

Семинар 4

Поиск минимального многочлена

Сведение к СЛУ Пусть задана матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$. То мы знаем, что найдется многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ такой, что $f(A) = 0$. Кроме того, я сообщил, что $\deg f \leq n$. Давайте обсудим, как найти подобный многочлен. Будем искать его с неопределенными коэффициентами $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Подставим в многочлен матрицу A и приравняем результат к нулю.

$$f(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_nA^n = 0$$

Тогда, то что написано является системой из n^2 уравнений, а именно

$$\{1 \leq i, j \leq n\} E_{ij}a_0 + A_{ij}a_1 + \dots + (A^n)_{ij}a_n = 0$$

Здесь через B_{ij} обозначены коэффициенты матрицы B , например, E_{ij} – это ij -ый коэффициент единичной матрицы, а $(A^n)_{ij}$ – ij -ый коэффициент матрицы A^n .

Теперь нас интересует ненулевое решение этой системы, у которого как можно больше нулей справа. Давайте поясню. Такое решение отвечает зануляющему многочлену. Мы хотим выбрать такой многочлен как можно меньшей степени. То есть мы хотим по возможности занулить a_n , потом a_{n-1} , потом a_{n-2} и так далее, пока находится ненулевое решение. Предположим, что мы привели систему к ступенчатому виду и a_k – самая левая свободная переменная. Я утверждаю, что k и будет степенью минимального многочлена, а чтобы его найти надо положить $a_k = 1$, а все остальные свободные переменные равными нулю.

Действительно, если мы сделали, как описано, то все главные переменные правее a_k тоже равны нулю, ибо они зависят от свободных переменных, стоящих правее, а они в нашем случае нулевые. То есть a_k будет старший ненулевой коэффициент в искомом многочлене, а значит k будет его степенью. Почему нельзя найти меньше. Чтобы найти меньше надо занулить еще и a_k . То есть все свободные переменные в этом случае будут нулевыми, а тогда и все главные будут нулевыми, а это даст нулевое решение, что противоречит нашим намерениям найти ненулевой многочлен.

Вычленение из какого-то зануляющего Предположим, что вы угадали какой-нибудь зануляющий многочлен для вашей матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$, а именно, нашли какой-то $f \in \mathbb{R}[x]$ такой, что $f(A) = 0$. Тогда можно попытаться найти минимальный многочлен среди делителей многочлена f . Эта процедура требует уметь искать эти самые делители. Но в некоторых ситуациях эта процедура тоже бывает полезна. Например, в случае большой блочной матрицы A бывает проще найти зануляющий многочлен.