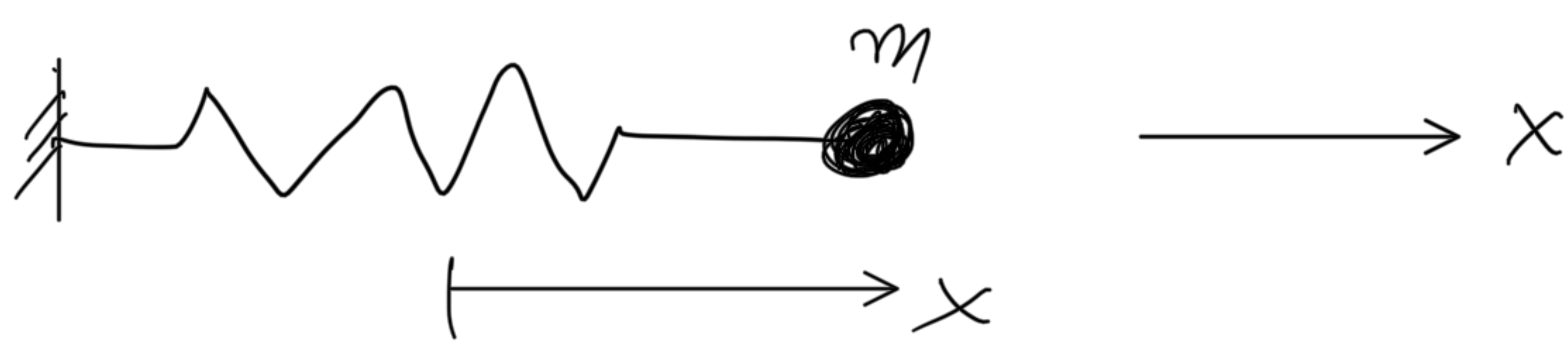
ΦΥΣΙΚΗ 1

διάλεξη 12

1) Ταλαντωτής και απλή αρμονική κίνηση από Διατήρηση Ενέργειας.
2) Δυνάμεις που εξαρτώνται από τη θέση σε 3Δ.

ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ



$x=0$ θέση ισορροπίας.

Δύναμη Ελατηρίου

$$F = -kx = -\frac{d}{dx}U(x).$$

Δυν. Ενέργεια

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Κινητική Ενέργεια

$$\frac{mv^2}{2} \qquad v(t) = \dot{x}(t)$$

Αρχικές Συνθήκες

$$x(0)=x_0\,, \qquad v(0)=v_0$$

Θέλω να βρω την κίνηση του ΥΣ (μάζας). $x(t),\ t\geq 0$.

Θέλω να χρησιμοποιήσω ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\frac{1}{2}mv^2(t)+U(x(t))=\underbrace{E_0}_{\text{σταθ.}} \quad (*)$$

δηλ.

$$\frac{mv^2}{2}+U(x)=E_0$$

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2$$

$$E_0=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2$$

Θέλω να μετατρέψω τη Διατήρηση Ενέργειας (*) σε ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Βάζω

$$v=\frac{dx}{dt}$$

αφού πρώτα λύσω την (*) ως προς v.

$$(*) \quad \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = E_0 - U(x) \geq 0$$

$$v^2 = \frac{2}{m}\left(E_0 - U(x)\right)$$

$$\Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U(x)\right)}.$$

είναι οκ η ρίζα διότι $E_0 - U(x) \geq 0$

Μετά βάζω

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U(x)\right)}$$

Διαλέγω την περίπτωση +

Μπορώ να εξετάσω την − μετά.

Επίσης γράφω

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2.$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - \frac{kx^2}{2}\right)}}$$

Είναι της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x)$$

Διαφορική πρώτου βαθμού
για την $x(t)$.

Την φτιάχνω λίγο

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m}x^2}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2E_0}{k} - x^2}$$

Ορίζω

$$\omega = \sqrt{k/m}\ , \quad A = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$$

Θυμάμαι ότι $A = x_{max}$ μέγιστο
πλάτος ταλάντωσης από διάλεξη 11.

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Χωρισμός μεταβλητών.

Διαιρώ με $\sqrt{A^2-x^2}$

Πολ/ζω με dt

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \omega\, dt$$

υ(x)

Ολοκληρώνω

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \omega \int dt$$

$$= \omega t + C$$

Αλλαγή μεταβλητών από x σε z

$$x = A \sin z$$

(και το $x = A\cos z$ δουλεύει)

$$\sqrt{A^2-x^2} = \sqrt{A^2 - A^2 \sin^2 z} =$$

$$= A\sqrt{1-\sin^2 z} = A\sqrt{\cos^2 z} =$$

$$= \pm A \cos z$$

$$\frac{dx}{dz}\,dz = A\cos z\,dz$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int \frac{\cancel{A\cos z}\,dz}{\pm \cancel{A\cos z}}$$

$$= \pm \int dz$$

Διαλέγω το +. Μη ξεχάσετε να μου θυμίσετε το − μετά.

$$\int dz = \omega t + C_1$$

$$z = \omega t + C_1$$

Ξέχασα τι είναι το z

$$x = A\sin z \Rightarrow$$

$$z = \sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = \omega t + C_1$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{A}\right) = \omega t + C_1$$

Θα λύσω για x

$$\frac{x}{A} = \sin(\omega t + C_1)$$

$$\Rightarrow x = x(t) = A \sin(\omega t + C_1)$$

<u>Σχόλιο</u>: οι άλλες επιλογές προσήμων $\pm$ δίνουν ουσιαστικά την ίδια γενική λύση

$$x(t) = A \sin(\omega t + C_1)$$

όπου A, C_1 σταθερές που καθορίζονται από αρχικές συνθήκες ενώ $\omega = \sqrt{k/m}$

Η λύση αυτή είναι αρμονική κίνηση με πλάτος ταλάντωσης A, συχνότητα ω και φάση που καθορίζεται από τη σταθερά C_1 $\quad \omega t + C = 0 \Rightarrow t = -C/\omega$

Φάση $-C/\omega$.

Αρχικές συνθήκες;

$$A = x_{max} = \sqrt{2E_0/k} =$$

$$= \sqrt{\frac{mv_0^2 + kx_0^2}{k}} =$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + c) =$$

$$= A\cos(c)\sin(\omega t) + A\sin(c)\cos(\omega t)$$

$$x(0) = x_0 = A\sin c$$

$$\dot{x}(t) = v(t) = A(\cos c)\omega\cos\omega t +$$

$$- A(\sin c)\omega\sin\omega t$$

$$v(0) = A\omega\cos c = v_0$$

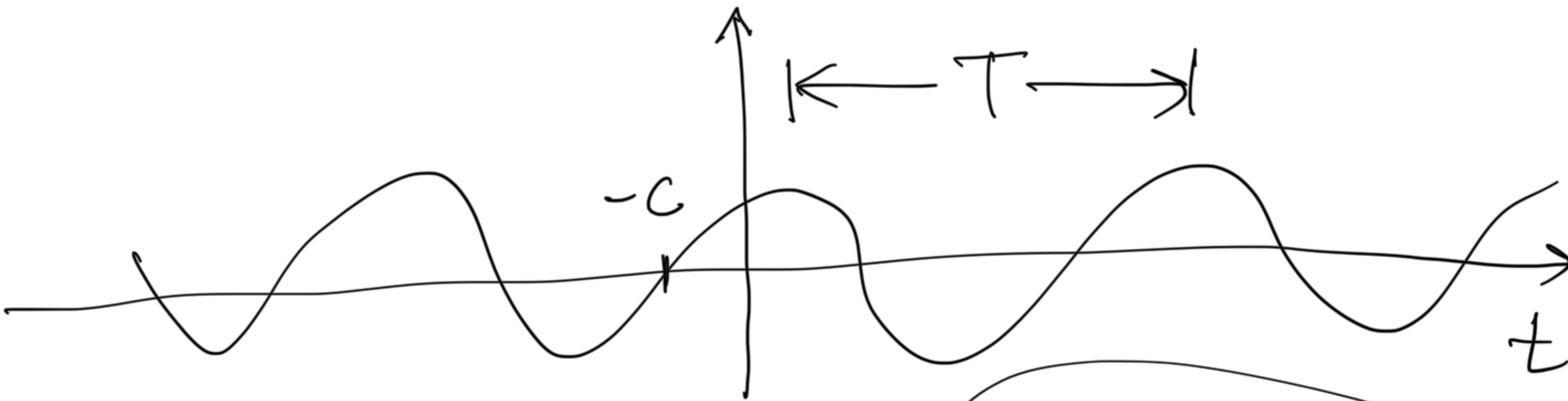
$$x_0 = A\sin c$$
$$v_0 = A\omega\cos c$$

$$A\cos c = v_0/\omega$$
$$A\sin c = x_0$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Περίοδος ταλάντωσης T.

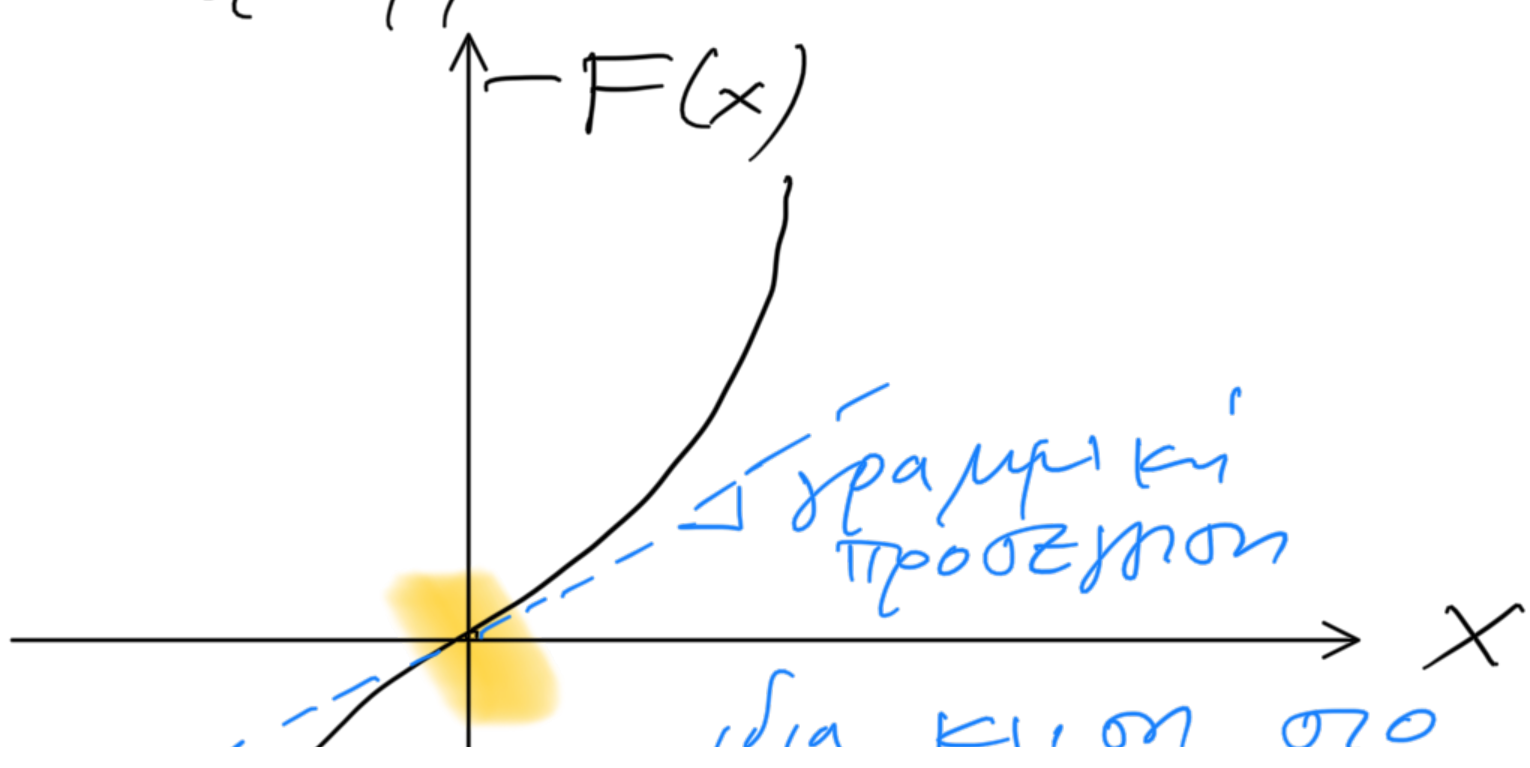


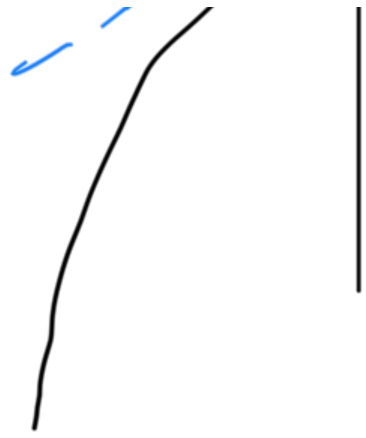
$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/\omega$$

Συμπέρασμα: Από διατήρηση ενέργειας συνεπάγεται ότι ο αρμονικός ταλαντωτής όντως κάνει αρμονική ταλάντωση.

γραμμικό ελατήριο.

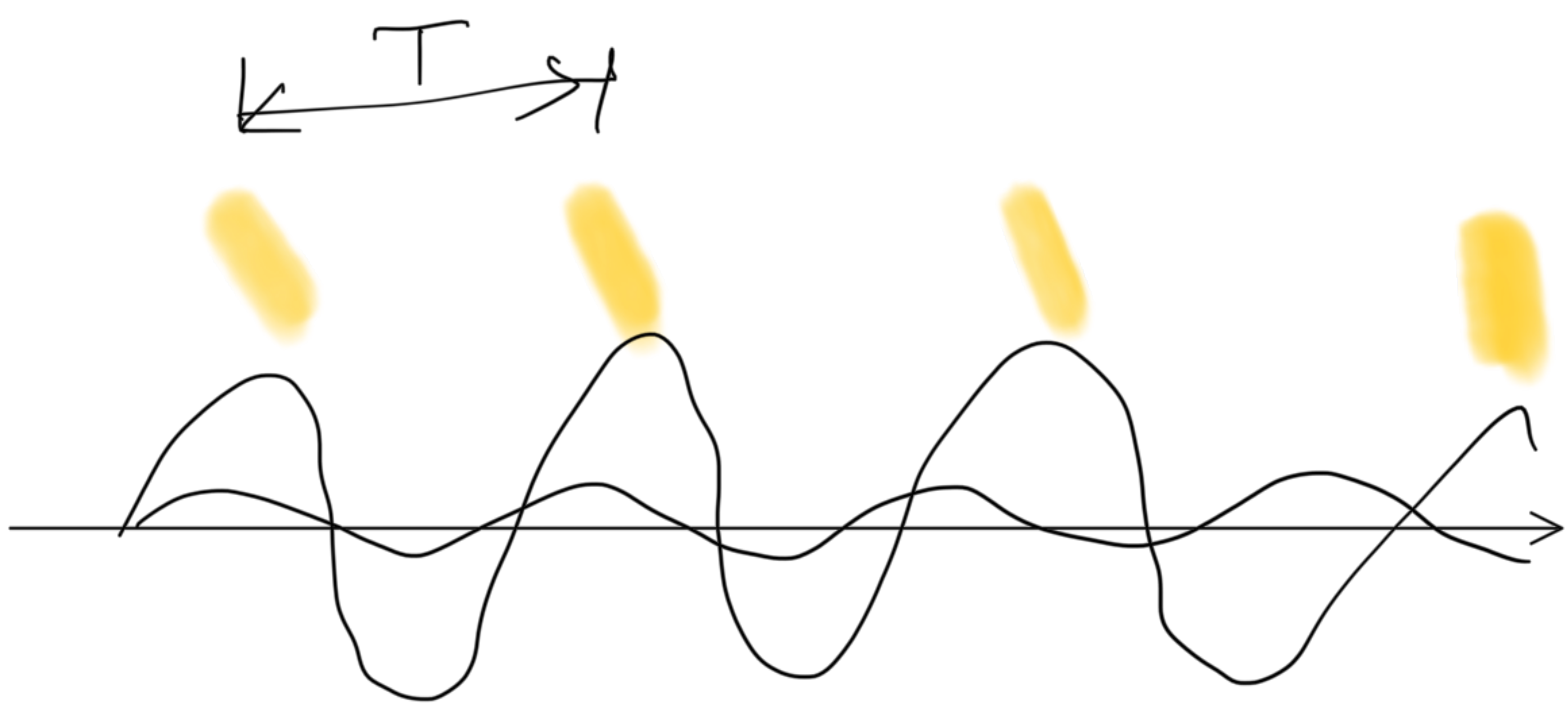
Σχόλιο: Τα ελατήρια δεν είναι γραμμικά....





$x = 0.$

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με την ίδια μέθοδο αν και η απάντηση είναι πιο μπερδεμένη. Θα έχω ταλαντώσεις αλλά όχι απλά αρμονικές. Η κίνηση θα είναι περιοδική αλλά η συχνότητα δεν θα είναι ανεξάρτητα από το πλάτος ταλάντωσης.



Στον αρμονικό ταλαντωτή η συχνότητα είναι πάντα η ίδια.