Ориентированные графы и дискретная вероятность

Артём Максаев

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

Орграфы и дискретная вероятность

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами
- А что если отношение не симметрично, например «быть подписанным»?

Ориентированные графы

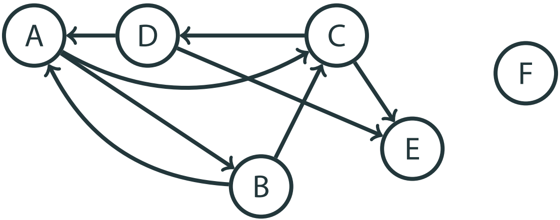
- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами
- А что если отношение не симметрично, например «быть подписанным»?
- Что если в нашей транспортной сети есть односторонние дороги?

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами
- А что если отношение не симметрично, например «быть подписанным»?
- Что если в нашей транспортной сети есть односторонние дороги?
- Есть много других случаев, в которых отношения между объектами не симметричны

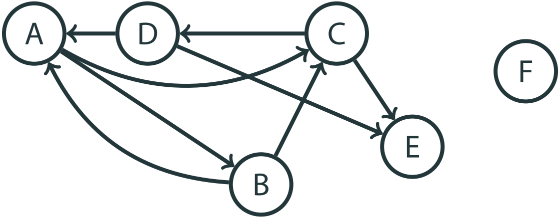
Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами



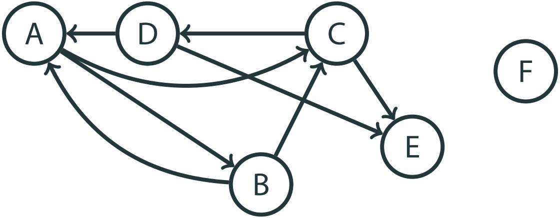
Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем стрелками — ребрами



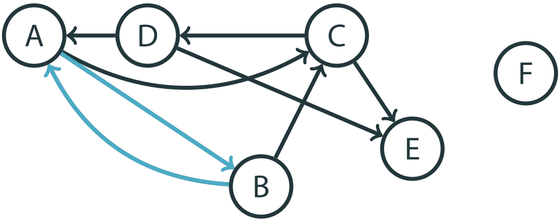
Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем стрелками — ребрами
- При изображении ребра могут пересекаться



Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем стрелками — ребрами
- При изображении ребра могут пересекаться
- Возможны ребра сразу в обе стороны



Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами

Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V

Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u

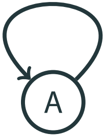
Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u
- Множество ребер графа обозначают буквой E

Ориентированные графы

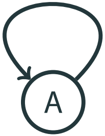
- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u
- Множество ребер графа обозначают буквой E
- Отдельные ребра часто обозначают буквой e

Что разрешается?



- Допускаются ли петли?

Что разрешается?

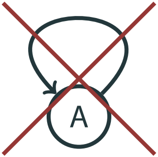


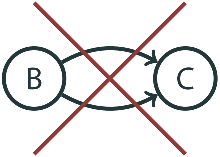
- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?

Что разрешается?

- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет

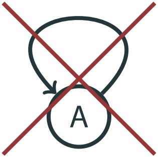
Что разрешается?

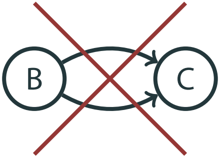




- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет
- По умолчанию не допускаем

Что разрешается?

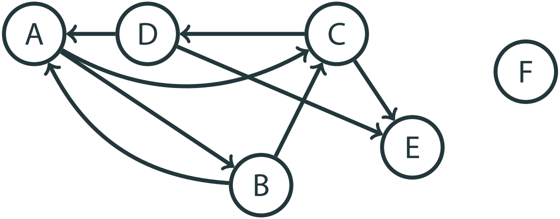




- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет
- По умолчанию не допускаем
- Большинство результатов переносится и на эти случай

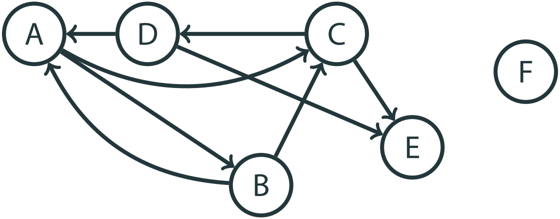
Степени вершин

- Пусть v вершина графа



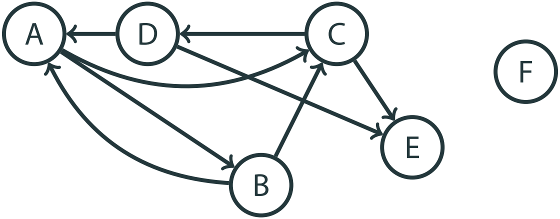
Степени вершин

- Пусть v вершина графа
- Входящей степенью v называется число ребер, входящих в v; обозначение: $d_+(v)$



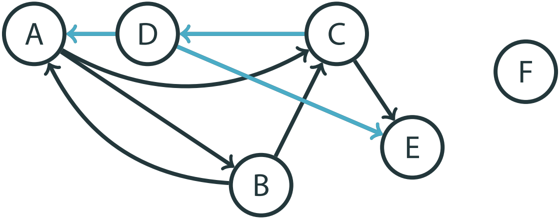
Степени вершин

- Пусть v вершина графа
- Входящей степенью v называется число ребер, входящих в v; обозначение: $d_+(v)$
- Исходящей степенью v называется число ребер, исходящих из v; обозначение: $d_-(v)$



Степени вершин

- Пусть v вершина графа
- Входящей степенью v называется число ребер, входящих в v; обозначение: $d_+(v)$
- Исходящей степенью v называется число ребер, исходящих из v; обозначение: $d\_(v)$
- Например, $d_+(D) = 1$, $d\_(D) = 2$



Степени вершин и число ребер

Лемма

Сумма всех исходящих степеней вершин в графе равна сумме всех входящих степеней вершин и равна числу ребер

Или в виде формулы

$$\sum_{v \in V} d_+(v) = \sum_{v \in V} d_-(v) = |E|$$

Степени вершин и число ребер

Лемма

Сумма всех исходящих степеней вершин в графе равна сумме всех входящих степеней вершин и равна числу ребер

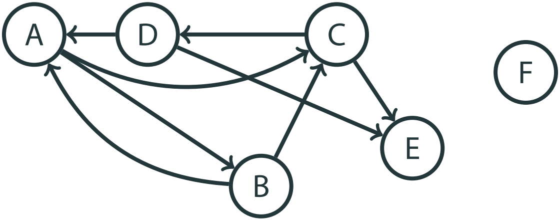
Или в виде формулы

$$\sum_{v \in V} d_+(v) = \sum_{v \in V} d_-(v) = |E|$$

Доказательство почти такое же, как для неориентированных графов

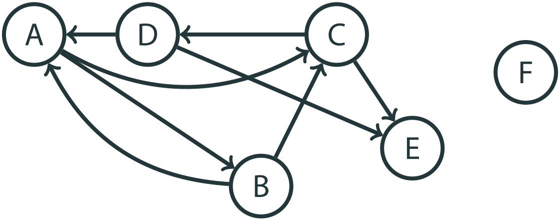
Степени вершин и число ребер

- Давайте посчитаем двумя способами число концов ребер



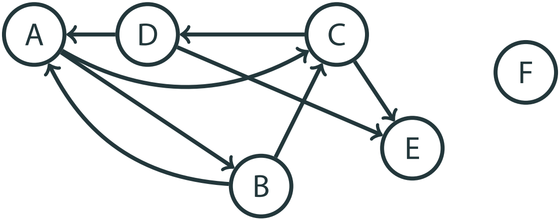
Степени вершин и число ребер

- Давайте посчитаем двумя способами число концов ребер
- С одной стороны, концов ребер столько же, сколько ребер



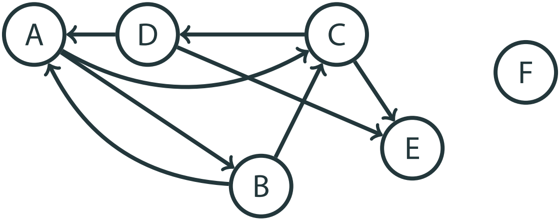
Степени вершин и число ребер

- С другой стороны, каждый конец ребра входит в какую-то вершину



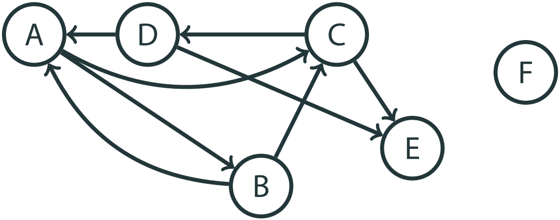
Степени вершин и число ребер

- С другой стороны, каждый конец ребра входит в какую-то вершину
- В вершину v входит $d_+(v)$ концов, так что всего концов $\sum_{v \in V} d_+(v)$



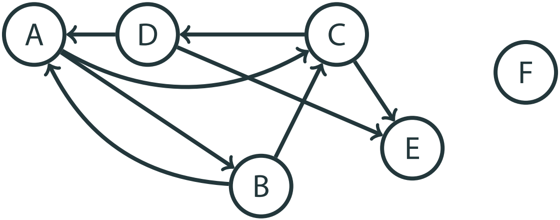
Степени вершин и число ребер

- Получаем $\sum_{v \in V} d_+(v) = |E|$



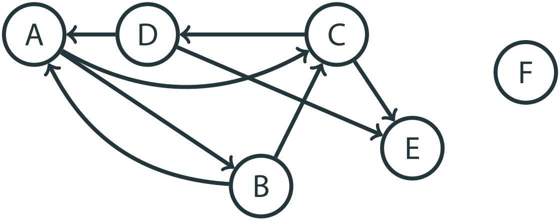
Степени вершин и число ребер

- Получаем $\sum_{v \in V} d_+(v) = |E|$
- Аналогично можно посчитать двумя способами число начал ребер



Степени вершин и число ребер

- Получаем $\sum_{v \in V} d_+(v) = |E|$
- Аналогично можно посчитать двумя способами число начал ребер
- Получаем $\sum_{v \in V} d_-(v) = |E|$



Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \dots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем, у нас k

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем, у нас k
- Вершины могут повторяться

Ориентированные пути

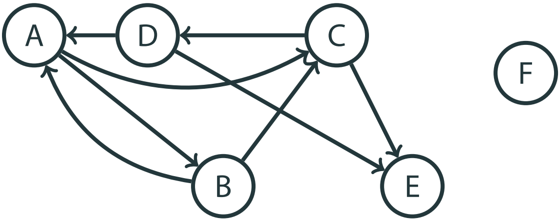
- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем, у нас k
- Вершины могут повторяться
- Если вершины не повторяются, то это простой путь

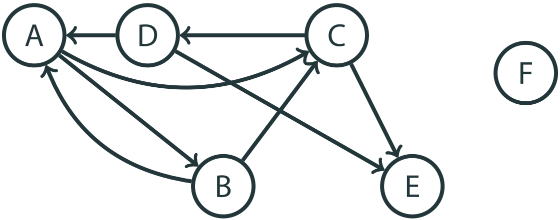
Ориентированные пути

- Например, A, B, C, D, A, C — это ориентированный путь, но не простой путь



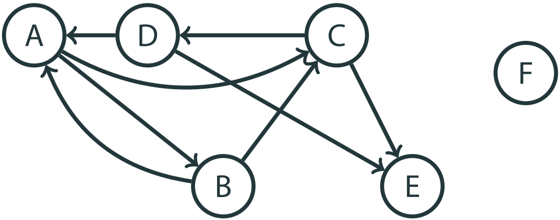
Ориентированные пути

- Например, A, B, C, D, A, C — это ориентированный путь, но не простой путь
- A, B, C, D, E — простой ориентированный путь



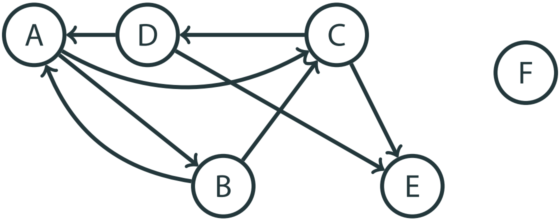
Ориентированные пути

- Например, A, B, C, D, A, C — это ориентированный путь, но не простой путь
- A, B, C, D, E — простой ориентированный путь
- A, C, E, D, A — не является ориентированным путем: нет ребра (E, D)



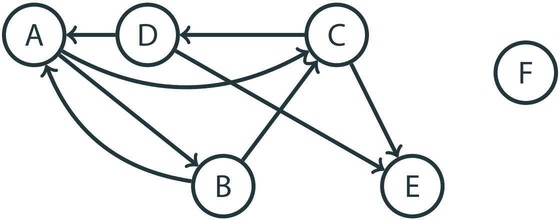
Ориентированные циклы

- Если начальная вершина ориентированного пути совпадает с конечной, то это ориентированный цикл: $v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0$



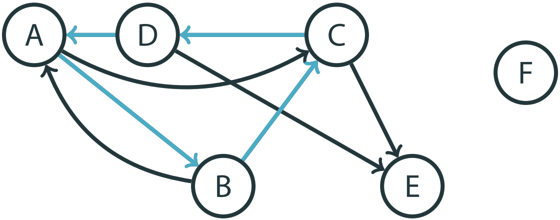
Ориентированные циклы

- Если начальная вершина ориентированного пути совпадает с конечной, то это ориентированный цикл: $v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)



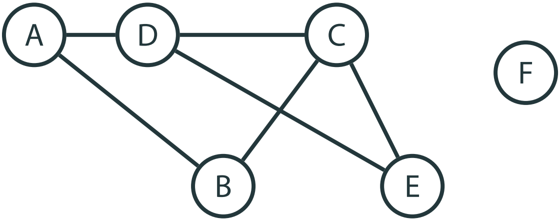
Ориентированные циклы

- Если начальная вершина ориентированного пути совпадает с конечной, то это ориентированный цикл: $v_0, v_1, \dots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)
- Например: A, B, C, D, A — ориентированный цикл



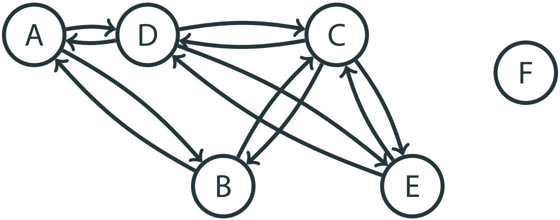
Ориентация ребер

- С точки зрения путей в графах, неориентированные графы можно задать как ориентированные



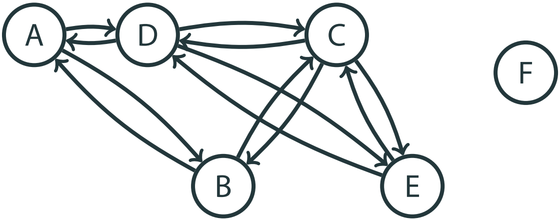
Ориентация ребер

- С точки зрения путей в графах, неориентированные графы можно задать как ориентированные
- Просто раздваиваем ребра



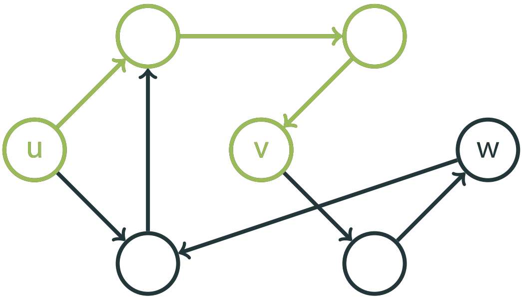
Ориентация ребер

- С точки зрения путей в графах, неориентированные графы можно задать как ориентированные
- Просто раздваиваем ребра
- Все пути изначального графа остаются путями в ориентированном



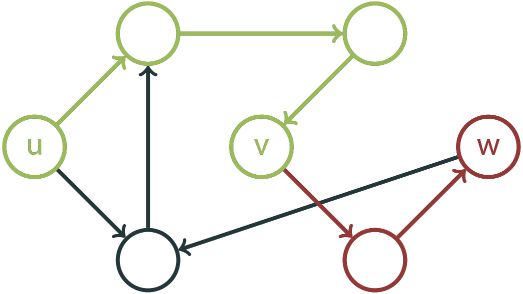
Достижимость

- Вершина v достижима из вершины u, если есть ориентированный путь из u в v



Достижимость

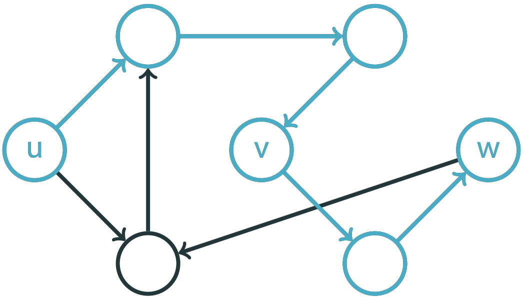
- Вершина v достижима из вершины u, если есть ориентированный путь из u в v
- Это транзитивно: если v достижима из u, а w достижима из v, то w достижима из u



Достижимость

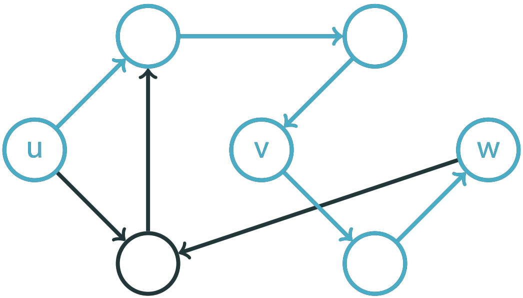
- Вершина v достижима из вершины u, если есть ориентированный путь из u в v

- Это транзитивно: если v достижима из u, а w достижима из v, то w достижима из u



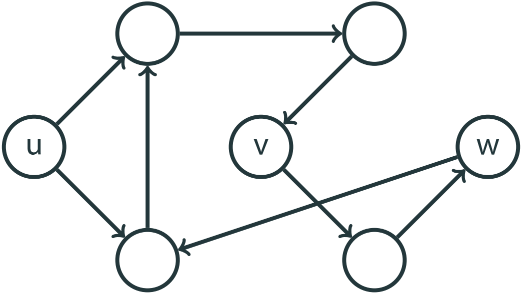
Достижимость

- Это несимметрично: w достижима из u, а u не достижима из w



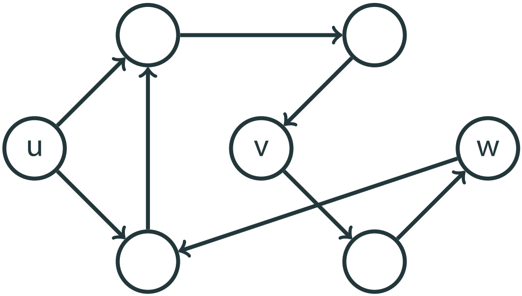
Достижимость

- Это несимметрично: w достижима из u, а u не достижима из w
- Действительно, нет ребер, входящих в u



Достижимость

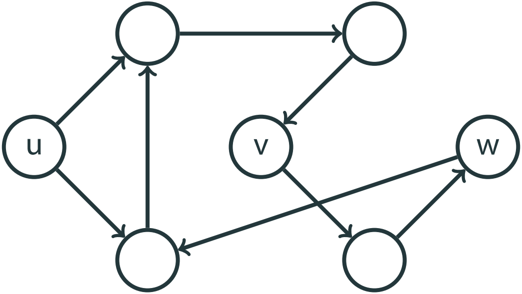
- Это отношение можно симметризовать!



Достижимость

- Это отношение можно симметризовать!

- Обсудим это чуть позже

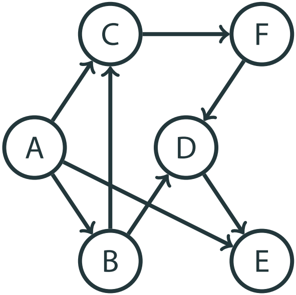


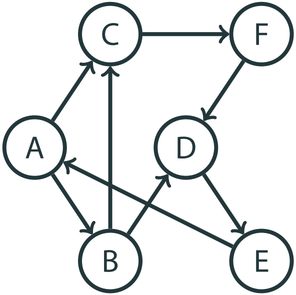
Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Ориентированные ациклические графы

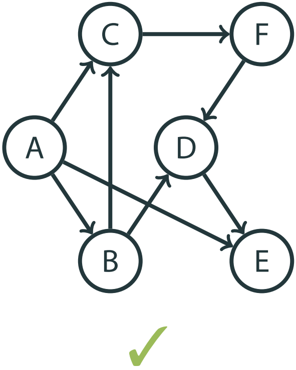
Граф называется ориентированным ациклическим, если в нем нет ориентированных циклов

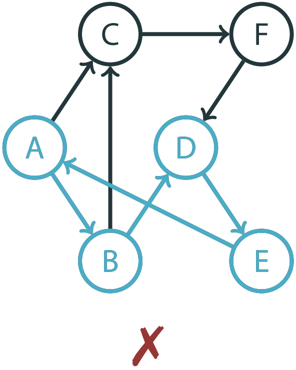




Ориентированные ациклические графы

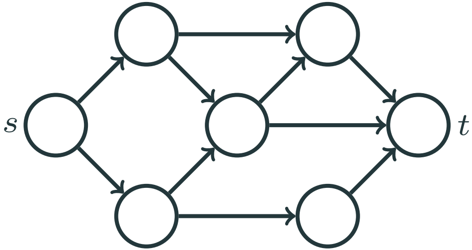
Граф называется ориентированным ациклическим, если в нем нет ориентированных циклов





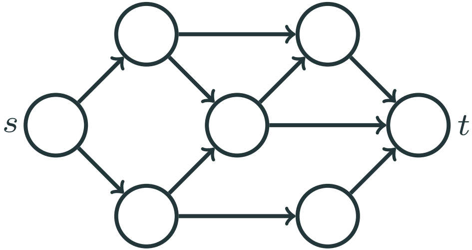
Примеры

- Граф зависимостей курсов в университете



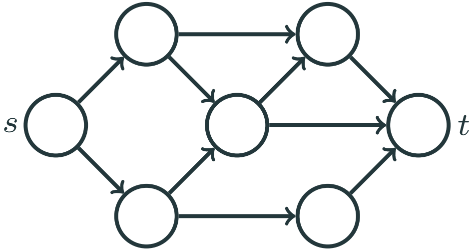
Примеры

- Граф зависимостей курсов в университете
- Граф зависимостей работ



Граф зависимостей

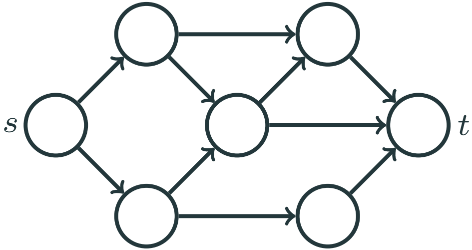
- Пусть у нас есть n задач, между которыми есть зависимости: для некоторых задач A и B известно, что A нужно выполнить до B



Граф зависимостей

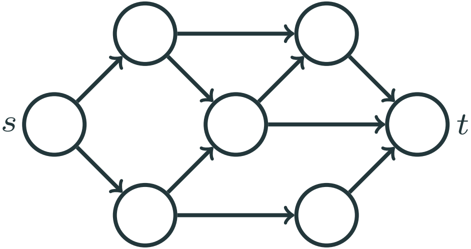
- Пусть у нас есть n задач, между которыми есть зависимости: для некоторых задач A и B известно, что A нужно выполнить до B

- Мы хотим выполнять задачи одну за другой



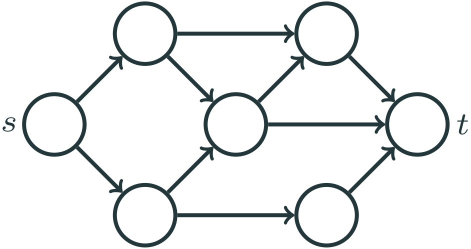
Граф зависимостей

- Пусть у нас есть n задач, между которыми есть зависимости: для некоторых задач A и B известно, что A нужно выполнить до B
- Мы хотим выполнять задачи одну за другой
- Построим граф: вершины — задачи, ориентированные ребра — зависимости



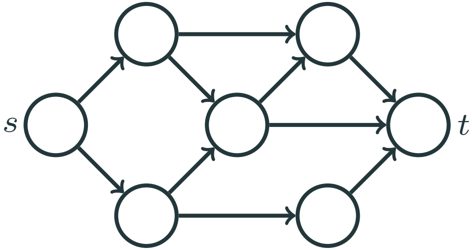
Граф зависимостей

- Хотим перенумеровать вершины так, чтобы ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером



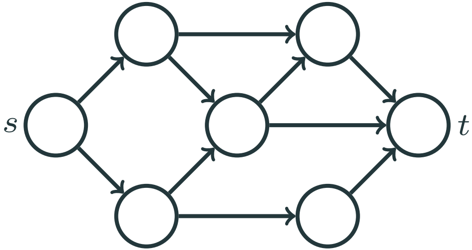
Граф зависимостей

- Хотим перенумеровать вершины так, чтобы ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером
- Когда это возможно?



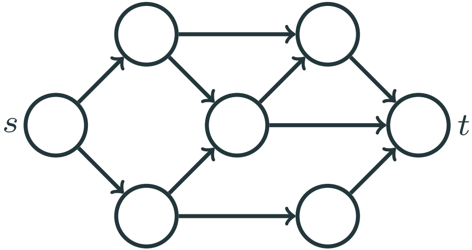
Граф зависимостей

- Очевидно, невозможно, если в графе есть ориентированный цикл



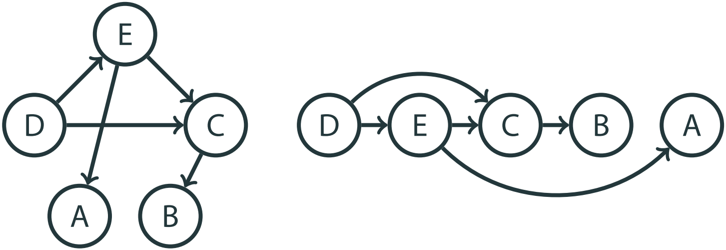
Граф зависимостей

- Очевидно, невозможно, если в графе есть ориентированный цикл
- Оказывается, это единственное препятствие



Топологическая сортировка

- Топологическая сортировка — сортировка вершин графа так, что все ребра ведут из вершин с меньшим номером, в вершины с большим



Сортировка ациклических графов

Теорема

Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

Сортировка ациклических графов

Теорема

Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

- Мы докажем, что в каждом ациклическом графе есть сток — вершина, из которой не выходит ребер

Сортировка ациклических графов

Теорема

Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

- Мы докажем, что в каждом ациклическом графе есть сток — вершина, из которой не выходит ребер
- Дальше берем сток и объявляем его последней вершиной

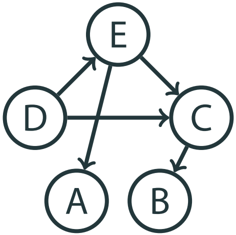
Сортировка ациклических графов

Теорема

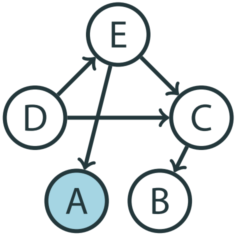
Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

- Мы докажем, что в каждом ациклическом графе есть сток — вершина, из которой не выходит ребер
- Дальше берем сток и объявляем его последней вершиной
- Удаляем сток и повторяем

Пример

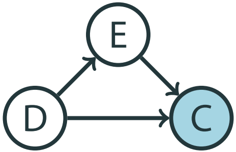


Пример



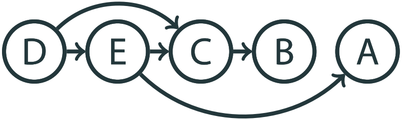
Пример

Пример



Пример

Пример



Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро

Почему есть сток?

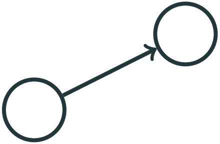
- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:

Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:

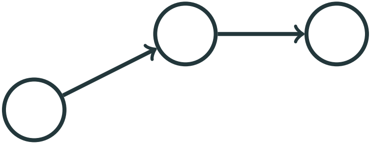
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



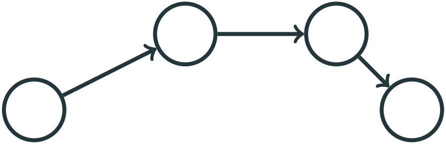
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



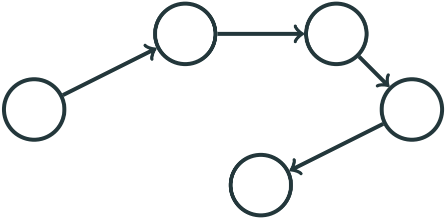
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



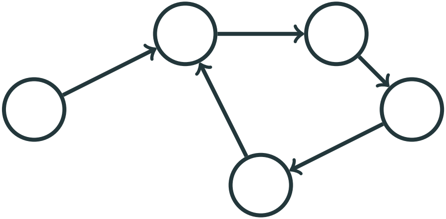
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



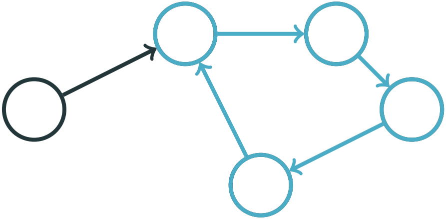
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



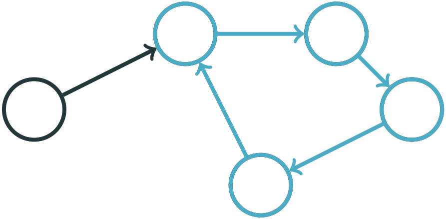
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



Почему есть сток?

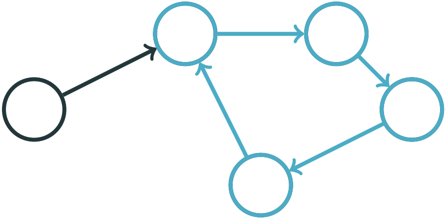
- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



- Противоречие!

Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



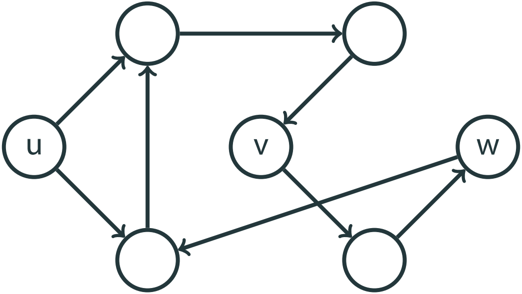
- Противоречие!
- Итак, вершины ациклического графа можно топологически упорядочить

Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- **Сильная связность**
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

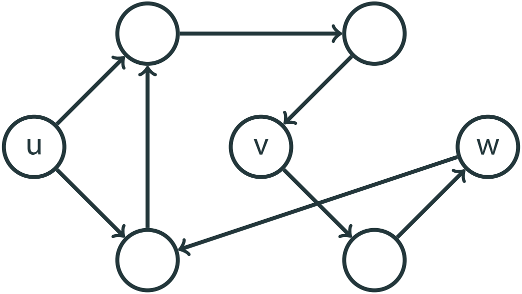
Достижимость

- Отношение достижимости несимметрично



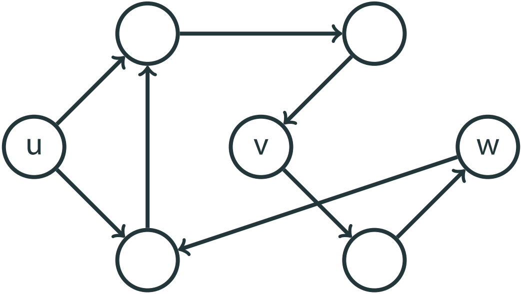
Достижимость

- Отношение достижимости несимметрично
- Но его можно симметризовать



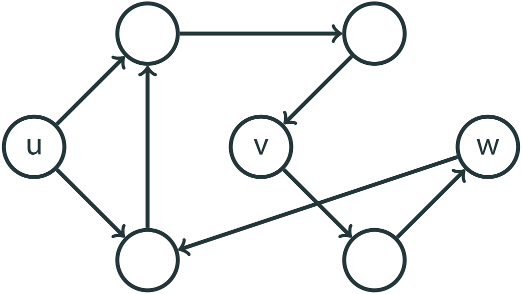
Достижимость

- Назовем вершину a сильно связанной с вершиной b, если из каждой из вершин есть путь в другую



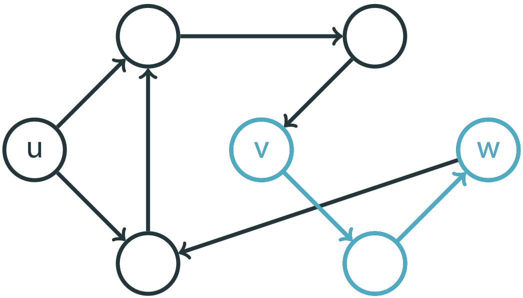
Достижимость

- Например, вершины v и w сильно связаны



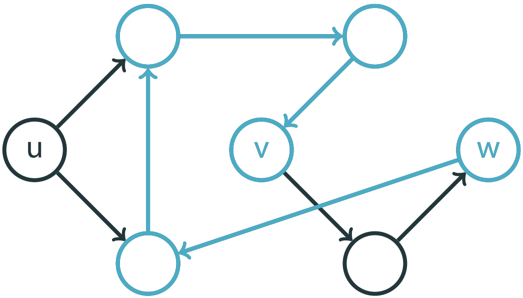
Достижимость

- Например, вершины v и w сильно связаны
- Есть путь из v в w



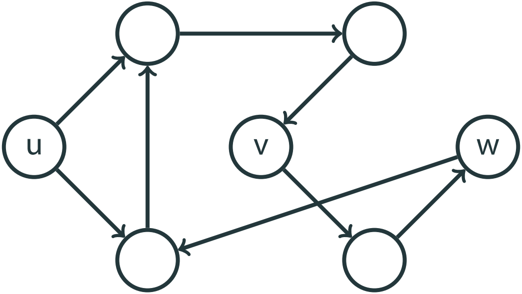
Достижимость

- Например, вершины v и w сильно связаны
- Есть путь из v в w
- Есть путь из w в v



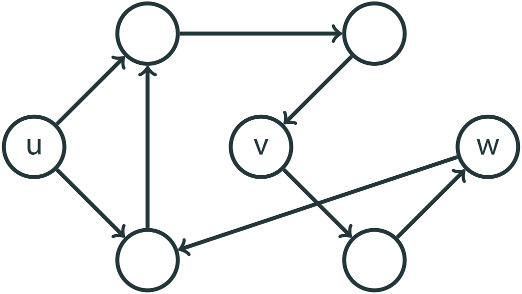
Достижимость

- А вершины u и v не сильно связаны



Достижимость

- А вершины u и v не сильно связаны
- Нет пути из v в u



Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую

Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую
- Сильная связность бывает очень важна

Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую
- Сильная связность бывает очень важна
- Для транспортной задачи говорит о ее разрешимости

Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую
- Сильная связность бывает очень важна
- Для транспортной задачи говорит о ее разрешимости
- А что делать если граф не сильно связный?

Компоненты связности

Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

Компоненты связности

Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте

Компоненты связности

Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

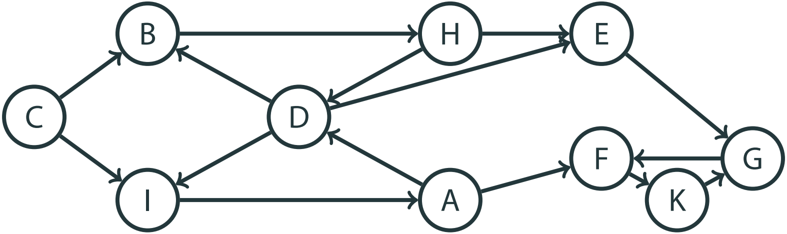
- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте
- Любые вершины в одной компоненте сильно связаны

Компоненты связности

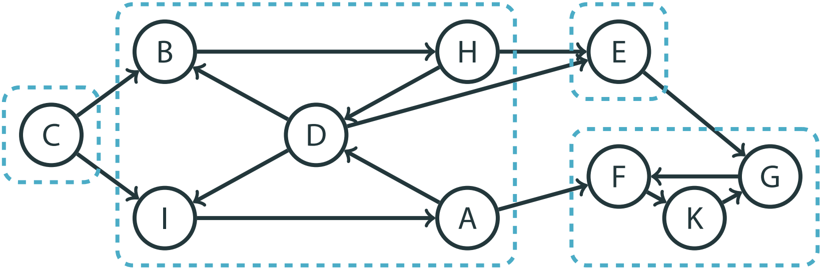
Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте
- Любые вершины в одной компоненте сильно связаны
- Вершины из разных компонент не сильно связаны

Пример

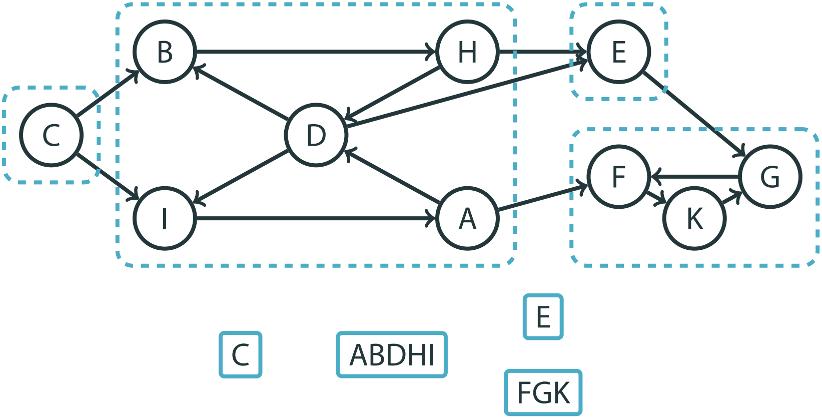


Пример



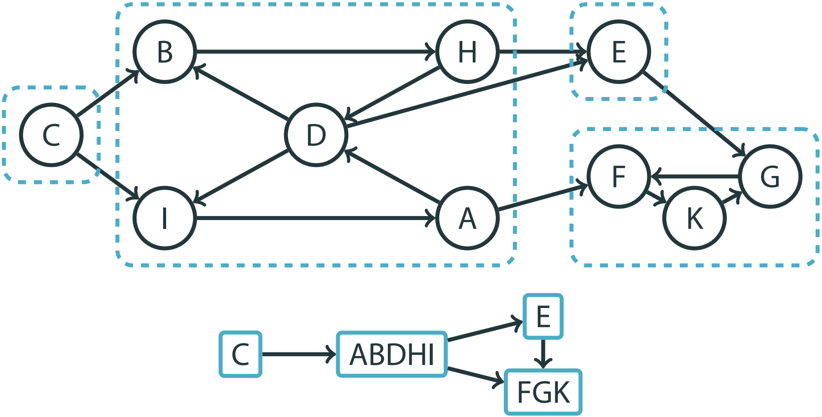
- Четыре компоненты связности

Пример



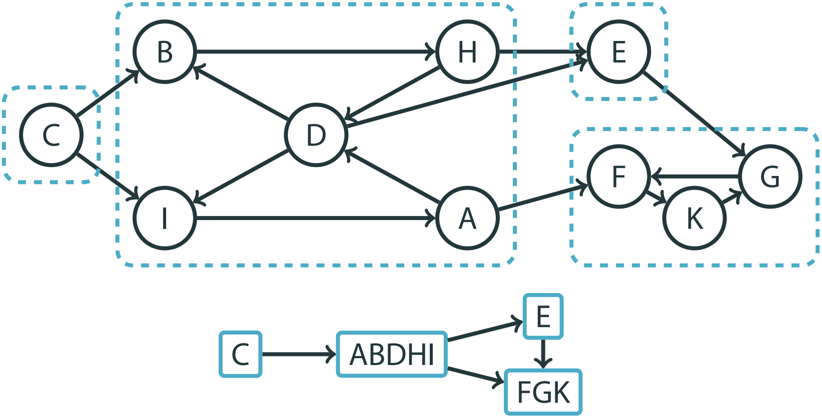
- Рассмотрим каждую компоненту как отдельную вершину

Пример



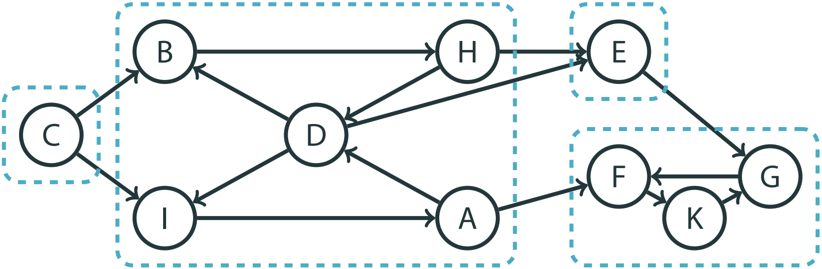
- Проведем ребра между компонентами, если есть хоть одно ребро между вершинами компонент

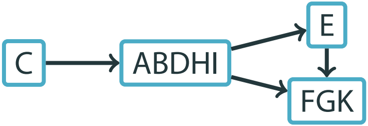
Пример



- Этот граф называется метаграфом

Пример





- Этот граф называется метаграфом
- Он ациклический!

Орграфы и дискретная вероятность

Ориентированные графы

Пути в ориентированных графах

Ориентированные ациклические графы

Сильная связность

Что такое вероятность?

Неравновероятная модель

Многошаговое задание распределений

Случайные величины

Математическое ожидание

Что такое вероятность?

- Что происходит, когда мы подбрасываем монетку?

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- Что происходит, когда мы подбрасываем монетку?
- Теоретически мы можем все рассчитать и узнать, как она упадет

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- Что происходит, когда мы подбрасываем монетку?
- Теоретически мы можем все рассчитать и узнать, как она упадет
- На практике это очень тяжело

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- В такой ситуации мы говорим, что каждый исход происходит с той или иной вероятностью

wikimedia.org

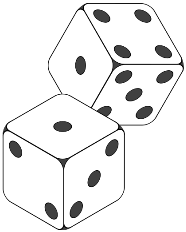
Что такое вероятность?

- В такой ситуации мы говорим, что каждый исход происходит с той или иной вероятностью
- Это удобная модель в тех случаях, когда мы не можем просчитать все полностью

wikimedia.org

Основная модель

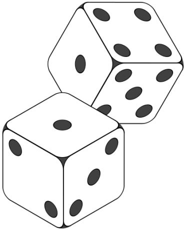
- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов



wikimedia.org

Основная модель

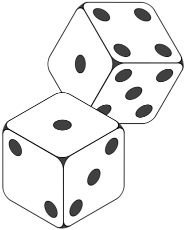
- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов
- Это называется дискретной моделью



wikimedia.org

Основная модель

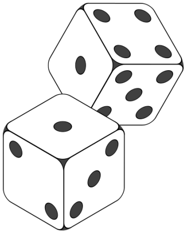
- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов
- Это называется дискретной моделью
- Пример: подбрасывание монетки



wikimedia.org

Основная модель

- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов
- Это называется дискретной моделью
- Пример: подбрасывание монетки
- Пример: бросание кубика



wikimedia.org

Подбрасывание монетки

- Два возможных исхода, орел и решка

Подбрасывание монетки

- Два возможных исхода, орел и решка
- Каждый происходит с вероятностью $1/2$

Бросание кубика

- У кубика 6 граней, на них написаны число от 1 до 6

Бросание кубика

- У кубика 6 граней, на них написаны число от 1 до 6
- Шесть возможных исходов: выпадает 1, 2, 3, 4, 5 или 6

Бросание кубика

- У кубика 6 граней, на них написаны число от 1 до 6
- Шесть возможных исходов: выпадает 1, 2, 3, 4, 5 или 6
- Каждый происходит с вероятностью $1/6$

Общая модель

- Конечное множество исходов: $u_1, \ldots, u_n$

Общая модель

- Конечное множество исходов: $u_1, \ldots, u_n$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны

Общая модель

- Конечное множество исходов: $u_1, \ldots, u_n$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны
- Вероятность каждого исхода равна $1/n$

Общая модель

- Конечное множество исходов: $u_1, \ldots, u_n$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны
- Вероятность каждого исхода равна $1/n$
- Пусть нас интересует, произошел ли один из исходов u_i для $i \in S$, где $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$

Общая модель

- Конечное множество исходов: $u_1, \dots, u_n$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны
- Вероятность каждого исхода равна $1/n$
- Пусть нас интересует, произошел ли один из исходов u_i для $i \in S$, где $S \subseteq \{1, \dots, n\}$
- Вероятность равна k/n, где $|S| = k$

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

- Всего шесть исходов

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

- Всего шесть исходов
- Половина из них годится: 2, 4, 6

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

- Всего шесть исходов
- Половина из них годится: 2, 4, 6
- Вероятность $1/2$

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

- Всего шесть исходов

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

- Всего шесть исходов
- Треть из них годится: 3 и 6

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

- Всего шесть исходов
- Треть из них годится: 3 и 6
- Вероятность $1/3$

Орграфы и дискретная вероятность

Ориентированные графы

Пути в ориентированных графах

Ориентированные ациклические графы

Сильная связность

Что такое вероятность?

Неравновероятная модель

Многошаговое задание распределений

Случайные величины

Математическое ожидание

Сложность

- Мы предполагали, что исходы равновероятны

Сложность

- Мы предполагали, что исходы равновероятны
- Но равновероятной модели не всегда достаточно

Сложность

- Мы предполагали, что исходы равновероятны
- Но равновероятной модели не всегда достаточно
- Что если мы подбрасываем несбалансированную или погнутую монету?

Сложность

- Мы предполагали, что исходы равновероятны
- Но равновероятной модели не всегда достаточно
- Что если мы подбрасываем несбалансированную или погнутую монету?
- Как обсуждать вероятности, когда исходы, это выигрыш или не выигрыш в лотерею?

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: «решка»$= 0$, «орел»$= 1$

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: «решка»$= 0$, «орел»$= 1$
- $\Pr[1] = p$, $\Pr[0] = 1 - p$

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: «решка»$= 0$, «орел»$= 1$
- $\Pr[1] = p$, $\Pr[0] = 1 - p$
- Здесь p может быть любым числом от 0 до 1

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: «решка»$= 0$, «орел»$= 1$
- $\Pr[1] = p$, $\Pr[0] = 1 - p$
- Здесь p может быть любым числом от 0 до 1
- Случай $p = 1/2$ отвечает равновероятному случаю

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: «решка»$= 0$, «орел»$= 1$
- $\Pr[1] = p$, $\Pr[0] = 1 - p$
- Здесь p может быть любым числом от 0 до 1
- Случай $p = 1/2$ отвечает равновероятному случаю
- Если $p > 1/2$, выпадение орла более вероятно

Неравновероятная модель

- Исходы: $u_1, \dots, u_n$

Неравновероятная модель

- Исходы: $u_1, \ldots, u_n$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i

Неравновероятная модель

- Исходы: $u_1, \ldots, u_n$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i
- При этом $0 \leq p_i \leq 1$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Неравновероятная модель

- Исходы: $u_1, \dots, u_n$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i
- При этом $0 \leq p_i \leq 1$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- Пусть нас интересует, произошел ли один из исходов u_i для $i \in S$, где $S \subseteq \{1, \dots, n\}$

Неравновероятная модель

- Исходы: $u_1, \ldots, u_n$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i
- При этом $0 \leq p_i \leq 1$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- Пусть нас интересует, произошел ли один из исходов u_i для $i \in S$, где $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$
- Вероятность равна $\sum_{u_i \in S} p_i$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерею 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерею 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерею 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерею 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$
- $\Pr[c] = 1 - \Pr[a] - \Pr[b] = 0.89$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерею 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$
- $\Pr[c] = 1 - \Pr[a] - \Pr[b] = 0.89$
- $S = \{a, b\}$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерею 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$
- $\Pr[c] = 1 - \Pr[a] - \Pr[b] = 0.89$
- $S = \{a, b\}$
- $\Pr[S] = 0.01 + 0.1 = 0.11$

Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Сложные распределения

Задача

Случайная перестановка чисел 1, 2 и 3 выбирается следующим образом.

- Сначала выбирается случайно и равновероятно число на первую позицию
- Затем из двух оставшихся чисел случайно и равновероятно выбирается одно и ставится на вторую позицию
- Оставшееся число ставится на третью позицию

Какова вероятность, что на второй позиции стоит число 2?

Сложные распределения

- Прежде чем решать задачу, нам нужно разобраться, какое у нас задано вероятностное распределение

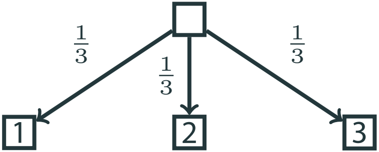
Сложные распределения

- Прежде чем решать задачу, нам нужно разобраться, какое у нас задано вероятностное распределение
- Распределение описано в виде процесса, с таким мы раньше не сталкивались

Распределение в виде дерева

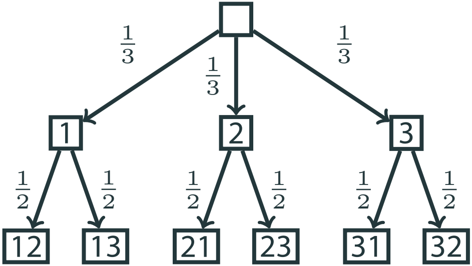
- Начинаем сверху

Распределение в виде дерева



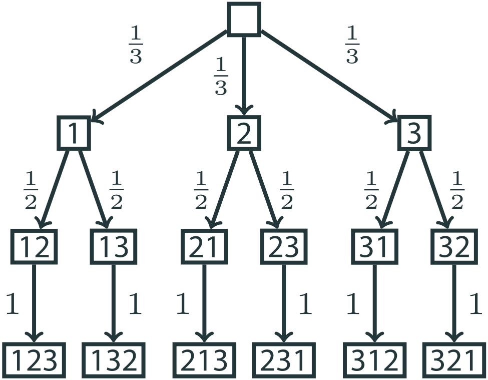
- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1

Распределение в виде дерева



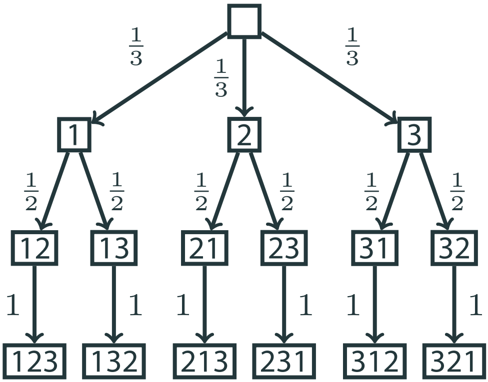
- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2

Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

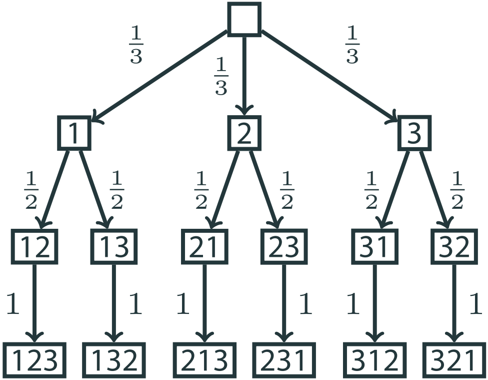
Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Исходы — вершины внизу

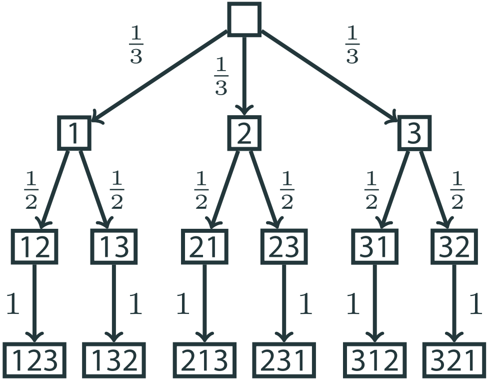
Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Исходы — вершины внизу
- Как посчитать вероятность каждого исхода?

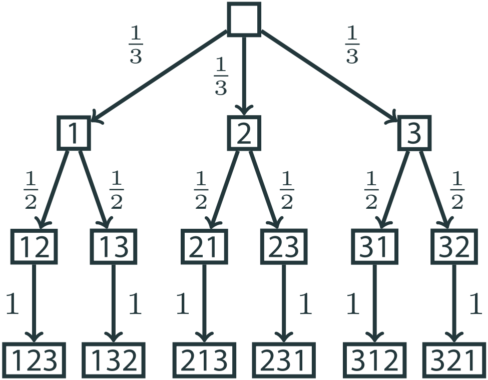
Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Исходы — вершины внизу
- Как посчитать вероятность каждого исхода?
- Перемножить вероятности на стрелках

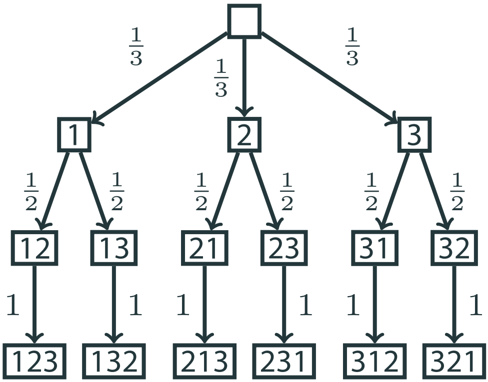
Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Вероятность каждого исхода $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Вероятность каждого исхода $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$
- Такая диаграмма называется деревом событий

Сложные распределения

Задача

Случайная перестановка чисел 1, 2 и 3 выбирается следующим образом.

- Сначала выбирается случайно и равновероятно число на первую позицию
- Затем из двух оставшихся чисел случайно и равновероятно выбирается одно и ставится на вторую позицию
- Оставшееся число ставится на третью позицию

Какова вероятность, что на второй позиции стоит число 2?

Сложные распределения

- Вероятность каждого исхода равна $1/6$

Сложные распределения

- Вероятность каждого исхода равна $1/6$
- Интересующих нас исходов два: $123, 321$

Сложные распределения

- Вероятность каждого исхода равна $1/6$
- Интересующих нас исходов два: $123, 321$
- Вероятность $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз
- Получаем случайное распределение на объектах в наших данных

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз
- Получаем случайное распределение на объектах в наших данных
- Такой процесс называется случайным блужданием

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз
- Получаем случайное распределение на объектах в наших данных
- Такой процесс называется случайным блужданием
- Обсудим немного позже

Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили события (подмножества исходов) и их вероятности

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили события (подмножества исходов) и их вероятности
- События соответствуют вопросам с ответом да или нет

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили события (подмножества исходов) и их вероятности
- События соответствуют вопросам с ответом да или нет
- Но важно уметь работать с численными характеристиками вероятностных исходов

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили события (подмножества исходов) и их вероятности
- События соответствуют вопросам с ответом да или нет
- Но важно уметь работать с численными характеристиками вероятностных исходов
- Для этого мы введем случайные величины

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение на исходах $u_1, \dots, u_n$

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение на исходах $u_1, \ldots, u_n$
- Исходы имеют вероятности $p_1, \ldots, p_n$

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение на исходах $u_1, \ldots, u_n$
- Исходы имеют вероятности $p_1, \ldots, p_n$
- Чтобы определить f мы задаем число a_i для каждого исхода u_i

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение на исходах $u_1, \ldots, u_n$
- Исходы имеют вероятности $p_1, \ldots, p_n$
- Чтобы определить f мы задаем число a_i для каждого исхода u_i
- Тогда f принимает значение a_i с вероятностью p_i

Случайные величины

- Выглядит знакомо

Случайные величины

- Выглядит знакомо
- Мы так уже делали!

Случайные величины

- Выглядит знакомо
- Мы так уже делали!
- Исходам при бросании кубика присвоены числа

wikimedia.org

Случайные величины

- Выглядит знакомо
- Мы так уже делали!
- Исходам при бросании кубика присвоены числа
- И мы оперировали с ними как с числами

wikimedia.org

Случайные величины

Другие примеры:

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1
- Возраст случайного человек на курсе

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1
- Возраст случайного человек на курсе
- Оценка случайного человека по курсу

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1
- Возраст случайного человек на курсе
- Оценка случайного человека по курсу
- Сумма исходов двух бросаний кубика

Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами
- Вероятности исходов равны p_1, p_2, p_3, p_4

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами
- Вероятности исходов равны p_1, p_2, p_3, p_4
- Значения f равны a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами
- Вероятности исходов равны p_1, p_2, p_3, p_4
- Значения f равны a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно
- Повторим эксперимент много раз

Математическое ожидание

p_1 p_2 p_3 p_4

Математическое ожидание

Математическое ожидание

p_1 p_2 p_3 p_4

Математическое ожидание

Математическое ожидание

Математическое ожидание

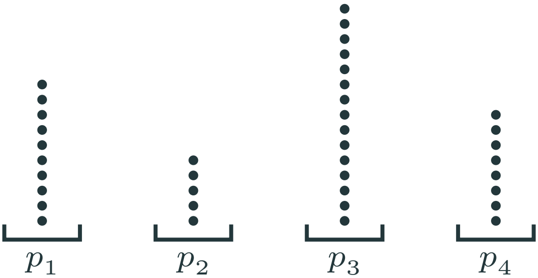
Математическое ожидание

p_1 p_2 p_3 p_4

Математическое ожидание

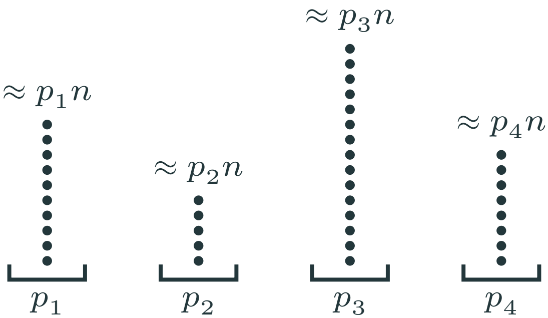
Математическое ожидание

Математическое ожидание



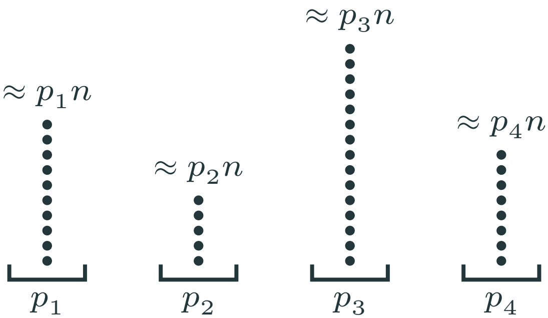
- Повторяем n раз для большого числа n

Математическое ожидание



- Повторяем n раз для большого числа n

Математическое ожидание



- Повторяем n раз для большого числа n
- Чему равно среднее значение f в этих экспериментах?

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз
- В среднем мы получили

$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$

$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз
- В среднем мы получили

$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$

$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

- Эта величина обозначается через $\mathrm{E} f$ и называется математическим ожиданием f или матожиданием f

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз
- В среднем мы получили

$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$

$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

- Эта величина обозначается через $\mathrm{E} f$ и называется математическим ожиданием f или матожиданием f
- Она не зависит от n

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз
- В среднем мы получили

$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$

$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

- Эта величина обозначается через $\mathrm{E} f$ и называется математическим ожиданием f или матожиданием f
- Она не зависит от n
- Она равна тому, что мы ожидаем получить в среднем при многократном повторении эксперимента

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \dots, a_k$ с вероятностями $p_1, \dots, p_k$

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \dots, a_k$ с вероятностями $p_1, \dots, p_k$
- Все рассуждения аналогичны

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \dots, a_k$ с вероятностями $p_1, \dots, p_k$
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \ldots, a_k$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i
- И сложить результаты по i от 1 до k

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \ldots, a_k$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i
- И сложить результаты по i от 1 до k
- Математическое ожидание — это число!

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \ldots, a_k$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i
- И сложить результаты по i от 1 до k
- Математическое ожидание — это число!
- Это важная характеристика случайной величины

Примеры

- Средний доход на душу населения

Примеры

- Средний доход на душу населения
- Средняя продолжительность жизни

Примеры

- Средний доход на душу населения
- Средняя продолжительность жизни
- Средняя оценка на курсе

Примеры

- Средний доход на душу населения
- Средняя продолжительность жизни
- Средняя оценка на курсе
- Соответствующие случайные величины: берем случайного человека, смотрим на его доход/продолжительность жизни/оценку