使用双四元数进行手眼校准

Abstract

要将安装在机械链路上的传感器进行的测量与机器人的坐标系相关联，我们必须首先估计这两个坐标系之间的转换。已经针对这种所谓的手眼校准提出了许多算法，但是它们没有以统一的方式处理相对位置和方向。在本文中，我们介绍了双四元数的使用，它们是螺丝的代数形式。然后，我们说明如何使用双四元数乘积编写线转换。通过代数证明，如果将摄像机和电机的转换视为螺钉，则只有螺钉轴的线系数与手眼校准有关。双四元数参数化为使用奇异值分解的手眼旋转和平移提供了新的同步解决方案。在手眼信息用于立体声重建以及相机定位中，直接评估了真实世界的性能。实际和综合实验均显示该方法优于其他两种建议的方法。

1. Introduction

手眼校准是对机器人机械手和牢固安装在机械手上的摄像头之间的相对位置和方向的计算。这个问题还涉及所有牢固地安装在机械连杆上的传感器，例如安装在具有机械自由度的双目头上的摄像头以及安装在车辆上的摄像头。尽管术语“传感器-执行器校准”实际上是更合适的是，在本文全文中，我们将使用更为知名的术语“手眼校准”。

在许多感测动作任务中需要手眼变换。使用安装在抓手或车辆上的摄像机，我们可以估计要抓取或到达的目标在摄像机坐标中的位置。但是，控制命令只能在抓具或车辆的坐标系中表示。即使在摄像机坐标中给出了所需的控制标准，我们也必须知道机器人运动在摄像机框架中的作用是什么。

第二个任务组是将传感器放置在所需位置。我们可以通过将安装在抓具上的摄像头放置在共享同一视场的多个姿势上来实现立体重建。但是，要重建3D位置，我们必须从相机坐标系中知道相对方向。但是我们知道的唯一变换是在机器人坐标中。将相机安装在双筒望远镜头上也是如此。由于摄像机是手动安装的，因此必须进行手眼校准才能使摄像机坐标系与倾斜度-收敛链接对齐。

描述手眼校准的通常方法是借助均匀变换矩阵。我们用X表示从摄像机到抓取器的变换，用Ai表示从摄像机到世界坐标系的变换矩阵，用Bi表示从第i个姿势的从机器人基座到抓取器的变换矩阵。图1说明了手眼校准的一种应用，它包括一个安装在夹具上的摄像头。相机世界变换Ai是通过外部校准技术获得的。从关节角度读数中的直接运动学链给出了机器人到抓地机的变换Bi。我们看到，对于一个姿势，我们有两个未知的变换：从机器人到世界，以及从摄像机到抓取器X。要消除从世界到世界的变换，我们需要一个动作（两个姿势）来产生Shiu和Ahmad（1989）以及Tsai和Lenz（1989）首先提出的著名手眼方程：

这里和。由于每个齐次变换矩阵都具有以下形式：

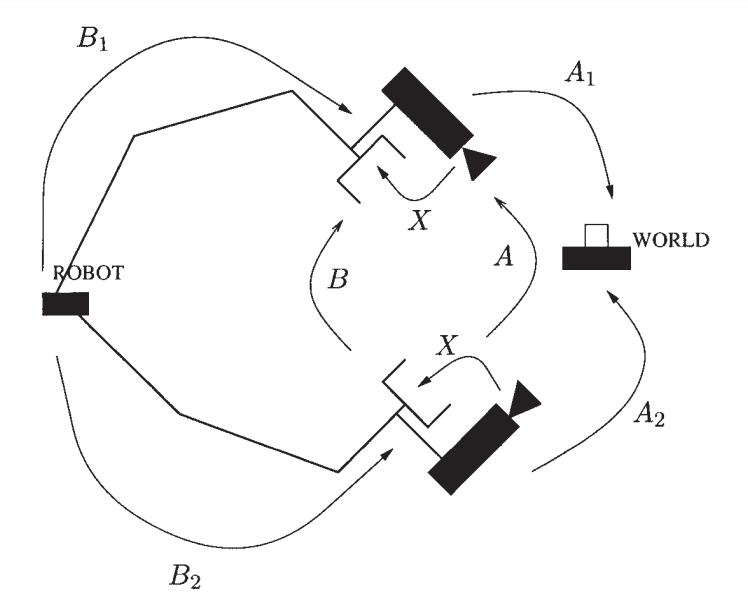


图1.姿势1和姿势2的不同帧之间的转换

从等式 （1）遵循一个矩阵和一个矢量方程:

大多数方法都将等式（2）中的旋转估计与平移估计解耦，后者紧跟前者。为了解决该问题，至少需要进行两次包含不平行旋转轴的运动的旋转（Tsai和Lenz 1989）。已经提出了几种从等式（2）估计的方法：使用旋转轴和角度（Tsai和Lenz 1989;Shiu和Ahmad 1989），四元数（Chou和Kamel 1991）和规范矩阵表示（Li和Betsis 1995）（Wang 1992提供了一项调查）。

Horaud和Dornaika（1995）强调了这样一个事实，即给定从世界到像素坐标的投影矩阵，外部校准矩阵的计算是一个不稳定的问题。因此，他们提出了以下替代方案：假设固有参数C的矩阵在运动过程中保持恒定。然后投影矩阵读取:

我们引入和。让我们假设一个外部校准是已知的，并替换。现在未知的是世界抓手变换Y。可以将等式（1）重写为:

这只是一个新的齐次变换方程但是，如果我们根据投影参数编写，则会发现独立于固有参数C:

因此，在适当改变未知数的情况下，我们获得了方程（5），该方程可以由所有解决方程（1）的方法以及本文稍后提出的方法解决。

Horaud和Dornaika（1995）率先对旋转四元数和平移矢量应用了同时非线性最小化。然而，Chen（1991）提出了以几何方式同时考虑旋转和平移的第一个考虑，他首先在手眼校准中引入了螺丝理论。

在本文中，我们介绍了一个螺钉的代数实体：单位对四元数。对偶四元数是对偶四元数的扩展，它用对偶数表示（Study 1891；Blaschke 1960），最早是由Clifford（1873）提出的。在机器人技术（Walker 1988；Gu和Luh 1987；Funda和Paul 1990）以及计算机视觉（Walker，Shao和Volz 1991；Phong等人1993）中，使用了双数和双四元数。基于对偶四元数，我们证明:

1.手眼的变换与摄像机的角度和俯仰角以及手部运动无关，并且仅取决于其螺旋轴的线参数-Chen（1991）用几何方法证明了这一结果；和

2.可以使用奇异值分解（SVD）同时恢复未知的螺杆参数，包括旋转和平移参数

这是文献中的第一个同时解决旋转和平移问题而没有非线性最小化的算法。该算法已实现，并与分别求解R和的两步算法进行了比较，显示了其优越的性能。真实数据的性能直接在应用程序中进行测试。我们使用活动摄像机的电机编码器读数来判断获得的关于立体重构任务的手眼信息的质量:

下一节将说明双数和双四元数的性质。然后，我们描述如何用对偶四元数来表示线变换，以及如何从表示中获得对偶四元数。给出四元数对数作为螺丝参数的函数，然后我们证明了独立性结果。我们通过SVD描述了我们的解决方案，并给出了实验结果.

1. Dual Quaternion

本节简要概述了双四元数。首先说明四元数，然后对双数进行简短描述。最后介绍了双四元数及其相关性质。

2.1. Quaternions

四元数由汉密尔顿（Blaschke 1960）发明，是复数到的扩展。在其他形式主义中，四元数的一种定义是对，其中s∈R和。以下操作:

其中λ∈R使四元数成为实数上的向量空间（我们称H为零）（零元素（0，0））。四元数之间的乘法，定义为:

具有单位元素（1，0），并且是关联的，但不是可交换的。因此，四元数是一个关联代数，并且由于它们不包含零除数，因此它们是一个除法代数。四元数的范数定义为其中是共轭四元数。仅涉及乘法运算的H子组包括范数等于1的单位四元数。对于以角度θ绕轴旋转（SO（3）的元素），存在一个对应的单位四元数，将向量映射到向量。

2.2. Dual Numbers

对数由Clifford（1873）发明，并由Study（1891）在上个世纪进一步发展。双数字定义为:

运算加法和乘法使它们成为称为的阿贝尔环，而不是字段，因为只有实数不为零的双数拥有逆元素。一个重要的属性与具有双参数的函数的派生关联。由于的所有方次幂都消失，因此泰勒展开式产生

对偶向量在中定义；通过加法运算和带有双数的外部乘法运算，它们在环上形成了一个模块。具有正交实部和对偶部分的对偶矢量是中线的表示，称为普吕克坐标。真正的部分是直线的方向，而对偶的部分是其弯矩。两个这样的对偶向量之间的内积等于对角的余弦，它具有很好的几何解释：θ是两条间隔线之间的夹角，而d是它们之间的距离。

2.3. Dual Quaternions

对偶四元数的定义与实四元数类似，如是对偶数而是对偶向量。这些运算具有相同的定义：

前两个方程（12）和（13）使双四元数成为模。加法（12）和乘法（14）使它们成为具有单位元素（1、0）的非阿贝尔环。所有这三个运算使它们成为一个关联代数。对偶向量可以写成对四元数（0，），并且它们的相乘具有不错的性质

对偶四元数的范数定义为，是具有正实部的对偶数。如果范数具有不变的实部，则对偶四元数具有反。如果范数等于1，则存在一个逆元素，并且该元素等于共轭四元数。如果，则可以写出统一条件:

正如我们将在以下单元中描述的那样，对偶四元数表示线的一般运动，对于实四元数，对点的旋转有效的表达式在对偶四元数的情况下对于线的一般运动也适用。

1. 单位双四元数的线转换

众所周知，点到点的旋转可以用单位四元数q表示，即乘积。这种形式允许旋转的级联由简单的四元数乘积表示。不幸的是，对于包含平移的一般刚性变换，不存在这种四元数表示。我们将在本节中解释，引入双四元数使刚性变换规则与纯旋转规则一样简单。然而，不是一个点，而是一个线。

方向为且通过点的空间中的线可以用六元组表示，其中称为线矩，等于。线力矩垂直于穿过线和原点的平面，其大小等于从线到原点的距离。约束和保证空间中任意线的自由度为4。

接下来，我们对以下问题给出答案:

问题1.将由其四元数给出的线用变换为线。证明存在一个单位双四元数，使得。

将旋转R和平移应用于线，我们得到变换后的线：

我们从向量符号改为四元数符号，这意味着向量用标量部分为为零的四元数表示。包含旋转的术语可以很容易地用四元数写成。跨产品的困难通过身份解决:

其中t是平移四元数，q是旋转四元数。使用等式（19），我们获得:

我们定义一个新的四元数和一个双四元数。可以很容易地证明等式（20）等于:

此公式类似于带有四元数的点的旋转。

因此，可以在双四元数的非阿贝尔环中使用单个运算（将左侧和右侧与共轭相乘）进行刚性转换。归一化：

因此，是单位对偶四元数。上述关系还明确给出了从到的变换。通过找到旋转轴和旋转角度，可以从旋转矩阵获得对偶部分和四元数。

如果是一个解，则也是一个解。像在

单位双四元数可以写成纯平移单元双四元数和对偶部分等于零的纯旋转四元数的串联;即，

1. 单位双四元数和螺丝

本节说明双四元数的标量和矢量部分具有特定的含义，这些含义将它们与螺钉的运动学概念相关联。根据Chasles的定理（Chen 1991），可以将刚性变换建模为绕不通过原点的轴以相同角度旋转并沿着该轴平移的模型。由于丝杠轴在空间中是一条线，因此它取决于四个参数，这些参数与旋转角度θ和沿d（螺距）轴的平移一起构成了刚性变换的六个自由度。

我们解决以下问题。

问题2.给定绕原点绕轴的旋转R和平移，计算螺距d以及由其方向和力矩对给定的螺杆轴.

方向平行于旋转轴。间距d是平移在旋转轴上的投影，因此等于。在和螺钉表示中未提及的角度θ相同。为了恢复力矩，我们在螺丝轴上引入一个点作为原点在轴上的投影（图2）。

坐标系移至该点，然后进行变换。 然后生成的平移是。The so-called pitch d reads.使用罗德里格斯公式，

并且，因此得出:

如果角度θ为0或180°，则该点并因此未定义丝杠轴。否则，矩向量将读取

我们继续计算相应的四元数：给定螺丝参数，计算相应的对偶四元数,从旋转矩阵R得出的四元数读取:

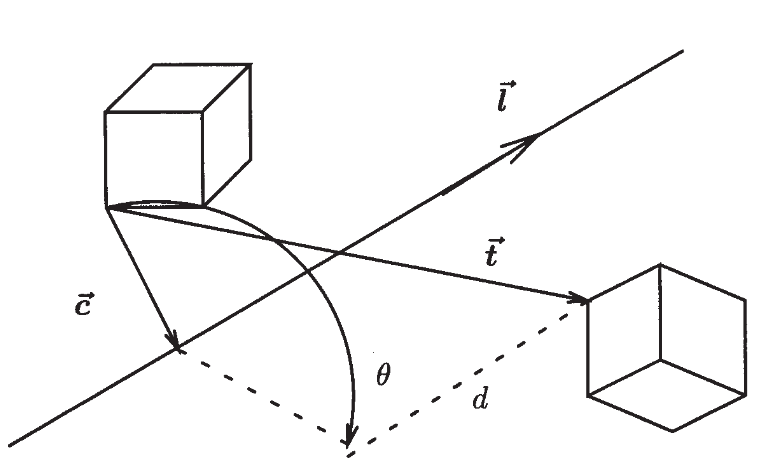


图2.螺钉的几何形状：可以将每个运动建模为绕轴的角度为θ的旋转，方向为，随后沿轴的平移为d。

因此等式（24）可以写

使用并重写:

它是对偶四分位数的对偶部分的向量部分，应用等式（25），并使用，我们得到:

对偶数的每个函数f都遵守规则

因此

现在可以直接看到，双四元数也可以写成:

这种表示法非常有力，因为它可以将角度和螺距信息与表征螺杆轴位置的直线信息分开。此外，写出对角和对角向量，等式（27）等于等式（25）的纯旋转。我们可以轻松地验证:

是单位四元数。

1. 单位双四元数的手眼变换

两个刚性位移或螺钉的串联可以写成两个双四元数的乘积。让表示摄像机运动的螺钉，表示电机运动的螺钉。马达（手）和相机（眼睛）牢固地连接在一起。它们之间的刚性变换是未知的，将由单位双四元数表示。螺钉串联然后产生

这是手眼关系最紧凑的方程式，因为双四元数分量是8，而不是12，如式（1）的齐次矩阵中所示。对偶四元数的标量部分是，因此

根据等式（27），标量部分等于相应双角的余弦值：

相当于:

因此，马达螺丝的角度和螺距等于摄像头螺丝的角度和螺距；因此，在坐标变换下，角度和螺距保持不变。这也被称为螺丝同余定理（Chen 1991），但是它没有双单元四元数的证明比等式（29）中的单行证明更长。

基本方程式由四个对偶方程式组成。 由于标量部分相等，因此只有向量分量才有助于未知的计算：

这就是丝杠轴的直线运动。

因此，

1.手眼估计与相机的角度和俯仰以及马达运动无关，并且

2.手眼校准等效于3-D线对应的3-D运动估计问题，其中线是电动机和摄像机的螺纹轴。

在这里我们应该注意，所有其他手眼校准方法至少在等式（3）的平移估计步骤中利用旋转角度和间距，在等式（30）中是不必要的。证明问题等同于3-D运动问题后，我们已经从计算机视觉中了解到（Sabata和Aggarwal 1991），最低要求是两条不平行的线。因此，用于手眼校准的最小数据是两个不平行旋转轴的运动。

6.用SVD估算手眼标定

尽管我们在上一节中表明，只有双四元数的向量部分与未知手眼单元双四元数的估计有关，但让我们分别对和使用相同的符号和。

我们将基本等式（28）分为非对偶和对偶部分，得到:

在右边乘以q并应用标识

在第一个方程式右边的第一项中

可以改写为:

我们要记住，在标量部分上方的两个等式中，每个等式都是多余的，因为它们等效于等式（30）。 因此，我们总共有六个方程式，其中有八个未知数，可以用如下矩阵形式表示。让.然后可以将上面的四元数方程写成矩阵向量方程:

其中的矩阵（我们称其为S）是一个6×8的矩阵，未知数的向量是8维的。我们用表示与的叉积对应的反对称矩阵。

回想一下，我们对未知数有两个约束，因此结果是单位双四元数

我们可以认为六个方程加两个约束就足够了。但是，向量和是单位向量，向量和垂直于和，因此两个方程式是多余的。这并不是什么新鲜事，因为众所周知，至少需要两行，以便可以根据它们的对应关系估计3D运动（Sabata和Aggarwal 1991）。因此，我们至少需要手眼系统的两次运动才能从相应的螺钉中获得两条线。Chen（1991）也认识到这一事实，并分析了问题的独特性。他的几何证明，即使在两个平行旋转轴的情况下，我们也可以计算直至螺距的所有参数。

现在假设给出n≥2个运动。我们构造6n×8矩阵

在无噪声的情况下，它的等级为6。由于在无噪声的情况下，方程是由自然约束产生的，所以零空间至少包含解。显而易见，附加的正交解是。因此，矩阵的最大秩为6。如果所有轴相互平行，则矩阵的秩为5。然而，在这种情况下，一个三参数解系列不受方程（32）的两个条件约束是合理的。

我们计算奇异值分解，其中是具有奇异值的对角矩阵，U的列为左奇异向量，V的列为右奇异向量。如果等级为6，则最后两个右奇异矢量和（对应于两个消失的奇异值）跨越T的零空间。我们将它们写为由两个4×1向量组成，和。满足的向量必须是和的线性组合。因此

两个自由度由等式（32）的约束固定，这意味着在λ1和λ2中存在两个二次方程：

由于λ1和λ2都不会消失，因此不失一般性地假设，因此。设置时，我们首先求解方程（35）。，获得的两个解。在等式（34）中插入:

它具有两个相反符号的实解，因为可以很容易地证明三项式

计算算法包括以下步骤：

1.给定n个电机运动和相应的摄像机运动，检查标量部分是否相等。然后提取丝杠轴的直线方向和力矩，并在等式（33）中构造矩阵T。

2.计算T的SVD并检查是否只有两个奇异值几乎等于零（由于噪声，我们使用一个阈值）。取对应的右奇异向量和。

3.计算等式的（35）并求解，找到s的两个解。

4.对于s的这两个值，计算，并选择其中最大的一个来计算λ2，然后计算λ1。

5.结果是。