Семинар 8

Спектр и характеристический многочлен

1. Если $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и матрица A обратима, то

$$\chi_{AB}(t) = \det(tE - AB) = \det(tAA^{-1} - ABAA^{-1}) = \det(A(tE - BA)A^{-1}) =$$
$$= \det(A)\det(tE - BA)\det(A^{-1}) = \det(tE - BA) = \chi_{BA}(t)$$

2. **Первое доказательство.** В случае если обе матрицы A и B не обратимы, то можно рассмотреть матрицу $A_\lambda = A - \lambda E$. Тогда такая матрица обратима для всех λ кроме $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} A$. В частности для всех λ кроме конечного числа (из спектра) верно, что

$$\chi_{A_\lambda B}(t) = \chi_{BA_\lambda}(t)$$

Распишем левый и правый хар многочлены по коэффициентам. Тогда каждый коэффициент будет многочленом от λ, то есть

$$\chi_{A_\lambda B}(t) = a_0(\lambda) + a_1(\lambda)t + \ldots + a_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + t^n$$
$$\chi_{BA_\lambda}(t) = b_0(\lambda) + b_1(\lambda)t + \ldots + b_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + t^n$$

При этом эти два многочлена совпадают при $\lambda \notin \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} A$. А это значит, что

$$a_0(\lambda) = b_0(\lambda), \ldots, a_{n-1}(\lambda) = b_{n-1}(\lambda) \text{ при всех } \lambda \notin \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} A$$

Но раз это равенства многочленов, то два многочлена могут совпадать в бесконечном числе точек только если они равны, а значит последние равенства верны для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, то есть

$$a_0(\lambda) = b_0(\lambda), \ldots, a_{n-1}(\lambda) = b_{n-1}(\lambda) \text{ при всех } \lambda \in \mathbb{R}$$

А это значит, что многочлены $\chi_{A_\lambda B}(t)$ и $\chi_{BA_\lambda}(t)$ равны при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. А раз так, то мы можем подставить $\lambda = 0$ и получим желаемое.

Второе доказательство. Рассмотрим следующие матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} E & A \\ B & \lambda E \end{pmatrix}$$

Заметим, что вторая матрица получается из первой, если сначала переставить две блочные строки, а потом два блочных столбца. Но так как обе блочные перестановки содержат одинаковое количество свапов, то определители будут у матриц равны. То есть

$$\det \begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & A \\ B & \lambda E \end{pmatrix}$$

Но по задаче из прошлого семинара, так как блоки первого столбца в обоих случаях коммутируют, то можно вычислить определитель через блочные формулы и потом взять определитель полученного блока:

$$\det(\lambda E \cdot E - A \cdot B) = \det \begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & A \\ B & \lambda E \end{pmatrix} = \det(E \cdot \lambda E - B \cdot A)$$

Ну вот и все.

3. Для доказательства этого пункта дополним матрицу A нулями снизу до квадратной матрицы, а матрицу B нулями справа до квадратной матрицы, то есть положим

$$A' = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда по предыдущему пункту мы знаем, что

$$\chi_{A'B'}(t) = \chi_{B'A'}(t)$$

Но

$$A'B' = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix} = AB + 0 = AB$$

Значит $\chi_{A'B'}(t) = \chi_{AB}(t)$. С другой стороны

$$B'A' = \begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Но тогда $\chi_{B'A'}(t) = t^{n-m}\chi_{BA}(t)$. На этом все.

Определитель циркулянты

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

Такая матрица называется циркулянтой. Давайте я покажу трюк, как можно посчитать ее определитель. Для этого мне понадобится знание о корнях из единицы n-ой степени. Да, мы пока не изучали комплексные числа, но давайте я скажу все, что надо знать. Множество комплексных числе $\mathbb{C}$ содержит $\mathbb{R}$ как подмножество. Кроме того на $\mathbb{C}$ есть операции сложения, вычитания, умножения и деления на любое ненулевое число. И при этом если эти операции применить к вещественным числам, которые лежат в комплексных, то мы получим старые операции над вещественными числами. То есть операции естественным образом продолжаются. Зачем мне они нужны? Для того, чтобы решить уравнение $x^n = 1$. В вещественных числах тут либо одно либо два решения в зависимости от четности n. Но мне хочется найти n разных решений. И вот оказывается в комплексных числах найдется в точности n разных числе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{C}$ таких, что $\varepsilon_i^n = 1$. И это все знания, которые мне сейчас нужны.

Давайте рассмотрим вектор

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_i \\ \varepsilon_i^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\varepsilon_i + a_2\varepsilon_i^2 + \dots + a_{n-1}\varepsilon_i^{n-1} \\ a_{n-1} + a_0\varepsilon_i + a_1\varepsilon_i^2 + \dots + a_{n-2}\varepsilon_i^{n-1} \\ a_{n-2} + a_{n-1}\varepsilon_i + a_n\varepsilon_i^2 + \dots + a_{n-3}\varepsilon_i^{n-1} \\ \vdots \\ a_1 + a_2\varepsilon_i + a_3\varepsilon_i^2 + \dots + a_0\varepsilon_i^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_0 + a_1\varepsilon_i + a_2\varepsilon_i^2 + \dots + a_{n-1}\varepsilon_i^{n-1}) \cdot 1 \\ (a_0 + a_1\varepsilon_i + a_2\varepsilon_i^2 + \dots + a_{n-1}\varepsilon_i^{n-1}) \cdot \varepsilon_i \\ (a_0 + a_1\varepsilon_i + a_2\varepsilon_i^2 + \dots + a_{n-1}\varepsilon_i^{n-1}) \cdot \varepsilon_i^2 \\ \vdots \\ (a_0 + a_1\varepsilon_i + a_2\varepsilon_i^2 + \dots + a_{n-1}\varepsilon_i^{n-1}) \cdot \varepsilon_i^{n-1} \end{pmatrix}$$

То есть если мы определим многочлен

$$f(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$$

то мы показали

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_i \\ \varepsilon_i^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i^{n-1} \end{pmatrix} = f(\varepsilon_i) \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_i \\ \varepsilon_i^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i^{n-1} \end{pmatrix}$$

Значит

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \dots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f(\varepsilon_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \dots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Значит определитель циркулянты умноженный на определитель вандермонда $W(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ равен определителю диагональной матрицы помноженный на такой же определитель вандермонда $W(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. А раз все ε_i различны (и вот это то место где мне нужны комплексные числа), то на этот определитель можно сократить, то есть

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix} = f(\varepsilon_1) \cdot f(\varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_n)$$