1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 12 & 9 & 3 & 10 & 13 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ответ

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2

Пусть $\lambda \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1+\lambda) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1+\lambda) & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & (1+\lambda) & \lambda^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\lambda & -\lambda^2 - 2\lambda & 1 - \lambda^2(1+\lambda) \\ 0 & \lambda & -\lambda & -\lambda^2 + \lambda \\ 1 & 1 & (1+\lambda) & \lambda^2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -\lambda^2 - 3\lambda & 1 - \lambda^2(1+\lambda) - \lambda^2 + \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & -\lambda^2 + \lambda \\ 1 & 1 & (1+\lambda) & \lambda^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -\lambda^2 - 3\lambda & -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda + 1 \\ 1 & 1 & (1+\lambda) & \lambda^2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \lambda - 1 + \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda} \\ 1 & 1 & (1+\lambda) & \lambda^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \lambda - 1 + \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda} \\ 1 & 0 & 0 & \lambda^2 - \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda} - (1+\lambda)(\lambda - 1 + \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda}) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \lambda - 1 + \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-\lambda^2 + 2}{\lambda^2 + 3\lambda} \end{array}\right)$$

Пусть $\lambda = 0$, тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

очевидно эта СЛАУ решений не имеет.

3

$$\begin{gathered}f(x) = Ax^2 + Bx + C \\ f(1) = A + B + C = 8 \\ f(-1) = A - B + C = 2 \\ f(2) = 4A + 2B + C = 14\end{gathered}$$

В матричном виде

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 14\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -3 & -18\end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -12\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)$$

Ответ: $f(x) = x^2 + 3x + 4$

4

$$\begin{pmatrix}1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1\end{pmatrix}$$

По равенству столбцов

$$\begin{gathered}(1) = (6) \\ (2) = (5) \\ (3) = (4)\end{gathered}$$

сделаем замену

$$\begin{gathered}y_1 = x_1 + x_6 \\ y_2 = x_2 + x_5 \\ y_3 = x_3 + x_4\end{gathered}$$

Тогда матрица будет

$$\begin{pmatrix}1 & x & 1 \\ x & 1 & x \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x & 1 \\ x & 1 & x \\ 0 & 0 & 1-x \\ 0 & 1-x & x-1\end{pmatrix}$$

Пусть $x \neq 1$

Тогда $y_3 = 0$, но тогда $y_2 = 0$ и $y_1 = 0$. Делая обратную замену, есть только 3 главных переменных.

Пусть $x = 1$

Тогда матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

То есть $y_1 = -y_2 - y_3$. Делая обратную замену $x_1 + x_6 = -x_2 - x_5 - x_3 - x_4$ или $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6$. То есть только одна главная переменная.

5

Пусть дана матрица

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & . & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для начала будем считать, что $m = n$

1. Получим диагональную матрицу

Рассмотрим a_{11} и a_{12}. Проведем между ними алгоритм Евклида, при помощи элементарных операций над первыми двумя строками. Если после этого ненулевое число оказалось во второй строчке поменяем первые две строки местами

$$\begin{pmatrix} НОД(a_{11}, a_{12}) & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & . & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Штрихами покажем элементы, которые могли поменяться.

Теперь $a_{12} = 0$. Аналогично занулим все числа в первом столбце и потом в первой строке (при помощи элементарных преобразований столбцов).

$$\begin{pmatrix} gcd_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & & . & \vdots \\ 0 & a''_{n2} & \cdots & a''_{nn} \end{pmatrix}$$

Теперь проведем то же самое для минора без первой строки и первого столбца. И так далее для правых нижних миноров. Получим диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} gcd_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & gcd_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & . & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & gcd_{nn} \\ & \text{(сколько-то нулевых строк)} & & \end{pmatrix}$$

Если на какой-то итерации в следующем элементе главной диагонали оказался 0, поменяем столбца местами чтобы убрать этот 0. Если это невозможно (т.е. какая-то строка полностью нулевая) переместим эту строку вниз

2. Превратим диагональ в последовательность делителей

Прибавим к первому столбцу все остальные и опять занулим все элементы в нем кроме первого алгоритмом Евклида. При этом правые нижние миноры никак не поменяются так как в первой строке все элементы кроме первого нули. А еще в первом элементе окажется $\textit{НОД}(gcd_{11}, gcd_{22}, \ldots, gcd_{nn})$.

Теперь прибавим ко второму столбцу все столбцы начиная с третьего и тоже проведем алгоритм Евклида. Это тоже не поменяет следующие миноры при этом в gcd_{22} окажется $\textit{НОД}(gcd_{22}, gcd_{33}, \ldots, gcd_{nn})$.

По свойствам НОД выполнится свойство что каждый предыдущий элемент в диагонали делит следующий чтд.

Пусть $m < n$ тогда после тех же преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} gcd_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & gcd_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & . & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & gcd_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

или если $m > n$, то матрицу

$$\begin{pmatrix} gcd_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & gcd_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & . & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & gcd_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

при этом для элементов на главной диагонали "подквадрата" будут выполняться те же свойства.

В общем виде матрица будет иметь вид, описанный в условии:

$$\begin{pmatrix} diag(d_1, \dots, d_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

при этом $d_i | d_{i+1}$

6

Рассмотрим матрицу A. Если система $Ax = 0$ имеет ровно одно решение, то это решение нулевое. А это значит, что после прохода алгоритма Гаусса матрица A приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

А значит, что после прохода алгоритма Гаусса по СЛАУ $(A|B)x = b$ она будет иметь вид:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & B'_{11} & B'_{12} & \cdots & B'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & B'_{21} & B'_{22} & \cdots & B'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & B'_{m1} & B'_{m2} & \cdots & B'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

В такой СЛАУ решение описывается как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix} - x_{m+1} \begin{pmatrix} B'_{11} \\ B'_{21} \\ \vdots \\ B'_{m1} \end{pmatrix} - \dots - x_{m+n} \begin{pmatrix} B'_{1n} \\ B'_{2n} \\ \vdots \\ B'_{mn} \end{pmatrix}$$

а значит решений бесконечно много.

7

Количество ступенек в ступенчатом виде = количеству главных переменных в СЛАУ. Когда мы меняем два столбца местами происходит замена переменной при которой две переменные меняются местами.

При этой замене количество главных переменных не уменьшается, а значит матрицу можно привести к ступенчатому виду с тем же числом ступеней.

TODO: причем тут соседние столбцы?