ΦΥΣΙΚΗ 1

διάλεξη 17

Κέντρο Μάζας.

συστήματος ΥΣ ή στερεού σώματος
(συστήματος ατόμων).

Σύστημα ΥΣ $\longrightarrow$ Συνεχές Στερεό Σώμα

Αν θεωρήσω σύστημα Ν ΥΣ με μάζες m_i, ταχύτητες $\underline{v}_i$ $(i=1,\dots N)$ η ταχύτητα κέντρου μάζας

[illegible]

$\underset{\sim}{v}_{CM}$ είναι η ταχ ενός ΥΣ με μάζα τη συνολική $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ και ορμή τη συνολική

$$\underset{\sim}{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{p}_i$$

οπότε έχω

$$\underset{\sim}{p} = M \underset{\sim}{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{v}_i \Rightarrow$$

$$\boxed{\underset{\sim}{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i v_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

Το κεντρο μαζας είναι θεση $\underset{\sim}{r}_{CM}$ τ.ω.

$$\dot{\underset{\sim}{r}}_{CM} = \underset{\sim}{V}_{CM}$$

Το ορίζω

$$\boxed{\underset{\sim}{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

2ος Νομος για Συστημα ΥΣ

Αν στα ΥΣ ασκούνται <u>εξωτερικές</u> δυνάμεις $\underset{\sim}{F}_i$ με συνολική <u>εξωτερ.</u> δύναμη

$$\underset{\sim}{F} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{F}_i$$

τότε

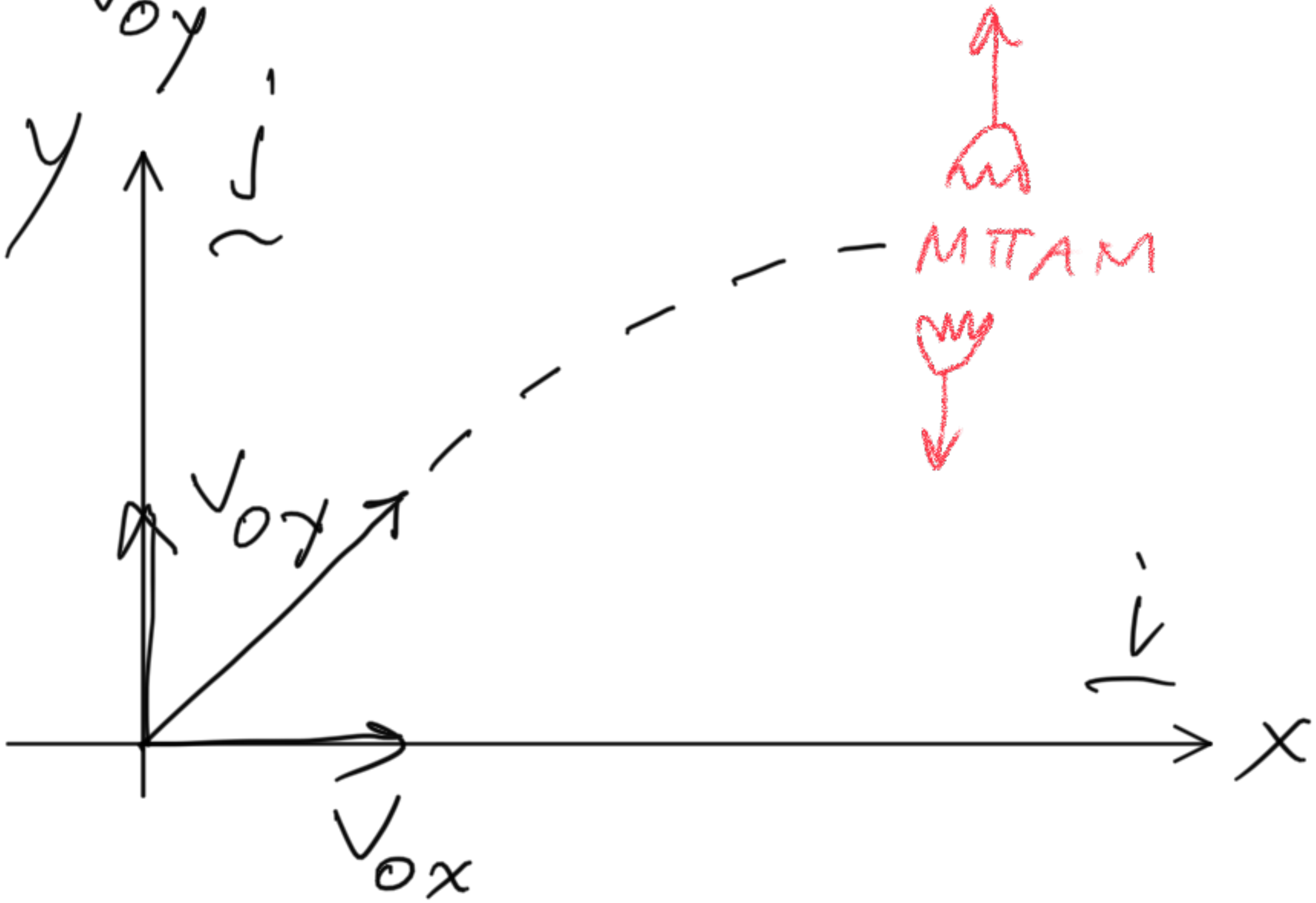
$$\boxed{\underset{\sim}{F} = M \underset{\sim}{a}_{cM}}$$

όπου $\underset{\sim}{a}_{cM} = \ddot{\underset{\sim}{r}}_{cM} = \dot{\underset{\sim}{v}}_{cM}$

<u>Παράδειγμα</u>

Πετάω την κινέτικη χειροβομβίδα

μεταφορικές ταχύτητες V_{0x} και V_{0y}



Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς η χειροβομβίδα εκρήγνυται σε 2 ίσα κομμάτια. Ένα ζουζούνι πάνω στη χειροβομβίδα μετράει την ταχύτητα του πάνω κομματιού σαν $V_* j$ σχετικά με τον εαυτό του. α') Να βρεθούν οι ταχύτητες των κομματιών ως προς τη γη αμέσως μετά το ΜΠΑΜ.

β') Τι κίνηση κάνει το ΚΜ των κομματιών μετά το ΜΠΑΜ;

Σχόλιο. Σχετική ταχύτητα.

Η σχετική ταχ. του πάνω κομματιού ως προς το ζουζούνι είναι $V_* j$. Το ζουζούνι συνεχίζει να κινείται όπως πριν το μπαμ.

Ποια είναι η ταχ. του ζουζουνις κατά το μπαμ; (ταχ. χειροβομβίδας αμέσως πριν το μπαμ;)

Απάντηση $V_{0x}\,\hat{i}$

επειδή η οριζόντια ταχύτητα είναι σταθερή $= V_{0x}$ (διότι οι εξωτ. δυνάμεις είναι μόνο βαρύτητα), και επίσης στην κορυφή της τροχιάς, η ταχ. είναι οριζόντια άρα $V_y = 0$ τότε.

Η συνολική ταχύτητα του πάνω κομματιού είναι πόσο; είναι η ταχ. του ζουζουνιού + σχετ. ταχ. κομματιού ως προς ζουζούνι

$$\boxed{\underset{\sim}{v}_{+} = v_{0x}\,\underset{\sim}{i} + v_{x}\,\underset{\sim}{i}}$$

Η ταχ του <u>κάτω</u> κομματιού πόσο είναι;

$$\underset{\sim}{v}_{-} =$$

στο μπαμ.

Πόσο είναι τότε η $\underset{\sim}{V}_{CM}$;

$$\underset{\sim}{V}_{CM} = V_{0x}\,\underset{\sim}{i}$$

από Ορισμό

$$M\,\underset{\sim}{V}_{CM} = m_+\underset{\sim}{V}_+ + m_-\underset{\sim}{V}_-$$

$$m_+ = m_- = M/2$$

μάζες κομματιών.

ομοιογενή

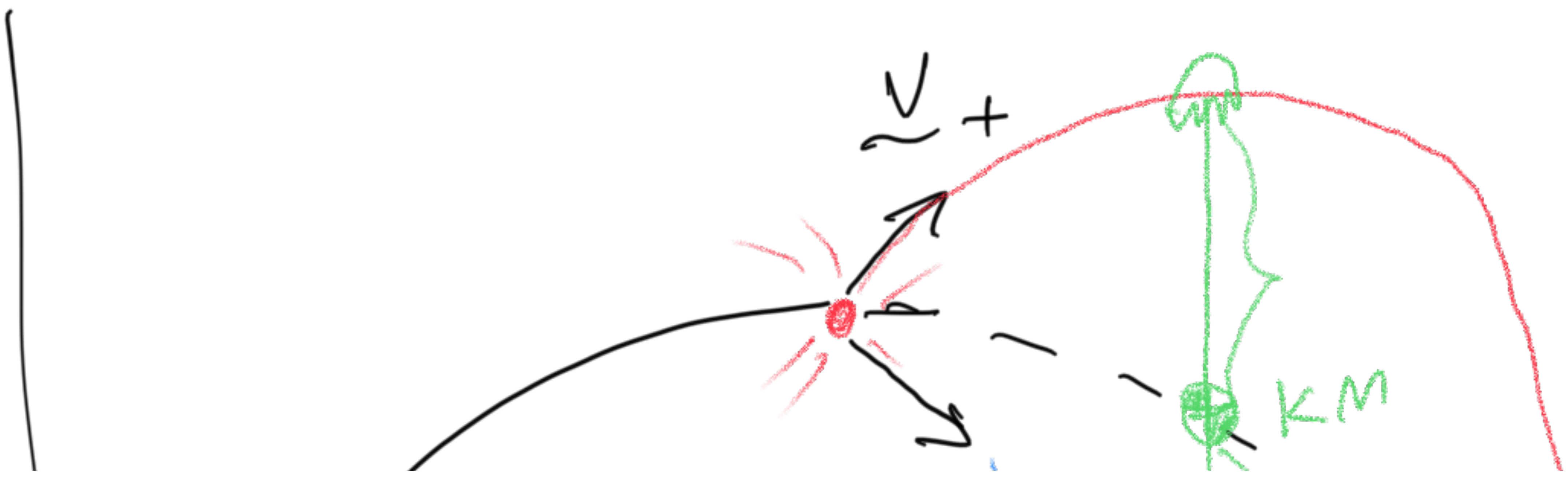
$$\cancel{M}\,\underset{\sim}{V}_{cm} = \frac{\cancel{M}}{2}\underset{\sim}{V}_+ + \frac{\cancel{M}}{2}\underset{\sim}{V}_-$$

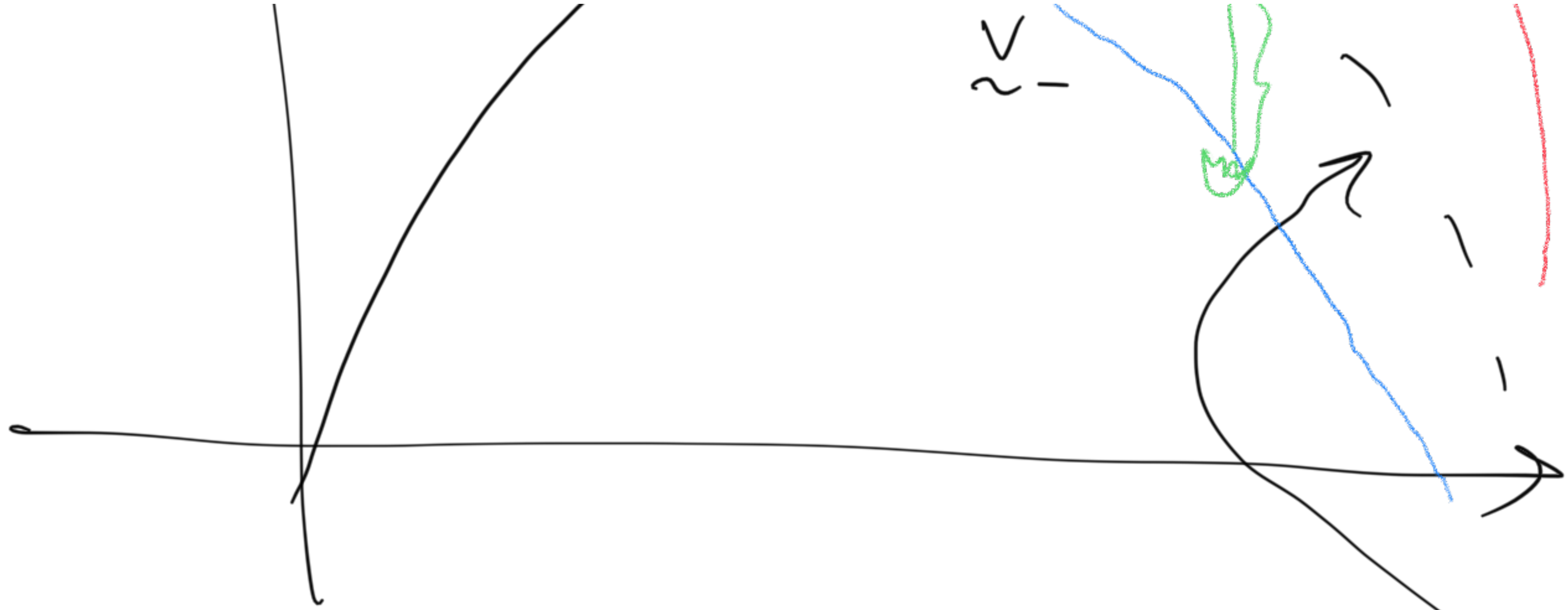
$$\Rightarrow 2\underset{\sim}{V}_{cm} = \underset{\sim}{V}_{+} + \underset{\sim}{V}_{-} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{V}_{-} = 2\underset{\sim}{V}_{cm} - \underset{\sim}{V}_{+}$$

$$= 2V_{0x}\underset{\sim}{i} - V_{0x}\underset{\sim}{i} - V_{*}\underset{\sim}{j}$$

$$\boxed{\underset{\sim}{V}_{-} = V_{0x}\underset{\sim}{i} - V_{*}\underset{\sim}{j}}$$





θ) Τι κάνει το ΚΜ;

Συνεχίζει την αρχική παραβολική τροχιά σα να μην συμβαίνει τίποτα!!

Γιατί; Διότι το <u>μπαμ</u> είναι

[illegible] μεν αλλά <u>εξωτερικές δυνάμεις</u> που δεν επηρεάζουν το ΚΜ. Η μόνη εξωτερική δύναμη είναι η βαρύτητα οπότε 2ος Νόμος:

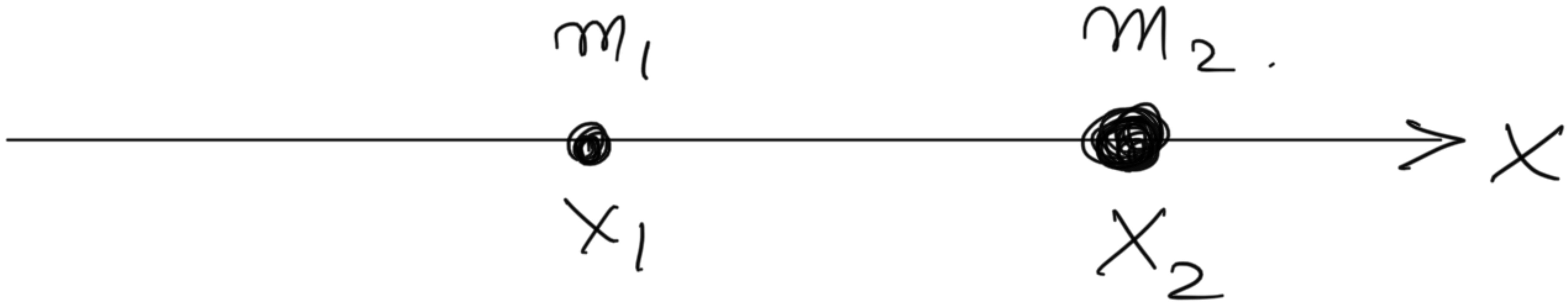
$$M\ddot{\underline{r}}_{CM} = \text{συνολική εξωτερ. δύναμη}$$

$$\cancel{M}\underline{a}_{CM} = -\cancel{M}g\underline{j}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{r}}_{CM} = -g\underline{j}$$

ελεύθερη πτώση με συνέχεια της παραβολικής τροχιάς.
όπως και πριν το ΜΤΜ.
(το ίδιο ισχύει για 547 κομμάτια!!!)

Παράδειγμα 1Δ



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{}$$

$m_1 + m_2$

Ιδιότητες

1) για οποιαδήποτε $m_1, m_2 > 0$

$x_1 < x_{CM} < x_2$.

2) Αν το γράψω

$$x_{CM} = \frac{m_1}{m_1+m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} x_2$$

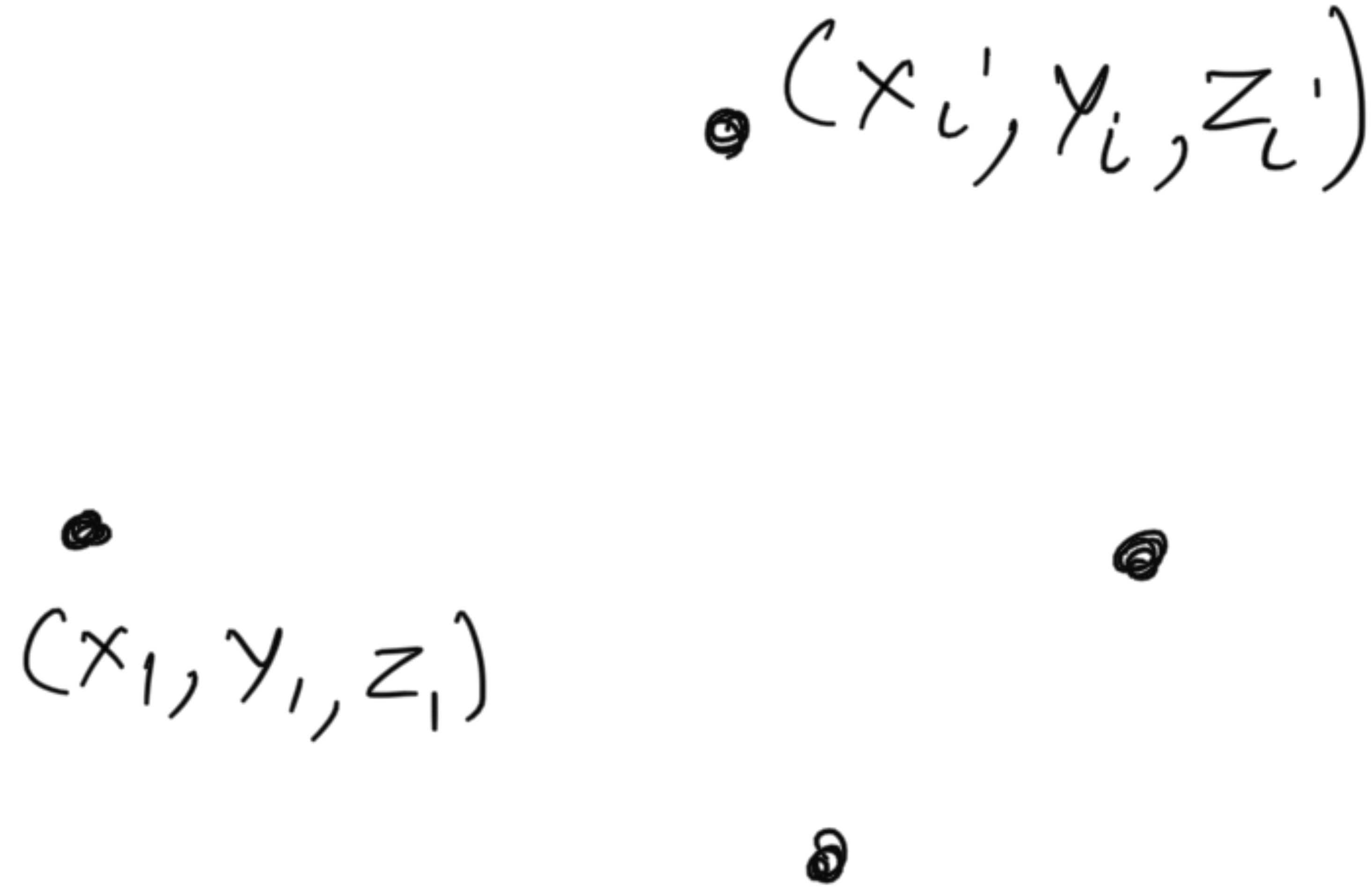
για $m_1 = m_2$ $\quad x_{CM} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

στη μέση.

3) Αν $m_2 \gg m_1$

$$x_{CM} \simeq x_2 .$$

Σε 3Δ



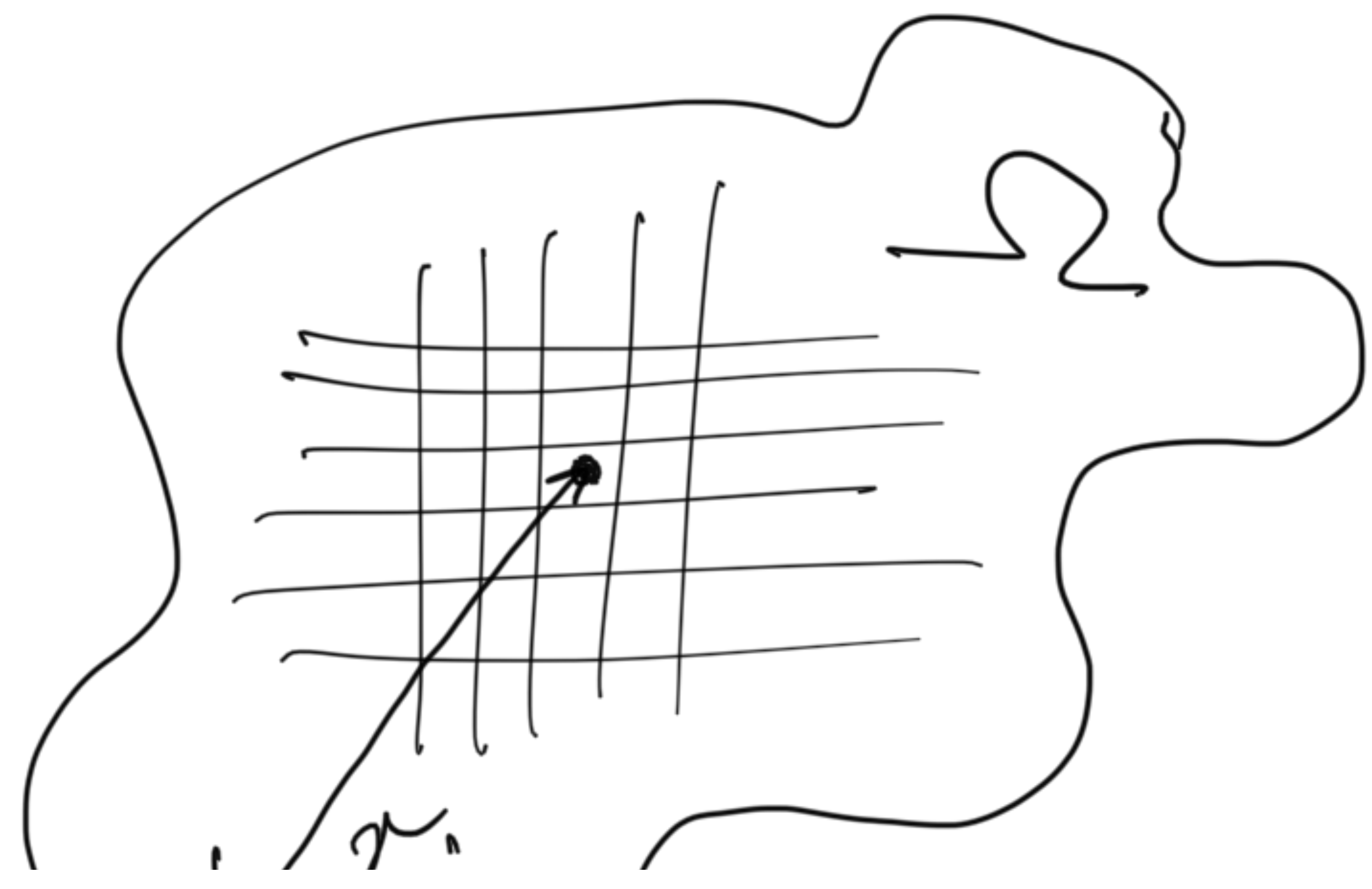
Οι συντεταγμένες της $\underline{r}_{CM}$

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΣΤΕΡΕΟΥ



Γενικευμένο Πατατοειδές $\underset{\sim}{\Omega}$

περιοχη στον $\mathbb{R}^3$ με θετικό
ογκο, συνορο
κ.λπ.

$$\underset{\sim}{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$$

Συνεχής περιοχη με μαζα
κατανεμημένη παντου.

Θέλω να ορισω ΚΜ της πατατας.

$\exists\ \infty$ σημεια στην πατατα.

Κοβω την πατατα σε κομματακια
μαζας Δm_i θεση $\underset{\sim}{r}_i$.

$$\underset{\sim}{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \, \underset{\sim}{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i}$$

Συνολική μάζα

$$M = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i$$

Κόβοντας σε όλο μικρότερα
κομμάτια

$$N \longrightarrow \infty$$

$$\Delta m_i \longrightarrow 0$$

$$dm_i \longrightarrow dm$$

$$\sum_{i=1}^{N} \longrightarrow \iiint \quad dm$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i' x_i' \longrightarrow \iiint_{\Omega} r\, dm$$

dm απειροστο στοιχειό μαζας.

Στο συνεχες σώμα ορίζω

<u>πυκνότητα</u> $\rho(\underline{r})$ $\quad \rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$

μάζας ανά μονάδα όγκου.

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(\underline{r})\, dV$$

Στοιχείο μάζας

$$dm = \rho\, dV$$

στοιχείο μάζας

στοιχείο όγκου

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

$\rho = \rho(x, y, z) = \rho(\underline{r})$ γενικά

Όταν $\rho =$ σταθ. λέμε σώμα Ω <u>ομοιογενές</u>

και όχι «ομογενές»

$$\iiint_{\Omega} \underline{r}\, dm = \iiint_{\Omega} \underline{r}\, \rho(\underline{r})\, dV$$

$$\iiint_{\Omega} \rho(\underline{r})\, \underline{r}\, dV$$

$$z_{CM} =$$

$$M = \iiint_{\Omega} \rho \, dV$$

$$x_{CM} = \frac{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)\, x \, dV}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)\, dV}$$

$$\begin{matrix} x_{CM} \\ y_{CM} \\ z_{CM} \end{matrix} = \frac{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z) \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \overbrace{dV}^{dxdydz}}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)\, dxdydz}$$