4. Teoria della dualità

mercoledì 24 agosto 2022 14:28

Ad ogni problema di PL P, chiamato problema primale, è possibile associare un altro problema di PL D, chiamato problema duale che condivide con P gli stessi dati.

(Coppia P-D simmetrica)

$$P \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad D \begin{cases} \max b^T x \\ A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(Coppia P-D della forma std)

$$P_{FS} \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad D_{FS} \begin{cases} \max b^T y \\ A^T y \leq c \end{cases}$$

Possiamo quindi notare:

- L'operatore "min" in P viene trasformato in "max" in D
- Ad ogni variabile di P corrisponde un vincolo in D
- Ad ogni vincolo di P corrisponde una variabile in D
- A variabili vincolate in P corrispondono vincoli di disuguaglianza in D
- A vincoli di eguaglianza in P corrispondono variabili libere in segno in D

Sappiamo che il duale di P è

$$\begin{matrix} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{duale}} \begin{matrix} \max b^T y \\ A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \max b^T y \\ A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{matrix} \xrightarrow{D \text{ nella forma di } P} \begin{matrix} -\min -b^T y \\ -A^T y \geq -c \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

Si cambia il segno delle variabili

Esempio 1

$$\begin{matrix} \min 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 8x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 8 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 3 \\ 2x_2 - 6x_3 + 8x_4 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \max 8y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 \leq 5 \\ y_1 - 7y_2 \leq 3 \\ 3y_1 + y_2 - 6y_3 \leq -7 \\ 5y_2 + 8y_3 \leq 8 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{matrix}$$

Esempio 2

$$\begin{matrix} \min 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -2x_1 - 4x_2 = -3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \max 5y_1 - 3y_2 \\ 5y_1 - 2y_2 \leq 2 \\ 3y_1 + 4y_2 \leq -4 \\ 2y_1 \leq -5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{matrix}$$

Esempio 3

$$\begin{matrix} \min -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 9 \\ -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 7x_4 \leq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \max 9y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ y_1 - 3y_2 + 2y_3 \leq -3 \\ y_1 + 6y_2 - 3y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 4 \\ 6y_1 - 7y_2 + 5y_3 \leq -5 \\ y_1 \; y_2 \; y_3 \leq 0 \end{matrix}$$

Esempio 4

$$\begin{matrix} \max 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 \geq 2 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 \leq 0 \quad x_2 \gtrless 0 \quad x_3 \geq 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \min 2y_1 - 4y_2 \\ y_1 + 5y_2 \leq 8 \\ -6y_1 + 7y_2 \geq 3 \\ y_1 - 2y_2 = -2 \\ y_1 \leq 0 \quad y_2 \gtrless 0 \end{matrix}$$

	MIN		MAX	
Variabili	≥ 0	$\Longleftrightarrow$	$\leq$	Vincoli
	≤ 0	$\Longleftrightarrow$	$\geq$	
	$\gtrless 0$	$\Longleftrightarrow$	$=$	
Vincoli	$\geq$	$\Longleftrightarrow$	≥ 0	Variabili
	$\leq$	$\Longleftrightarrow$	≤ 0	
	$=$	$\Longleftrightarrow$	$\gtrless 0$	

Teorema dualità debole

Per ogni coppia P-D se $P(D)$ è inferiormente (superiormente...) illimitato, allora $D(P)$ è inammissibile

NB. non è necessariamente vero il contrario

Se uno tra P e D non ammette soluzione allora anche l'altro non la ammette.

Teorema dualità forte

Se il problema P ammette soluzione ottima x^*, allora anche il problema D ammette soluzione ottima