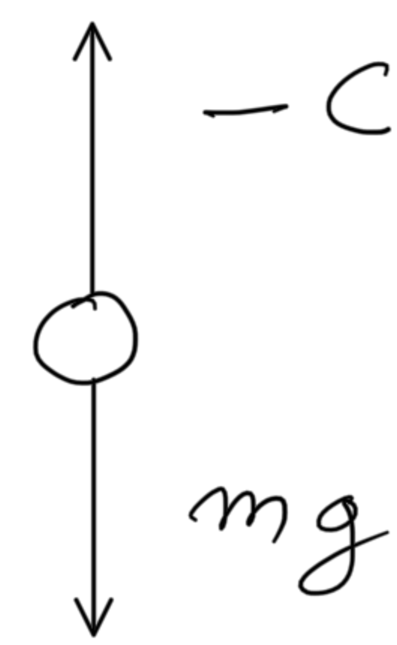
ΦΥΣΙΚΗ 1

διάλεξη 7

Πρόβλημα Αλεξιπτωτιστής πηδάει με αλεξ. με βαρύτητα και γραμμική αντίσταση αέρα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΩΜΑΤΟΣ (ΔΔΣ)



1ος Νομος ⇒

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ για την ταχύτητα $v(t)$

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - k v(t) \quad t>0 \qquad (1)$$

Αρχ. Συνθήκη

$$v(0) = 0$$

$k = c/m$

Πρέπει να λύσουμε την (1).

Θυμάμαι: Δοκιμή 1 όπου ολοκληρώσαμε και τις 2 μεριές της (1) αλλά δεν κατέληξε σε λύση.

2 ΜΕΘΟΔΟΙ

1) Μπακάλικη
2) Κυριλέ

Χωρισμός Μεταβλητών

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

Έχω 2 μεταβλητές t, v

ανεξάρτητη (t) εξαρτημένη (v)..

Ξεχωρίζω «τα γίδια από τα πρόβατα»: Βάζω όλα τα v αριστερά και όλα τα t δεξιά.

$$\frac{1}{g-kv}\frac{dv}{dt} = 1.$$

"ολοκληρώνω" μερικές με dt !!!
Αδιάφορο για το ότι το $\frac{dv}{dt}$ δεν είναι κλάσμα....

$$\frac{1}{g-kv}\,dv = dt$$

$$\frac{dv}{g-kv} = dt$$

Ολοκληρώνω με $\int$!!!
Δηλ.

$$\int \frac{dv}{g-kv} = \int dt \quad (2)$$

Απαράδεκτο! άσε που τώρα ολοκληρώνω αριστερά ως προς v και δεξιά ως προς t!

Ας το κάνω και βλέπουμε.

$$\int \frac{dv}{g-kv} = -\frac{1}{k}\int \frac{dv}{v-g/k}$$

$$\frac{1}{\ }\int \frac{dv}{\ } =$$

$$= -\frac{\ }{k}\int\frac{\ }{v-A}$$

$$A = g/k$$

$$= -\frac{1}{k}\log(v-A) + C_1$$

Επίσης η δεξιά μεριά στην (2) είναι εύκολη.

$$\int dt = t + C_2$$

Άρα τα δύο είναι ίσα

δηλ.

$$-\frac{1}{k}\log(v-A) + C_1 = t + C_2$$

$$-\frac{1}{k}\log(v-g/k) = t + \underbrace{C_2 - C_1}_{= C_3}$$

$$-\frac{1}{k}\log(v-g/k) = t + C_3$$

$$\log(v-g/k) = -kt - kC_3$$

$$\log(v - g/k) = -kt + C_4$$

$$v - g/k = e^{-kt + C_4}$$

$$= e^{-kt} e^{C_4} \quad C_5$$

$$v - g/k = C_5 e^{-kt}$$

$$v = C_5 e^{-kt} + g/k$$

άρα

$$v = v(t) = C_5 e^{-kt} + g/k.$$

Χρησ. αρχική συνθήκη

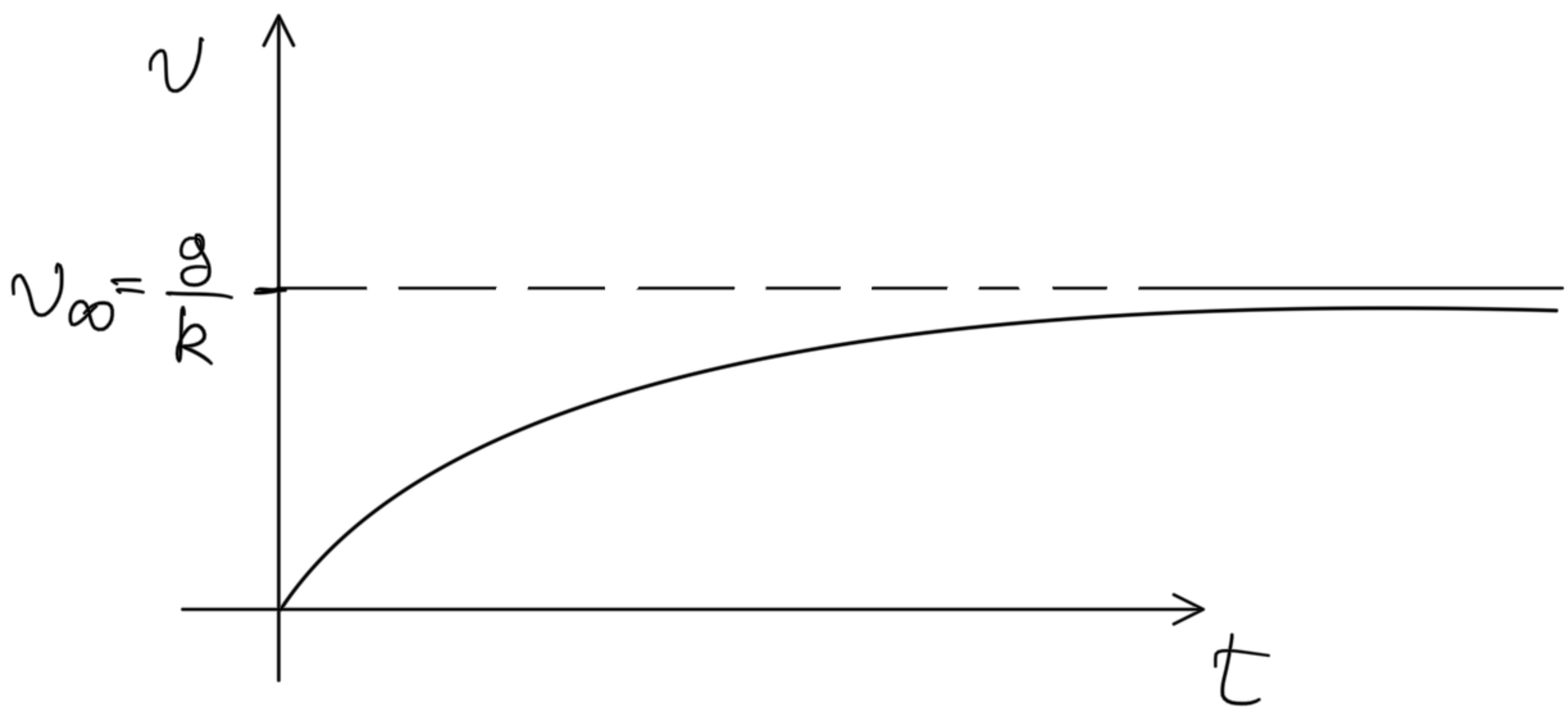
$$v(0) = 0 = C_5 + g/k$$

$$\Rightarrow \quad C_5 = -g/k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \qquad (3)}$$

Είναι η λύση; Αντικαθιστώ στην (1), και δουλεύει ρολόι.

Τι λέει η λύση (3) για την ταχύτητα του Αλέξη; (...πτωτιστή)



Η ταχύτητα αυξάνεται αλλά όλο και πιο αργά (η επιτάχυνση μειώνεται και $\to 0$ για $t \to \infty$)

Η ταχ. $v(t) \longrightarrow v_\infty = \frac{g}{k} = \frac{gm}{c}$

$$\boxed{v_\infty = \frac{gm}{c}}$$ ΟΡΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Το αλεξίπτωτο αυξάνει το συντελεστή αντίστασης c ώστε να μειωθεί η οριακή ταχ. σε επίπεδο που δεν οδηγεί σε σωματικές βλάβες.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Αν η συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι της μορφής.

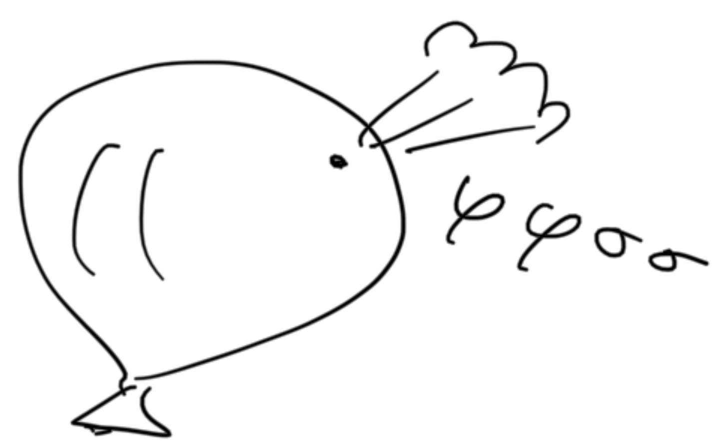
$$f(v)g(t)$$

όπου f, g γνωστές συναρτήσεις.

Τότε τι κάνω.

πχ. αντίσταση του αέρα σε ένα μπαλόνι που ξεφουσκώνει και αλλάζει το μέγεθός του.

$$-c(t)v$$



ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

από 1ο Νόμο

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = f(v)g(t)} \qquad (4)$$

Μπακάλικα

Χωρίζω v, t.

1) Διαιρώ με $f(v)$ (ξεχνώντας ότι ίσως κάπου μηδενίζεται...).

$$\frac{1}{f(v)}\frac{dv}{dt} = g(t)$$

2) Πολλαπλ. με dt !! (άστα να πάνε ...).

$$\frac{1}{f(v)}\, dv = g(t)\, dt$$

3) Πολλ. με $\int$ (άστα να πάνε).

$$\int \frac{dv}{f(v)} = \int g(t)\, dt$$

4) Ολοκληρώνω (άστε που ολοκλ. αριστερά ως προς v και δεξιά ως προς t !!!).

Ορίζω $h(v) = \dfrac{1}{f(v)}$

$$\int h(v)\, dv = \int g(t)\, dt$$

(αόριστα ολοκληρώματα)

Αν: οι αντιπαράγωγοι των $h(v)$, $g(t)$ είναι $H(v)$, $G(t)$ αντίστοιχα, ώστε

$$\frac{d}{dv}H(v)=h(v)$$

$$\frac{d}{dt}G(t)=g(t)$$

έχω

σταθ.

$$H(v)=G(t)+C \quad (5)$$

5) Θέλω να λύσω ως προς v

δηλ. αντιστρέψω τη $H(v)$

(άσε που μπορεί να μην είναι αντιστρέψιμη!!!).

$$v=v(t)=H^{-1}\left(G(t)+C\right)$$

$$v(t)=H^{-1}\left(G(t)+C\right)$$

Αρχική συνθήκη.

$$\boxed{v(0) = v_0 \qquad (6)}$$

Αντικαθ. στην (5)

$$H(v_0) = G(0) + C$$

$$\Rightarrow \quad C = H(v_0) - G(0)$$

Άρα

$$\boxed{v(t) = H^{-1}\Big(G(t) - G(0) + H(v_0)\Big) \qquad (7)}$$

ισχυρίζεται ότι είναι η λύση του προβλήματος (4),(6) (διαφ. εξ. (4) με αρχ. συνθήκη (6)).

ΚΥΡΙΛΕ ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΙΑ (4),(6).

(4) $$\frac{d}{dt} v(t) = f(v(t))\, g(t)$$

(6) $$v(0) = v_0$$

Υποθέτω ότι $f(v) \neq 0$ παντού

άρα ή $f(v) > 0 \ \forall v$

ή $f(v)<0 \quad \forall v$.

Διαιρώ την (4) με $f(v(t))$.

$$\frac{1}{f(v(t))}\frac{dv(t)}{dt} = g(t)$$

Ολοκληρώνω και τις 2 πλευρές ως προς t από 0 μέχρι t

$$\int_0^t \frac{1}{f(v(t'))}\frac{dv(t')}{dt'}dt' = \int_0^t g(t')dt'$$

Ορίζω $h(v) = 1/f(v)$ έχω

$$\int_0^t h(v(t'))\frac{dv(t')}{dt'}dt' = \int_0^t g(t')dt' \quad (8)$$

Δεξιά μεριά της (8)

Αν $G(t)$ αντιπαράγωγος της $g(t)$.

τότε

$$\int^t g(t')dt' = G(t) - G(0)$$

$$\int_0 \quad (9)$$

Αριστερή Μεριά της (8)

Αν $H(v)$ αντιπαράγωγος της $h(v)$

τοτε ΑΛΥΣΙΔΑ: $\underbrace{\frac{dH}{dv}(v(t))}\cdot\frac{dv}{dt}$

$$\frac{d}{dt}H(v(t)) = h(v(t))\frac{dv}{dt}(t)$$

Αριστ. μεριά της (8) =

$$\int_0^t \frac{d}{dt'}H(v(t'))\,dt' =$$

$$= H(v(t)) - H(v(0)) \quad (10)$$

Απο (10), (9) στην (8) βγάζω

$$H(v(t)) - H(v(0)) = G(t) - G(0).$$

Αρχ. συνθηκη $v(0) = v_0$ $\Longrightarrow$

$$H(v(t)) = G(t) - G(0) + H(v_0) \quad (11)$$

Επειδη f γνήσια θετ. ή αρν.

η $h = 1/f$ επίσης, άρα

$\frac{d}{dv} H(v)$ επίσης $\Rightarrow$ $H(v)$ γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $H(v)$ γνήσια μονότονη

$\Rightarrow$ αντιστρέψιμη !!!

άρα αντιστρέφω την $H(v)$ στην (11) και έχω

$$\boxed{v(t) = H^{-1}\Big(G(t) - G(0) + H(v_0)\Big)} \quad (7)$$

δηλ. την (7) χωρίς ενοχές

δηλ. με αυστηρά μαθηματικά.

Συμπέρασμα: Η «Μπακάλικη» μέθοδος δίνει το σωστό αποτέλεσμα για τη λύση διαφ. εξισώσεων με χωριστές μεταβλητές!