# ΦΥΣΙΚΗ 1

## διάλεξη 20

Στροφορμή για συστήματα ΥΣ και στερεά σώματα.

Σύστημα από N ΥΣ με θέσεις $\underset{\sim}{r}_i$, μάζες $m_i$, ταχ. $\underset{\sim}{v}_i = \dot{\underset{\sim}{r}}_i$. Τότε αν ασκούνται <u>εξωτερικές</u> <u>δυνάμεις</u> $\underset{\sim}{F}_i$ στο ΥΣ $i$ (<u>όχι</u> από τα ΥΣ $j \neq i$ αλλά ΥΣ του <u>συστήματος</u> αλλά οι $\underset{\sim}{F}_i$ ασκούνται στα ΥΣ του συστήματος από το υπόλοιπο σύμπαν)

τι μπορώ να πω για τη στροφορμή του συστήματος;

<u>Συνολική</u> <u>Εξωτερική</u> <u>Ροπή</u> περί το O που ασκείται στο <u>σώμα</u> είναι

σύστημα N ΥΣ

$$\underset{\sim}{\tau}_O = \underset{\sim}{\tau} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{r}_i \times \underset{\sim}{F}_i$$

δεν υπάρχουν <u>εσωτερ.</u> δυνάμεις σ' αυτό τον ορισμό.

## Συνολική Στροφορμή του Σώματος

$$\underset{\sim}{L}_{/O} = \underset{\sim}{L} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{r}_i \times \underset{\sim}{p}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{r}_i \times (m_i \underset{\sim}{v}_i)$$

ΑΞΙΩΜΑ Ισοζύγιο Στροφορμής για το σύστημα των Ν ΥΣ (σώμα)

$$\dot{\underset{\sim}{L}}_{/O} = \underset{\sim}{\tau}_{/O}$$

Ο ρυθμός αλλαγής της συνολικής στροφορμής περί το Ο τ/γ σώματος ισούται με τη συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

Σχόλια 1) Εδώ δεν είπαμε τίποτα για τις εσωτερ. δυναμεις (που ασκούνται μτξ των «ατόμων»).

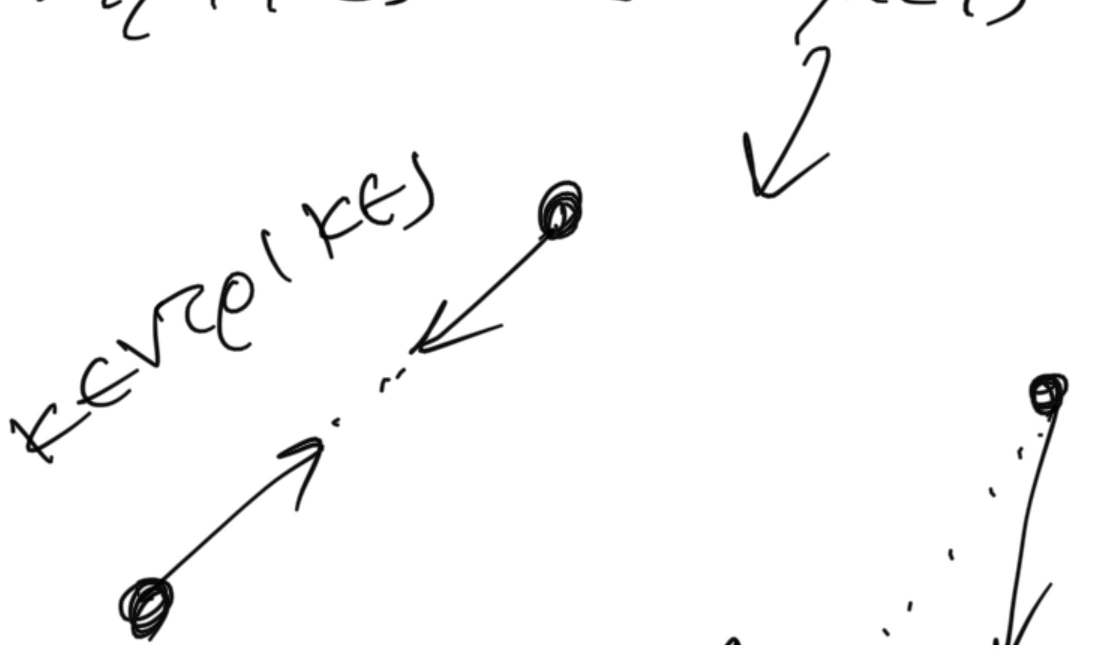
2) Μερικές φορές θα δειτε το παραπάνω αξίωμα να «αποδεικνύεται» σα θεώρημα από το 2° Νόμο του Ν. για

ΥΣ. Για να ισχύει αυτό όμως χρειάζονται ορισμένες παραδοχές για τις εσωτερικές δυνάμεις (που ασκούνται μεταξύ των ΥΣ του σώματος) οι οποίες ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ ΓΕΝΙΚΑ !!

π.χ. αν θεωρήσουμε ότι οι δυνάμεις (εσωτερικές) είναι κατά ζεύγη τότε για να ισχύει το θεώρημα πρέπει να υποθέσουμε ότι είναι κεντρικές (δεν ισχύει γενικά λόγω ηλεκτρομαγνητικών και κβαντομηχανικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ ατόμων).

Αυτό σημαίνει ότι το ΑΞΙΩΜΑ είναι ανεξάρτητος νόμος.

Κεντρικές Δυνάμεις



μη κεντρικές.

Θέλω να μεγιστοποιήσω τη Στροφορμή και την ΚΕ ενός συστήματος ΥΣ.

<u>Σχόλιο</u>. Μια μπάλα που περιστρέφεται γύρω από το ΚΜ έχει μηδενική ορμή αλλά όχι μηδενική ΚΕ και όχι μηδενική στροφορμή.

Θέλω να δείξω τις εξής «προτάσεις»

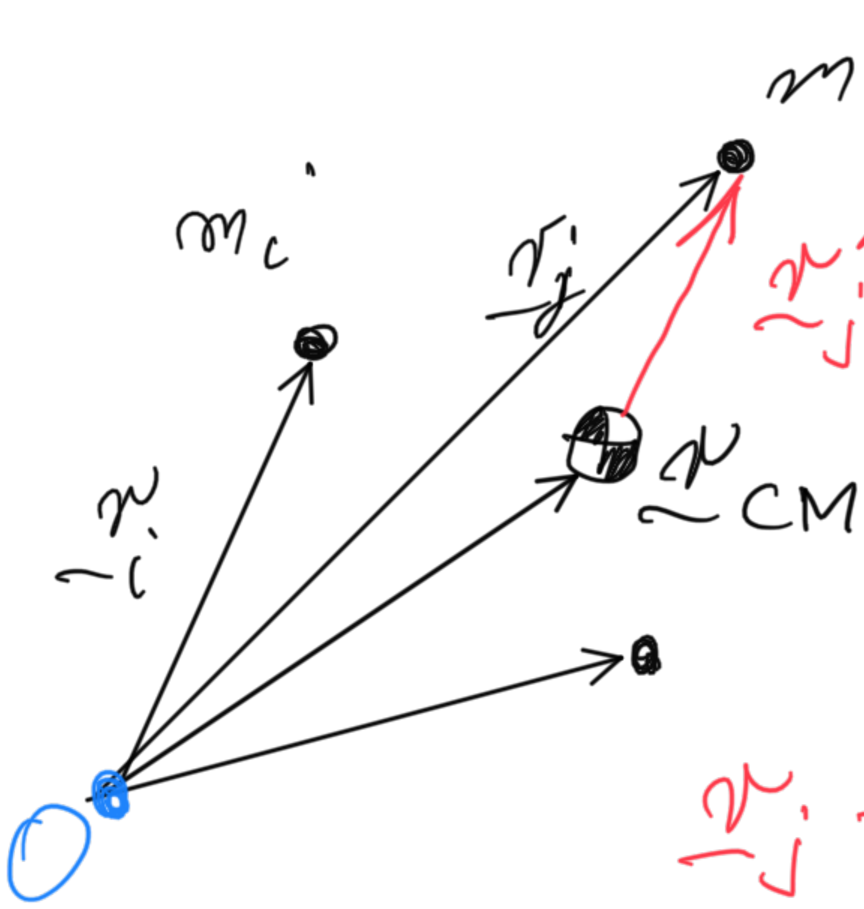
$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_{CM}$$

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}_{CM} + \underset{\sim}{L}'_{/CM}$$

$$K = K_{CM} + K'_{/CM}$$

δηλ. η ορμή σώματος (συστήματος) είναι ίση με την ορμή ενός ΥΣ με μάζα τη συνολική που κινείται σαν το ΚΜ, ενώ η στροφορμή και η ΚΕ έχουν ένα έξτρα όρο, τη στροφορμή (ή ΚΕ) <u>περί</u> το <u>κέντρο μάζας</u>.

## <u>Η Ορμή στο σύστημα του ΚΜ ΜΗΔΕΝΙΖΕΤΑΙ</u> !




$$\mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{CM} \qquad (1)$$

<u>σχετική θέση</u> ως προς ΚΜ.

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_j$$

Ταχύτητα ως προς ΚΜ.

Παραγωγίζω (1) ως προς χρόνο:

$$\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{CM}$$

όπου $\mathbf{v}_j = \dot{\mathbf{r}}_j$, $\mathbf{v}_{CM} = \dot{\mathbf{r}}_{CM}$

οπότε

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_j$$

$\underset{\sim}{v}_j' =$ σχετική ταχ. ως προς ΚΜ.

<u>Σχετική Ορμή ως προς ΚΜ.</u>

$$\underset{\sim}{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{v}_i =$$

σχετική ταχ

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \underset{\sim}{v}_{CM} + \underset{\sim}{v}_i' \right) =$$

ταχ. του ΚΜ

$$\underset{\sim}{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{v}_i'$$

Συνολική μάζα $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$

$$\underset{\sim}{p} = M \underset{\sim}{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{v}_i' \quad (2)$$

Πόσο είναι το $\underset{\sim}{v}_{CM}$

$$\underset{\sim}{v}_{CM} = \dot{\underset{\sim}{r}}_{CM} \Rightarrow M \underset{\sim}{v}_{CM} = M \dot{\underset{\sim}{r}}_{CM}$$

$$= \frac{d}{dt} \underbrace{M \underset{\sim}{r}_{CM}}_{} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{r}_i}_{}$$

αξ. ορισμού

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{p}$$

αρα $\quad M \mathbf{v}_{cm} = \mathbf{p} \qquad (3)$

Αρα (2),(3) $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0} \qquad (4)$$

σχετικές ταχ. ως προς ΚΜ

Δηλ αν σπάσω

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{cm} + \mathbf{p}'_{/cm}$$

τότε $\quad \mathbf{p}'_{/cm} = \mathbf{0}$

<u>Λήμμα</u>

Αν $\quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}$

$$\underset{\sim}{v}_i' = \underset{\sim}{v}_i - \underset{\sim}{v}_{CM}$$

τοτε

α') $$\sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{r}_i' = \underset{\sim}{0}$$

β') $$\sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{v}_i' = \underset{\sim}{0}$$

Σχόλιο: Το β' είναι η (4)

Το α' είναι εύκολο από τον ορισμό του ΚΜ. (ΑΣΚΗΣΗ).

Στροφορμή και Κ.Ε.

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{r}_i \times (m_i \underset{\sim}{v}_i)$$

Ορίζω Τροχιακή Στροφορμή

$$\underset{\sim}{L}_{CM} = \underset{\sim}{r}_{CM} \times (M \underset{\sim}{v}_{CM})$$

Ιδιοστροφορμή

είναι σχετική στροφορμή ως προς το ΚΜ.

$$\underset{\sim}{L}'_{/CM} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{r}'_i \times (m_i \underset{\sim}{v}'_i)$$

$\underset{\sim}{r}'_i$, $\underset{\sim}{v}'_i$ σχετικές θέσεις, ταχύτ- ως προς το ΚΜ.

<u>Θεώρημα 1</u>

$$\underset{\sim}{L}_{/O} = \underset{\sim}{L}_{CM} + \underset{\sim}{L}'_{/CM}$$

Η συνολική στροφορμή σώματος ισούται με το άθροισμα της τροχιακής με την ιδιοστροφορμή.

Αποδ.

Έστω $\underset{\sim}{r}_i = \underset{\sim}{r}_{CM} + \underset{\sim}{r}'_i$

$\underset{\sim}{v}_i = \underset{\sim}{v}_{CM} + \underset{\sim}{v}'_i$

Αντικαθ. στον ορισμό

$$\underset{\sim}{L} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{r}_i \times (m_i \underset{\sim}{v}_i) =$$

N

$$= \sum_{i=1} (\mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}_i') \times m_i (\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{V}_i') =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{V}_{CM} \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{V}_{CM} \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{V}_i' \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{V}_i' = \mathbf{L}'_{/CM}$$

απο ορισμο ιδιοστροφορμής

$$= \underbrace{\mathbf{r}_{CM} \times \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{N} m_i \right)}_{M} \mathbf{V}_{CM}}_{\mathbf{L}_{CM}} \; +$$

$$+\left(\sum_{i=1} m_i \underset{\sim}{r}_i'\right) \times \underline{V}_{CM} \; +$$

0 από Λήμμα α')

$$+\; \underset{\sim}{r}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{V}_i'\right)$$

$\underset{\sim}{0}$ από β') Λήμμα.

$$+\; \underset{\sim}{L}'_{/CM}$$

$$= \underset{\sim}{L}_{CM} + \underset{\sim}{L}'_{/CM}$$

ΟΕΔ.

## ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Ορίζω Κ.Ε.

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\underset{\sim}{v}_i|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, \underset{\sim}{v}_i \cdot \underset{\sim}{v}_i$$

Ορίζω <u>ΚΕ κέντρου μάζας</u>

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M |\underset{\sim}{v}_{CM}|^2$$

Σχετική ΚΕ ως προς ΚΜ

$$K'_{/CM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\underset{\sim}{v}'_i|^2$$

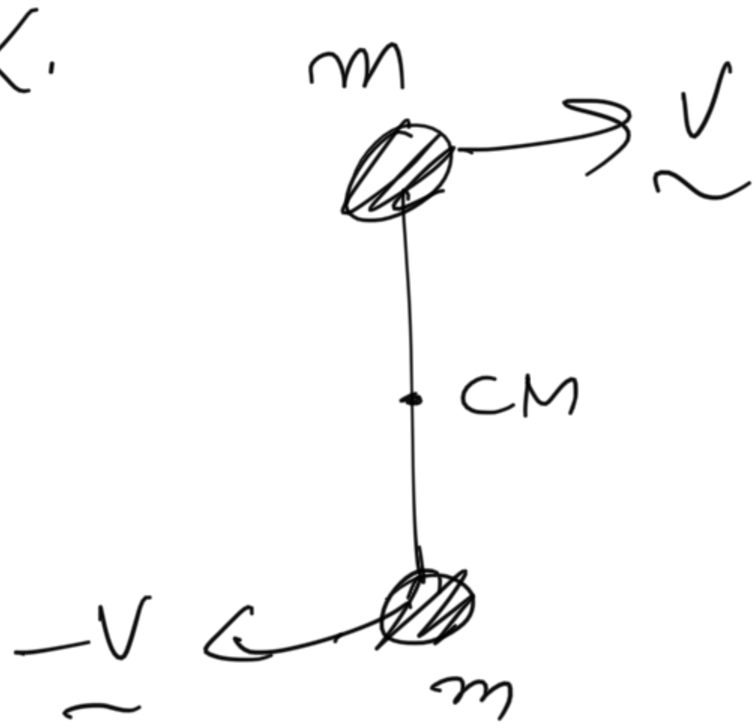
<u>Θεώρημα 2</u>

$$K = K_{CM} + K'_{/CM}$$

<u>Σχόλια</u>. Όπως ακριβώς και στο Θμ. 1 ετσι αποδεικνύεται και αυτό, χρησιμοποιώντας το

Λήμμα.

Π.χ.




$$\mathbf{v}_{CM} = 0$$

$$K_{CM} = 0$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

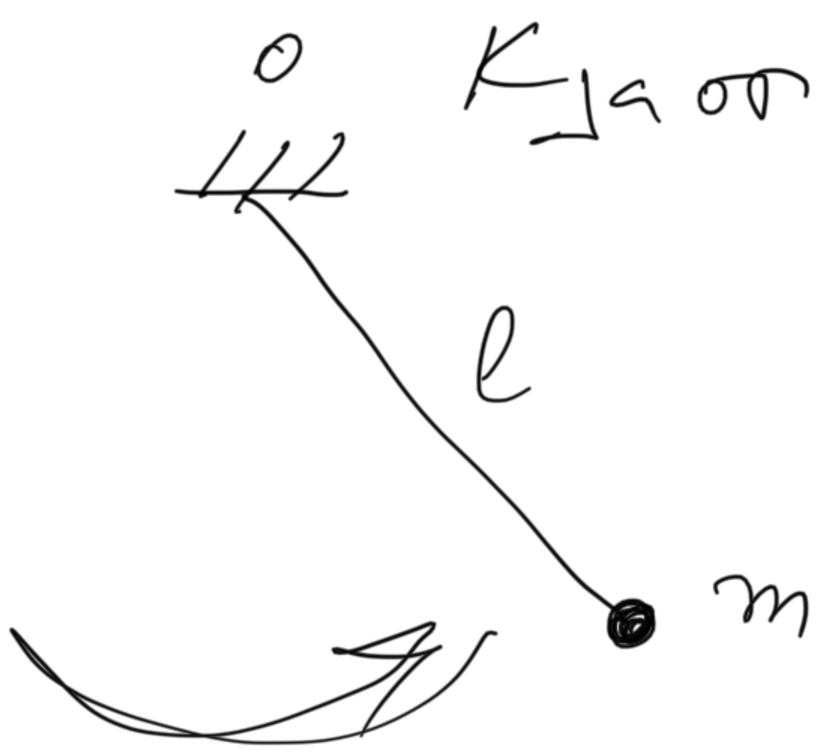
$$K = K'_{/CM} \neq 0$$

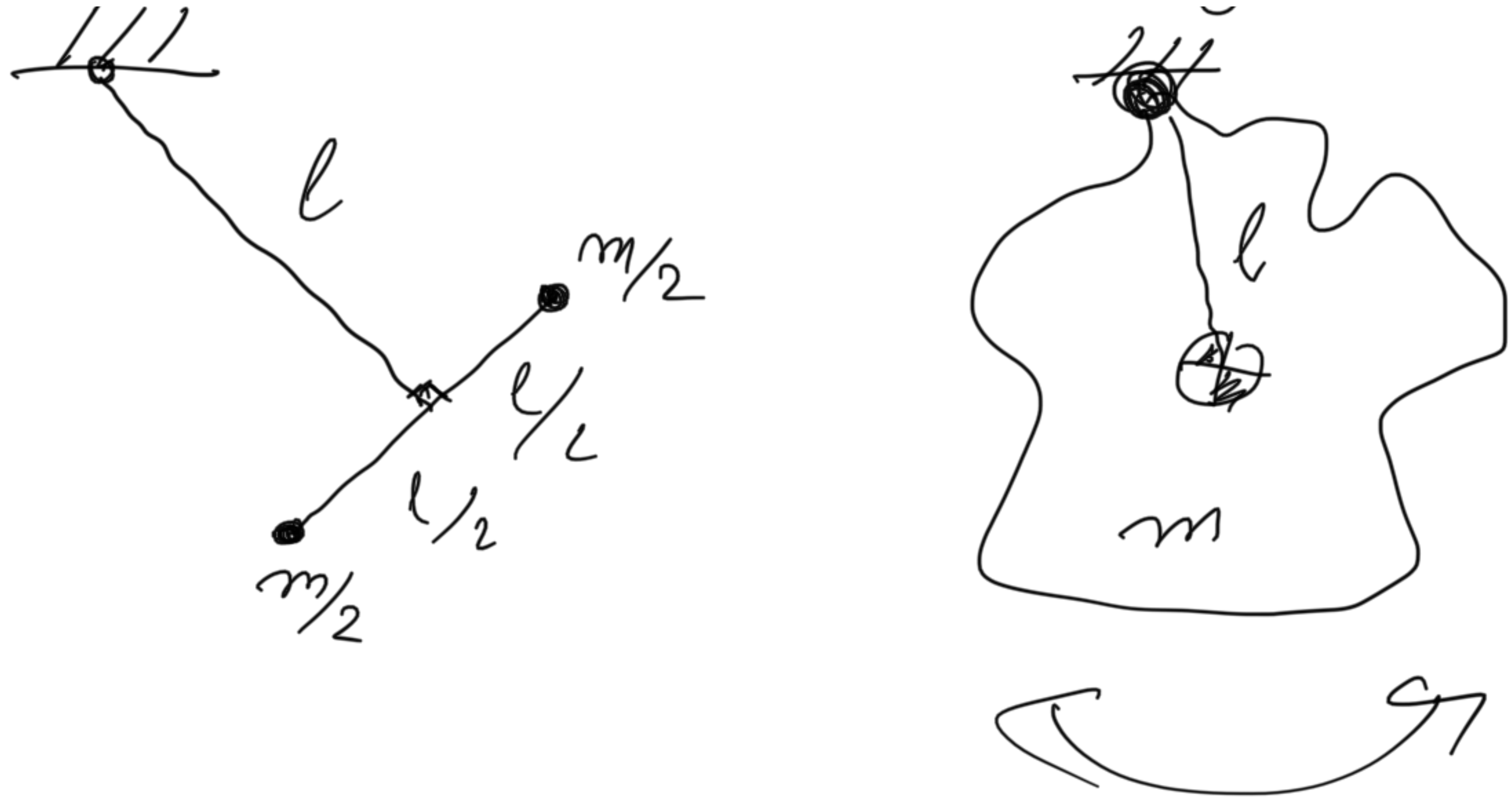
$$\mathbf{L} = \mathbf{L}'_{/CM}$$

επι $\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{0}$

<u>Παράδειγμα</u>

Κλασσικό Εκκρεμές






Αυτά τα 3 εκκρεμή έχουν διαφορετική συχνότητα ταλάντωσης