

## Examen por suficiencia

---

### Instrucciones:

Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, deben aparecer todos los pasos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada, utilizando únicamente bolígrafo azul o negro para resolver la prueba. No se atenderán reclamos de preguntas resueltas con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el intercambio de instrumentos, el uso de calculadoras programables, ni de teléfonos celulares.

---

1. Calcule los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(3x - 3)}{(1 - x)^2}$  [3 puntos]

(b)  $\lim_{w \rightarrow -\infty} (\sqrt{25w^2 + 3} + 5w)$  [4 puntos]

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + a}{x} \right)^{\frac{x}{b}}$  [4 puntos]

2. Considere la función  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = |x^2 - 4|$ . Utilizando la definición de derivada, determine si la función  $f$  es o no derivable en  $x = -2$ . [3 puntos]

3. Calcule las derivadas de orden 1 de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = \frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)}{2^{3x} + 3}$  [3 puntos]

(b)  $g(x) = \sin^3(x) \cdot \ln[f(-x^2 + 2)]$ , donde  $f$  es una función derivable. [3 puntos]

4. Determine las dimensiones del cilindro circular recto de mayor área total que se puede incrustar en un cono de radio 6 m y de altura 15 m. [4 puntos]

5. En un lejano país, existe un río que tiene dos puentes paralelos y de la misma longitud 375m. Los puentes tienen sentido contrario, uno para que los vehículos y las personas pasen del lado oriental del país al lado occidental y el otro del lado occidental al lado oriental del país. Los puentes tienen una distancia de 35 m uno del otro. Si Marta empieza a caminar del lado oriental al occidental a una velocidad de 2 m/s y don Luis en su bicicleta viaja del lado occidental al lado oriental a una velocidad de 5 m/s. Determine la razón de cambio a la cual varía la distancia entre los dos individuos, en el preciso instante en que Luis ha recorrido la mitad de la distancia del puente. [4 puntos]

6. Calcule cada una de las siguientes integrales:

(a)  $\int \sin^3 x dx$  [5 puntos]

(b)  $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx$  [5 puntos]

(c)  $\int \frac{1}{\sqrt{(ax)^2 + b^2}} dx$  [4 puntos]

7. Realice la gráfica de la función  $f$  definida por  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$  si se sabe que  $f'(x) = \frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  
 $f''(x) = \frac{-6(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$ .