目次

1 便利な定理まとめ

1.1 推定論

定理 1.1. $\hat{\theta}$ が不偏推定量であるとする。$\hat{\theta}$ が Cramér-Rao の下限

$$\mathrm{Var}_\theta[\hat{\theta}] = \frac{1}{nI(\theta)} \tag{1.1}$$

を満たすならば、$\hat{\theta}$ は一様最小分散不偏（UMVU）推定量である。ここで、

$$I(\theta) = \mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] \tag{1.2}$$

は Fisher 情報量である[*1]。

この Cramér-Rao の下限 (1.1) を用いた UMVU の判定方法は、あくまで十分条件を与えるのみであることに注意。一方、以下の完全十分統計量による判定方法は UMVU 推定量の完全な構成法を与える。

定理 1.2. T を完全十分統計量とする。$\hat{\theta}$ が不偏推定量であるとき、

$$\delta^*(T) := \mathrm{E}[\hat{\theta}|T] \tag{1.3}$$

は UMVU 推定量である。

2 正規分布

本節では、正規分布に関する推定量の基本的事項についてのまとめ・導出を行う。

実数値の確率変数 X がパラメータ μ, σ をもつ正規分布の確率密度関数

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2.4}$$

に従うとき、$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ と表記する。

[*1] Fisher 情報量の定義には、$\log f(X)$ のところを n サンプルの対数尤度関数で定義するものもあるので注意（例：竹村の $I_n(\theta)$）。

2.1 1標本問題の点推定

$X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, i.i.d. とする。また、$\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする。

命題 2.1. パラメータ μ, σ^2 の推定量に関して、以下が成り立つ。

(1) σ^2 が既知か未知かにかかわらず

$$\hat{\mu} := \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2.5}$$

は μ の UMVU 推定量かつ最尤推定量である。

(2) μ が既知の場合、

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \tag{2.6}$$

は σ^2 の UMVU 推定量かつ最尤推定量である。

(3) μ が未知の場合、σ^2 の UMVU 推定量および最尤推定量はそれぞれ

$$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{UMVU}} := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \qquad \hat{\sigma}^2_{\mathrm{MLE}} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{2.7}$$

で与えられる。

Proof. (1) $\mathrm{E}[\hat{\mu}] = \mu$ が成り立つから、$\hat{\mu}$ は μ の不偏推定量。

$$\log f(X|\mu, \sigma^2) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2} \tag{2.8}$$

より、μ に関する Fisher 情報量は

$$I(\mu) = \mathrm{E}\left[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^4}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\,. \tag{2.9}$$

$X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立だから、

$$\mathrm{Var}[\hat{\mu}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2/n\,. \tag{2.10}$$

よって定理 1.1 より $\hat{\mu}$ は UMVU 推定量である。

次に最尤推定量が $\hat{\mu}$ になることを示す。対数尤度は、

$$\ell(\mu, \sigma|X^n) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \tag{2.11}$$

これを μ について最大化すると、

$$\hat{\mu}_{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2.12}$$

となり、これは $\hat{\mu}$ に一致。

(2) $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立であることから $\mathrm{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2$ が成り立つため、$\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の不偏推定量。

$\square$