INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ESCUELA DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MA1102 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

I SEMESTRE 2023
TIEMPO: 3 HORAS
PUNTAJE TOTAL: 35 PTS

Solución Examen de Reposición

1. Determine, utilizando una tabla de verdad, si la proposición

$$(p \to q) \vee (\neg p \wedge q)$$

es una tautología, una contradicción o una contingencia. **3 Pts**

Solución:

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$(\neg p \wedge q)$	$(p \to q) \vee (\neg p \wedge q)$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V

Es una contingencia.

2. Calcule los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{y \to -\infty} (\sqrt{9y^2 + y} + 3y)$ **4 Pts**

Solución:

$$\lim_{y \to -\infty} (\sqrt{9y^2 + y} + 3y)$$
$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{y}{\sqrt{9y^2 + y} - 3y}$$
$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{y}{-y\sqrt{9 + \frac{1}{y}} - 3y}$$
$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{9 + \frac{1}{y}} - 3}$$
$$= -\frac{1}{6}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{1/x}$ **4 Pts**

Solución:

$$y = \lim_{x\to 0}(2x+1)^{1/x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0} \ln(2x+1)^{1/x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2x+1}$$

$$\Rightarrow \ln y = 2$$

$$\Rightarrow y = e^2$$

3. Calcule la primera derivada de la función f definida por: **3 Pts**

$$f(x) = \frac{2^x}{3x^2} + \cos^3\left(\sqrt{x}\right)$$

No es necesario simplificar la derivada.

Solución:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot 2^x \ln 2 - 6x \cdot 2^x}{9x^4} + \frac{-3\cos^2\left(\sqrt{x}\right)\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

4. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = xe^x + e^x$. Determine los intervalos donde f es creciente, intervalos donde es decreciente y extremos relativos (si existen). **3 Pts**

Solución:

$$f'(x) = e^x + xe^x + e^x = e^x(x+2)$$

$-\infty$ $\quad -2 \quad$ $+\infty$

e^x	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$
f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

f es creciente en $]-2,+\infty[$, decreciente en $]-\infty,-2[$ y $(-2,-2e^{-2}+e^{-2})$ es punto de mínimo relativo.

5. Plantee y resuelva el siguiente problema de optimización:

Se quiere construir un marco rectangular de forma que el área total sea de 8 dm^2. El precio del material para los bordes laterales es de 4 dólares por dm y del material para los bordes superior e inferior es de 2 dólares por dm. Determine las dimensiones del marco para que el costo de los materiales sea mínimo. **5 Pts**

Solución:

Variables

x: longitud de cada borde lateral en dm.

h: longitud del superior e inferior en dm.

Función a optimizar

Se requiere un marco de costo mínimo, se debe optimizar el costo C del marco:

$C = 4 \cdot 2x + 2 \cdot 2h = 8x + 4h$

Ecuación auxuliar

$8 = xh$

Despejando h en términos de x

$h = \dfrac{8}{x}$

Reemplazando en la función de costo

$C(x) = 8x + 4 \cdot \dfrac{8}{x} = 8x + \dfrac{32}{x}$

Dominio de la función

El dominio es $]0, +\infty[$

Derivando y factorizando

$C'(x) = 8 - \dfrac{32}{x^2} = \dfrac{8x^2 - 32}{x^2} = \dfrac{8(x-2)(x+2)}{x^2}$

Buscando valores críticos

$x = 2 \checkmark$, $x = -2$, $x = 0$

Cuadro de signo

	0	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$+$	
$x+2$	$+$	$+$	
C'	$-$	$+$	
C	$\searrow$	$\nearrow$	

Como se observa en el cuadro, la función C alcanza el mínimo en $x = 2$.

R/ Las dimensiones son $x = 2$ dm y $h = \dfrac{8}{2} = 4$ dm.

6. Calcule las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3(z)}{\text{sen}^2(z)}\, dz$ **3 Pts**

Solución:

$u = \text{sen}(z)$

$du = \cos(z)dz$

$z = \pi/4 \Rightarrow u = \sqrt{2}/2$

$z = \pi/4 \Rightarrow u = 1$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3(z)}{\text{sen}^2(z)}\, dz$$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{1-u^2}{u^2}\, dz$$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left(\frac{1}{u^2} - 1\right)\, dz$$

$$= -\frac{1}{u} - u \Bigg|_{\sqrt{2}/2}^{1}$$

$$= -2 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\displaystyle\int x^4 \ln x \, dx$ **3 Pts**

Solución:

$u = \ln x$	$dv = x^4 dx$
$du = \frac{1}{x} dx$	$v = \frac{x^5}{5}$

$$\int x^4 \ln x \, dx = \frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{1}{5} \int x^4 \, dx$$

$$= \frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{x^5}{25} + C$$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$ **3 Pts**

Solución:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

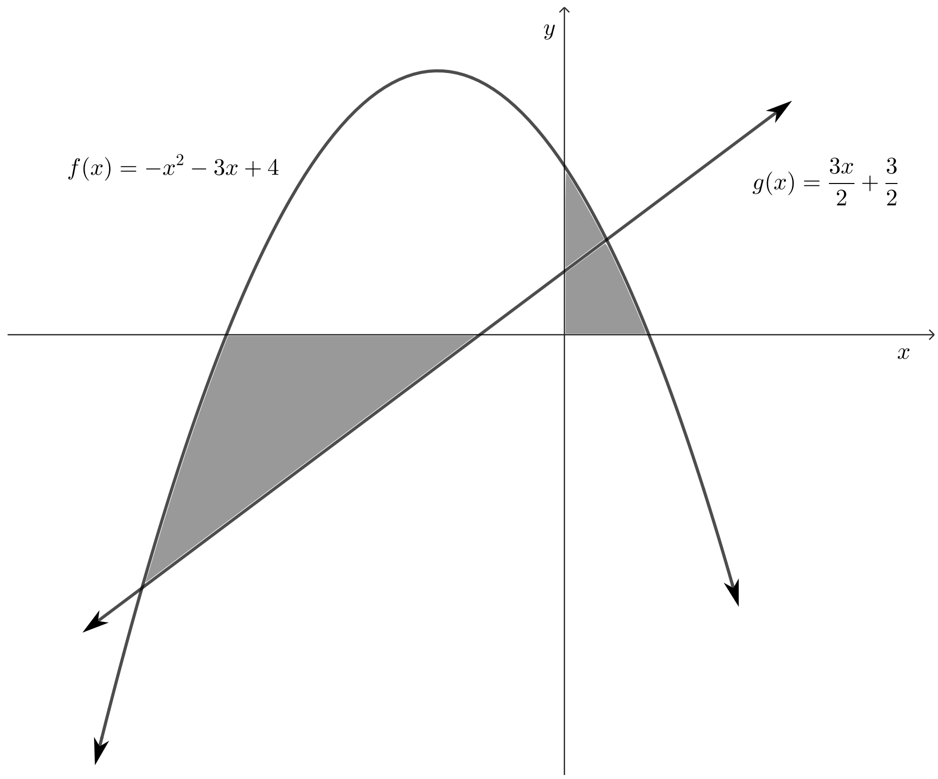
$$= \lim_{p \to +\infty} \int_0^p \frac{1}{x^2 + 4} \, dx$$

$$= \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \Bigg|_0^p$$

$$= \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{p}{2}\right) - \frac{1}{2} \arctan(0)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

7. Plantee **(no calcule)** integrales que permitan calcular el área de la región sombreada que se muestra en la imagen. **4 Pts**



Solución:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 - 3x + 4 = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow -x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = -5, x = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4, x = 1$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$A = \int_{-5}^{-4} [f(x) - g(x)]dx + \int_{-4}^{-1} 0 - g(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$