

Семинар 29

Общая информация:

- Напомню, что *евклидово пространство*, это векторное пространство V (обязательно над полем \mathbb{R}) с «хорошей» билинейной формой $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (ее значение на векторах $v, u \in V$ обозначается (v, u)), т.е. (1) симметричной $(v, u) = (u, v)$, (2) положительно определенной $(v, v) > 0$ для любого ненулевого $v \in V$.
- В евклидовом пространстве определены длины и углы. Для вектора $v \in V$ его длина $|v|$ это $\sqrt{(v, v)}$. Если $v, u \in V$ – два вектора и α – угол между ними, то $\cos \alpha = \frac{(v, u)}{|v||u|}$.
- Векторы v и u называются ортогональными, если $(v, u) = 0$, то есть $\cos \alpha_{vu} = 0$, а это значит, что угол между векторами – 90° .
- Расстояние от вектора $v \in V$ до вектора $u \in V$, это $|v - u|$. Расстояние от вектора v до какого-то подмножества $X \subseteq V$ – это $\inf_{x \in X} |v - x|$ – нижняя грань расстояний до всех возможных точек из X .

Задачи:

1. Задачник. §43, задача 43.15 (а).
2. Задачник. §43, задача 43.19 (а).
3. Задачник. §43, задача 43.21 (а).
4. Задачник. §43, задача 43.28 (а).
5. Задачник. §43, задача 43.38 (а).
6. Задачник. §43, задача 43.39.
7. Пусть V – евклидово пространство. Для ненулевого вектора $v \in V$ построим оператор $\phi_v: V \rightarrow V$ по правилу $u \mapsto u - 2\frac{(u, v)}{(v, v)}v$. Найдите след этого оператора.
8. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ ($n > 1$), относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?