Семинар 23

Двойственное пространство

Пусть у нас дано векторное пространство V над полем F. Тогда по определению

$$V^* = \{f\colon V \to F \mid f \text{ – линейное}\}$$

будет множеством линейных отображений из V в поле F. Это множество можно снабдить операциями сложения и умножения на число, потому что это линейные отображения из векторного пространства V в векторное пространство F. Давайте я явно напомню, как они выглядят. Если $f, g\colon V \to F$ – два линейных отображения, то их сумма $f + g\colon V \to F$ – это такое линейное отображение, которое действует по правилу $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$. Если $\lambda \in F$ произвольное число, то отображение $\lambda f\colon V \to F$ – это отображение по правилу $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$. Можно проверить, что V^* превращается в векторное пространство. Это векторное пространство называется двойственным к V.

Пример Пусть $V = F^n$ – это пространство столбцов высоты n. Тогда любое отображение из $V = F^n$ в F описывается матрицей размера 1 на n. То есть описывается строкой вида $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in F$. При этом, если отображение $F^n \to F$ задано строкой a, то применение ее к вектору x означает умножение строки на вектор ax. Кроме того, операции сложения и умножения на скаляр для линейных функций превращаются в операции сложения и умножения на скаляр для строк, соответственно. Таким образом $V^* = F^n$ – пространство строк длины n, а операция применения функции к вектору – это операция умножения строки на вектор.

Пусть в примере выше $e_1, \ldots, e_n$ – стандартный базис $V = F^n$, а $e^1, \ldots, e^n$ – стандартный базис для $V^* = F^n$. Обратим внимание, что $e^i(e_j)$ будет 1, если $i = j$ и ноль иначе. В этом случае функции e^i – это как бы индикаторы базисных векторов, i-я функция e^i равна единичке только на e_i, а на всех остальных ноль. Оказывается, что подобное наблюдение можно обобщить на случай любых базисов в любых конечномерных векторных пространствах. А именно, можно построить процедуру, которая по любому базису V предъявляет некий специальным образом согласованный базис пространства V^*. Такой специальный базис будет называться двойственным к исходному базису. Теперь аккуратнее.

Пусть V – векторное пространство над F и пусть $e_1, \ldots, e_n$ – произвольный базис V. Тогда для любого i существует функция $\xi_i\colon V \to F$ такая, что e_i идет в 1, а все остальные базисные векторы идут в 0.[1] В итоге мы построили функции $\xi_1, \ldots, \xi_n$ со свойством $\xi_i(e_j) = \delta_{ij}$, то есть 1, если $i = j$ и ноль иначе. При таком выборе оказывается верно следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть V – векторное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$, а $\xi_i\colon V \to F$ – такие функции, что $\xi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Тогда ξ_i являются базисом V^*.*

Функции $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются базисом двойственным к базису $e_1, \ldots, e_n$. Теперь обратите внимание, какое главное свойство у двойственного базиса. Если мы выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ в V, то оно превратится в пространство столбцов F^n. Если мы теперь выберем базис $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то его мы будем считать пространством строк F^n. При этом если $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ и $f = y_1\xi_1 + \ldots + y_n\xi_n$, то

$$f(v) = \sum_i x_i f(e_i) = \sum_{ij} x_i y_j \xi_j(e_i) = \sum_i y_i x_i = yx$$

То есть, при таком выборе базиса V^* мы не просто превратили функции в строки длины n, но при этом операция применения функции к вектору превратилась в операцию умножения строки на вектор.

Двойственный базис и координаты Пусть $e_1, \ldots, e_n \in V$ – некоторый базис пространства и $\xi_1, \ldots, \xi_n \in V^*$ – двойственный к нему базис. Тогда любой вектор $v \in V$ раскладывается по базису так $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Если мы применим к v функция ξ_i, то получим

$$\xi_i(v) = \xi_i(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\xi_i(e_1) + \ldots + x_i\xi_i(e_i) + \ldots + x_n\xi_i(e_n) = x_i$$

То есть двойственный базис – это в точности функции вычисления координат у векторов.

[1] Такая функция существует, так как для задания линейного отображения, нам достаточно отправить базисные векторы пространства куда угодно. Мы это и сделали, мы отправили базисные векторы в числа 0 или 1.

Теперь пусть $\xi \in V^*$ какая-то линейная функция. Она как-то раскладывается по двойственному базису $\xi = \lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n$. Давайте поймем, как устроены координаты λ_i. Для этого применим ξ к базисному вектору e_i. Получим

$$\xi(e_i) = (\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n)(e_i) = \lambda_1\xi_1(e_i) + \ldots + \lambda_i\xi_i(e_i) + \ldots + \lambda_n\xi_n(e_i) = \lambda_i$$

Таким образом, координаты в двойственном базисе для линейных функций – это значения этих функций на исходном базисном векторе. Кратко можно резюмировать сказанное так: если вы знаете одновременно базис e_i и двойственный к нему базис ξ_i, то вы легко можете считать координаты в обоих базисах.

Вычисление двойственного базиса Полезно рассмотреть следующую задачу. Пусть $V = F^n$ и $g_1, \ldots, g_n$ – некоторый базис V. Надо найти двойственный ему базис в $V^* = F^n$. Так как любой элемент V^* можно считать строкой длины n, то мы будем искать строки $f_1, \ldots, f_n$ со следующим свойством

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \hline \ldots \\ \hline f_n \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} g_1 & \ldots & g_n \end{array} \right) = E$$

Таким образом двойственный базис к $g_1, \ldots, g_n$ ищется так: составляем матрицу $B = (g_1|\ldots|g_n)$, ищем к ней обратную B^{-1}, нарезаем ее на строки – это и будет двойственным базисом.