

Семинар 5

Общая информация:

- Декремент перестановки $\sigma \in S_n$ это

$$\text{dec}(\sigma) = n - \text{количество нетривиальных циклов} - \text{количество неподвижных точек}$$

где нетривиальный цикл – это цикл длины хотя бы 2.

- Транспозиция – это цикл длины 2.

Задачи:

1. Задачник. §3, задача 3.2 (в, е).
2. Задачник. §3, задача 3.3 (а, в).
3. Задачник. §3, задача 3.6 (а, д).
4. Найти все такие $\sigma \in S_6$, что выполнено

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sigma^{-1} = (3, 4)(1, 5, 6)$$

5. Пусть $\sigma, \tau \in S_n$ причем τ – транспозиция. Покажите, что $\text{dec}(\sigma\tau) = \text{dec}(\sigma) \pm 1$.
6. Пусть $\sigma \in S_n$ представлена в виде $\sigma = \tau_1 \dots \tau_d$, где τ_i – транспозиции (вообще говоря зависимые) и пусть d – наименьшее из возможных таких чисел. Покажите, что $d = \text{dec}(\sigma)$.
7. Пусть $\sigma, \tau \in S_n$, покажите
 - $\text{dec}(\tau\sigma\tau^{-1}) = \text{dec}(\sigma)$
 - $\text{dec}(\sigma^{-1}) = \text{dec}(\sigma)$
 - $\text{dec}(\sigma\tau) = \text{dec}(\tau\sigma)$
 - $\text{dec}(\sigma\tau) \leq \text{dec}(\sigma) + \text{dec}(\tau)$
8. Для любых $\sigma, \tau \in S_n$ обозначим $d(\sigma, \tau) = \text{dec}(\sigma\tau^{-1})$. Покажите, что $d(\sigma, \tau)$ является метрикой, т.е.
 - $d(\sigma, \tau) \geq 0$ для любых $\sigma, \tau \in S_n$
 - $d(\sigma, \tau) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma = \tau$
 - $d(\sigma, \tau) = d(\tau, \sigma)$ для любых $\sigma, \tau \in S_n$
 - $d(\sigma, \tau) \leq d(\sigma, \rho) + d(\rho, \tau)$ для любых $\sigma, \tau, \rho \in S_n$