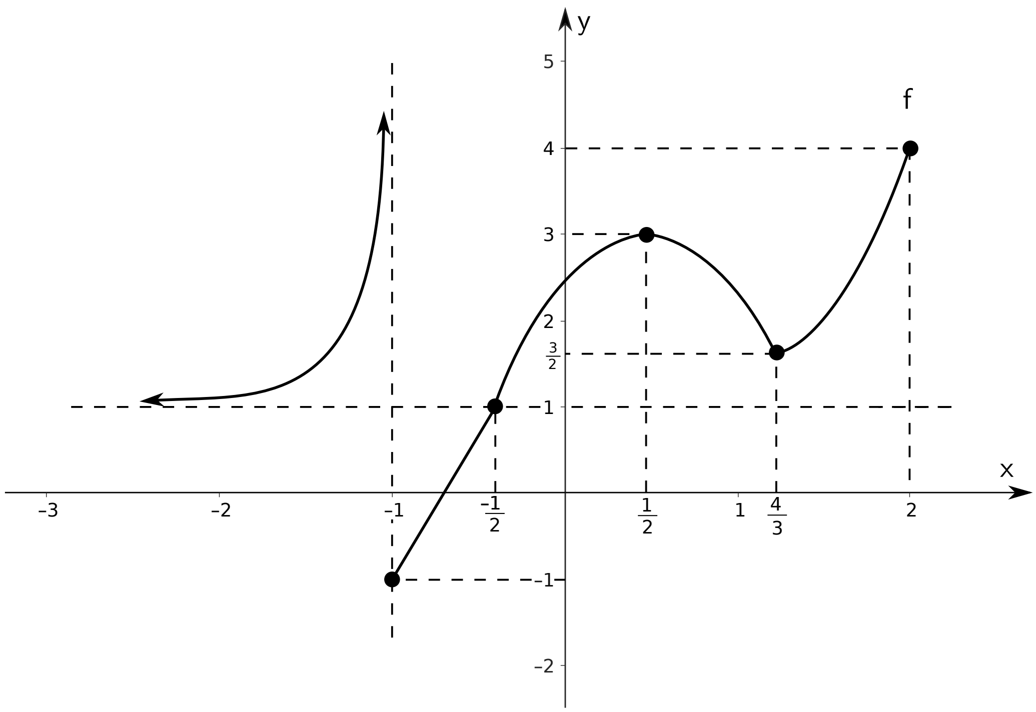
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
MA1102 Cálculo diferencial e integral

II semestre 2023
Tiempo: 2 horas y 30 min
Puntaje Total: 35 pts

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada y utilice cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos electrónicos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

#1. Considere la función $f :]-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se presenta a continuación.



De acuerdo con la gráfica, responda las siguientes preguntas.

a) El conjunto de todos los valores de x para las cuales $f'(x) < 0$. R/ $\left]\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right[$ **1 Pt**

b) El conjunto de todos los valores de x para las cuales $f''(x) > 0$. R/ $]-\infty, -1[\ \cup \left]\frac{4}{3}, 2\right[$ **1 Pt**

c) El valor donde f alcanza el mínimo absoluto. R/ $x = -1$ **1 Pt**

d) Las coordenadas de un punto de inflexión de f. R/ $\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$ **1 Pt**

e) ¿Posee f máximo absoluto? Justifique. R/ No, ya que $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ **1 Pt**

Continúa en la siguiente página...

#2. Sea $g : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ y $g'(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$.

a) Indique las abscisas de los puntos máximos y mínimos relativos de g. **3 Pts**

. . . .

$$g'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

Cuadro de signos de g' :

	$-\infty$ — 0	0 — 2	2 — 4	4 — $+\infty$
x	$-$ $\bullet$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)^2$	$+$	$+$ $\bullet$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$ $\bullet$	$+$
$g'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

2 puntos

. . . .

Máximo relativo: $x = 0$

Mínimo relativo $x = 4$

1 punto

. . . .

b) Determine los intervalos de concavidad de g e indique (si hay) puntos de inflexión. **4 Pts**

. . . .

$$g''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x^2-4x)(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

1 punto

. . . .

Signo de g'' :

	$-\infty$ — 2	2 — $+\infty$
8	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$+$
g''	$-$	$+$
g	$\cap$	$\cup$

(2 puntos)

. . . .

$\cap :\ ]-\infty, 2[$

$\cup :\ ]2, +\infty[$

No hay puntos de inflexión.

1 punto

. . . .

c) Si se sabe que la gráfica de g posee una asíntota oblicua, determine su ecuación. **2 Pts**

. . . .

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = 1$$

0,5 puntos

. . . .

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-2} = 2$$

1 punto

. . . .

Ecuación: $y = x + 2$

0,5 puntos

. . . .

#3. Determine los puntos de la curva de ecuación $y = \ln\left(x^2+1\right)$ en los cuales la recta normal es paralela a la recta de ecuación $x - y = 1$. **3 Pts**

. . . .

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow m = 1$$

1 punto

. . . .

$$\frac{2x}{x^2+1} = -1 \Rightarrow 2x = -x^2 - 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

1 punto

. . . .

Evaluando:

$$y(-1) = \ln 2$$

El punto de la curva en los cuales la recta normal es paralela a la recta $x - y = 1$ es $(-1, \ln 2)$

1 punto

. . . .

#4. La ecuación $x^2 - xy = 9 - y^2$ define a y como función implícita de x. Calcule y'. **3 Pts**

. . . .

$$(x^2 - xy)' = (9 - y^2)' \Rightarrow 2x - (y + xy') = -2yy'$$

1 punto

. . . .

$$2x - y - xy' = -2yy' \Rightarrow -xy' + 2yy' = y - 2x$$

1 punto

. . . .

$$y'\,(-x + 2y) = y - 2x \Rightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

1 punto

. . . .

#5. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$. **4 Pts**

. . . .

Forma: ∞^0

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^{\ln\left(\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\tan x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^L$$

1 punto

. . . .

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ln x}{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1/x}{-\csc^2 x}$$

1 punto

. . . .

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-1/x}{-\csc^2 x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\,\operatorname{sen} x\,\cos x}{1} = 0$$

1 punto

. . . .

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^0 = 1$$

1 punto

. . . .

#6. Resuelva los siguientes problemas:

a) Un objeto se deja caer desde una altura de 100 metros sobre el suelo, y t segundos después su altura está dada por $h(t) = 100 - \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la aceleración y su valor es aproximadamente de 9,81 m/s^2. ¿Cuál es la velocidad del objeto justo antes de tocar el suelo? **3 Pts**

. . . .

$$h(t) = 100 - \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 \Rightarrow h(t) = 100 - 4,9t^2$$

$$v(t) = h'(t) \Rightarrow v(t) = -9,8t$$

1 punto

. . . .

$$h = 0 \Rightarrow 100 - 4,9t^2 = 0 \Rightarrow t \approx -4{,}52 \ \text{ o } \ t \approx 4{,}52$$

1 punto

. . . .

$$v(4{,}52) \approx (-9,8) \cdot (4,52) \approx -44,27$$

La velocidad justo antes de caer al suelo es de aproximadamente $44,27$ m/s.

1 punto

. . . .

b) Considere un triángulo rectángulo de catetos con medidas a y b. Si el cateto de medida a decrece a razón de 0,5 cm/min y el cateto de medida b crece a razón de 2 cm/min, determine la tasa de cambio del área del triángulo cuando $a = 16$ cm y $b = 12$ cm. **4 Pts**

. . . .

$$\frac{da}{dt} = -0,5\,\text{cm/min} \quad \frac{db}{dt} = 2\,\text{cm/min}$$

2 puntos

. . . .

$$A = \frac{ab}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt} \cdot b + a \cdot \frac{db}{dt}\right)$$

1 punto

. . . .

$$\frac{dA}{dt}\,|_{a=16,\ b=12} = \frac{1}{2}\,(-0,5 \cdot 12 + 16 \cdot 2) = 13$$

El área del triángulo aumenta a una tasa de $13\,\text{cm}^2/\text{min}$.

1 punto

. . . .

c) Se desea construir un recipiente reforzado para almacenar una sustancia tóxica con forma de cilindro circular recto de volumen 900π cm^3. Se sabe que el precio de construir la tapa y el fondo del cilindro es de ₡250 por cada cm^2; mientras que la parte lateral cuesta ₡150 por cada cm^2. Determine la medida de la altura h del cilindro, de manera que el costo de construirlo sea mínimo. **4 Pts**

. . . .

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = 900\pi \Rightarrow h = \frac{900}{r^2}$$

$$C = 2\pi r^2 \cdot 250 + 2\pi r h \cdot 150 \Rightarrow C = 500\pi r^2 + 300\pi r \cdot \frac{900}{r^2}$$

$$C(r) = 500\pi r^2 + \frac{270\,000\pi}{r}$$

1 punto

. . . .

$$C'(r) = 0 \Longleftrightarrow 1000\pi r - \frac{270\,000\pi}{r^2} = 0 \Longleftrightarrow r^3 = 270 \Longleftrightarrow r = 3\sqrt[3]{10} \approx 6,46$$

1 punto

. . . .

$$C''(r) = 1000\pi + \frac{54\,0000}{r^3} \Rightarrow C''(6,46) > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada si $r \approx 6,46$ el costo es mínimo.

1 punto

. . . .

$$h = \frac{900}{\left(3\sqrt[3]{10}\right)^2} \approx 21,54$$

Para que el costo sea mínimo la altura debe ser de aproximadamente $21,54\,\text{cm}$

1 punto

. . . .

. . . .

FÓRMULAS

Área lateral de un cilindro: $A_L = 2\pi r h$

Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$

. . . .

De acuerdo con lo indicado en el programa, en la pregunta 6.c. se desarrollará el atributo asociado al curso.

Atributo: conocimiento de ingeniería.

Nivel: inicial.

Contenido: problemas de máximos y mínimos.

Objetivo: resuelva problemas que involucren los conceptos de máximo y mínimo de una función.