Практическая работа 14.
Функции от матриц.

Цель работы: приобретение навыков работы с функциями от матриц в среде MatLab.

Теоретические сведения

Операции с функциями от матриц

Ранее были рассмотрены команды MATLAB для определения таких числовых характеристик матриц, как ранг и определитель. Из других команд этого ряда можно отметить команды *svd, cond* и *norm*, служащие для определения сингулярных чисел, чисел обусловленности и норм (векторных и матричных). По команде *S=svd(A)* вычисляются сингулярные числа матрицы *A*, т.е. положительные квадратные корни из собственных чисел матрицы $A^T A$. Они используются при определении ранга матрицы, при оценке ее обусловленности, при решении задач аппроксимации. Максимальное из сингулярных чисел матрицы определяет ее спектральную норму, а отношение максимального сингулярного числа к минимальному - дает число обусловленности по этой норме.

Основные матричные нормы могут быть вычислены с помощью команды *norm* и ее модификаций. Три наиболее употребительные векторные нормы вычисляются с помощью следующих команд MatLab:

- *norm(A)* и *norm(A, 2)* – спектральная норма матрицы (равна ее наибольшему сингулярному числу), тот же результат можно получить как *max(svd(A))*;

- *norm(A, 1)* – первая (столбцовая) норма матрицы А (определяется столбцом с наибольшей суммой элементов) ;

- *norm(A, inf)* – бесконечная (строчная) норма матрицы А (определяется строкой с наибольшей суммой элементов).

Матричные нормы используются, в частности, при оценке степени обусловленности матриц. Обусловленность матрицы можно найти с помощью команды *cond(A).* Минимальное значение числа обусловленности ($\mu=1$) соответствует идеально обусловленной матрице. Чем больше μ, тем хуже обусловленность и тем большей погрешностью будет сопровождаться численное решение системы линейных алгебраических уравнений $AX=b$.

В MatLab имеется несколько команд для вычисления функций от квадратных матриц – это, например, *sqrtm, expm*. Функция *sqrtm (A)* вычисляет квадратный корень из матрицы *A*. Если матрица *A* имеет отрицательные собственные числа, результат будет комплексной матрицей.

Команда *expm (A)* обеспечивает вычисление матричной экспоненты *A*. Матричная экспонента для заданной квадратной матрицы *A* вводится как сумма ряда:

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots \ .$$

Она представляет собой квадратную матрицу того же размера, что и матрица A, и обладает рядом свойств, характерных для обычной экспоненты.

Одно из важных применений матричной экспоненты – аналитический расчет свободного движения линейных динамических объектов. Математически эта задача сводится к решению системы однородных дифференциальных уравнений:

$\dot{X} = AX$,

$y=CX$,

$X(0)=X_0$,

где A – квадратная матрица, C – прямоугольная матрица, X – вектор переменных состояния

Один из способов решения этой задачи связан с использованием матричной экспоненты. Он опирается на запись решения в форме: $X(t)=Ce^{At}\ X_0$.

Последовательность действий, используемая при решении такого типа задач:

- преобразовать уравнение к форме Коши, обозначая:

$x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}$

- задать матрицы A, C этой системы и матрицу X_0 четырех вариантов начальных условий;

- использовать символьные вычисления при вычислении решения $X(t)=Ce^{At}\ X_0$, например,

syms T

*E=expm(A*T)*

*Y=C*E*X₀;*

- осуществить вывод графиков на интервале, например, [0 10], командой *ezplot* (можно также дополнительно использовать *hold on* , которая предоставляет возможность сохранения предыдущих построений).

Такой способ может оказаться более удобным, если надо получить несколько решений одной и той же системы при различных начальных условиях.