Семинар 2

Задачи:

1. Задачник. §17, задача 17.1 (а, б).
2. Задачник. §17, задача 17.4 (в).
3. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – диагональная матрица вида
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$$
Найдите все матрицы $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ коммутирующие с A.
4. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
   (a) Найти все $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $AJ(\lambda) = J(\lambda)A$.
   (b) Доказать, что для любого k верна формула
$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$
   где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.
5. Найдите множество матриц A из $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ коммутирующих с
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$
6. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^m = 0$ для некоторого m. Показать, что $E + A$ и $E - A$ обратимы, где $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица (найти явный вид обратной матрицы).

[1] Такая матрица называется Жордановой клеткой.