

Семинар 32

Общая информация:

- Если V – евклидово или эрмитово пространство, то движением называется оператор $\phi: V \rightarrow V$ такой, что $(\phi v, \phi u) = (v, u)$ для любых $v, u \in V$.
- Если $v \in V$ – произвольный ненулевой вектор, то отображение $\phi_v(u) = u - 2 \frac{(v, u)}{(v, v)} v$ является отражением относительно подпространства $\langle v \rangle^\perp$. То есть подпространство $\langle v \rangle^\perp$ остается неподвижным, а вектор v переходит в $-v$.

Задачи:

1. Задачник. §46, задача 46.3.
2. В пространстве \mathbb{R}^3 со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^T y$ найти матрицу какого-нибудь ортогонального оператора (движения), который переводит вектор v_1 в v_2 , где

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Пусть V – трехмерное евклидово пространство с базисом e_1, e_2, e_3 и пусть $\phi: V \rightarrow V$ – ортогональный оператор с определителем 1. Показать:
 - (а) $\phi = \phi_1 \phi_2 \phi_3$, где ϕ_1 – поворот на угол α_1 вокруг оси e_1 , ϕ_2 – поворот на угол α_2 вокруг оси e_2 , ϕ_3 – поворот на угол α_3 вокруг оси e_3 .
 - (б) $\phi = \phi_1 \phi_2 \phi_3$, где ϕ_1 и ϕ_3 – повороты на углы α_1 и α_3 вокруг оси e_3 соответственно, а ϕ_2 – поворот на угол α_2 вокруг оси e_1 .
4. Пусть $\phi: V \rightarrow V$ – движение в эрмитовом или евклидовом пространстве такое, что $\phi = \phi_{v_1} \dots \phi_{v_k}$, где ϕ_{v_i} – отражения. Покажите, что $k \geq \dim \operatorname{Im}(\phi - \operatorname{Id})$.