

Семинар 27

Общая информация:

- Симметричная билинейная форма $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ называется положительной, если $Q_\beta(v) = \beta(v, v) > 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$.¹
- Сигнатура симметричной билинейной формы $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ – это количество 1, -1 и 0 в ее диагональной форме.
- Сигнатура квадратичной формы – это сигнатура соответствующей ей симметричной билинейной формы.
- Пусть B – квадратная матрица размера n . Зафиксируем номера $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Тогда подматрицу стоящую на пересечении строк и столбцов под выбранными номерами будем называть главной подматрицей, а ее определитель главным минором.
- Если форма $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ не вырождена, количество единиц в диагональной форме p , а минус единиц q , то говорят, что β имеет сигнатуру (p, q) .

Задачи:

1. Пусть $\beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – симметричная билинейная форма заданная по правилу $(x, y) \mapsto x^t B y$, где $B \in M_n(\mathbb{R})$.
 - (а) Покажите, что если все главные миноры матрицы B неотрицательны, для любого положительного s , форма $\beta_s(x, y) = x^t (B + sE) y$ положительно определена.
 - (б) Покажите, что форма β неотрицательная тогда и только тогда, когда все ее главные миноры неотрицательны.
2. Пусть $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ – невырожденная симметричная билинейная форма в вещественном пространстве сигнатуры (p, q) и пусть $W \subseteq V$ – подпространство.
 - (а) Докажите, что если $\beta(w, w) = 0$ для любого $w \in W$, то $\dim W \leq \min(p, q)$.
 - (б) Докажите, что найдется подпространство W со свойством $\beta(w, w) = 0$ для любого $w \in W$ размерности $\min(p, q)$.
3. Пусть $\beta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ симметричная билинейная форма заданная в виде $\beta(x, y) = x^t A y$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Если $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – некоторое линейное отображение, то определим по формуле $\gamma(v, u) = \beta(\phi(v), \phi(u))$, где $v, u \in \mathbb{R}^2$, симметричную билинейную форму на \mathbb{R}^2 .

- (а) Существует ли такое ϕ , что γ имеет сигнатуру $1, -1$?
 - (б) Существует ли такое ϕ , что γ имеет сигнатуру $1, 1$?
4. Есть неизвестная нам квадратичная форма $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ в n -мерном вещественном пространстве V . Разрешается задавать вопрос вида «Чему равно $Q(v)$?». Какое минимальное число вопросов надо задать, чтобы определить, является ли форма Q положительно определенной?

¹Заметьте, что это НЕ значит, что $\beta(v, u) > 0$ для любых $v, u \in V$. Например, если $\beta(v, u) > 0$, то $\beta(v, -u) < 0$.