1

1. Решить системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Знак равенства здесь означает эквивалентность систем.

а)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ответ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

б)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 7 & 5 \\ 45 & 27 & 9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 7 & 5 \\ 0 & -8 & -16 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ответ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

в)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Ответ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2

2. Показать, что систему можно решить проще после перестановки переменных

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Поменяем местами 1 и 3 столбцы. При этом произойдет замена $x_1 = y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

А значит

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - y_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ответ

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3

3. Для систем $Ax = 0$ посчитать количество главных переменных для любого значения параметра, если

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} x & x & & x & x \\ & & & x & x \\ & & \iddots & & \\ & x & & & x \\ x & & & & x \end{pmatrix}$$ и пустые места заполнены 1

$$A = \begin{pmatrix} x & & & & & x \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & x & x & & \\ & & & x & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x \end{pmatrix}$$

Все пропущенные места заполнены единицами. Например, при $n = 3$ получим:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ -1 & 0 & 1 & \dots & n-1 \\ -2 & -1 & 0 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & -(n-1) & -(n-2) & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

а)

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Вычтем из всех строк (n)-ю. Получим

$$\begin{pmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 1-x \\ 0 & x-1 & \cdots & 1-x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Пусть $x \neq 1$

Поделим все строки кроме последней на $x-1$ и вычтем из последней

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x+n-1 \end{pmatrix}$$

Пусть $x = 1-n$

Тогда последняя строчка зануляется и $n-1$ главная переменная.

Пусть $x \neq 1-n$

Тогда n главных переменных

Пусть $x = 1$

Тогда исходная матрица состоит полностью из единиц и у нее одна главная переменная.

Ответ:

- если $x = 1$, то 1 главная переменная
- если $x = 1-n$, то $n-1$ главная переменная
- если $x \neq 1$ и $x \neq 1-n$, то n главных переменных

б)

Рассмотрим матрицу подсистемы состоящую из строк с (3) по $(n-2)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & 1 & 1 & 1 \\ & & & \vdots & & & & \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В ней вычтем из предыдущей строчки следующую и получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Это значит в любом решении СЛАУ $x_4 = x_5 = x_6 = \ldots = x_{n-2}$. Раз так, то можно сделать замену:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

И матрица новой системы будет

$$\begin{pmatrix} x & x & 1 & (n-4) & x & x \\ 1 & 1 & 1 & (n-5+x) & x & x \\ 1 & 1 & 1 & (n-5+x) & 1 & 1 \\ & & & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & (n-5+x) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & (n-4) & 1 & x \\ 1 & x & 1 & (n-4) & 1 & x \end{pmatrix}$$

Все строчки с (3)-ей по $(n-2)$ будут одинаковыми, поэтому сократим все кроме одной.

$$\begin{pmatrix} x & x & 1 & (n-4) & x & x \\ 1 & 1 & 1 & (n-5+x) & x & x \\ 1 & 1 & 1 & (n-5+x) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & (n-4) & 1 & x \\ 1 & x & 1 & (n-4) & 1 & x \end{pmatrix}$$

Вычтем из (4)-й строчки (5)-ю, из (2)-й (3)-ю и из (1)-й (5)-ю.

$$\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-1 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 & (n-5+x) & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & (n-4) & 1 & x \end{pmatrix}$$

А значит $y_1 = -y_5$, $y_5 = -y_6$ и $y_2 = y_3$. Сделаем еще одну замену

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_2 \\ z_3 \\ -z_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

И матрица новой системы будет

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & (n-4) \\ 1 & 2 & (n-5+x) \\ 1 & 2 & (n-5+x) \\ x & 1+x & (n-4) \\ x & 1+x & (n-4) \end{pmatrix}$$

Вычеркнем одинаковые строки

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & (n-4) \\ 1 & 2 & (n-5+x) \end{pmatrix}$$

Вычтем из (1) строчки строчку $(2) \cdot x$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & (n-5+x) \\ 0 & 1-x & n-4-nx+5x-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & (n-5+x) \\ 0 & 1-x & -x^2+(5-n)x+(n-4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & (n-5+x) \\ 0 & 1-x & (1-x)(x-4+n) \end{pmatrix}$$

При $x \neq 1$

это равносильно

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & n-5+x \\ 0 & 1-x & (1-x)(x-4+n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & n-5+x \\ 0 & 1 & x-4+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n-5+x-2x+8-2n \\ 0 & 1 & x-4+n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & n-5+x-2x+8-2n \\ 0 & 1 & x-4+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n-x+3 \\ 0 & 1 & x-4+n \end{pmatrix}$$

Решение

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_3 \begin{pmatrix} n+x-3 \\ -x-n+4 \end{pmatrix}$$

То есть z_3, свободная переменная. А значит делая обратную замену получим, что $x_4 = z_3$ задает все остальные переменные, выражаемые через z_1, z_2 и z_3.

Ответ: $n-1$ главных.

При $x = 1$

Исходная матрица до всех замен превращается в матрицу из единиц, в которой только одна главная переменная.

Ответ: 1 главная переменная.

Ответ: если $x \neq 1$, то $n-1$ главная переменная, если $x = 1$, то 1 главная переменная.

в)

Считаем что n всегда четное (в условии есть на это намеки, но уточню дополнительно).

Для первых $\frac{n}{2}$ строк вычтем строку с номером $(n-i)$. Получится

$$\begin{pmatrix}
x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & x & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & x & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & x
\end{pmatrix}$$

Теперь вычтем (n)-ю строчку из строчек с $(\frac{n}{2}+1)$ до $(n-1)$:

$$\begin{pmatrix}
x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1-x \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-1 & 0 & 1-x \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x-1 & 1-x \\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & x
\end{pmatrix}$$

При $x = 1$

Строчки с номерами от $(\frac{n}{2}+1)$ до $(n-1)$ зануляются. Матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

вычтем все строчки из последней

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

то есть $\frac{n}{2}+1$ главная переменная.

При $x = 0$

Строчки с номерами от (1) до $\frac{n}{2}$ зануляются. Матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Прибавим все предыдущие строчки к последней

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2}-1 \end{pmatrix}$$

То есть $\frac{n}{2}$ главных переменных.

При $x \neq 1$ и $x \neq 0$

Поделим первые $\frac{n}{2}$ строчек на x, а строчки с $(\frac{n}{2}+1)$ по $(n-1)$ на x.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

И вычтем все предыдущие строчки из последней

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x+\frac{n}{2}-1 \end{pmatrix}$$

Получается при $x \neq 1 - \frac{n}{2}$ n главных переменных.

При $x = 1 - \frac{n}{2}$ $n-1$ главная переменная.

Ответ:

- при $x = 0$ $\frac{n}{2}$ главных переменных

- при $x = 1$ $\frac{n}{2} + 1$ главная переменная
- при $x \notin \{0; 1\}$ и $x = 1 - \frac{n}{2}$ $n - 1$ главная переменная
- при других x n главных переменных

г)

Вычтем из (1)-ой строчки (2)-ю и потом вычтем строчки: $(3) - (1)$, $(4) - 2(1)$, $(5) - 3(1)$, ..., $(n) - [n - 3 + 1](1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

Уберем одинаковые строчки

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

Прибавим (1) ко (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Вычтем (2) из (1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \cdots & 3-n & 2-n & 1-n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Ответ: 2 главных переменных.

4

Поменять столбцы местами: $(i) \leftrightarrow (j)$

Тогда

$$x'_i = x_j$$
$$x'_j = x_i$$

Умножение столбца: $\lambda(i)$

$$x'_i = \frac{x_i}{\lambda}$$

Если столбцы (i) и (j) одинаковы можно убрать столбец (j)

$$y_i = x_i + x_j$$