Семинар 2

Умножение на специальные виды матриц

Диагональные матрицы Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеют следующий вид[1]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Тогда AB и BA будут иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \dots & \lambda_{n-1} a_{1\,n-1} & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \dots & \lambda_{n-1} a_{2\,n-1} & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 a_{n-1\,1} & \lambda_2 a_{n-1\,2} & \dots & \lambda_{n-1} a_{n-1\,n-1} & \lambda_n a_{n-1\,n} \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \dots & \lambda_{n-1} a_{n\,n-1} & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \dots & \lambda_1 a_{1\,n-1} & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \dots & \lambda_2 a_{2\,n-1} & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} a_{n-1\,1} & \lambda_{n-1} a_{n-1\,2} & \dots & \lambda_{n-1} a_{n-1\,n-1} & \lambda_{n-1} a_{n-1\,n} \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \dots & \lambda_n a_{n\,n-1} & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

То есть при умножении на диагональную матрицу B слева у матрицы A умножаются строки на соответствующие диагональные элементы B. А при умножении A на матрицу B справа, у матрицы A умножаются столбцы на соответствующие значения.

Сдвиги Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеют следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

где все незаполненные клетки считаются равными нулю. Тогда прямая проверка показывает, что

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1\,n-2} & a_{1\,n-1} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2\,n-2} & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1\,1} & \dots & a_{n-1\,n-2} & a_{n-1\,n-1} \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad BA = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

То есть умножение на B справа сдвигает все столбцы матрицы A вправо, а умножение на B слева сдвигает все строки матрицы A вверх. Если мы хотим переставлять столбцы и строки по циклу, то надо умножать на матрицу B следующего вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

то есть добавить единичку слева снизу к предыдущей матрице. Проверьте, что умножение на нее действительно сдвигает столбцы и строки по циклу.

Коммутирующие матрицы

В общем виде матрицы не коммутируют друг с другом. Потому интересной является такая задача: для конкретной матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ найти все такие матрицы $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, которые коммутируют с A, то есть $AX = XA$. Давайте рассмотрим парочку конкретных матриц.

[1] Незаполненные части матриц – нули.

Диагональные матрицы Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Найдем $\{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$. Ответ на эту задачу достаточно простой. Оказывается в качестве X подходят диагональные матрицы и только они. Из определения умножения для диагональных матриц мы видим, что все диагональные точно коммутируют с A. Надо лишь показать, почему других матриц нет. Действительно, пусть X – произвольная матрица с неопределенными коэффициентами. Рассмотрим условие $AX = XA$. В произвольной ячейке с индексами i, j в левой матрице стоит элемент $\lambda_i x_{ij}$, а в правой матрице $\lambda_j x_{ij}$. Если $i = j$, то это один и тот же элемент и их равенство не дает никакого условия. Однако, для $i \neq j$ мы получаем, что условие $\lambda_i x_{ij} = \lambda_j x_{ij}$ влечет $x_{ij} = 0$ (тут мы пользуемся тем, что $\lambda_i \neq \lambda_j$). А это и означает, что все внедиагональные элементы матрицы X равны нулю, а значит она диагональна.

Матрица сдвига Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем $\{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$. Давайте для определенности рассмотрим задачу в случае $n = 4$, так будет проще уловить наши вычисления, то есть пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$AX = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

Так как матрицы AX и XA равны, то у них равны все элементы. Давайте посмотрим на первый столбец для начала сверху вниз. Тогда $x_{21} = (AX)_{11} = (XA)_{11} = 0$. Значит

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

Аналогично Тогда $x_{31} = (AX)_{21} = (XA)_{21} = 0$, то есть имеем

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{32} & x_{33} \\ 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

Потом видим, что $x_{41} = (AX)_{31} = (XA)_{31} = 0$ и значит

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{32} & x_{33} \\ 0 & 0 & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

Условие $(AX)_{41} = (XA)_{41}$ тривиальное и не дает никаких ограничений. Теперь сравним элементы матриц AX и XA во втором столбце начиная с диагонали вниз. Получим $x_{32} = (AX)_{22} = (XA)_{22} = 0$ и здесь мы пользуемся полученным знанием о том, что элемент $(XA)_{22}$ нулевой, получаем

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} \\ 0 & 0 & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

Продолжая в том же духе и переходя к следующим столбцам с диагонали и ниже, мы видим, что у нас будет следующая ситуация

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь нам надо рассмотреть все ячейки в матрицах AX и XA выше главное диагонали. Давайте начнем с элемента $1, 2$ и будем идти по диагонали вправо вниз. Видим, что $x_{22} = (AX)_{12} = (XA)_{12} = x_{11}$. Аналогично $x_{33} = (AX)_{23} = (XA)_{23} = x_{22}$ и $x_{44} = (AX)_{34} = (XA)_{34} = x_{33}$. То есть мы видим

$$X = \begin{pmatrix} a & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & a & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & a & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & a & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & a & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & a & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & a & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Продолжая аналогично рассматривать элементы выше главное диагонали на диагоналях параллельных главной, мы видим, что

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом в общем случае множество матриц X коммутирующих с A имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & a_n \\ & a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} \\ & & a_1 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_2 \\ & & & & a_1 \end{pmatrix}$$

То есть это верхнетреугольная матрица у которой на диагоналях главное параллельной стоят одинаковые числа.

Матрицы элементарных преобразований

Тип I Пусть $S_{ij}(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной вписыванием в ячейку $i\ j$ числа λ (при этом $i \neq j$, то есть ячейка берется не на диагонали). Эта матрица имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ на $S_{ij}(\lambda)$ слева прибавляет j строку умноженную на λ к i строке матрицы A, а умножение $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ на $S_{ij}(\lambda)$ справа прибавляет i столбец умноженный на λ к j столбцу матрицы B. Заметим, что $S_{ij}(\lambda)^{-1} = S_{ij}(-\lambda)$.

Тип II Пусть $T_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной перестановкой i и j столбцов (или что то же самое – строк). Эта матрица имеет следующий вид

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & i & & j & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ на T_{ij} слева переставляет i и j строки матрицы A, а умножение $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ на T_{ij} справа переставляет i и j столбцы матрицы B. Заметим, что $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$.

Тип III Пусть $D_i(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной умножением i строки на $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ (или что то же самое – столбца). Эта матрица имеет следующий вид

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & i & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ на $D_i(\lambda)$ слева умножает i строку A на λ, а умножение $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ на $D_i(\lambda)$ справа умножает i столбец матрицы B на λ. Заметим, что $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$.

Интерполяционная задача Пусть у нас заданы наборы чисел: $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$. Мы хотим найти многочлен $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ такой, чтобы в точках x_i он принимал значение y_i, то есть $y_i = p(x_i)$. Обратите внимание, что количество точек на единицу больше, чем степень многочлена и совпадает с количеством коэффициентов многочлена. Тогда многочлен p ищется с неопределенными коэффициентами. Условия $y_i = p(x_i)$ дают систему линейных уравнений вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ & & & \ldots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Теперь хочется объяснить, почему эта система будет всегда иметь решение. Ну, начнем с того, что это вообще говоря не правда! Чтобы это было правдой, надо потребовать, чтобы точки $x_1, \ldots, x_n$ – были различными. В этом случае действительно система выше всегда имеет единственное решение. То есть через любые n разных точек можно провести многочлен степени не выше $n-1$.

Давайте объясним, почему СЛУ всегда имеет решение при разных x_i. Для этого достаточно показать, что в системе количество главных переменных совпадает с количеством строк. В этом случае в ступенчатом виде ступенька никогда не возникнет в правой части, а это и будет означать наличие решения. Так как у нас количество уравнений равно количеству неизвестных, то мы должны доказать, что все переменные главные. А это то же самое, что доказать, что нет свободных переменных. А чтобы доказать, что нет свободных переменных, надо доказать, что однородная система

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ & & & \ldots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

имеет единственное, а значит нулевое, решение. Пусть у нас есть какое-то ненулевое решение, оно соответствует ненулевому многочлену $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$. А уравнения нашей системы означают, что

$x_1, \dots, x_n$ являются различными корнями нашего многочлена (вот тут мы пользуемся, что x_i различны). Но у нас многочлен степени $n-1$ не может иметь больше $n-1$ различных корней, противоречие.

Другой способ доказать существование решения – явно его предъявить. Давайте рассмотрим многочлен $x - x_1$ – он принимает значение 0 в x_1 и не ноль во всех других точках. Многочлен $x - x_2$ принимает 0 в x_2 и не ноль во всех других точках. Тогда $(x - x_1)(x - x_2)$ принимает значение 0 в двух заданных точках и не ноль во всех остальных. По аналогии мы можем построить многочлен

$$(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

который принимает ноль во всех точках кроме x_i, а в x_i у него ненулевое значение. Теперь мы можем построить многочлен, который в каждой точке кроме x_i равен нулю, а в x_i равен 1, разделив на значение в x_i, и получим:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Такой многочлен называется интерполяционным многочленом Лагранжа. Заметим, что степени всех таких многочленов равны $n-1$. В этом случае искомы многочлен будет иметь вид $p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i l_i(x)$. Таким образом мы доказали, что система, которая у нас получалась, имеет решение для любой правой части.