Задание №1. Найти обратную матрицы методом присоединённой матрицы:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение задания №1. Для того, чтобы существовала обратная матрица, необходимо, что она была квадратной (это условие выполнено) и её определитель не был равен 0. Для начала посчитаем определитель этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot (-5) +$$
$$+1 \cdot 1 \cdot 2 - (-5) \cdot (-3) \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 3 = 19$$

Теперь найдем обратную метолом присоединенной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \overline{A}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \overline{a}_{13} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \overline{a}_{23} \\ \overline{a}_{31} & \overline{a}_{32} & \overline{a}_{33} \end{pmatrix}$$

Пример расчетов для a_{11} и a_{12}:

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2) = 1$$
$$a_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-5)) = 9$$

Посчитаем все $\overline{a}_{ij}$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 \\ -1 & 10 & -25 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix}$$

Продолжим вычисление обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \overline{A} = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 \\ -1 & 10 & -25 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} & \frac{-1}{19} & \frac{-3}{19} \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{11}{19} \\ \frac{-13}{19} & \frac{-25}{19} & \frac{-18}{19} \end{pmatrix}$$

Задание №2. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

Решение задания №2. Выразим матрицу X:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=E$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot E$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

Для этого решения необходима обратимость всех матриц, проверим это. Они квадратные, так что осталось только проверить определитель:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 3\cdot 1+(-2)\cdot(-1)\cdot 0+3\cdot 2\cdot(-2)-$$
$$-0\cdot 3\cdot 3-(-2)\cdot(-1)\cdot 1-1\cdot 2\cdot(-2)=-7$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 5\cdot 0+2\cdot 6\cdot 7+3\cdot 4\cdot 8-7\cdot 5\cdot 3-$$
$$-8\cdot 6\cdot 1-0\cdot 4\cdot 2=27$$

Обе матрицы обратимы. Посчитаем обратную матрицу (обозначим её за A) для нахождения решения матричного уравнения с помощью метода присоединенной матрицы:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -7\\ -2 & 1 & 7\\ -4 & 2 & 7\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\overline{A}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{7} & \frac{4}{7} & 1\\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & -1\\ \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & -1\end{pmatrix}$$

Тогда $X=A^{-1}$:

$$X=\begin{pmatrix}\frac{-1}{7} & \frac{4}{7} & 1\\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & -1\\ \frac{4}{7} & \frac{-2}{7} & -1\end{pmatrix}$$

Задание №3. Найти ранг матрицы при различных значениях параметра:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение задания №3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{-\lambda+12}{3} & \frac{-\lambda+30}{3} & \frac{-4\cdot\lambda+3}{3} \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{-\lambda+12}{3} & \frac{-\lambda+30}{3} & \frac{-4\cdot\lambda+3}{3} \\ 0 & \frac{20}{3} & \frac{50}{3} & \frac{5}{3} \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{-\lambda+12}{3} & \frac{-\lambda+30}{3} & \frac{-4\cdot\lambda+3}{3} \\ 0 & \frac{20}{3} & \frac{50}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{20}{3} & \frac{50}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{-\lambda+12}{3} & \frac{-\lambda+30}{3} & \frac{-4\cdot\lambda+3}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{20}{3} & \frac{50}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & \frac{-5\cdot\lambda}{4} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{20}{3} & \frac{50}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & \frac{-5\cdot\lambda}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем, что при $\lambda \neq 0$ ранг нашей матрицы равен 3, при $\lambda = 0$ ранг 2.

Задание №4. Исследовать систему и найти решение в зависимости от значения параметра:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = 9 \end{cases}$$

Решение задания №4. Перепишем систему в матричный вид, чтобы применить метод Гаусса, и найдем решение системы в зависимости от параметра.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & -\lambda & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & -\lambda & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 1 & -6 & -\lambda & 9 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -10 & -\lambda - 2 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -\lambda - 2 & 10 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -\lambda + 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При $\lambda \neq 8$, когда $\mathrm{Rank}\,(A|b) = \mathrm{Rank}\,(A)$, у нас одно решение:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -5x_2 - 5x_3 = 5 \\ (-\lambda + 8)x_3 = 0 \end{cases} \qquad x = (3,\ -1,\ 0)$$

При $\lambda = 8$, когда $\mathrm{Rank}\,(A|b) \neq \mathrm{Rank}\,(A)$, у нас бесконечно много решений:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -5x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c \\ -c \\ c \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Задание №5. Найти собственные значения и вектора для данной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение задания №5. Для нахождения собственных значений, а потом и собственных векторов, необходимо решить характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda+1)\cdot(-\lambda-7)\cdot(-\lambda+7) + (-3)\cdot 8\cdot 6 + 4\cdot 4\cdot(-7) -$$

$$-6\cdot(-\lambda-7)\cdot 4 - (-7)\cdot 8\cdot(-\lambda+1) - (-\lambda+7)\cdot 4\cdot(-3) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$$

Корни многочлена находится среди делителей свободного члена. Заметим, что при $\lambda = 3$ Получаем верное равенство. Поделим многочлен на $\lambda - 3$. Получим следующий многочлен:

$$(\lambda-3)(-a^2-2a-1) = 0$$
$$(\lambda-3)(a^2+2a+1) = 0$$
$$(\lambda-3)(a+1)^2 = 0$$
$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_{2,3} = -1$$

Собственные значения равны $\lambda_1 = 3$ с кратностью 1 и $\lambda_2 = -1$ с кратностью 2. Теперь найдем собственный вектор для $\lambda_1 = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -7-3 & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 7-3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -10 & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 0 \\ 6 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -16x_2 - 16x_3 = 0 \end{cases}$$

Её решение:

$$x = c\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Для собственного числа $\lambda_{2,3} = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+1 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -7+1 & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 7+1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & 8 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Её решение:

$$x = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$