Instituto Tecnológico de Costa Rica. II semestre de 2023
Curso Cálculo diferencial e Integral. Profesora Dylana Freer Paniagua.
Evaluación corta: Práctica para examen.

Indicaciones: Resuelva en hojas sueltas, en el orden indicado, los siguientes ejercicios. Debe indicar todo el desarrollo y las justificaciones que le lleven a la respuesta correcta. Escanee el documento y entréguelo, en formato pdf, antes del sábado 2 de setiembre al medio día. Después descargue la solución y revise usted mismo sus desarrollos, detecte errores y corríjalos o refuerce las ideas y conceptos que crea necesarios después de haber realizado su propia autoevaluación. El objetivo es orientarle en los detalles finales de su preparación para la prueba.

Ejercicios:

A) Halle, si existen y sin utilizar la regla de L´Hopital, los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 1} f(x) \quad si \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{1-x^2} & si \quad x > 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \\ \frac{1-4x}{x+1} & si \quad x < 1 \end{cases}$

1. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{-\cancel{(x-1)}(x+1)}$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x+1}{-(x+1)} = \boxed{-\frac{3}{2}}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-4x}{x+1} = \frac{1-4}{1+1} = \boxed{-\frac{3}{2}}$

$\boxed{\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{3}{2}}$

2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+|x-2|-4}{x^2-4}$

2. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-2-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}$

$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-(x-2)-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{(x+2)\cancel{(x-2)}}$

$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$

Como $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+|x-2|-4}{x^2-4} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+|x-2|-4}{x^2-4}$ se concluye que $\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x^2+|x-2|-4}{x^2-4}$ no existe.

3. $lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x-4}+1}{1-\sqrt{4-x}}$

$$3.\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{-(4-x)}+1}{1-\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 3}\frac{-\sqrt[3]{4-x}+1}{1-\sqrt{4-x}}$$

Se aplica sustitución $u^6=4-x$, $u\to 1$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{-\sqrt[3]{u^6}+1}{1-\sqrt{u^6}}=\lim_{u\to 1}\frac{1-u^2}{1-u^3}=\lim_{u\to 1}\frac{(1+u)\cancel{(1-u)}}{\cancel{(1-u)}(1+u+u^2)}$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{1+u}{1+u+u^2}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{sen(5x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{sen(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\frac{sen(2x)}{2x}}{5\,\frac{sen(5x)}{5x}}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{2x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(5x)}{5x}}$$

$$=\boxed{\frac{2}{5}}$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx-cosxsenx}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx(1-cosx)}{x^2}\cdot\frac{1+cosx}{1+cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{senx(1-cos^2x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}senx\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}senx\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\right)^2$$

$$=0\cdot 1^2=\boxed{0}$$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

Se aplica la sustitución $y^{12}=x$, $y\to 1$

$$\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt[3]{y^{12}}-1}{\sqrt[4]{y^{12}}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y+1)\cancel{(y-1)}(y^2+1)}{\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)}$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{(y+1)(y^2+1)}{y^2+y+1}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

7. $\lim_{x\to-\infty}(-4x^5+5x^3+7)$

$$\lim_{x\to-\infty} x^5\left(-4+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^5}\right)=(-\infty)^5\cdot-4=\boxed{\infty}$$

8. $\lim_{b\to a^2}\frac{a^3-b-ab+a^2}{2a^3-2ab+b-a^2}$

$$\lim_{b\to a^2}\frac{a^2(a+1)-b(a+1)}{2a(a^2-b)-(a^2-b)}=\lim_{b\to a^2}\frac{(a+1)\cancel{(a^2-b)}}{\cancel{(a^2-b)}(2a-1)}=\lim_{b\to a^2}\frac{a+1}{2a-1}$$

$$\boxed{\frac{a+1}{2a-1}}$$

9. $\lim_{y\to0}\frac{1+cosy}{tany}$

$$\lim_{y\to0}\frac{1+\cos y}{\tan y}=\text{"}\frac{2}{0}\text{"} \text{ límite infinito}$$

$$\lim_{y\to0^+}\frac{1+\cos y}{\tan y}=\text{"}\frac{+}{-}\text{"}=-\infty,\quad \lim_{y\to0^-}\frac{1+\cos y}{\tan y}=\text{"}\frac{+}{+}\text{"}=\infty$$

$$\therefore \lim_{y\to0}\frac{1+\cos y}{\tan y}\ \nexists$$

10. $\lim_{w\to3c}\frac{cw^2-3c^2w}{w^2-9c^2}$

$$\lim_{w\to3c}\frac{cw^2-3c^2w}{w^2-9c^2}=\lim_{w\to3c}\frac{cw\cancel{(w-3c)}}{(w+3c)\cancel{(w-3c)}}=$$

$$\lim_{w\to3c}\frac{cw}{w+3c}=\frac{c\cdot3c}{3c+3c}=\frac{3c^2}{6c}=\boxed{\frac{c}{2}}$$

11. $\lim_{u\to3}\frac{1-u}{|6-2u|}$

$$\lim_{u\to3}\frac{1-u}{|6-2u|}=\text{"}\frac{-2}{0}\text{"}\qquad \lim_{u\to3^+}\frac{1-u}{|6-2u|}=\lim_{u\to3^-}\frac{1-u}{|6-2u|}=-\infty$$

(Por tener valor absoluto en denominador)

$$\lim_{u\to3}\frac{1-u}{|6-2u|}=-\infty$$

12. $\lim_{w\to-\infty}\left(\frac{w^3}{2+w^2}-\frac{1-6w^2}{3w+4}\right)$

$$\lim_{w\to-\infty}\frac{w^3(3w+4)-(1-6w^2)(2+w^2)}{(2+w^2)(3w+4)}=\lim_{w\to-\infty}\frac{w^3w\left(3+\frac{4}{w}\right)-w^4\left(\frac{1}{w^2}-6\right)\left(\frac{2}{w^2}+1\right)}{w^2\left(\frac{2}{w^2}+1\right)w\left(3+\frac{4}{w}\right)}$$

$$\lim_{w\to-\infty}\frac{w^4\left[3+\frac{4}{w}-\left(\frac{1}{w^2}-6\right)\left(\frac{2}{w^2}+1\right)\right]}{w^3\left(\frac{2}{w^2}+1\right)\left(3+\frac{4}{w}\right)}=\lim_{w\to-\infty}\frac{w\left[3+\frac{4}{w}-\left(\frac{1}{w^2}-6\right)\left(\frac{2}{w^2}+1\right)\right]}{\left(\frac{2}{w^2}+1\right)\left(3+\frac{4}{w}\right)}$$

$$=\frac{-\infty\left[3-(-6\cdot1)\right]}{1\cdot3}=\boxed{-\infty}$$

13. $\lim_{r\to-1}\frac{r^2-r}{\sqrt[3]{2r+1}+\sqrt[3]{r+2}}$

$$\lim_{r\to-1}\frac{r^2-r}{\sqrt[3]{2r+1}+\sqrt[3]{r+2}}=\text{"}\frac{2}{0}\text{"}$$ Límite infinito

$$\lim_{r\to-1^-}\frac{r^2-r}{\sqrt[3]{2r+1}+\sqrt[3]{r+2}}\ \frac{\oplus}{\oplus}=-\infty \text{ y } \lim_{r\to-1^+}\frac{r^2-r}{\sqrt[3]{2r+1}+\sqrt[3]{r+2}}\ \frac{\oplus}{\ominus}=-\infty$$

14. $\lim_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}}{2x-10}$

$$\lim_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}}{2x-10}=\frac{\sqrt{7+2}}{2\cdot7-10}=\frac{\sqrt{9}}{4}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

15. $\lim_{p\to2}\frac{7p^5-10p^4-13p+6}{3p^2-6p-8}$

$$\lim_{p\to2}\frac{7p^5-10p^4-13p+6}{3p^2-6p-8}=\frac{7\cdot2^5-10\cdot2^4-13\cdot2+6}{3\cdot2^2-6\cdot2-8}=\frac{-11}{2}$$

16. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+3}{\sqrt{5x^2-3x}+\sqrt{9+5x^2}}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{x^2\left(5-\frac{3}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(\frac{9}{x^2}+5\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+3}{|x|\sqrt{5-\frac{3}{x}}+|x|\sqrt{\frac{9}{x^2}+5}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(4+\frac{3}{x}\right)}{-\cancel{x}\left[\sqrt{5-\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{9}{x^2}+5}\right]} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{4+\frac{3}{x}}{\sqrt{5-\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{9}{x^2}+5}} = \frac{-4}{2\sqrt{5}} = \boxed{\frac{-2\sqrt{5}}{5}}$$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x}$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-1-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right]} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{2}{1+1} = \boxed{1}$$

18. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+1}}$

$$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x+2-12+4x)}{(x+3-2x-1)} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{5(x-2)}{-(x-2)} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}} = \lim_{x\to2} -5\left(\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}}\right) =$$

$$\boxed{\frac{-5(2\sqrt{5})}{4} = \frac{-5\sqrt{5}}{2}}$$

19. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^4-1}{x^6-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^4+x^2+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

20. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

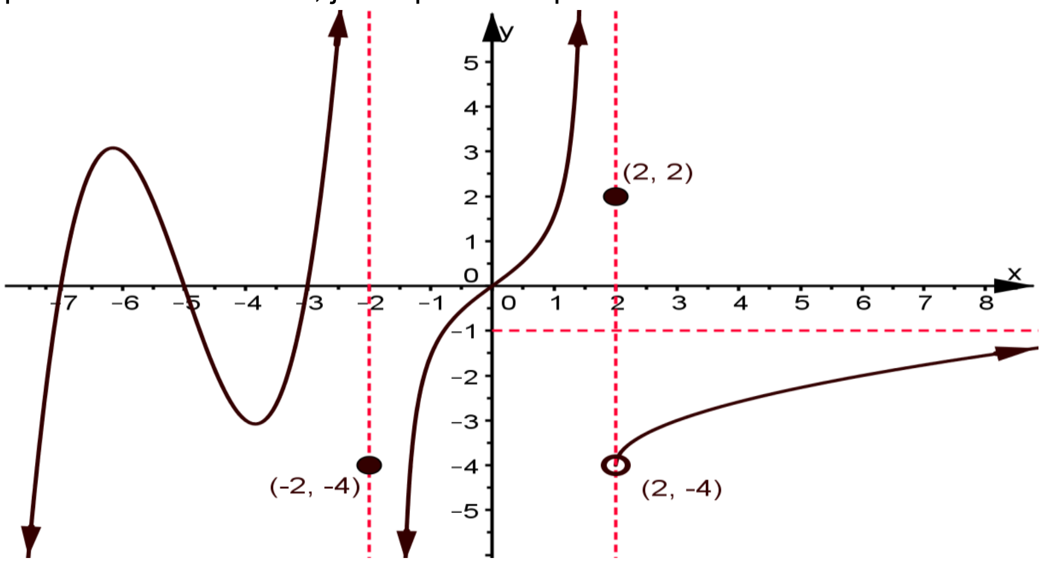
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{2x} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -\sqrt{2x} = -\sqrt{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|} \neq \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$

se concluye que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|} \nexists$

B) Con base en la gráfica adjunta, determine el valor de cada límite. En caso de que un límite no exista, justifique su respuesta.



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) =$ **b)** $\lim\limits_{x \to -7} h(x) =$ **c)** $\lim\limits_{x \to -2} h(x) =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} h(x) =$ **e)** $\lim\limits_{x \to 2} h(x) =$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) =$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to -7} h(x) = 0$ **c)** $\lim\limits_{x \to -2} h(x) = \nexists$

d) $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$ **e)** $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = \nexists$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$

C) Dada la función $g(x) = \begin{cases} \frac{x+7}{x-2} & si \quad x < -5 \\ 3x - 4 & si \quad -5 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & si \quad 0 \leq x < 5 \\ x^2 - 6 & si \quad x \geq 5 \end{cases}$, determine, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 6} g(x) =$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} g(x) =$ **c)** $\lim\limits_{x \to \frac{-1}{2}} g(x) =$

d) $\lim\limits_{x \to -5} g(x) =$ **e)** $\lim\limits_{x \to 5} g(x) =$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} g(x) =$

a) $\lim_{x\to 6} g(x) = 30$ b) $\lim_{x\to 0} g(x) = \nexists$ c) $\lim_{x\to \frac{-1}{2}} g(x) = -\frac{11}{2}$

d) $\lim_{x\to -5} g(x) = \nexists$ e) $\lim_{x\to 5} g(x) = \nexists$ f) $\lim_{x\to -\sqrt{3}} g(x) = -3\sqrt{3}-4$

D) Analice la continuidad de la función $h(x) = \begin{cases} \frac{4x-2x^2}{x-5} & si \;\; x \neq 5 \\ 2 & si \;\; x = 5 \end{cases}$, en caso de ser discontinua indique el tipo de discontinuidad y redefina si es necesario para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

D) i) $h(5) = 2$

ii) $\lim_{x\to 5} h(x) = \lim_{x\to 5} \frac{4x-2x^2}{x-5}$ no existe.

$\therefore$ h es discontinua inevitable.

E) Determine el valor (o los valores) que debe tomar la constante b de modo que la función $f(y)$ sea continua en $\mathbb{R}$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1-cosy}{tany} & si \quad y < 0 \\ b & si \quad y = 0 \\ 3y+b & si \quad y > 0 \end{cases}$$

E) i) $f(0) = b$

ii) $\lim_{y\to 0^-} f(y) = \lim_{y\to 0^-} \frac{1-cosy}{tany} = \lim_{y\to 0^-} \frac{1-cosy}{\frac{seny}{cosy}}$

$= \lim_{y\to 0^-} \frac{cosy\,(1-cosy)}{seny} \cdot \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0^-} \frac{cosy\,\frac{(1-cosy)}{y}}{\frac{seny}{y}}$

$= \frac{\lim_{y\to 0^-} cosy \cdot \lim_{y\to 0^-} \frac{1-cosy}{y}}{\lim_{y\to 0^-} \frac{seny}{y}} = \frac{1 \cdot 0}{1} = 0$

$\lim_{y\to 0^+} 3y+b = b \Rightarrow b = 0$ (para que los límites laterales sean iguales)

$\therefore b = 0$

F) Halle la derivada de cada una de las funciones que se indican a continuación.

a) $f(z) = \dfrac{z^2}{e^z + \arctan z}$

b) $y = \sqrt[5]{secx + \log(4 - x^2)} + 8x\cot(e^x)$

c) $f(z) = z^4 senz + \dfrac{7^{2z}+1}{z-2}$

d) $y = \sqrt[3]{3x + \log(4x^2)} - \text{arccot}\,(6x)$

e) $g(u) = arctan(u^2 + u) - 2^{cos(3u)}$

F) a) $f'(z) = \dfrac{2z(e^z + \arctan z) - z^2(e^z - 1/(1+z^2))}{(e^z + \arctan z)^2}$

b) $y' = \frac{1}{5}(\sec x + \log(4-x^2))^{-4/5} \cdot \left(\sec x \tan x + \frac{-2x}{(4-x^2)\ln 10}\right) + 8\cot(e^x) + \frac{8xe^x}{1+e^{2x}}$

c) $f'(z) = 4z^3 \operatorname{sen} z + z^4 \cos z + \dfrac{7^{2z} \cdot \ln 7 \cdot 2(z-2) - (7^{2z}+1) \cdot 1}{(z-2)^2}$

d) $y' = \frac{1}{3}(3x + \log(4x^2))^{-2/3}\left(3 + \frac{4}{x}\right) + \frac{6}{1+36x^2}$

e) $g'(u) = \dfrac{2u+1}{1+(u^2+u)^2} - 2^{\cos(3u)} \cdot \ln 2 \cdot -\operatorname{sen}(3u) \cdot 3$

$= \dfrac{2u}{1+(u^2+u)^2} + (3\ln 2) \cdot 2^{\cos(3u)} \operatorname{sen}(3u)$

G) Usando la definición de derivada encuentre la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{4x+2}$ en $x = 5$

6) a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{2}{x+h-1} - \frac{2}{x-1}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{2x-2-2x-2h+2}{(x+h-1)(x-1)}}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h(x+h-1)(x-1)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2}{(x+h-1)(x-1)} = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$

b) $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{4(5+h)+2} - \sqrt{4 \cdot 5+2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{20+4h+2} - \sqrt{22}}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{22+4h} - \sqrt{22}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{22+4h} + \sqrt{22}}{\sqrt{22+4h} + \sqrt{22}} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{22+4h-22}{h(\sqrt{22+4h} + \sqrt{22})}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h}{h(\sqrt{22+4h} + \sqrt{22})} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4}{\sqrt{22+4h} + \sqrt{22}} = \dfrac{2}{\sqrt{22}} = \dfrac{\sqrt{22}}{11}$