# 数学物理方程第四课

2021年12月14日 星期三

**Supplement:** Poisson 方程

特点相: 是要求空间内在边界上满足某个关系

Poisson 方程: $f=y_1+y_2+y_3+y_4$ $\xrightarrow{\text{令}\,f=0}$ 调和函数

$f=0$: $y_1+y_2+y_3+y_4=0$

Laplace 方程: $0=$ ……

(调和函数)

边界条件: $y$ 光滑函数

$y_1$ 光滑函数

$y_2$ 连续函数

$y_3$ 连续函数

$y_4$ 连续函数

$u_{xx}+y=$ 解法: 是有点特殊的二阶线性 (nonlinear)

$y_1+y_2=$ 解法: 是有点特殊的线性函数

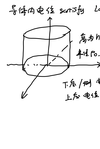
$y_3+y_4=$ (max, min) 解法: 调和函数有最大值, 最小值

$y_1+y_2+y_3+y_4=$ 解法: 调和函数有最大值, 最小值, 满足线性叠加原理

**Summary:**

| 波动方程 | 热传方程 | Poisson 方程 |
|---|---|---|
| $y_{tt}=a^2\cdot\Delta u+f$ | $y_t=a^2\cdot\Delta u+f$ | $0=\Delta u+f$ |
| 依赖于线 | 依赖于时间 | 与空间有关 |
| 波动的 | 热的 | 稳态时是与时间无关的 |

例1: 导体内电位 satisfy Laplace 方程




求: 内部, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

T为初: $U=0$

上方: $u=x^2+y^2$ ( $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ ) $0\le\rho<\rho_0$, $0\le\theta\le 2\pi$

侧面: $u=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+u_{\theta\theta}=0$ $0\le\rho<\rho_0$, $0<z<h$ 侧面

$u(0,z)=0$. $0\le z\le h$ 下底面

$u(\rho,h)=\rho^2$. $0\le\rho\le\rho_0$ 上底面

$u(\rho_0,z)=0$. $0\le z\le h$ 侧面

中间线, 只不过注解与此!

## 1.2 定解问题的适定性

Background:

① 微元群 → … → 线性定解问题

② 变加/减 → … → PDE → 定解问题 ⇐ need 再次 边界条件

can do

③ contact BC

边界条件的来源

④ review: ODE 解性

⑤ 特殊值问题

how to do

1. 基本概念

PDE

- def (偏微分方程, PDE): 含u, f + 含u的偏导
- def (阶 ED): 求u 出现 导数 in higher 阶 导数.
- classification: 线性: 含u, f 的 偏导 相对 一次
  - 非线性: —— —— —— 一次 或 一次
- classification: 齐次 $=0$ 齐次 PDE
  - $\neq 0$ 非齐次 PDE

定解问题

- PDE
- 初始条件 IC
- 边界条件 BC

Generally, PDE 更大心 解析. ⇒ need 结合定解条件 确定 定解 pde 的 性态

- ① 没有 解析 / 唯一解 in 说法.
- ② 能否到 精确 PDE / 边界条件 是否存在

eg

$x^2\cdot u_{xx}+y^2\cdot u_{yy}+z\cdot u_z=xy$ ⇒ 二阶线性偏微分

$\cos x\cdot u_{tt}-u_{xx}=0$ ⇒ ——— 齐次

$u_x\cdot u_y+2u=0$ ⇒ 一阶 非线性 齐次

$u_{xxx}+u_{yyy}+\sin u+u^2=xy$ ⇒ 三阶 非 一阶 …

$u_{xx}-2\cos x\,u_{yy}+3y\,u_y=y$ ⇒ 二阶 变系数 非齐次

2. 适定性

- 存在性 ✓
- 唯一性 ✓
- 稳定性 定解条件 微动大 → 解 also 微动

1.3 叠加原理

(1) def: 多个 非齐次 的 叠加 得到 单一 非齐次 的 和 之和.

(2) 线性 pde 的 解 满足 叠加原理.

(3) 适应:
- 齐次线性 → 线性
- 非齐次 → 齐次.

1. 二阶 偏微 的 基本 方:

def:

$$L=a_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2a_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_3\frac{\partial^2}{\partial y^2}+b_1\cdot\frac{\partial}{\partial x}+b_2\cdot\frac{\partial}{\partial y}+c,$$

Cor:

$$L(\alpha x+\beta y)=\alpha\cdot Lx+\beta\cdot Ly.$$

2. (thm1) PDE 的 由 项 拆 合成 有 叠加:

$$Lu=f \xrightarrow{f=\sum_{i=1}^{n}f_i} \begin{cases} Lu=f_1\to u_1\\ Lu=f_2\to u_2\\ \vdots\\ Lu=f_n\to u_n\end{cases} \to u=\sum_{i=1}^{n}u_i$$

3. (thm2) PDE 的 拆 合成 关 是 的:

使用条件
- ① 写成 形
- ② 各 项 只 含 u 或 u 的 偏 微 分
- ③ 每 个 和 之 在 $u=\sum u_i$ 可 通 项 求 一/二 阶 偏 导, 且 系 的 偏 导 所 占 的 线 性 叠 加

图 例 同 (thm1). 注 n→∞ 即 可 ✓

4. (thm3) 定 解 问 题 的 拆 解:

使用条件
- ① 边界条件 齐次
- 可 解 / 齐次 叠加 条件

- ① 写 成 形 为 关 系 方 程.
- ② 齐 次 方 程.
- ④ 可 求 齐, 可 通 项 求 = 所 求.

⇒ 拆 解 / 叠 加 项

- 齐 次 项
- 初 始 条 件.

5. 边界条件的齐次化:

① $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ ⇒ 注意边界 边界的 in 形式

② $w(x,t)=g(t)$. $w(l,t)=g(t)$

③ 原始 $u(x,t)$ 的 定解 pde → vs $v(x,t)$ 的 非齐次的 定解 pde.

具体 拆 析.

(1) 构 造 辅 助 函 数

左1右1

左1右2

左2右1

左2右2

可以 有 略!

(2) 函 数 表 现

以 第 vs 左1右1 为 例.

小结 边界条件的齐次化, 用 in 有: 线性 特殊值 问题 的 求解.

$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

| 边界类型 | 边界条件 | 辅助函数 |
|---|---|---|
| [1,1] | $u(0,t)=g_1(t)$. $u(l,t)=g_2(t)$ | $w(x,t)=\frac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x+g_1(t)$ |
| [2,1] | $u_x(0,t)=g_1(t)$. $u(l,t)=g_2(t)$ | $w(x,t)=g_1(t)\cdot(x-l)+g_2(t)$ |
| [1,2] | $u(0,t)=g_1(t)$ $u_x(l,t)=g_2(t)$ | $w(x,t)=g_1(t)\cdot x+g_2(t)$ |
| [2,2] | $u_x(0,t)=g_1(t)$ $u_x(l,t)=g_2(t)$ | $w(x,t)=\frac{g_2(t)-g_1(t)}{2l}x^2+g_1(t)x$ |

例.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)\\ u(0,t)=\text{const}. \quad u(l,t)=\text{const}.\\ u(x,0)=\varphi(x). \quad u_t(x,0)=\psi(x). \end{cases}$$

初始 辅助 函数.

解析. $f(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

$\xrightarrow{\text{check}}$ $\begin{cases} g_1(t)=\text{const}\\ g_2(t)=\text{const}\end{cases}$

$\Rightarrow w(x,t)=g_1(t)\cdot(x-l)+g_2(t)$

$=\text{const}(x-l)+\text{const}$

例: $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}=\underbrace{\sin x}_{f}+\underbrace{xy}_{g}-\underbrace{2x^2}_{h}$ 的一个特定解.

$\Rightarrow u=-\sin x+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}xy)-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^2)$

$=-\sin x+\frac{1}{4}xy-\frac{1}{3}x^2$.

例. 将定解问题中的齐次化:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}=\sin x+xy-2x^2 & x^2+y^2<R^2\\ u=xy. & x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

解. 令 $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$

$\Rightarrow u_{tt}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}+w_{xx}+w_{yy}=\sin x+xy-2x^2$

选 齐次化 $v_{xx}+v_{yy}=0$.

由 上式 ⇒ $w(x,y)$ 应 满足的 方程 ⇒ $w_{xx}+w_{yy}=-\sin x+\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{3}x^3$

且: $\begin{cases} w=v_{xx}+v_{yy}=0. & x^2+y^2<R^2\\ v=xy-\sin x-\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}x^3 & x^2+y^2=R^2 \end{cases}$