Практическая работа 3.

Интерполяция и предсказание

Цель работы: Изучить основные операции по работе в среде MathCad. Приобрести навыки построения интерполяционного полинома.

Теоретические сведения

Аппроксимация функций заключается в приближенной замене заданной функции $f(x)$ некоторой функцией $\varphi(x)$ так, чтобы отклонение функции $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $\varphi(x)$ при этом называется *аппроксимирующей*. Типичной задачей аппроксимации функций является задача *интерполяции*. Необходимость *интерполяции* функций в основном связана с двумя причинами:

1. Функция $f(x)$ имеет сложное аналитическое описание, вызывающее определенные трудности при его использовании (например, $f(x)$ является спецфункцией: гамма-функцией, эллиптической функцией и др.).
2. Аналитическое описание функции $f(x)$ неизвестно, т.е. $f(x)$ задана таблично. При этом необходимо иметь аналитическое описание приближенно представляющее $f(x)$ (например, для вычисления: значений $f(x)$ в произвольных точках, определения интегралов и производных от $f(x)$ и т. п.)

Интерполяция

Простейшая задача *интерполяции* заключается в следующем. Для заданных $n + 1$ точек $x_i = x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые называются *узлами интерполяции,* и значений в этих точках некоторой функции $f(x_i) = y_0, y_1, \ldots, y_n$ построить полином $\varphi(x)$ (*интерполяционный полином*) степени n вида

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

принимающий в узлах интерполяции x_i те же значения y_i, что и функция $f(x_i)$:

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi(x_1) = y_1,\ \ldots,\ \varphi(x_n) = y_n,\ i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Глобальная интерполяция

Простейшим видом *глобальной интерполяции* является *параболическая интерполяция*, когда, используя описанные выше условия (2), для отыскания неизвестных $n + 1$ коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ выражения (1) получают систему из $n + 1$ уравнений:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = y_0, \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = y_1, \\ \ldots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases} \qquad (3)$$

Интерполяционная формула Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}. \qquad (4)$$

Для построения *интерполяционной формулы Лагранжа* в Mathcad удобно использовать функцию *if*

if**(***cond, tval, fval***)**	Возвращает значение *tval*, если *cond* отличен от 0 (истина). Возвращает значение *fval*, если *cond* равен 0 (ложь).

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблично с *равноотстоящими* значениями аргумента ($h_i = x_{i+1} - x_i = \text{const}$). Введем предварительно понятие *конечных разностей:*

$$
\begin{aligned}
&\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, (i = 0, 1, \ldots, n-1)\\
&\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, (i = 0, 1, \ldots, n-2)\\
&\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, (i = 0, 1, \ldots, n-k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, (i = 0, 1, \ldots, n-1)\\
&\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, (i = 0, 1, \ldots, n-2)\\
&\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, (i = 0, 1, \ldots, n-k)
\end{aligned}
$$

С учетом введенных обозначений *первая интерполяционная формула Ньютона* имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&t = \frac{x - x_0}{h},\\
&P_{n1}(x) = P_{n1}(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots\\
&\qquad \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Вторая интерполяционная формула имеет вид*:*

$$
\begin{aligned}
&t = \frac{x - x_n}{h},\\
&P_{n2}(x) = P_{n2}(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots\\
&\qquad \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Однако, интерполяция при большом числе узлов приводит к необходимости работать с многочленами высокой степени (например, 50-й или даже 100-й), что неприемлемо как с точки зрения вычислений, так и из-за склонности таких многочленов к осцилляции (колебаниям) между узлами сетки. Поэтому на практике часто используют интерполяцию кусочными многочленами (или *локальную интерполяцию*).

Локальная интерполяция

При *локальной* интерполяции между различными узлами выбираются различные многочлены невысокой степени. В среде Mathcad есть для этого инструментарий: средства *линейной интерполяции* (функция *linterp*) и *интерполяции сплайном* (функция *interp*) - линейным (*lspline*), параболическим (*pspline*) и кубическим (*cspline*).

linterp**(***vx, vy, x***)**	Использует векторы данных *vx* и *vy*, чтобы возвратить линейно интерполируемое значение *y*, соответствующее третьему аргументу *x*.
lspline**(***vx, vy***)** pspline(*vx, vy*) cspline(*vx, vy*)	Все эти функции возвращают вектор коэффициентов вторых производных, который мы будем называть *vs*. Вектор *vs*, используется в функции *interp*:
interp**(***vs, vx, vy, x***)**	Возвращает интерполируемое значение *y*, соответствующее аргументу *x.*

Предсказание

Если необходимо оценить значения функции в точках не принадлежащих отрезку [x_0, x_n], используйте функцию *predict*.

predict**(***v, m, n***)**	Возвращает *n* предсказанных значений, основанных на *m* последовательных значениях вектора данных *v*.