数学物理方程第三课

2023年11月3日 星期五 17:02

Topic. 热传导方程

1. 数学知识 (math)

① ∇: Hamilton. $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

② 作用 f / 标量 f $\nabla f = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}, \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}, \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ called: 梯度.

代入 u $\nabla \cdot \vec{u} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}, \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}, \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (u_x, u_y, u_z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ called: 散度.

③ corollary: $\nabla \cdot \nabla f = \nabla(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ essentially vector.

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ written as, Δf.

④ def (方向导数): $\frac{df}{dl} = \nabla f \cdot \vec{n} = |\nabla f| \cdot \cos\theta$ $\Rightarrow$ 对应 $|\Delta U|_{max}$ 方向

1+. 数学知识 (物理基础)

① 传热: 方向: 由 $T_{高} \to T_{低}$

速率: 热传导系数 k. $[\frac{Q/\Delta t}{\Delta S}] = [\frac{J}{m^2 \cdot s}] = [\frac{W}{m^2}]$

② calculation methods:

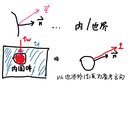
(1) 导热: Law (Fourier 导热) $q = -k \cdot \nabla u$

导热系数 $[k] = [\frac{W}{m \cdot K}]$

(2) 对流: Law (Newton 冷却) $q = k(t_w - t_f)$

对流传热系数 $[k] = [\frac{W}{m^2 \cdot K}]$

(3) 辐射: Law (Stefan-Boltzmann) $q = k \cdot (T_1^4 - T_2^4)$

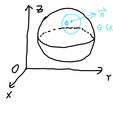


2. 热传导方程

① 明确对象: $u(x, y, z, t) \to$ 温度场.

② 简化假设:

1. 均质: 体系密度均匀.
2. 各向同性: 导热系数 $\in$ const.
3. 内部: 有内热源
4. 世界: 有热交换



③ 数学推导:

(1) 选入 $U_{体}$. 导体 occupy space (x,y,z) 的 Ω. 世界为 $\partial\Omega$.

(2) 推导 Ω 的内部 Ω 速率, 不考虑世界 $\partial\Omega$. [考虑 $T_{世界}$ 需要考虑传热方程]

(3) 联立 15: ✓

分域内量热变化 ① = 内部温度贡献 ① + 世界·系统入热量 ②

①: 分块 Ω: $t_0 \to t_1$ ($\Delta t > 0$)

$Q_1 = \oint_\Omega c \cdot [u(x, y, z, t_1) - u(x, y, z, t_0)]$

②:

来自 Gauss 定理 (高维的分部积分法的推广)

②: $Q_2 = \int_{t_0}^{t_1} q \cdot (\vec{n}) \, ds \cdot (t_1 - t_0)$

(Fourier law) $= \iint_{\partial\Omega} -k \cdot \nabla u(x, y, z, t) \cdot (\vec{n}) \cdot ds \cdot (t_1 - t_0)$

$= \iint_{\partial\Omega} k \nabla u(x, y, z) \cdot \vec{n} \cdot ds \cdot (t_1 - t_0)$

$= k \cdot \iint_{\partial\Omega} \nabla \cdot \nabla u(x, y, z) \cdot ds \cdot (t_1 - t_0)$ (Gauss law. $\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_\Omega \nabla \cdot F \, dV$)

$\Rightarrow k \cdot \iint_\Omega \Delta u(x, y, z) \, dV \cdot (t_1 - t_0)$ (又 积分 math)

$\Rightarrow k \cdot \Delta u(x, y, z) \cdot V_\Omega \cdot (t_1 - t_0)$ (相乘不变 math)

* 单位: $[J] = [\frac{W}{m^2} \cdot \frac{m^2}{s} \cdot m \cdot s] = [J]$

代入: $\oint_\Omega c \cdot [u(x, y, z, t_1) - u(x, y, z, t_0)] = k \cdot \Delta u(x, y, z) \cdot V_\Omega \cdot (t_1 - t_0) + f_\Omega(x, y, z, \bar{t}) \cdot c \cdot V_\Omega \cdot (t_1 - t_0)$

中值 math. $\frac{\partial}{\partial t}[u(x, y, z, \bar{t})] \cdot (t_1 - t_0)$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, \bar{t}) = \frac{k}{c} \cdot \Delta u(x, y, z, \bar{t}) + \frac{f}{c}(x, y, z, \bar{t})$.

$\Rightarrow$ 令: $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = \boxed{\frac{k}{\rho c}} \cdot \Delta u(x, y, z, t) + \boxed{\frac{f}{c}(x, y, z, t)}$ 热传导方程 (3D)

三维热传导方程

* 为简写为 a^2 ?

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u + f$

$a^2 \to$ 表明速度

$a^2 = \frac{k}{c} = [\frac{m^2}{s}]$

$\frac{k}{\rho c}$: 称为热扩散系数 [考]

$\frac{f}{c}$: 称为热源函数 [考]

$\Rightarrow$ 形式: $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = a^2 \cdot \Delta u(x, y, z, t) + f$. 热传导方程!

④ 定解条件:

初始条件: 初始时刻 $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \partial\Omega$.

世界条件:

Dirichlet Edge: 世界温度恒定. [变量在世界上取数值]

$u_{\partial\Omega} = g(x, y, z, t)$ 若 $g(x, y, z, t) = c \Rightarrow$ 恒温世界

1+0 类: 规定: 变量在世界上取数值

signal: 温度 // 恒温

Newman Edge: 世界热流密度 正 等于 法世界外法线方向导数值

$q_{\partial\Omega} = -k \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y, z, t)$ 若 $g(x, y, z, t) = \begin{cases} c & \Rightarrow \text{恒热流密度世界} \\ 0 & \Rightarrow \text{绝热世界} \end{cases}$

2+0 类: 规定: 变量沿外界法线的方向导数值

signal: 热流密度 // 绝热/绝热

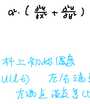
Robin Edge: 对流世界: [变量及其外界法线方向导数线性组合的数值]

$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g(t)$

3+0 类: 规定: 变量及其外界法线方向导数线性组合的数值

signal: 对流

proof:



$q = \iint_{\partial\Omega} q \cdot (\vec{n}) \, ds \cdot (t_2 - t_1) + \iint_{\partial\Omega} q \cdot (\vec{n}) \, ds \cdot (t_2 - t_1)$

$= -k \iint_{\partial\Omega} (u - u) \, ds \cdot (t_2 - t_1) + \iint_{\partial\Omega} k \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \cdot (t_2 - t_1)$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\boxed{\frac{k}{\rho}}}_{\text{定义: } \sigma} \cdot u = \underbrace{\frac{k}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial n}}_{\text{定义: } g}$ [考查对 math 的应用方法数学]

3. 导热方程拓展:

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u + f$

1D $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$ 一维, 细杆导热.

2D $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + f(x, y, t)$ 二维, 薄板导热.

eg:

$U(x, 0)$ 杆上初始温度

$U(0, t)$, $U(L, t)$ 左/右端点温度随 t 时刻的函数.

$U_x(0, t)$: 左端点 温度变化率 $\Rightarrow$ 左端点热流密度

例: 导热系数 k

$q_{左} = k \cdot u_x(0, t)$

$q_{右} = -k \cdot u_x(L, t)$

① 观察: 已知左端点温度变化, 且右端点"绝缘" $\Rightarrow$ 热流密度 $= 0$.

② 左端: 以 x 的方向为正!

$q_{左} = -(2 + \sin t)$ 世界上热流密度

$= -k \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ 右端的 u 的导数 线有关系!

$= -k \cdot \frac{\partial u(0, t)}{-\Delta x}$

$= k \cdot \frac{\partial u(0, t)}{\Delta x}$

$= k \cdot u_x(0, t)$

右端 $q_{右} = 0$

$\Rightarrow u_x(L, t) = 0$.

③ 方程

$k \cdot u_x(0, t) = -(2 + \sin t)$

$u(L, t) = 0$, $t > 0$.

世界热量 传播 到 x 轴 $\Rightarrow$ 热流方向

温度稳定场

世界外 线性函数

例2: 导热系数 k

$q_{左} = 2 + \sin t$

$q_{右} = 0$

$u(0, t)$, $u(L, t)$ 左/右端点温度 k 与 math 世界 线性 相关

则有关 $(-k)$ 与世界有关 方程为:

$-k \cdot \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = h(u(L, t) - 27)$

$\Rightarrow$ 温度稳定场

世界外 线性函数

追问:

若是从右端传入呢?

① .. — 同 b

② 左 side: $u_t(0, t) = 0$.

右 side: $q_{右} = -(2 + \sin t)$

$= -k \cdot \frac{\partial u(L, t)}{\partial x}$

$= -k \cdot \frac{\partial u(L, t)}{+\Delta x}$

$= -k \cdot \frac{\partial u(L, t)}{\Delta x}$

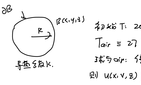
$\Rightarrow k \cdot u_x(L, t) = 2 + \sin t$

① 方程

$u_t(0, t) = 0$

$k \cdot u_x(L, t) = 2 + \sin t$, $t > 0$.

例3: 导热系数 k



初始 T: $200°C$.

$T_{\infty} = 27°C$.

热传导率: 传导系数 h.

因 $u(x, y, z)$ 与世界有关

时刻 $\Rightarrow$ 第三类世界

$-k \cdot \frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial n} = h(u(x, y, z, t) - 27)$,

$(x, y, z) \in \partial\Omega$, $t > 0$.

例4:

例: 无热交换.

杆内热源 $f(x, t)$

初始 T: $\varphi(x)$. $\Rightarrow$ 初始 con: $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le l$.

左端 $= 0°C$. $\Rightarrow$ 左端 温度恒定 $\Rightarrow$ dirichlet $u(0, t) = 0$. $t > 0$

右端 绝缘. $\Rightarrow$ 右端 绝缘 $\Rightarrow$ 0 热流 $u_x(l, t) = 0$. $t > 0$

Ans: 立特问题 表示: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) & 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0, t) = 0, \ u_x(l, t) = 0, & t > 0. \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \end{cases}$

方程 的式

世界条件

初始条件

例5: $u_t(0, t)$

$f(x)$

$t > 0$ 时 打开左端.

在 $t = 0$ 时 关.

杆内 $f(x)$.

$t > 0$ 时 封闭.

问 $u(x, t)$ 的满足 ?

在 $t = 0$ 时 关闭 $\Rightarrow$ 初值 con 温度

打开 $\Rightarrow$ 温度变化率

Ans: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & u_x(l, t) = 0, \ t > 0. \\ u(x, 0) = 0, & 0 \le x \le l. \end{cases}$

方程 的式

左: 由 T 恒定 $\Rightarrow$ dirichlet.

右: 因 绝热 $\Rightarrow$ neumann.

世界条件

初始条件: "初始内中空" $\Rightarrow$ "初始 T 为零".