Семинар 21

Анализ ЖНФ

Пусть $\varphi\colon V \to V$ – оператор такой, что $f_{\min\,\varphi} = (t-\lambda_1)^{k_1}\dots(t-\lambda_s)^{k_s}$. Тогда оператор φ в некотором базисе имеет матрицу в жордановой нормальной форме. Чаще всего вам дают оператор сразу в виде $\varphi\colon F^n \to F^n$ по правилу $x \mapsto Ax$ и тогда $f_{\min\,A} = (t-\lambda_1)^{k_1}\dots(t-\lambda_s)^{k_s}$.

Рассмотрим для удобства конкретный случай. Пусть $\varphi\colon \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^8$ по правилу $x \mapsto Ax$. Так как $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, то всякий многочлен раскладывается на линейные множители, в частности минимальный многочлен для φ. А значит φ приводится в ЖНФ (жорданову нормальную форму). Предположим, что в нашем случае $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(\varphi) = \{\lambda, \mu\}$ и ЖНФ имеет вид (все пустые места заполнены нулями):

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & & & \\ & & \lambda & & & & & \\ & & & \lambda & 1 & & & \\ & & & & \lambda & & & \\ & & & & & \mu & 1 & \\ & & & & & & \mu & \\ & & & & & & & \mu \end{pmatrix}$$

И пусть базис, в котором матрица имеет такой вид будет $f_1, \dots, f_8$. Тогда

1. Характеристический многочлен будет

$$\chi_\varphi(t) = \chi_J(t) = (t-\lambda)^5(t-\mu)^3$$

То есть количество λ на диагонали в ЖНФ – это кратность корня в хар многочлене (аналогично для μ).

2. Теперь посчитаем минимальный многочлен. Мы знаем, что он должен иметь вид

$$f_{\min\,\varphi} = f_{\min,J} = (t-\lambda)^a(t-\mu)^b$$

И надо лишь найти кратности корней. Для этого вспомним геометрический смысл кратности корня в минимальном многочлене. Это такое число, что для ядер $\ker(\varphi - \lambda\operatorname{Id})^k$ наступает стабилизация. Стабилизация наступает, когда перестает меняться ранг оператора $(\varphi - \lambda\operatorname{Id})^k$. А это то же самое, что ранг $(J-\lambda E)^k$. Давайте посчитаем эту матрицу

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & \mu-\lambda & 1 & \\ & & & & & & \mu-\lambda & \\ & & & & & & & \mu-\lambda \end{pmatrix}$$

Теперь при возведении в степень блочно диагональной матрицы надо возвести в эту степень каждый диагональный блок

$$(J-\lambda E)^k = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}^k & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}^k & & \\ & & \begin{pmatrix} \mu-\lambda & 1 \\ & \mu-\lambda \end{pmatrix}^k & \\ & & & (\mu-\lambda)^k \end{pmatrix}$$

Все клетки, где была μ (другие собственные значения), будут обратимыми так как там стоит разность разных чисел из спектра. А значит при возведении в степень нижние две клетки не меняют ранг. Ранг меняют только клетки, где была λ. И ранг перестанет меняться, когда все такие клетки обратятся в ноль. Но вспомним, что $J_n(0)^n = 0$ и n – минимальная степень, в которой зануляется клетка. Значит ранг перестанет меняться на номере $a = 3$ – максимальный размер клетки с λ. Аналогично для μ, $b = 2$ – максимальный размер клетки для μ. То есть

$$f_{\min\ \varphi} = f_{\min\ J} = (t-\lambda)^3(t-\mu)^2$$

3. Отсюда в частности становится понятно почему оператор диагонализуем тогда и только тогда, когда в минимальном многочлене нет кратных корней. Действительно, диагональный оператор – это ЖНФ, где все клетки имеют размер 1 на 1.

4. Корневые подпространства в этом случае будут

$$V^\lambda = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\rangle, \quad V^\mu = \langle f_6, f_7, f_8\rangle$$

   В частности мы видим, что $\dim V^\lambda = 5$ – кратность корня в хар многочлене. Аналогично для μ.

5. Собственные подпространства ищутся из уравнения $(J - \lambda E)x = 0$. Методом пристального взгляда видим, что ФСР можно выбрать из векторов f_i соответствующих началам каждой клетки. Значит

$$V_\lambda = \langle f_1, f_4\rangle, \quad V_\mu = \langle f_6, f_8\rangle$$

   В частности мы видим, что $\dim V_\lambda = 2$ – количество клеток (всех возможных размеров) с λ. Аналогично для μ.

6. Формулы для количества клеток в ЖНФ. Количество клеток с λ размера r считается так

$$\text{кол-во } = \operatorname{rk}(A-\lambda E)^{r+1} + \operatorname{rk}(A-\lambda E)^{r-1} - 2\operatorname{rk}(A-\lambda E)^r$$

   Обратите внимание, что эта формула работает для матрицы оператора в любом базисе. Потому посчитанное число по этой формуле для матрицы A и для матрицы J будет одинаковым. Число через матрицу A мы можем посчитать, потому что матрица A нам дана. А вот если мы подставим в эту формулу J и для J посчитаем руками все ранги, то мы увидим, что получится в точности указанное количество клеток.