数学物理方程第七课

2023年11月22日 星期三 19:08

1. 弦振动/固有频率: "弦固有属性" ⇒ 齐次PDE.

① $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$. 分离变量 $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

$\Rightarrow \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} \Leftarrow \lambda$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{cases}$ $n = 1, 2, 3, \cdots$

$\Rightarrow T_n(t) = C_{1n}\cos\left(a\sqrt{\lambda_n}\,t\right) + C_{2n}\sin\left(a\sqrt{\lambda_n}\,t\right)$.

② $\omega_n = a\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi a}{l}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 固定频率与特征值一一对应.

⇑

$\lambda = -\frac{1}{X(x)}\cdot\frac{d^2X(x)}{dx^2}$

⇑

$-\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda\cdot X(x)$.

抑制: 共振 → 改变 $f_{固有}$ (改变 m 质) // 改变 强迫力 的频率 // 改变 储振动机组. (加阻尼)

强化: 共振 → 琴腔 // 雾化

经验: 多用中间变量.
记得用量纲反代验证.

2. 一维波动定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A. \\ u(0,t) = 0. \quad (1齐) \qquad u(l,t) = F\sin\omega t. \quad (1非齐) \\ u(x,0) = f(x). \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

人玩泥.

Step1: 边界条件齐次化

设 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$.

Step2: 特征值 problem:

Step3: 正交分解

Step4. 建立初值问题

Step5: 求解初值问题