

## Семинар 4

### Общая информация:

- Пусть  $X$  и  $Y$  – некоторые множества, а  $f: X \rightarrow Y$  – произвольное отображение, тогда запись  $f(X)$  означает подмножество в  $Y$  состоящее из всех элементов вида  $f(x)$  при  $x \in X$ .

### Задачи:

1. Найти матрицу обратную к данной:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Задачник. §19, задача 19.16.

3. Пусть  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , а  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ . Покажите, что<sup>1</sup>

- (a) верно

$$\text{spec}_{\mathbb{R}}(AB) \cup \{0\} = \text{spec}_{\mathbb{R}}(BA) \cup \{0\}$$

То есть спектр  $AB$  это тоже самое, что спектр  $BA$  с точностью до быть может нулевого значения.

- (b) если  $m > n$ , то верно

$$\text{spec}_{\mathbb{R}}(AB) = \text{spec}_{\mathbb{R}}(BA) \cup \{0\}$$

- (c) если  $m = n$ , то верно

$$\text{spec}_{\mathbb{R}}(AB) = \text{spec}_{\mathbb{R}}(BA)$$

4. Пусть  $A \in M_n(\mathbb{R})$  и  $f \in \mathbb{R}[x]$ . Покажите:

- (a)  $\text{spec}_{\mathbb{R}} f(A) \supseteq f(\text{spec}_{\mathbb{R}} A)$ .<sup>2</sup>

- (b) Приведите пример матрицы  $A$  и многочлена  $f$ , когда во вложении выше строгое неравенство.

5. Найдите минимальный многочлен  $f \in \mathbb{R}[x]$  для следующей матрицы

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Пусть  $X \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $E$  – единичная матрица размера  $n$  и для некоторого  $\lambda \in \mathbb{R}$  верно  $XX^t = \lambda E$ . Верно ли, что  $X^t X = \lambda E$ ?

---

<sup>1</sup>На самом деле это утверждение верно для любого спектра: рационального, комплексного и т.д.

<sup>2</sup>Для тех кто не боится комплексных чисел. Покажите, что  $\text{spec}_{\mathbb{C}} f(A) = f(\text{spec}_{\mathbb{C}} A)$ .