Задание №1. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $(\widehat{a, b}) = \frac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении коэффициента α векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ окажутся перпендикулярными.

Решение задания №1. Для того, что вектора оказались перпендикулярными необходимо, чтобы скалярное произведение равнялось 0. То есть:

$$(\vec{p},\ \vec{q}) = 0 \ \Rightarrow\ (\alpha\vec{a} + 17\vec{b},\ 3\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

Дважды воспользуемся дистрибутивностью относительно сложения:

$$(\alpha\vec{a} + 17\vec{b},\ 3\vec{a} - \vec{b}) = (\alpha\vec{a},\ 3\vec{a} - \vec{b}) + (17\vec{b},\ 3\vec{a} - \vec{b}) = (\alpha\vec{a},\ 3\vec{a}) - (\alpha\vec{a},\ \vec{b}) + (17\vec{b},\ 3\vec{a}) - (17\vec{b},\ \vec{b}) = 0$$

Теперь посчитаем каждое скалярное произведение:

$$\begin{aligned}
&(\alpha\vec{a},\ 3\vec{a}) = 3\alpha \cdot (\vec{a}, \vec{a}) = 3\alpha \cdot (\vec{a}, \vec{a}) = 3\alpha \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{a, a}) = 3\alpha \cdot |\vec{a}|^2 \cdot 1 = 12\alpha \\
&(\alpha\vec{a},\ \vec{b}) = \alpha \cdot (\vec{a}, \vec{b}) = \alpha \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{a, b}\right) = 2 \cdot 5 \cdot \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -5\alpha \\
&(17\vec{b},\ 3\vec{a}) = 51(\vec{a}, \vec{b}) = 51 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -255 \\
&(17\vec{b}, \vec{b}) = 17 \cdot |\vec{b}|^2 = 17 \cdot 5^2 = 17 \cdot 25 = 425
\end{aligned}$$

Запишем получившиеся уравнение:

$$\begin{gathered}
(\alpha\vec{a},\ 3\vec{a}) - (\alpha\vec{a},\ \vec{b}) + (17\vec{b},\ 3\vec{a}) - (17\vec{b},\ \vec{b}) = 0 \\
12\alpha + 5\alpha - 255 - 425 = 0 \\
\alpha = \frac{255 + 425}{17} \\
\alpha = \frac{680}{17} \\
\alpha = 40
\end{gathered}$$

Ответ: $\alpha = 40$.

Задание №2. Пусть G - множество всех векторов-столбцов линейного пространства $\mathbb{R}^2$ с положительными элементами, то есть:

$$G = \{x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Проверить, является линейным пространством множество G, если операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \\ \vdots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha x = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ \vdots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix}$$

Решение задания №2. Будем проверять аксиомы линейного пространства. Начнем со сложения и его коммутативности ($a + b = b + a$):

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \\ \vdots \\ a_n \cdot b_n \end{pmatrix} \quad b + a = \begin{pmatrix} b_1 \cdot a_1 \\ b_2 \cdot a_2 \\ \vdots \\ b_n \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Пользуясь коммутативностью умножения, легко заметить что:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \\ \vdots \\ a_n \cdot b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cdot a_1 \\ b_2 \cdot a_2 \\ \vdots \\ b_n \cdot a_n \end{pmatrix} = b + a$$

Проверим ассоциативность:

$$(a + b) + c = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \\ \vdots \\ a_n \cdot b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \\ a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 \\ \vdots \\ a_n \cdot b_n \cdot c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \cdot c_1 \\ b_2 \cdot c_2 \\ \vdots \\ b_n \cdot c_n \end{pmatrix} = a + (b + c)$$

Нейтральным элементом в этом поле будет единичный вектор $\mathbf{0} = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Обратным элементом ($a + (-a) = 0$) будет вектор, состоящий из значений обратных к исходным ($a_n = a_n^{-1}$).

$$a + (-a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_1} \\ \frac{a_2}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Так как все элементы $a_i > 0$ у нас не возникнет проблемы с делением на 0.

Теперь проверим свойства умножения. Коммутативность и ассоциативность очевидна. Нейтральным элементом ($a \cdot 1 = a$) относительно умножения будет 1:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \vdots \\ a_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Обратным элементом для ненулевого элемента будет 0:

$$0 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \\ \vdots \\ a_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Проверим дистрибутивность умножения на число относительно сложения ($a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$):

$$a\cdot(b+c) = a\cdot\begin{pmatrix} b_1\cdot c_1 \\ b_2\cdot c_2 \\ \vdots \\ b_n\cdot c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_1\cdot c_1)^a \\ (b_2\cdot c_2)^a \\ \vdots \\ (b_n\cdot c_n)^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^a\cdot c_1^a \\ b_2^a\cdot c_2^a \\ \vdots \\ b_n^a\cdot c_n^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^a \\ b_2^a \\ \vdots \\ b_n^a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1^a \\ c_2^a \\ \vdots \\ c_n^a \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a\cdot b+a\cdot c$$

Задание №3. Используя определение, доказать, что для любых векторов x, y, z и чисел α, β, γ векторы $\alpha x - \beta y$, $\gamma y - \alpha z$, $\beta z - \gamma x$ линейно зависимы.

Решение задания №3. Воспользуемся определением линейной зависимости - должен существовать такой набор чисел a_1, a_2, a_3 не равных 0 одновременно, что: $a_1(\alpha x - \beta y) + a_2(\gamma y - \alpha z) + a_3(\beta z - \gamma x) = 0$.

$$a_1(\alpha x - \beta y) + a_2(\gamma y - \alpha z) + a_3(\beta z - \gamma x) = 0$$

$$-\frac{a_1}{a_3}(\alpha x - \beta y) - \frac{a_2}{a_3}(\gamma y - \alpha z) = \beta z - \gamma x$$

Переобозначим коэффициенты: $a_1 = -\dfrac{a_1}{a_3},\ a_2 = -\dfrac{a_2}{a_3}$

$$a_1(\alpha x - \beta y) + a_2(\gamma y - \alpha z) = \beta z - \gamma x$$

Заметим, что при $a_1 = -\dfrac{\gamma}{\alpha},\ a_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ левая и правя часть равны

$$-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot(\alpha x - \beta y) - \frac{\beta}{\alpha}\cdot(\gamma y - \alpha z) = \beta z - \gamma x$$

$$-\gamma x + \frac{\gamma\cdot\beta}{\alpha}y - \frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha}y + \beta z = \beta z - \gamma x$$

$$\beta z - \gamma x = \beta z - \gamma x$$

$$0 = 0$$

Таким образом при $a_1 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, $a_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $a_3 = 1$ вектор $\beta z - \gamma x$ можно получить из векторов $\alpha x - \beta y$ и $\gamma y - \alpha z$. Таким образом вектора линейно зависимы.

Задание №4. Проверить, является ли система векторов $e1$, $e2$, $e3$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, и найти координаты вектора x в этом базисе. По известному координатному вектору y_e найти вектор y;

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad y_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решение задания №4. Для того чтобы понять является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно привести матрицу, состоящую из базисных векторов, к треугольному виду. Если полученная матрица не будет содержать нулевых строк, то вектора будут линейно независимы, как следствие, система векторов e_1, e_2, e_3 будет являться базисом в пространстве $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица не содержит нулевых строк, получаем, что система система векторов e_1, e_2, e_3 является базисом в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Получим координаты вектора x в базисе, состоящим из векторов e_1, e_2, e_3, для этого решим СЛАУ $Ay = x$, где A - матрица из векторов e_1, e_2, e_3, x - вектор, данный по условию, y - вектор x в базисе e_1, e_2, e_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Получим СЛАУ:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ \qquad\quad 4x_2 - 3x_3 = -7 \\ \qquad\qquad\quad -3x_3 = -3 \end{cases}$$

Тогда вектор x в новом базисе будет равен $(0, -1, 1)$.

Получим вектор y, умножив матрицу A на вектор y_e $(Ay_e = y)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 + (-3) \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Задание №5. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства V, заданного следующим образом:

$$\text{Пространство многочленов } p(x) \in \mathbb{P}_4 \text{ таких, что } p(1) + p(-1) = 0$$

Решение задания №5. Распишем условие $p(1) + p(-1) = 0$:

$$p(1) + p(-1) = 0$$
$$a(1)^4 + b(1)^3 + c(1)^2 + d(1) + e + a(-1)^4 + b(-1)^3 + c(-1)^2 + d(-1) + e = 0$$
$$a + b + c + d + e + a - b + c - d + e = 0$$
$$2a + 2c + 2e = 0$$
$$a + c + e = 0$$
$$a = -c - e$$

Таким образом все многочлены линейного пространства V представимы в виде:

$$p(x) = -(c + e)x^4 + bx^3 + cx^2 + dt + e$$
$$p(x) = -cx^4 - ex^4 + bx^3 + cx^2 + dt + e$$
$$p(x) = bx^3 + c(x^2 - x^4) + dt + e(1 - x^4)$$

Теперь невооруженным глазом виден базис этого линейного пространства:

$$e_1 = 1 - x^4$$
$$e_2 = x$$
$$e_3 = x^2 - x^4$$
$$e_4 = x^3$$

Соотвественно, размерность этого линейного пространства будет равна 4.