Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2019-1**

[Cod: CM334] **[Curso: Análisis Numérico I]**

Práctica Dirigida N^o 3

1. Segun * el procesador Intel Core i9 7980XE rinde 977.0 GFLOPS. Estime el tiempo necesario para resolver un sistema de 100 ecuaciones con 100 incógnitas mediante el método de eliminación gaussiana y sustitución regresiva, compare dicho tiempo con el necesario para aplicar la regla de Cramer a este sistema.

2. Programe el método de eliminación gaussiana sin intercambio de filas y resuelva el sistema $Hx = b$, donde $H(i,j) = 1/(i+j-1)$ y $b(j) = 1$.

3. Programe la eliminación de Gauss Jordan y muestre una base para el espacio columna de cualquier matriz A, Por ejemplo la matriz del problema 5.

4. Resuelva el sistema $Ax = b$ utilizando factorización LU cuando $b = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 30 & 41 \end{bmatrix}^t$.

5. Programe la factorización LU de Dolittle (L,U=Doolittle(A)) y aplíquelo con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

6. Se sabe que una matriz M tiene por norma infinito 0,1. Se requiere resolver un problema iterativo $x = Mx+c$. Se toma una semilla $x_0 = (1,1,\ldots,1)$ y se obtiene un x_1 con todas sus componentes positivas y menores que 1. ¿Cuantas iteraciones hacen falta para obtener una precisión de 10^{-6}? ¿En que resultado te basas?

7. Programe un procedimiento que realice la factorización LU con pivoteo parcial de una matriz A. Aplíquelo a la matriz del problema 5.

8. Programe un procedimiento que encuentre la inversa de una matriz. Aplíquelo a la matriz del problema 5.

9. Se sabe que una matriz A es estrictamente diagonal dominante por filas y que, de hecho $|a_{ii}| \geq 2\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ para cada fila i.
Se pide:

   a) Explicar si el algoritmo de Jacobi aplicado al sistema $Ax = b$ (para cualquier b) converge o no.

   b) Calcular, si se inicia el algoritmo con el vector $(1,0,\ldots,0)$, un número de iteraciones que garanticen que el error cometido es menor que 10^{-6}.

---
* https://www.pugetsystems.com/labs/hpc/Intel-Core-i9-7900X-and-7980XE-Skylake-X-Linux-Linpack-Performance-1059/

10. Programe un procedimiento que realice la factorización Cholesky de una matriz A. Aplíquelo a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

11. Sea I una imagen en blanco y negro (digamos con valores en una gama de 0 a 1) de 800×600 píxeles. Se considera la transformación del "desenfoque"que consiste en que el valor gris de cada píxel se cambia por una combinación lineal de los valores de los píxeles adyacentes y él mismo, según la caja

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

donde se supone que a_{22} (la ponderación del propio píxel) es mayor que la suma de todos los demás valores a_{ij} en valor absoluto.

a) Describir la matriz de dicha transformación si se entiende I como un vector.

b) Si se desea realizar la operación inversa (enfocar), ¿se puede utilizar el algoritmo Gauss-Seidel o el de Jacobi? ¿Piensas que es mejor usar uno de estos (si es que se puede) o, por ejemplo, la factorización LU? ¿Por que?

c) ¿Que condiciones se han de dar para que la matriz de la transformación sea simétrica? ¿Y definida positiva?

12. Evalue la expresión $y = x/(1-x)$ para $x_1 = 0{,}93$ y para $x_2 = 0{,}94$, calcule el variación porcentual δy

$$\delta y = \frac{\frac{y_2 - y_1}{y_1}}{\frac{x_2 - x_1}{x_1}}$$

repita el procedimiento para $x = -0{,}93$ y $x = -0{,}94$. Explique los resultados usando el numero de condición de y.

13. Si usted esta resolviendo $Ax = b$ y sabe que A y b están perturbados en $0{,}01\,\%$ y $k(A) = 1000$, diga cual es la perturbación en x.

14. Investigue la propagación de errores de los siguientes esquemas que aproximan $x_n = (1/2^n)_{n\geq 0}$:

a) $r_0 = 0{,}994$, $r_n = \frac{1}{2} r_{n-1}$

b) $p_0 = 1, p_1 = 0{,}497$, $p_n = \frac{3}{2} p_{n-1} - \frac{1}{2} p_{n-2}$

c) $q_0 = 1, q_1 = 0{,}497$, $q_n = \frac{5}{2} q_{n-1} - q_{n-2}$

15. Descargue la data `https://www.mathstat.dal.ca/~iron/math3210/hw4data` y ajuste la mejor parábola $y = ax^2 + bx + c$ que se acerque a esos datos, usando el siguiente procedimiento:

a) Cargue la data en python usando

```
import scipy.io as sio
data = sio.loadmat('hw4data')
```

b) Plantee un sistema $Ax = y$, donde y es la data, $x = [a; b; c]^t$ y A es una matriz no cuadrada.

c) Como no es posible resolver $Ax = y$ directamente, resuelva el siguiente problema $A^t Ax = A^t b$ con método de eliminación gaussiana.

d) Grafique el ajuste cuadrático y la data en un solo gráfico.

UNI, 11 de abril del 2019*

*Hecho en LaTeX