Семинар 12

Векторные пространства

Для того, чтобы определить векторное пространство, в начале надо зафиксировать некоторое поле F. Потому еще говорят векторное пространство над полем F.

Определение. Пусть F – некоторое фиксированное поле. Тогда векторное пространство над полем F – это следующий набор данных $(V, +, \cdot)$, где

- V – множество. Элементы этого множества будут называться векторами.
- $+\colon V \times V \to V$ – бинарная операция, то есть правило действующее так $(v, u) \mapsto v + u$, где $u, v \in V$.
- $\cdot\colon F \times V \to V$ – бинарная операция , то есть правило действующее так $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$, где $\alpha \in F$ и $v \in V$.

При этом эти данные удовлетворяют следующим 8 аксиомам:

1. **Ассоциативность сложения** Для любых векторов $u, v, w \in V$ верно $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2. **Существование нулевого вектора** Существует такой вектор $0 \in V$, что для любого $v \in V$ выполнено $0 + v = v + 0 = v$.
3. **Существование противоположного вектора** Для любого вектора $v \in V$ существует вектор $-v \in V$ такой, что $v + (-v) = (-v) + v = 0$.
4. **Коммутативность сложения** Для любых векторов $u, v \in V$ верно $u + v = v + u$.
5. **Согласованность умножения со сложением векторов** Для любого числа $\alpha \in F$ и любых векторов $u, v \in V$ верно $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$.
6. **Согласованность умножения со сложением чисел** Для любых чисел $\alpha, \beta \in F$ и любого вектора $v \in V$ верно $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.
7. **Согласованность умножения с умножением чисел** Для любых чисел $\alpha, \beta \in F$ и любого вектора $v \in V$ верно $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.
8. **Нетривиальность** Для любого $v \in V$ верно $1v = v$.[1]

Давайте обсудим, как сгруппированы эти аксиомы. Аксиомы (1–4) говорят вам о качестве сложения векторов в векторном пространстве. Далее аксиомы (5–7) говорят о том, как умножение векторов связано со сложением векторов, сложением чисел и умножением чисел соответственно. Последняя аксиома (8) – это аксиома нетривиальности, которая исключает всякие дурацкие патологии.

Полезные следствия

1. Нулевой элемент из аксиомы (2) обязательно единственный.
2. Элемент $-v$ из аксиомы (3) обязательно единственный.
3. Для $0 \in F$ и любого вектора $v \in V$ выполнено $0 \cdot v = 0 \in V$.
4. Для любого $\lambda \in F$ и $0 \in V$ выполнено $\lambda \cdot 0 = 0 \in V$.
5. Для любого вектора $v \in V$ выполнено $(-1) \cdot v = -v$.
6. Если $\lambda \in F$ и $v \in V$, то условие $\lambda \cdot v = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $\lambda = 0$, либо $v = 0$.

Если вам хочется что-то формально вывести из аксиом и не мучиться, то аксиомы плюс перечень следствий выше дает вам все, что нужно знать про формальное определение векторного пространства. А интуиция должна быть такая, если что-то верно в $\mathbb{R}^n$, то оно должно быть верно и в абстрактном случае.[2] А теперь доказательства:

[1] Здесь $1 \in F$.

[2] Тут надо быть аккуратным и не брать сильно специфичные свойства, например, которые отличают пространство $\mathbb{R}^n$ от пространства функций или многочленов или еще какой погани.

1. Пусть два нуля 0_1 и 0_2, тогда $0_1 + 0_2$ равен 0_2, так как 0_1 играет роль нуля. Аналогично $0_1 + 0_2$ равен 0_1 так как 0_2 играет роль нуля.

2. Пусть есть два обратных для вектора v, то есть найдется w и u из пространства V такие, что
$$\begin{cases} v + u = 0 \\ u + v = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} v + w = 0 \\ w + v = 0 \end{cases}$$
Но тогда
$$w = w + 0 = w + (v + u) = (w + v) + u = 0 + u = u$$

3. Мы знаем, что $0 + 0 = 0$. Умножим это на v и получим
$$(0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v \Leftrightarrow 0 \cdot v + 0 \cdot v = 0 \cdot v$$
Теперь можно к обеим частям прибавить $-(0 \cdot v)$, получим
$$0 \cdot v + 0 \cdot v + (-(0 \cdot v) = 0 \cdot v + (-(0 \cdot v)$$
Получим
$$0 \cdot v + 0 = 0 \in V \Leftrightarrow 0 \cdot v = 0 \in V$$

4. Аналогично предыдущему, пусть $0 \in V$. Тогда $0 + 0 = 0$. Тогда
$$\lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0$$
Прибавим к обеим частям $-(\lambda \cdot 0)$, получим
$$\lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 + (-(\lambda \cdot 0)) = \lambda \cdot 0 + (-(\lambda \cdot 0))$$
Или
$$\lambda \cdot 0 + 0 = 0 \in V \Leftrightarrow \lambda \cdot 0 = 0$$

5. Рассмотрим равенство $(-1) + 1 = 0$. Умножим обе части на $v \in V$, получим
$$((-1) + 1) \cdot v = 0 \cdot v \Leftrightarrow (-1) \cdot v + 1 \cdot v = 0 \in V \Leftrightarrow (-1) \cdot v + v = 0 \in V$$
Прибавим к обеим частям $-v$, получим
$$(-1) \cdot v + v + (-v) = 0 + (-v)$$
Значит
$$(-1) \cdot v + 0 = -v \Leftrightarrow (-1) \cdot v = -v$$

6. Если $\lambda = 0$, то доказывать нечего. Если же $\lambda \neq 0$ то умножим на $\frac{1}{\lambda}$:
$$\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \cdot v = 0 \in V \Leftrightarrow 1 \cdot v = 0 \in V \Leftrightarrow v = 0 \in V$$

Примеры

1. Поле F (или кто больше привык к вещественным числам $\mathbb{R}$) является векторным пространством над F (соответственно над $\mathbb{R}$).

2. Более обще, множество вектор-столбцов F^n является векторным пространством над F.

3. Множество матриц $\mathrm{M}_{m\,n}(F)$ является векторным пространством над F.

4. Пусть X – произвольное множество, тогда множество функций $\{f \colon X \to F\}$ является векторным пространством над F. Надо лишь объяснить как складывать функции и умножать на элементы F. Операции поточечные, пусть $f, g \colon X \to F$, тогда функция $(f + g) \colon X \to F$ действует по правилу $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Если $\alpha \in F$, то функция $(\alpha f) \colon X \to F$ действует по правилу $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

5. Множество многочленов $F[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in F\}$. Тут надо обратить внимание, что мы подразумеваем под многочленом. Для нас многочлен – это НЕ функция, многочлен – это картинка вида $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.[3] Складываются и умножаются эти картинки по одинаковым правилам. Важно, что две такие картинки равны тогда и только тогда, когда у них равные коэффициенты. Множество всех многочленов $F[x]$ является векторным пространством над F.

[3] Для любителей формализма, можете считать, что многочлен – это конечная последовательность элементов F вида $(a_0, \ldots, a_n)$.