Практическая работа 5.
Гармонический и спектральный анализ периодических сигналов.
Спектральный анализ на основе быстрого преобразования Фурье.

Цель работы. Изучение возможностей описания любой периодической функции с помощью тригонометрического ряда Фурье. Приобретение навыков вычисления коэффициентов ряда Фурье и графического отображения результатов гармонического и спектрального синтеза периодической функции. Изучение возможностей встроенных в Mathcad средств быстрого преобразования Фурье. Приобретение навыков применения быстрого преобразования Фурье для спектрального анализа и синтеза.

Основные понятия и расчетные формулы

Одним из фундаментальных положений математики, нашедшим широкое применение во многих прикладных задачах (процессы передачи информации, в теории электротехники, в исследовании движения машин, в теории корабля и др.), является возможность описания любой периодической функции $f(t)$ с периодом T, удовлетворяющей условиям Дирихле (согласно теореме Дирихле периодическая функция должна иметь конечное число разрывов и непрерывность производных между ними.), с помощью тригонометрического ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)\,, \tag{1}$$

где $\omega_1 = 2\pi / T$ - частота повторения (или частота первой гармоники); k - номер гармоники. Этот ряд содержит бесконечное число косинусных или синусных составляющих - *гармоник*, причем амплитуды этих составляющих a_k и b_k являются *коэффициентами Фурье*, определяемыми интегральными выражениями:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_1 t\,dt\,, \tag{2}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega_1 t\,dt\,, \tag{3}$$

Также ряд Фурье можно представить в виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)\,, \tag{4}$$

где *амплитуда* A_k и *фаза* φ_k гармоник определяются выражениями:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\,, \tag{5}$$

$$\varphi_k = -arctg\frac{b_k}{a_k}\,. \tag{6}$$

Гармоническим анализом называют разложение функции $f(t)$, заданной на отрезке [0, T] в ряд Фурье или в вычислении коэффициентов Фурье a_k и b_k по формулам (2) и (3).
Гармоническим синтезом называют получение колебаний сложной формы путем суммирования их гармонических составляющих (гармоник).

Спектром функции $f(t)$ называется совокупность ее гармонических составляющих, образующих ряд Фурье. Спектр можно характеризовать некоторой зависимостью A_k (*спектр амплитуд*) и φ_k (*спектр фаз*) от частоты $\omega_k = k\omega_1$.

Спектральный анализ периодических функций заключается в нахождении амплитуды A_k и фазы φ_k гармоник ряда Фурье по формуле (4). Задача, обратная спектральному анализу, называется *спектральным синтезом*.

Встроенные в Mathcad средства быстрого преобразования Фурье (БПФ) существенно упрощают процедуру приближенного спектрального анализа. БПФ - быстрый алгоритм переноса сведений о функции, заданной 2^m (m - целое число) отсчетами во временной области, в частотную область. Если речь идет о функции $f(t)$, заданной действительными отсчетами, следует использовать функцию *fft*.

fft(*v*)	Возвращает прямое БПФ 2^m-мерного вещественного вектора *v*, где *v* - вектор, элементы которого хранят отсчеты функции $f(t)$.

Результатом будет вектор A размерности $1 + 2^{m-1}$ с комплексными элементами - отсчетами в частотной области. Фактически действительная и мнимая части вектора есть коэффициенты Фурье a_k и b_k. Функция *ifft* реализует обратное БПФ:

ifft(*v*)	Возвращает обратное БПФ для вектора *v* с комплексными элементами. Вектор *v* имеет $1 + 2^{m-1}$ элементов.

Результатом будет вектор A размерности 2^m с действительными элементами.

Под фильтрацией подразумевается выделение полезного сигнала из его смеси с мешающим сигналом - шумом. Наиболее распространенный тип фильтрации - частотная фильтрация. Если известна область частот, занимаемых полезным сигналом, достаточно выделить эту область и подавить те области, которые заняты шумом.

Рисунок 4 иллюстрирует технику фильтрации с применением БПФ. Сначала синтезируется исходный сигнал, представленный 128 отсчетами вектора *v*. Затем к этому сигналу присоединяется шум с помощью генератора случайных чисел (функция *rnd*) и формируется вектор из 128 отсчетов зашумленного сигнала.

Используя прямое БПФ, сигнал с шумом преобразуется из временной области с частотную, что создает вектор *f* из 64 частотных составляющих. Затем выполняется фильтрующее преобразование, эффективность которого оценивается параметром α . Фильтрующее преобразование удобно выполнять с помощью функции Хевисайда

Ф(x)	Ступенчатая функция Хевисайда. Возвращает 1, если $x \geq 0$; иначе 0.

Отфильтрованный сигнал (вектор *g*) подвергается обратному БПФ и создает вектор выходного сигнала *h*.

Сравнение временных зависимостей исходного и выходного сигналов, показывает, что выходной сигнал почти полностью повторяет входной и в значительной мере избавлен от высокочастотных шумовых помех.