FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Análise e Transformação de Dados

Trabalho Prático nº 1

Grupo 23:

João Miguel Rodrigues Jesus nº 2008111667

Rosa Manuela Rodrigues de Faria nº 2005128014

1. Sendo este o grupo número 23, a função é da seguinte forma:

$$x_1(t) = 2\sin(5t)\cos(9t) + 5\cos(6t)^2$$

1.1. Substituindo as equações trigonométricas:

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)$$

$$\cos(a)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2a) + 1)$$

Teremos

$$x_1(t) = 2 \times \frac{1}{2}(\sin(14t) - \sin(4t)) + 5 \times \frac{1}{2}(\cos(12t) + 1)$$
$$= \sin(14t) - \sin(4t) + \frac{5}{2}\cos(12t) + \frac{5}{2}$$
$$= \cos\left(14t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(4t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{5}{2}\cos(12t) + \frac{5}{2}$$

Com as constantes

$$C_1 = C_2 = 1; C_3 = C_4 = \frac{5}{2};$$
$$\omega_1 = 14;\ \omega_2 = 4;\ \omega_3 = 12;\ \omega_4 = 0;$$
$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2};\ \theta_3 = \theta_4 = 0$$

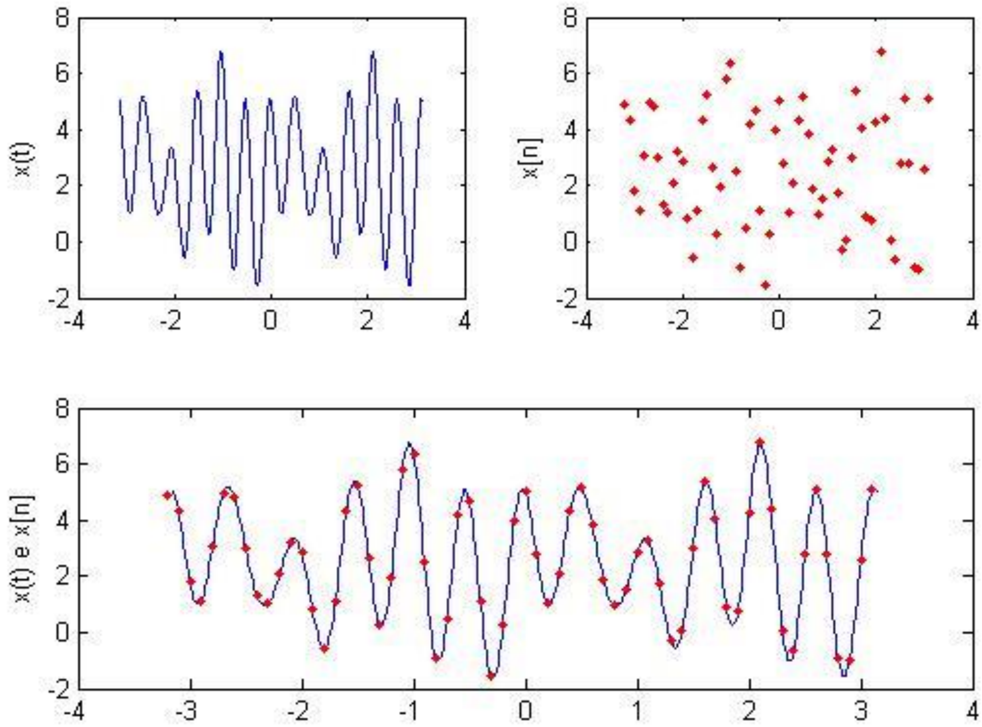
1.2. Substituindo $t = nT_s$ obtemos

$$x[n] = \cos\left(14nT_s + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(4nT_s + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{5}{2}\cos(12nT_s) + \frac{5}{2}$$

1.3. Para representar o gráfico de $x_1(t)$ foi primeiro criado um vector igualmente espaçado usando a função *linespace*, com mínimo de –π, máximo π, e número de elementos igual a 500. Foi depois calculada a função $x_1(t)$ com o vector criado anteriormente.

No caso de $x[n]$ foi também criado um vector, n, com passo 1, início em $-{}^{\pi}/_{T_s}$ e término em ${}^{\pi}/_{T_s}$, ambos arredondados para baixo. Seguidamente foi aplicada a fórmula calculada no exercício anterior. Finalmente foi feito o plot, tendo no caso de $x[n]$ o parâmetro '.', para que os seus elementos sejam sinalizados apenas com pontos. A realçar que, para ser possível comparar os gráficos, foi necessário utilizar n*Ts como eixo dos xx (no caso de x[n]).

O script correspondente a este exercício encontra-se no ficheiro ex13.m, e o resultado é a imagem seguinte:



Resultado da execução do exercício 1.3

1.4. Para a resolução deste exercício foi necessária a criação de 3 funções auxiliares: func23.m, simpson.m e trapézio.m. A primeira calcula simplesmente a função $(x_1(t))^2$ para o(s) valor(es) t dado(s), de modo a facilitar o cálculo dos integrais necessários.

As duas funções seguintes aplicam as regras de Simpson e do trapézio, respectivamente, para aproximação de integrais. Em ambas as funções são aplicadas as fórmulas directamente, aplicando os somatórios correspondentes por somas de vectores contendo todos os valores a somar através da função *sum* do Matlab, dando como entrada os extremos do intervalo e o número de intervalos a utilizar.

Assim, foi criado o script ex14.m, em que é criada uma variável simbólica, seguida da criação da função correspondente. É depois calculado o valor exacto da energia do sinal no intervalo pedido com a função *int* do módulo simbólico do Matlab. Seguidamente são utilizadas as funções trapézio.m e simpson.m para o cálculo do integral de forma aproximada.

<u>Determinação do número de intervalos a considerar nas aproximações:</u>

Para determinar o número de intervalos necessários para o erro ser menor que 0,001 seria necessário aplicar, para as regras de Simpson e dos trapézios, respectivamente, as fórmulas

$$Erro\ \leq k\frac{(b-a)^5}{180n^4} \qquad e \qquad Erro\ \leq k\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Em que k é o majorante de, respectivamente, $\frac{d^4(f^2)}{dt^4}$ e $\frac{d^2(f^2)}{dt^2}$.

Foram então calculadas as derivadas de f^2 utilizando o website www.wolframalpha.com, obtendo os resultados:

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\cos\left(14\,t+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(4\,t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{5}{2}\cos(12\,t)+\frac{5}{2}\right)^2\right)=$$
$$2\,(-30\sin(12\,t)+4\cos(4\,t)-14\cos(14\,t))\left(\sin(4\,t)-\sin(14\,t)+\frac{5}{2}\cos(12\,t)+\frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\left(\cos\left(14\,t+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(4\,t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{5}{2}\cos(12\,t)+\frac{5}{2}\right)^2\right)=$$
$$2\,(-30\sin(12\,t)+4\cos(4\,t)-14\cos(14\,t))^2+$$
$$2\left(\sin(4\,t)-\sin(14\,t)+\frac{5}{2}\cos(12\,t)+\frac{5}{2}\right)(-16\sin(4\,t)+196\sin(14\,t)-360\cos(12\,t))$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\left(\left(\cos\left(14\,t+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(4\,t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{5}{2}\cos(12\,t)+\frac{5}{2}\right)^2\right)=$$
$$2\,(4320\sin(12\,t)-64\cos(4\,t)+2744\cos(14\,t))\left(\sin(4\,t)-\sin(14\,t)+\frac{5}{2}\cos(12\,t)+\frac{5}{2}\right)+$$
$$6\,(-30\sin(12\,t)+4\cos(4\,t)-14\cos(14\,t))$$
$$(-16\sin(4\,t)+196\sin(14\,t)-360\cos(12\,t))$$

$$\frac{d^4}{dt^4}\left(\left(\cos\left(14\,t+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(4\,t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{5}{2}\cos(12\,t)+\frac{5}{2}\right)^2\right)=$$
$$6\,(-16\sin(4\,t)+196\sin(14\,t)-360\cos(12\,t))^2+$$
$$8\,(-30\sin(12\,t)+4\cos(4\,t)-14\cos(14\,t))$$
$$(4320\sin(12\,t)-64\cos(4\,t)+2744\cos(14\,t))+$$
$$2\,(256\sin(4\,t)-38\,416\sin(14\,t)+51\,840\cos(12\,t))$$
$$\left(\sin(4\,t)-\sin(14\,t)+\frac{5}{2}\cos(12\,t)+\frac{5}{2}\right)$$

Para encontrar o majorante destas funções considerou-se o pior caso, em que todos os senos e co-senos tomam o valor 1. No entanto o valor obtido foi elevadíssimo e irreal para o efeito pretendido, logo procedeu-se à experimentação com diferentes quantidades de intervalos, chegando-se aos valores 30 (para a Regra de Simpson) e 13 (para a Regra dos Trapézios) como número mínimo de intervalos a utilizar.

Assim, obtiveram-se os seguintes valores:

- Valor real do integral: $\frac{83\pi}{4}$ J
- Valores aproximados:

Regra de Cálculo	Valor obtido com o Intervalo mínimo (J)	Valor imediatamente anterior (J)	Erro
Simpson	65.188047561988355	163.3628179866692	1.4E-12
Trapézios	65.188047561988199	55.58399833082965	1.42E-11

1.5. Para resolver este exercício foi simplesmente criado o script ex15.m, em que é calculado o vector n e xn, como no exercício 1.3, sendo depois calculada a energia do sinal discreto x[n] através do somatório da função $x[n]^2$. O valor obtido foi de 680.4350178618161 J.

```
>> ex15

E =

      6.804350178618161e+02
```

Nota: Compatibilidade com o Octave

Todas as rotinas do exercício 1 são compatíveis tanto com o software Octave (uma vez instalado o pacote simbólico) como com o Matlab, exceptuando, no exercício 1.4, o cálculo do integral simbólico, que não tem uma função correspondente à do Matlab. Em termos de comparação dos tempos de execução, temos os seguintes resultados:

Exercício	Tempo de execução (Octave)	Tempo de execução (Matlab)
Ex13.m	0.22700 s	1.199808 s
Ex14.m (sem cálculo simbólico)	0.00732 s	0.064533 s
Ex15.m	0.00025 s	0.002535 s

Por este resultado podemos ver que o Octave é bastante mais rápido que o Matlab.

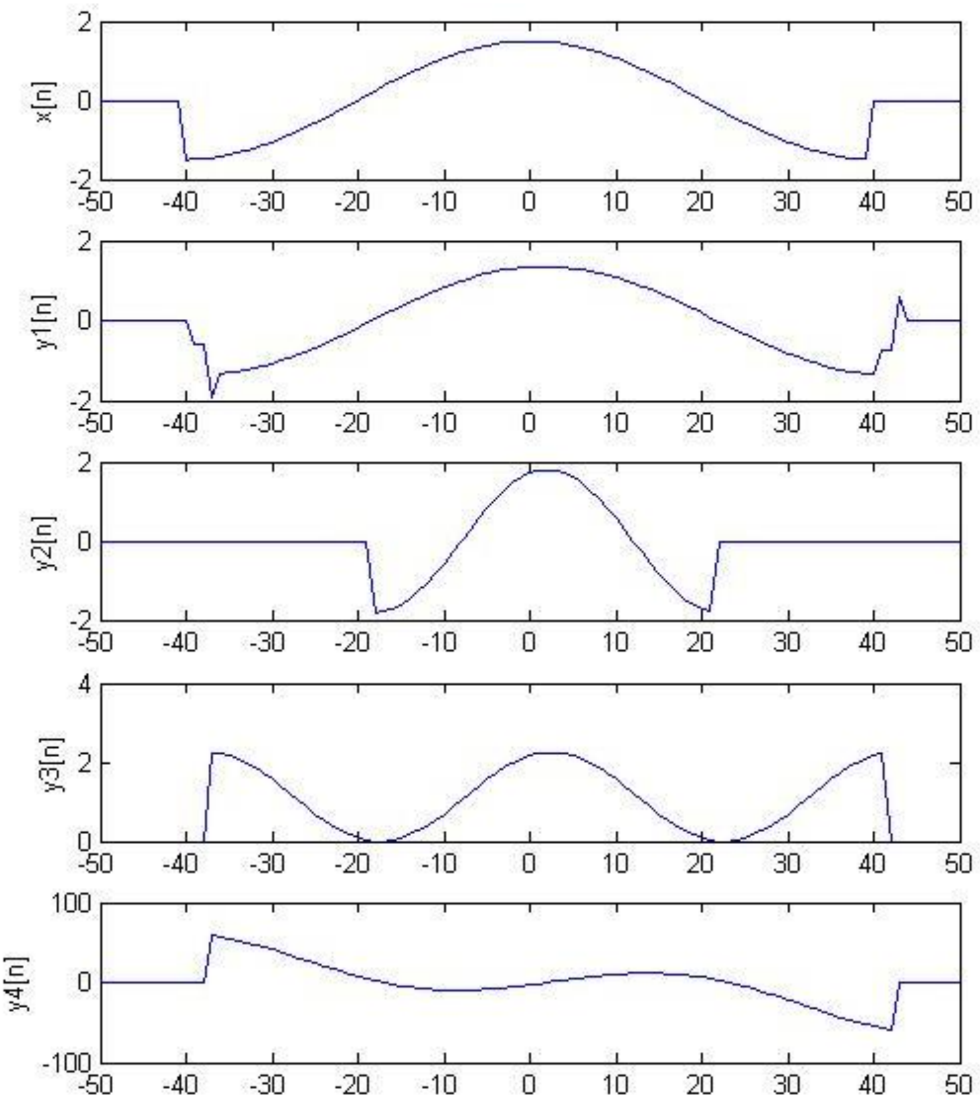
2. Funções a utilizar:

Sinal de entrada: $x[n] = 1.5\cos[0.025\pi n]\,(u[n+40] - u[n-40])$

Respostas do Sistema:

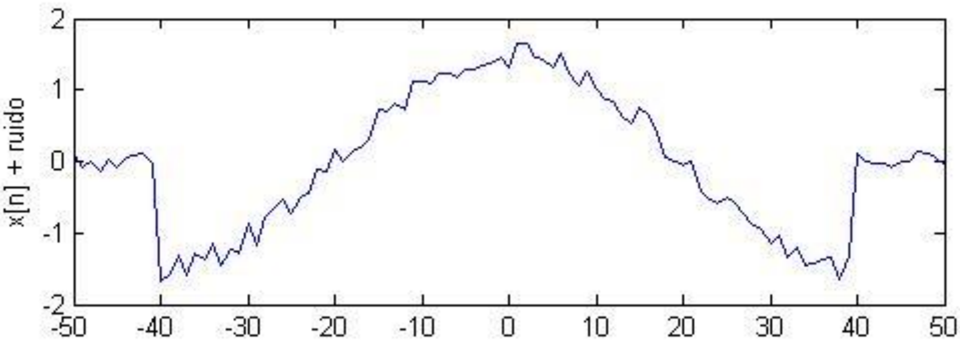
- $y_1[n] = 0.4x[n-1] + 0.9x[n-3] - 0.4x[n-4]$
- $y_2[n] = 1.2x[2n-4]$
- $y_3[n] = x[n-2]x[n-3]$
- $y_4[n] = (n-2)x[n-3]$

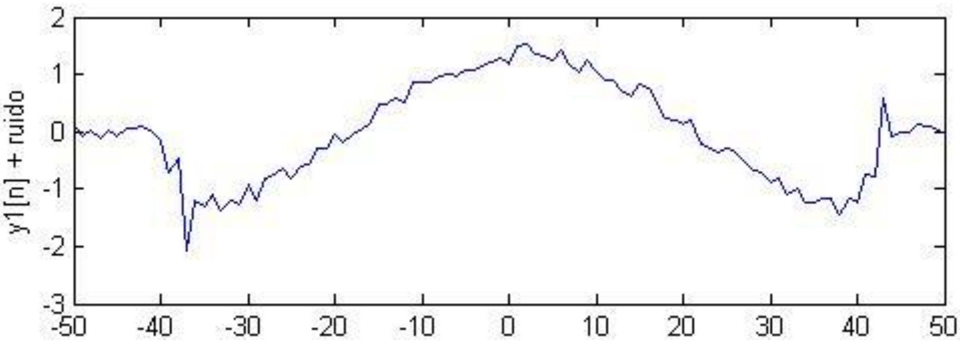
2.1. Para a realização deste exercício foi necessário criar duas funções auxiliares, u.m e ux.m, para cálculo do degrau unitário e para cálculo da função x[n], respectivamente. Foi depois desenvolvida a rotina ex21.m, em que são criados os vectores y1n, y2n, y3n e y4n representantes das funções dadas, para n no intervalo [-50;50]. É finalmente feito o plot das várias funções.



Representação gráfica do sinal de entrada e das repostas do sistema

2.2. De modo a criar o ruído para adicionar ao sinal foi criado o vector ruido, utilizando a função rand do Matlab, com amplitude 0.4 e centrada em 0. É então calculado o valor do sinal com ruído xnr, e a resposta do sistema com ruído y1nr. Finalmente faz-se o plot dos vectores obtidos.





Representação gráfica do sinal com ruído e da resposta do sistema também com ruído

2.3. Um sistema é linear quando respeita as condições de homogeneidade e aditividade. No caso da homogeneidade, a prova consiste em provar que $x[n] = \propto x_1[n] \leftrightarrow y[n] = \propto y_1[n]$. Já para a aditividade é necessário provar que $x[n] = x_1[n] + x_2[n] \leftrightarrow y[n] = y_1[n] + y_2[n]$ com $y_1[n] = T\{x_1[n]\}$ e $y_2[n] = T\{x_2[n]\}$.

2.3.1. Função $y_1[n] = 0.4x[n-1] + 0.9x[n-3] - 0.4x[n-4]$

- Homogeneidade:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= 0.4x[n-1] + 0.9x[n-3] - 0.4x[n-4] = \\ &= 0.4 \propto x_1[n-1] + 0.9 \propto x_1[n-3] - 0.4 \propto x_1[n-4] = \\ &= \propto (0.4x_1[n-1] + 0.9x_1[n-3] - 0.4x_1[n-4]) = \\ &= \propto T\{x_1[n]\} \end{aligned}$$

- Aditividade:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= T\{x[n]\} = 0.4x[n-1] + 0.9x[n-3] - 0.4x[n-4] \\ &= 0.4(x_1[n-1] + x_2[n-1]) + 0.9(x_1[n-3] + x_2[n-3]) \\ &\qquad - 0.4(x_1[n-4] + x_2[n-4]) \\ &= 01.4x_1[n-1] + 0.4x_2[n-1] + 0.9x_1[n-3] + 0.9x_2[n-3]) \\ &\qquad - 0.4x_1[n-4] + 0.4x_2[n-4] \\ &= 0.4x_1[n-1] + 0.9x_1[n-3] - 0.4x_1[n-4] + 0.4x_2[n-1] \\ &\qquad + 0.9\, x_2[n-3]) + 0.4x_2[n-4] \end{aligned}$$

$= T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$

2.3.2. Função $y_2[n] = 1.2x[2n-4]$

- Homogeneidade:

$y_2[n] = 1.2x[2n-4] = 1.2 \propto x_1[2n-4] = \propto T\{x_1[n]\}$

- Aditividade:

$$
\begin{aligned}
y_2[n] = T\{x[n]\} = 1.2x[2n-4] &= 1.2(x_1[2n-4] + x_2[2n-4]) \\
&= 1.2x_1[2n-4] + 1.2x_2[2n-4] \\
&= T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}
\end{aligned}
$$

2.3.3. Função $y_3[n] = x[n-2]x[n-3]$

- Homogeneidade:

$$
\begin{aligned}
y_3[n] = T\{x[n]\} &= x[n-2]x[n-3] = \propto x_1[n-2] \times \propto x_1[n-3] \\
&= \propto^2 T\{x_1[n]\} \neq \propto T\{x_1[n]\}
\end{aligned}
$$

- Aditividade:

$$
\begin{aligned}
&y_3[n] = T\{x[n]\} = x[n-2]x[n-3] \\
&= (x_1[n-2] + x_2[n-2])(x_1[n-3] + x_2[n-2]) \\
&\neq T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}
\end{aligned}
$$

2.3.4. Função $y_4[n] = (n-2)x[n-3]$

- Homogeneidade:

$$
\begin{aligned}
y_4[n] = T\{x[n]\} &= (n-2)x[n-3] = y_4[n] = (n-2) \propto x_1[n-3] \\
&= \propto T\{x_1[n]\}
\end{aligned}
$$

- Aditividade:

$$
\begin{aligned}
&y_4[n] = T\{x[n]\} = (n-2)x[n-3] \\
&= (n-2)(x_1[n-3] + x_2[n-3]) \\
&= (n-2)x_1[n-3] + (n-2)x_2[n-3] = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}
\end{aligned}
$$

Destas demonstrações se conclui que as funções$y_1[n]$, $y_2[n]$ e $y_4[n]$ são lineares mas a função $y_3[n]$ não o é.

2.4. Um sistema é invariante no tempo quando verifica $y[n-n_0] = T\{x[n-n_0]\}$.

2.4.1.

$$
\begin{aligned}
&y_1[n-n_0] = \\
&= 0.4x[(n-1)-n_0] + 0.9x[(n-3)-n_0] - 0.4x[(n-4)-n_0] = \\
&= 0.4x[(n-n_0)-1] + 0.9x[(n-n_0)-3] - 0.4x[(n-n_0)-4] = \\
&= T\{x[n-n_0]\}.
\end{aligned}
$$

2.4.2.

$$y_2[n-n_0] = 1.2x[(2n-4)-n_0] = 1.2x[(2n-n_0)-4] \neq T\{x[n-n_0]\}$$

2.4.3.

$$y_3[n-n_0] = x[(n-2){-}n_0]x[(n-3)-n_0]$$
$$= x[(n{-}n_0)-2]x[(n{-}n_0)-3] = \; T\{x[n-n_0]\}$$

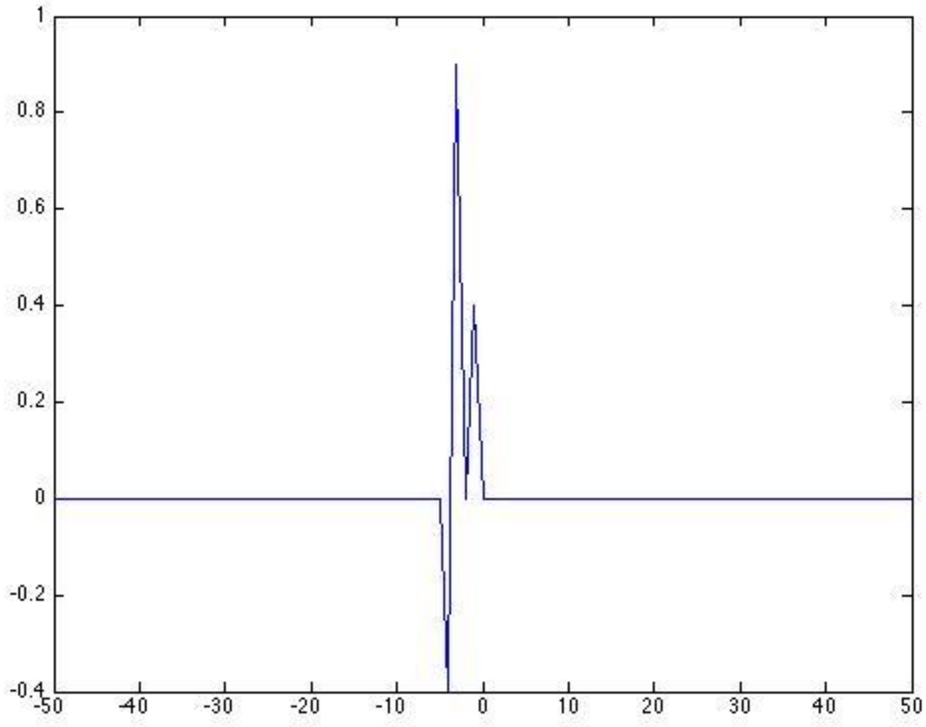
2.4.4.

$$y_4[n-n_0] = \big((n-2){-}n_0\big)x[(n-3){-}n_0] \neq (n-2)x[n-no-3]$$
$$= \; T\{x[n-n_0]\}$$

2.5. Para calcular a resposta do impulso do sistema $y_1[n]$ temos primeiro de determinar a sua função. Sendo o nosso grupo o 23, foi determinada da seguinte maneira:

$$py_1[i] = 0.4 * \; \delta(n(i) - \; 1) + \; 0.9\delta(n(i) - \; 3) - \; 0.4\,\delta(n(i) - \; 4)$$

No entanto, para percorrer todo o intervalo necessário do sinal, foi necessário definir a escala de n desde a 50 até 50,obtendo o seguinte gráfico:



Impulso do sistema $y_1[n]$

2.6. Para determinarmos a função de transferência do sistema G(z) através de y_1 foi preciso calcular a Transformada de z do impulso H_1 com condições iniciais nulas, obtendo a seguinte expressão:

$$\mathrm{X(z)} = (0.4\,\delta(n-1) + 0.9(n-3) - 0.4(n-4)$$

Fazendo a Transformada de Z obtivemos a seguinte expressão:

$$\frac{0.4}{z} + \frac{0.9}{z^3} - \frac{0.4}{z^4}$$

2.7. Para calcular os valores em que k $\epsilon\ \mathfrak{R}$ possa ser estável, teremos de utilizar a função de transferência dada por:

$$\mathrm{M(z)} = \frac{\mathrm{k}G_1(\mathrm{z})}{1 + \mathrm{k}G_1(\mathrm{z})}$$

Ao ajustarmos o intervalo de 5 a 5 com um passo de 0.1 e após adicionarmos um vector com os valores do grupo foram obtidas as seguintes raízes da função:

-1.11 -1.1 -1.09 -1.08 -1.07 -1.06 -1.05 -1.04 -1.03 -1.02

-1.01 -1 -0.99 -0.98 -0.97 -0.96 -0.95 -0.94 -0.93 -0.92

-0.91 -0.9 -0.89 -0.88 -0.87 -0.86 -0.85 -0.84 -0.83 -0.82

-0.81 -0.8 -0.79 -0.78 -0.77 -0.76 -0.75 -0.74 -0.73 -0.72

-0.71 -0.7 -0.69 -0.68 -0.67 -0.66 -0.65 -0.64 -0.63 -0.62

-0.61 -0.6 -0.59 -0.58 -0.57 -0.56 -0.55 -0.54 -0.53 -0.52

-0.51 -0.5 -0.49 -0.48 -0.47 -0.46 -0.45 -0.44 -0.43 -0.42

-0.41 -0.4 -0.39 -0.38 -0.37 -0.36 -0.35 -0.34 -0.33 -0.32

-0.31 -0.3 -0.29 -0.28 -0.27 -0.26 -0.25 -0.24 -0.23 -0.22

-0.21 -0.2 -0.19 -0.18 -0.17 -0.16 -0.15 -0.14 -0.13 -0.12

-0.11 -0.1 -0.09 -0.08 -0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.03 -0.02

-0.01 0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09

0.1 0.11 0.12 0.13 0.14 0.15 0.16 0.17 0.18 0.19 0.2

0.21 0.22 0.23 0.24 0.25 0.26 0.27 0.28 0.29 0.3 0.31

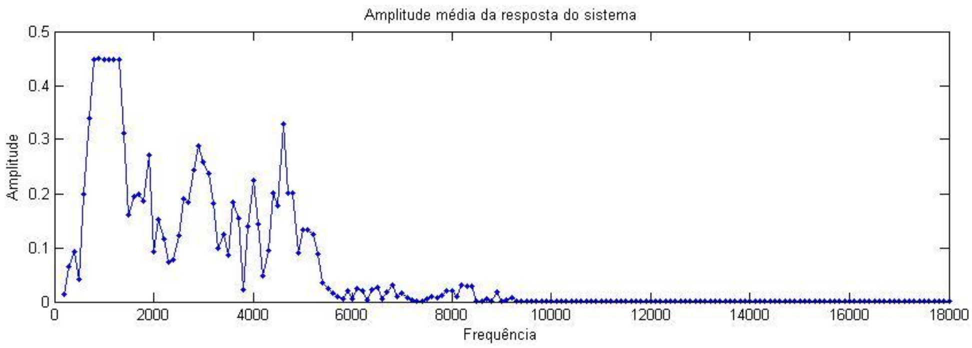
0.32 0.33 0.34 0.35 0.36 0.37 0.38 0.39 0.4 0.41 0.42

0.43 0.44 0.45 0.46 0.47 0.48 0.49 0.5 0.51 0.52 0.53

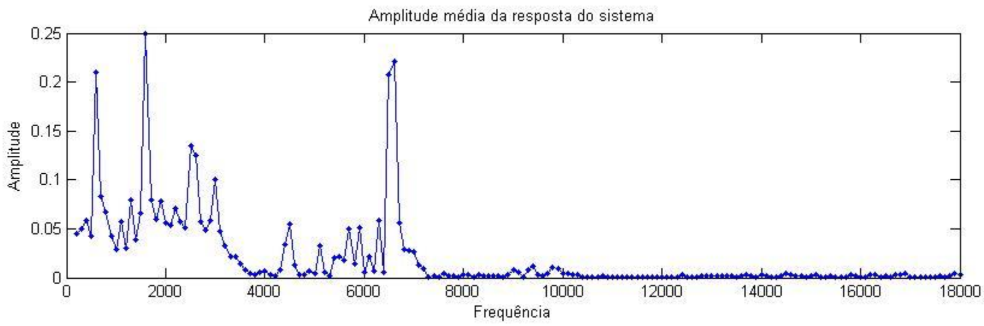
0.54 0.55 0.56 0.57 0.58

3. Para realizar esta experiência começámos por definir os parâmetros necessários: frequência de amostragem, duração da amostra, frequências a reproduzir e tempos de amostragem. De seguida, dentro de um ciclo que percorre as frequências a utilizar, foi criado o sinal na respectiva frequência e usados os comandos *wavplay* e *wavrecord* para a gravação assíncrona do som emitido, armazenando a resposta na matriz *gravacoes*. É depois calculado o máximo de cada período de amostragem e a média desses máximos, correspondendo esta à amplitude das frequências; a imagem obtida resulta dessas mesmas médias.

   Realizámos esta experiência em dois computadores diferentes obtendo os resultados seguintes:



Amplitude média de resposta do sistema - Computador A



Amplitude média de resposta do sistema - Computador B

No computador A verifica-se que as colunas filtram os sons abaixo dos 500 Hz, sendo visível uma subida significativa de amplitude entre os 500 e os 800 Hz. Os valores mantêm-se durante algum tempo, voltando a diminuir por volta dos 1300 Hz, e variando bastante no intervalo de 1500 a 5800 Hz. Após os 9100 Hz, os sons já são praticamente inaudíveis, já que muito provavelmente as colunas conseguem reproduzir esses sons (ou o microfone não os consegue captar).

No computador B obtivemos um comportamento semelhante, tendo porém um pico nos 7000 Hz superior ao dos 800 Hz. Aos 1700 Hz dá-se a amplitude máxima da experiência no valor de 0.25. Comparando com o computador A, podemos observar que as colunas e/ou o microfone são de qualidade inferior, dado que no computador A a amplitude máxima é de 0.45. Também verificamos que a partir de 10000 Hz os valores não são nulos, causados pelo facto de as colunas emitirem estalidos durante o teste.