Семинар 5

Отображения множеств

Пусть X, Y – некоторые множества, а $\varphi\colon X \to Y$ – отображение. Тогда φ называется *инъективным*, если оно «не склеивает точки», т.е. для любых $x, y \in X$ из условия $x \neq y$ следует $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Отображение φ называется сюръективным, если в любой элемент что-то переходит, т.е. для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $\varphi(x) = y$. Отображение φ называется *биективным*, если оно одновременно инъективно и сюръективно.

Для любого множества X отображение $\mathrm{Id}\colon X \to X$ заданное по правилу $\mathrm{Id}(x) = x$ называется *тождественным*. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ – некоторое отображение. Тогда $\psi\colon Y \to X$ называет *левым обратным* (соответственно *правым обратным*) к φ, если $\psi\varphi = \mathrm{Id}$ ($\varphi\psi = \mathrm{Id}$).[1] Левых и правых обратных для φ может быть много. Однако, если есть оба обратных и ψ_1 – левый обратный, а ψ_2 – правый обратный, то они совпадают, так как $\psi_1 = \psi_1(\varphi\psi_2) = (\psi_1\varphi)\psi_2 = \psi_2$. А следовательно совпадают все левые обратные со всеми правыми и такой единственный элемент называют *обратным* и обозначают φ^{-1}, а φ называют *обратимым*.

Задача. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ – некоторое отображение. Покажите, что

1. φ инъективно тогда и только тогда, когда φ обладает левым обратным.
2. φ сюръективно тогда и только тогда, когда φ обладает правым обратным.
3. φ биективно тогда и только тогда, когда φ обратимо.

Перестановки

Пусть $X_n = \{1, \ldots, n\}$ – конечное множество из n занумерованных элементов.[2] *Перестановкой* называется биективное отображение $\sigma\colon X_n \to X_n$. Множество всех перестановок на n элементном множестве будем обозначать через S_n.

Любая перестановка σ отправляет элемент i в некоторый элемент $\sigma(i)$, потому перестановку можно задать таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Заметим, что, если записать элементы $1, \ldots, n$ в другом порядке, скажем, $i_1, \ldots, i_n$, то перестановка σ запишется в виде[3]

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \ldots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$$

Обратная перестановка σ^{-1} записывается таблицей

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

На множестве перестановок естественным образом определена операция умножения, а именно, $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ для любых $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$ и $i \in X_n$. Тогда тождественная перестановка будет нейтральным элементом для этой операции, а обратная – обратным. Эта операция не коммутативна, т.е. порядок перемножения имеет значение.[4]

Циклические перестановки

Пусть $\sigma \in \mathrm{S}_n$ действует следующим образом. Для некоторого множества $i_1, \ldots, i_k$ выполнено

$$\sigma(i_1) = i_2, \ldots, \sigma(i_{k-1}) = i_k,\ \sigma(i_k) = i_1,$$

[1] Легко проверить, что существование левого обратного никак не связано с существованием правого обратного и наоборот.

[2] Формально говоря, это множество из n элементов и фиксированный линейный порядок на нем.

[3] Заметим, что в этой записи можно произвольным образом перемешивать столбцы, это никак не изменит задаваемую перестановку.

[4] Пример будет в разделе «Циклические перестановки».

а все остальные элементы остаются на месте под действием σ. Тогда σ называется *циклом* длины k. Такая перестановка для краткости обозначается $(i_1, \ldots, i_k)$. Заметим, что такая запись не единственная, например можно сказать $\sigma = (i_2, \ldots, i_k, i_1)$.[5] Таблицей такой цикл задается следующим образом

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{k-1} & i_k & j_1 & \ldots & j_{n-k} \\ i_2 & \ldots & i_k & i_1 & j_1 & \ldots & j_{n-k} \end{pmatrix}$$

где $\{1, \ldots, n\} = \{i_1, \ldots, i_k\} \sqcup \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$. Цикл длины 2 называется *транспозицией*, т.е. транспозиция – это перестановка каких-то двух элементов.

Два цикла $(i_1, \ldots, i_k)$ и $(j_1, \ldots, j_m)$ называются *независимыми*, если множества $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\{j_1, \ldots, j_m\}$ не пересекаются, т.е. множества действительно перемещаемых элементов не пересекаются. Заметим, что независимые циклы коммутируют друг с другом.

Задача. Покажите, что $(12)(23) = (123)$, а $(23)(12) = (321)$.

Структура перестановки

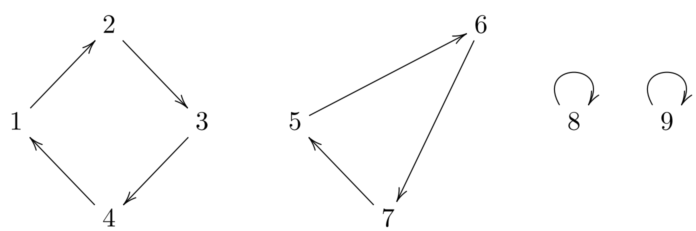
Пусть $\sigma \in \mathrm{S}_n$ и пусть $i_1 \in X_n$. Подействуем на него σ, получим $i_2 = \sigma(i_1)$ и т.д. Так как X_n конечно, то мы в какой-то момент повторимся, например $i_5 = i_2$, как на рисунке ниже

$$\begin{tikzcd}
 & i_2 \arrow[r, "\sigma"] & i_3 \arrow[dl, "\sigma"] \\
i_1 \arrow[ur, "\sigma"] & i_4 \arrow[u, "\sigma"] &
\end{tikzcd}$$

На этой картинке видно, что $\sigma(i_1) = \sigma(i_4)$, но σ инъективно, потому $i_1 = i_4$. То есть правильная картинка следующая

$$\begin{tikzcd}
 & i_2 \arrow[r, "\sigma"] & i_3 \arrow[dll, "\sigma"] \\
i_1 \arrow[ur, "\sigma"] & &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, для произвольной перестановки σ картинка, как она действует на X_n, будет выглядеть приблизительно следующим образом[6]



Таким образом, мы показали, что любая перестановка представляется в виде произведения независимых циклов. Например на рисунке выше $\sigma = (1234)(567)$.[7]

[5] Как легко видеть, другой неоднозначности в записи цикла нет.

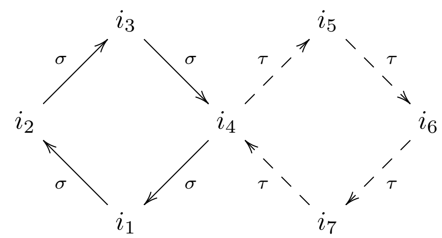
[6] На картинке $\sigma \in \mathrm{S}_9$.

[7] Иногда для удобства в этой записи неподвижные элементы учитывают как циклы длины 1, т.е. $\sigma = (1234)(567)(8)(9)$. Это бывает удобно для некоторых комбинаторных задач.

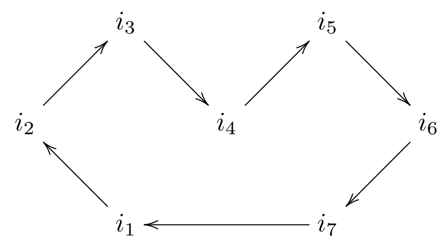
Произведение циклов

Два цикла

Пусть $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$ циклы зацепляющиеся по одному элементу, как на рисунке ниже



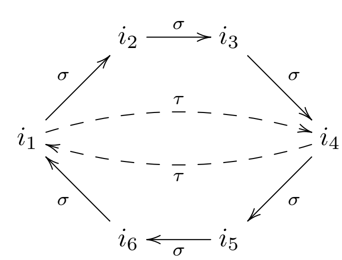
Надо найти произведение $\sigma\tau$. На рисунке ниже показано как выглядит произведение



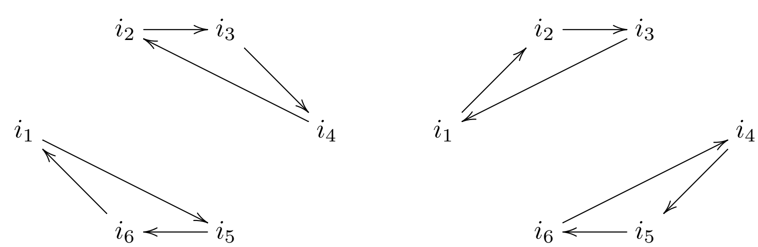
Таким образом, мы получили формулу $(i_1, \ldots, i_k)(i_k, \ldots, i_n) = (i_1, \ldots, i_n)$.

Цикл и транспозиция

Пусть $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$, где σ – цикл, а τ – транспозиция, переставляющая два элемента цикла σ как на рисунке ниже.



Вот так выглядят композиции для $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ соответственно

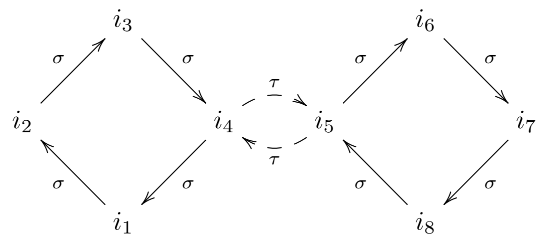


Таким образом общее правило выглядит так

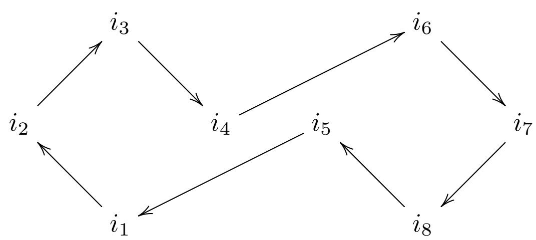
$$(i_1, \ldots, i_n)(i_1, i_k) = (i_1, i_{k+1}, \ldots, i_n)(i_2, \ldots, i_k)$$
$$(i_1, i_k)(i_1, \ldots, i_n) = (i_1, \ldots, i_{k-1})(i_k, \ldots, i_n)$$

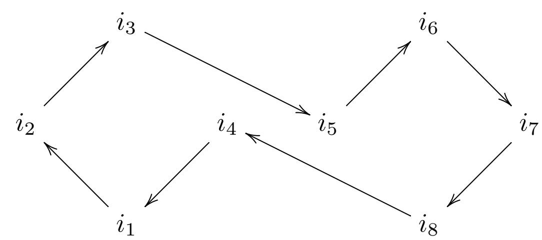
Пара циклов и транспозиция

Пусть $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$, причем, σ – произведение двух независимых циклов, а τ – транспозиция, переставляющая две вершины из разных циклов как на рисунке ниже.



Произведения $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ имеют вид





Таким образом общее правило выглядит так

$$(i_1, \dots, i_k)(i_{k+1}, \dots, i_n)(i_k, i_{k+1}) = (i_1, \dots, i_k, i_{k+2}, \dots, i_n, i_{k+1})$$
$$(i_k, i_{k+1})(i_1, \dots, i_k)(i_{k+1}, \dots, i_n) = (i_k, i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_n)$$

Знак перестановки

Пусть $X_n = \{1, \dots, n\}$ – конечное множество из n занумерованных элементов. Напомним, что перестановка σ на множестве X_n это биективное отображение $\sigma\colon X_n \to X_n$. Множество всех перестановок на n элементах обозначается S_n. Оказывается, можно построить единственное отображение

$$\operatorname{sgn}\colon \mathrm{S}_n \to \{\pm 1\} \quad \text{со свойством} \quad \operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) \text{ и } \operatorname{sgn} \not\equiv 1$$

Такое отображение называется знаком перестановки. Есть два отдельных вопроса: какими свойствами обладает подобное отображение и как его построить. Я разберу эти вопросы отдельно.

Построение знака

Обычно знак перестановки σ определяют в виде $(-1)^{d(\sigma)}$, где $d(\sigma)$ – некоторая целочисленная характеристика перестановки σ. Классическим определением является *число беспорядков*.[8] Пара элементов (i, j), где $i < j$ $i, j \in X_n$, называется *инверсией* для σ, если $\sigma(i) > \sigma(j)$, то есть на паре i, j функция σ убывает. Тогда определим $d(\sigma)$ как количество инверсий в σ и $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{d(\sigma)}$.

Другой способ определить знак – *декремент*. Декремент перестановки $\sigma \in \mathrm{S}_n$ это

$$\operatorname{dec}(\sigma) = n - \text{«количество циклов»} - \text{«количество неподвижных точек»}$$

Декремент можно описать еще так: каждая перестановка σ определяет граф на множестве вершин X_n, где (i, j) – ребро, если $\sigma(i) = j$. Тогда

$$\operatorname{dec}(\sigma) = \text{«количество вершин»} - \text{«количество компонент графа»}$$

В этом случае знак определяется $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\operatorname{dec}(\sigma)}$.

Теперь после определения знака, надо лишь показать, что он согласован с произведением. Это обычно делается руками в лоб. Помогает нам тот факт, что все числа из определения знака (число инверсий или декремент) нас интересуют по модулю 2, т.е. только их четность.

[8] Оно же *число инверсий*.

Важно При подсчета знака перестановки надо пользоваться декрементом. То есть, надо разложить перестановку в произведение независимых циклов и сложить их длины без единицы. Например:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 2 & 3 & 7 & 1 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Теперь видим, что

$$1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 8 \to 9 \to 6 \to 1$$
$$5 \to 7 \to 5$$

Значит $\sigma = (1,4,3,2,8,9,6)(57)$, а значит $\mathrm{dec}(\sigma) = 6 + 1 = 7$ и $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$.

Единственность знака

Единственность такого отображения вытекает из двух наблюдений. Во-первых, любая перестановка раскладывается в произведение транспозиций (сначала раскладываем в независимые циклы, а потом в каждый цикл в транспозиции). То есть все определяется значением на транспозициях. Во-вторых, так как все транспозиции сопряжены, то есть для любых транспозиций τ и τ' найдется перестановка σ, что $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$, значение знака на всех транспозициях совпадает. Из этих двух наблюдений и мультипликативности знака выводится единственность.

Свойства знака

Кратко перечислим самое главное

1. $\mathrm{sgn}(1) = 1$, где $1 \in \mathrm{S}_n$ обозначает тождественную перестановку.
2. $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)^{-1}$.
3. $\mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_k) = (-1)^{k-1}$
4. $\mathrm{sgn}(i, j) = -1$

Задача. Посчитайте $\prod_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)$.