

Введем потенциал в зависимости от $a = \text{отношению } size \text{ к } capacity$:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 2 \cdot size - capacity, \text{ если } a \geq 1/2; \\ \phi_2 &= 1/2 \cdot capacity - size, \text{ если } a < 1/2;\end{aligned}$$

Добавление элемента

Массив расширится, если $a = 1$. Тогда $t_i = 2 \cdot (size + 1)$, т.к. при вызове `realloc` программа копирует каждый элемент в другой массив.

$$\begin{aligned}a &= \phi(2 \cdot capacity, size + 1) - \phi(capacity, size) \\ &= size + 1 + (2 \cdot (size + 1) - 2 \cdot capacity) - (2 \cdot size - capacity) \\ &= 3\end{aligned}$$

Для остальных a_i , получается $\phi = 1$ потому что расширения массива и копирование элементов происходить не будет, поэтому мы просто будем добавлять элемент в массив.

Рассмотрим случай, если $a < 1/2$:

$$\begin{aligned}a &= \phi + \phi(2, size + 1) - \phi(2, size) \\ &= 1 + (2 \cdot (size + 1) - size) - (2 \cdot size - size) \\ &= 3\end{aligned}$$

Теперь случай $a < 1$. Здесь может быть два исхода:

1. При добавлении элемента, $a < 1/2$, тогда

$$\begin{aligned}a &= \phi + \phi(2, size + 1) - \phi(2, size) \\ &= 1 + (size - (size + 1)) - (1 - size) \\ &= 0\end{aligned}$$

2. При добавлении элемента a переходит из $[1/4; 1/2)$ в $[1/2; 1]$:

$$\begin{aligned}a &= t_i + \phi_1(capacity, size + 1) - \phi_2(capacity, size) \\ &= 1 + (2 \cdot (size + 1) - capacity) - (1/2 \cdot capacity - size) \\ &= 3 + 3 \cdot size - 3/2 \cdot capacity \\ &= 3 + 3 \cdot a \cdot capacity - 3/2 \cdot capacity \\ &< 3 + 3/2 \cdot capacity - 3/2 \cdot capacity \\ &= 3\end{aligned}$$

Получаем, что амортизационное время добавления элемента в стек - $O(1)$.

Удаление элемента

Такой же анализ для удаления элемента. Массив сужается при $a = 1/4$ (сужается в 2 раза). Тогда $t_i = size - 1$, т.к. при каждом удалении `realloc` (вниз) скопирует каждый элемент в другой массив.

$$\begin{aligned} a &= t_i + \phi_2(1/2 \cdot capacity, size - 1) - \phi_2(capacity, size) \\ &= size - 1 + (1/4 \cdot capacity - (size - 1)) - (1/4 \cdot capacity - size) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Для остальных a , $\phi = 1$ потому что копирования происходить не будет (т.к. массив не сужается), и за операцию мы будем просто удалять элемент из массива.

$$\begin{aligned} a &= t_i + \phi_1(capacity, size - 1) - \phi_2(capacity, size) \\ &= 1 + (1/2 \cdot capacity - (size - 1)) - (1/2 \cdot capacity - size) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Теперь случай $a \geq 1/2$. Здесь может быть два исхода:

1. При удалении $a \geq 1/2$

$$\begin{aligned} a &= t_i + \phi_1(capacity, size - 1) - \phi_1(capacity, size) \\ &= 1 + (2 \cdot (size - 1) - capacity) - (2 \cdot size - capacity) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. При удалении элемента a переходит из $[1/2; 1]$ в $[1/4; 1/2]$:

$$\begin{aligned} a &= t_i + \phi_2(capacity, size - 1) - \phi_1(capacity, size) \\ &= 1 + (1/2 \cdot capacity - (size - 1)) - (2 \cdot size - capacity) \\ &= 2 - 3 \cdot size + 3/2 \cdot capacity \\ &= 2 - 3 \cdot a \cdot capacity + 3/2 \cdot capacity \\ &< 2 - 3/2 \cdot capacity + 3/2 \cdot capacity = 2 \end{aligned}$$

Для удаления так же получаем, что амортизационное время работы - $O(1)$.