Задание №1. Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: класс A (мало рискует), класс B (рискует средне), класс C (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у неё, 30% принадлежат классу A, 50% – классу B, 20% – классу C. Вероятность того, что в течение года водитель класса A попадёт хотя бы в одну автокатастрофу, равна $0,01$ для водителя класса B эта вероятность равна $0,03$, а для водителя класса C – $0,1$. Мистер Джонс страхует свою машину у этой компании и в течение года попадает в автокатастрофу. Какова вероятность того, что он относится к классу A?

Решение задания №1. Нам нужно найти вероятность того, что водитель принадлежит классу A, при условии, что он попал в аварию. Воспользуемся теоремой Байеса (для нахождения искомой вероятности) и формулой полной вероятности (для нахождения вероятности попадания в аварию):

$$\mathbb{P}(\text{Класс водителя} = \text{A}|\text{Водитель попал в аварию}) =$$
$$= \frac{\mathbb{P}(\text{Водитель попал в аварию}|\text{Класс водителя} = \text{A}) \cdot \mathbb{P}(\text{Класс водителя} = \text{A})}{\mathbb{P}(\text{Водитель попал в аварию})} =$$

Воспользуемся формулой полной вероятности для нахождения $\mathbb{P}(\text{Водитель попал в аварию})$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{Водитель попал в аварию}) = \\
&\mathbb{P}(\text{Водитель попал в аварию}|\text{Класс водителя} = \text{A}) \cdot \mathbb{P}(\text{Класс водителя} = \text{A}) + \\
&+\mathbb{P}(\text{Водитель попал в аварию}|\text{Класс водителя} = \text{A}) \cdot \mathbb{P}(\text{Класс водителя} = \text{A}) + \\
&+\mathbb{P}(\text{Водитель попал в аварию}|\text{Класс водителя} = \text{A}) \cdot \mathbb{P}(\text{Класс водителя} = \text{A})
\end{aligned}$$

Окончательные расчеты:

$$\frac{0.01 \cdot 0.3}{0.3 \cdot 0.01 + 0.5 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.1} = \frac{3}{38} \approx 0.079$$

Ответ: $\mathbb{P}(\text{Класс водителя} = \text{A}|\text{Водитель попал в аварию}) = \dfrac{3}{38} \approx 0.079.$

Задание №2. Движением частицы по целым точкам прямой управляет схема Бернулли с вероятностью p исхода 1. Если в данном испытании схемы Бернулли появилась 1, то частица из своего положения переходит в правую соседнюю точку, а в противном случае – в левую. Найти вероятность того, что за n шагов частица из точки 0 перейдет в точку m.

Решение задания №2. Рассмотрим случай, когда $m \geq 0$. Для того, чтобы частица перешла в нужную нам точку необходимо, чтобы она в сумме совершила $n - \frac{n-m}{2}$ шагов вправо и $\frac{n-m}{2}$ шагов влево. Если $n \not\equiv m \pmod 2$, тогда точка недостижима (нельзя попасть в точку 2 за 3 шага):

$$\mathbb{P}(x = m) = \begin{cases} C_n^{\frac{n-m}{2}} p^{n-\frac{n-m}{2}} (1-p)^{\frac{n-m}{2}}, & n \equiv m \pmod 2 \\ 0, & n \not\equiv m \pmod 2 \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда точка m отрицательная и когда $m > n$. В случае с отрицательной точкой m нужно «шагать» в противоположную сторону, в случае $m > n$ вероятность будет равна 0.

Ответ: $$\mathbb{P}(x = m) = \begin{cases} C_n^{\frac{n-m}{2}} p^{n-\frac{n-m}{2}} (1-p)^{\frac{n-m}{2}}, & n \equiv m \pmod 2 \text{ и } 0 \leq m \leq n \\ C_n^{\frac{n-|m|}{2}} p^{\frac{n-|m|}{2}} (1-p)^{n-\frac{n-|m|}{2}}, & n \equiv m \pmod 2 \text{ и } -n \leq m < 0 \\ 0, & n \not\equiv m \pmod 2 \text{ или } |m| > n \end{cases}$$

Задание №3. Плотность распределения $p(x)$ некоторой случайно величины имеет вид $p(x) = \dfrac{c}{e^x + e^{-x}}$, где c – константа. Найти значение этой константы c и вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi; \pi)$.

Решение задания №3. Для того, чтобы существовала наша функция плотности вероятности, необходимо, чтобы следующий определенный интеграл сходился к 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{e^x + e^{-x}}dx = 1$$

Найдем константу c:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{c}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{c}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{c}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \frac{1}{c}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}dx = \frac{1}{c}$$

Сделаем замену переменной $u = e^x$, тогда $du = e^x dx$ и $dx = \dfrac{dx}{e^x}$:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{c}$$

Получаем табличный интеграл:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan(u)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{c}$$

$$c = \frac{2}{\pi}$$

Для того чтобы узнать вероятность того, что случайная величина принимает значение из интервала $(-\pi; \pi)$, можно воспользоваться определением плотности вероятности:

$$\mathbb{P}(x \in [-\pi; \pi]) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{2}{\pi}}{e^x + e^{-x}}dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Далее посчитаем этот интеграл, который похож на тот, который мы уже считали:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\pi}\arctan\left(e^x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\arctan\left(e^{\pi}\right) - \arctan\left(e^{-\pi}\right)) \approx 0.945$$

Ответ: $c = \dfrac{2}{\pi}$, $\mathbb{P}(x \in [-\pi, \pi]) \approx 0.945$.

Задание №4. Задана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайно величины x:

$$f(x) = \begin{cases} A\sqrt{x}, & x \in [1;4] \\ 0, & x \notin [1;4] \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и $\mathbb{P}(2 < X < 3)$.

Решение задания №4. Найдем значение параметра A:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$\int_{1}^{4} A\sqrt{x}dx = 1$$

$$\int_{1}^{4} \sqrt{x}dx = \frac{1}{A}$$

Отдельно посчитаем этот интеграл:

$$\int_{1}^{4} \sqrt{x}dx = \int_{1}^{4} x^{\frac{1}{2}}dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Bigg|_{1}^{4} = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

Тогда наш параметр $A = \frac{3}{14}$. Функция плотности вероятности принимает вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{14}\sqrt{x}, & x \in [1;4] \\ 0, & x \notin [1;4] \end{cases}$$

Теперь мы можем найти функцию распределения по определению:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x) = F(x)$$

$$\int_{1}^{x} \frac{3}{14}\sqrt{x}dx = \frac{3}{14}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{7}\sqrt{x^3} - \frac{1}{7}$$

Тогда:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{7}\sqrt{x^3} - \frac{1}{7}, & 1 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Теперь найдем $\mathbb{P}(2 < x < 3)$:

$$\mathbb{P}(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = \frac{1}{7}\sqrt{3^3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{2^3} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7}\left(\sqrt{3^3} - \sqrt{2^3}\right) \approx 0.338$$

Ответ: $\mathbb{P}(2 < X < 3) \approx 0.338$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{7}\sqrt{x^3} - \frac{1}{7}, & 1 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$.

Задание №5. При работе ЭВМ время от времени возникают сбои. Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1.5. Найти вероятность того, что в течение суток произойдет хотя бы один сбой.

Решение задания №5. Воспользуемся распределением Пуассона.

$$p(k) \equiv \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k - это количество событий, λ - математическое ожидание (среднее значение). Тогда наша искомая вероятность будет выражаться следующим образом:

$$p(\text{произойдет хотя бы 1 сбой}) = 1 - p(\text{произойдет 0 сбоев}) =$$
$$= 1 - p(0) = 1 - \frac{1.5^0}{0!} e^{-1.5} = 1 - e^{-1.5} \approx 0.777$$

Ответ: $p(\text{произойдет хотя бы 1 сбой}) \approx 0.777$.