Семинар 1

Общая информация:

- Источник учебников: bookfi.net или z-lib.org
- Задачник – Кострикин. Сборник задач по Алгебре. МЦНМО. 2009г.
- СЛУ – система линейных уравнений
- ОСЛУ – однородная система линейных уравнений
- Матрица – это квадратная таблица заполненная числами
- Вектор – столбец из чисел, т.е. матрица с одним столбцом
- Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица коэффициентов СЛУ, $x = (x_j)$ – вектор переменных, $b = (b_i)$ – вектор чисел (где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant m$). Тогда соответствующую СЛУ будем для краткости записывать так $Ax = b$, а ее однородную версию $Ax = 0$; то есть, $Ax = b$ означает $\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} a_{ij}x_j = b_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Пусть A и B – матрицы одной высоты, тогда через $(A|B)$ будем обозначать матрицу полученную приписыванием B справа от A.
- Множество векторов с n координатами из вещественных чисел будем обозначать $\mathbb{R}^n$.
- Множество матриц с вещественными числами из m строк и n столбцов будем обозначать $\mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.
- Матрица заполненная целиком нулями называется «нулевой матрицей» и если нет путаницы с тем, какого она размера, ее обозначают через 0.

Задачи:

1. Задачник. §8, задача 8.1 (г).
2. Задачник. §8, задача 8.2 (з).
3. Задачник. §8, задача 8.7.
4. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_{5\,6}(\mathbb{R})$ имеет вид
$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных при любом значении $x \in \mathbb{R}$.
5. Задачник. §8, задача 8.13. Выражение $a|b$ значит, a делит b. $A = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_r)$ означает, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $a_{ii} = d_i$. Элементарные преобразования I типа допускаются с целыми параметрами, элементарные преобразования III типа – только умножения на ± 1.
6. Пусть A – квадратная матрица такая, что ОСЛУ $Ax = 0$ имеет ровно одно решение. Показать, что если B – матрица, а b – столбец чисел (оба той же высоты, что и A), то система $(A|B)x = b$ имеет бесконечное число решений. Опишите главные и свободные неизвестные.
7. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ некоторая матрица в ступенчатом виде и пусть B получена из A перестановкой двух соседних столбцов. Докажите, что B можно привести к ступенчатому виду с таким же количеством ступенек, что и A.