1

17.1. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$;

а)

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) Матрица поворота

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

2

в)

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^n$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^n$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\right)^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим несколько первых степеней

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

Можно заметить общее правило

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{pmatrix}$$

из которого следует, что

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$$

и продолжая исходное равенство

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2+n & 1\\ 5+3n & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3n & -n\\ 9n & 1-3n\end{pmatrix}$$

3

3. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – диагональная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix} \quad \text{где} \quad \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$$

Найдите все матрицы $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ коммутирующие с A.

Найдем матрицу X такую что $AX = XA$.

$$
AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_{11} & \lambda_1 X_{12} & \cdots & \lambda_1 X_{1n} \\ \lambda_2 X_{21} & \lambda_2 X_{22} & \cdots & \lambda_2 X_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n-1} X_{n-1,1} & \lambda_{n-1} X_{n-1,2} & \cdots & \lambda_2 X_{n-1,n} \\ \lambda_n X_{n1} & \lambda_n X_{n2} & \cdots & \lambda_2 X_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
XA = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_{11} & \lambda_2 X_{12} & \cdots & \lambda_n X_{1n} \\ \lambda_1 X_{21} & \lambda_2 X_{22} & \cdots & \lambda_n X_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1 X_{n-1,1} & \lambda_2 X_{n-1,2} & \cdots & \lambda_n X_{n-1,n} \\ \lambda_1 X_{n1} & \lambda_2 X_{n2} & \cdots & \lambda_n X_{nn} \end{pmatrix}
$$

Получается $\forall i, j: \quad \lambda_i X_{ij} = \lambda_j X_{ij}$.

То есть на главной диагонали ($i = j$) могут быть любые элементы.

Для остальных элементов ($i \neq j$) либо $\lambda_i = \lambda_j$, либо $X_{ij} = 0$.

Рассмотрим два случая матрицы A.

1 случай: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$

В таком случае матрица $A = \lambda 1$, а значит любая матрица X коммутирует с A

2 случай: существует множество индексов $\{k_i \in [1; n-1] : \lambda_{k_i} > \lambda_{k_i+1}\}$

Иными словами лямбды имеют вид $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{k_1} > \lambda_{k_1+1} = \ldots = \lambda_{k_2} > \lambda_{k_2+1} = \ldots$

Рассмотрим первую строчку. Следуя принципу

$$
\forall i, j: \quad \lambda_i X_{ij} = \lambda_j X_{ij}
$$

в ней могут быть произвольными ненулевыми только элементы в столбцах с 1 по k_1 так как λ_1 не равен любому значений λ_i, где $i > k_1$ и равен любому λ_i, где $i \leq k_1$.

Аналогично в строчках с номерами с 2 по k_1 могут быть ненулевыми только элементы в тех же столбцах. При этом они могут все еще быть произвольными.

Для строчек с номерами с $k_1 + 1$ до k_2 аналогично могут быть произвольными ненулевыми элементы в столбцах с $k_1 + 1$ до k_2 и тд.

В общем виде матрица X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1,k_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{1,k_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ X_{k_1,1} & X_{k_1,2} & \cdots & X_{k_1,k_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & X_{k_1+1,k_1+1} & X_{k_1+1,k_1+2} & \cdots & X_{k_1+1,k_2} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & X_{k_1+2,k_1+1} & X_{k_1+2,k_1+2} & \cdots & X_{k_1+2,k_2} & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & X_{k_2,k_1+1} & X_{k_2,k_1+2} & \cdots & X_{k_2,k_2} & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Значения обозначенные X_{ij} могут принимать любые числовые значения. Можно заметить, что первый случай просто вырожденный второй (размер "подквадрата" равен n)

4

4. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

   (a) Найти все $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $AJ(\lambda) = J(\lambda)A$.

   (b) Доказать, что для любого k верна формула

$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

   где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

a)

Пусть

$$SHIFT_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J(\lambda) &= \lambda E + SHIFT \\ AJ(\lambda) &= \lambda A + A \cdot SHIFT \\ J(\lambda)A &= \lambda A + SHIFT \cdot A \end{aligned}$$

а значит

$$AJ(\lambda) - J(\lambda)A = A \cdot SHIFT - SHIFT \cdot A = 0$$

По материалу семинара матрица A может иметь только такой вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

b)

В силу того что матрицы $(\lambda E)^{p_1}$ и $SHIFT^{p_2}$ коммутативны по умножению $\forall p_1, p_2$, мы можем применить бином Ньютона

$$J(\lambda)^k = (\lambda E + SHIFT)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (\lambda E)^i SHIFT^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i SHIFT^{k-i}$$

Посмотрим из чего состоит выражение

- $C_k^i \lambda^i$ - числовое выражение
- $SHIFT^{k-i}$ - матрица сдвига. Она соответствует сдвигу единичной матрицы на $k-i$ столбцов вправо.

Иными словами

$$SHIFT^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$SHIFT^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$SHIFT^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и тд.

Таким образом k-й член суммы, например, равен

$$\begin{pmatrix} C_k^k\lambda^k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C_k^k\lambda^k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_k^k\lambda^k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_k^k\lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_k^k\lambda^k \end{pmatrix}$$

а $k-1$-й равен

$$\begin{pmatrix} 0 & C_k^{k-1}\lambda^{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_k^{k-1}\lambda^{k-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_k^{k-1}\lambda^{k-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_k^{k-1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и общая сумма имеет вид, описанный в условии. При это для $k - i \geq n$ будет верно $SHIFT^{k-i} = 0$ (сдвиг выйдет за границы матрицы), поэтому эти члены суммы будут просто нулевыми.

5

$$CSHIFT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

это матрица циклического сдвига.

Рассмотрим

$$A \cdot CSHIFT = \begin{pmatrix} A_{1n} & A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n-1} \\ A_{2n} & A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{nn} & A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

$$CSHIFT \cdot A = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix}$$

Ограничение 1: Таким образом в зависимости от порядка множителей $\forall i \in [1; n-1], j \in [2; n]$ на место (i, j) может прийти либо элемент бывший в A в позиции $(i+1, j)$ (снизу), либо в позиции $(i, j-1)$ (слева).

*Ограничение 2: Для $i = n$ $\forall j \in [2; n]$ на место (i, j) может прийти элемент с позиции $(i, j-1)$ или $(1, j)$.

Ограничение 3: Для $j = 1$ $\forall i \in [1; n-1]$ на место (i, j) может прийти элемент с позиции (i, n) или $(i+1, j)$.

Ограничение 4: Для $i = n \wedge j = 1$ на место (i, j) может прийти элемент (n, n) или $(1, 1)$.

Построим такую матрицу с левого верхнего угла (обозначим его за a_1 и применим *Ограничение 1*)

$$\begin{pmatrix} a_1 & ? & ? & ? & \cdots & ? & ? & ? \\ ? & a_1 & ? & ? & \cdots & ? & ? & ? \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ ? & ? & ? & ? & \cdots & ? & a_1 & ? \\ ? & ? & ? & ? & \cdots & ? & ? & a_1 \end{pmatrix}$$

теперь пометим второй элемент в первом ряду за a_2 и применим *Ограничение 1*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ? & ? & \cdots & ? & ? & ? \\ ? & a_1 & a_2 & ? & \cdots & ? & ? & ? \\ ? & ? & a_1 & a_2 & \cdots & ? & ? & ? \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ ? & ? & ? & ? & \cdots & a_1 & a_2 & ? \\ ? & ? & ? & ? & \cdots & ? & a_1 & a_2 \\ ? & ? & ? & ? & \cdots & ? & ? & a_1 \end{pmatrix}$$

там можно заметить что *Ограничение 1* "левый элемент равен нижнему" дает равенство элементов на всех диагоналях выше главной

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ ? & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ? & ? & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ ? & ? & ? & ? & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 \\ ? & ? & ? & ? & \cdots & ? & a_1 & a_2 \\ ? & ? & ? & ? & \cdots & ? & ? & a_1 \end{pmatrix}$$

Теперь используя Ограничения 2, 3, 4 однозначно заполним первый столбец и последнюю строку

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & ? & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ a_4 & ? & ? & ? & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & ? & ? & ? & \cdots & ? & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

и теперь используя *Ограничение 1* однозначно задаются элементы ниже главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots & a_n & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

Можно проверить что полученная матрица удовлетворяет всем ограничениями. По построению нельзя построить другую матрицу удовлетворяющую ограничениям (мы в процессе построения не накладывали дополнительных ограничений).

6

Формулы сокращенного умножения

Но надо доказать что они применимы для матрица (с некоммутативным умножением)

Заметим, что

$$(A-E)\sum_{i=0}^{m-1} A^i E^{m-1-i} = (A-E)\sum_{i=0}^{m-1} A^i$$
$$= A - E + A^2 - E \cdot A + A^3 - E \cdot A^2 + \ldots + A^{m-1} - E \cdot A^{m-2} + A^m - E \cdot A^{m-1} = A^m - E = -E$$

А значит

$$-\sum_{i=0}^{m-1} A^i$$

обратная матрица для $A - E$ по определению.

Аналогично для четного m верно, что

$$(A+E)\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^n A^i E^{m-1-i} = (A+E)\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^n A^i$$
$$= A + E - A^2 - E \cdot A + A^3 + E \cdot A^2 - \ldots + A^{m-1} + E \cdot A^{m-2} - A^m - E \cdot A^{m-1} = E - A^m = E$$

А значит

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^n A^i$$

обратная матрица для $A + E$

Для нечетного m верно что

$$(A+E)\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^n A^i E^{m-1-i} = (A+E)\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^n A^i$$
$$= A + E - A^2 - E\cdot A + A^3 + E\cdot A^2 - \ldots - A^{m-1} - E\cdot A^{m-2} + A^m + E\cdot A^{m-1} = E + A^m = E$$

А значит и тут

$$\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^n A^i$$

обратная матрица для $A+E$