Практическая работа 8.
Методы вычисления интегралов в системе MatLab

Цель работы. изучение численных методов вычисления интегралов в системе MatLab, изучение аналитических методов вычисления интегралов, приобретение навыков вычисления интегралов в системе MatLab.

Теоретические сведения

Численное интегрирование
Метод трапеций

Общий подход к решению задачи заключается в разбиении отрезка $[a,b]$ на множество отрезков меньших размеров и вычислении интеграла как суммы, приближенно вычисленных площадей полосок, получившихся при таком разбиении.

Метод трапеций – приближенный метод, потому что когда вычисляем площадь трапеции, то заменяем кривую на прямую. Для каждой маленькой трапеции эта погрешность своя. Сумма погрешностей должна давать отклонение полученного значения от истинного.

Итак, предполагается, что отрезок $[a,b]$ разбит на n частей точками x_i, что необходимо при построении полинома Лагранжа $L_n(x)$ первой степени

$$f(x) \approx L_{1,i}(x) = \frac{1}{h}\left[(x - x_{i-1}) f(x_i) - (x - x_i) f(x_{i-1})\right].$$

Для равноотстоящих узлов $x_i = x_0 + ih,\ h = (b-a)/n,\ x_0 = a,\ x_n = b$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)\, dx. \qquad (1)$$

Формула трапеций имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{1}{2}(f_0 + f_n) + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}), \qquad (2)$$

где f_i – значения функции в узлах интерполяции.

Имеем следующую оценку погрешности метода интегрирования по формуле трапеций:

$$|R_n| \le M_2 \frac{|b-a| \cdot h^2}{12}, \qquad (3)$$

где $M_2 = \max|f''(x)|,\ x \in [a,b]$.

Пример 1: Вычислить интеграл $f(x) = \ln(\sin(x) + e^x)$ на интервале [0,3] методом трапеций.

Решение. Для того чтобы найти приближенное решение заданного уравнения, сначала необходимо построить график заданной функции (рисунок 1).

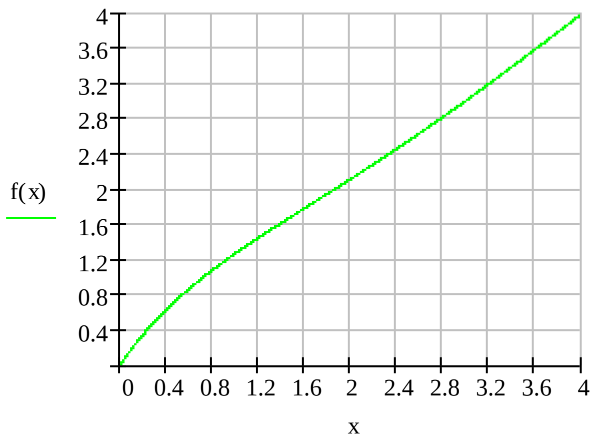

Рисунок 1 - График функции $f(x) = \ln(\sin(x) + e^x)$

Ниже приведена последовательность действий, осуществляющая приближенное вычисление интеграла методом трапеций с шагом 0.01.

```
>> x=0:0.01:3;
>> y=log(sin(x)+exp(x));
>> trapz(y)

ans =

  496.7945
```

Рисунок 2 – Вычисление интеграла методом трапеций с шагом 0.01..

Для вычисления интегралов методом трапеций в системе MatLab используется функция *trapz*:

trapz(y), trapz(x, y),

где аргументу *x* должны быть присвоены численные значения во всем диапазоне интегрирования. Величина шага интегрирования определяет точность вычислений: чем меньше этот шаг, тем достигается большая точность вычислений интеграла.

Формула Симпсона

В этом методе подынтегральная функция аппроксимируется интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени:

$$f(x) \approx L_{2,i}(x) = \frac{2}{h^2}[(x - x_{i-1/2})(x - x_i) f(x_{i-1}) -$$

$$- 2(x - x_{i-1})(x - x_i) f(x_{i-1/2}) + (x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2}) f(x_i)], \qquad (4)$$

где $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $h = x_i - x_{i-1}$.

Выполнив интегрирование, получим формулу Симпсона (формулу парабол):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{2,i}(x)dx = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i). \tag{5}$$

Надо отметить, что во многих случаях формула Симпсона оказывается более точной. На отрезке $[a,b]$ формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_0 + f_n + 2(f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}) + 4(f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{n-1/2})). \tag{6}$$

Если ввести обозначения $x_i = a + 0.5h \cdot i$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, то формула Симпсона преобразуется к виду:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_0 + f_{2n} + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1})). \tag{7}$$

Если переписать формулу (5) в виде

$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i + h} f(x)\,dx \approx \frac{2}{3} f_{i-1/2} + \frac{1}{6}(f_{i-1} + f_i), \tag{8}$$

то получим, что формула Симпсона основана на приближенной замене среднего значения $\bar{f}$ функции $f(x)$ на промежутке от x_i до $x_i + h$ на

$$\bar{f} \approx \frac{2}{3} f_{i-1/2} + \frac{1}{6}(f_{i-1} + f_i). \tag{9}$$

Формула трапеций дала бы следующий результат:

$$\bar{f} \approx \frac{1}{2} f_{i-1/2} + \frac{1}{4}(f_{i-1} + f_i). \tag{10}$$

Из вывода формул следует, что формула (10) является точной для линейных функций (вида $y = ax + b$), а формула (9) является также точной и для квадратичных функций (вида $y = ax^2 + bx + c$). Можно отметить, что формула (9) на самом деле является точной и для кубических функций (вида $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$). Абсолютную погрешность можно определить, исходя из формулы

$$|R_n| \le M_4 \frac{|b-a| \cdot h^4}{180}, \tag{11}$$

где $M_4 = \max\left|f^{(4)}(x)\right|$, $x \in [a,b]$. Для обеспечения заданной точности ε при вычислении интеграла шаг h определяется из неравенства $M_4 \dfrac{|b-a| \cdot h^4}{180} \le \varepsilon$ и затем округляется в сторону уменьшения так, чтобы $n = (b-a)/h$ было целым числом. Так как определение шага вычислений h и связанного с ним числа n несколько затруднительно, то на практике шаг h определяют грубой прикидкой, а затем, получив результат, удваивают число n, то есть шаг h делят пополам.

Пример 2. Найти интеграл $I = \int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ по формуле трапеций и по формуле Симпсона.

Решение. Разбиваем промежуток на части и находим значения подынтегральной функции (таблица 6):

Таблица 6.

x	0	0.5	1
y	0	0.324	0.346

По формуле трапеций получаем

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{0.346}{2} + 0.324\right) = 0.248.$$

По формуле Симпсона получаем

$$I = \frac{1}{6}(0.324 \cdot 4 + 0.346) = 0.274\,.$$

Точное значение этого интеграла есть 0.272, поэтому ошибка при вычислениях по методу трапеций составила около 10%, а по формуле Симпсона - менее 1%.

Преимущество формулы Симпсона особенно сказывается при увеличении числа n интервалов разбиения.

В среде MatLab численное интегрирование для вычисления интегралов более высоких порядков точности реализуются, например, функциями: *quad* (метод Симпсона), *quadl* (метод Ньютона-Котеса 8-го порядка точности). У функции *quad8* более высокий порядок точности по сравнению с функцией quad, что очень хорошо для гладких функций, так как обеспечивается более высокая точность результата при большем шаге интегрирования (меньшем объеме вычислений). Функции *quad* и *quad8* могут принимать различное количество параметров. Минимальный формат вызова этих функций включает в себя три параметра:

quad('name', x1, x2, tol);

quadl('name', x1, x2, tol),

где *name* – имя подынтегральной функции, *x1* – нижний предел интегрирования, *x2* – верхний предел интегрирования, *tol* – относительная погрешность (по умолчанию *tol*=10e-3).

Для вычисления двойных интегралов в среде MatLab применяется специальная функция *dblquad*:

dblquad('name', x1, x2, x3, x4, tol),

где *name* – имя подынтегральной функции, *x1* – нижний предел первого интеграла, *x2* – верхний предел первого интеграла, *x3* – нижний предел второго интеграла, *x4* – верхний предел второго интеграла, *tol* – относительная погрешность (по умолчанию *tol*=10e-3).

Вычисление интегралов аналитическими методами осуществляется с помощью функций *int(y(x)), int(y(x), a, b),* где *y(x)* – подынтегральная функция, *a, b* – пределы интегрирования.

Технология вычисления интегралов состоит в следующем:

1. Определение символьных переменных с помощью функции *syms,* например,

   syms x;

   syms a, x;

2. Ввод подынтегрального выражения *y=f(x).*
3. Ввод функции *int(y),* если вычисляется неопределенный интеграл,

   или функции *int(y(x), a, b),* если вычисляется определенный интеграл в пределах [*а, в*].

Для вычисления несобственных интегралов (аналитический метод) осуществляется вызов функции, например, в следующем виде: *int(y(x), 0, inf).* В случае численного интегрирования можно воспользоваться, например, функцией: *integral (y(x), a, b).* Для вычисления двойного неопределенного интеграла (аналитический метод) также можно воспользоваться функцией *int(y),* если эту функцию повторить *n* раз при *n*-кратном интегрировании.