

## Семинар 19

### Задачи:

1. Задачник. §40, задача 40.6
2. Задачник. §40, задача 40.9
3. Пусть  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  линейный оператор заданный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

- (a) Найдите собственные значения и базисы корневых подпространств.
  - (b) Покажите, что все пространство раскладывается в прямую сумму корневых и найдите проекторы на каждое корневое подпространство вдоль суммы оставшихся.
4. Пусть  $\phi: V \rightarrow V$  обратимый оператор в комплексном векторном пространстве. Выразите все собственные значения оператора  $\phi^2 - \phi^{-1}$  через собственные значения  $\phi$ .
  5. Найдите комплексные собственные значения следующих матриц

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} & 1 & & 1 \\ 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix}$$

6. Пусть  $\varphi, \psi: V \rightarrow V$  — два линейных оператора, где  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{C}$ .
  - (a) Напомним, что  $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$  называется коммутатором. Покажите, что если  $\text{rk}[\varphi, \psi] \leq 1$ , то для  $\varphi$  и  $\psi$  существует общий ненулевой собственный вектор. (Указание: постарайтесь найти общее инвариантное подпространство и воспользуйтесь индукцией по размерности пространства).
  - (b) Приведите пример операторов  $\varphi, \psi: V \rightarrow V$  на некотором пространстве таких, что  $\text{rk}[\varphi, \psi] = 2$  и у них нет общего собственного вектора.