# 不确定性的量化
# QUANTIFYING UNCERTAINTY

张玲玲
计算机学院
zhanglling@xjtu.edu.cn

# 主要内容

1. 不确定性
2. 概率
3. 语法和语义
4. 推理
5. 独立性
6. 贝叶斯规则

# 不确定性举例：为什么你的妈妈不开心？

1. 因为你一直沉迷于游戏，没有时间陪她。
2. 因为你没有以她想要的方式回应她的诉求。
3. 因为她想让你做某件事，而你却没有做。
4. 因为你晚上不睡，白天不起。
5. 你更喜欢陪爸爸玩。
6. 她做了新菜，但你没有明确肯定。
7. ……。

# 不确定性

- 行动$A_t =$ 在飞机起飞$t$分钟前出发前往机场。
- $A_t$可以让我们及时到达机场吗？
- 存在的问题：

  1）局部可观察性（路况）

  2）传感器噪声（交通报告）

  3）行动结果的不确定性（轮胎漏气等）

  4）交通建模和预测的巨大复杂性

- 因此，一种纯粹的逻辑方法是

  1）冒着迟到的风险："$A_{25}$将准时送我到机场"，

  2）得出的结论对于决策来说太微弱了："如果桥上没有事故，并且不会下雨，轮胎完好无损等等，$A_{25}$将准时送我到机场"

- $A_{1440}$可以准时送我到机场，但我得在机场过夜…

# 概率

- 概率提供了一种方法以概括因我们的惰性和无知产生的不确定性，由此解决限制问题：
  - 惰性：无法枚举意外、限制等。
  - 无知：缺乏相关事实、初始条件等。
- 主观或贝叶斯（**Bayesian**）概率：
  - 概率将命题（Propositions）与自己的知识状态相关联。
  - 例如，$P(A_{25}|\text{no reported accidents}) = 0.06$
- 这些不是当前情况下的“概率趋势”（但可以从类似情况的过去经验中学到）。
- 命题的概率随着新证据而改变：
  - 例如，$P(A_{25}|\text{no reported accidents, 5 a.m.}) = 0.15$

# 不确定性与理性决策

- 假设我们相信以下几点：

$$P(A_{25} \text{ gets me there on time}|\ldots) = 0.04$$
$$P(A_{90} \text{ gets me there on time}|\ldots) = 0.70$$
$$P(A_{120} \text{ gets me there on time}|\ldots) = 0.95$$
$$P(A_{1440} \text{ gets me there on time}|\ldots) = 0.9999$$

- 选择哪个行动?
- 取决于我们对错失航班还是机场美食等的偏好。
- 效用理论（Utility theory）用于表示和推断偏好。
- 决策理论 = 概率理论 + 效用理论。

# 概率基础

- 样本空间$\Omega$：所有可能世界组成的集合
  - 例如，骰子的六个数字，硬币的两面
  - $\omega \in \Omega$表示样本空间中的一个样本/一个特定的可能世界
- 概率空间或概率模型是对每个样本$\omega$分配一个概率$P(\omega)$的样本空间，使得

$$0 \leq P(\omega) \leq 1 \text{ 且 } \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$$

  - 例如掷一个骰子，$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$
- 事件$A$是样本空间$\Omega$的任意子集：

$$P(A) = \sum_{\{\omega\in A\}} P(\omega)$$

  - 例如掷一个骰子：

$$P(die\ roll < 4) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

# 随机变量

- 随机变量是从采样点到某个范围（例如，实数或布尔值）的函数。
  - 例如掷一个骰子，$Odd(1) = true$
- 概率$P$引出任意随机变量$X$的概率分布：

$$P(X = x_i) = \sum_{\{\omega : X(\omega) = x_i\}} P(\omega)$$

例如掷一个骰子：

$$P(Odd = true) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

- **注意：变量的名字以大写字母开头，变量的值总是小写。**

# 命题（Propositions）

- 命题为真的命题视为事件（event）（样本点集）。
- 给定布尔随机变量$A$和$B$：
  - 事件 $a = $样本点集，其中$A(w) = true$
  - 事件 $\neg a = $样本点集，其中$A(w) = false$
  - 事件 $a \wedge b = $样本点集，其中$A(w) = true$且$B(w) = true$
- 通常在AI应用中，样本点由一组随机变量的值定义，即，样本空间是变量范围的笛卡尔积。

# 笛卡尔积

- 两个集合$X$和$Y$的笛卡尔积，又称直积，表示为$X \times Y$，第一个对象是$X$的成员，而第二个对象是$Y$的所有可能有序对的其中一个成员，即
$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$
- 例如，

  $A = \{a, b\}$, $B = \{0,1,2\}$，则

  $A \times B = \{(a,\ 0),\ (a,\ 1),\ (a,\ 2),\ (b,\ 0),\ (b,\ 1),\ (b,\ 2)\}$

  $B \times A = \{(0,\ a),\ (0,\ b),\ (1,\ a),\ (1,\ b),\ (2,\ a),\ (2,\ b)\}$

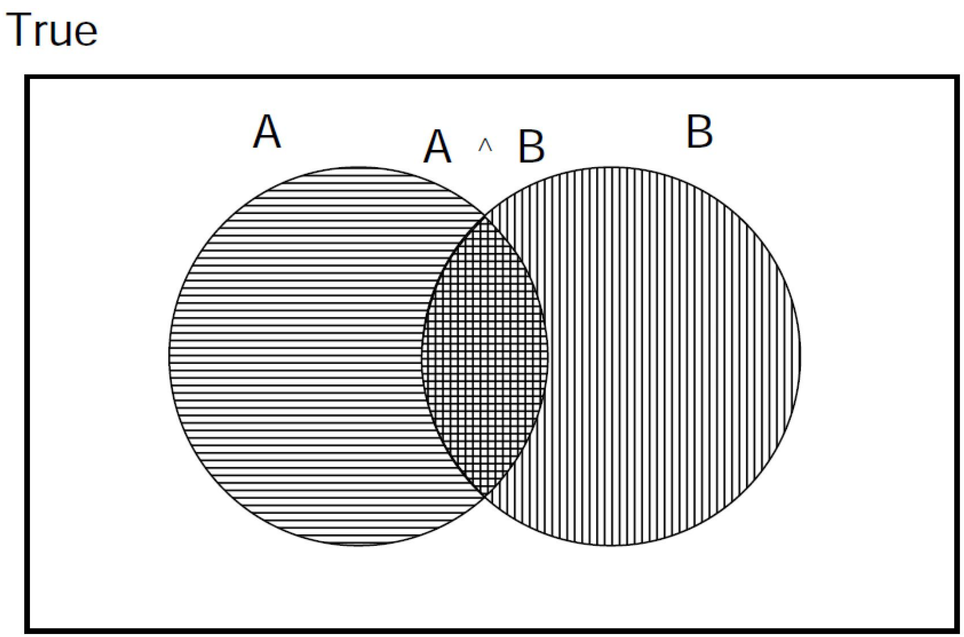
# 命题（Propositions）

- 命题为真的命题视为事件（event）（样本点集）。
- 给定布尔随机变量$A$和$B$：
  - 事件 $a$ = 样本点集，其中$A(w) = true$
  - 事件 $\neg a$ = 样本点集，其中$A(w) = false$
  - 事件 $a \wedge b$ = 样本点集，其中$A(w) = true$且$B(w) = true$
- 通常在AI应用中，样本点由一组随机变量的值定义，即，样本空间是变量范围的笛卡尔积。
- 使用布尔变量，样本点 = 命题逻辑模型
  - 例如，$A = true$，$B = false$，或$a \wedge \neg b$
- 命题 = 原子事件在其中是正确的分离。
  - 例如，$(a \vee b) \equiv (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$

    $\Rightarrow P(a \vee b) = P(\neg a \wedge b) + P(a \wedge \neg b) + P(a \wedge b)$

# 为什么使用概率？

- 暗示了某些逻辑上相关的事件必须具有相关的概率。
- 例如， $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$



# 命题的语法

- 命题或布尔随机变量
  - 例如，$Cavity$（我有牙洞吗？）
  - $Cavity = true$是一个命题，也写作$cavity$
- 离散随机变量（有限或无限）
  - 例如，$Weather$是$\langle sunny, rain, cloudy, snow \rangle$中的一个
  - $Weather = rain$是一个命题
  - 值必须是详尽且互相排斥的
- 连续随机变量（有界或无界）
  - 例如，$Temp = 21.6$；同时允许，例如$Temp < 22.0$

# 先验概率

- 命题的先验或无条件概率，对应于任何（新）证据到达之前的信念。
  - 例如，$P(Cavity = true) = 0.1$和$P(Weather = sunny) = 0.72$

# 先验概率

- 命题的先验或无条件概率，对应于任何（新）证据到达之前的信念。
  - 例如，$P(Cavity = true) = 0.1$和$P(Weather = sunny) = 0.72$
- 概率分布给出所有可能分配的值，是一个向量。
  - 例如，$\mathbf{P}(Weather) = \langle 0.72, 0.1, 0.08, 0.1 \rangle$（归一化，即和为1）

# 先验概率

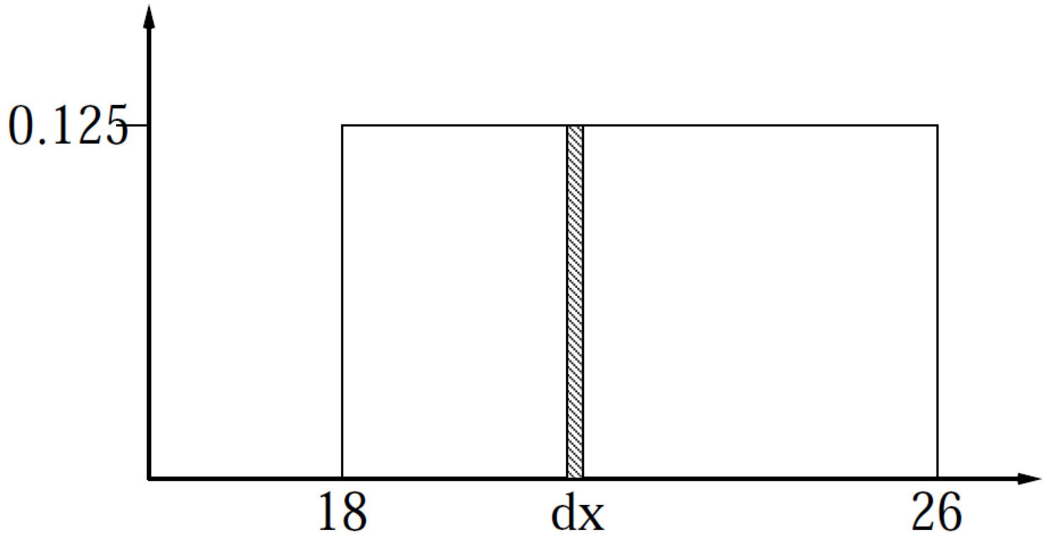
- 命题的先验或无条件概率，对应于任何（新）证据到达之前的信念。
  - 例如，$P(Cavity = true) = 0.1$和$P(Weather = sunny) = 0.72$
- 概率分布给出所有可能分配的值，是一个向量。
  - 例如，$\mathbf{P}(Weather) = \langle 0.72,0.1,0.08,0.1\rangle$（归一化，即和为1）
- 一组随机变量的联合概率分布给出了这些随机变量上每个原子事件（即每个样本点）的概率。
  - 例如，$\mathbf{P}(Weather, Cavity) =$ 一个$4 \times 2$的概率表

| $Weather =$ | $sunny$ | $rain$ | $cloudy$ | $snow$ |
|---|---|---|---|---|
| $Cavity = true$ | 0.144 | 0.02 | 0.016 | 0.02 |
| $Cavity = false$ | 0.576 | 0.08 | 0.064 | 0.08 |

- 每个问题都可以通过联合分布来回答，因为每个事件都是样本点的和。

# 连续变量的概率

- 概率密度函数：将概率分布表示为值的参数化函数。
  - $P(X=x)=U[18,\ 26](x)=$ 概率密度在18到26之间的均匀分布。




- 这里$P$是概率密度；和为1。
- $P(X=20.5)=0.125$的真实含义是

$$\lim_{dx\to 0} P(20.5 \le X \le 20.5+dx)/dx = 0.125$$

# 条件概率

- 条件或后验概率
  - $P(cavity|toothache) = 0.6$
    $\Leftrightarrow P(Cavity = true|Toothache = true) = 0.6$
  - “只要$toothache$为真，同时又没有更多信息，那么$cavity$为真的概率是0.6”，而不是“只要$toothache$为真，那么$cavity$为真的概率是0.6”。
- $\mathbf{P}(cavity|toothache) =$二元向量的二元向量。
- 如果给更多信息，例如医生诊断出$cavity = true$，那么有$P(cavity|toothache, cavity) = 1$。
- 新证据可能无关，所以可以简化，例如$P(cavity|toothache, newclose) = P(cavity|toothache) = 0.6$

# 条件概率

- 条件概率的定义：对于任何命题$a$和$b$

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} \text{ if } P(b) \neq 0$$

- 乘法规则（Product rule）给出另一种变换形式

$$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$$

- $Weather$和$Cavity$所有可能取值的乘法规则可以写成一个单一的等式，代表$4 \times 2$的一组等式，而不是矩阵乘积：

$$\mathbf{P}(Weather, Cavity) = \mathbf{P}(Weather|Cavity)\,\mathbf{P}(Cavity)$$

# 条件概率

- $\mathbf{P}(Weather, Cavity) = \mathbf{P}(Weather|Cavity)\ \mathbf{P}(Cavity)$

$$P(W = sunny \land C = true) = P(W = sunny|C = true)\ P(C = true)$$
$$P(W = rain \land C = true) = P(W = rain|C = true)\ P(C = true)$$
$$P(W = cloudy \land C = true) = P(W = cloudy|C = true)\ P(C = true)$$
$$P(W = snow \land C = true) = P(W = snow|C = true)\ P(C = true)$$

$$P(W = sunny \land C = false) = P(W = sunny|C = false)\ P(C = false)$$
$$P(W = rain \land C = false) = P(W = rain|C = false)\ P(C = false)$$
$$P(W = cloudy \land C = false) = P(W = cloudy|C = false)\ P(C = false)$$
$$P(W = snow \land C = false) = P(W = snow|C = false)\ P(C = false)$$

# 条件概率

- 条件概率的定义：对于任何命题$a$和$b$

$$P(a|b)=\frac{P(a \wedge b)}{P(b)} \text{ if } P(b)\neq 0$$

- 乘法规则（Product rule）给出另一种变换形式

$$P(a \wedge b)=P(a|b)P(b)=P(b|a)P(a)$$

- $Weather$和$Cavity$所有可能取值的乘法规则可以写成一个单一的等式，代表$4\times 2$的一组等式，而不是矩阵乘积：

$$\mathbf{P}(Weather, Cavity)=\mathbf{P}(Weather|Cavity)\,\mathbf{P}(Cavity)$$

- 链式规则（Chain rule）是通过连续应用乘积规则得出的：

$$\mathbf{P}(X_1,\ldots,X_n)=\mathbf{P}(X_1,\ldots,X_{n-1})\,\mathbf{P}(X_n|X_1,\ldots,X_{n-1})$$
$$=\mathbf{P}(X_1,\ldots,X_{n-2})\,\mathbf{P}(X_{n-1}|X_1,\ldots,X_{n-2})\,\mathbf{P}(X_n|X_1,\ldots,X_{n-1})$$
$$=\ldots=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i|X_1,\ldots,X_{i-1})$$

# 概率基础

- 边缘化（Marginalization）：

$$P(x)=\sum_{\boldsymbol{Y}}P(x,y=\boldsymbol{Y})$$

- 链式规则（Chain rule）：

$$P(a,b)=P(a|b)P(b)=P(b|a)P(a)$$

$$P(a,b,c)=P(a|b,c)P(b,c)=P(a|b,c)P(b|c)P(c)$$

- 贝叶斯规则（Bayes rule）：

$$P(a|b)=\frac{P(a,b)}{P(b)}=\frac{P(b|a)P(a)}{P(b)}=\frac{P(b|a)P(a)}{\sum_a P(a,b)}$$

# 测验1

- 假设只有两种天气：Sunny和Rainy
- 并且天气只依赖于前一天的情况。
- $P(D_1 = sunny) = 0.9$
- $P(D_1 = rainy) = 0.1$
- $P(D_2 = sunny|D_1 = sunny) = 0.8$
- $P(D_2 = rainy|D_1 = sunny) = \ ?$
- $P(D_2 = sunny|D_1 = rainy) = 0.6$
- $P(D_2 = rainy|D_1 = rainy) = \ ?$
- $P(D_2 = sunny) = \ ?$
- $P(D_2 = rainy) = \ ?$
- $P(D_3 = sunny) = \ ?$

# 答案：测验1

- 假设只有两种天气：Sunny和Rainy
- 并且天气只依赖于前一天的情况。
- $P(D_1 = sunny) = 0.9$
- $P(D_1 = rainy) = 0.1$
- $P(D_2 = sunny|D_1 = sunny) = 0.8$
- $P(D_2 = rainy|D_1 = sunny) = 0.2$
- $P(D_2 = sunny|D_1 = rainy) = 0.6$
- $P(D_2 = rainy|D_1 = rainy) = 0.4$
- $P(D_2 = sunny) = 0.8 * 0.9 + 0.6 * 0.1 = 0.78$
- $P(D_2 = rainy) = 0.2 * 0.9 + 0.4 * 0.1 = 0.22$
- $P(D_3 = sunny) = (0.8 * 0.9 + 0.6 * 0.1) * 0.8 + (0.2 * 0.9 + 0.4 * 0.1) * 0.6 = 0.756$

# 测验2

- $C$：COVID-19，　　$+$ 或 $-$：诊断
- 已知
  - $P(C) = 0.01$，$P(+|C) = 0.9$，$P(+|\neg C) = 0.2$
  - $P(\neg C) = 0.99$，$P(-|C) = 0.1$，$P(-|\neg C) = 0.8$
- 问题
  - $P(C|+) = \ ?$
  - $P(\neg C\ |-) = \ ?$
- 联合概率
  - $P(+, C) = \ ?$
  - $P(-, C) = \ ?$
  - $P(+, \neg C) = \ ?$
  - $P(-, \neg C) = \ ?$

# 答案：测验2

- $C$：COVID-19，　　$+$ 或 $-$：诊断
- 已知
  - $P(C) = 0.01$，$P(+|C) = 0.9$，$P(+|\neg C) = 0.2$
  - $P(\neg C) = 0.99$，$P(-|C) = 0.1$，$P(-|\neg C) = 0.8$
- 问题
  - $P(C|+) = P(C,+)/P(+) = P(C,+)/(P(+|C) * P(C) + P(+|\neg C) * P(\neg C)) = 0.009/(0.9 * 0.01 + 0.2 * 0.99) = 0.0435$
  - $P(\neg C\,|-) = P(-,\neg C)/P(-) = P(-,\neg C)/(P(-|C) * P(C) + P(-|\neg C) * P(\neg C)) = 0.792/(0.1 * 0.01 + 0.8 * 0.99) = 0.9987$
- 联合概率
  - $P(+,C) = P(+|C) * P(C) = 0.9 * 0.01 = 0.009$
  - $P(-,C) = P(-|C) * P(C) = 0.1 * 0.01 = 0.001$
  - $P(+,\neg C) = P(+|\neg C) * P(\neg C) = 0.2 * 0.99 = 0.198$
  - $P(-,\neg C) = P(-|\neg C) * P(\neg C) = 0.8 * 0.99 = 0.792$

# 枚举推理（Inference by enumeration）

- 从联合概率分布开始：

| | *toothache* | | ¬ *toothache* | |
|---|---|---|---|---|
| | *catch* | ¬ *catch* | *catch* | ¬ *catch* |
| *cavity* | **.108** | **.012** | **.072** | **.008** |
| ¬ *cavity* | **.016** | **.064** | **.144** | **.576** |

- 对于任意命题$\phi$，只需识别使命题为真的可能情况，并把它们的概率加起来：

$$P(\phi) = \sum_{\omega \in \phi} P(\omega)$$

# 枚举推理（Inference by enumeration）

- 从联合概率分布开始：

| | *toothache* | | *¬ toothache* | |
|---|---|---|---|---|
| | *catch* | *¬ catch* | *catch* | *¬ catch* |
| *cavity* | **.108** | **.012** | **.072** | **.008** |
| *¬ cavity* | **.016** | **.064** | **.144** | **.576** |

- 对于任意命题$\phi$，只需识别使命题为真的可能情况，并把它们的概率加起来：

$$P(\phi) = \sum_{\omega \in \phi} P(\omega)$$

$$P(toothache) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2$$

# 枚举推理（Inference by enumeration）

- 从联合概率分布开始：

| | *toothache* | | ¬ *toothache* | |
|---|---|---|---|---|
| | *catch* | ¬ *catch* | *catch* | ¬ *catch* |
| *cavity* | **.108** | **.012** | **.072** | **.008** |
| ¬ *cavity* | **.016** | **.064** | **.144** | **.576** |

- 对于任意命题$\phi$，只需识别使命题为真的可能情况，并把它们的概率加起来：

$$P(\phi) = \sum_{\omega \in \phi} P(\omega)$$

$$P(cavity \vee toothache)$$

$$= 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 + 0.016 + 0.064 = 0.28$$

# 枚举推理（Inference by enumeration）

- 从联合概率分布开始：

| | *toothache* | | ¬ *toothache* | |
|---|---|---|---|---|
| | *catch* | ¬ *catch* | *catch* | ¬ *catch* |
| *cavity* | .108 | .012 | .072 | .008 |
| ¬ *cavity* | .016 | .064 | .144 | .576 |

- 也可以计算条件概率：

$$P(\neg cavity|toothache) = \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4$$

# 枚举推理（Inference by enumeration）

- 从联合概率分布开始：

| | *toothache* | | ¬ *toothache* | |
|---|---|---|---|---|
| | *catch* | ¬ *catch* | *catch* | ¬ *catch* |
| *cavity* | .108 | .012 | .072 | .008 |
| ¬ *cavity* | .016 | .064 | .144 | .576 |

- 也可以计算条件概率：

$$P(cavity|toothache) = \frac{P(cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6$$

# 枚举推理（Inference by enumeration）

- 从联合概率分布开始：

| | toothache | | ¬ toothache | |
|---|---|---|---|---|
| | catch | ¬ catch | catch | ¬ catch |
| cavity | .108 | .012 | .072 | .008 |
| ¬ cavity | .016 | .064 | .144 | .576 |

- 也可以计算条件概率：

$$P(\neg cavity|toothache) = \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)} = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4$$

$$P(cavity|toothache) = \frac{P(cavity \wedge toothache)}{P(toothache)} = \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6$$

# 归一化

- 分母$1/P(toothache)$可以看作是归一化常数$\alpha$。

| | *toothache* | | *¬ toothache* | |
|---|---|---|---|---|
| | *catch* | *¬ catch* | *catch* | *¬ catch* |
| *cavity* | **.108** | **.012** | **.072** | **.008** |
| *¬ cavity* | **.016** | **.064** | **.144** | **.576** |

$$\mathbf{P}(Cavity|toothache) = \alpha\mathbf{P}(Cavity, toothache)$$
$$= \alpha[\mathbf{P}(Cavity, toothache, catch) + \mathbf{P}(Cavity, toothache, \neg catch)]$$
$$= \alpha[\langle 0.108,\ 0.016\rangle + \langle 0.012,\ 0.064\rangle]$$
$$= \alpha\langle 0.12,\ 0.08\rangle = \langle 0.6,\ 0.4\rangle$$

- 总体思路：通过固定证据变量并对隐藏变量求和，来计算查询变量的分布。

# 枚举推理（Inference by enumeration）

- 令$\mathbf{X}$表示所有变量，$\mathbf{E}$为证据变量集合，$\mathbf{e}$表示其观测值，$\mathbf{Y}$为查询变量集合，计算$\mathbf{Y}$的后验联合分布$\mathbf{P}(\mathbf{Y}|\mathbf{E}=\mathbf{e})$。
- 令隐变量为$\mathbf{H}=\mathbf{X}-\mathbf{Y}-\mathbf{E}$。
- 然后，通过对所有隐变量求和来计算所需的联合分布：

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}|\mathbf{E}=\mathbf{e})=\alpha\mathbf{P}(\mathbf{Y},\mathbf{E}=\mathbf{e})=\alpha\sum_{\mathbf{h}}\mathbf{P}(\mathbf{Y},\mathbf{E}=\mathbf{e},\mathbf{H}=\mathbf{h})$$

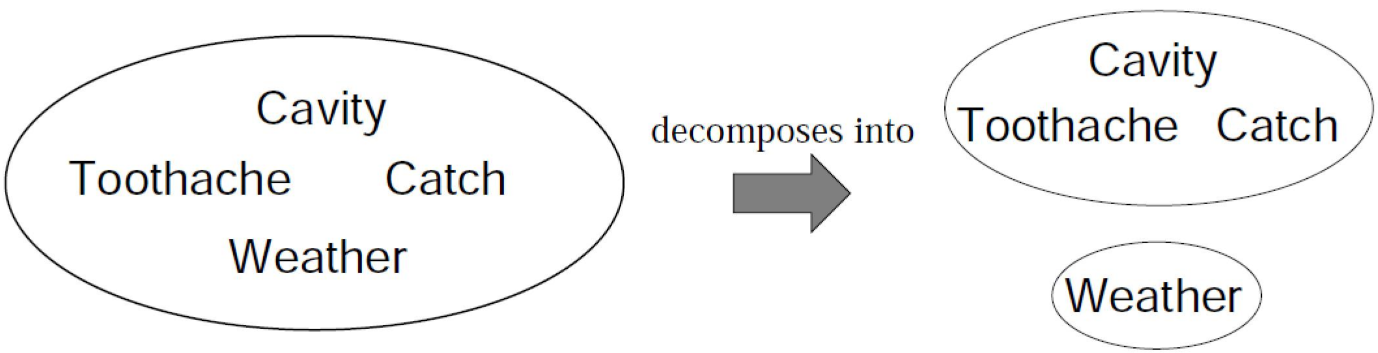
- 由于$\mathbf{Y}$，$\mathbf{E}$和$\mathbf{H}$一起构成了随机变量的完整集合，因此求和中的项是联合分布。

- 明显的问题：
  1. 最坏情况下的时间复杂度是$O(d^n)$，其中$d$是变量的最大元数，$n$是变量个数。
  2. 存储联合分布的空间复杂度是$O(d^n)$。

# 独立性（Independence）

- $A$和$B$是独立的，当且仅当

$$\mathbf{P}(A|B)=\mathbf{P}(A) \text{ or } \mathbf{P}(B|A)=\mathbf{P}(B) \text{ or } \mathbf{P}(A,B)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$$




$$Weather = \{sunny, rainy, cloudy, snow\}$$
$$Cavity, Toothache, Catch = \{true, false\}$$

- 4个变量的$4*2^3=32$种组合减少为$4+2^3=12$个。
- 对于$n$个独立的硬币，联合分布$\mathbf{P}(C_1,\ldots,C_n)$有$2^n$种取值，可表示为$n$个单变量概率分布$\mathbf{P}(C_i)$的乘积$\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(C_i)$。
- 牙科包含数百个变量，且都不是独立的。该怎么办？

# 条件独立性

- $\mathbf{P}(Toothache, Cavity, Catch)$有$2^3-1=7$个独立数值。
- 如果我有*cavity*，探针被其*catch*的概率并不取决于我是否*toothache*：

  $$(1)\ p(catch|toothache, cavity) = p(catch|cavity)$$

- 如果我没有*cavity*，同样的条件独立性也适用：

  $$(2)\ p(catch|toothache, \neg cavity) = p(catch|\neg cavity)$$

- 给定*Cavity*，*Catch*与*Toothache*是条件独立的：

  $$\mathbf{P}(Catch|Toothache, Cavity) = \mathbf{P}(Catch|Cavity)$$

- 等价形式：

  $$\mathbf{P}(Toothache|Catch, Cavity) = \mathbf{P}(Toothache|Cavity)$$

$$\mathbf{P}(Toothache, Catch|Cavity) = \mathbf{P}(Toothache|Cavity)\ \mathbf{P}(Catch|Cavity)$$

# 条件独立性

- $\mathbf{P}(MIT,\, Stanford,\, GPA)$有$2^3-1=7$个独立数值。
- 如果我有高$gpa$，被$mit$录取的概率并不取决于是否被$stanford$录取：

  (1) $P(mit|stanford, gpa) = P(mit|gpa)$
- 如果我没有高$gpa$，同样的条件独立性也适用：

  (2)$P(mit|stanford, \neg gpa) = P(mit|\neg gpa)$
- 给定$GPA$，$MIT$与$Stanford$是条件独立的：

$$\mathbf{P}(MIT|Stanford, GPA) = \mathbf{P}(MIT|GPA)$$

- 等价形式：

$$\mathbf{P}(Stanford|MIT, GPA) = \mathbf{P}(Stanford|GPA)$$

$$\mathbf{P}(MIT, Stanford|GPA) = \mathbf{P}(MIT|GPA)\,\mathbf{P}(Stanford|GPA)$$

# 条件独立性

- 使用链式规则写出完整的联合分布：

$$\mathbf{P}(Toothache,\ Cavity,\ Catch)$$
$$= \mathbf{P}(Toothache|Cavity,\ Catch)\mathbf{P}(Catch, Cavity)$$
$$= \mathbf{P}(Toothache|Cavity,\ Catch)\mathbf{P}(Catch|Cavity)\ \mathbf{P}(Cavity)$$
$$= \mathbf{P}(Toothache|Cavity)\mathbf{P}(Catch|Cavity)\ \mathbf{P}(Cavity)$$

- 即2 + 2 + 1 = 5个独立数值

# 条件独立性

- 使用链式规则写出完整的联合分布：

$$\mathbf{P}(MIT, Stanford, GPA)$$

$$= \mathbf{P}(MIT|Stanford, GPA)\mathbf{P}(Stanford, GPA)$$
$$= \mathbf{P}(MIT|Stanford, GPA)\mathbf{P}(Stanford|GPA)\mathbf{P}(GPA)$$

$$= \mathbf{P}(MIT|GPA)\mathbf{P}(Stanford|GPA)\mathbf{P}(GPA)$$

- 即2 + 2 + 1 = 5个独立数值

- 在大多数情况下，使用条件独立性可以将联合分布表示的规模从$n$的指数减小到$n$的线性。
- 条件独立性是我们关于不确定环境的最基本、最有力的知识形式。

# 贝叶斯规则（Bayes’ Rule）

- 乘积规则：$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$

$\Longrightarrow$ 贝叶斯规则：$P(a|b) = \dfrac{P(b\mid a)P(a)}{P(b)}$

- 或分布的形式：$\mathbf{P}(Y|X) = \dfrac{\mathbf{P}(X\mid Y)\mathbf{P}(Y)}{\mathbf{P}(X)} = \alpha\mathbf{P}(X\mid Y)\mathbf{P}(Y)$
- 从因果关系的条件概率评估诊断概率时有用：

$$\mathbf{P}(Cause|Effect) = \frac{\mathbf{P}(Effect\mid Cause)\mathbf{P}(Cause)}{\mathbf{P}(Effect)}$$

- 令$M$为COVID-19，$S$为 (+/−) 检测结果：

$$P(m|s) = \frac{P(s\mid m)P(m)}{P(s)} = \frac{0.8\times 0.0001}{0.1} = 0.0008$$

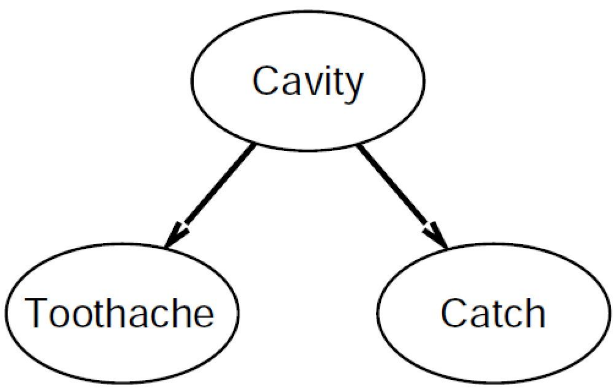
- 注意： COVID-19的后验概率仍然很小！

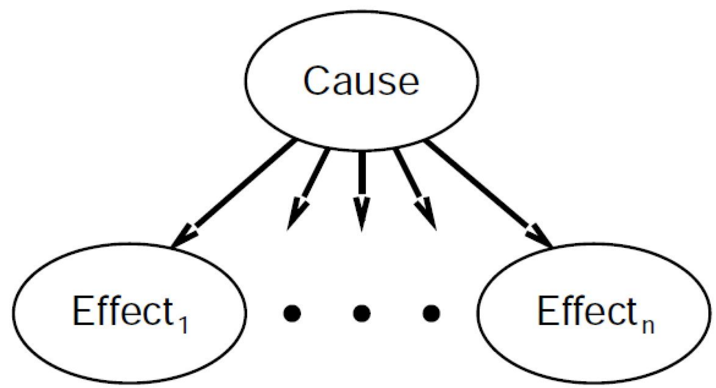
# 贝叶斯规则与条件独立性

$$\mathbf{P}(Toothache,\ Cavity,\ Catch)$$
$$= \mathbf{P}(Toothache|Cavity,\ Catch)\mathbf{P}(Catch, Cavity)$$
$$= \mathbf{P}(Toothache|Cavity,\ Catch)\mathbf{P}(Catch|Cavity)\ \mathbf{P}(Cavity)$$
$$= \mathbf{P}(Toothache|Cavity)\mathbf{P}(Catch|Cavity)\ \mathbf{P}(Cavity)$$

- 这是朴素贝叶斯（naïve Bayes）的一个例子：

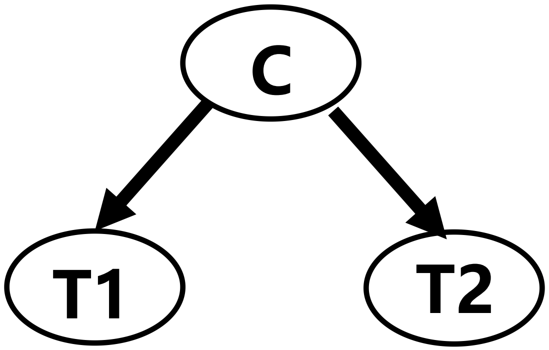
$$\mathbf{P}(Cause,\ Effect_1, \ldots, Effect_n) = \mathbf{P}(Cause)\prod_i \mathbf{P}(Effect_i|Cause)$$




- 参数总数是$n$的线性。

# 测验3




- 为了检测COVID-19，进行两个条件依赖的测试：T1和T2。
- $P(C) = 0.01,$
- $P(+|C) = P(T1 =+|C) = P(T2 =+|C) = 0.9$
- $P(-|\neg C) = P(T1 =-|\neg C) = P(T2 =-|\neg C) = 0.8$
- $P(T2 =+|T1 =+) = \ ?$

# 答案：测验3

$$P(T2=+|T1=+)=\frac{P(T2=+,T1=+)}{P(T1=+)}=\frac{P(T2=+,T1=+,C)}{P(T1=+)}+\frac{P(T2=+,T1=+,\neg C)}{P(T1=+)}$$

$$=\frac{P(T2=+,T1=+,C)}{P(T1=+,C)}*\frac{P(T1=+,C)}{P(T1=+)}+\frac{P(T2=+,T1=+,\neg C)}{P(T1=+,\neg C)}*\frac{P(T1=+,\neg C)}{P(T1=+)}$$

$$=P(T2=+|T1=+,C)*P(C|T1=+)+P(T2=+|T1=+,\neg C)*P(\neg C|T1=+)$$

$$=P(T2=+|C)*P(C|T1=+)+P(T2=+|\neg C)*P(\neg C|T1=+)$$

$$P(C|+)=\frac{P(+|C)*P(C)}{P(+)}=\frac{P(+|C)*P(C)}{P(+|C)*P(C)+P(+|\neg C)*P(\neg C)}=\frac{0.01*0.9}{0.01*0.9+0.2*0.99}=0.043$$

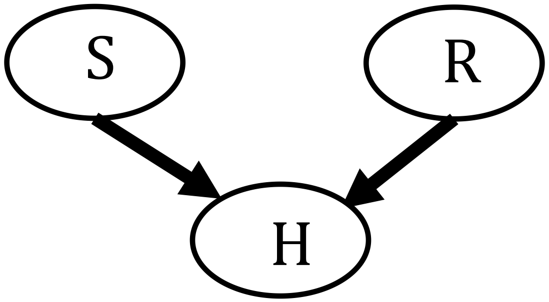
$$P(\neg C|+)=\frac{P(+|\neg C)*P(\neg C)}{P(+)}=\frac{P(+|\neg C)*P(\neg C)}{P(+|C)*P(C)+P(+|\neg C)*P(\neg C)}=\frac{0.2*0.99}{0.01*0.9+0.2*0.99}=0.957$$

$$P(T2=+|T1=+)=0.9*0.043+0.2*0.957=0.0387+0.1904=0.2301$$

$$P(+)=\frac{P(+|C)*P(C)}{P(C|+)}=\frac{0.9*0.01}{0.435}=0.2069$$

$0.2301/0.2069=1.112$，增加了11.2%

# 测验4：不同类型




$P(S) = 0.7$
$P(R) = 0.01$
$P(H|S,R) = 1$
$P(H|\neg S,\ R) = 0.9$
$P(H|S,\neg R) = 0.7$
$P(H|\neg S,\ \neg R) = 0.1$

S：天气是Sunny

R：升职Rise

H：高兴Happy

问题1：$P(R|S) =\ ?$
问题2：$P(R|H,S) =\ ?$
问题3：$P(R|H) =\ ?$
问题4：$P(R|H,\ \neg S) =\ ?$

# 答案：测验4

答案1：$P(R|S) = P(R) = 0.01$

答案2：$P(R|H,S) = \frac{P(H,R,S)}{P(H,S)} = \frac{P(H|R,S)P(R,S)}{P(H,S,R)+P(H,S,\neg R)}$

$$= \frac{P(H|R,S)P(R,S)/P(S)}{(P(H,S,R)+P(H,S,\neg R))/P(S)} = \frac{P(H|R,S)P(R)}{P(H|S,R)P(R)+P(H|S,\neg R)/P(\neg R)}$$

$$= \frac{1*0.01}{1*0.01+0.7*0.99} = 0.0142$$

答案3：$P(R|H) = \frac{P(R,H)}{P(H)} = \frac{P(R,H,\neg S)+P(R,H,S)}{P(H)}$

$$= \frac{P(H|R,\neg S)P(R,\neg S)+P(H|R,S)P(R,S)}{\sum_{\substack{i=S,\neg S \\ j=R,\neg R}} P(H)P(H|i,j)}$$

$$= \frac{0.9*0.01*0.3+1*0.01*0.7}{1*0.7*0.01+0.9*0.3*0.01+0.7*0.7*0.99+0.1*0.3*0.99} = 0.0185$$

# 答案：测验4

答案4：

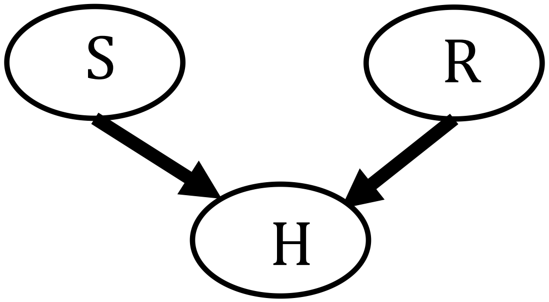
$$P(R|H,\neg S)=\frac{P(R,H,\neg S)}{P(H,\neg S)}=\frac{P(H|R,\neg S)P(R,\neg S)}{P(H,\neg S)}$$

$$=\frac{P(H|R,\neg S)P(R,\neg S)}{P(H,\neg S,R)+P(H,\neg S,\neg R)}$$

$$=\frac{P(H|R,\neg S)P(R,\neg S)}{P(H|R,\neg S)P(R,\neg S)+P(H|\neg S,\neg R)P(\neg S,\neg R)}$$

$$=\frac{0.9*0.01*0.3}{0.9*0.01*0.3+0.1*0.3*0.99}=0.08333$$

# 关于条件依赖的再思考




$P(R|S) = P(R) = 0.01$

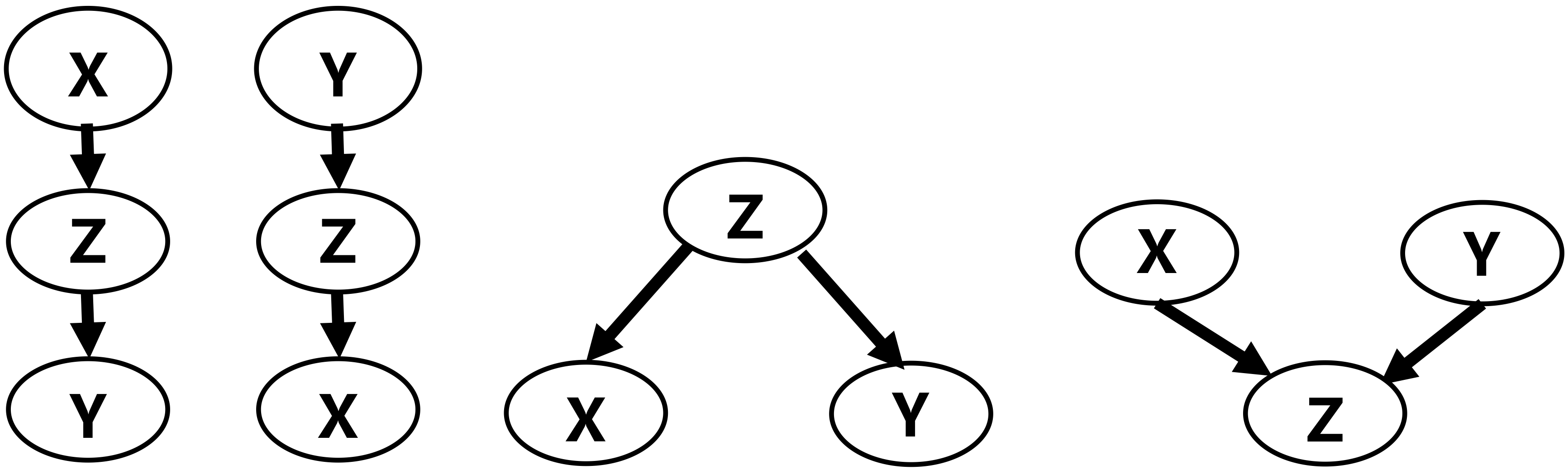
$P(R|H, S) = 0.0142$

$P(R|H) = 0.0185$

$P(R|H, \neg S) = 0.00833$

独立性并不意味着有条件独立性。

# 四个关系“ D分离”




**Cascade** **Common Parent** **V-Structure**

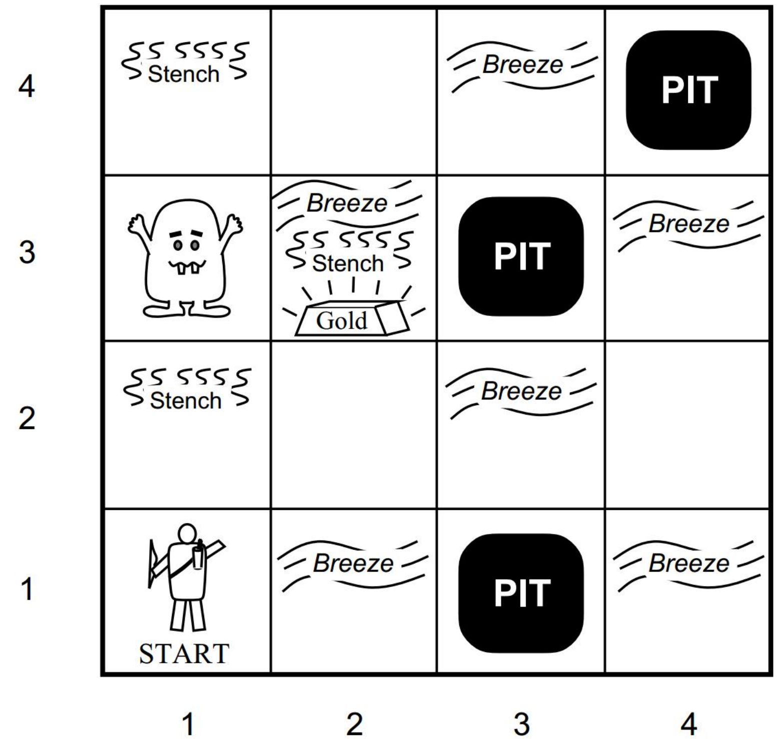
$$P(X,Y,Z) = P(X)P(Z|X)P(Y|Z)$$
$$P(X,Y,Z) = P(Y)P(Z|Y)P(X|Z)$$

$$P(X,Y,Z) = P(X|Z)P(Y|Z)P(\mathrm{Z})$$
$$P(X,Y|Z) = P(X|Z)P(Y|Z)$$

$$P(X,Y,Z) = P(X)P(Y)P(\mathrm{Z|X,Y})$$
$$P(X,Y|Z) = \frac{P(X)P(Y)P(\mathrm{Z|X,Y})}{P(Z)}$$

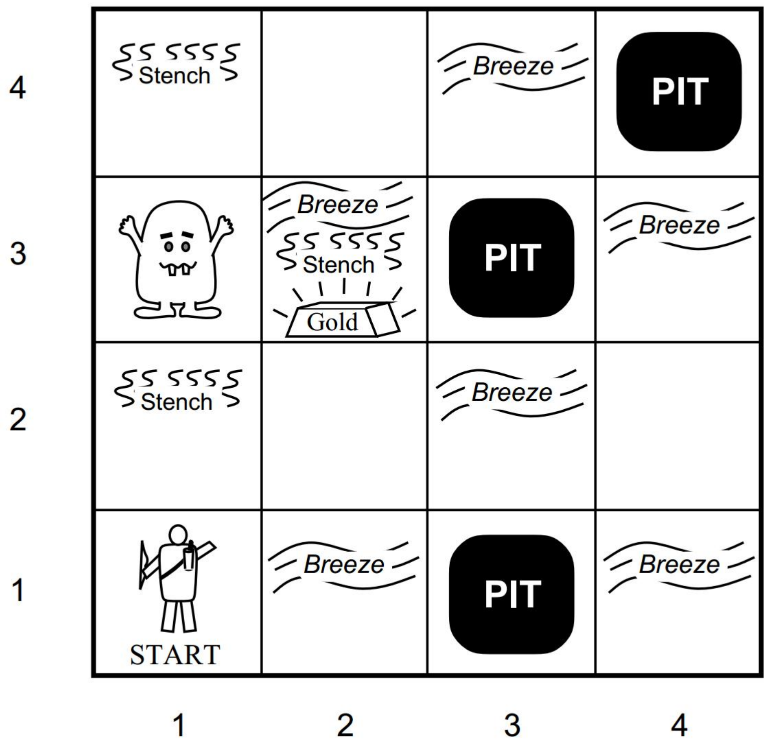
# Wumpus World（怪兽世界）

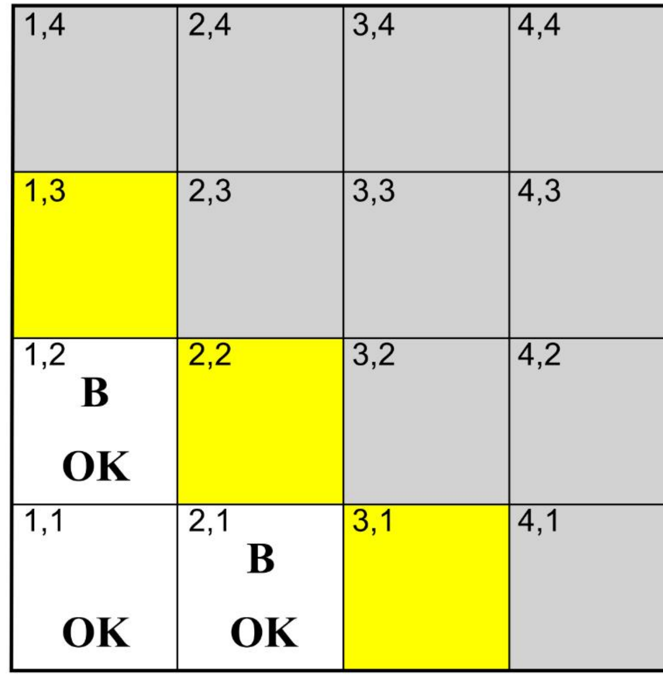
- 环境：
  - 与Wumpus相邻的方格有臭味。
  - 与陷阱相邻的方格有微风。
  - 在金子所处方格，闪闪发光。
  - 如果面对Wumpus，Shoot（射击）会杀死它。
  - 射击会用完唯一的箭。
  - 如果在同一方格中，Grab（抓取）会捡起黄金。
  - Release（释放）将黄金放在相同的方格中。
- 执行器：左转，右转，前进，Grab，Release，Shoot
- 传感器：微风，闪光，气味




**Wumpus** --- 怪兽
**Pit** --- 陷阱
**Breeze** --- 微风
**Glitter** --- 闪光
**Stench** --- 恶臭

# Wumpus World（怪兽世界）




- $P_{i,j} = true$ iff $[i,j]$包含陷阱。
- $B_{i,j} = true$ iff $[i,j]$有微风。
- 在概率模型中仅包含$B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}$。

# 指定概率模型

- 完全联合分布：$\mathbf{P}(P_{1,1},\ldots,P_{4,4},B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1})$
- 应用乘积规则，这么做是为了得到$P(Effect|Cause)$：

$$\mathbf{P}\left(P_{1,1},\ldots,P_{4,4},B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1}\right)$$
$$=\mathbf{P}(B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1}|P_{1,1},\ldots,P_{4,4})\mathbf{P}(P_{1,1},\ldots,P_{4,4})$$

- 第一项：给定陷阱布局后，微风布局的条件概率。微风与包含陷阱的方格相邻时，它的值等于1，否则为0。
- 第二项：陷阱布局的先验概率，每个方格包含陷阱的概率是0.2，并且与其它方格是否包含陷阱是相互独立的：

$$\mathbf{P}\left(P_{1,1},\ldots,P_{4,4}\right)=\prod_{i,j=1,1}^{4,4}\mathbf{P}\left(P_{i,j}\right)=0.2^{n}\times 0.8^{16-n}$$

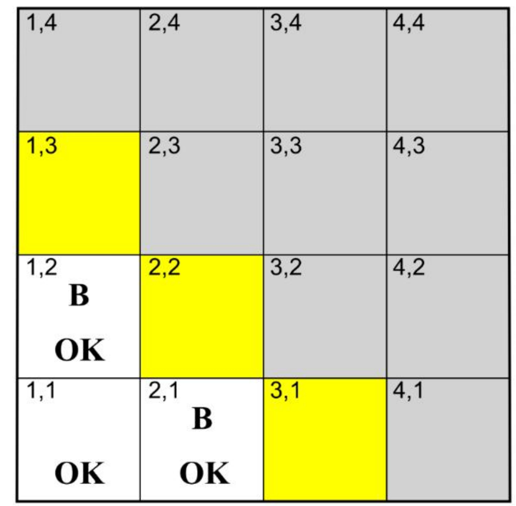
对于$n$个陷阱。

# 观察与查询

- 证据（已知事实）:

  $b = \neg b_{1,1} \wedge b_{1,2} \wedge b_{2,1}$

  $known = \neg p_{1,1} \wedge \neg p_{1,2} \wedge \neg p_{2,1}$
- 查询是$\mathbf{P}(P_{1,3}|known, b)$。
- 定义$Unknown$ = 除$Known$（已知）方格和查询方格$P_{1,3}$以外的所有$P_{i,j}$组成的随机变量组合。

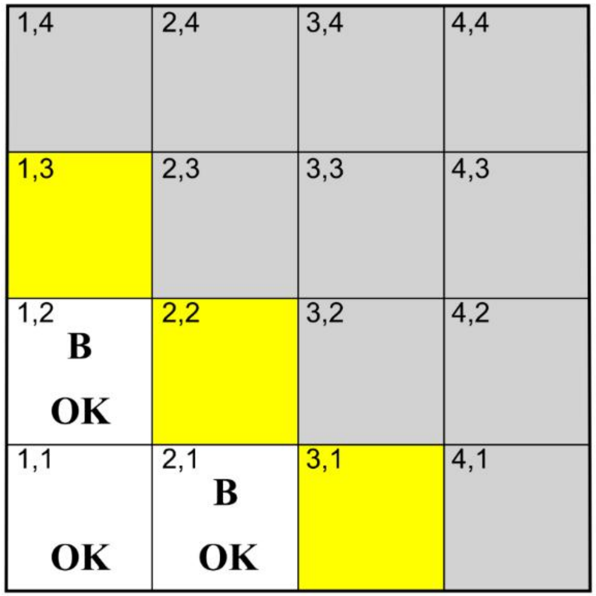


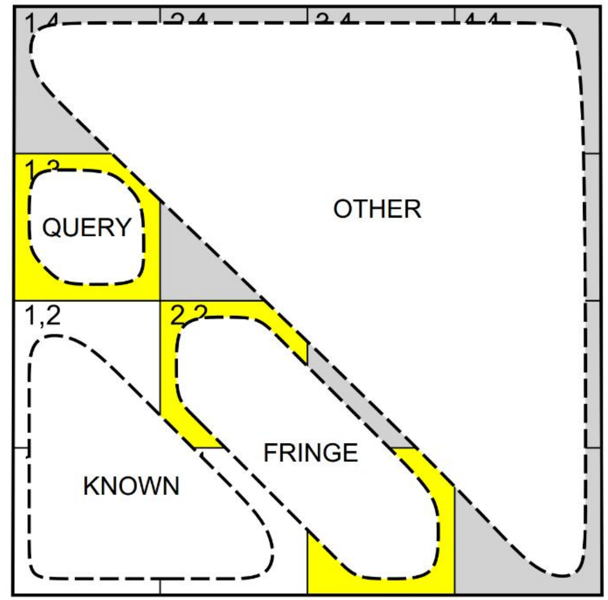

- 进行枚举推理，有

$$\mathbf{P}(P_{1,3}|known, b) = \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3}, unknown, known, b)$$

- 这个求和的计算量是随着方格的数量呈指数增长的！

# 使用条件独立性




- 基本见解：给定相邻的隐方格，观测是条件独立于其它隐方格的。
- 定义$\color{red}{Unknown} = Fringe \cup Other$

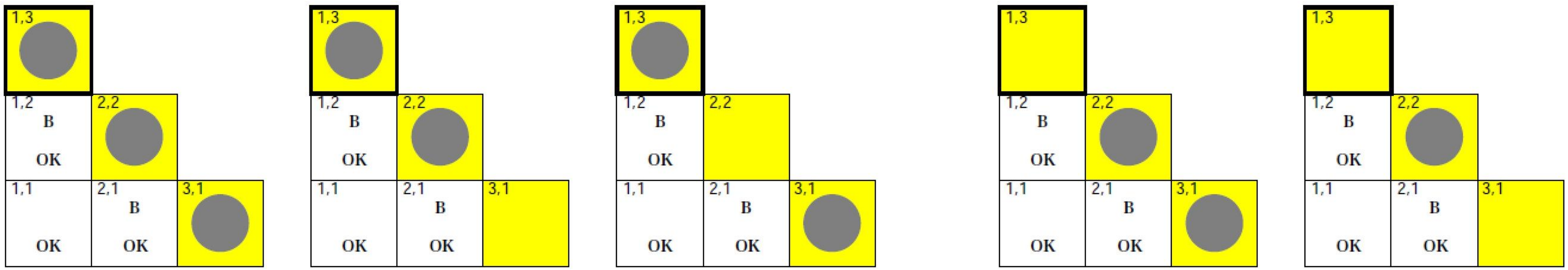
$$\mathbf{P}\left(b \middle| P_{1,3},\ Known, Unknown\right) = \mathbf{P}(b|P_{1,3},\ Known, Fringe)$$

- 将查询处理为一种我们可以使用的形式！

# 使用条件独立性

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(P_{1,3}|known, b) &= \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3}, unknown, known, b) \\
&= \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(b|P_{1,3}, known, unknown)\mathbf{P}(P_{1,3}, known, unknown) \\
&= \alpha \sum_{fringe} \sum_{other} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe, other)\mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe, other) \\
&= \alpha \sum_{fringe} \sum_{other} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe)\mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe, other) \\
&= \alpha \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe) \sum_{other} \mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe, other) \\
&= \alpha \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe) \sum_{other} \mathbf{P}(P_{1,3})P(known)P(fringe)P(other) \\
&= \alpha\, P(known)\mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe)P(fringe) \sum_{other} P(other) \\
&= \alpha'\, \mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe)P(fringe)
\end{aligned}
$$

# 使用条件独立性




0.2 x 0.2 = 0.04　0.2 x 0.8 = 0.16　0.8 x 0.2 = 0.16　0.2 x 0.2 = 0.04　0.2 x 0.8 = 0.16

(a)　(b)

$$\mathbf{P}\left(P_{1,3}\middle|known, b\right) = \alpha'\langle 0.2,0.8\rangle\langle(0.2*0.2+0.2*0.8+0.8*0.2),\ (0.2*0.2+0.2*0.8)\rangle \approx \langle 0.31,\ 0.69\rangle$$

$$\mathbf{P}\left(P_{2,2}\middle|known, b\right) = \alpha'\langle 0.2,0.8\rangle\langle(0.8*0.8+0.8*0.2+0.0.2*0.8+0.2*0.2),(0.2*0.2)\rangle\ \approx \langle 0.86,\ 0.14\rangle$$

$$\mathbf{P}(P_{1,3}|known, b) = \alpha'\,\mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{fringe} \boxed{\mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe)} P(fringe)$$

# 小结

- 概率概括了Agent与证据有关的信念。
- 决策理论结合了Agent的信念和期望，定义最佳行动是最大化期望效用的行动。
- 先验概率。
- 条件概率。
- 完全联合概率分布指定了对随机变量的每种完整赋值的概率。
- 绝对独立性。
- 条件独立性。
- 贝叶斯规则。
- 乘积规则。