数学物理方程第六课

2023年11月17日 星期五 16:12

2.2 分离变量法

(1) 一维波动定解问题:

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx}. & ① \\ U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0. & ② \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x). & ③ \end{cases}$$

Step1: 分离变量　根据齐次边界/方程　假设 $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ …… 非零解

回代①: $\Rightarrow \dfrac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \dfrac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$ [左右只可能同时等于某个常数 $-\lambda$]

化为两个ODE: $\begin{cases} \ddot{X}(x) + \lambda X(x) = 0. \\ \ddot{T}(t) + \lambda a^2 \cdot T(t) = 0. \end{cases}$

由边界条件: $X(0)\cdot T(t) = X(l)\cdot T(t) = 0$. ，$T(t)$ 不恒为0.（否则 $u(x,t)\equiv 0$，零解 无意义）

$\Rightarrow$ 转化: $\begin{cases} X(0) = X(l) = 0. \\ \ddot{X}(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}\cdot x\right) \end{cases}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

Step2: 求解初值问题　λ_n 代入: $\ddot{T}(t) + \lambda_n a^2 \cdot T(t) = 0$,

$$\Rightarrow T_n(t) = C_{1n}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, a t\right) + C_{2n}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, a t\right)$$

故 $u_n(x,t) = T_n(t)\cdot X_n(x)$

$$= \left[C_{1n}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, a t\right) + C_{2n}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, a t\right)\right]\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\Rightarrow U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, a t\right) + C_{2n}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, a t\right)\right]\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

由于此 $u(x,t)$ 满足初值条件: $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ U_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$, $0 \le x \le l$.

(2) 分离变量的目标与推广:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$

- $f = 0$:
  - 齐次ODE $\Rightarrow$ 直接分离变量.
  - 分离变量后 $\Rightarrow$ ODE ≠ PDE.
  - 变量分离目标 $\Rightarrow$
    - 分离成 独立函数
    - 找出各函数 独立的 ODE
    - 得出各ODE的 定解条件
  - 齐次ODE 并未使用"λ" 简化计算
- $f \neq 0$:
  - 无法直接分离变量
  - $\Rightarrow$ 正交分解 $u(x,t)$ ……

(3) 对应(1)中 $A \neq 0$ 情况:

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = A & ① \\ U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0. & ② \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x). & ③ \end{cases}$$

Step1: 特征值 problem.

设 $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$.

☆ 代入对应齐次方程: $X(x)\cdot T''(t) - a^2\cdot \ddot{X}(x)\cdot T(t) = 0$.

Step2: 正交分解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$A =$

Step3: 建立初值问题 ODE.

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$.

假设可逐项求导:

由①: $\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\cdot X_n(x) - a^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot \ddot{X}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$.

由 $X_n(x)$ 是A运算后特征函数 $\Rightarrow$ $\ddot{X}_n(x) = -\lambda_n X_n(x)$

Step4: 求初值问题:

(4) 驻波法由来: 由上述(1)与(3)

$\Rightarrow$
- ① 解由无数简振叠加.
- ② 各振动都有振幅≡0的点 $\Rightarrow$ 分离变量法/驻波法/特征函数法.
- ③ 节点: 令 $\sin\frac{n\pi}{l}x = 0$ $\Rightarrow$ $x = k\cdot\frac{l}{n}$ $(1 \le k \le n-1)$.

(5)

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = \rho^{-1}\cdot\sin\omega t & ① \\ U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0. & ② \\ u(x,0) = 0, \quad U_t(x,0) = 0. & ③ \end{cases}$$

Step1: 特征值 problem

设 $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$. 代入对应齐次 PDE.

……

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 \\ X_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) \end{cases}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

Step2: 正交分解

Step3: 建立初值 ODE.

Step4: 求初值问题