Семинар 14

Опорные миноры

Теперь в матрице $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ с рангом $\operatorname{rk} A = r$ мы хотим найти все невырожденные подматрицы размера r на r. Для этого давайте докажем следующий факт.

Утверждение. *Пусть в матрице $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ матрица получающаяся на пересечении строк с номерами $j_1, \ldots, j_k$ и столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_k$ невырождена. Тогда соответствующие строки и столбцы линейно независимы. Если же $k = r = \operatorname{rk} A$, то верно и обратное, а именно. Если $j_1, \ldots, j_r$ – номера базисных строк, и $i_1, \ldots, i_r$ – номера базисных столбцов, то на их пересечении стоит невырожденная матрица.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует вот из какого замечания. Пусть нам дали векторы $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Пусть теперь векторы $v'_1, \ldots, v'_k$ получены вычеркиванием каких-то координат из всех векторов (то есть получаются более короткие векторы). Если короткие векторы линейно независимы, то и исходные были линейно независимы.

В обратную сторону. Предположим, что $j_1, \ldots, j_r$ – номера базисных строк, и $i_1, \ldots, i_r$ – номера базисных столбцов. Давайте переставим все эти строки в начало и все столбцы в начало матрицы A. Ясно, что от этого не поменяется подматрица на пересечении и свойство того, что столбцы и строки были базисные не поменяются. В то же время наша матрица теперь имеет вид

$$\begin{pmatrix} D & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

где D и есть матрица на пересечении первых r строк и столбцов. Надо доказать, что она невырождена. Так как первые r столбцов базисные, это значит, что любой столбец есть их линейная комбинация. А значит вычитая первые r столбцов из остальных, мы можем занулить всю правую часть матрицы A и прийти к виду:

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

При этом матрица D никак не поменяется. Кроме того первые r строк все еще останутся базисными, как и первые r столбцов. Теперь аналогично поступим со строками и занулим все снизу от матрицы D. Получим

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

И при этом первые r строк и столбцов остались базисными. А это и значит, что матрица D невырождена, что и требовалось. $\square$

Таким образом, чтобы найти невырожденную подматрицу заданного ранга достаточно выделить базис столбцов, выделить базис строк (это всего два гаусса) и после этого взять матрицу на их пересечении. Теоретически можно было бы искать подобный минор жадно, но это тоже требует тех еще трудозатрат по времени.