Семинар 34

Самосопряженные операторы

Пусть V – евклидово пространство и пусть $\phi\colon V \to V$ – линейный оператор. Тогда *сопряженный* к нему линейный оператор ϕ^* – это такой оператор, что $(\phi(v), u) = (v, \phi^*(u))$ для всех $v, u \in V$. Оператор называется *самосопряженным*, если $\phi^* = \phi$.

Теперь разберемся, что происходит в ортонормированном базисе. В этом случае $V = \mathbb{R}^n$, $(x, y) = x^t y$, а $\phi(x) = Ax$, а $\phi^*(x) = Bx$. Тогда условие $(Ax, y) = (x, By)$ означает $x^t A^t y = x^t B y$. То есть $B = A^t$. То есть матрица для ϕ^* это A^t. Значит самосопряженный оператор в ортонормированном базисе задается симметричной матрицей.

В случае произвольного базиса скалярное произведение задается $(x, y) = x^t B y$, где B – симметричная невырожденная положительно определенная матрица. Тогда если $\phi x = Ax$ и $\phi^* x = A' x$, то условие $(Ax, y) = (x, A'y)$ расписывается так: $(Ax)^t B y = x^t B A' y$. То есть $x^t A^t B y = x^t B A' y$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Последнее значит, что $A^t B = B A'$. Значит $A' = B^{-1} A^t B$ – это формула связывает матрицу ϕ и ϕ^* в произвольных базисах.

Утверждение. *Пусть $\phi\colon V \to V$ – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве. Тогда*

1. *Все его комплексные собственные значения вещественны.*
2. *Собственные вектора с разными собственными значениями ортогональны друг другу.*
3. *Существует ортонормированный базис пространства V состоящий из собственных векторов ϕ.*
4. *В некотором ортонормированном базисе матрица ϕ имеет диагональный вид, с вещественными числами на диагонали.*

Переформулируем это утверждение на языке матриц.

Утверждение. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – симметрическая матрица. Тогда*

1. *Все комплексные собственные значения A вещественные.*
2. *Все собственные вектора с разными собственными значениями ортогональны.*
3. *Существует ортогональная матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $C^{-1}AC$ является диагональной вещественной матрицей.*[1]

Связь самосопряженных операторов с симметричными билинейными формами

Пусть V – евклидово пространство и $\phi\colon V \to V$ – некоторый оператор. Тогда по нему можно построить билинейную форму $\beta_\phi(v, u) = (v, \phi(u))$. Давайте поймем, когда такая форма будет симметрична:

$$\beta_\phi(v, u) = (v, \phi(u))$$
$$\beta_\phi(u, v) = (u, \phi(v)) = (\phi(v), u)$$

То есть форма симметрична тогда и только тогда, когда оператор ϕ самосопряжен. Кроме того, отображение $\phi \mapsto \beta_\phi$ является биекцией между операторами на V и билинейными формами на V. При этом соответствии самосопряженные операторы соответствуют симметричным билинейным формам. Эти чудеса возможны лишь благодаря наличию скалярного произведения. Полученное соответствие является изоморфизмом векторных пространств. Этот изоморфизм – это частный случай отображения поднятия и опускания индексов, которое очень часто используется в дифференциальной геометрии.

Давайте посмотрим, что происходит при этом соответствии в базисе на матричном языке. Пусть $e_1, \ldots, e_n \in V$ – некоторый базис. Тогда V превращается в $\mathbb{R}^n$. Оператор ϕ превращается в оператор умножения на матрицу $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, то есть $\phi(x) = Ax$, а скалярное произведение будет $(x, y) = x^t B y$. Тогда $\beta_\phi(x, y) = x^t B A y$. Кроме того, если базис $e_1, \ldots, e_n$ был ортонормированным, то скалярное произведение будет стандартным $(x, y) = x^t y$, а $\beta_\phi(x, y) = x^t A y$. Таким образом, это отображение в ортонормированном базисе по оператору с матрицей A ставит билинейную форму с матрицей A. Теперь важное замечание, если мы смогли диагонализовать оператор ϕ в ортонормированном базисе, то это означает, что мы смогли диагонализовать β_ϕ.

[1] Обратите внимание, чтот тут нет разницы между $C^{-1}AC$ и C^tAC, так как C ортогональная.

Последнее замечание дает способ диагонализации симметричной билинейной формы в ортонормированном базисе, который называется приведением к главным осям. А именно, пусть задана форма $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $\beta(x, y) = x^t G y$ в ортонормированном базисе, то есть скалярное произведение будет выглядеть $(x, y) = x^t y$. Теперь матрица G будет симметричной. Посмотрим на G как на матрицу линейного оператора и диагонализуем ее в ортонормированном базисе по соответствующему алгоритму через собственные векторы. Получим $C^{-1}GC = D$ – диагональная, где $C^tC = E$, то есть C ортогональная. Но это значит, что $C^tGC = D$. То есть если мы сделаем замену базиса с помощью матрицы C, то билинейная форма β в новом базисе будет иметь матрицу $C^tGC = C^{-1}GC = D$.