

V351

# Fourieranalyse und Synthese

Robin Pelkner  
robin.pelkner@tu-dortmund.de

Joshua Althüser  
joshua.althueser@tu-dortmund.de

Durchführung: 18.12.2018

Abgabe: 08.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3 Durchführung</b>	<b>4</b>
3.1 Vorbereitung - Bestimmung der Fourierkoeffizienten . . . . .	4
3.2 Rechteckschwinung . . . . .	4
3.3 Sägezahnschwingung . . . . .	4
3.4 Dreieckschwingung . . . . .	5
3.5 Fourieranalyse . . . . .	5
3.6 Fouriersynthese . . . . .	5
<b>4 Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1 Fourier-Analyse . . . . .	6
4.2 Fourier-Synthese . . . . .	10
<b>5 Diskussion</b>	<b>12</b>
<b>Literatur</b>	<b>12</b>

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden verschiedene periodische Funktionen in ihre Fourierkoeffizienten zerlegt. Diese werden genutzt, um eine Fouriersynthese durchzuführen.

## 2 Theorie

$$f(t) = f(t + T).$$

Für eine solche Funktion besagt das Fouriertheorem, dass sie in Terme von Sinus und Kosinus zerlegt werden kann. Dabei ist die Fourierreihe mit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right). \quad (1)$$

definiert. Diese Reihe ist gleichmäßig konvergent, wenn  $f(t)$  eine periodische Funktion mit der Periodendauer  $T$  ist. Dann gilt für die Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad (2)$$

und

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad (3)$$

Aus der Definition der Fourierreihe lassen sich ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz  $\nu_1$  erkennen. Diese sind die Frequenzen zu den jeweiligen Oberschwingungen. Des Weiteren gibt es in (1) nur Phasenverschiebungen von  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  und  $\frac{3\pi}{2}$ . Werden die Amplituden  $a_k$  beziehungsweise  $b_k$  von einer periodischen Funktion gegen die zugehörigen Frequenzen aufgetragen ergibt sich ein Linienspektrum, während eine nicht periodische Funktion ein kontinuierliches Spektrum liefert. Eine Fourieranalyse lässt sich auch mit nicht stetigen periodischen Funktionen durchführen. Dabei entsteht im Graphen der Fourierreihe an den Unstetigkeitsstellen eine Überschwingung. Diese wird als Gibb'sches Phänomen bezeichnet. Die Größe bleibt selbst bei  $n \rightarrow \infty$  konstant, jedoch wird die Breite des Überschwings geringer.

Die Fouriertransformation liefert dabei das Linienspektrum. Es gilt dabei

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\nu t} dt. \quad (4)$$

In der Praxis kann allerdings nicht über einen unendlichen Zeitraum integriert werden, weshalb diese Funktionen nicht periodisch sind. Dadurch entstehen kleine Nebenmaxima und es entstehen keine  $\delta$ -Peaks, sondern endlich breite Linien an den entsprechenden Stellen.

### 3 Durchführung

#### 3.1 Vorbereitung - Bestimmung der Fourierkoeffizienten

Zur Vorbereitung auf das Experiment sind die Fourierkoeffizienten von drei Schwingungsformen, einer Rechteck-, einer Sägezahn- und einer Dreieck, zu bestimmen. Dabei ist es von Vorteil die Schwingungen als gerade oder ungerade Funktionen zu definieren, so dass Koeffizienten wegfallen. Die Berechnung dieser erfolgt jeweils über Gleichung (2) und Gleichung (3), woraus sich dann nach Gleichung (1) jeweils die zugehörige Fourierreihe berechnet.

#### 3.2 Rechteckschwinung

Die Rechteckschwinung wird als

$$g(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 0 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (5)$$

definiert. Die Fourierkoeffizienten dieser Funktion sind

$$a_n = 0$$

und

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Die zugehörige Fourierreihe ist daher

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(n \frac{2\pi}{T} t), \quad (6)$$

wobei  $n$  nur ungerade Werte annimmt.

#### 3.3 Sägezahnschwingung

Die Funktion, die die Sägezahnschwingung beschreibt lautet:

$$g(t) = \begin{cases} |t| & -T \leq t < T \\ 0 & t = T \end{cases}. \quad (7)$$

Die Fourierkoeffizienten dieser Funktion sind

$$a_n = \frac{2T}{\pi n} \cos(\pi n)$$

und

$$b_n = 0.$$

Daher ist die zugehörige Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2T}{\pi n} \cos(\frac{2\pi n}{T} t). \quad (8)$$

### 3.4 Dreieckschwingung

Die Funktion zur Beschreibung der Dreieckschwingung ist definiert als

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{2A}{T} & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ \frac{2A}{T} & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}, \quad (9)$$

wobei  $A$  die Amplitude der Schwingung ist. Die Fourierkoeffizienten zu dieser Funktion sind

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{8A}{(\pi n)^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$b_n = 0.$$

Die dazugehörige Fourierreihe ist daher

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} -\frac{8A}{(\pi n)^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right), \quad (10)$$

wobei  $n$  nur ungerade Werte annimmt.

### 3.5 Fourieranalyse

In diesem Versuchsteil wird ein Oszilloskop an einen Funktionsgenerator angeschlossen. Am Funktionsgenerator werden nacheinander eine Rechteck-, Dreieck- und Sägezahn-schwingung eingestellt. Das Oszilloskop führt eine Fourieranalyse durch und zeigt ein Frequenzspektrum. Mit dem Cursor werden die Amplituden abgelesen und anschließend notiert.

### 3.6 Fouriersynthese

Zunächst werden zwei Ausgänge eines Oberwellengenerator an das Oszilloskop angeschlossen, welches in den XY-Betrieb umgeschaltet wird. Die so entstehenden Lissajous-Figuren werden genutzt, um die beiden Signale phasengleich zu schalten. Diese Prozedur wird mit allen Ausgängen durchgeführt. Dabei werden die Amplituden maximal eingestellt, um genaue Einstellungen vornehmen zu können. Im Weiteren werden die Amplituden so eingestellt, dass sie dem Proportionalitätsfaktoren der zu synthetisierenden Schwingungen passen. Dieser wird zuvor in der Vorbereitung berechnet. Für diese Konfiguration wird ein Voltmeter genutzt.

Das Oszilloskop wird nun erneut in den XT-Betrieb umgeschaltet und die einzelnen Oberwellen angeschlossen. Die Phase wird mithilfe von zwei Schaltern um  $90^\circ$  beziehungsweise  $180^\circ$  verschoben, bis die angezeigte Schwingungen die jeweils Gewünschte gut approximiert.

## 4 Auswertung

### 4.1 Fourier-Analyse

Die gemessenen Amplituden werden auf die Amplitude der ersten Oberwelle normiert. Gemessene Amplituden, sowie die Normierung dieser ist in Tabelle 1 für alle drei Schwingungsformen zu sehen. Die Normierungen werden doppellogarithmisch gegen die Nummer

**Tabelle 1:** Amplituden, sowie deren Normierung auf die erste Oberwelle

n	Rechteck		Sägezahn		Dreieck	
	$U_n$ / mV	$\frac{U_n}{U_1}$	$U_n$ / mV	$\frac{U_n}{U_1}$	$U_n$ / mV	$\frac{U_n}{U_1}$
1	2000	1.000	2160	1.000	2800	1.000
2	712	0.356	1030	0.477	272	0.097
3	432	0.216	656	0.304	102	0.036
4	288	0.144	552	0.256	50	0.018
5	216	0.108	448	0.207	28	0.010
6	200	0.100	384	0.178	22	0.008
7	168	0.084	312	0.144		
8	144	0.072	264	0.122		
9	112	0.056	248	0.115		
10	104	0.052	232	0.107		

der Oberwellen aufgetragen, worüber anschließend eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt wird. Dies ist nötig um die Genauigkeit der Messung hinsichtlich des Abfalls der Oberwellenamplituden zu überprüfen, da diese mit dem Faktor  $\frac{1}{n}$  beziehungsweise  $\frac{1}{n^2}$  bei der Dreieckschwinung abnehmen sollen. Durch eine doppellogarithmische Auftragung und anschließender Bestimmung der Steigung der Ausgleichsgeraden kann diese mit dem theoretischen Faktor von  $-1$  bei der Rechteck - und Sägezahnschwinung und  $-2$  bei der Dreieckschwinung verglichen werden. Die Steigung der errechneten Geraden soll bestimmt werden. Bei allen Schwingungsformen wird eine Ausgleichsrechnung der Form

$$y = a \cdot x + b. \quad (11)$$

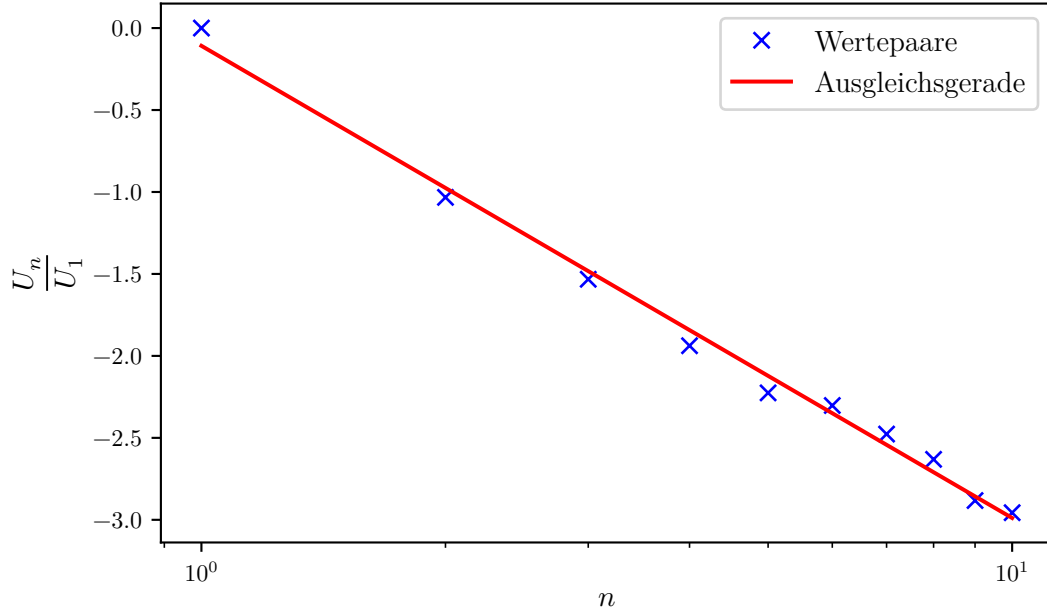
durchgeführt, wobei  $y$  die Normierung der Amplituden  $\frac{U_n}{U_1}$  ist und  $x$  die Nummer der Oberwellen  $n$ . Die Steigung  $a$  der Ausgleichsgerade errechnet sich über

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (12)$$

wobei  $N$  die Gesamtanzahl der verwendeten Oberwellen ist. Die aufgetragenen Werte sowie die Ausgleichsgerade zur Rechteckschwinung ist in Abbildung 1 zu sehen. Die Steigung der linearen Ausgleichsgerade zur Rechteckschwinung beträgt nach Gleichung (12)

$$a = (-1.251 \pm 0.036).$$

Bei der Sägezahnsschwingung sind die entsprechenden Werte aus Tabelle 1, sowie die



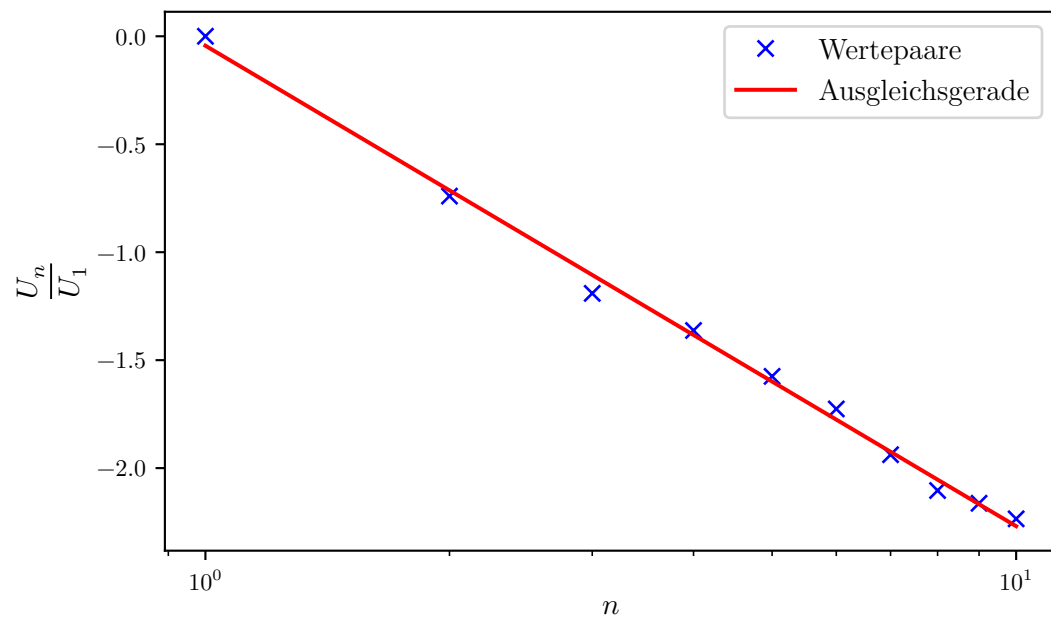
**Abbildung 1:** Normierungen der Amplituden der Rechteckschwingung doppellogarithmisch gegen die Nummer der Oberwellen aufgetragen und Ausgleichsgerade.

zugehörige Ausgleichsgerade in Abbildung 2 zu sehen. Die Steigung der Ausgleichsgerade beträgt mit Gleichung (12)

$$a = (-0.966 \pm 0.021).$$

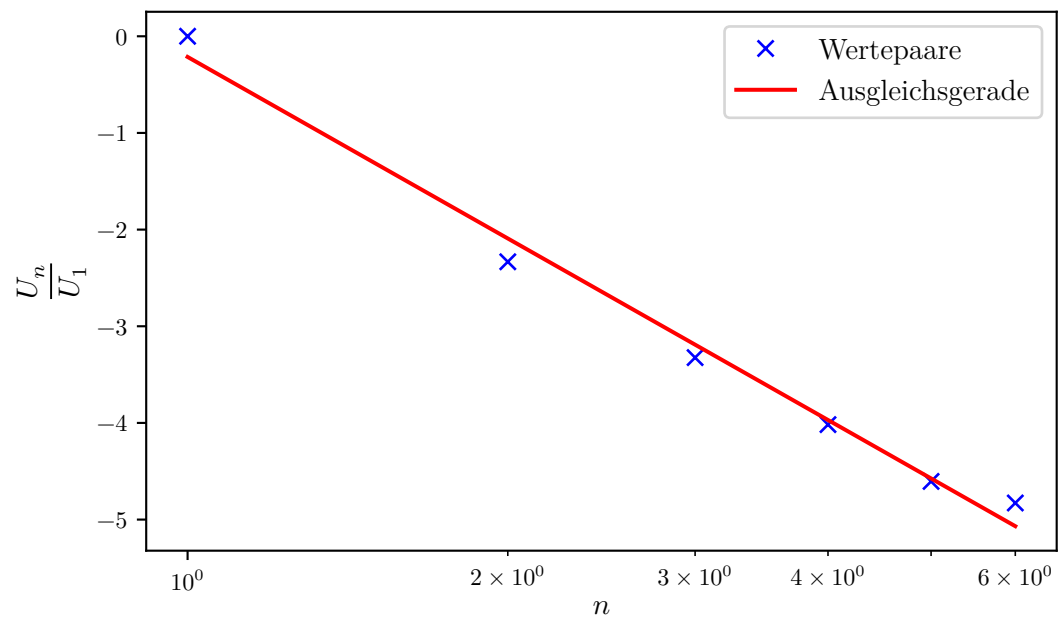
Statt einer Anzahl von  $N = 10$  Oberwellen, liegen hier lediglich  $N = 6$  Oberwellen vor (siehe Abschnitt 5). Die Werte werden entsprechend wieder aus Tabelle 1 entnommen und doppellogarithmisch gegen die Anzahl der Oberwellen aufgetragen, worüber wieder eine Ausgleichsgerade gebildet wird. Dies ist in Abbildung 3 zu sehen. Die Steigung der Ausgleichsgerade beträgt

$$a = (-2.709 \pm 0.144).$$



**Abbildung 2:** Normierungen der Amplituden der Sägezahnschwinung doppellogarithmisch gegen die Nummer der Oberwellen aufgetragen und Ausgleichsgerade.





**Abbildung 3:** Normierungen der Amplituden der Dreieckschwinung doppellogarithmisch gegen die Nummer der Oberwellen aufgetragen und Ausgleichsgerade.

## 4.2 Fourier-Synthese

Die zur Fouriersynthese verwendeten Amplituden sind in Tabelle 2 zu sehen. Bei der

**Tabelle 2:** Eingestellte Amplituden zur Fouriersynthese

Nummer der Oberwelle	Eingestellte Amplituden $U$ / mV	
	Rechteck und Sägezahn	Dreieck
1	709.00	712.0
2	354.50	178.0
3	236.30	79.1
4	177.25	44.5
5	141.80	
6	118.16	
7	101.28	
8	88.625	
9	78.80	
10	70.90	

Synthese der Rechteckschwingung werden die entsprechenden Werte aus Tabelle 2 entnommen, wobei in die Rechteckschwingung nur Oberwellen mit ungerader Nummer einwirken; Oberwellen mit gerader Nummer sind bei der Rechteckschwingung zu vernachlässigen. Die synthetisierte Funktion ist in Abbildung 4 dargestellt. Diese lässt sich gut als Darstellung einer Rechteckfunktion identifizieren, wobei an den Extrema der Rechteckfunktion weitere kleinere Minima und Maxima zu erkennen sind. Des Weiteren sind diese kleineren Minima und Maxima nicht konstant auf einer Höhe, sondern sind an den Maxima der Rechteckfunktion leicht fallend und an den Minima der Rechteckfunktion leicht steigend. Bei der Synthese der Sägezahnschwingung werden dieselben Koeffizienten wie bei der Synthese der Rechteckschwingung verwendet, da die Koeffizienten beider Schwingungsformen mit dem selben Faktor  $\frac{1}{n}$  abfallen. Hier wirken allerdings alle entsprechende Werte aus Tabelle 2 ein. Die synthetisierte Sägezahnfunktion ist in Abbildung 5 zu sehen. Sie zeigt Nebenamplituden verschiedener Größe an der linken Flanke einer Amplitude. An der rechten Flanke sind ebenfalls kleinere Ungenauigkeiten auszumachen, welche allerdings in Relation dazu sehr klein ausfallen.

Zur Synthese der Dreieckschwingung werden die entsprechenden Amplituden aus Tabelle 2 verwendet. Die so synthetisierte Dreieckschwingung ist in Abbildung 6 zu sehen. Die Amplituden dieser sind sehr gut auszumachen. Lediglich eine Verschiebung in der linken Flanke, sowie eine eher gewölbte rechte Flanke sind hier als Ungenauigkeiten auszumachen.

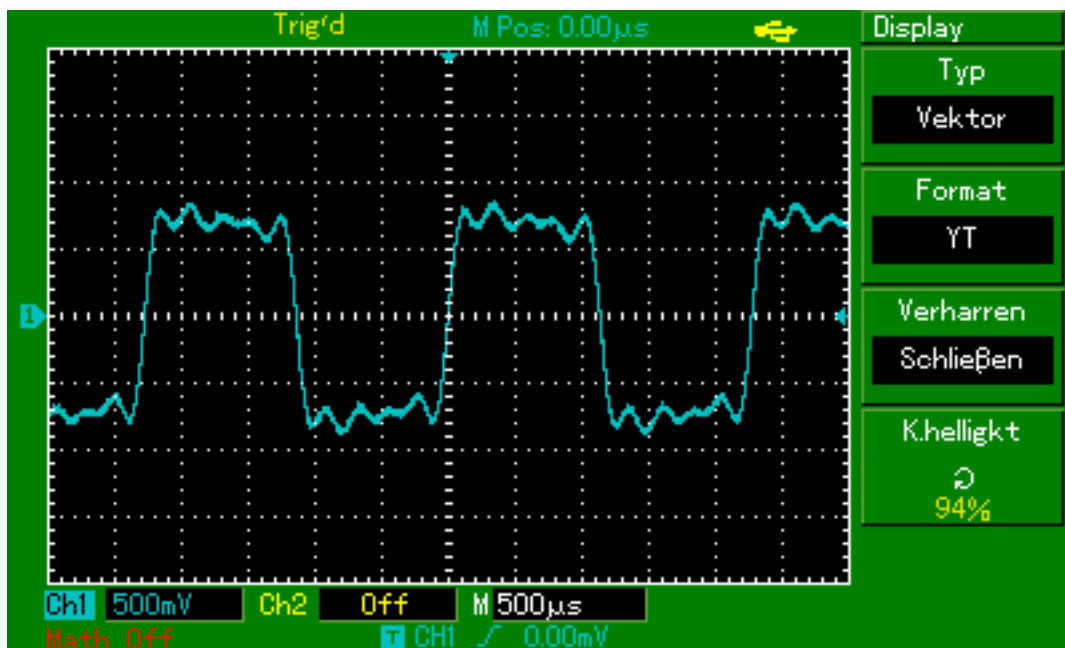


Abbildung 4: Synthetisierte Rechteckschwingung.

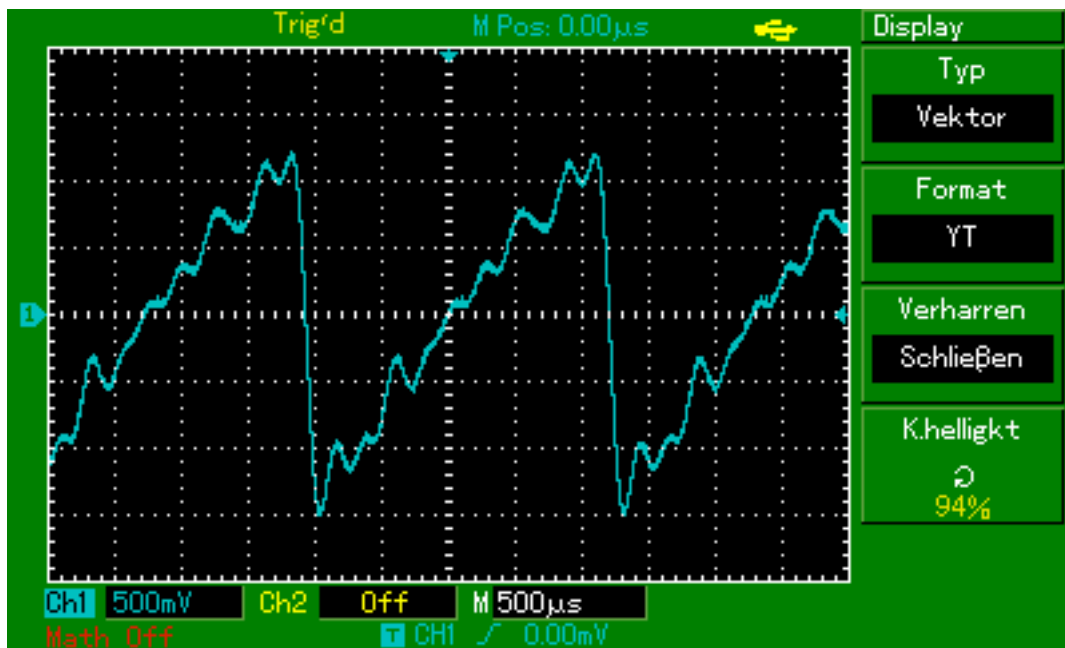


Abbildung 5: Synthetisierte Sägezahnschwingung.

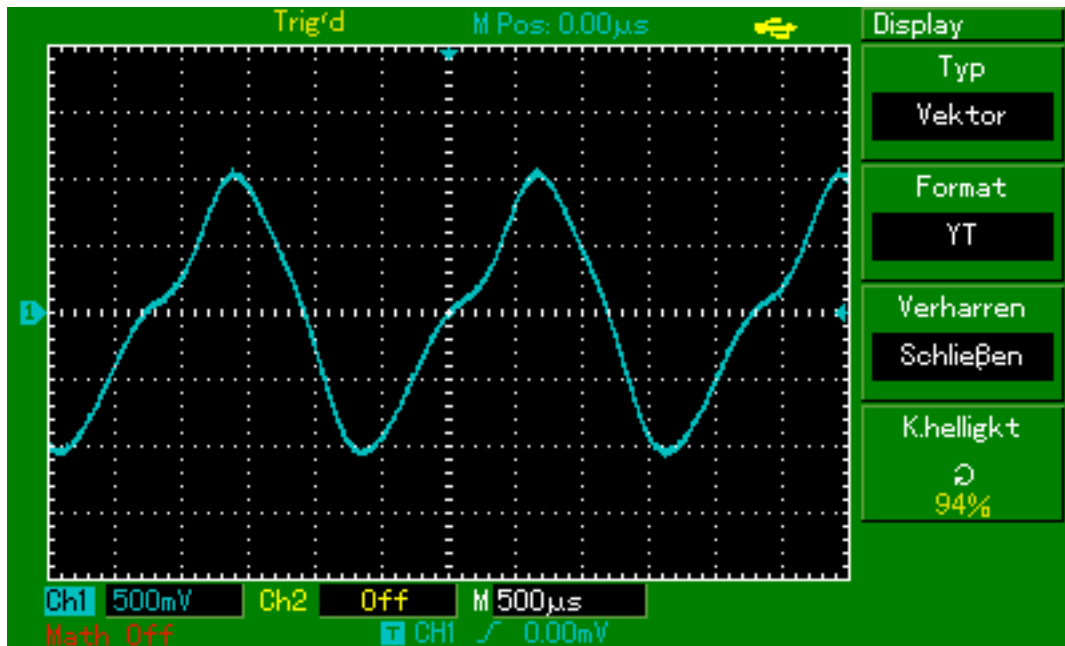


Abbildung 6: Synthetisierte Dreieckschwingung.

## 5 Diskussion

Bei der Fourieranalyse sind die Steigungen der drei Ausgleichsgeraden näher zu betrachten, insbesondere ihr Vergleich zu den Theoriewerten. Bei der Rechteckschwingung, sowie bei der Sägezahnswingung soll eine Steigung der Ausgleichsgeraden von  $-1$ ; bei der Dreieckschwingung eine Steigung von  $-2$ . Die Steigungen der Geraden mit den relativen Abweichungen von den Theoriewerten sind:

$$a_{\text{Rechteck}} = (-1.251 \pm 0.036)$$

Abweichung: 20.06%

$$a_{\text{Sägezahn}} = (-0.966 \pm 0.021)$$

Abweichung:  $-3.52\%$

$$a_{\text{Dreieck}} = (-2.709 \pm 0.144)$$

Abweichung: 26.17%

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch zur Fourier-Analyse und Synthese*. 2018.