Семинар 3

Общая информация:

- Если $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ – многочлен с вещественными коэффициентами, а $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, то можно определить $p(A)$ следующим образом

  $$p(A) = a_0E + a_1A + \ldots + a_nA^n$$

  где $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица.

Задачи:

1. Задачник. §18, задача 18.3 (а, д).
2. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ найти $A^2 - \operatorname{tr}(A)A$.
3. Задачник. §17, задача 17.24.
4. Задачник. §19, задача 19.15.
5. Задачник. §19, задача 19.20.
6. Задачник. §19, задача 19.21.
7. Задачник. §18, задача 18.17.
8. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – некоторая матрица, рассмотрим две системы $Ax = 0$ и $A^ty = 0$. Покажите, что у этих систем одинаковое количество главных переменных, проделав следующие пункты:
   (a) Объясните, что для любой матрицы достаточно показать, что $\#\,\text{главных}\,A^t \leqslant \#\,\text{главных}\,A$.
   (b) Пусть $\#\,\text{главных}\,A = d$. Выполним следующие преобразования: Применим к A гаусса по строкам и приведем к улучшенному ступенчатому виду $B = U_1A$ (будет d ненулевых строк). Покажите, что можно применить к B преобразования столбцов и получить матрицу $C = BU_2$ следующего вида (матрица E будет d на d):
   $$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (c) Покажите, что если мы применим к матрице A преобразования столбцов U_2, то есть рассмотрим $D = AU_2$, то получится матрица с не более чем d ненулевыми столбцами.
   (d) Вывести предыдущих пунктов, что количество главных переменных для $Ax = 0$ и $A^ty = 0$ совпадает.