Семинар 29

Ортогональные и ортонормированные базисы

Пусть V – евклидово пространство. Тогда

- Набор $v_1, \ldots, v_k \in V$ называется ортогональным, если $(v_i, v_j) = 0$ для всех $i \neq j$.
- Набор $v_1, \ldots, v_k \in V$ называется ортонормированным, если он ортогонален и $(v_i, v_i) = 1$ для любого i.

Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис V, то он называется ортогональным или ортонормированным базисом, если набор $e_1, \ldots, e_n$ ортогонален или ортонормирован.

Замечания

- Базис является ортогональным тогда и только тогда, когда матрица скалярного произведения в нем диагональная.
- Базис является ортонормированным тогда и только тогда, когда матрица скалярного произведения в нем единичная.
- Так как сигнатура скалярного произведения состоит только из плюсов, то всегда существуют ортонормированные базисы из общей теории диагонализации симметричных билинейных форм. Этот подход дает алгоритм симметричного Гаусса.
- Есть очень популярный алгоритм Грама-Шмидта для ортогонализации векторов. Это по сути метод Якоби для положительных симметричных билинейных форм.

По ортогональным и ортонормированным базисам удобно раскладывать произвольные векторы.

Утверждение. *Пусть V – евклидово пространство, $e_1, \ldots, e_n$ – базис и $v \in V$ – произвольный вектор. Тогда*

1. *Если $e_1, \ldots, e_n$ ортогональный, то*

$$v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \ldots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$$

2. *Если $e_1, \ldots, e_n$ ортонормированный, то*

$$v = (v, e_1)e_1 + \ldots + (v, e_n)e_n$$

Доказательство. Вторая формула есть элементарное следствие первой, так как $(e_i, e_i) = 1$ для ортонормированного базиса. Потому достаточно доказать первую формулу. Пусть $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Умножим скалярно левую и правую часть на вектор e_k, тогда получим $(v, e_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (e_i, e_k) = \alpha_k (e_k, e_k)$. Значит, $\alpha_k = \frac{(v, e_k)}{(e_k, e_k)}$, что и требовалось. □

Утверждение. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Тогда следующие условия равносильны*

1. $A^T A = E$.
2. $AA^T = E$.
3. $A^T = A^{-1}$.

Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ называется ортогональной, если выполнено одно из эквивалентных свойств из предыдущего утверждения, например, $A^T A = E$.

Замечание Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ стандартное скалярное произведение. Если $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, то условие $A^T A = E$ означает, что столбцы матрицы A образуют ортонормированный базис. Условие $AA^T = E$ означает, что строки матрицы A образуют ортонормированный базис. Важно понимать, что эти условия эквивалентны. А именно, если вы возьмете ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ и поставите эти векторы в столбцы матрицы A, то строки этой матрицы автоматически образуют некий другой ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Утверждение. *Пусть V – евклидово пространство. Тогда*

1. *Если $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ – два ортонормированных базиса, то матрица перехода между ними будет ортогональна.*

2. *Если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис и $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – ортогональная матрица, то базис $(e_1, \ldots, e_n)C$ будет ортонормированным.*

Доказательство. (1) Пусть $(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Так оба базиса ортонормированные, то матрица скалярного произведения в каждом из этих базисов единичная. По правилу изменения матрицы билинейной формы при смене базиса получаем $E = C^T EC$. Значит C ортогональная.

(2) Пусть $(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$. В базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица билинейной формы E, так как он ортонормированный. Матрица в базисе $f_1, \ldots, f_n$ будет $C^T EC$. Так как C ортогональная, то это будет E, то есть $f_1, \ldots, f_n$ – ортонормированный базис. □

Таким образом за переход между ортонормированными базисами отвечают только ортогональные матрицы.

Ортогонализация симметричным Гауссом

Дано Набор векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$, где V – евклидово пространство.

Задача Найти ортогональный базис $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Алгоритм

1. Построить матрицу попарных скалярных произведений

$$G = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \ldots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \ldots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \ldots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}$$

2. Составить матрицу $(G|E)$. Теперь нужно диагонализовать G симметричным Гауссом. При этом действия со строками делаются над всей матрицей $(G|E)$, а действия со столбцами только над матрицей G. При этом добьемся того, чтобы все ненулевые диагональные элементы стояли в начале после диагонализации.

3. Пусть матрица G привелась к виду:

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

   где d_r – последний ненулевой элемент на диагонали. И пусть матрица E привелась к матрице C. Выберем в матрице C первые r строк и транспонируем. Полученную матрицу обозначим за $D \in \mathrm{M}_{k\,r}(\mathbb{R})$.

4. Искомый ортогональный базис будет содержать r векторов, которые можно вычислить так $(v_1| \ldots |v_k)D$.

Пример Пусть нам задано пространство линейных многочленов $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 1}$ со скалярным произведением

$$(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

Рассмотрим систему $1, x, 1+x$. Матрица попарных скалярных произведений будет

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/3 & 5/6 \\ 3/2 & 5/6 & 7/3 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся симметричным Гауссом:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 5/6 & 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5/6 & 7/3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1/12 & 7/3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto$$
$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Тогда матрица D будет

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

И нужные векторы будут

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1+x \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} + x \end{pmatrix}$$

При этом в базисе $1, -1/2 + x$ матрица скалярного произведения будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Главный плюс этого метода в том, что он позволяет уйти от абстрактных векторных пространств и работать сугубо с матрицами.

Отртогонализация Грама-Шмидта

Дано Множество векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Задача Найти множество $u_1, \ldots, u_s$ такое, что u_i попарно ортогональны и $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle u_1, \ldots, u_s \rangle$.

Алгоритм

1. Берем первый ненулевой вектор среди v_i. Пусть это будет v_1. Тогда полагаем $u_1 = v_1$.

2. Рассмотрим $v_2 - \frac{(v_2,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1$. Если этот вектор не ноль, то обозначим его за u_2. Если ноль, то выкинем v_2 и перенумеруем вектора так, что v_3 теперь будет вектором v_2. Повторяем этот шаг до тех пор, пока не найдем u_2 или пока не закончатся вектора v_i.

3. Рассмотрим $v_3 - \frac{(v_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 - \frac{(v_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2$. Если он не ноль, то обозначим его за u_3. Иначе как и в предыдущем пункте переходим к следующему вектору и повторяем этот шаг.

4. Для поиска u_i надо рассмотреть вектор $v_i - \frac{(v_i,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 - \ldots - \frac{(v_i,u_{i-1})}{(u_{i-1},u_{i-1})}u_{i-1}$. Аналогично предыдущему пункту, если этот вектор не ноль, то это u_i. Если ноль, то рассматриваем следующий v_{i+1} вместо него и повторяем этот шаг.

Пример Пусть у нас заданы векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}3\\3\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix} \text{ и } v_4 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Первый вектор не ноль, значит $u_1 = v_1$. Теперь рассмотрим

$$v_2 - \frac{(v_2, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 = \begin{pmatrix}3\\3\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{3+3+1+1}{1+1+1+1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Значит $u_2 = v_2 - 2u_1$. Теперь рассмотрим

$$v_3 - \frac{(v_3, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 - \frac{(v_3, u_2)}{(u_2, u_2)} u_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2+2+1+1}{1+1+1+1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2+2-1-1}{1+1+1+1}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

Значит забываем про v_3 и переходим к следующему вектору.

$$v_4 - \frac{(v_4, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 - \frac{(v_4, u_2)}{(u_2, u_2)} u_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{2+1-1}{1+1+1+1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2-1+1}{1+1+1+1}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Таким образом ответ

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \text{ и } u_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Важно понимать, что этот алгоритм численно не устойчив и численно применяют совсем другой метод ортогонализации.

Дополнение до ортогонального базиса

Дано Набор векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = x^T B y$.

Задача Проверить является ли система $v_1, \ldots, v_k$ ортогональной. И если является, то дополнить до ортогонального базиса $\mathbb{R}^k$.

Алгоритм

1. Составим матрицу $A = (v_1 | \ldots | v_k)$.
2. Чтобы система была ортогональной надо, что матрица $A^T B A$ была диагональной.
3. Если система ортогональна, решим систему $A^T B x = 0$. И пусть $z_1, \ldots, z_{n-k}$ – ФСР системы. Это будет базис ортогонального дополнения к $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.
4. Применим какой-нибудь алгоритм ортогонализации к $z_1, \ldots, z_{n-k}$ и получим $v_{k+1}, \ldots, v_n$ – искомое дополнение.