# Семинар 30

## Общая информация:

- Если $V$ – евклидово пространство, и $U \subseteq V$ – подпространство, то $V = U \oplus U^{\perp}$. Тогда любой вектор $v \in V$ представляется единственным образом в виде $v = u + w$, где $u \in U$ и $w \in W$. В этом случае $u$ называется ортогональной проекцией $v$ на $U$, а $w$ ортогональной составляющей.
- Напомню, что длину вектора $v \in V$ я обозначаю через $|v|$.
- Для набора векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$ матрица Грама $G(v_1, \ldots, v_k)$ – это матрица с коэффициентами $(v_i, v_j)$.
- Параллелепипедом натянутым на векторы $v_1, \ldots, v_k \in V$ называется множество $\Pi(v_1, \ldots, v_k) = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\}$.
- $k$-мерным объемом параллелепипеда $\Pi(v_1, \ldots, v_k)$ называется $\sqrt{\det G(v_1, \ldots, v_k)}$. Объем обозначается $\operatorname{Vol}(\Pi(v_1, \ldots, v_k))$ или просто $\operatorname{Vol}(v_1, \ldots, v_k)$.
- Для объема есть рекурентная формула $\operatorname{Vol}(\Pi(v_1, \ldots, v_k)) = \operatorname{Vol}(v_1, \ldots, v_{k-1})|h_k|$, где $h_k$ – это ортогональная состовляющая $v_k$ относительно $\langle v_1, \ldots, v_{k-1}\rangle$. Смысл этой формулы в том, что объем можно считать как произведение высоты на площадь основания.

## Задачи:

1. «Решите» систему методом наименьших квадратов
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

2. Пусть на пространстве $\mathbb{R}^4$ билинейная форма задана по правилу $\beta(x, y) = x^t B y$, где
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
Найдется ли линейное отображение $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ такое, что билинейная форма $(u, v)_\phi = \beta(\phi(u), \phi(v))$ на $\mathbb{R}^2$ является скалярным произведением?

3. Пусть даны следующие векторы и матрица
$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$
Существует ли в пространстве $\mathbb{R}^3$ скалярное произведение и вектор $v_3 \in \mathbb{R}^3$ такие, что $G$ будет матрицей Грама набора $v_1, v_2, v_3$? Если да, то приведите пример такого скалярного произведения (задайте его матрицей в стандартном базисе), если нет, то объясните почему.

4. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^t y$. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in V$ – набор векторов. Покажите, что
$$|\det(x_1|\ldots|x_n)| \leqslant |x_1| \ldots |x_n|$$

5. Пусть $V$ – евклидово пространство, $U \subseteq V$ – некоторое подпространство и $P\colon V \to V$ оператор проектирования на $U$ вдоль $U^{\perp}$. Покажите, что для любого набора векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$ верно
$$\operatorname{Vol}(\Pi(Pv_1, \ldots, Pv_k)) \leqslant \operatorname{Vol}(\Pi(v_1, \ldots, v_k))$$

6. Пусть $V$ – евклидово пространство и $v_1, \ldots, v_k \in V$ и $u_1, \ldots, u_m \in V$ – два произвольных набора векторов. Тогда
$$\operatorname{Vol}(\Pi(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m)) \leqslant \operatorname{Vol}(\Pi(v_1, \ldots, v_k)) \operatorname{Vol}(\Pi(u_1, \ldots, u_m))$$