Modelado del Sistema Masa–Resorte–Amortiguador (MRA)

1. Introducción

El objetivo de este documento es desarrollar, paso a paso y desde principios físicos fundamentales, la ecuación diferencial ordinaria (EDO) que describe el comportamiento dinámico del sistema Masa–Resorte–Amortiguador (MRA), siguiendo el análisis clásico de fuerzas y equilibrio.

2. Descripción del sistema

Se considera un sistema mecánico compuesto por:

- una masa m,
- un resorte lineal con constante elástica k,
- un amortiguador viscoso con coeficiente b.

El sistema se encuentra dispuesto verticalmente y el movimiento ocurre en una sola dimensión.

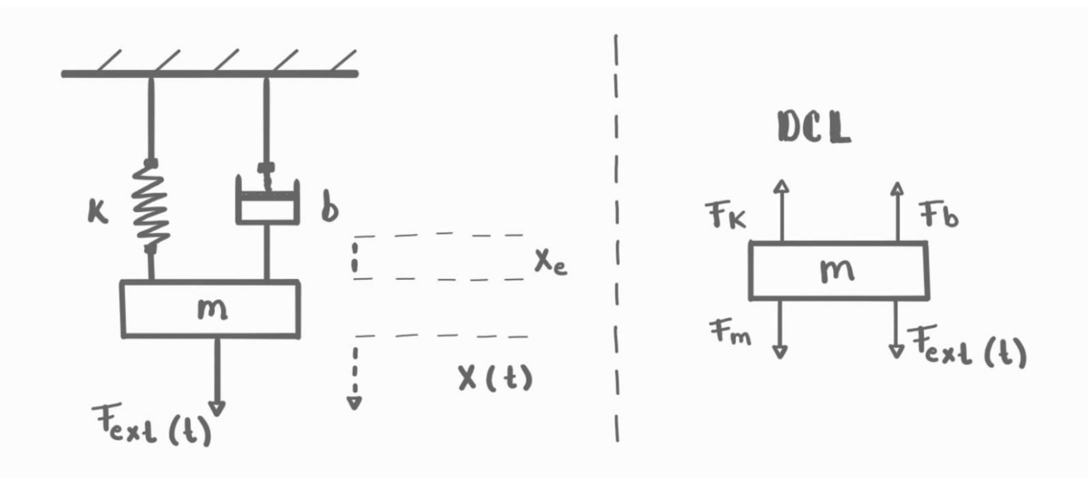

Figura 1: Sistema masa–resorte–amortiguador y diagrama de cuerpo libre.

3. Variable de estado y convención de signos

Se define como variable de estado:

$$x(t) = \text{posición vertical de la masa respecto a la posición natural del resorte.}$$

Se adopta la convención:

- el eje positivo apunta hacia abajo,
- $x(t) > 0$ indica desplazamiento descendente,
- x_e es el desplazamiento estático debido al peso.

4. Relaciones cinemáticas

La velocidad y aceleración se definen como:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \qquad a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

5. Análisis de fuerzas

Sobre la masa m actúan las siguientes fuerzas:

5.1. Fuerza gravitacional

$$F_g = mg$$

5.2. Fuerza del resorte

De acuerdo con la ley de Hooke:

$$F_k = -k\big(x_e + x(t)\big)$$

donde x_e es el alargamiento estático del resorte debido al peso.

5.3. Fuerza del amortiguador

$$F_b = -b\,\dot{x}(t)$$

5.4. Fuerza externa (opcional)

$$F_{\text{ext}}(t)$$

6. Ley fundamental de la dinámica

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F = m\ddot{x}(t)$$

Sustituyendo las fuerzas:

$$m\ddot{x}(t) = -k\big(x_e + x(t)\big) - b\dot{x}(t) + mg + F_{\text{ext}}(t)$$

Reordenando:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = mg - kx_e + F_{\text{ext}}(t)$$

7. Análisis en equilibrio estático

En equilibrio estático ($F_{\text{ext}}(t) = 0$):

$$x(t) = 0, \qquad \dot{x} = 0, \qquad \ddot{x} = 0$$

Por lo tanto:

$$mg = kx_e \quad \Rightarrow \quad x_e = \frac{mg}{k}$$

Esto indica que el peso se equilibra con el alargamiento estático del resorte.

8. Dinámica fuera del equilibrio

Sustituyendo $kx_e = mg$ en la ecuación dinámica:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F_{\text{ext}}(t)$$

Esta ecuación describe el comportamiento dinámico del sistema fuera del equilibrio.

9. Caso homogéneo (sin fuerza externa)

Si $F_{\text{ext}}(t) = 0$:

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0}$$

Esta es la ecuación del sistema libre.

10. Clasificación de la ecuación diferencial

La ecuación obtenida es:

- una ecuación diferencial ordinaria,
- de segundo orden,
- lineal,
- con coeficientes constantes,
- homogénea (si $F_{\text{ext}}(t) = 0$) o no homogénea (si $F_{\text{ext}}(t) \neq 0$).

11. Condiciones iniciales

Al ser una EDO de segundo orden, se requieren dos condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

12. Unidades de los parámetros

$$[m] = \text{kg}, \qquad [k] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}, \qquad [b] = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

13. Analogía con el sistema RLC

El sistema MRA presenta una analogía directa con un circuito RLC en serie:

- la masa m es análoga al inductor L,
- el amortiguador b es análogo a la resistencia R,
- el resorte k es análogo al inverso de la capacitancia $1/C$,
- una fuerza externa $F(t)$ es análoga a una fuente de voltaje $E(t)$,
- el desplazamiento $x(t)$ es análogo a la carga $q(t)$,
- la velocidad $\dot{x}(t)$ es análoga a la corriente $i(t)$.

14. Conclusión

Se ha desarrollado de forma sistemática el modelo dinámico del sistema masa–resorte–amortiguador, partiendo del análisis de fuerzas, el equilibrio estático y la dinámica fuera del equilibrio.

La ecuación obtenida constituye la base para simulación, control y para su uso en metodologías modernas como las *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs).