Семинар 17

- Если задан оператор $\varphi\colon V \to V$ и $U \subseteq V$ – подпространство. То U называется инвариантным, если $\varphi(U) \subseteq U$. Или другими словами для любого $u \in U$ следует, что $\varphi(u) \in U$.
- Вектор $v \in V$ называется собственным, если для некоторого $\lambda \in F$ верно $\varphi(v) = \lambda v$. Если $v \neq 0$, то λ называется собственным значением для φ.
- Множество $V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ векторов, которые растягиваются на один и тот же коэффициент $\lambda \in F$ является подпространством и называется собственным подпространством для λ.
- Следующие условия эквивалентны
  1. λ – собственное значение.
  2. λ лежит в спектре φ.
  3. $V_\lambda \neq 0$.
- Одномерное подпространство $U = \langle v \rangle$, где $v \in V$ и $v \neq 0$, является φ инвариантным тогда и только тогда, когда v является собственным для φ.

Задачи:

1. Задачник. §40, задача 40.15 (в).
2. Задачник. §40, задача 40.1 (е).
3. Задачник. §40, задача 40.2.
4. Задачник. §40, задача 40.4.
5. Опишите инвариантные подпространства следующих операторов:
   (a) $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, где $\phi(x) = Ax$ и $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
   (b) $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, где $\phi(x) = Ax$ и $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
6. Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы два линейных оператора $\phi, \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ заданные следующими матрицами:

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

   Найдите базис подпространства $\ker \phi^{2020} \cap \operatorname{Im} \psi^{2021}$.