Curvas de comportamiento de COVID 19

repositorio de github

El comportamiento de epidemias puede ser simulado con modelos matemáticos o modelos estadísticos. En este estudio nos concentraremos en los modelos matemáticos. Específicamente usaremos un modelo **compartimental**. Los modelos de este tipo simplifican el problema al dividir la población total en compartimentos, asumiendo que cada individuo en un mismo compartimento tiene las mismas características.

Requisitos

Para simular el comportamiento de la epidemia usaremos el modelo **SIR** (**S**usceptible **I**nfectious **R**emoved)[1]. El modelo consiste de tres compartimiendos

- **S**: Personas susceptibles. Estos se pueden pasar al grupo de **I**nfectados al tener contacto con uno de ellos.
- **I**: Personas infectadas. Aquellos que son portadores de la enfermedad.
- **R**: Personas con inmunidad o que murieron. Este grupo puede ser interpretado de varias formas, pero son aquellas que fueron infectadas y ya no pertenecen a ese grupo.

Usaremos un modelo para entender a grandes rasgos los comportamientos de una epidemia, así como la importancia de respetar medidas de seguridad.

Al final compararemos nuestras gráficas de variables continuas contra las variables discretas y veremos que similitudes y diferencias se crean entre la realidad y este modelo matemático simple.

El objetivo de este estudio es desarrollar diferentes modelos matematicos por medio de ODEs, analizar su comportamiento y determinar su efectividad y uso para la prevension y mejor preparamiento de epidemias.

Creación del modelo

Usaremos el modelo **SIR** de acuerdo al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \cdot S \cdot I + \delta \cdot R$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - \gamma \cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I - \delta \cdot R$$

Aquí $\beta \cdot S \cdot I$ representa la cantidad de personas que es contagiada, es decir, los que pasan de ser susceptibles a ser contagiados (infectados). Es por esto que la constante β (beta) representa la taza de infección. Se sabe que unas cepas de covid son más infecciosas que otras.

De la misma forma δ representa la perdida de inmunidad. Por eso $\delta \cdot R$ representa a aquellos que pasan del compartimiento de removed, a ser susceptibles otra vez, es decir que pueden volverse a infectar.

Por último γ (gamma) representa la taza de recuperación.

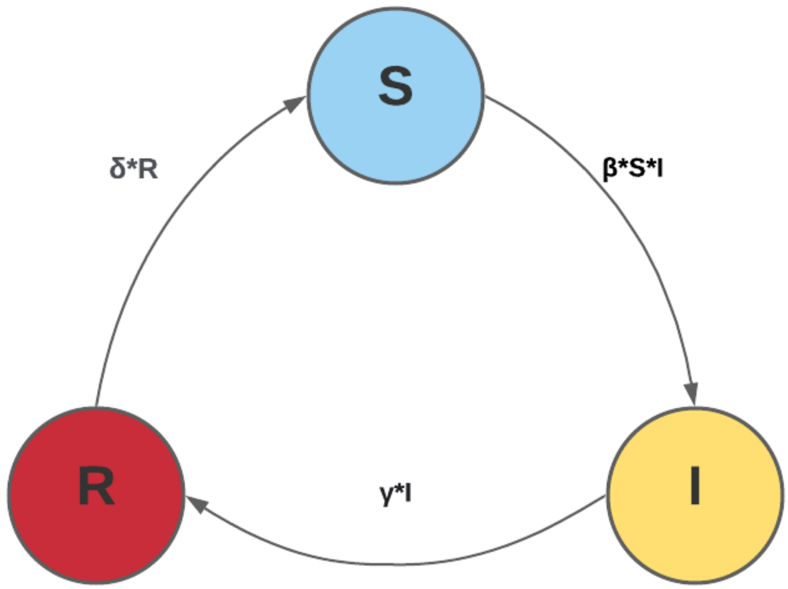


Figura 1: Diagrama de flujo del modelo SIR

Modelo SIRD

Podemos agregar más variantes al modelo base **SIR** para hacerlo más interesante y realista. En este caso agregamos un compartimiento extra para los decesos. De esta forma, solo pasarán a **R** los recuperados y los muertos se pasaran al nuevo compartimento **D**

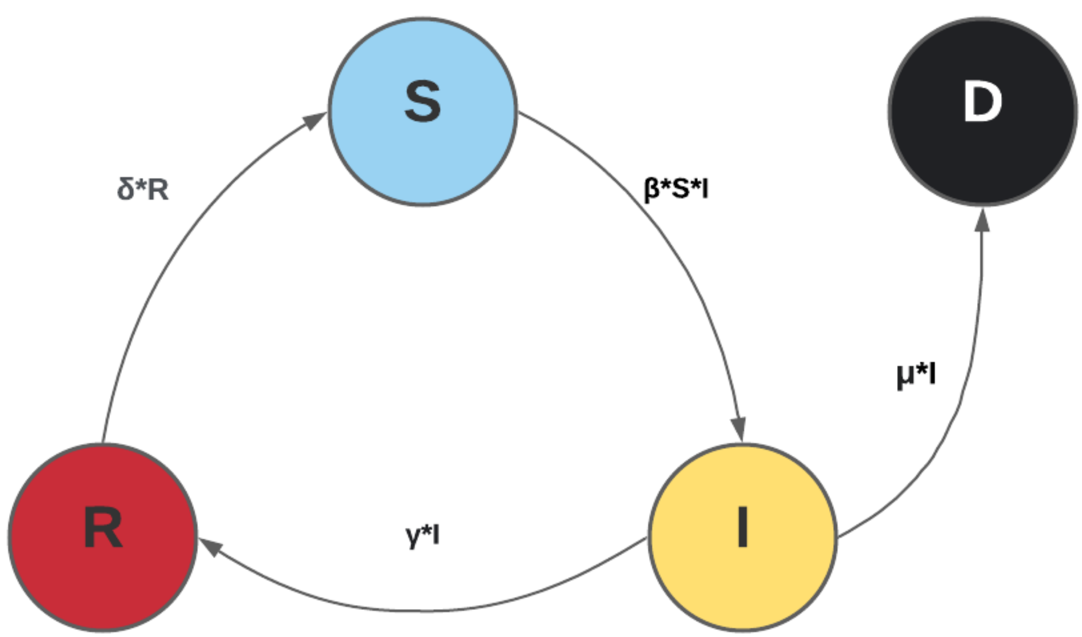


Figura 2: Diagrama de flujo del modelo SIRD

Nuestro nuevo sistema de ecuaciones se ve de la siguiente manera.

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{dt}} = -\beta \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{I} + \delta \cdot \mathrm{R}$$

$$\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}} = \beta \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{I} - \gamma \cdot \mathrm{I} - \mu \cdot I$$

$$\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}} = \gamma \cdot \mathrm{I} - \delta \cdot \mathrm{R}$$

$$\frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{dt}} = \mu \cdot I$$

Implementación

Antes de implementar el modelo es importante mencionar las razones por las que el modelo no verá como una curva real de covid con varios repuntes. Los coeficientes usados aquí son promedios obtenidos de los datos de owid para el reino Unido (UK). Esto causa que no se tome en cuenta las diferentes medidas tomadas por el gobierno para controlar en cierto espacio de tiempo, solo refleja como se comporta en promedio.

Para la taza de perdida de inmunidad no existen los datos para calcularlo en para un país en específico, así que usaremos un valor promedio usado en otros estudios.

```
% Model parameters for the UK
beta = 9.6905E-09; % rate of infection
gamma = 0.532271959; % rate of recovery
delta = 1/60; % rate of immunity loss 100 days
mu = 0.085470461; % fatallity rate
N = 66650000; % Total UK population
```

```
N = 66650000
```

```
I0 = 10; % initial number of infected
T =  500; % period of 300 days
dt = 1/4; % time interval of 6 hours (1/4 of a day)
fprintf('Reproduction Rate R0 is %.2f',N*beta/gamma)
```

```
Value of parameter R0 is 1.21
```

```
[t,S,I,R,D] = modelSIRD(beta,gamma,delta,mu,N,I0,T,dt);
```

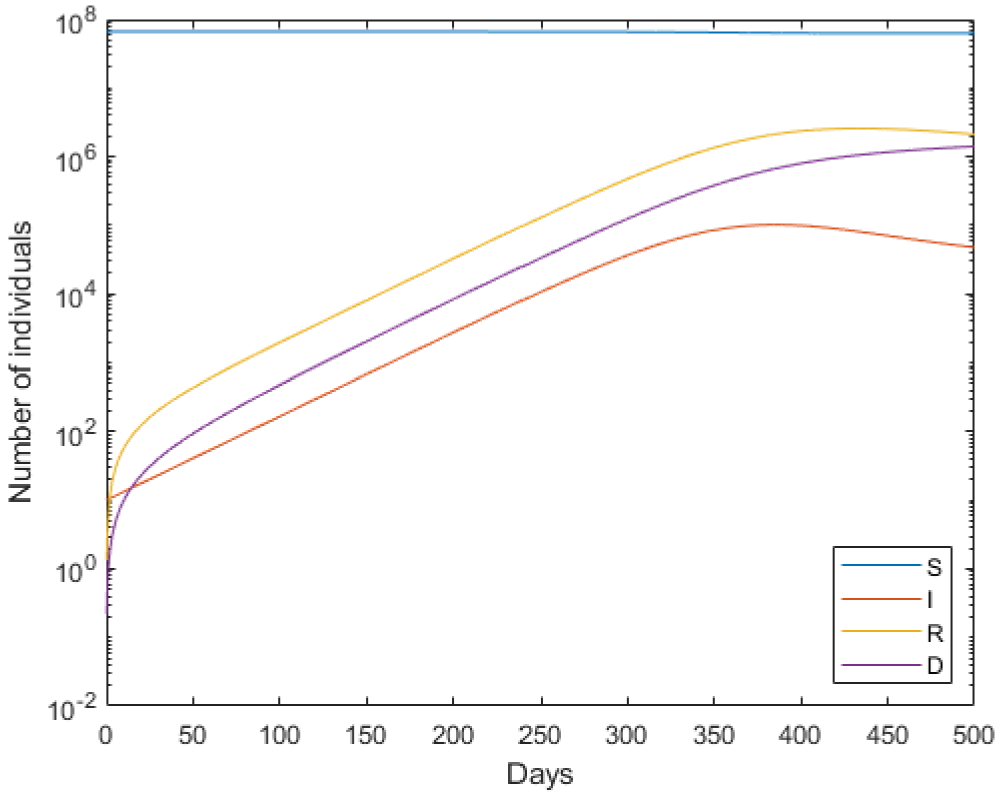
Pruebas y resultados

```
semilogy(t,[S,I,R,D])
hold on
%plot(t,I);
%plot(t,R);
%plot(t,D);



%grid on;
```

```
xlabel('Days');
ylabel('Number of individuals');
legend('S','I','R','D','Location','southeast');
hold off
```




```
[v,i]=max(I);
d=i/4;
fprintf('El pico de casos activos es de %d y sucede %d dias después de que empezó la pandemia',
```

```
el pico de casos activos es de 101819 y sucede 386 dias después de que empezó la pandemia
```

```
[v,i]=max(D);
d=i/4;
fprintf('El total de muertes son %d al día %d desde que empezó la pandemia',round(v),round(d))
```

```
el total de muertes son 1412387 al día 500 desde que empezó la pandemia
```

La gráfica que resulta del modelo SIRD puede no distanciar mucho de la gráfica real por las limitaciones que mencionamos antes. Es importante ver que el modelo solo nos muestra el rol que juega cada variable dentro de una determinada población. En el caso del Reino unido, la tasa de mortalidad varia desde 2% hasta 14% dependiendo de la fecha.

Comparación datos reales

Comparemos la acumulación de muertes de nuestra predicción contra la realidad https://coronavirus.data.gov.uk/details/download

```
[~,~,data] = xlsread('UK-cum-death.csv');
data
```

data = 514×5 cell

	1	2	3	4	5
1	'areaCode'	'areaName'	'areaType'	'date'	'cumDailyNs...
2	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/25/2021'	153926
3	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/24/2021'	153916
4	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/23/2021'	153897
5	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/22/2021'	153891
6	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/21/2021'	153876
7	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/20/2021'	153864
8	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/19/2021'	153848
9	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/18/2021'	153831
10	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/17/2021'	153815
11	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/16/2021'	153807
12	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/15/2021'	153796
13	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/14/2021'	153776
14	'K02000001'	'United Kin...	'overview'	'6/13/2021'	153765

⋮

```
column1 = data(end-499:end,5); %500 dias
deaths = cell2mat(column1);
```

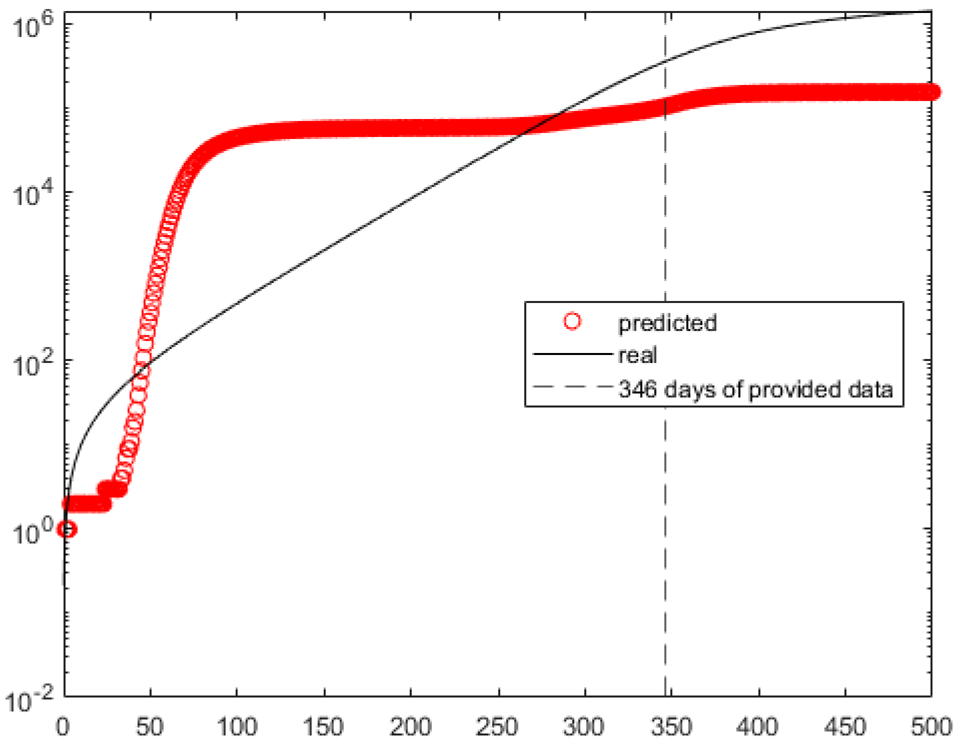
```
deaths = 500×1
      153753
      153742
      153729
      153714
      153698
      153683
      153677
      153664
      153658
      153646
         ⋮
```

```
days = 500:-1:1;
```

```
days = 1×500
   500   499   498   497   496   495   494   493   492   491   490   489   488 ···
```

```
semilogy(days,deaths,"r o")
hold on
semilogy(t,D,"k")
xline(346,"--");
legend("predicted","real","346 days of provided data","Location","best")
```

```
hold off
```



Como podia esperarse, al tomar una muestra tan grande de datos como lo son 346 dias y simplemente promedias las tasas de cambio incurrimos en un error bastante grande.

CASO ITALIA SIRD SIMPLE

El siguiente script usa datos del 1 de agosto de 2021 a 1 de noviembre de 2021 de Italia, recolectados igualmente del OWID.

```
% ITALY
% Model parameters for the UK
beta = 1.65869E-09; % rate of infection
%no mask
%beta = beta*1.1;

gamma = 0.076163777; % rate of recovery
delta = 1/60; % rate of immunity loss 100 days
mu = 0.001166467; % fatallity rate
N = 66650000 % Total UK population N = S + I + R
```

```
N = 66650000
```

```
I0 = 6714; % initial number of infected = [diferencia de casos en 30 dias - (diferencia decesos
T =  180; % period of 300 days
dt = 1/12; % time interval of 6 hours (1/4 of a day)
D0=35146;
%R0=281707
```

```
R0=160686
```

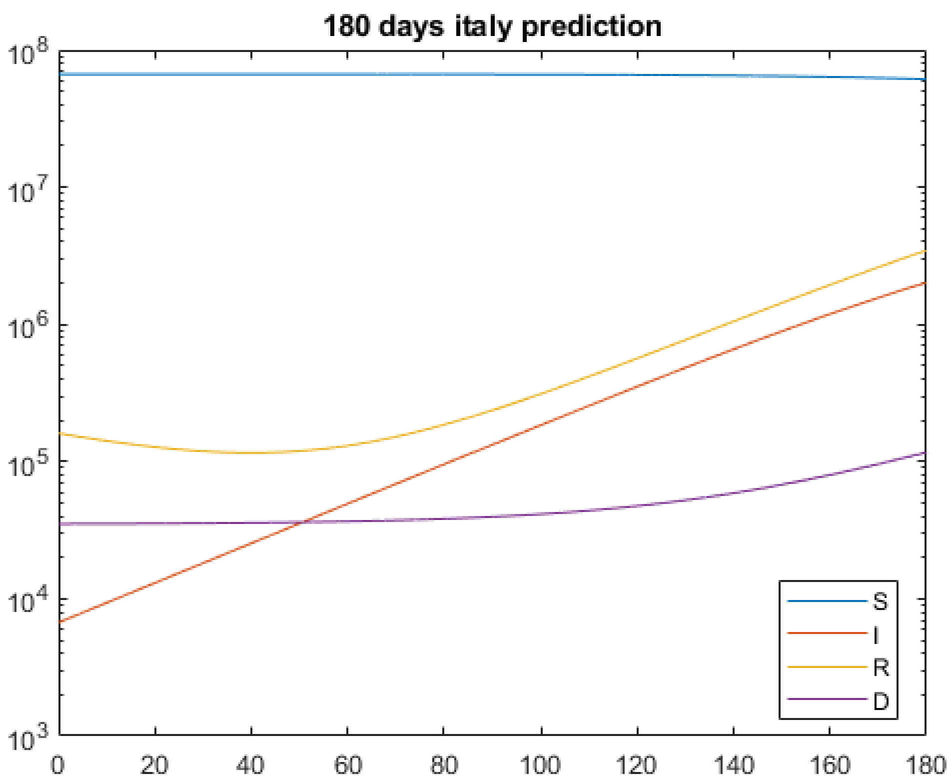
```
R0 = 160686
```

```
fprintf('Value of parameter R0 is %.2f',N*beta/gamma)
```

```
Value of parameter R0 is 1.45
```

```

[t,S,I,R,D] = modelSIRD2(beta,gamma,delta,mu,N,I0,T,dt,R0,D0);
semilogy(t,[S,I,R,D])
legend('S','I','R','D','Location','best');
title("180 days italy prediction")
```

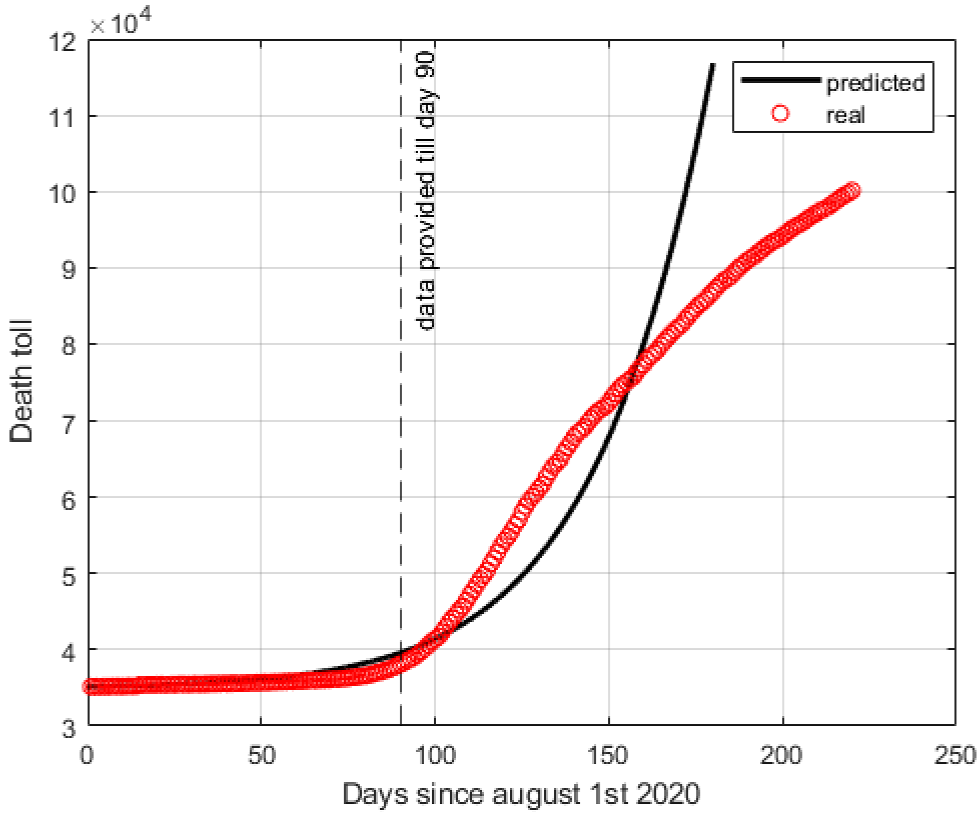



```
[v,i]=max(D);
d=i/12;
fprintf('El total de muertes son %d al día %d desde que empezó la pandemia \n',round(v),round(c
```

```
El total de muertes son 116827 al día 180 desde que empezó la pandemia
```

```
data = csvread('ITA-CUM-death.csv');
column1 = data(:,1);
days = 1:length(column1);
plot(t,D, "k","LineWidth",2)
hold on
plot(days,column1,"r o")
xline(90,"k--","data provided till day 90")
grid on
hold off
legend("predicted","real")
```

```
xlabel('Days since august 1st 2020');
ylabel("Death toll")
```



Podemos ver cómo el modelo emula mejor el comportamiento de las muertes acomuladas reales, sin embargo, las autoridades en italia tomaron medidas preventivas para reducir los contagios y las muertes.

Se puede ver como este modelo sigue una especie de promedio, pero no tiene en cuenta los picos (rebrotes) de covid debido a la relajación de medidas sanitarias para prevenirlo. Un modelo más realista se puede visualizar con un diagrama como el siguiente.

CASO ITALIA SIRD AVANZADO [2]

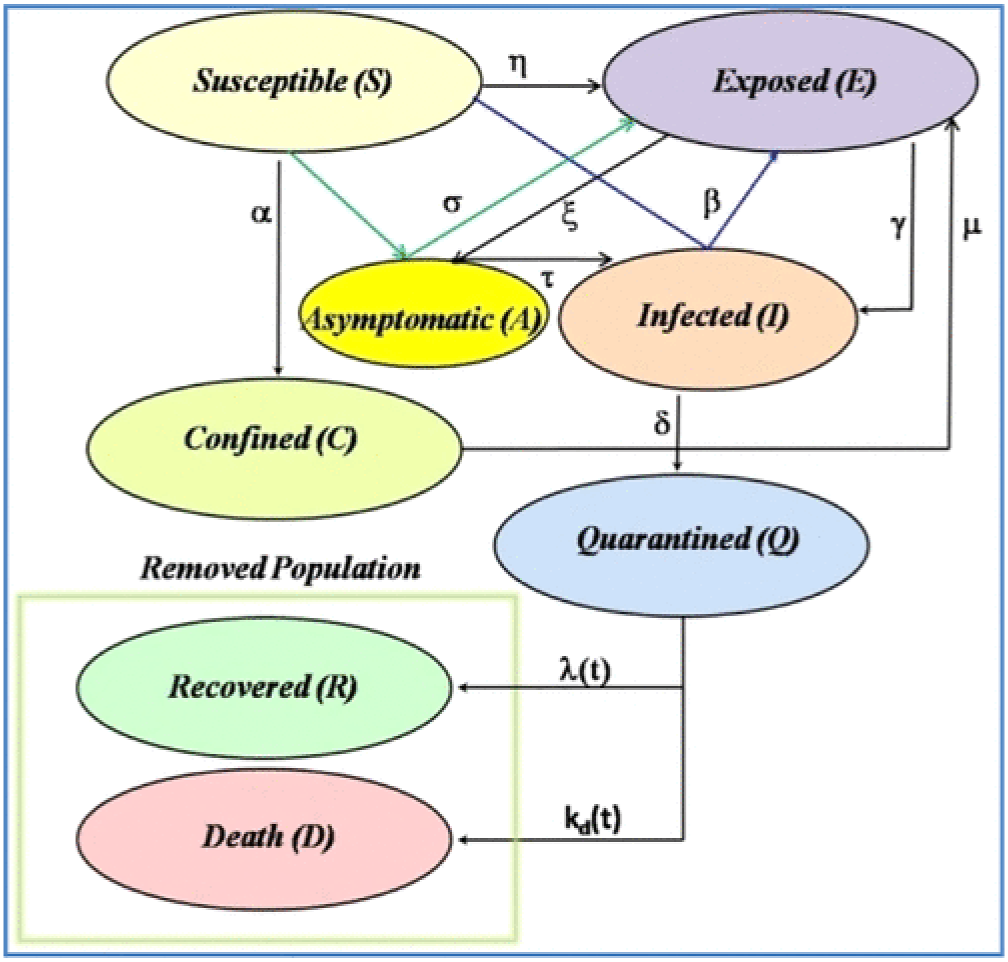


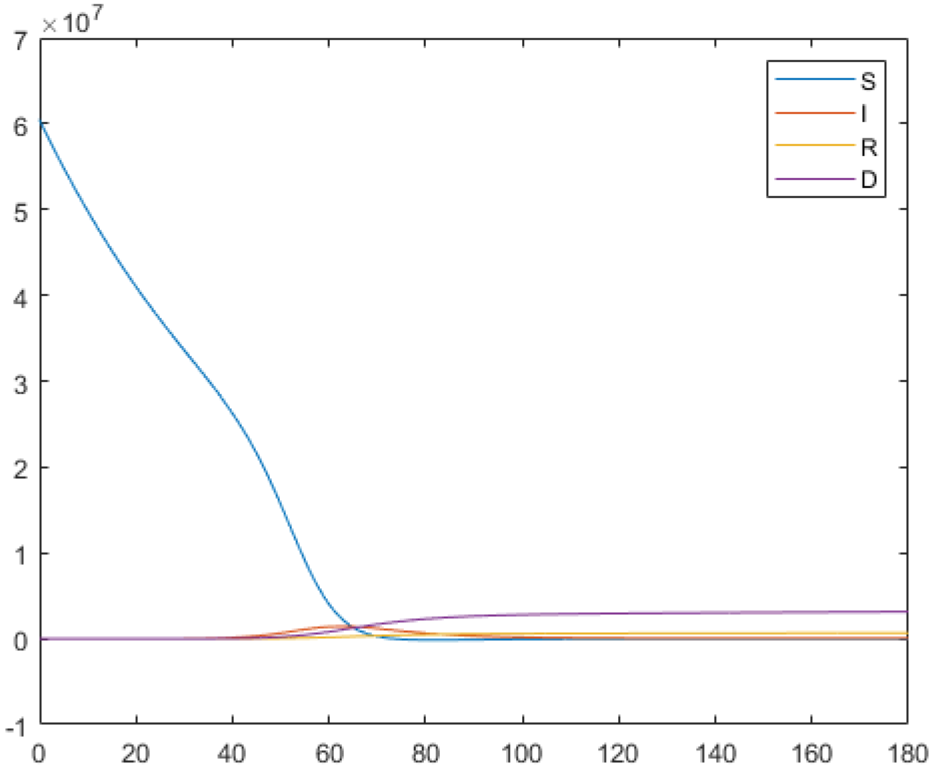
Figura 3: Diagrama SIRD avanzado

```
%italy
N = 6.046*10^7;
alpha = 0.0194;
beta=7.567;
mu=2.278 * 10^-6;
nao=9.180  * 10^-7;
sigma=1.463^-3;
tao=1.109  * 10^-4;
epsilon=0.263;
gamma=0.021;
delta= 0.077;
lambda0 =  0.157;
lambda1 = 0.025;
k0 = 0.779;
k1 = 0.061;
x0=0;
T = 180;
dt = 1/4;
y0= [N; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 0];
```

```
y0 = 8×1
    60460000
           1
           0
```

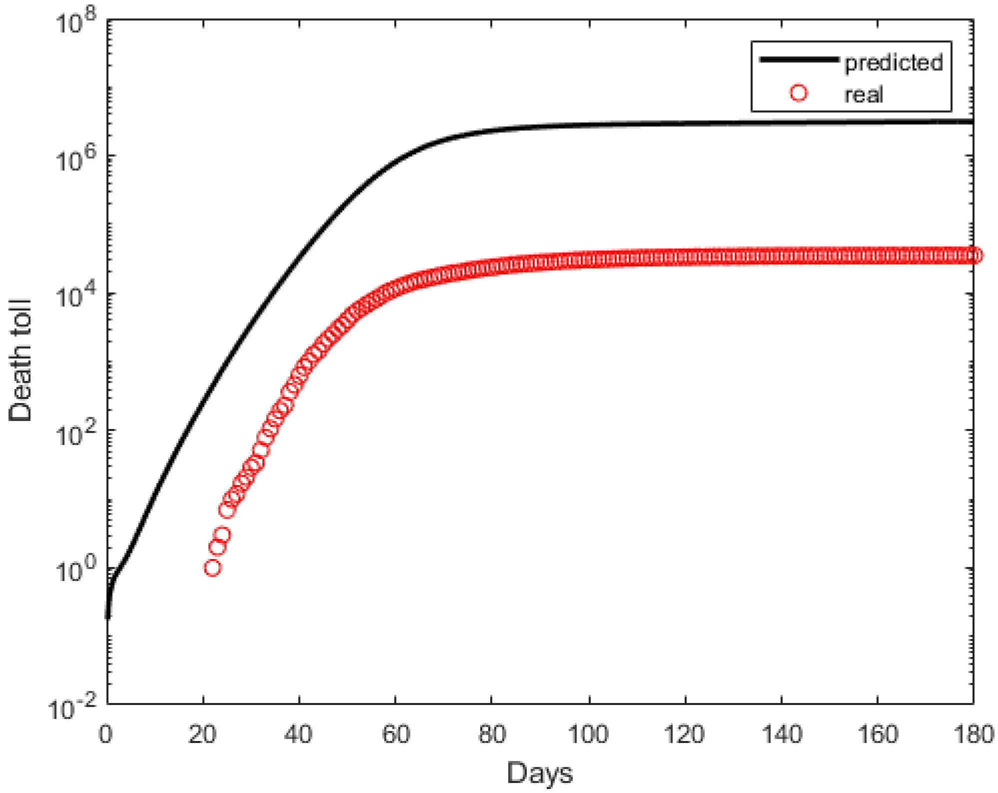
```
1
1
0
1
0
```

```
[t,S, A, C, E, I, R, Q, D] = modelSIRDAvanzado(alpha,beta,mu,nao,sigma,tao,epsilon,gamma,delta,
plot(t,[S I R D])
legend('S','I','R','D')
```




```
%data = csvread('ITA-CUM-death-day0-180.csv');
T = readtable('ITA-CUM-death-day0-180.csv');
column1 = T{:,1};

%column1 = data(:,1);
days = 1:length(column1);
semilogy(t,D, "k","LineWidth",2)
hold on
semilogy(days,column1,"r o")
%grid on
hold off
title("Muertes en Italia desde el inicio de la pandemia")
legend("predicted","real",'Location','southeast')
xlabel('Days');
ylabel("Death toll");
```



Aunque los números de la predicción son mayores, el comportamiento es parecido, ambas gráficas se empiezan a aplanar a los 40-60 días.

Entendiendo la importancia de los coeficientes

Revisitemos el caso del Reino Unido con el modelo SIRD simple para observar incrementos en las variables de taza de infección (beta) y taza de recuperación (gamma).

```
% Model parameters for the UK
beta = 9.6905E-09; % rate of infection
gamma = 0.532271959; % rate of recovery
delta = 1/60; % rate of immunity loss 100 days
mu = 0.085470461; % fatallity rate
N = 66650000; % Total UK population
I0 = 10; % initial number of infected
T =  500; % period of 300 days
dt = 1/4; % time interval of 6 hours (1/4 of a day)
[t,S,I,R,D] = modelSIRD(beta,gamma,delta,mu,N,I0,T,dt);
```

BETA

Los datos tomados para este estudio son los promedios de esas variables desde que empezó el 1 de febrero de 2020 hasta el pico de casos el 9 de enero de 2021. Para estas ultimas fechas el proceso de vacunación (que empezó en diciembre 13 de 2020) juega un papel importante en reducir el número de decesos y contagios.

Veamos ahora que pasa si se relajan las medidas preventivas, es decir un aumento en el coeficiente de infección **beta**

```
betaBase = beta
for i = 1.1:0.1:1.5
    figure;
    beta = betaBase * i

    [t,S,I,R,D] = modelSIRD(beta,gamma,delta,mu,N,I0,T,dt);
    semilogy(t,[S,I,R,D])

    hold on
    title("SIRD con beta al "+i*100+" %")
    xlabel('Days');
    ylabel('Number of individuals');
    legend('S','I','R','D','Location','southeast');
    hold off
    [v,i]=max(D);
    d=i/4;
    fprintf('Value of parameter R (Reproduction rate) is %.2f',N*beta/gamma)
    fprintf('El total de muertes son %d al día %d desde que empezó la pandemia \n',round(v),rou
end
```

Podemos ver como un incremento de apenas el 10% resulta en un gran incremento de decesos. Que en un escenario real, incrementaría a la vez la tasa de mortalidad y decrementaría por lo tanto la tasa de recuperación. Esto debido al sobrecupo de los hospitales.

GAMMA

```
beta = betaBase;
gammaBase = gamma;
for gamma = gammaBase:-0.11:gammaBase-0.11*4
    figure;

    [t,S,I,R,D] = modelSIRD(beta,gamma,delta,mu,N,I0,T,dt);
    semilogy(t,[S,I,R,D])

    hold on
    title("SIRD con gamma = "+gamma)
    xlabel('Days');
    ylabel('Number of individuals');
    legend('S','I','R','D','Location','best');
    hold off
    [v,i]=max(D);
    d=i/4;
    fprintf('Value of parameter R (Reproduction rate) is %.2f',N*beta/gamma)
    fprintf('El total de muertes son %d al día %d desde que empezó la pandemia \n',round(v),rou
end
```

Conclusión

Los modelos matemáticos pueden ser útiles para predecir el comportamiento de variables interactuando entre ellas. En este caso es más fácil describir las variables por cómo cambian en lugar de por lo que representan. Es por esto que estos sistemas físicos son sistemas de ecuaciones diferenciales.

Como vimos en el caso de Inglaterra, al usar un promedio de un año para los datos, el modelo distancia mucho de la realidad. A pesar de necesitar menos datos que los modelos estadísticos, los modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias (como es el SIRD) dependen grandemente de los coeficientes.

En el primer caso de Italia con SIRD simple obtuvimos buenos resultados. Esto se debe a que los coeficientes tienen sentido para este marco de tiempo. Podriamos probablemente recortar los datos a tan solo 14 dias y obtener una buena simulación de los siguientes 30 días si la situación no cambia. Es aqui donde vemos cómo estos modelos nos muestran un escenario realista. De esta forma, podemos reaccionar proactivamente antes de una catastrofe.

El último modelo está hecho para verse de una forma retrospectiva, dificelmente podremos calcular todos los coeficientes de forma previa. Pero podemos calcular diferentes escenarios jugando con estos coeficientes y ver la severidad de estos casos hipoteticos.

Referencias

[1] R. Beckley, C.Weatherspoon, M. Alexander , M. Chandler, A.Johnson , and G. S. Bhatt."Modeling epidemics with differential equations". Tennessee State University. [link]. visitado 5/7/2021

[2] Ind. Eng. Chem. Res. 2021, 60, 11, 4251–4260

Funciones

```
function [t,S,I,R] = modelSIR(beta,gamma,delta,N,I0,T,dt)
    [t,y] = runKut4(@(t,y) SIRfunc(t,y,beta,gamma,delta),0,dt,T,[N-I0;I0;0]);
    S=y(:,1);
    I=y(:,2);
    R=y(:,3);
end

function [t,S,I,R,D] = modelSIRD(beta,gamma,delta,mu,N,I0,T,dt)
    [t,y] = runKut4(@(t,y) SIRDfunc(t,y,beta,gamma,delta,mu,N),0,dt,T,[N-I0;I0;0;0]);
    S=y(:,1);
    I=y(:,2);
    R=y(:,3);
    D=y(:,4);
end

function [t,S,I,R,D] = modelSIRD2(beta,gamma,delta,mu,N,I0,T,dt,R0,D0)
    [t,y] = runKut4(@(t,y) SIRDfunc(t,y,beta,gamma,delta,mu,N),0,dt,T,[N-I0;I0;R0;D0]);
```

```
    S=y(:,1);
    I=y(:,2);
    R=y(:,3);
    D=y(:,4);
end

function [t,S, A, C, E, I, R, Q, D] = modelSIRDAvanzado(alpha,beta,mu,nao,sigma,tao,epsilon,gam

    [t,y] = ode45(@(t,y) SIRDAfunct(t,y,alpha,beta,mu,nao,sigma,tao,epsilon,gamma,delta,lambda0

    S=y(:,1);
    A=y(:,2);
    C=y(:,3);
    E=y(:,4);
    I=y(:,5);
    R=y(:,6);
    Q=y(:,7);
    D=y(:,8);

end

function [xSol,ySol] = runKut4(F,x0,h,xStop,y0)

    reshape( y0, [],1 ); % column vector
    xSol = zeros(2,1);
    ySol = zeros(length(y0),2);
    xSol(1) = x0;
    ySol(:,1) = y0;
    i = 1;
    x=x0;
    y=y0;
    while x < xStop
        i = i + 1;
        h = min(h,xStop - x);
        K1 = h*F(x,y);
        K2 = h*F(x + h/2,y + K1/2);
        K3 = h*F(x + h/2,y + K2/2);
        K4 = h*F(x+h,y + K3);
        y = y + (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6;
        x = x + h;
        xSol(i) = x;
        ySol(:,i) = y;
    end

    xSol = xSol';
    ySol=ySol';
end

function dydt = SIRfunc(t,y,beta,gamma,delta)
    dydt = zeros(3,1);
    %dydt(1)=dS
    %dydt(2)=dI
    %dydt(3)=dR
    dydt(1) = (-beta.*y(2).*y(1) + delta.*y(3));
```

```
    dydt(2) = (beta.*y(2).*y(1) - gamma.*y(2));
    dydt(3) = (gamma.*y(2) - delta.*y(3));
end

function dydt = SIRDfunc(t,y,beta,gamma,delta,mu,N)
    dydt = zeros(4,1);
    %dydt(1)=dS
    %dydt(2)=dI
    %dydt(3)=dR
    dydt(1) = (-beta.*y(2).*y(1) + delta.*y(3));
    dydt(2) = (beta.*y(2).*y(1) - gamma.*y(2) -mu.*y(2));
    dydt(3) = (gamma.*y(2) - delta.*y(3));
    dydt(4) = mu.*y(2);
end

function dydt = SIRDAfunct(t,y,alpha,beta,mu,nao,sigma,tao,epsilon,gamma,delta,lambda0,lambda1,
    dydt = zeros(8,1);
    %S=1, A=2, C=3, E=4, I=5, R=6, Q=7, D=8

    dydt(1) = -alpha*y(1) - beta*y(5)*y(6)./N - sigma*y(1)*y(2)./N -nao*y(1); %dS
    dydt(2) = - tao*y(2) + epsilon*y(4); %dA
    dydt(3) = (alpha*y(1)./N) -mu*y(3); %dC
    dydt(4) = -gamma*y(4) +beta*y(5)*y(1)./N +mu*y(3)+nao*y(1) +sigma*y(1)*y(2)./N -epsilon*y(4
    dydt(5) = tao*y(2)+gamma*y(4)-delta*y(5); %dI
    dydt(6) = (lambda0 + (t/tf)*(lambda1-lambda0))*y(7); %dR
    dydt(7) = delta*y(5)-((lambda0 + (t/tf)*(lambda1-lambda0))*y(7)) -((k0 + (t/tf)*(k1-k0))*y(
    dydt(8) = (k0 + (t/tf)*(k1-k0))*y(7); %dD

end
```