Семинар 1

Сложность алгоритма Гаусса

Давайте проанализируем сложность каждой элементарной операции в следующих случаях:

$$\text{I тип:}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{j1}+\lambda a_{i1} & \dots & a_{jn}+\lambda a_{in} & b_j+\lambda b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad i \neq j$$

В этом случае надо выполнить $n+1$ умножение и $n+1$ сложение, всего $2(n+1)$ операцию.

$$\text{II тип:}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

В этом случае выполняется $n+1$ swap элементов.

$$\text{III тип:}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} & \lambda b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad \lambda \neq 0$$

В этом случае выполняется $n+1$ умножение.

Теперь посчитаем количество операций для прямого хода Гаусса глядя на следующий пример. Обратите внимание, что мы можем не выполнять операции над нулями, потому на каждом следующем шаге у нас все меньше и меньше длина строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{2-я строка } - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot \text{1-я строка}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{3-я строка } - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot \text{1-я строка}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{3-я строка } - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot \text{2-я строка}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right)$$

На первом шаге нам может понадобиться перестановка строк, чтобы добиться $a_{11} \neq 0$. Это дает $n+1$ операцию. Далее для вычитания первой строки из каждой из нижних строк нам надо сделать $2(n+1)$ операцию. И всего у нас $m-1$ строка. И того будет $2(m-1)(n+1)+n+1 = (2m-1)(n+1)$ операция в худшем случае.

Теперь перейдем ко второй строке. Мы можем считать что в худшем случае мы сдвинулись на один столбец влево и на одну строку вниз. Потому обе размерности упали на 1. Значит у нас будет $(2(m-1)-1)(n-1+1)$ операций. Ясно, что на k-ом шаге будет $(2(m-(k-1))-1)(n-(k-1)+1) = (2(m-k)+1)(n-k+2)$ операция. Тогда общее количество операций будет в худшем случае

$$\sum_{k=1}^{\min(m,n)} (2(m-k)+1)(n-k+2)$$

Теперь я хочу рассмотреть отдельно $m \leqslant n$ и $m \geqslant n$. В первом случае, сделав замену $m-k \mapsto k$ имеем

$$\sum_{k=0}^{m-1}(2k+1)(n-m+k+2) = \sum_{k=0}^{m-1}\left(2k^2+2(n-m)k+k+4k+n-m+2\right) = \sum_{k=0}^{m-1}\left(2k^2+(2(n-m)+5)k+n-m+2\right)$$

Можно показать, что для многочлена h степени d значение $\sum_{k=0}^{n} h(k)$ будет многочленом степени $d+1$ от n. А старший коэффициент при этом делится на $d+1$.[1] Более точно верны следующие формулы

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2\,n^3 - 3\,n^2 + n}{6}$$

Значит у нас получится

$$2\frac{2\,m^3 - 3\,m^2 + m}{6} + (2(n-m)+5)\frac{m^2-m}{2} + (n-m+2)m$$

И если оставить только кубические члены от m и n, то получится

$$\frac{2}{3}m^3 + (n-m)m^2 + h(m,n) = nm^2 - \frac{1}{3}m^3 + h(m,n)$$

Теперь предположим, что $m \geqslant n$, тогда количество операций будет

$$\sum_{k=1}^{n}(2(m-n+n-k)+1)(n-k+2) = \sum_{k=0}^{n-1}(2(m-n+k)+1)(k+2)$$

Аналогично распишем это выражение по степеням k, получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(2k^2 + 2(m-n)k + k + 4(m-n) + 4k + 2\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(2k^2 + (2(m-n)+5)k + 4(m-n) + 2\right)$$

После суммирования получим

$$2\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + (2(m-n)+5)\frac{n^2-n}{2} + (4(m-n)+2)n$$

Теперь оставим только кубические члены

$$\frac{2}{3}n^3 + (m-n)n^2 + g(m,n)$$

где $g(m,n)$ – многочлен от m и n степени не выше 2. Упростим получим выражение

$$mn^2 - \frac{1}{3}n^3 + g(m,n)$$

Теперь вспомнил, что в первом случае m был минимумом из m и n, а во втором наоборот. Получается, что в общем случае основной вклад в сложность будет вносить выражение

$$\max(m,n)\min(m,n)^2 - \frac{1}{3}\min(m,n)^3$$

И в случае $m=n$ получится

$$\frac{2}{3}n^3$$

[1] Позже мы покажем это свойство с помощью линейных отображений.

Теперь посчитаем сложность обратного хода Гаусса глядя на следующий пример

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & \underline{a_{33}} & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{разделить } i\text{-ю строку на } a_{ii}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{2-я строка } - a_{23} \cdot \text{3-я строка}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{1-я строка } - a_{13} \cdot \text{3-я строка}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{1-я строка } - a_{12} \cdot \text{2-я строка}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \end{array}\right)$$

Мы теперь начинаем снизу. Тут я буду считать, что $m \leqslant n$, так как в ступенчатом виде количество строк не превосходит количества столбцов и равно количеству главных переменных. В худшем случае длина самой нижней строки будет $n - m + 2$ (1 главная позиция, $n - m$ свободных и 1 столбец правой части) и эту строку надо сначала нормировать, что делается за $n - m + 2$ операцию. А потом надо вычесть эту строку из всех верхних, которых $m - 1$ в худшем случае и это дает $2(m - 1)(n - m + 2)$ операций. И всего на последнюю строку у нас идет $(2m-1)(n-m+2)$ операция. Теперь если мы перейдем выше, то обратите внимание, что у нас длина строки будет опять $n-m+2$, потому что в этой строке будет только 1 ненулевая главная позиция, $n - m$ свободных и еще 1 столбец правой части. Но теперь нам надо вычесть из $m - 2$ строк. Значит будет $(2m - 3)(n - m + 2)$. Значит количество операций будет

$$\sum_{k=1}^{m}(2(m-k)+1)(n-m+2) = (\#\text{свобод} + 2)m^2 + h(m), \quad \text{где } h \text{ – многочлен степени не более 1}$$

Здесь $\#\text{свобод} = n - m$ – это количество свободных переменных системы. Таким образом прямой ход алгоритма Гаусса работает ассимптотически за куб, а обратный – за квадрат. Но в обратном ходе в коэффициенте сидит количество свободных переменных.