Семинар 20

Общая информация:

- Пусть $\varphi\colon V \to V$ – оператор. И пусть $p \in F[t]$ – многочлен такой что
  1. $p(\varphi)$ – необратим
  2. p неприводим
  3. старший коэффициент p равен 1.

  Тогда p – элемент идеального спектра. Идеальный спектр φ обозначается $\operatorname{spec}^I_F(\varphi)$.

- Для неприводимого многочлена со старшим коэффициентом 1 эквивалентно:
  1. p – элемент идеального спектра φ
  2. p делит минимальный многочлен φ
  3. p делит характеристический многочлен φ

- Обычный спектр вкладывается в идеальный следующим образом: число $\lambda \in \operatorname{spec}_F(\varphi)$ соответствует $t - \lambda \in \operatorname{spec}^I_F(\varphi)$.

- Для элемента $p \in \operatorname{spec}^I_F(\varphi)$ собственное подпространство определяется как

  $$V_p = \ker p(\varphi)$$

  а корневое как

  $$V^p = \bigcup_{k \geqslant 0} \ker p(\varphi)^k = \ker p(\varphi)^d$$

  где d – кратность p в минимальном многочлене φ.

Задачи:

1. Пусть $\varphi\colon V \to V$ – линейный оператор на пространстве над полем F. И пусть $p \in F[t]$ – элемент идеального спектра φ. Покажите, что существует инвариантное подпространство $U \subseteq V$ такое, что
   (a) $\dim U = \deg p$
   (b) U не содержит инвариантных кроме 0 и U.

2. Пусть $\varphi\colon V \to V$ – линейный оператор на пространстве над полем F. И пусть $p \in F[t]$ – элемент идеального спектра φ. Покажите, что размерность размерность V_p делится на $\deg p$.

3. Решить матричное уравнение $X^2 = A$, где (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda \neq \mu$. (c) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Все матрицы из $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

4. Пусть $\varphi, \psi\colon V \to V$ – два линейных оператора над $\mathbb{C}$ такие, что $[\varphi, \psi] = \psi$. Покажите:
   (a) Пусть V^λ – корневое подпространство для φ, тогда $\psi(V^\lambda) \subseteq V^{\lambda+1}$.
   (b) Покажите, что ψ нильпотентен.