Семинар 15

Задачи:

1. Задачник. §39, задача 39.15 (и). Матричными единицами называются матрицы заполненные нулями, а в одном месте единичкой.

2. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$

   (a) Показать, что f_1, f_2, f_3 образуют базис в $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора x в этом базисе.

   (b) Показать, что g_1, g_2 образуют базис в $\mathbb{R}^2$ и найти координаты вектора $\phi(x)$ в этом базисе.

   (c) Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2.

3. Пусть линейной отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ задано по правилу $x \mapsto Ax$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

   Можно ли найти линейное отображение $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ такое, что $\operatorname{Im}\phi = \ker\varphi$ и $\ker\phi = \operatorname{Im}\varphi$?

4. Найти матрицу какого-нибудь линейного отображения $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ такого, что $\ker\phi = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle$ и $\operatorname{Im}\phi = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

5. Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Существует ли линейное отображение $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\phi(v_i) = u_i$, где

   (a) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (b) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

6. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n. Пусть $\frac{d}{dx}\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ – отображение дифференцирования многочлена по переменной x.

   (a) Найти матрицу этого отображения в базисе $1, x, \ldots, x^n$.

   (b) Пусть $p \in \mathbb{R}[x]$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите, что уравнение $af'' + bf' + f = p$ имеет единственное решение.

   (c) Пусть $p \in \mathbb{R}[x]$ и $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что уравнение $af'' + f' = p$ имеет решение.