Семинар 21

Общая информация:

- Жордановой клеткой называется следующая матрица (здесь k – размер матрицы)

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

- Говорят, что матрица A имеет жорданову нормальную форму, если она блочно диагональная и диагональные блоки являются жордановыми клетками.

- Пусть $\varphi\colon V \to V$ – оператор и $e_1, \ldots, e_n$ – базис такой, что

$$\varphi(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_n) J_n(\lambda)$$

Тогда это условие можно переписать так:

$$0 \xleftarrow{\varphi - \lambda \operatorname{Id}} e_1 \xleftarrow{\varphi - \lambda \operatorname{Id}} e_2 \xleftarrow{\varphi - \lambda \operatorname{Id}} \ldots \xleftarrow{\varphi - \lambda \operatorname{Id}} e_{n-1} \xleftarrow{\varphi - \lambda \operatorname{Id}} e_n$$

Задачи:

1. Пусть оператор $\varphi\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ задан матрицей $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$. Проверьте, задается ли линейный оператор Жордановой клеткой $J_4(0)$ в некотором базисе и если задается, то найдите этот базис.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

2. Для следующих матриц найдите единственное собственное значение и определите количество и размер жордановых клеток: (a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Пусть заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   И пусть операторы $\varphi, \psi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ заданы $\varphi(x) = Ax$ и $\psi(x) = Bx$. Покажите, что операторы φ и ψ коммутируют, но их нельзя привести одновременно в ЖНФ, то есть не существует такого базиса в $\mathbb{C}^3$, что оба оператора находятся в жордановой нормальной форме.

4. Задачник. §41, задача 41.30