

Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер.

1.1.1. Существуют ли графы с пятью вершинами, степени которых равны:

- а) 0, 0, 0, 0, 0;
- б) 4, 4, 4, 4, 4;
- в) 2, 3, 2, 4, 2;
- г) 2, 2, 2, 2, 2;
- д) 1, 1, 1, 1, 1;
- е) 3, 5, 4, 2, 2;
- ж) 4, 4, 4, 4, 2?

1.1.2. В графе 100 вершин и 800 рёбер.

- а) Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.
- б) Может ли так случиться, что все вершины этого графа имеют степень 16?

1.1.3. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 15 граней и все грани являются треугольниками?

1.1.4. Докажите, что при любых $0 \leq k < n$ таких, что kn — чётное, существует граф на n вершинах, степени которого равны k .

Замечание. Если вы решили и сдали все задачи выше во время занятия, вы можете решать и сдавать домашние задачи также во время занятия.

1.1.5. Куб со стороной $n \geq 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

Дополнением \bar{G} графа G называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа G , в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в G эта пара вершин ребром не связана.

1.1.6. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

1.1.7. В гости придут либо 5, либо 7 человек. На какое минимальное число кусков нужно порезать торт, чтобы гарантированно можно было раздать всем поровну?

1.1.8. Вершинным покрытием в графе называется подмножество вершин, содержащее хотя бы один конец каждого ребра. Придумайте алгоритм, работающий за полиномиальное время, и находящий в графе вершинное покрытие, которое по размеру превышает минимальное не более чем в два раза.

Домашнее задание 1, часть 1

Дедлайны: 13 февраля и 15 февраля, 19:00

Правила сдачи и оценивания. Это первая часть первого домашнего задания. Всего в домашнем задании 6 задач, каждая оценивается в 2,5 баллов. Максимальная оценка за домашнее задание составляет 10 баллов. Если вы наберете больше, то баллы сверх 10 зачтутся в виде бонуса.

Дедлайн первого домашнего задания — 15 февраля в 19:00. Решения нужно отправить по адресу hw.graphs.sber@gmail.com. Решения будут проверены до 19:00 16 февраля.

Также можно отправить решения до 19:00 13 февраля. Тогда они будут проверены до 19:00 14 февраля и в случае наличия ошибок можно будет успеть их исправить до основного дедлайна.

1.1.9. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

1.1.10. Существует ли неориентированный граф с шестью вершинами, степени которых равны 4, 2, 4, 3, 1, 2? Если такого графа не существует, докажите это, если существует постройте пример.

1.1.11. В графе на 17 вершинах степень каждой вершины не меньше 8. Докажите, что этот граф связан.