbol comienza a subirlo a razón de 2,5 m/s. Dos segundos después, un gato, situado a 36 m de la base del árbol, ve la ardilla y comienza correr hacia el árbol con una

rapidez de 3 m/s. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre el gato y la ardilla 4s después de iniciada la persecución?

16) Una granja tiene un tanque de agua de forma cónica (invertido), de radio 6 m y 15 m de altura. El tanque se encuentra vacío, por lo que el administrador de la granja enciende una bomba que vierte agua en el tanque a razón de 10 m^3/min, sin embargo no se percata de la existencia de un agujero en el fondo del tanque por donde se escapa el agua a razón de 0,5 m^3/min. Determine a qué razón varía el nivel del agua cuando la profundidad es de 8,28 m.

17) Un controlador aéreo sitúa dos aviones (A y B) a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto en el ángulo recto. El controlador detecta que el avión A viaja a 450 km/h y el avión B a 600 km/h.

    a. ¿A qué ritmo varía la distancia entre los dos aviones, cuando A y B están a 150 km y 200 km, respectivamente, del punto de convergencia?
    b. ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias distintas?

18) Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados positivos y su vértice opuesto al origen está sobre la curva $y = 2^x$. En este vértice, la coordenada y aumenta a razón de 1 unid/s. ¿A qué velocidad aumenta el área del rectángulo cuando $x = 2$?

4.6 Extremos, crecimiento, decrecimiento y concavidad.

4.6.1 Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Encuentre los valores de a y b tales que $f(1) = 3$ sea un valor extremo de f en $[0, 2]$. ¿Este valor es máximo o mínimo?

4.6.2 Determine los valores de a y b de modo que la función $f(x) = 3ax^2 \cdot e^{bx^2+1}$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$.

4.6.3 Halle una función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que alcance extremos relativos en los puntos $(-2, 3)$ y $(1, 0)$. Verifique que en $(-2, 3)$ se alcanza un máximo relativo y en $(1, 0)$ un mínimo relativo.

4.6.4 A continuación se presentan ciertas afirmaciones, determine si cada una de ellas es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

1) Sea f una función tal que $f'(c) = 0$, entonces necesariamente f tiene un máximo o un mínimo relativo en $x = c$.

2) Si f es una función continua en $[-1,1]$ y $f(-1) = f(1)$ entonces necesariamente existe un número real c tal que $-1 < c < 1$ y $f'(c) = 0$.

3) Si f es una función derivable en $[-1,1]$ y $f(-1) = f(1)$ entonces necesariamente existe un número real c tal que $-1 < c < 1$ y $f'(c) = 0$.

4) Si f es una función tal que $f''(x) = 0$ entonces necesariamente $(2, f(2))$es un punto de inflexión de la gráfica de f.

5) Si (a,b) es un punto de inflexión de la gráfica de f entonces necesariamente (a,b) no puede ser extremo relativo de la gráfica de f.

6) Se puede encontrar una función f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda $x \in D_f$.

7) No se puede encontrar una función f, continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) < 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

4.6.5 ¿Para qué valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + \dfrac{1}{24}x^2$ tiene:

1) ¿Dos puntos de inflexión?

2) ¿Un punto de inflexión?

3) ¿Ningún punto de inflexión?

4.6.6 Encuentre los números críticos de la función.

1) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

2) $f(x) = xe^{2x}$

4.6.7 Encuentre los extremos absolutos de la función en el intervalo dado.

1) $g(r) = -3r^4 + 4r^3 + 72r^2$ en $[-3,2]$.

2) $f(q) = \dfrac{q+1}{\sqrt{q^2+5}}$ en $[-2,2]$.

3) $f(y) = y\ln y - 2y$ en $[1,4]$.

4) $g(\theta) = \cos(4\theta)$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.

4.6.8 Encuentre los intervalos donde la función es creciente o decreciente, y los extremos locales.

1) $g(z)=5z^{2/3} + z^{5/3}$

2) $g(v)=\dfrac{v+1}{v^2+v+1}$

3) $f(p) = \dfrac{p^2 - 2p + 2}{p - 1}$

4) $h(x) = x^2 + e^{4-x^2}$

5) $h(t) = \ln\left(t^2 + 5\right)$

4.6.9 Determinar el valor de k que hace que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un único extremo relativo. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?

4.6.10 La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de derivada nula en $(1, 1)$ que no es extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c

4.7 Trazo de curvas

4.7.1 Encuentre las ecuaciones de todas las rectas asíntotas de cada una de las funciones siguientes:

1) $f(z) = \dfrac{2z + 3 - z^2}{2z^2 - 3z - 9}$

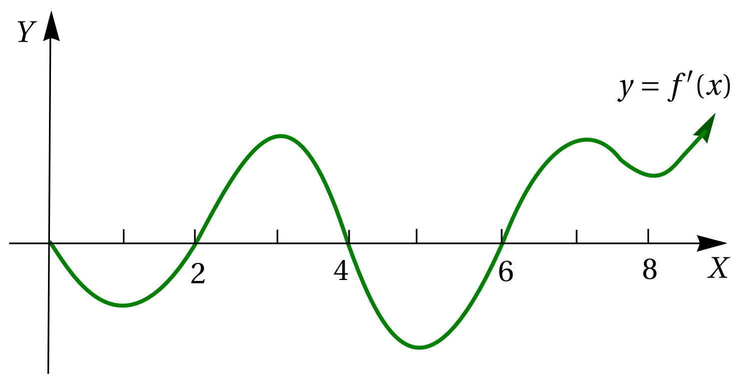
2) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x - 3}}$

3) $h(w) = \dfrac{e^w + 1}{e^w - 1}$

4) $g(u) = u - 2 + \dfrac{u^2}{u + 2}$

5) $f(x) = \dfrac{xe^x + 1}{e^x - 1}$

4.7.2 A continuación se muestra la gráfica de la primera derivada de f:



1) ¿En qué intervalos crece la función f? Explique.

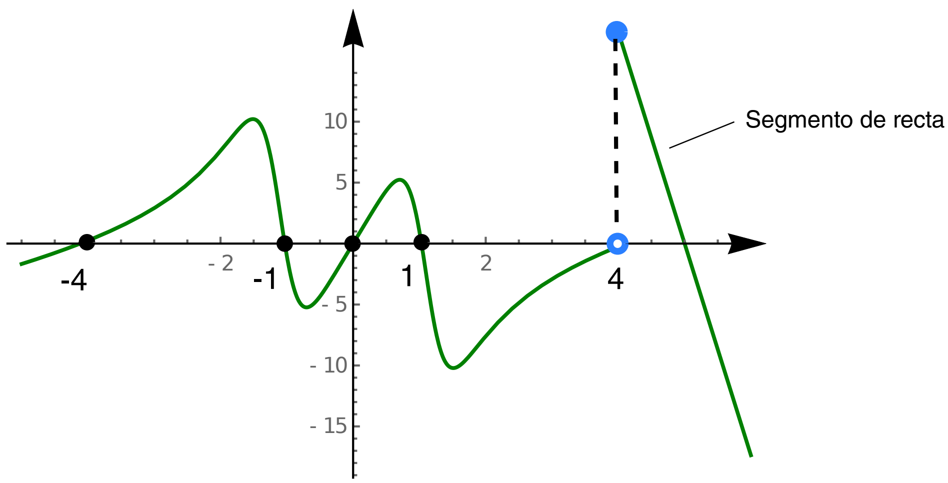
2) ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? Explique.

3) ¿En qué valores de x tiene f un mínimo local? Explique.

4) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba? Explique.

5) ¿En qué valores de x, posee f puntos de inflexión? ¿Porqué?

4.7.3 Considere la gráfica de la *primera derivada* de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si se sabe que f **es continua en todo su dominio,** entonces con base en la gráfica que sigue responda cada una de las preguntas que se plantean



1) ¿En qué intervalos f decrece?

2) ¿En qué valores de x, f alcanza un máximo?

3) ¿En qué valores de x, f alcanza un mínimo local?

4) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia abajo?

5) ¿En qué valores de x, f posee puntos de inflexión?

6) Realice un bosquejo de una posible gráfica para f.

7) Realice un bosquejo de una posible gráfica para f''.

4.7.4 Trace una gráfica para cada función que cumpla las condiciones dadas en cada ejercicio.

1)
- $f(-4) = f(-2) = f(0) = f(2) = 0$, $f(-1) = -1$,
- $f(1) = 2$,
- $f'(-3) = f'(-1) = f'(1) = 0$,
- $f'(x) > 0$ si $x < -3$ o $-1 < x < 1$,
- $f'(x) < 0$ si $-3 < x < -1$ o $x > 1$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

2)
- $\operatorname{dom} f =]0, \infty[- \{2\}$,
- $f(1) = 1$,
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$,
- $f'(x) > 0$ si $0 < x < 1$ o $x > 2$,
- $f'(x) < 0$ si $1 < x < 2$

3)
- $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} f(x) = 2$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$
- $f(0) = -1$
- $f(-1) = 1$
- $f'(x) < 0 \quad \forall x > 3$
- $f'(x) = -1 \quad \forall x \in]-3, -1[$
- $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$ existe.

4)
- $D_f = \mathbb{R} - \left[\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$
- $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$
- $\displaystyle\lim_{x\to (-1/2)^-} f(x) = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to (1/2)^+} f(x) = 1$
- $f'(x) > 0 \ \forall x \in]-\infty, -3[\cup \left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$
- $f'(-2) = 0$
- $f'(-1)$ no existe.

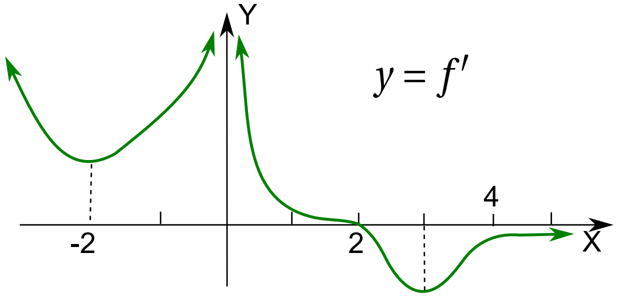
5)
- $D_f = \mathbb{R}$
- f es derivable únicamente en $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 1$
- $f''(x) > 0, \ \forall x > 3$
- $f'' < 0, \forall x \in]-\infty, 2[- \{-1\}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$
- f es continua a la izquierda de 2.
- $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f'(x) = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) < 0$
- $f(2) = 2$

6)
- $f'(-1) = 0$, $f'(1)$ no existe
- $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$, $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$,
- $f(-1) = 4$,
- $f(1) = 0$,

- $f''(x) < 0$ si $x \neq 1$.

4.7.5 Dados la gráfica de f' y algunos datos de f, bosqueje la gráfica de f.

1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$
3) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$
4) $f(-2) = f(1) = 0$
5) $f(3) = -1$



4.7.6 Realice el análisis completo y trace la gráfica, de cada una de las funciones siguientes:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{4-x^2}$

2) $f(u) = \dfrac{u^3-4}{u}$

3) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$

4) $h(x) = \dfrac{3}{1+e^{-x}}$

4.7.7 Determine las ecuaciones de todas las asíntotas a la gráfica de la función h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^3+2x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \leq -5 \\[2ex] \dfrac{3x^2+6x}{x^2-9} & \text{si} \quad -5 < x \leq 0 \\[2ex] \arctan\left(\dfrac{3x-2}{1-3x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

4.7.8 Para cada una de las funciones siguientes:

- Verifique las derivadas dadas.
- Realice el análisis completo y trace la gráfica respectiva.

1) $f(x) = \dfrac{x^3-27}{8-x^3}$, $\quad f'(x) = -\dfrac{57x^2}{(x^3-8)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{228x\,(x^3+4)}{(x^3-8)^3}$

2) $r(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$, $r'(x) = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$, $r''(x) = \dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$

4.8 Problemas de Optimización

4.8.1 Resuelva los siguientes problemas de optimización.

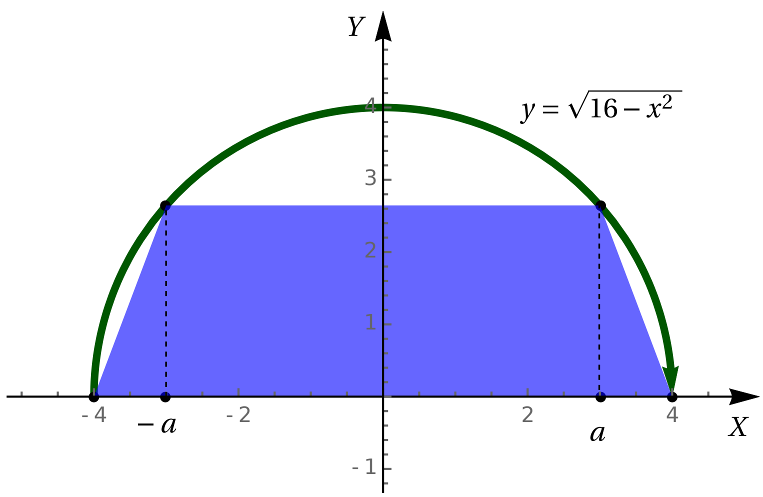
1) Se desea fabricar una caja sin tapa, de base cuadrada, cuyos materiales para los lados cuestan \$3 el dm^2 y, para el fondo, \$4 el dm^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de volumen máximo que se puede construir con un valor de \$48?

2) Halle el punto sobre la recta $6x + y = 9$, más cercano al punto $(-3, 1)$.

3) Un bote sale de un muelle a las 2 : 00 p.m. y viaja hacia el sur a una velocidad dde 20 km/h. Otro bote ha estado enfilando hacia el este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 3 : 00 p.m. ¿En que momento estuvieron los dos botes más próximos?

4) Halle una ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ y corta un área mínima en el primer cuadrante.

5) Hallar las dimensiones del trapecio isósceles de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 4.

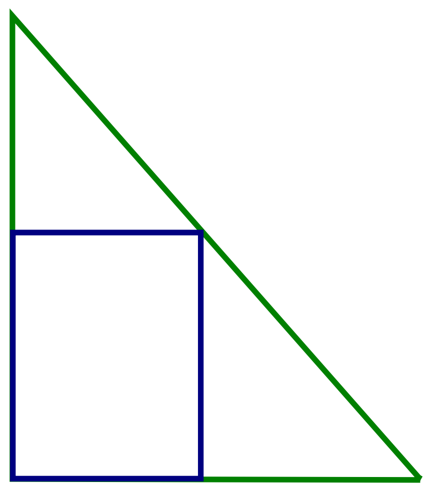


6) Una persona está en un punto X en la orilla de un río recto de 50 m de ancho, y quiere llegar a otro punto Y en la otra orilla del río, ubicado 75 m río abajo. Puede correr a 250 m/min por su lado del río para luego nadar a 30 m/min en línea recta hasta llegar a Y. Desestimando la corriente del río,

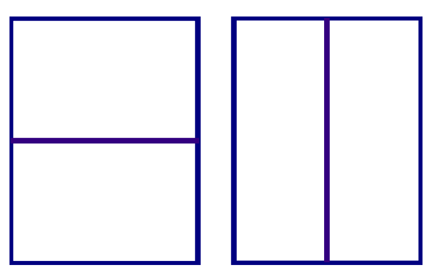
¿qué distancia debe correr antes de entrar al agua, y qué distancia nadar, de modo que minimice el tiempo total? ¿Cuánto es el tiempo mínimo?

7) Una pista de atletismo consta de una zona rectangular y un semicírculo en cada uno de sus extremos. Si el perímetro de la pista ha de ser 200 metros, calcular las dimensiones que hacen máxima el área de la zona rectangular. ¿Cuál es el área total de la pista?

8) Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm, si el rectángulo tiene un vértice en el ángulo recto del triángulo y otro vértice en la hipotenusa del triángulo.



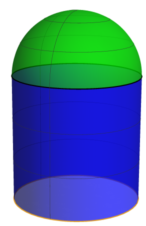
9) Se desea cercar una superficie de 60000 m^2 en forma rectangular, para después dividirla en dos mitades con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo y en qué dirección debe ir la división para minimizar el costo de la cerca?



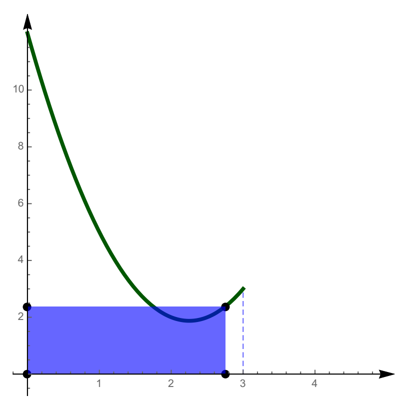
10) El interior de una pista de carreras de 800 metros consiste en un rectángulo con semicírculos en dos de sus extremos opuestos (en la figura, la pista es el perímetro). Encuentre las dimensiones que maximizan el área del rectángulo.

11) Una lata cilíndrica con tapa debe contener 225 cm^3 de líquido. EL costo por cm^2 de material es de 15 céntimos para el fondo y la tapa, y 10 céntimos para la pared lateral. ¿Qué dimensiones de la lata minimizan el costo de los materiales?¿Cuál es el costo mínimo?

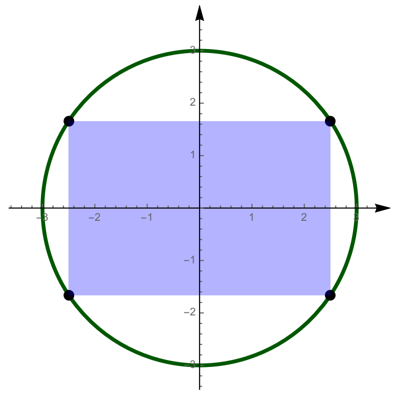
12) Un envase circular se construye poniendo una semiesfera en un extremo de un cilindro circular recto. El envase, incluyendo la semiesfera, debe tener una capacidad de 1.8 litros.¿Cuáles dimensiones minimizan la cantidad de material requerido?



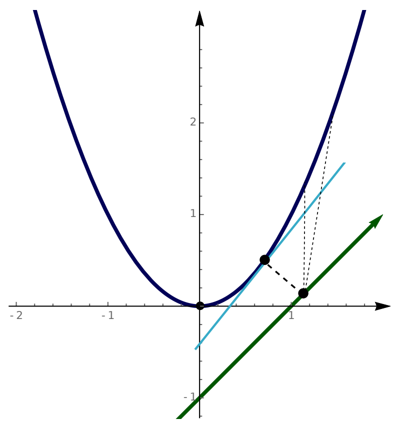
13) Un rectángulo tiene un vértice en $(0,0)$, un lado sobre el eje X y otro lado sobre el eje Y. El vértice opuesto a $(0,0)$ está sobre la parábola $y = 2x^2 - 9x + 12$ con $0 \leq x \leq 3$. ¿Cuál es el área máxima posible para el rectángulo?



14) La ecuación $x^2 + y^2 = 9$ describe en el plano cartesiano una circunferencia de radio 3 con centro en el origen.¿Cuál es el área del mayor rectángulo que se puede inscribir en esa circunferencia?



15) ¿Cuál es la distancia mínima entre la parábola P con ecuación $y = x^2$ y la recta R con ecuación $y = x - 1$?



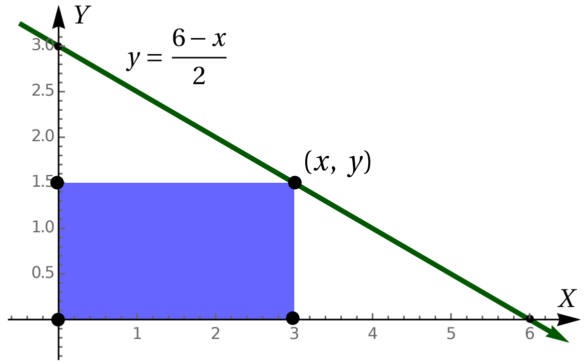
16) ¿Cuá es el largo y el ancho que debe tener un rectángulo de 100 metros de perímetro para que su área sea máxima?

17) Hallar dos números positivos cuyo producto sea 192 y cuya suma sea mínima.

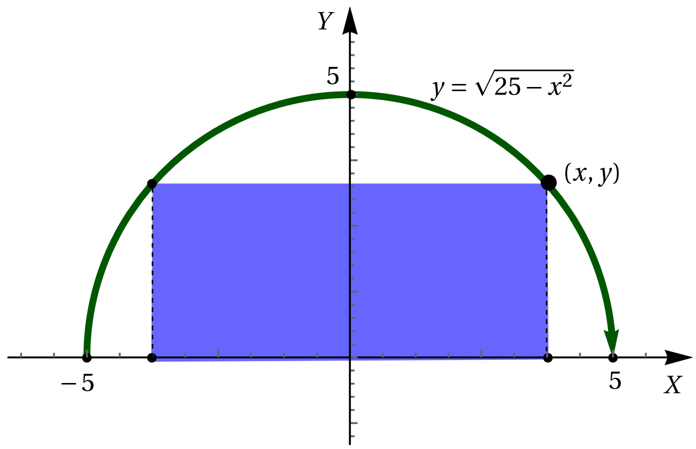
18) Con 10 metros de hilo se forman u círculo y un triángulo isósceles rectángulo. ¿Cuánto hilo hay que emplear en el círculo para que el área total encerrada por ambos sea máxima?

19) Una caja de base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32 dm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

20) Un rectángulo está acotado por los ejes "x", "y" y por el gráfico de la ecuación $y = \dfrac{6-x}{2}$. ¿Cuál es el largo y el ancho que debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?



21) Un rectángulo está limitado por el eje "x" y por el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$. ¿Cuál debe ser el largo y el ancho del rectángulo para lograr que su área sea máxima?



22) Si se cuenta con 1 200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

23) En un cartel rectangular los márgenes superior e inferior miden 6 cm cada uno y los laterales, 4 cm. Si el área del material impreso se fija en 384 cm^2, ¿cuáles son las dimensiones del cartel de área mínima?

Capítulo 5

Integración

5.1 Integrales básicas y sustitución

5.1.1 Calcule las siguientes integrales indefinidas

1) $\displaystyle\int \frac{(w^2-2)(w^2+2)}{4w^3}\,dw$

2) $\displaystyle\int \frac{6^x - 4\cdot 15^x}{3^{2x}}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{(e^q-1)(e^q+1)}{e^q}\,dq$

4) $\displaystyle\int \frac{2^t-1}{5+t\ln 2-2^t}\,dt$

5) $\displaystyle\int \left(e^{u/2}+e^{-u/2}\right)^2\,du$

6) $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(u^2+1)\sqrt{1+\ln(u^2+1)}}$

7) $\displaystyle\int (5r^2+\csc(r)\cot(r))\,dr$

8) $\displaystyle\int \frac{(2v-1)^2}{3\sqrt{v^3}}\,dv$

9) $\displaystyle\int \frac{(w^2-2)^2(w^2+2)}{3w^3}\,dw$

10) $\displaystyle\int \frac{24q}{4q^2+7}\,dq$

11) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{z^2}-\frac{3z}{z^2+1}\right)\,dz$

12) $\displaystyle\int 3\sec^2(u)(\tan(u+5))\,du$

13) $\displaystyle\int \sec^2(\alpha)\sqrt{5+2\tan(\alpha)}\,d\alpha$

14) $\displaystyle\int \tan^2(\alpha)\sec^2(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha)\,d\alpha$

15) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x-1}\,dx$

16) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$

17) $\displaystyle\int \mathrm{sen}(2x)\cos(2x)\,dx$

18) $\displaystyle\int \tan(x)\ln(\cos x)\,dx$

19) $\displaystyle\int x^x(1+\ln x)\,dx$

20) $\displaystyle\int \frac{x+1}{1+x^2}\,dx$

21) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,dx$

22) $\int 5x\sqrt{1+x^2}\,dx$

23) $\int \operatorname{sen} x\sqrt{1+\cos x}\,dx$

24) $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$

25) $\int \frac{u\,du}{\sqrt{3+u^2}}$

26) $\int \frac{x+3}{2x+1}\,dx$

27) $\int \frac{2x^2+4x+5}{x-1}\,dx$

28) $\int \frac{z}{z+1-\sqrt{z+1}}\,dz$

29) $\int \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx$

30) $\int \frac{\ln(\tan x)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$

31) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

32) $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$

33) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+2}\,dx$

34) $\int \frac{\sqrt{(x+3)^3}}{x+7}\,dx$

35) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

36) $\int \frac{1}{x-\sqrt[3]{x}}\,dx$

37) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$

38) $\int 2y^3\sqrt{9-y^2}\,dy$

5.2 Integración de potencias trigonométricas

5.2.1 Calcule las siguientes integrales indefinidas

1) $\int (1-\operatorname{sen}(2x))^2\,dx$

2) $\int \tan(x)\sec^3(x)\,dx$

3) $\int \frac{\sec^2(x)}{\cot(x)}\,dx$

4) $\int \sec^3 z\tan^3 z\,dz$

5) $\int \frac{\sec^2 x}{4+\tan x}\,dx$

6) $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$

7) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\sqrt{1+\cos(x)}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

9) $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx$

10) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(3x)\,dx$

11) $\displaystyle\int \cot^4 x\,dx$

12) $\displaystyle\int \sec^4(5z)\tan^2(5z)\,dz$

5.3 Sustitución trigonométrica

5.3.1 Calcule las siguientes integrales indefinidas

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

2) $\displaystyle\int \frac{r^2+1}{\sqrt{4-r^2}}\,dr$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4x^2-25)^3}}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}}$

6) $\displaystyle\int \frac{12}{\sqrt{9-(3x)^2}}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{du}{u^4\sqrt{u^2-5}}$

8) $\displaystyle\int \frac{z+2}{\sqrt{3-2z-z^2}}\,dz$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}$

11) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+3}}\,dx$

12) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\,dx$

13) $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x^2+2x+4)^2}\,dx$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}}\,dx$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

16) $\displaystyle\int \sqrt{1-z^2}\,dz$

17) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

5.4 Integración por partes

5.4.1 Calcule las siguientes integrales indefinidas

1) $\displaystyle\int \frac{w+1}{e^w}\,dw$

2) $\displaystyle\int \log(5y^2-4y)\,dy$

3) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}(2y)\,dy$

4) $\displaystyle\int (p-1)^3 e^{p^2-2p}\,dp$

5) $\displaystyle\int \frac{te^t}{(t+1)^2}\,dt$

6) $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$

7) $\displaystyle\int \cos(\ln r)\,dr$

8) $\displaystyle\int (3y^2+1)\ln(y^2-1)\,dy$

9) $\displaystyle\int w^3\cdot 8^{w^2+1}\,dw$

10) $\displaystyle\int \frac{\ln z}{(z+1)^2}\,dz$

11) $\displaystyle\int \ln(\sqrt{x})\,dx$

12) $\displaystyle\int x\sec(x)\tan(x)\,dx$

13) $\displaystyle\int x\arctan(x)\,dx$

14) $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,dx$

15) $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arc\,sen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

16) $\displaystyle\int e^{2\theta}\operatorname{sen}(3\theta)\,d\theta$

17) $\displaystyle\int w^2e^{-w}\,dw$

18) $\displaystyle\int \ln(\sqrt{x})\,dx$

19) $\displaystyle\int \cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\,dx$

20) $\displaystyle\int \cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\,dx$

5.4.2 Calcule, usando integración por partes, $\displaystyle\int |x|\,dx$.

5.5 Fracciones parciales

5.5.1 Calcule las siguientes integrales indefinidas

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{p^3 + 14p^2 + 2}{4p^4 + 4p^3 - 7p^2 + 2p}\,dp$

4) $\displaystyle\int \frac{5z^3 - z^2 + 4z + 4}{(z^2+z)(z^3-z)}\,dz$

5) $\displaystyle\int \frac{26u - 34 + 2u^2}{(u-2)^3(2u+1)^2}\,du$

6) $\displaystyle\int \frac{u-8}{u^2 - 2u - 8}\,du$

7) $\displaystyle\int \frac{8 - 10w^2 - w^3}{8w + 2w^2 - w^3}\,dw$

8) $\displaystyle\int \frac{-x^2 + x - 1}{(4-x^2)\,(x-5)^2}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{9^x + 3^x + 6}{9^x - 3^x - 2}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2 - x}\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

12) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 1}\,dx$

13) $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 3x + 12}{x^3 + 4x}\,dx$

14) $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4}\,dx$

15) $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x+1}\,dx$

16) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 4x + 5}{x-1}\,dx$

5.6 Práctica General

5.6.1 Calcule las siguientes integrales indefinidas

1) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-4)^3}}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{4x}{4x^2 + 4x + 5}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{\sqrt{x^3}}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{3x+7}{\sqrt{6x - 9x^2}}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4 - 2x - x^2}}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^3 + 2x - 3}{x^2 - 3x}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 7x - 1}{(x-2)(x^2+3)}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{4x+5}{\sqrt{(x^2-2x+2)^3}}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-\ln^2 y}}{y}\,dy$

11) $\displaystyle\int \frac{du}{e^u\sqrt{1+e^{2u}}}\,du$

12) $\displaystyle\int \frac{q+1}{q^3+q}\,dq$

13) $\displaystyle\int \frac{dq}{q^2(q^2+8)^{3/2}}$

14) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t}\,dt$

15) $\displaystyle\int \frac{2t^2+3t-2}{3t^4-2t^3}\,dt$

16) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\,dx$

17) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(7x)+\cos(7x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(7x)-\cos(7x)}}\,dx$

18) $\displaystyle\int y^3\cos(y^2)\,dy$

19) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+4x+6}\,dx$

20) $\displaystyle\int \frac{3\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}\,dx$

21) $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x-1}{x^3-7x^2+16x-12}\,dx$

22) $\displaystyle\int \frac{dz}{z\cos(\ln(4z))}$

23) $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,dx$

24) $\displaystyle\int \sec^4(1-u)\tan(1-u)\,du$

25) $\displaystyle\int \frac{x+20}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}}\,dx$

26) $\displaystyle\int x^2\cdot a^x\,dx,\quad a>0$

27) $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

28) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx,$

29) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x^2}\,dx$

30) $\displaystyle\int x\cos(3x)\,dx$

31) $\displaystyle\int \frac{y^2}{\sqrt{(1-y^2)^3}}\,dy$

32) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$

33) $\displaystyle\int e^x\ln(e^x+1)\,dx$

34) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$

35) $\displaystyle\int \frac{5x-\sqrt{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

36) (*) $\displaystyle\int \frac{\arctan(e^{-x})}{e^{-x}}\,dx$

37) (*) $\displaystyle\int \ln(x^2+2x+5)\,dx$

5.6.2 Verifique que $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{e^{-x}}}\,dx = 6\ln|e^{x/2}+2| + C.$

5.6.3 Verifique que $\displaystyle\int \frac{e^{x}(1+x\ln x)}{x}\,dx = e^{x}\ln x + C.$

5.6.4 (*) Verifique, utilizando integración por partes, las siguientes fórmulas de reducción:

1) $\displaystyle\int x^{n}\ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\,((n+1)\ln x - 1) + C \text{ con } n \neq -1$

2) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{n} x\,dx = -\frac{1}{n}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx$

3) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{2}(x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x\cdot\cos x) + C$

5.6.5 Calcule las funciones que cumplen con las condiciones dadas

1) $p'(w) = 2w+1,\ \ p(1) = 4$

2) $z''(r) = 6r^2 + 2 + r^{-2},\ \ z'(-1) = -1,\ \ z(1) = \frac{1}{2}$

3) $q''(t) = 12t^2 - 12t - e^{t},\ \ q'(1) = -1-e,\ \ q(1) = 0$

5.6.6 (*) Determine una función f tal que $f(-1) = -3,\ f'(-1) = -10$ y $f''(x) = 24 + 4e^{2(x+1)}$

5.6.7 (*) Sea f una función cuya gráfica contiene el punto $(1,\ 6)$ y que la pendiente de su recta tangente en $(x,\ f(x))$ es $2x+1$. Encuentre $f(2)$.

Capítulo 6

Integral definida

6.1 Integración definida

6.1.1 Calcule las siguientes integrales

1) $\displaystyle\int_0^1 e^x(e^x-1)^4\,dx$

2) $\displaystyle\int_{-2}^3 (p^3(p-4p^{-2}))\,dp$

3) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi} \left[4\cos r+\operatorname{sen}\left(r-\frac{\pi}{2}\right)\right]\,dr$

4) $\displaystyle\int_{-2}^{-2/\sqrt{3}} \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$

5) $\displaystyle\int_1^5 |6-4u|\,du$

6) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(2-x^3)^2}\,dx$

7) $\displaystyle\int_2^7 q\sqrt{q+2}\,dq$

8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{v^2+3}{2v^3+18v-5}\,dv$

9) $\displaystyle\int_0^{-1} \frac{x+1}{x+2}\,dx$

10) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^r\sqrt{1+e^r}\,dr$

11) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} 3\sec^2 u(\tan u)+5\,du$

12) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{s}\ln s\,ds$

13) $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} z\cos 2z\,dz$

14) $\displaystyle\int_{-1}^0 w^3 8^{w^2+1}\,dw$

15) $\displaystyle\int_1^e (1+\ln u)^2\,du$

16) $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{\ln(4-7x)}{\sqrt{(4-7x)^3}}\,dx$

17) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ si $f(x)=\begin{cases} x^4 & \text{si} \quad -4\le x<1 \\ x^5 & \text{si} \quad 1\le x\le 10\end{cases}$

18) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ si $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad -\pi\le x\le 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si} \quad 0\le x\le \pi\end{cases}$

19) $\displaystyle\int_{-3}^3 (|2-x|+x^2)\,dx$

20) $\displaystyle\int_{-1/2}^0 \frac{5}{4x^2+4x+5}\,dx$

21) $\displaystyle\int_0^4 |x^2-4x+3|\,dx$

22) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$

23) $\displaystyle\int_{5/3}^{7/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9(x-2)^2}}$

24) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{r}\,dr$

6.1.2 Encuentre la fórmula para $g(u)$, dado que $g(0)=1$ y que $g'(u)=\dfrac{1-u}{\sqrt{4-u^2}}$

6.1.3 Verifique que $\displaystyle\int_a^b = b-c$ si $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } a\le x<c \\ k & \text{si } a\le x\le c \\ 1 & \text{si } c<x\le b \end{cases}$

6.1.4 Verifique que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}(t)}\,dt \;=\; \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

6.1.5 Realice el cambio de variable $s=at$ para mostrar que

$$\int_0^x \frac{ds}{a^2+s^2} \;=\; \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{z}\right) \quad \text{con } a\neq 0$$

6.2 Sumas de Riemann

6.2.1 Dadas la función y la partición P, estime la suma de Riemann para los puntos izquierdos, la suma para los puntos medios y la suma para los puntos derechos.

1) $f(u)=\sqrt{2u+4},\quad P=\{-2,-1.8,-1.6,-1.3,-1\}$

2) $h(z)=\begin{cases} 4-z^2 & \text{si } z\le 3 \\ 5-z & \text{si } z>3 \end{cases},\quad P=\{2,\ 2.5,\ 3,\ 3.02,\ 4,\ 5\}$

6.2.2 Dadas la función, el intervalo y el valor de n , estime la suma de Riemann de la función en el intervalo usando n subintervalos regulares para los puntos izquierdos, para los puntos derechos y para los puntos medios.

1) $f(t)=3\ln t,\quad$ intervalo $[1,\ 2],\quad n=6$

2) $f(r)=r^2\sqrt{1-r^2},\quad$ intervalo $[-1,\ 1],\quad n=8$

6.2.3 Calcule cada integral como límite de sumas de Rieman

1) $\displaystyle\int_0^3 (1-4v)\,dv$

2) $\displaystyle\int_3^7 u(2u-5)\,du$

3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (2t-t^3)\,dt$

4) $\displaystyle\int_1^4 (2-3x)\,dx$

5) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x-x^2)\,dx$

6) $\displaystyle\int_0^2 (9-3x^2)\,dx$

6.2.4 (∗) Utilice sumas de Riemann para verificar que $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$

6.2.5 Sea f una función definida por $f(x) = x^2+1$. Utilizando 6 rectángulos, aproxime el área limitada por la gráfica de f y el eje X , en el intervalo $[1,4]$

6.3 Teorema fundamental del cálculo

6.3.1 Derive las siguientes funciones

1) $\displaystyle F(t) = \int_t^5 \ln(6+y^2)\,dy$

2) $\displaystyle F(t) = \int_4^{e^t} \ln u\,du$

3) $\displaystyle F(r) = \int_{-1}^{\text{sen}(r\pi)} \sqrt[5]{w^2+1})\,dw$

4) $\displaystyle F(y) = \int_{e^y}^{\sqrt{y^3}} \frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha$

5) $\displaystyle F(x) = \int_x^2 \cos(t^2)\,dt$

6) $\displaystyle G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln(t)\,dt, \quad x>0$

7) $\displaystyle F(x) = \int_{1-3x}^1 \frac{u^3}{1+u^2}\,du$

6.3.2 Sea g una función integrable. Encontrar c, de modo que $\displaystyle\int_c^x g(t)\,dt = \cos(x) - \frac{1}{2}$

6.3.3 Sea f una función integrable; si f cumple que

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 t^2 f(t)\,dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + C, \quad \text{con } C \text{ constante}$$

a.) Determine el criterio de f

b.) Determine el valor de C, que satisface la igualdad anterior.

6.3.4 Encuentre una función f y un número a tales que $6 + \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}, \ \ \forall x > 0$

6.3.5 $(*)$ Verifique que la gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$, si $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,dt$ con $a \neq 0$

6.3.6 Sea f una función tal que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 2$, $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt = -6$ y $\displaystyle\int_4^3 f(t)\,dt = 1$. Hallar $\displaystyle\int_1^3 f(t)\,dt$

6.3.7 Sea f una función tal que $\displaystyle\int_1^4 f(t)\,dt = 6$, $\displaystyle\int_2^4 f(t)\,dt = 4$ y $\displaystyle\int_1^3 f(t)\,dt = 1$. Hallar $\displaystyle\int_2^3 f(t)\,dt$

6.3.8 Hallar todos los valores de x, tales que $\displaystyle\int_0^x (t^3 - t)\,dt = \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^x (t - t^3)\,dt.$

6.3.9 Si f es una función continua en $\mathbb{R}$ y $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 20$, calcule $\displaystyle\int_0^2 f(2x)\,dx.$

6.3.10 Considere las funciones g y h definidas por $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,du$ y $h(x) = \displaystyle\int_0^{g(x)} 3f(t)\,dt$ con f derivable tal que $f(0) = 2$. Calcule $h'(0)$.

6.4 Cálculo de áreas

6.4.1 Determine el área de la región limitada por:

1) $f(x) = x^3 + 2x$ y el eje X, desde $x = -1$ hasta $x = 3$.

2) $x = y + 5$ y $x = \dfrac{y^2+2}{2}$.

3) $y = 0$ y $y = 1 - x^2$ desde $x = -1$ hasta $x = 1$. Realice la representación gráfica de la región.

4) $y = 0$ y $y = 2 - |x|$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$. Realice la representación gráfica de la región.

5) $y = x^2 - 4x + 3$ y $y = -x^2 + 2x + 3$. Realice la representación gráfica de la región.

6) $y = x^3, \quad x = -2, \quad x = 4$.

7) $y = |x|, \quad x = -2, \quad x = 2$.

8) $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$.

9) $y^2 = -x, \quad x - y = 4, \quad y = 0, \quad y = 2$.

6.4.2 Considere la función f definida por $\begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 16 - 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Determine el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje X y la recta $x = 3$. Incluya un esbozo de la región.

6.4.3 Considere la región sombreada R, entre las curvas $y = \dfrac{1}{4}(x+1)^2 + 2$, $y = 3 - x$, $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$ y $x = 0$, desde $x = -2$ hasta $x = 2$, tal y como se muestra en la figura 6.1.

Plantear las integrales necesarias para calcular el área de la región sombreada.

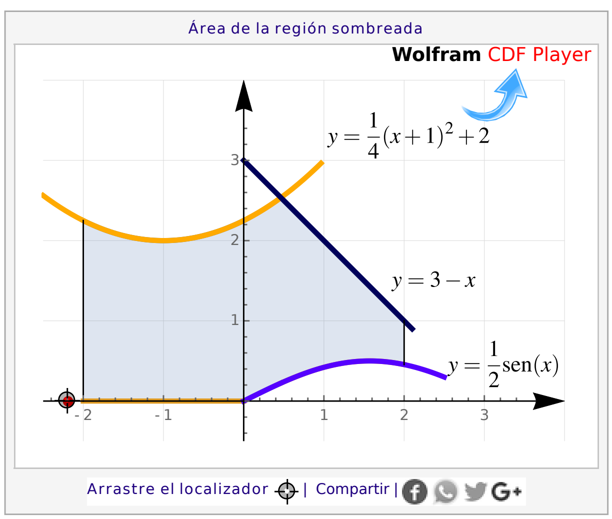
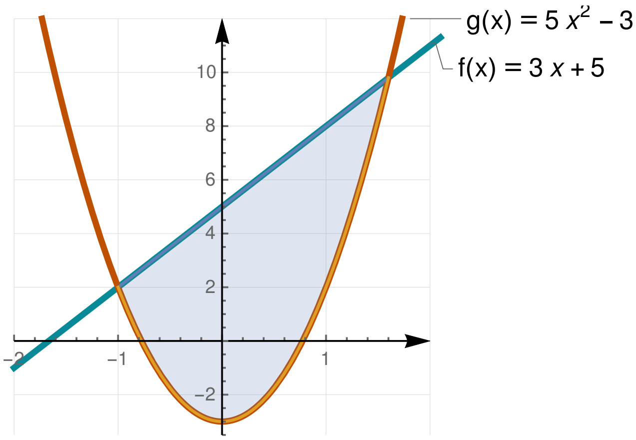
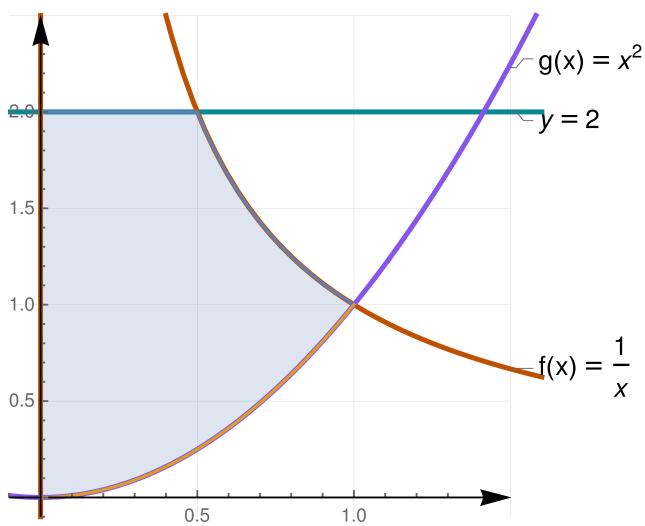


Figura 6.1: Área de la región R

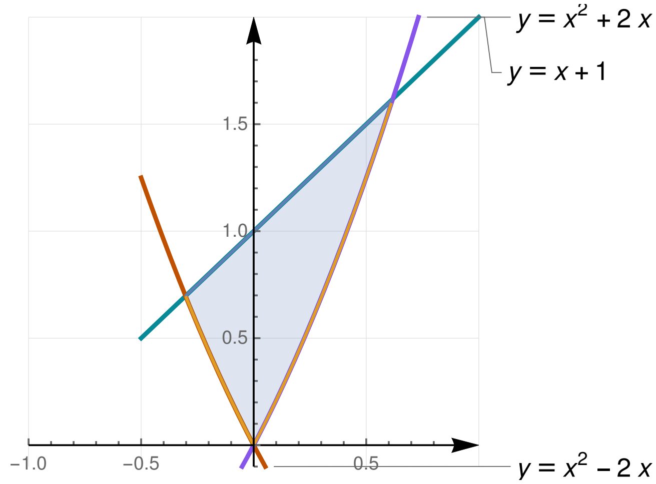
6.4.4 Calcule el área de la región sombreada.



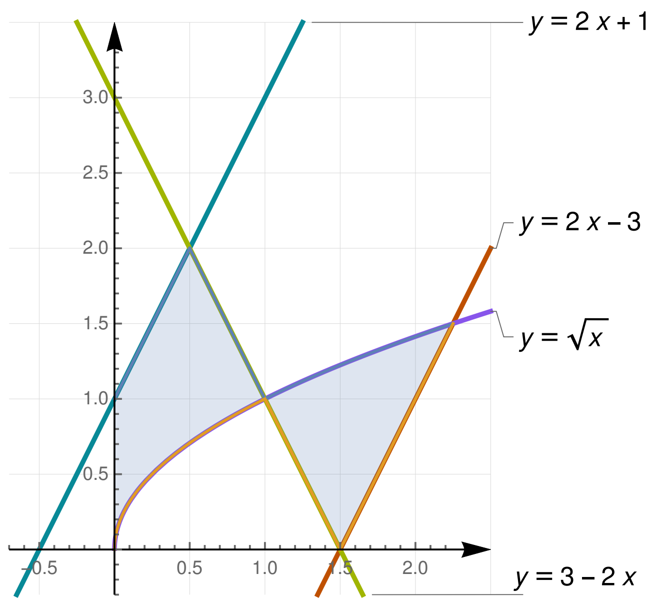
6.4.5 Calcule el área de la región sombreada.



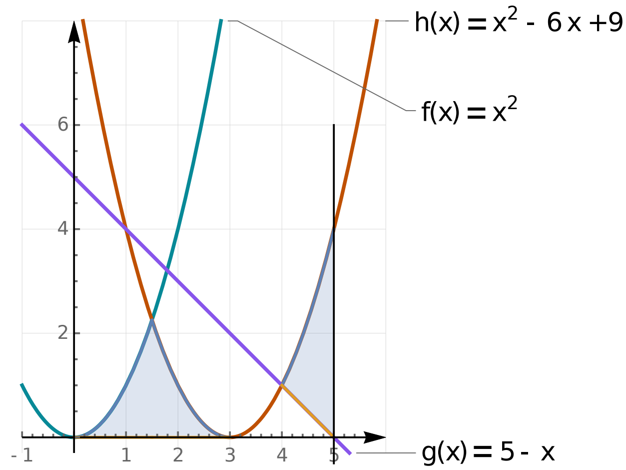
6.4.6 Calcule el área de la región sombreada.



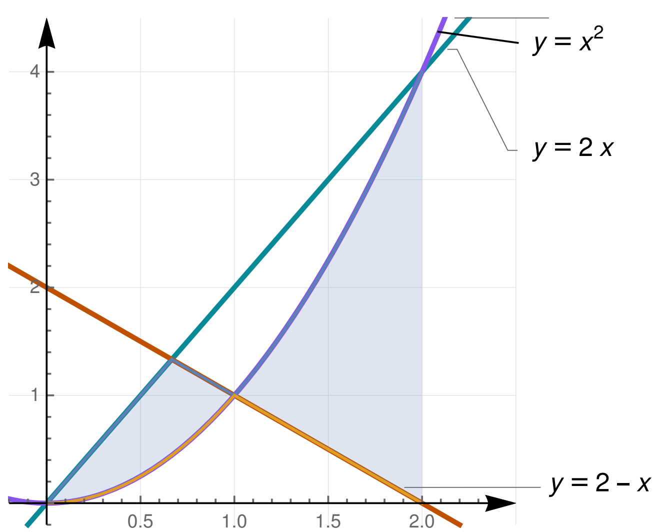
6.4.7 Calcule el área de la región sombreada.



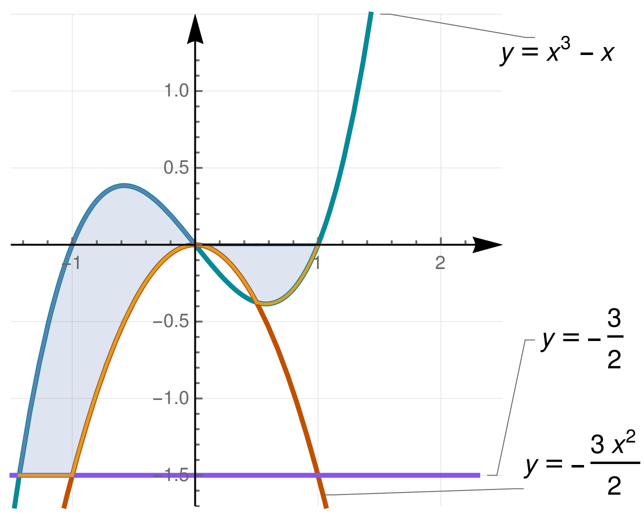
6.4.8 Calcule el área de la región sombreada.



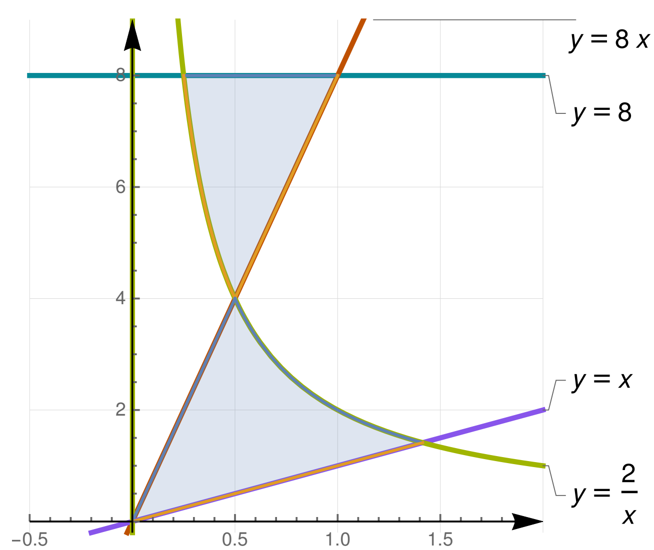
6.4.9 Calcule el área de la región sombreada.



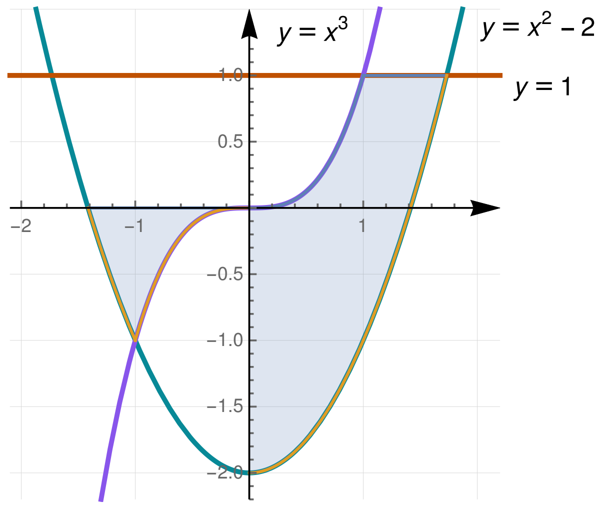
6.4.10 Calcule el área de la región sombreada.



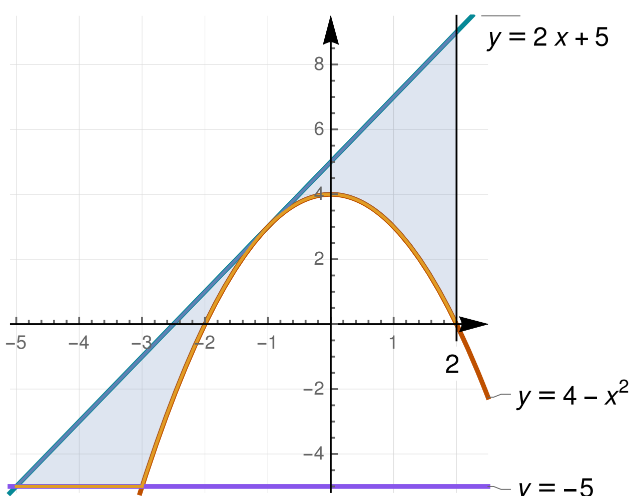
6.4.11 Calcule el área de la región sombreada.



6.4.12 Calcule el área de la región sombreada.



6.4.13 Calcule el área de la región sombreada.



6.5 Integrales impropias

6.5.1 Estudie la convergencia o divergencia de cada integral

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$

2) $\displaystyle\int_2^{10} \frac{dt}{\sqrt[3]{t-2}}$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 pe^p\,dp$

4) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dy}{y\ln y}$

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{1+r^2}$

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/2} \operatorname{sen}(2\theta)\,d\theta$

8) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}$

9) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$

12) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$

13) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3y^2+y-1}}\,dy$

14) $\displaystyle\int_{-2}^4 \frac{dx}{|x-2|}\,dx$

15) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-2|x|}\,dx$

16) $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\,dx$

Bibliografía

[1] E. Agüero, J. Chavarría, J.J. Fallas. "Folleto de prácticas de Cálculo Diferencial e Integral" ITCR, 2011

[2] L. Acuña P. "Cálculo diferencial e integral". Folleto, ITCR, 2016.

[3] C. Páez P. "Práctica General de CDI". ITCR. 2015.

[4] C. Páez P. "Cálculo Proposicional 1". Folleto. ITCR.

[5] S. Meneses R. "Prácticas para Cálculo diferencial e integral". Folleto. ITCR.

[6] P. García D. "Prácticas para Cálculo diferencial e integral". ITCR.

[7] G. Sanabria B. "Introducción a la Lógica". Folleto ITCR.

[8] M. Gutiérrez M. "Prácticas para Cálculo diferencial e integral". ITCR.

[9] M. Gutiérrez M. "Lógica Simbólica". ITCR.

Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

1.1. Proposiciones y valores de verdad

1.1.1

1) Sí.

2) Sí.

3) Sí.

4) Sí.

5) No.

1.1.2

1) $(P \wedge Q)$

2) $P \rightarrow R$

3) Q

4) $\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge R)$

5) $(\neg P \wedge \neg R) \rightarrow Q$

6) $Q \longleftrightarrow \neg P$

7) $(\neg P \vee Q) \wedge R$

1.1.3

1) Si está lloviendo y el sol está brillando entonces hay nubes en el cielo.

2) No está lloviendo equivale a, el sol está brillando o hay nubes en el cielo.

3) Si no hay nubes en el cielo entonces el sol está brillando.

4) Si, siempre que está lloviendo hay nubes en el cielo, entonces el sol está brillando.

1.1.4

1) No está lloviendo o no hay nubes en el cielo. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

2) El Sol no está brillando y no hay nubes en el cielo. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

3) Está lloviendo. $\neg(\neg P) \equiv P$

1.1.5

1) $l \wedge f, (\neg l) \vee (\neg f)$: "ayer no llovió o no hizo frío".

2) $m \vee v, (\neg m) \wedge (\neg v)$: "Sandra no viene mañana ni el viernes".

3) $(\neg a) \wedge (g \vee c), a \vee [(\neg g) \wedge (\neg c)]$: "el sujeto estaba armado, o no llevaba gorra ni capucha".

4) $e \vee (r \wedge p), (\neg e) \wedge [(\neg r) \vee (\neg p)]$: "$n$ no es entero, y no es racional o no es positivo".

1.1.6

1) Todas las aves pueden volar.

2) Ningún día de 1998 cayó nieve en el Irazú.

3) Algún humano puede vencer a Superman.

4) Existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$ se tiene que $r^2 \neq y$.

1.1.7

1) $d \rightarrow m$; "si no le hacen multa, no lo detuvieron".

2) $[t \wedge (\neg e)] \rightarrow (\neg q)$; "si puedo hacer el quiz , entonces no llegé tarde o bien traje excusa".

3) $\forall v \in D, te(v) \rightarrow vq(v)$; " cada vez que no me va bien en el quiz, no trasnoché estudiando "

1.1.8

1) Para la negación de la implicación, se utiliza la equivalencia, $\neg(P \longrightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$.

N: Soy listo y no soy millonario.

R: Si soy millonario, entonces soy listo.

C: Si no soy millonario, entonces no soy listo.

2)
N: $2+2=4$ y $2+4 \neq 8$.

R: Si $2+4=8$, entonces $2+2=4$.

C: Si $2+4 \neq 8$, entonces $2+2 \neq 4$.

3)
N: Juan llega demasiado pronto o María demasiado tarde, y el jefe no se molesta.

R: Si el jefe se molesta, entonces Juan llega demasiado pronto o María demasiado tarde.

C: Si el jefe no se molesta, entonces Juan no llega demasiado pronto ni María demasiado tarde.

4)
N: Hay nubes en el cielo y el Sol no está brillando, e iré al estadio.

R: Si no iré al estadio, entonces hay nubes en el cielo y el Sol no está brillando.

C: Si iré al estadio, entonces no hay nubes en el cielo o el Sol está brillando.

5)
N: a es un número real, $a>0$ y $a^2 \leq 0$.

R: Si $a^2>0$, entonces a es un número real y $a>0$.

C:Si $a^2 \leq 0$, entonces a no es un número real o $a \leq 0$.

1.1.9

1) Verdadera.

2) Falsa.

3) Verdadera.

4) Verdadera.

5) Verdadera.

6) Falsa.

1.1.10

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

1.1.11

1)

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

2)

x	y	z	$\neg z$	$y \vee \neg z$	$x \wedge (y \vee \neg z)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F

1.1.12

Considere p ="Soy el presidente de CR" y q= "Vivo en Zapote".
Sea $A = [(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg p$	A
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V

1.1.13

Sea $A = p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	A
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

1.1.14

1) Falsa, ya que t es verdadera, con lo cual su negación es falsa y por tanto la conjunción ($\wedge$) entre las proposiciones es una proposición falsa.

2) Verdadera, ya que como r es verdadera las disyunciones ($\vee$) entre las proposiciones son proposiciones verdaderas.

1.1.15

1) Falsa.

2) Verdadera.

3) Verdadera.

1.1.16

1) Sea $A = (p \longleftrightarrow \neg q) \longleftrightarrow (q \rightarrow p)$

p	q	$\neg q$	$p \longleftrightarrow \neg q$	$q \rightarrow p$	A
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F

2) Sea $A = (p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \vee q$	A
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

3) Sean: $A = (p \vee \neg r) \wedge (p \vee r)$
$B = (q \rightarrow p) \wedge (q \vee p)$
$C = [(p \vee \neg r) \wedge (p \vee r)] \wedge [(q \rightarrow p) \wedge (q \vee p)]$

p	q	r	$\neg r$	$p \vee \neg r$	$p \vee r$	$q \rightarrow p$	$q \vee p$	A	B	C
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F

1.1.17

1) Sea$A = (P \rightarrow Q) \longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	A
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Es una tautología.

2) $B = (P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \neg Q)$

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee \neg Q$	B
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V

Es una tautología.

3) Sea $A = (P \rightarrow Q) \longleftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	A
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Es una tautología.

4) Sea $B = [(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow P$

P	Q	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$	B
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F

Es una contingencia.

1.1.18

1) No.
2) Sí.
3) No.

1.1.19

1) Sí.
2) Sí.
3) Sí.

1.1.20 Verdadera.

1.1.21 $\neg [\neg [p \vee (\neg q \longrightarrow p)]] \vee (q \wedge \neg p)$

Sea $A = [p \vee (\neg q \longrightarrow p)] \vee (q \wedge \neg p)$

p	q	¬p	¬q	¬q ⟶ p	p ∨ (¬q ⟶ p)	q ∧ ¬p	A
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	F

Note que: $\neg[\neg[p \vee (\neg q \longrightarrow p)]] \equiv p \vee (\neg q \longrightarrow p)$

1.1.22 $[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \longrightarrow \neg p$ es una tautología

1.2. Cuantificadores

1.2.1

1) $\exists x \in A, nv(x)$ donde $A = \{aves\}$ y $nv(x)$: "x no puede volar".

2) $\exists x \in A_{1998}, n(d)$ donde A_{1998}={días en 1958} y $n(d)$: " el día d cayó nieve en el Irazú".

3) $\forall t \in T, s(t) = 80°$ donde T={ triángulos } y $s(t)$ es la suma de los ángulos de t.

4) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}, r^2 = y$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$.

6) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$.

1.2.2

1) V. El recíproco: "Si $x^2 > 0$ entonces $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$": F.

2) V. El recíproco: "Para que $n \neq 0$ debe existir $\frac{1}{n}$ (o bien, si $n \neq 0$ " entonces $\frac{1}{n}$): V.

3) V. "Si $t^2 = 9$ entonces $t = 3$ o $t = -9$": V.

4) F. "Si todos los triángulos son redondos, todos los cuadrados son rectángulos": V.

1.2.3

1) Falsa.

2) Falsa.

1.2.4

1) Falsa.

2) Verdadera.

1.2.5

1) $\forall x : x + 7 \geq y$

2) $\exists x : \neg p(x) \vee \forall y : \neg q(y)$

3) $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \neq x$

4) $(\forall y)(p(x) \wedge (\exists x)(q(x)))$

5) $(\forall x)(p(x)) \wedge (\exists x)(\neg q(x))$

1.2.6 Se omite.

1.3. Inferencias Lógicas

1.3.1

1)

3.	x	S 1
4.	y	SD 2, 3
5.	$y \vee (\neg z)$	A 4

2)

4.	$\neg q$	MT 2, 3
5.	p	SD 1, 4

3)

3.	c	S 2
4.	$\neg(a \vee d)$	MT 1, 3
5.	$(\neg a) \wedge (\neg d)$	DeMorgan
6.	$\neg d$	S 5

1.3.2

1)

1) $M \longrightarrow N$

2) $N \longrightarrow O$

3) $(M \longrightarrow O) \longrightarrow (N \longrightarrow P)$

4) $(M \longrightarrow P) \longrightarrow Q$

5) $M \longrightarrow O$ SH1,2

6) $N \longrightarrow P$ MP3,5

7) $M \longrightarrow P$ SH1,6

8) Q MP4,7

2)

1) $Q \vee T$

2) $Q \longrightarrow R$

3) $\neg R$

4) $\neg Q$ MT2,3

5) T SD1,4

6) $T \vee S$ Adi5

1.3.3 Se omite.

1.3.4 Se omite.

1.3.5 Se omite.

1.3.6

1) $E \longrightarrow S$

2) $\neg T \longrightarrow \neg J$

3) $E \wedge J$

4) E Simp3

5) S MP1,4

6) J Simp3

7) $\neg\neg T$ MT2,6

8) $S \wedge T$ Adj5,7

1.3.7
$P : x + 2 < 6$

$R : x < 4$

$S : y < 6$

$Q : x + y < 10$
Las premisas se pueden reescribir de la siguiente forma:

1) $P \longrightarrow R$

2) $S \vee \neg Q$

3) $Q \wedge P$

4) Q Simp3

5) P Simp3

6) R MP1,5

7) S SD2,4

8) $R \wedge S$ Adj6,7

1.3.8 Se omite.

1.3.9 DM, IM, CP,DC, DM, DN, AB, SD.

1.3.10

1) $A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$

2) $D \longrightarrow A$

3) B

4) D

5) A MP4,2

6) $B \longrightarrow C$ MP1,5

7) C MP6,3

8) $\neg D \vee C$ Adi 7

9) $D \longrightarrow C$ ID8

1.3.11
1)

1) $(\neg p \vee \neg q) \longrightarrow (r \wedge s)$

2) $r \longrightarrow t$

3) $\neg t$

4) $\neg r$ MT3,2

5) $\neg r \vee \neg s$ Adi4

6) $\neg (r \wedge s)$ DM5

7) $\neg (\neg p \vee \neg q)$ MT5,1

8) $p \wedge q$ DM7

9) p Simp8

2)

1) $(R \vee Q) \rightarrow \neg T$

2) $\neg Q \vee R$

3) $P \vee Q$

4) $P \longrightarrow (R \wedge S)$

5) $\neg P \vee (R \wedge S)$ ID4

6) $P \wedge \neg(R \wedge S)$ DN y DM5

7) $\neg(R \wedge S)$ Simp6

8) $\neg P$ MT4,7

9) Q SD3,8

10) R SD2,9

11) $R \vee Q$ Adi9,10

12) $\neg T$ MD1,11

13) $\neg T \vee U$ ADI12

14) $\neg(T \wedge \neg U)$ DN y DM12,13

Soluciones del Capítulo 2

2.1.1

1) 3.
2) 2.
3) 3.
4) 1.
5) 2.
6) 0.
7) 1.
8) 2.

2.1.1

1) 1.
2) 0.
3) 1.
4) 2.

2.1.1

1) Existe por la derecha y es 1.
2) No existe.
3) 4.
4) 3.
5) Existe por la izquierda y es -3.

2.1.1

1) Existe y es 0.
2) Existe por la derecha y es -1.
3) No existe.
4) 3.
5) Existe y es 0.

2.1.1

1) Existe por la derecha y es -3.
2) Existe y es 1.
3) Existe y es -2.
4) No existe.
5) Existe y es 0.
6) Existe y es 3.

2.2. Preguntas sobre conceptos

2.2.1

1) $x \neq 3$.

2) No depende del dominio de la función, $x \neq 3$.

3) Sí.

4) $\forall a, a \in \mathbb{R} - \{-1, -3\}$.

5) Se omite.

6) Se omite.

7) $a = 15$.

8) $k = \dfrac{1}{2}$.

9) $a = b = 4$.

10) $\dfrac{3}{4}$.

2.2.2

1) -4.
2) -4.
3) -1.
4) No existe.
5) 6.
6) 5.
7) 6.
8) No existe.
9) 2.
10) 2.
11) 2.
12) 2.

Inmediatos, forma “$\frac{0}{0}$” y otros

2.3.1

1) $\frac{1}{2}$.
2) 0.
3) $\frac{5}{4}$.
4) $\frac{1}{2}$.
5) $-\frac{4\left(a^3-aw^2\right)}{a^4-aw^3}$.
6) $\frac{-1}{8}$.
7) -20.
8) $-\frac{1}{3}$.
9) 1.
10) $\frac{4}{3}$.
11) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.
12) 0.
13) $\frac{3}{2}$.
14) $-\frac{3}{4}$.
15) $\frac{5}{12}$.
16) $\frac{-1}{320}$.
17) $\frac{1}{32}$.
18) $-\infty$ izq, ∞ derecha.
19) $\frac{1}{8}$.
20) ∞ izquierda, $-\infty$ derecha.
21) $\frac{-3}{4}$.
22) 2.1^{-1} .
23) $\frac{-1}{2}$
24) $\frac{c}{3}$.
25) ∞.
26) ∞.
27) $\frac{4}{5}$.
28) 0.
29) $\nexists$.
30) ∞.
31) $-\infty$.
32) ∞ izq , $-\infty$ derecha.
33) ∞.
34) 0
35) $\frac{1}{2}$.
36) $-\frac{5}{2}$.
37) 0.

Trigonométricos

2.3.2

1) -4.
2) $\frac{-1}{4}$.
3) $\frac{3}{2}$.
4) 2.
5) $\frac{1}{2}$.
6) $\frac{\sqrt{2}}{8}$.
7) $\frac{3}{4}$.
8) $\frac{1}{2}$.

9) 2.

10) $\frac{3}{8}$.

11) ∞.

12) $\frac{-1}{4}$.

13) ∞.

14) 1.

15) $\frac{-3\sqrt{3}}{8\pi} \approx -0,206748$.

16) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

17) 2.

18) 5.

19) $\frac{45}{2}$.

20) ∞.

21) $\frac{-2}{\pi} \approx -0,636620$.

22) 0.

23) 0.

24) $\frac{1}{6}$.

25) $\frac{3}{2} + \sqrt{3} \approx 3,23205$.

26) ∞ izquierda, $-\infty$ derecha.

27) 0.

28) $\cos\alpha$.

29) $-\operatorname{sen}\alpha$.

Conceptos Básicos

2.4.1

1)

(a) 1.

(b) No existe.

(c) 2.

(d) 1; 1.

(e) ∞.

2)

(a) ∞.

(b) No existe.

(c) No existe.

(d) 3.

(e) 3.

3)

(a) -1.

(b) 0.

(c) 2.

(d) 1.

(e) 0.

(f) No existe.

(g) 0.

4)

(a) 2.

(b) No existe.

(c) -2.

(d) No existe.

(e) 2, 5.

(f) 2.

5)

(a) $-\infty$.

(b) 1.

(c) No existe.

(d) No existe.

(e) -2.

(f) ∞.

(g) ∞.

6)

(a) 1.
(b) ∞.
(c) 2.
(d) 1 .
(e) ∞.
(f) $-\infty$.
(g) 1.
(h) 1.

2.4.2
1) Se omite.
2) Se omite.
3) Se omite.
4) Se omite.

Cálculo de límites al infinito

2.4.3
1) 0.
2) ∞.
3) $-\dfrac{3}{2}$.
4) ∞.
5) $-\ln 4$.
6) -7.
7) 1.
8) 0.
9) 3.
10) $-\dfrac{x}{9}$.
11) $-\dfrac{9}{2}$.
12) $-\dfrac{1}{4}$.
13) 0.
14) 1.
15) 1.
16) 0.
17) 1.
18) 0.

2.5.1 No, los límites laterales son distintos.

2.5.2
1) $\mathbb{R}-\{1\}$
2) $\mathbb{R}-\{-1,2,3,4\}$

2.5.3
1) $a=-1$, $b=1$
2) $a=1$, $b=2$

2.5.4
1) Falso.
2) Verdadero.
3) Verdadero.
4) Falso.
5) i) Verdadero. ii) Falso.

2.5.5 f no es continua en -1 y $m=\dfrac{3}{2}$.

2.5.6 $k=2$ ó $k=-2$

2.5.7
a. $(a=2$ y $b=1)$ ó $(a=-2$ y $b=-1)$
b. $a=2$ y $b=1$.

2.5.8 $a=0$, $b=2$ y $c=\dfrac{-1}{15}$.

2.5.9 $a=1$ y $b=6$

2.5.10
1) No en 1.
2) No en 1.
3) No en 1.
4) No en 0

2.5.11
1) $a=\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{-1}{4}$
2) No es posible.
3) $a=\dfrac{-3}{2}$, $c=\dfrac{3}{2}$

Soluciones del Capítulo 3

3.1. Derivadas por definición

3.1.1

1) $-15.$

2) $-11.$

3) $\frac{1}{4}.$

4) $\frac{4}{\sqrt{3}}.$

5) $0.$

6) $\frac{\left(1+3\sqrt{3}\right)}{2}.$

7) $g'(x) = 2cx + b.$

8) $h'(x) = \frac{1}{2(x+1)^{3/2}}.$

9) $g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

10) $h'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}.$

3.2. Cálculo de derivadas

3.2.1

1) $f'(x) = 16x^7 - 15x^4.$

2) $f'(x) = 4x^{1/3} - 4x^{-1/3}.$

3) $g'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{2z\sqrt{z}}.$

4) $h'(z) = 3 - z^{-2} + 4z^{-3} - z^{-4/3}.$

5) $f'(s) = 4s^3 + 3s^2 + 6s + 2.$

6) $f'(v) = 3v^2 - 6v + 2.$

7) $f'(y) = 2 + 3y^{-2}.$

8) $f'(t) = 20t^{3/2} - \frac{1}{5}.$

9) $f'(x) = \frac{(ad-bc)}{(cx+d)^2}.$

10) $f'(t) = 2t + \left(\frac{1}{3-t}\right)^2.$

11) $f'(r) = \frac{[(1+r)\cos r - \operatorname{sen} r]}{(1+r)^2} - \frac{[-\operatorname{sen} r(1-r) - \cos r]}{(1-r)^2}.$

12) $f'(u) = \frac{12u^2 + 8u - 1}{(u+2)^2}.$

13) $f'(p) = -24p^3 - 3p^2 - 8p - 1.$

14) $f'(x) = \frac{10-2x}{(x+1)^3}.$

15) $f'(t) = \frac{-4t^2 + 6t - 1}{(1-t)^2(t-2)^2}.$

16) $f'(u) = \frac{u^4 + 8u^3 - 13u^2 - 14u - 18}{(u-1)^2(5+u)^2}.$

17) $f'(r) = \frac{64r^2 + 48r - 12}{r^2(1-2r)^2}.$

18) $g'(x) = -4x^{-3}\arctan x + \frac{2x^{-2}}{x^2+1}.$

19) $g'(x) = \frac{\operatorname{arc\,cos} x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

20) $h'(x) = \frac{1}{1+\cos x}.$

21) $f'(u) = \frac{2}{u\,(1-\ln u)^2}.$

22) $f'(u) = \frac{1 + \ln u + e^u\,(u\ln u - \ln u - 1)}{(1-e^u)^2}.$

23) $f'(z) = z^{-2/3}\left(1 + \frac{\ln z}{3}\right).$

24) $g'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}.$

25) $g'(t) = \frac{1 + t - t\ln t}{t\,(t+1)^2}.$

26) $h'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x.$

27) $h'(z) = \frac{e^z\left(\sqrt{1-z^2}\operatorname{arc\,cos} z + 1\right)}{\sqrt{1-z^2}\,(\operatorname{arc\,cos} z)^2}.$

28) $h'(z) = \frac{-1}{\sqrt{z}\,(1+z^2)} - \frac{\operatorname{arc\,cot} z}{2z\sqrt{z}}.$

3.3. Regla de la cadena

3.3.1

1) $f'(y) = 24\left[\left(y^2+3\right)^4 - 1\right]^2 \cdot \left(y^2+3\right)^3 \cdot y.$

2) $f'(\theta) = 5\sec(5\theta) + 10\,\text{sen}^2(5\theta)\sec^3(5\theta).$

3) $f'(x) = 27(x-7)^2/(x+2)^4.$

4) $f'(t) = \dfrac{18t^5 - 105t^4}{2\sqrt{t^2-5t^3}}.$

5) $f'(x) = \dfrac{3\tan^2(x)\sec^2(x)(\sin(x)+2) - \cos(x)\left(\tan^3(x)-1\right)}{(\sin(x)+2)^2}$

6) $f'(x) = (4x-5)\,e^{2x^2-5x+3}.$

7) $f'(q) = 5\left(q - 3e^{\frac{q}{3}}\right)^4\left(1 - e^{\frac{q}{3}}\right).$

8) $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$

9) $f'(x) = t^{-1} + t\left(t^2+1\right)^{-1}.$

10) $f'(p) = 3p^2\left(p^3-1\right)^{-1} - 2p + 5\,(2-10p)^{-1}.$

11) $f'(z) = \frac{1}{2}z^{-1}\,(1+\ln z)^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{2}z^{\frac{-1}{2}}\,\left(1+\sqrt{z}\right)^{-1}.$

12) $f'(x) = 3e^{3x}g\left(\ln^2 x\right) + 2e^{3x}g'\left(\ln^2 x\right)\dfrac{\ln x}{x}.$

13) $f'(y) = \dfrac{2\ln(2y+6)}{(y+3)}.$

14) $f'(z) = \dfrac{2\ln\left(\ln\left(2z^3-8z\right)\right)\left(6z^2-8\right)}{\left[(2z^3-8z)\ln\left(2z^3-8z\right)\right]}.$

15) $f'(x) = \dfrac{\text{sen}(2x)\left(e^x+\sec^2(x+1)\right) - 2\cos(2x)(e^x+\tan(x+1))}{\text{sen}^2(2x)}$

16) $f'(w) = \dfrac{1}{2(w-1)} - \dfrac{3}{w} + \dfrac{\text{sen}(w^2)\cdot 2w}{\cos(w^2)}.$

17) $h'(z) = 2\arccos\left(\frac{e^{-z}}{z}\right)\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{e^{-z}}{z}\right)^2}}\cdot\dfrac{-ze^{-z}-e^{-z}}{z^2}$

18) $f'(x) = \dfrac{3\arctan^2(\ln(x^2+e^x))\cdot(2x+e^x)}{(x^2+e^x)\cdot(1+\ln^2(x^2+e^x))}.$

19) $h'(x) = \dfrac{3\ln 3\cdot 3^{g(x^3+4)}\cdot g'(x^3+4)\cdot x^2}{3^{g(x^3+4)}+1}.$

20) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-2x^2}(x+3)}{(4x-1)^2}\left(\dfrac{-2x}{1-2x^2} + \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{8}{4x-1}\right).$

21) $f'(v) = \sqrt{\dfrac{(v-1)^3}{(2v+7)(5-v)^2}}\left(\dfrac{3}{2v-2} - \dfrac{1}{2v+7} + \dfrac{1}{5-v}\right)$

22) $f'(t) = 2t^{\ln t - 1}\ln t.$

23) $f'(w) = e^w w^{1-w}\left(w^{-1} - \ln w\right).$

24) $g'(z) = -2e^{1-2z}\sec\left(e^{1-2z}\right)\tan\left(e^{1-2z}\right).$

25) $h'(u) = e^{u\,\text{sen}\,u}(\text{sen}\,u + u\cos u) - \dfrac{12u\ln^2\left(3-2u^2\right)}{3-2u^2}.$

26) $h'(u) = -12ku^2\cos^3\lfloor\text{sen}\left(ku^3\right)\rfloor\,\text{sen}\lfloor\text{sen}\left(ku^3\right)\rfloor\cos\left(ku^3\right)$

27) $g'(u) = 2\cot u\ln(\text{sen}\,u) - \dfrac{2e^{2u}}{1-e^{2u}}.$

28) $g'(u) = 3u^2\sec\left(u^3\right).$

3.3.2

1) $y' = \dfrac{f'(\ln z) - (1+z)f(\ln z)}{z^2e^z}.$

2) $y' = e^{f(u)}\left[f\left(e^{-u}\right)f'(u) - e^{-u}f'\left(e^{-u}\right)\right].$

3) $y' = 2nw^{2n-1}f'\left(w^{2n}\right) - n\left[f(w)\right]^{n-1}f'(w).$

4) $y' = e^{4w}\left[4f(\ln^3 w) + \dfrac{3\ln^2 w}{w}f'(\ln^3 w)\right].$

3.4. Valor Numérico

3.4.1

1) $(f\cdot g)'(2) = 5.$

2) $h'(-1) = -6.$

3) $(f/g)'(5) = 8.$

4) $q'(4) = \dfrac{3}{16}.$

5)
   a) $(f+g)'(5) = -1.$
   b) $f\cdot g)'(5) = 8.$
   c) $(f/g)'(5) = -8.$
   d) $g/f)'(5) = 2.$

e) $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(5) = 8$.

6) $(p \circ q)'(6) = -4$.

7) $h'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

8) $h'(0) = -\dfrac{3}{2}$.

9) $g'(0) = -3$.

10) $H'(3) = 28$.

11) $H'(3) = \dfrac{e-12}{e}$.

12)

a) $F'(0) = -a$.

b) $H'(0) = 3\ln 2$.

13)

a) $f'(3) = \dfrac{-1}{6}$.

b) $g'(4) = \dfrac{21}{2}$.

14) $(f \cdot g)'(5) = 8$ y $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(5) = 8$.

15) $f'(1) = \dfrac{3}{2}$.

16) $f'(3) = \dfrac{-1}{6}$.

3.5. Conceptos teóricos

3.5.1

1) Se omite.
2) Se omite.
3) $a = 2$ y $f(x) = x^6$.
4) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f'(x) = x^2 + 1$.
5) Se omite.
6) Se omite.
7) Se omite.
8)

a) Se omite.

b) $a = c, \quad b = 0$.

9) Se omite.

10) $f'(x) = \dfrac{x^2}{8}$.

3.6. Derivación implícita

3.6.1

1) $\dfrac{1}{3}$.

2) -1.

3) $z' = \dfrac{1}{2z(w+z)-1}$.

4) $x' = \dfrac{-x}{[\ln(2x+y)(2x+y)+2x]}$.

3.6.2 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-2}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2y}{(y-2)^2}$.

3.6.3

1) $y' = \dfrac{2y^2e^{2x} - 3x^2y - y\ln^2 y}{2x\ln y - y\cos y - ye^{2x}}$.

2) $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x - y^2 - 1}{2xy - e^y}$.

3) $y' = \dfrac{ye^{xy}+1}{1+3y^2-xe^{xy}}$.

3.7.1

1) $f'(x) = \left(2x\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}\right)(x+1)^{x^2}$

2) $g'(x) = \dfrac{2^{x-1}x^x(\ln(2x)+1)}{\sqrt{(2x)^x}}$

3) $h'(x) = \left(3\ln\left(x^3+x\right) + \frac{(3x^2+1)(3x-2)}{x^3+x}\right)\left(x^3+x\right)^{3x-2}$

3.7.2

1) $y' = \dfrac{(x+3)\left[\operatorname{sen}(x)\cdot(x+3) - \cos(x)\cdot(x+1)\right]}{e^x\cos^2(x)}$

2) $h'(x) = -\dfrac{39x^3 - 14x^2 + 51x - 6}{4x^{\frac{1}{4}}(3x+2)^6\sqrt{x^2+1}}$

3) $f'(x) = -\dfrac{x\left(5x^6 - 45x^3 + 4\right)}{\left(5x^3+1\right)^3}$

3.8. Derivadas de orden superior

3.8.1

1) $z''' = -64e^{1-4q}$.

2) $x'' = 16(1+2s)^{-3}$.

3) $y'' = 10$.

4) $y''' = -12(x+1)^{-4}$.

5) $y'' = \dfrac{2y}{(2-y^2)^3}$.

6) $y'' = \dfrac{9}{y(1-\ln y)^3}$.

3.9. Otros ejercicios

3.9.1

1) Se omite.

2) $A = B = \dfrac{-1}{2}$ y $C = \dfrac{-3}{4}$.

3.9.2

1) Se omite.

2) a) $F'''(x) = f'''(x)\cdot g(x) + 3f''(x)\cdot g'(x) + 3f'(x)\cdot g'' + f(x)\cdot g'''$.

b) $F^{(4)}(x) = f^{(4)}(x)\cdot g(x) + 4f'''(x)\cdot g' + 6f''(x)\cdot g''(x) + 4f'(x)\cdot g'''(x) + f(x)\cdot g^4(x)$.

3.9.3 Se omite.

3.9.4 Se omite.

3.9.5 Se omite.

3.9.6 Se omite.

3.9.7 $Q(2) = 6$.

Soluciones del Capítulo 4

4.1. Movimiento rectilíneo

4.1.1

1) 1. 1.1 m/s.
2) -8.7 m/s.
3) -3.849 m/s.
4) 3.8m/s.
5) -28.6356 m/s.

4.1.2

1) -34.3 m/s.

2) -29.89 m/s.

3) -29.4049 m/s.

4) -29.4 m/s.

5) -54.2218 m/s.

4.1.3 $h_0 = 11.4796$ m.

4.1.4

1) $(18-4t)$ m/s.
2) 4.5s.
3) 4s.
4) Sí, porque tarda menos en chocar que en detenerse.

4.1.5 $v_m = 7$.

4.2. Recta tangente, recta normal

4.2.1

Recta tangent: $y = -4x+5$. Recta normal: $4y = x - 14$.

4.2.2 $f(x) = 2x^2 - x$.

4.2.3

Parábola: $f(x) = \dfrac{-x^2}{2}$. Recta tangente: $2x + y = 2$.

4.2.4

Hay dos puntos de tangencia para la recta dada: $P(3-3)$ y $Q(1,3)$. Las rectas normales, respectivamente son: $y = x - 6$ y $y = x + 2$. La recta tangente en Q es: $y = -x + 4$.

4.2.5

Recta normal: $y = x - 3e^{-2}$. Recta tangente horizontal en: $P(e^{-1}, -e^{-1})$.

4.2.6 $w - 1 = -(u + 2)$.

4.2.7

1) $y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{18}(x - 8)$.

2) $y - 1 = -2(x - \frac{\pi}{2})$.

4.2.8 $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$.

4.2.9 $(2, 4)$.

4.2.10 $\left(-1, e^{-1}\right)$.

4.2.11 $y - 3 = \frac{1}{5}(x + 1)$.

4.2.12 $y + 2 = \frac{9}{4}(x - 3)$.

4.2.13 La recta tangente es perpendicular a la recta $y = -\frac{x}{9}$ en $(-2, 3)$ y $(2, 7)$. Posee rectas tangentes horizontales en $(1, 3)$ y $(-1, 7)$.

4.2.14 5.

4.2.15 236.

4.2.16 $y = x + 3\ln 3$.
La segunda recta tangente: $y = x + \frac{35}{4} - \ln 8$.

4.2.17 $y = -\frac{x}{4} + \frac{5}{16}$.

4.2.18 $y = 3$ y $y = \frac{2}{3}x - 5$.

4.2.19 $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$.

4.3. L'Hôpital y formas indeterminadas

4.3.1

1) $\frac{-1}{6}$.

2) $-\sqrt{2}$.

3) 1.

4) 0.

5) -1.

6) e^3.

7) 1.

8) 1.

9) e^{rt}.

10) $\frac{1}{4}$.

11) $\frac{1}{2}$.

12) 1.

13) 1.

14) e^{-1}.

15) 0.

16) $\frac{1}{2}$.

17) 1.

18) $\frac{1}{2}$.

19) 0.

20) e^{-2}.

21) $+\infty$.

22) -2.

23) $\frac{k+n}{n}$.

24) e.

25) $\frac{-1}{4}$.

26) $-\pi$.

27)

a) Si $n = 1$ entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - (1+x)}{x^n} = 0$.

b) Si $n = 2$ entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - (1+x)}{x^n} = \frac{1}{2}$.

c) Si $n \geq 3$ entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - (1+x)}{x^n} = +\infty$.

4.4. Conceptos teóricos

4.4.1

1) Se omite.
2) Se omite.

4.4.2 $a + b + c + d = 24$.

4.4.3 $a = \frac{4}{3}$ y $b = -2$.

4.4.4 $a = \frac{1}{2}$.

4.4.5 Se omite.

4.5.1

1) Se acerca a 0,480740 m/s.
2) Crece 18849,6 cm^2/s.
3) Disminuye 0,00530516 cm/min.
4) Entran 9,29204 L/s.
5) Aumenta $0,0208\overline{3}$ cm/s.
6) Sube 6,25 cm/min.
7) Aumenta 0,125 rad/s.
8) 615,752 km/h.
9) 0,0796 dm/s, aproximadamente.
10)
   a. $-3,65$ m/s.
   b. $-5,613$ m^2/s.
   c. $-0,9869$ rad/s.
11) Se acercan a una velocidad de 25 m/min.
12) 4,2 m/s.
13) -66,67 m/s.
14) 0,8418 cm/s, aproximadamente.
15) Disminuye a razón de 1,22 m/s.
16) Disminuye a razón de 0,28 m/min.
17)
   a. Disminuye a razón de 750 km/h.
   b. 20 min.
18) Aumenta a razón de 3,44 unid^2/s.

4.6. Extremos, crecimiento, decrecimiento y concavidad.

4.6.1 $a = -2$ y $b = 4$. Es valor mínimo.

4.6.2 $a = \frac{2}{3}$ y $b = -1$.

4.6.3 $f(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{-4}{3}x + \frac{7}{9}$.

4.6.4

1) F.
2) F.
3) V.
4) F.
5) F.
6) V.
7) V.

4.6.5

1) $c \in \left(\,]-\infty, -\frac{1}{3}[\, \cup \,]\frac{1}{3}, +\infty[\, \right)$
2) $c = \frac{1}{3}$ o $c = -\frac{1}{3}$
3) $c \in \,]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$

4.6.6

1) $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 1$.
2) $x = -\frac{1}{2}$.

4.6.7

1) Máx en $(-3, 297)$; mín en $(0, 0)$.

2) Máx en $(2, 1)$; mín en $(-2, -\frac{1}{3})$.

3) Máx en $(1, -2)$; mín en $(e, -e)$.

4) Máx en $\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right), (0, 1)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$; mín en $\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$ y $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$.

4.6.8

1) Crece en $]-\infty, -2[$ y en $[0, \infty[$; decrece en $[-2, 0]$; máx en $\left(-2, 3\sqrt[3]{4}\right)$; mín en $(0, 0)$.

2) Crece en $[-2, 0]$; decrece en $]-\infty, -2]$ y en $[0, \infty[$; máx en $(0, 1)$; mín en $(-2, frac13)$.

3) Máx en $(0, -2)$; mín en $(2, 2)$.

4) Máx en $\left(0, e^4\right)$; mín en $(-2, 5)$ y en $(2, 5)$.

5) Mín en $(0, \ln 5)$.

4.6.9 $k = 1$. Se trata de un mínimo.

4.6.10 $a = -3,\ b = 3,\ c = 0$.

4.7. Trazo de curvas

4.7.1

1) $z = -\dfrac{3}{2}, y = \dfrac{-1}{2}$.

2) $x = 3, y = 1$.

3) $w = 0, y = -1$ en $-\infty$, $y = 1$ en ∞.

4) $u = -2, y = 2u - 4$.

5) $x = 0, y = -1$ en $-\infty$, $y = x$ en ∞.

4.7.2

1) f crece en los intervalos: $]2, 4[$ y $]6, +\infty[$ pues es donde $f'(x) > 0$.

2) Sólo en$x = 4$; pues $f'(x) = 0$. Alrededor de este punto f' cambia de signo.

3) En $x = 2$ y $x = 6$; pues $f'(x) = 0$. Alrededor de estos puntos, f' cambia de signo.

4) f es cóncava hacia arriba en los intervalos $]1, 3[$, $]5, 7[$ y $]8, +\infty[[$; pues f' crece.

5) En $x = 1; x = 3; x = 5; x = 7$ y $x = 8$; puesf' alcanza máx. o mín. relativos, o bien, f' no existe y hay cambio de monotonía de f'.

4.7.3

1)

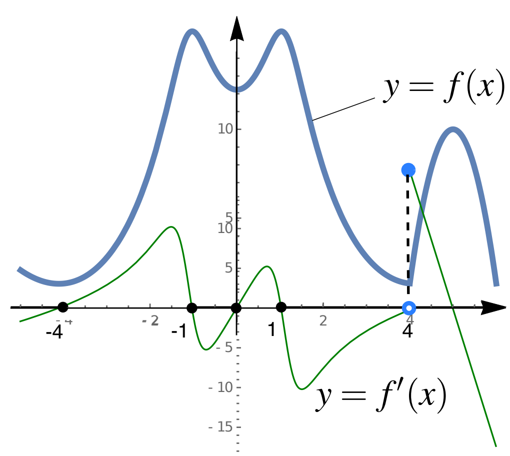
2)

3)

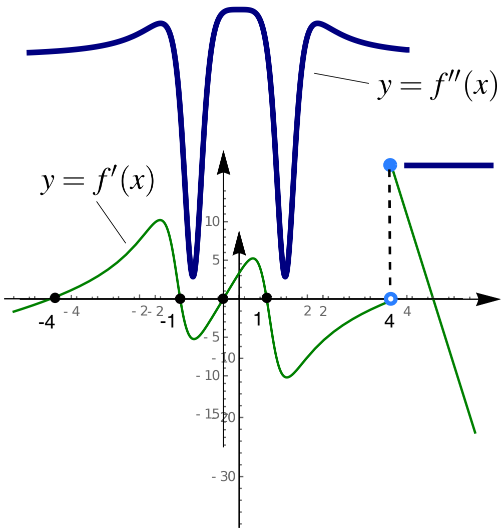
4)

5)

6)

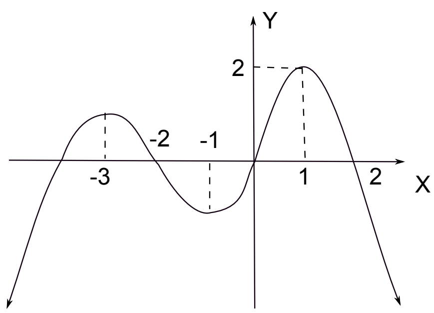


7)

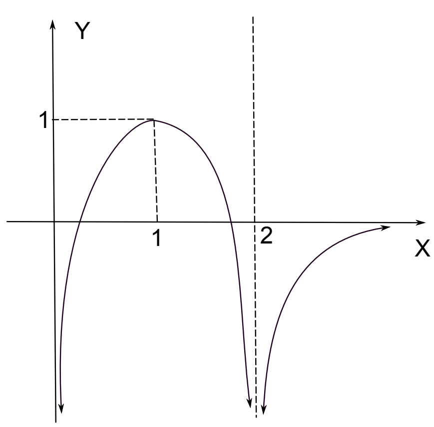

$y = f''(x)$
$y = f'(x)$
10
5
-4
-1
1
4
-5
-10
-15
-20
-30

4.7.4

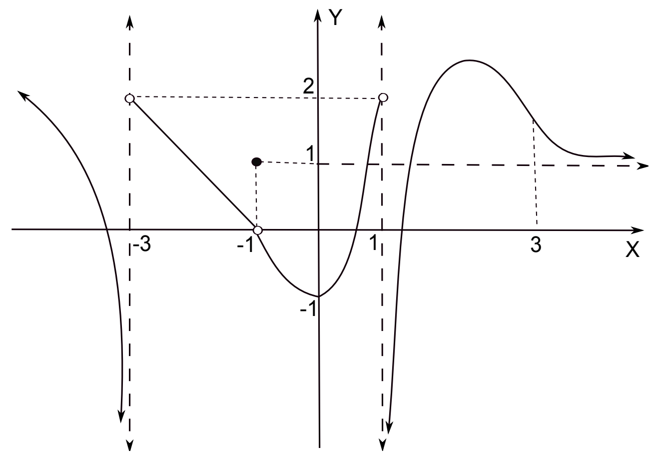
1)


Y
2
-2
-1
-3
1
2
X

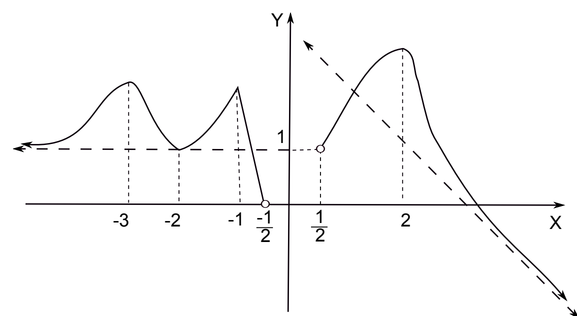
2)


Y
1
1
2
X

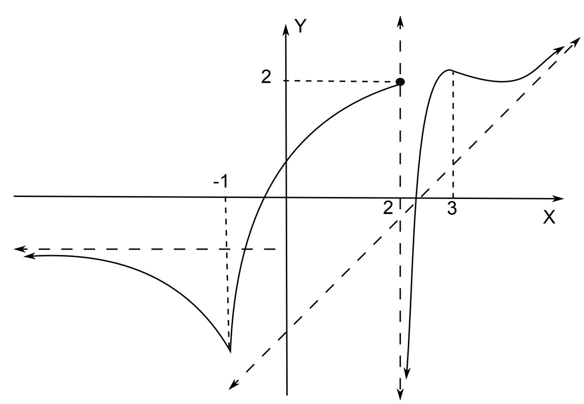
3)


Y
2
1
-3
-1
1
3
X
-1

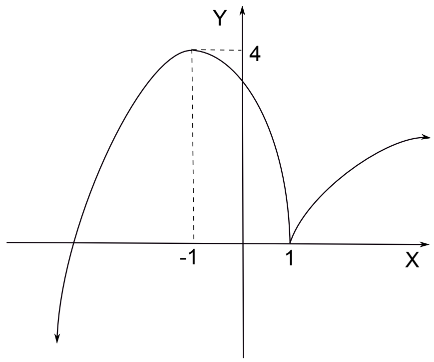
2)


Y
1
-3
-2
-1
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
2
X

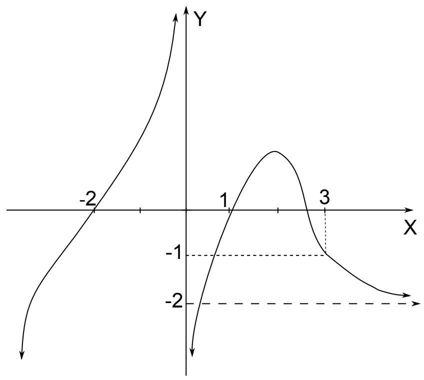
5)


Y
2
-1
2
3
X

6)

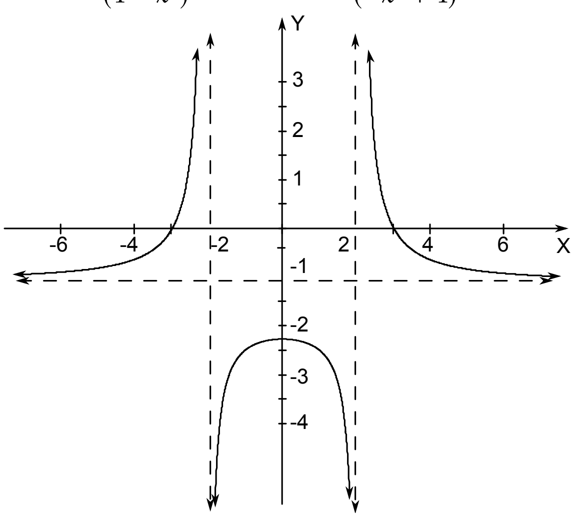


4.7.5

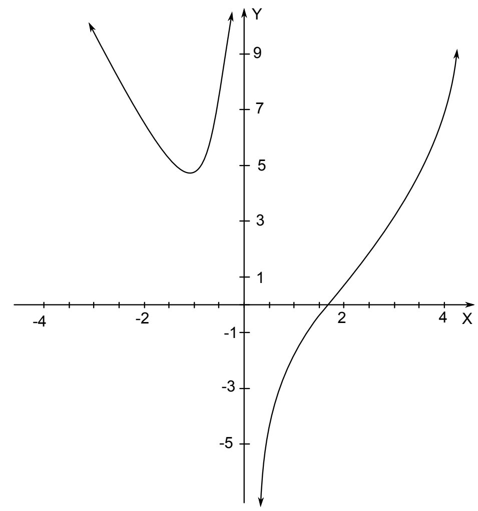


4.7.6

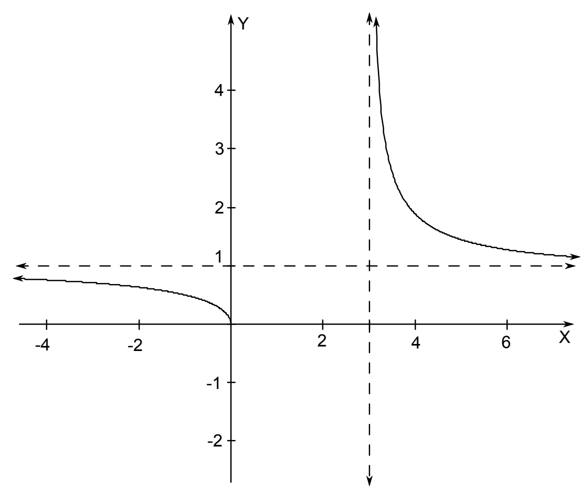
1) $f'(x) = -\dfrac{10x}{(4-x^2)^2}, \quad f''(x) = -\dfrac{10\left(3x^2+4\right)}{(-x^2+4)^3}$



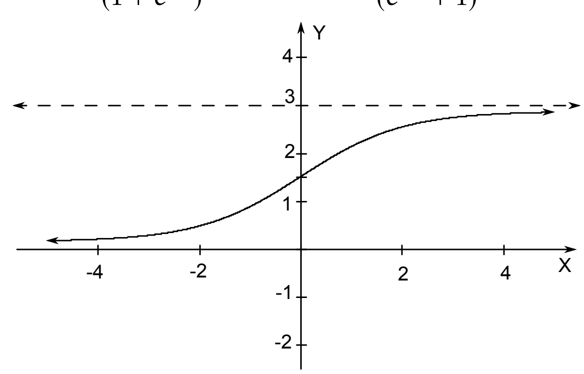
2) $f'(u) = \dfrac{2u^3+4}{u^2}, \quad f''(u) = \dfrac{2\left(u^3-4\right)}{u^3}$



3) $g'(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt{x}(x-3)^{\frac{3}{2}}}, \quad g''(x) = \dfrac{3\left((x-3)^{\frac{3}{2}}+3x\sqrt{x-3}\right)}{4x^{\frac{3}{2}}(x-3)^3}$



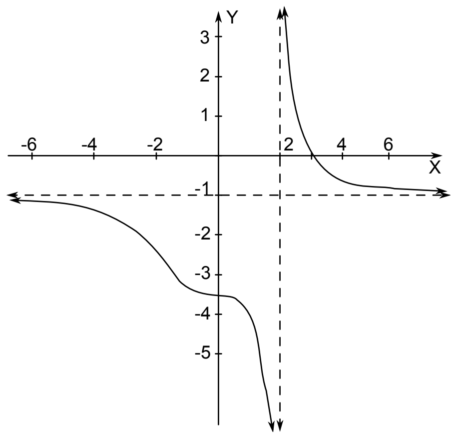
4) $h'(x) = \dfrac{3e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad h''(x) = \dfrac{3e^{-2x}\left(-e^{x}+1\right)}{(e^{-x}+1)^3}$



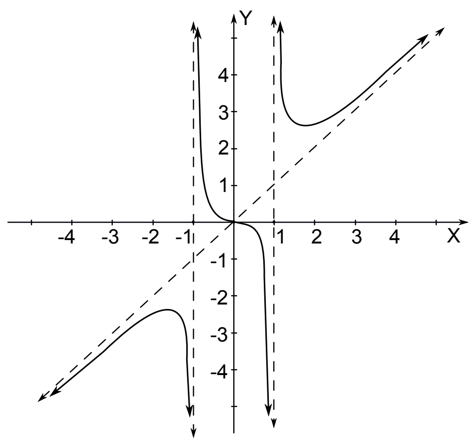
4.7.7 A.H cuando $x \longrightarrow +\infty : y = \dfrac{-\pi}{4}$, A.V: $x = -3$, A.O: cuando $x \longrightarrow -\infty : y = 4x$.

4.7.8

1)



2)



4.8. Problemas de Optimización

4.8.1

1) 2 dm de largo, 2 dm de ancho y $\dfrac{4}{3}$ dm de alto.

2) $\left(\dfrac{45}{37}, \dfrac{63}{37}\right)$

3) A las 2 : 21 : 36 p.m.

4) $y = \dfrac{-5}{3}x + 10$.

5) La base mayor 8 unid, la menor 4 unid y la altura $2\sqrt{3}$ unid.

6) Correr 68,956 m; nadar 50,364 m; 1,955 min.

7) Correr 68, 956 m, nadar 50, 364 m; 1, 955 min.

8) 2.5 cm $\times$ 6 cm.

9) 200 m $\times$ 300 m, con la división paralela al lado de 200 m.

10) 63.66 m el radio de los semicírculos, 200 m los lados rectos.

11) 2.8794 cm el radio de la base, 8.6382 cm la altura; costo 23.44 colones.

12) 7.00527 cm el radio del cilindro, 7.00527 cm la altura del cilindro.

13) $A = 9$ cuando $x = 3$.

14) 18.

15) $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$, entre $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{7}{8}, \dfrac{-1}{8}\right)$.

16) Ancho y largo iguales: 25 metros.

17) Los números son: 55 y 55.

18) En el círculo hay que emplear 10 metros.

19) 4 dm el lado de la base, 2 dm la altura.

20) Ancho: $\dfrac{3}{2}$; largo: 3.

21) Ancho y largo iguales: aproximadamente 3,54.

22) Vol=2750 m^2.

23) Largo 26 cm y ancho 24 cm.

Soluciones del Capítulo 5

5.1. Integrales básicas y sustitución

5.1.1

1) $\frac{1}{8}w^2+\frac{1}{2w^2}+C.$

2) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}-\frac{4\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}+C.$

3) $e^q+e^{-q}+C.$

4) $-\frac{1}{\ln 2}\ln\left|5+t\ln 2-2^t\right|+C.$

5) $e^u+2u-e^{-u}+C.$

6) $\sqrt{1+\ln\left(u^2+1\right)}+C.$

7) $\frac{5r^3}{3}-\csc r+C.$

8) $\frac{8v^{\frac{3}{2}}}{9}-\frac{8v^{\frac{1}{2}}}{3}-\frac{2}{3v^{\frac{1}{2}}}+C.$

9) $\frac{1}{3}\left(\frac{w^4}{4}-w^2-4\ln|w|-\frac{4}{w^2}\right)+C.$

10) $3\ln\left(4q^2+7\right)+C.$

11) $-3z^{-1}-\frac{3}{2}\ln\left(z^2+1\right)+C.$

12) $-3\left(\frac{\tan(x)}{\tan(5)}+\frac{(1+\tan(5))\cdot\ln\left(\tan(5)\tan(x)-1\right)}{\tan^2(5)}\right)+C$

13) $\frac{(5+\tan\alpha)^{3/2}}{3}+C.$

14) (Sug: Recuerde que $\tan^2(x)=\sec^2(x)-1$)

$\frac{\sec^3\alpha}{3}-\sec\alpha+C.$

15) $x-1+2\ln|x-1|+C.$

16) $\ln\left(e^x+1\right)+C.$

17) $\frac{-\cos^2(2x)}{4}+C.$

18) $-\frac{\ln^2(\cos x)}{2}+C.$

19) (Sug: Recuerde que $[x^x]'=x^x\ln(x+1)$)

$x^x+C.$

20) $\arctan x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$

21) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}x^2+C.$

22) $\frac{5\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}{3}+C$

23) $-\frac{2}{3}(1+\cos x)^{3/2}+C.$

24) (Sug: Multiplique por $\frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}$ y separe)

$\frac{2\cos x+2}{\operatorname{sen}x-\cos x-1}+C.$

25) $\sqrt{3+u^2}+C.$

26) $\frac{5\ln|2x+1|}{4}+\frac{x}{2}+C.$

27) (Sug: Sustitución y luego separe en fracciones)

$11\ln|x-1|+x^2+6x+C.$

28) $2\sqrt{z+1}+z+1+C.$

29) $\ln|\operatorname{sen}x+\cos x|+C.$

30) (Sug: Recuerde que $\csc(x)\sec(x)=2\csc(2x)$)

$\frac{\ln^2|\tan(x)|}{2}+C$

31) (Sug: Sustituición y $\frac{2}{u^2-1}=\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}$)

$\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$

32) $\frac{4\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3}{3}-4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C.$

33) $\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}-2(x+1)+6\sqrt{x+1}$

$-12\ln\left(\sqrt{x+1}+2\right)+C.$

34) $\frac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3}-8\sqrt{x+3}+16\arctan\left(\frac{\sqrt{x+3}}{2}\right)+C.$

35) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$

36) $\frac{3\ln\left|\sqrt[3]{x^2}-1\right|}{2}+C.$

37) $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}\right)+C$

38) $-\frac{2}{3}y^2\left(9-y^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}\left(9-y^2\right)^{\frac{5}{2}}+C$

5.2. Integración de potencias trigonométricas

5.2.1

1) (Sug: Recuerde que $\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$)

$\frac{3x}{2}+\cos(2x)-\frac{1}{8}\,\text{sen}(4x)+C.$

2) $\frac{\sec^3 x}{3}+C.$

3)
(Sug: Recuerde que $\tan^2(x)=\sec^2(x)-1$ y luego haga una sustitución)

$\frac{1}{2}\tan^2 x+C.$

4) $\frac{1}{5}\sec^5 z-\frac{1}{3}\sec^3 z+C.$

5) $\ln|4+\tan x|+C.$

6) (Sug: Multiplique por $\frac{1+\sin(x)}{1+\sin(x)}$ y luego haga una sustitución)

$\ln|1+\text{sen}\, r|+C.$

7) $-\frac{2}{7}\sqrt{(1+\cos(x))^7}+\frac{4}{5}\sqrt{(1+\cos(x))^5}+C.$

8) $2\tan x+2\sec x-x+C.$

9) $\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{6}\tan^6 x+C.$

10) $-\frac{1}{3}\left(\cos 3x-\frac{1}{3}\cos^3 3x\right)+C.$

11) $-\frac{1}{3}\cot^3 x+\cot x+x+C.$

12) $\frac{1}{25}\tan^5 5x+\frac{1}{15}\tan^3 5x+C.$

5.3. Sustitución trigonométrica

5.3.1

1) $\ln\left|\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{3}\right|+C.$

2) (Sug: Recuerde que $\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$)

$3\,\text{arc sen}\left(\frac{r}{2}\right)-\frac{r\sqrt{4-r^2}}{2}+C.$

3) $-\frac{x}{25\sqrt{4x^2-25}}+C$

4) (Sug: Completación de cuadrados y haga sustitución)

$\frac{\arctan(x+1)}{2}+\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+C.$

5) (Sug: Completación de cuadrados y $u=x+2$)

$\frac{x+2}{9\sqrt{-x^2-4x+5}}+C.$

6) $4\,\text{arcsen}x+C.$

7) $\frac{\sqrt{u^2-5}}{25u}-\frac{\sqrt{(u^2-5)^3}}{75u^3}+C.$

8) (Sug: Completación de cuadrados y sustitución)

$\text{arcsen}\left(\frac{z+1}{2}\right)-\sqrt{3-2z-z^2}+C.$

9) $\pm\,\text{arcsen}(x+1)+C_1=\text{-arccot}\left(\sqrt{x^2+2x}\right)+C_2.$

10) $-\frac{\sqrt{25-x^2}}{25x}+C.$

11) (Sug: Sustitución trigonométrica y multiplique por $\frac{\cot(u)+\csc(u)}{\cot(u)+\csc(u)}$)

$\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{x}\right|+C.$

12) (Sug: Recuerde que $\tan^2(x)=\sec^2(x)-1$)

$\sqrt{9x^2-4}-2\,\text{arcsec}\left(\frac{3x}{2}\right)+C.$

13) $-\frac{4x+7}{6\left(x^2+2x+4\right)}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)+C$

14) (Sug: Completación de cuadrados y sustitución)

$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}}{3}\right|+C.$

15) $\operatorname{arc\,sen}(x-2)+C.$

16) (Sug: Reescriba $\cos^2(x)=\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}$)

$\dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x)+x\sqrt{1-x^2}}{2}+C.$

17) $-\arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)+\sqrt{x^2-1}+C.$

5.4. Integración por partes

5.4.1

1) $-e^{-w}(w+2)+C.$

2) $\dfrac{1}{\ln 10}\left[y\ln\left|5y^2-4y\right|-2y-\dfrac{4\ln|5y-4|}{5}\right]+C$

3) $y\ \mathrm{arcsen}2y+\dfrac{\sqrt{1-4y^2}2}{+}C.$

4) $\dfrac{p\,(p-2)\,e^{\,p(p-2)}}{2}+C$

5) $\dfrac{e^t}{(t+1)}+C.$

6) $\dfrac{\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|}{2}+C.$

7) $\dfrac{r\,[\cos(\ln r)+\operatorname{sen}(\ln r)]}{2}+C.$

8) $\left(y^3+y\right)\ln\left(y^2-1\right)-\dfrac{2y^3}{3}-4y+2\ln|\dfrac{y+1}{y-1}|+C.$

9) $\dfrac{w^2 8^{w^2+1}}{2\ln 8}-\dfrac{8^{w^2+1}}{2\ln^2 8}+C.$

10) $\dfrac{-\ln|z|}{(z+1)}+\ln|z|-\ln|z+1|+C.$

11) $\dfrac{x\ln|x|-x}{2}+C.$

12) $x\sec x-\ln|\sec x+\tan x|+C.$

13) $\dfrac{x^2\arctan(x)+\arctan(x)-x}{2}+C.$

14) Sug. 1ro $u=e^{-x^2}$, luego partes.

$-\dfrac{x^2e^{-x^2}}{2}-\dfrac{e^{-x^2}}{2}+C.$

15) $x-\sqrt{1-x^2}\cdot\operatorname{arc\,sen}x+C.$

16) $\dfrac{e^{2\theta}\,(2\operatorname{sen}3\theta-3\cos 3\theta)}{13}+C.$

17) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C.$

18) $x\ln\sqrt{x}-\dfrac{x}{2}+C.$

19) $\operatorname{sen}x\cdot\ln|\operatorname{sen}x|-\operatorname{sen}x+C.$

20) $\operatorname{sen}x\cdot\ln|\operatorname{sen}x|-\operatorname{sen}x+C.$

5.4.2 (Sug: Use $|x|=\sqrt{x^2}$ y eventualmente hay que racionalizar)

Como $|x|=\sqrt{x^2}$ entonces

$$\int|x|\,dx=\int\sqrt{x^2}\,dx$$

Ahora si $u=\sqrt{x^2}$ y $dv=dx$

$$\begin{cases}\displaystyle\int\sqrt{x^2}\,dx &= x\sqrt{x^2}-\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\,dx\\[2ex] &= x\sqrt{x^2}-\displaystyle\int\sqrt{x^2}\,dx\end{cases}$$

$\therefore\ 2\displaystyle\int\sqrt{x^2}\,dx=x\sqrt{x^2}$

Es decir, $\therefore\ \displaystyle\int\sqrt{x^2}\,dx=\frac{x|x|}{2}+K$

5.5. Fracciones parciales

5.5.1

1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C.$

2) $2\ln|x-1|+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-3\arctan x+C.$

3) $-\dfrac{-9}{4(2p-1)}+\dfrac{1}{4\ln|2p-1|}+\ln|p|-\ln|p+2|+C.$

4) $\dfrac{4}{z}-\dfrac{3}{z+1}-3\ln|z+1|+3\ln|z-1|+C.$

5) $\dfrac{-2}{u-2}-\dfrac{1}{(u-2)^2}+\dfrac{3}{2(2u+1)}+\dfrac{\ln|2u+1|}{2}+C$

6) $\frac{5}{3}\ln|u+2|-\frac{2}{3}\ln|u-4|+C.$

7) $w+\ln|w|+2\ln|w+2|+9\ln|w-4|+C.$

8) $\frac{\ln|x-2|}{12} - \frac{\ln|x+2|}{28} - \frac{\ln|x-5|}{21} - \frac{1}{x-5} + C.$

9) $2\log_3|3^x-2| + 2\log_3|3^x+1| - 3x + C.$

10) $x - \ln|x| + 2\ln|x-1| + C.$

11) $-\frac{1}{36}\ln|x+5| + \frac{1}{6(x+5)} + \frac{1}{36}\ln|x-1| + C.$

12) $\frac{\ln|x-1|}{3} - \frac{\ln|x^2+x+1|}{6} - \frac{\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C.$

13) $3\ln|x| + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln|x^2+4| + C.$

14) $2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + C.$

15) $\frac{5}{4}\ln|2x+1| + \frac{x}{2} + C.$

16) $11\ln|x-1| + x^2 + 6x + C.$

12) $\arctan q + \ln|q| - \frac{1}{2}\ln|q^2+1| + C.$

13) $\frac{-\left(q^2+4\right)}{32q\sqrt{q^2+8}} + C.$

14) $\ln|\sec t + \tan t| - \ln|\cos t| + C.$

15) $-\frac{1}{2t^2} - \ln|t| + \ln|3t-2| + C.$

16) $\frac{1}{2}\ln^2(\ln x) + C.$

17) $\frac{2}{7}\sqrt{\operatorname{sen}(7x)-\cos(7x)} + C.$

18) $\frac{1}{2}\left(\cos y^2 + y^2\operatorname{sen} y^2\right) + C.$

19) $\frac{\ln\left(x^2+4x+6\right)}{2} - \frac{5}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + C.$

20) $\ln\left|\frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 2}\right| + C.$

21) $26\ln|x-3| - 22\ln|x-2| + \frac{9}{x-2} + C.$

22) $\ln|\sec(\ln(4z)) + \tan(\ln(4z))| + C.$

23) $x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + C.$

24) $\frac{\sec^4(1-u)}{4} + C$

25) $\frac{2x+5}{\sqrt{5-4x-x^2}} + C$

26) $\frac{a^x}{\ln a}\left(x^2 - \frac{4x}{\ln a} + \frac{4}{\ln^2 a}\right) + C.$

27) $2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C.$

28) Sug: $x = \frac{1}{t}$

$\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$

29) $-\frac{\arcsin(x)}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}\right| + C.$

30) $\frac{1}{3}x\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C.$

31) $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} - \operatorname{arc\,sen} y + C.$

32) $2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)} + C.$

5.6. Práctica General

5.6.1

1) $\frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} - 2\sqrt{e^x+1} + C.$

2) $\frac{-x}{4\sqrt{x^2-4}} + C.$

3) $\frac{1}{2}\ln\left|4x^2+4x+5\right| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{2}\right) + C.$

4) $\frac{-2\ln(2x)}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C.$

5) $\frac{8}{3}\operatorname{arc\,sen}(3x-1) - \frac{1}{3}\sqrt{6x-9x^2} + C.$

6) $-\sqrt{4-2x-x^2} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + C.$

7) $\frac{x^3}{3} + \ln\left|x^2-3x\right| + C.$

8) $3\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right| + \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C.$

9) $\frac{9x-13}{\sqrt{x^2-2x+2}} + C.$

10) $2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\ln y\right) + \left(\frac{1}{2}\ln y\right)\sqrt{4-\ln^2 y} + C.$

11) $\frac{\sqrt{1+e^{2u}}}{e^u} + C.$

33) $e^x \ln|e^x+1| - e^x + \ln|e^x+1| + C.$

34) $\dfrac{-1}{\sqrt{2x+x^2}} + C.$

35) $-5\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{\operatorname{arc\,sen} x}\right)^3 + C.$

36) $e^x \arctan(e^{-x}) + \frac{1}{2}\ln|e^{-2x}+1| + C.$

37) $(x+1)\ln\left(x^2+2x+5\right) - 2x + 4\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$

5.6.2 Se omite.

5.6.3 Se omite.

5.6.4
1) Se omite.

2) Se omite. (Suger: $u = \operatorname{sen}^{n-1}(x)$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$)

3) Se omite. (Suger: Aplicar fórmulas anteriores)

5.6.5
1) $p(w) = w^2 + w + 2.$

2) $z'(r) = 2r^3 + 2r - \dfrac{1}{r} + 2.$

$z(r) = \dfrac{r^4}{2} + r^2 - \ln|r| + 2r - 3$

3) $q'(t) = 4t^3 - 6t^2 - e^t - 4.$

$q(t) = t^4 - 2t^3 - e^t - 4t + 7 + e.$

5.6.6 $f(x) = 12x^2 + e^{2(x+1)} + 12x - 4$

5.6.7 $f(2) = 10, f(x) = x^2 + x + 4.$

Soluciones del Capítulo 6

6.1. Integración definida

6.1.1
1) $\dfrac{(e-1)^5}{5}$

2) 45

3) 3

4) $\dfrac{-\pi}{6}$

5) 25

6) $\dfrac{2}{9}$

7) $\dfrac{886}{15}$

8) $\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{47}{15}\right)$

9) $\ln 2 - 1$

10) $\dfrac{38}{3}$

11) $16 - 5\sqrt{3}$

12) $36\ln 3 - \dfrac{104}{9}$

13) 0

14) $\dfrac{28 - 32\ln 8}{\ln^2 8}$

15) $2e - 1$

16) $\dfrac{2\ln 4 - 4}{14} - \dfrac{2\ln 25 + 4}{35}$

17) $\dfrac{107}{10}$

18) $2 - \dfrac{\pi^2}{2}$

19) 31

20) $\dfrac{5}{4}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

21) 4

22) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$

23) $\dfrac{\pi}{9}$

24) -4

6.1.2 $g(u) = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{u}{2}\right) + \sqrt{4-u^2} - 1$

6.1.3 Se omite.

6.1.4 Se omite.

6.1.5 Se omite.

6.2. Sumas de Riemann

6.2.1
1) 0,74984; 0,950158; 1,08461.
2) 1,7154; -0,3125; -2,6054.

6.2.2
1) 0,982130; 1,16061; 1,32870.

2) 0,344540; 0,410727; 0,324540.

6.2.3
1) -15

2) $\dfrac{332}{3}$

3) 0

4) $\dfrac{-33}{2}$

5) $\dfrac{-16}{3}$

6) 10

6.2.4 Se omite.

6.2.5 $20,375 < 24 < 27,875$

6.3. Teorema fundamental del cálculo

6.3.1
1) $f'(t) = -\ln(6+t^2)$

2) $f'(t) = te^t$

3) $f'(r) = \pi\cos(r\pi)\sqrt[5]{r^2\pi^2+1}$

4) $f'(y) = \dfrac{3\operatorname{sen}(y^{3/2})}{2y} - \operatorname{sen}(e^y)$

5) $f'(x) = -\cos(x^2)$

6) $g'(x) = 3x^2\ln x^3 - 2x\ln x^2$

7) $f'(x) = \dfrac{3(1-3x)^3}{(1-3x)^2+1}$

6.3.2 $c \in \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \;\vee\; \dfrac{-\pi}{3} + 2\pi k,\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

6.3.3 a) $f(x) = 2x^{15}$, b) $c = -\dfrac{1}{9}$

6.3.4 $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$ y $a = 9$

6.3.5 Se omite.

6.3.6 -7

6.3.7 -1

6.3.8 $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{2}$

6.3.9 10

6.3.10 12

6.4. Cálculo de áreas

6.4.1
1) $A = \dfrac{61}{2}\,(ul)^2$

2) $A = 18(ul)^2$.

Observe que: $A = \displaystyle\int_{-2}^{4}\left(y+5-\frac{y^2+2}{2}\right)\,dy$.

O bien: $A = \displaystyle\int_{1}^{3} 2\sqrt{2x-2}\;dx + \int_{3}^{9}\left(\sqrt{2x-2}-(x-5)\right)\,dx$

3) $A = \dfrac{4}{3}\,(ul)^2$

4) $A = 4\,(ul)^2$

5) $A = 9\,(ul)^2$

6) $A = 68\,(ul)^2$

7) $A = 4\,(ul)^2$

8) $A = \dfrac{9}{2}\,(ul)^2$

9) $A = \dfrac{38}{3}(ul)^2$.

Observe que: $A = \displaystyle\int_0^2 [4 + y - (-y)]\,dy$.

O bien: $A = \displaystyle\int_{-4}^{0} \left(2 - \sqrt{-x}\right)\,dx + \int_0^4 2x\,dx + \int_4^6 [2 - (x-4)]\,dx$

6.4.2 $A = 19\,(ul)^2$

6.4.3 La fórmula del área de la región requiere que la región debe estar entre dos curvas. Por lo tanto la región R se debe partir en tres regiones (asumimos la aditividad del área) R_1, R_2 y $\mathbb{R}_3$; como se muestra en la figura **??**

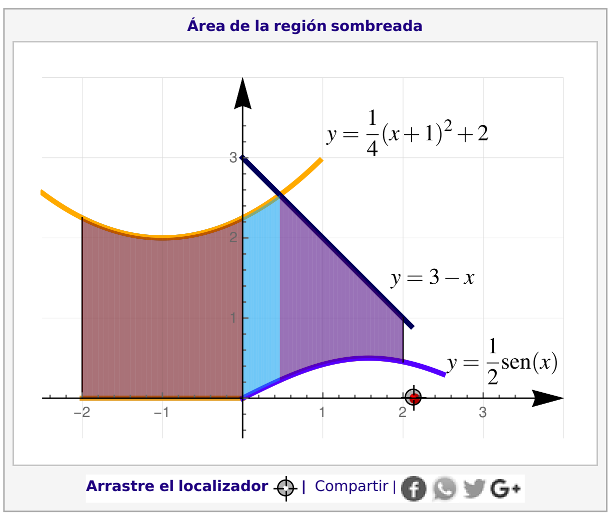


Figura 6.2: Región $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$

$$\begin{aligned}
A_R &= A_{R_1} + A_{R_2} + A_{R_3}\\
&= \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2 \;-\; 0\right)\,dx\\
&+ \int_{0}^{2\sqrt{3}-3} \left(\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2 \;-\; \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x\right)\,dx\\
&+ \int_{2\sqrt{3}-3}^{2} \left(3 - x \;-\; \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x\right)\,dx
\end{aligned}$$

6.4.4 $A = \dfrac{2197}{150}\,(ul)^2$

6.4.5 $A = \dfrac{2}{3}\,(ul)^2$

6.4.6 $A = \dfrac{13\sqrt{13} + 5\sqrt{5}}{12}\,(ul)^2$

6.4.7 $A \approx 1,6042\,(ul)^2$

6.4.8 $A = \dfrac{49}{12}\,(ul)^2$

6.4.9 $A = \dfrac{7}{3}\,(ul)^2$

6.4.10 $A \approx 1,325\,(ul)^2$

6.4.11 $A \approx 3,6931\,(ul)^2$

6.4.12 $A \approx 3,1831\,(ul)^2$

6.4.13 $A = \dfrac{47}{3}\,(ul)^2$

6.5. Integrales impropias

6.5.1

1) Converge a: $\dfrac{\pi}{2}$.

2) Converge a: 6.

3) Converge a: -1.

4) Diverge.

5) Converge a: π.

6) Converge a: $\dfrac{\pi}{2}$.

7) Diverge.

8) Converge a: $\dfrac{1}{a}$ si $a > 0$ y diverge si $a \leq 0$.

9) Converge a: $\dfrac{3\pi^2}{32}$.

10) Converge a: 0.

11) Diverge.

12) Converge a: $\sqrt[4]{8}$.

13) Diverge.

14) Converge a: $4 + 2\sqrt{2}$.

15) Converge a: $\frac{1}{4}$.

16) Converge a: 1.