Семинар 12

Линейная зависимость

Пусть V – векторное пространство над полем F. Главные вопрос: как надо про него думать? Ответ прост: это куча из элементов и эти элементы можно складывать и умножать на числа. То есть, мы всегда можем вытащить элементы[1] $v_1, \ldots, v_n \in V$ и начать их складывать с коэффициентами, получив некий новый вектор $r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n \in V$, где $r_i \in F$. Поэтому все, что можно сказать про векторное пространство, обязательно формулируется в терминах таких выражений. Поэтому предлагается изучать подобные выражения.

Пусть $v_i \in V$ и $r_i \in F$ как выше, тогда выражение $r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n$ называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_n$. Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все $r_i = 0$, в противном случае *нетривиальной*. Вектора $v_1, \ldots, v_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулю (нулевому вектору), т.е. $v_1, \ldots, v_n$ – линейно зависимы, если существуют $r_1, \ldots, r_n \in F$ так, что хотя бы один из r_i не равен нулю и $r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n = 0$. В противном случае вектора называются *линейно независимыми*.

Примеры

1. Рассмотрим $V = F^3$ и пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

   Тогда вектора v_1, v_2, v_3 линейно независимы. Вектора v_1, v_2, v_4 тоже линейно независимы. Но вот вектора v_1, v_2, v_3, v_4 уже зависимы, так как $v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$. Также зависимы вектора v_1, v_2 и v_5, ибо $v_1 + v_2 - v_5 = 0$.

2. Один вектор $v \in V$ линейно зависим тогда и только тогда, когда он равен нулю.

3. Два вектора $v, u \in V$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. либо $v = \lambda u$ либо $u = \lambda v$.

4. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$ имеет вид $A = (A_1|\ldots|A_n)$. Тогда система вида $Ax = 0$ переписывается так $x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = 0$. То есть решение однородной СЛУ – это выяснение какие есть линейные комбинации между столбцами матрицы A. Если же нам дана система $Ax = b$, то она переписывается в виде $x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = b$. То есть решения СЛУ – это выяснение как можно разложить вектор b по столбцам матрицы A.

Конечные системы векторов

Пусть $v_1, \ldots, v_k \in V$ – некоторый набор векторов (может быть с повторением). Тогда мы можем в этом наборе искать максимальный по включению набор из линейно независимых векторов. Такой набор называется базисом системы $v_1, \ldots, v_k$. Разложить вектор v по системе векторов $v_1, \ldots, v_k$ значит представить v в виде линейной комбинации $v_1, \ldots, v_k$. Если векторы $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы, то представление $v = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$ обязательно будет единственным. В этом случае числа $a_1, \ldots, a_k$ называются координатами v в базисе $v_1, \ldots, v_k$.

Выделение базиса из системы векторов

Дано Пусть $v_1, \ldots, v_m \in F^n$ – вектора.

Задача Найти базис системы векторов $v_1, \ldots, v_m$ и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

[1] называемые векторами

Алгоритм

1. Запишем вектора $v_1, \dots, v_m$ по столбцам в матрицу $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(F)$. Например, при $n = 3$, $m = 5$
$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть $k_1, \dots, k_r$ – номера главных позиций в матрице A'. Тогда вектора $v_{k_1}, \dots, v_{k_r}$ образуют базис системы $v_1, \dots, v_k$. Например, в примере выше это вектора v_1, v_2 и v_4.

4. Пусть v_i – вектор соответствует неглавной позиции в A'. Тогда в i-ом столбце A' записаны координаты разложения v_i через найденный базис выше. Например, в примере выше $v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2$ и $v_5 = a_{51}v_1 + a_{52}v_2 + a_{53}v_4$.

Пример Пусть
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F^3$$

Тогда
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогда v_1, v_2 и v_4 – базис линейной оболочки. $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ и $v_5 = v_1 - 2v_4$.

Корректность алгоритма

Существует два способа объяснять почему этот алгоритм коректен. Я сейчас могу привести только рабоче-крестьянское доказательство.

Рабоче-крестьянский метод Пусть у нас даны векторы $v_1, \dots, v_n \in F^m$, сложим их в матрицу $A = (v_1|\dots|v_n)$. Пусть $x \in F^n$. Тогда $Ax = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$ по блочным формулам. Потому решения системы $Ax = 0$ – это то же самое, что коэффициенты линейных зависимостей между векторами $v_1, \dots, v_n$. Теперь приведем матрицу A к улучшенному ступенчатому виду $A' = (v_1'|\dots|v_n')$. Мы знаем, что система $Ax = 0$ и $A'x = 0$ имеют одинаковое множество решений. Это значит, что если для какого-то набора $x_1, \dots, x_n$ равенство $x_1v_1 + \dots + x_nv_n = 0$ выполняется, то для этого же набора чисел выполняется $x_1v_1' + \dots + x_nv_n' = 0$. Таким образом, если какие-то векторы из $v_1, \dots, v_n$ являются линейно зависимыми, то векторы с теми же номерами среди $v_1', \dots, v_n'$ тоже являются линейно зависимыми и наоборот. А значит эквивалентны и отрицания этих утверждений. То есть если какие-то векторы из $v_1, \dots, v_n$ линейно независимы, то векторы с теми же номерами линейно независимы среди $v_1', \dots, v_n'$.

Теперь посмотрим на конкретную ситуацию, чтобы было проще рассуждать. Посмотрим на пример выше. У нас была матрица
$$A = (v_1|v_2|v_3|v_4|v_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (v_1'|v_2'|v_3'|v_4'|v_5') = A'$$

Мы видим, что v'_1, v'_2, v'_4 – максимальное линейно независимое множество векторов в A'. Значит вектора под теми же номерами в A будут давать максимальное линейно независимое множество векторов в A. Значит v_1, v_2, v_4 – базис системы векторов. Теперь выразим остальные векторы через базис. Мы видим, что вектор v'_3 равен $2v'_1 + 3v'_2 + 0v'_4$ – здесь $2, 3, 0$ – числа в 3-ем столбце сверху вниз. Это значит, что $y = (2, 3, -1, 0, 0)$ является решением системы $A'y = 0$. Значит $Ay = 0$. А это означает, что $2v_1 + 3v_2 - v_3 = 0$, то есть v_3 есть $2v_1 + 3v_2$. Аналогично получаем выражение для $v_5 = v_1 - 2v_4$.

Нахождение какого-то базиса линейной оболочки

Теперь предположим, что мы хотим выбрать базис в $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, но не среди векторов v_i, а вообще какой угодно (то есть в виде линейных комбинаций v_i). Тогда есть еще один алгоритм на этот случай.

Дано Пусть $v_1, \ldots, v_m \in F^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Найти какой-нибудь базис подпространства V.

Алгоритм

1. Уложить все вектора v_i в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$.
2. Элементарными преобразованиями строк привести матрицу к ступенчатому виду.
3. Ненулевые строки полученной матрицы будут искомым базисом.

Корректность алгоритма

Для того, чтобы понять корректность алгоритма, заметим следующий факт. Если матрица A содержит строки $v_1^t, \ldots, v_m^t$ и мы перешли с помощью элементарного преобразования строк к матрице B со строками $u_1^t, \ldots, u_m^t$, то $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$. Действительно, если мы переставим векторы местами или один вектор умножим на ненулевое число, то ясно, что линейные оболочки сохранятся. Потому достаточно разобраться со случаем преобразования первого типа. Давайте для определенности прибавим ко второму вектору первый с коэффициентом λ, тогда надо показать, что

$$\langle v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1, v_2 + \lambda v_1, v_3, \ldots, v_m \rangle$$

В начале покажем вложение $\supseteq$. Векторы $v_1, v_3, \ldots, v_m$ лежат в левой линейной оболочке. Но и вектор $v_1 + \lambda v_2 \in \langle v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \rangle$. Тогда и любые линейные комбинации векторов $v_1, v_2 + \lambda v_1, v_3, \ldots, v_m$ лежат в левой линейной оболочке. Значит вложение $\supseteq$ доказано. Для доказательства в обратную сторону стоит заметить, что в обратную сторону мы переходим с помощью преобразования, когда ко второму вектору прибавляется первый с коэффициентом $-\lambda$.

Значит если мы исходную матрицу, где $v_1, \ldots, v_m$ уложены по строкам привели к ступенчатому виду, то линейная оболочка исходных векторов $v_1, \ldots, v_m$ совпадает с линейной оболочкой строк ступенчатого вида. Потому достаточно искать базис среди новых строк. Но строки ступенчатого вида являются линейно независимыми.

Дополнение линейно независимой системы до базиса всего пространства стандартными векторами

Дано Пусть $v_1, \ldots, v_m \in F^n$ – система векторов, $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка и e_i – стандартные базисные векторы, т.е. на i-ом месте стоит 1, а в остальных 0.

Задача Проверить являются ли векторы $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимыми и если являются, то найти такие вектора $e_{k_1}, \ldots, e_{k_{n-m}}$, что система $v_1, \ldots, v_m, e_{k_1}, \ldots, e_{k_{n-m}}$ является базисом F^n.

Алгоритм

1. Уложить вектора v_i в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$.
2. Привести матрицу A к ступенчатому виду.
3. Если в матрице ступенчатого вида появилась нулевая строка, то векторы $v_1, \ldots, v_m$ линейно зависимы и дополнить их до базиса нельзя.
4. Если в матрице ступенчатого вида нет нулевых строк, то количество ненулевых строк будет m. Пусть $k_1, \ldots, k_{n-m}$ – номера неглавных столбцов, их точно будет $n - m$ штук. Тогда $e_1, \ldots, e_{k_{n-m}}$ – искомое множество.

Корректность алгоритма

Давайте для определенности считать, что у нас 3 вектора v_1, v_2, v_3 и они лежат в F^5. Положим их по строкам и приведем к ступенчатому виду. Тогда у нас есть два принципиальных варианта:

$$\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \end{pmatrix}$$

Либо есть нулевая строка, либо нет. Тут $\bullet$ обозначает обязательно ненулевой элемент. Обозначим через y_1^t, y_2^t, y_3^t строки ступенчатого вида. Тогда из доказательства корректности предыдущего алгоритма, мы знаем, что

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$$

Но так как в первом случае $y_3 = 0$, то линейная оболочка справа имеет размерность не более 2, а значит и правая имеет такую же размерность (так как они совпадают). Но тогда, три вектора в такой линейной оболочке должны быть линейно зависимы. Значит в этом случае v_1, v_2, v_3 линейно зависимы и их нельзя дополнить до базиса.

Если же у нас второй случай, то размерность линейной оболочки y_1, y_2, y_3 будет 3, так как y_1, y_2, y_3 очевидно линейно независимые порождающие. Но тогда v_1, v_2, v_3 будут порождающими и так как их количество равно размерности, то это минимальная система порождающих. А значит это базис и v_1, v_2, v_3 линейно независимы.

Теперь будем считать, что ступенчатый вид получился

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow y_1^t \\ \leftarrow y_2^t \\ \leftarrow y_3^t \end{array} \end{array}$$

Тогда добавим к этой системе векторы e_2 и e_5, получим

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow y_1^t \\ \leftarrow y_2^t \\ \leftarrow y_3^t \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_5 \end{array} \end{array}$$

Переставим векторы так, чтобы e_2 стоял на 2-ой строке, а e_5 на 5-ой строке

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow y_1^t \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow y_2^t \\ \leftarrow y_3^t \\ \leftarrow e_5 \end{array} \end{array}$$

Получилась матрица в ступенчатом виде. Ясно, что векторы этой матрицы являются линейно независимыми. А значит это базис пространства F^5. Значит y_1, y_2, y_3, e_2, e_5 – базис F^5. Теперь покажем, что v_1, v_2, v_3, e_2, e_5 тоже базис F^5. Рассмотрим матрицу со строками $v_1^t, v_2^t, v_3^t, e_2, e_5$. И приведем ее преобразованиями строк к матрице со строками $y_1^t, y_2^t, y_3^t, e_2, e_5$. Значит линейная оболочка $v_1^t, v_2^t, v_3^t, e_2, e_5$ равна всему пространству и так как векторов 5 штук, то это базис F^5.