数学物理与偏微分方程第五课

2020年12月10日 星期三 晴

Topic: 分离变量法

review for Chapter 1:

① 概念 ⇒ 线性全部 problem

② 叠加原理 ⇒ ① ② ③ ⇒ 定解问题的解法 ⇐ 齐次化 → 可以的

③ BC齐次化: $u = v + w$

$\begin{cases} \text{齐次化} \\ \text{homogeneous} \end{cases}$ 正弦函数 cos.

$\begin{cases} \text{常} \\ \text{Dirichlet} \\ \text{Neumann} \\ \text{Robin} \end{cases} \begin{cases} \text{常数} \\ \text{Ei} \\ \text{Ei} \\ \text{Ei} \\ \text{Ei} \end{cases}$

4) Review: ODE的解法

5) 特征值 problem. ⇒ ODE定解问题 → 如何解

1. 线性ODE的解法:

- 一阶
  - 齐次 $\dot{x} + p(t)\cdot x = 0$ 分离变量法: 通解:
  - 非齐次 $\dot{x} + p(t)\cdot x = f(t)$ 常数变易法: ① 先求对应齐次方程 ② 将 C 换成 C(t) $x = C\cdot e^{-\int p(t)dt}$ ③ 求 C(t) 代入 $x = C(t)\cdot e^{-\int p(t)dt}$ ✓
- 二阶 (高阶)
  - 常系数
    - 齐次: 特征方程法: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ ⇒ $\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \neq 0: & (e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) \\ \lambda_1 = \lambda_2: & (e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}) \\ \lambda_1, \lambda_2 \text{ 共轭}: & (e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t) \end{cases}$ ⇒ 方程通解 $u = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \varphi_i$
      - 已知特解 $y_1(x)$: $\boxed{\text{降阶法: Jacobi 公式}}$ 而后学
    - 非齐次: 通 = 特 + 齐次通: 先求齐次的通解 $\begin{cases} \text{特} \\ \text{定} \\ \text{数} \end{cases}$ $\begin{cases} \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = f(t) \\ \Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\left(\text{或 } \cos\omega t, \sin\omega t\right) \\ \text{注意: 如果重根 } \lambda \text{ 重 } \Rightarrow t^{k-1} \end{cases}$ 如果是 $f(t) = 0$.
  - 变系数
    - Euler 方程: $t^n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \cdot t^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \cdot t \cdot \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$ 令 $t = e^{\tau}$.
    - Bernoulli 方程:
    - Riccati 方程: 而后学
    - Lagrange 方程:
- 高阶
  - $y^{(n)} = f(x)$ 直接积分即可
  - $y'' = f(x, y)$ 令 $p = y'$ ⇒ $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$.
  - $y'' = f(y, y')$ 令 $y' = p$ ⇒ $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\cdot\frac{dp}{dy}$.

例: $y'' + 4y' + 13 = 0$

⇒ $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ ⇒ $\lambda = -2 \pm 3i$

⇒ $\{e^{-2x}\cos 3x, e^{-2x}\sin 3x\}$

⇒ $y = Ce^{-2x}\cos 3x + C_1 e^{-2x}\sin 3x$

例: $y'' - 2y = x + 2$. 一般常系数 非齐次

① 齐次通解: $y'' - 2y = 0$

⇒ 1. $\lambda \neq 0$ 时. $\frac{dy}{dx} = 2dx$ ⇒ $\ln y = 2x + C$ ⇒ $y = Ce^{2x}$.

由于 $C > 0$ 时 算术 $y \neq 0$ ✓

2. $\lambda = 0$ 时. 形式成立.

综合两种情况得. $y = C\cdot e^{2x}$.

② 特殊齐次通解: 令 $y = C(x)\cdot e^{2x}$

回代 …… ✓

Start for Chapter 2:

1. 引入: 运算的特性

$\begin{cases} \text{算子}\{\text{元素}\} \\ \text{后加特征} \end{cases}$ $= \lambda\cdot(\text{元素})$

后加特征方程 ⇒ 特征值 λ 的特征函数

特征值以入特征值?

既定的 λ 特征值 $\Rightarrow$ 特征函数 $\Rightarrow