Задание №1. Правильная монетка бросается до тех пор, пока не выпадет n орлов подряд. Найдите математическое ожидание необходимого числа бросков.

В процессе решения мне очень помогла книга Александра Шеня ($56-57$ страницы).

Решение задания №1. Рассмотрим частные случаи.

При $\mathbf{n=1}$, то есть, когда нам нужна один выпавший орел для того, чтобы прекратить игру. Если на первом броске выпал орел (вероятность такого исхода равна $\frac{1}{2}$) то мы прекращаем подкидывать монетку, иначе выпал орел и мы подкидываем следующий раз, получаем последовательность вероятностей: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}$. Тогда искомое математическое ожидание:

$$\mathbb{E}S_{n=1} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

Можно посчитать сумму этого ряда, но вместо этого воспользуемся другим подходом, так как при росте числа подряд выпавших орлов n сложность будет только увеличиваться.

Пусть S - искомое математическое ожидание, тогда в половине случаев выпал орел и мы прекратили подбрасывать монетку, в половине выпала решка и нам нужно начать все сначала:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1+S)$$

Тогда искомое математическое ожидание для $n=1$ будет равно 2.

Немного усложним задачу и рассмотрим случай для $\mathbf{n=2}$. Рассмотрим подходящие нам комбинации:

$$\{OO\}, \{POO\}, \{PPOO, OPOO\}, \{PPPOO, OPPOO, POPOO\}, \ldots$$

Видим, что перед двумя орлами у нас всегда должна стоять решка. Пусть S искомое математическое ожидание, до появления двух орлов подряд: тогда либо выпадет решка и мы вернемся в исходное состояние, либо выпадет орел и перейдем в S_0. S_0 – математическое ожидание количества бросков необходимое для получения двух орлов подряд, при условии, что на предыдущем шаге выпал орел. Получим систему:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} \cdot (1+S) + \frac{1}{2} \cdot (1+S_0) \\ S_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1+S) \end{cases}$$

После решения этой системы мы получим, что искомое математическое ожидание $\mathbb{E}_2 = S = 6$.

Теперь рассмотрим математическое ожидание $\mathbb{E}S_n$ в общем случае, при произвольном n. Для этого введем вспомогательные математические ожидания:

- S_i — математическое ожидание числа бросков до появления N орлов при условии, что до этого последними i-тыми выпадениями оказались орлы.
- S — математическое ожидание числа бросков до появления N орлов подряд.

Получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} \cdot (S+1) + \frac{1}{2} \cdot (S_1+1) \\ S_1 = \frac{1}{2} \cdot (S+1) + \frac{1}{2} \cdot (S_2+1) \\ S_2 = \frac{1}{2} \cdot (S+1) + \frac{1}{2} \cdot (S_3+1) \\ \qquad\qquad \cdots \\ S_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot (S+1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \end{cases}$$

Выразим S_k через S_{k+1} и подставим в выражение для S:

$$\frac{1}{2}\cdot(S_k+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(S_{k+1}+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(S+3)$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot(S+1)+\frac{1}{2}\cdot(S_1+1)=\frac{1}{2}\cdot(S+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(S_2+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(S+3)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(S+1)+\frac{1}{4}\cdot(S+3)+\frac{1}{8}\cdot(S+3)+\cdots+\frac{1}{2^n}(S+3)+\frac{1}{2^n};$$

Просуммируем геометрическую прогрессию: $\frac{1}{2^k}\cdot(S+3)$, получим:

$$S=\frac{1}{2}\cdot(S+1)+\frac{1}{4}\cdot(S+3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2^n}$$

После преобразований, имеем искомое математическое ожидание.

Ответ: $\mathbb{E}S_{n\text{ орлов подряд}}=2^{n+1}-2.$

Задание №2. Авария происходит в точке X, которая равномерно распределена на дороге длиной L. Во время аварии машина скорой помощи находится в точке Y, которая так же равномерно распределена на дороге. Считая, что X и Y независимы, найти математическое ожидание расстояния между машиной скорой помощи и точкой аварии.

Решение задания №2. Мы знаем, что X и Y равномерно распределены на отрезке $[0, L]$. Таким образом, функция плотности вероятности для X и Y равна:

$$p_x(x) = \frac{1}{L} \quad 0 \geq x \geq L$$
$$p_y(y) = \frac{1}{L} \quad 0 \geq y \geq L$$

Наше искомое математическое ожидание $\mathbb{E}|X - Y|$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|x-y| = \int_0^L \int_0^L |x-y| p_x(x) p_y(y) dx dy = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L |x-y| dx dy = \\
= \frac{1}{L^2} \left(\int_0^L \int_y^L (x-y) dx dy + \int_0^L \int_0^y (y-x) dx dy = \right. \\
= \frac{2}{L^2} \int_0^L \int_0^y (y-x) dx dy = \frac{2}{L^2} \int_0^L \left(yx \Big|_{x=0}^{x=y} - \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy = \\
= \frac{2}{L^2} \int_0^L \left(y^2 - \frac{y^2}{2} \right) = \frac{1}{L^2} \int_0^L y^2 dy = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^L = \frac{L}{3}
\end{aligned}$$

Ответ: $\mathbb{E}|X - Y| = \dfrac{L}{3}$.

Задание №3. Совместный закон распределения случайных величин S и S задан таблицей:

X \ Y	0	1	3
0	0.15	0.05	0.3
-1	0	0.15	0.1
-2	0.15	0	0.1

Найти:

1. Законы распределения случайных величин X и Y.
2. $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{D}X$, $\mathbb{D}Y$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, $\operatorname{corr}(X,Y)$, а так же математическое ожидание и дисперсию случайной величины $V = 6X - 4Y + 3$.

Решение задания №3. Приступим.

Закон распределения X и для Y соответственно:

$$\begin{array}{lll} P(X=-2)=0.25 & P(X=-1)=0.25 & P(X=0)=0.5 \\ P(Y=0)=0.3 & P(Y=1)=0.2 & P(Y=3)=0.5 \end{array}$$

Математические ожидания:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= -2\cdot 0.25 + -1\cdot 0.25 + 0\cdot 0.5 = -0.75 \\ \mathbb{E}Y &= 0\cdot 0.3 + 1\cdot 0.2 + 3\cdot 0.5 = 1.7 \end{aligned}$$

Дисперсию будем считать через математическое ожидание квадрата случайной величины $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$. Для этого посчитаем математические ожидания квадрата случайных величин X и Y:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X^2 &= (-2)^2\cdot 0.25 + (-1)^2\cdot 0.25 + 0\cdot 0.5 = 1.25 \\ \mathbb{E}Y^2 &= 0\cdot 0.3 + (1)^2\cdot 0.2 + (3)^2\cdot 0.5 = 4.7 \end{aligned}$$

Итог для дисперсий:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 1.25 - (-0.75)^2 = 0.6875 \\ \mathbb{D}Y &= \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = 4.7 - (1.7)^2 = 1.81 \end{aligned}$$

Теперь ковариация.

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(x-\mathbb{E}X)(y-\mathbb{E}Y) = \\ &= (0-(-0.75))(0-1.4)\cdot P(X=0,Y=0) + \\ &\quad + (0-(-0.75))(1-1.4)\cdot P(X=0,Y=1) + \\ &\quad + (0-(-0.75))(3-1.4)\cdot P(X=0,Y=3) + \\ &\quad + (-1-(-0.75))(0-1.4)\cdot P(X=-1,Y=0) + \\ &\quad + (-1-(-0.75))(1-1.4)\cdot P(X=-1,Y=1) + \\ &\quad + \cdots = \\ &= 0.225 \end{aligned}$$

Корреляция.

$$\operatorname{corr}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X}\cdot\sqrt{\mathbb{D}Y}} = \frac{0.225}{\sqrt{0.6875}\cdot\sqrt{1.84}} \approx 0.2$$

Математическое ожидание для $V = 6X - 4Y + 3$:

$$\mathbb{E}V = \mathbb{E}(6X - 4Y + 3) = 6\mathbb{E}X - 4\mathbb{E}Y + 3 = 6 \cdot (-0.75) - 4 \cdot (1.7) + 3 = -8.3$$

Дисперсию для $V = 6X - 4Y + 3$. Посчитаем значения V, $V - \mathbb{E}V$ и $(V - \mathbb{E}V)^2$:

X \ Y	0	1	3
0	3	-1	-9
-1	-3	-7	-15
-2	-9	-13	-21

X \ Y	0	1	3
0	11.3	7.3	-0.7
-1	5.3	1.3	-6.7
-2	-0.7	-4.7	-12.7

X \ Y	0	1	3
0	127.69	53.29	0.39
-1	28.09	1.69	44.89
-2	0.49	22.09	161.29

И теперь сама дисперсия $\mathbb{D}V = \mathbb{E}(V - \mathbb{E}V)^2$

$$\mathbb{D}V = 102.01 \cdot P(X = 0, Y = 0) + 16.81 \cdot P(X = -1, Y = 0) + \dots = 42.91$$

Задание №4. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – результаты n независимых повторных наблюдений над дискретной случайной величиной ξ, принимающей значения из множества $Y = 0, 1$ с вероятностями:

$$P(\xi = 1) = \frac{1+\theta}{2}, \quad P(\xi = 0) = \frac{1-\theta}{2}, \quad -1 < \theta < 1$$

Найти оценку максимального правдоподобия параметра θ.

Решение задания №4. Функция правдоподобия для n независимых наблюдений:

$$\underset{\theta \in (-1,1)}{\arg\max}\ L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1+\theta}{2}\right)^{x_i} \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{1-x_i}$$

Логарифм функции правдоподобия:

$$\underset{\theta \in (-1,1)}{\arg\max}\ \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i \ln\left(\frac{1+\theta}{2}\right) + (1-x_i)\ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right)\right]$$

Находим производную по θ и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{d(\ln L)}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i}{1+\theta} - \frac{1-x_i}{1-\theta}\right] = 0$$

Решим получившиеся уравнение:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i}{1+\theta} - \frac{1-x_i}{1-\theta}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i(1-\theta)}{(1+\theta)(1-\theta)} - \frac{(1+\theta)(1-x_i)}{(1-\theta)(1+\theta)}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i(1-\theta) - (1+\theta)(1-x_i)] = 0 \quad \Big| \quad 1^2 + \theta^2 \neq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i - \theta x_i - (1 - x_i + \theta - \theta x_i)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i - \theta x_i - 1 + x_i - \theta + \theta x_i] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [2x_i - 1] = n\theta$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} [2x_i - 1]}{n} = \theta$$

$$\frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - 1 = \theta$$

Ответ: $\theta = \dfrac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - 1$

Задание №5. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – результаты n независимых повторных наблюдений над случайной величиной ξ, плотность распределения которой имеет вид:

$$f(x,\theta) = pf_1(x) + (1-p)f_2(x,\theta),$$
$$f_1(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & x \in (0,\theta] \\ 0, & x \notin (0,\theta] \end{cases} \quad \text{и} \quad f_2(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & x \in (0,\theta] \\ 0, & x \notin (0,\theta] \end{cases}$$
$$p,\, \theta \text{ – неизвестные параметры } 0 \le p \le 1$$

Найти оценки неизвестных параметров p, θ методом моментов.

Решение задания №5. Найдем первый теоретический момент случайной величины ξ:

$$m_1 = \frac{p}{\theta}\int_0^\theta x\,dx + \frac{(1-p)}{1-\theta}\int_\theta^1 x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}(\theta - p + 1)$$

Найдем второй теоретический момент случайной величины ξ:

$$m_2 = \frac{p}{\theta}\int_0^\theta x^2\,dx + \frac{(1-p)}{1-\theta}\int_\theta^1 x^2\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}(\theta^2 + \theta - \theta p - p + 1)$$

Теперь посчитаем первый выборочный момент случайной величины ξ:

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

И второй выборочный момент случайной величины ξ:

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

Приравняем моменты и получим систему:

$$\begin{cases} m_1 = \hat{m}_1 \\ m_2 = \hat{m}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta - p + 1 = 2\hat{m}_1 \\ \theta^2 + \theta - \theta p - p + 1 = 3\hat{m}_2 \end{cases}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} p = 1 - 2\hat{m}_1 + \theta \\ \theta^2 + \theta - \theta p - p + 1 = 3\hat{m}_2 \end{cases}$$

Подставим p из первого уравнения во второе:

$$\theta^2 + \theta - \theta(1 - 2\hat{m}_1 + \theta) - (1 - 2\hat{m}_1 + \theta) + 1 = 3\hat{m}_2$$
$$\theta^2 + \theta - \theta + \theta 2\hat{m}_1 - \theta^2 - 1 + 2\hat{m}_1 - \theta + 1 = 3\hat{m}_2$$
$$2\theta\hat{m}_1 + 2\hat{m}_1 - \theta = 3\hat{m}_2$$
$$\theta(2\hat{m}_1 - 1) = 3\hat{m}_2 - 2\hat{m}_1$$
$$\theta = \frac{3\hat{m}_2 - 2\hat{m}_1}{2\hat{m}_1 - 1}$$

Теперь найдем параметр p из равенства полученного преобразованиями первого уравнения:

$$p = 1 - 2\hat{m}_1 + \frac{3\hat{m}_2 - 2\hat{m}_1}{2\hat{m}_1 - 1}$$

$$p = 1 - \frac{2\hat{m}_1(2\hat{m}_1 - 1) + 3\hat{m}_2 - 2\hat{m}_1}{2\hat{m}_1 - 1}$$

$$p = 1 - \frac{4\hat{m}_2^2 - 4\hat{m}_1 + 3\hat{m}_2}{2\hat{m}_1 - 1}$$