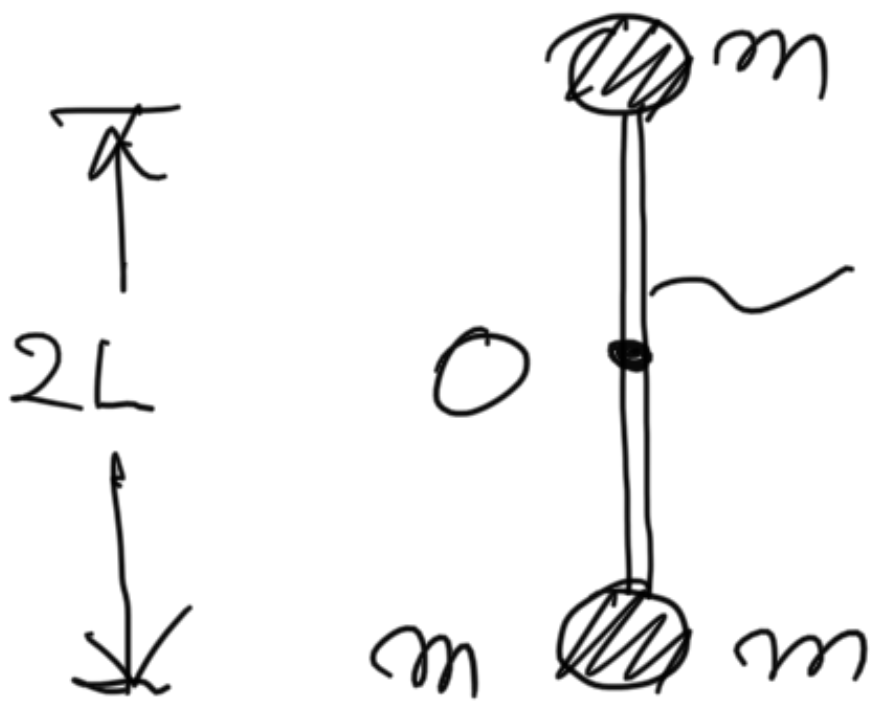
ΦΥΣΙΚΗ 1

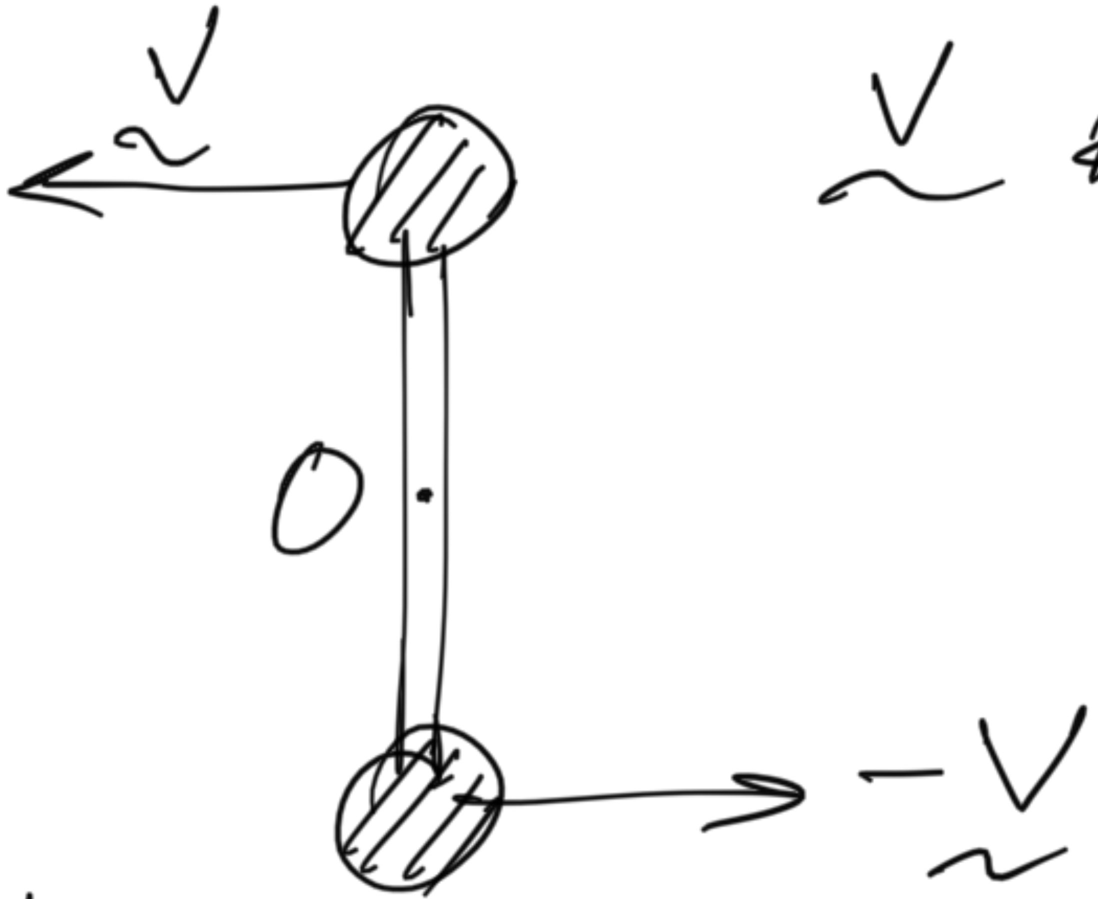
διάλεξη 19

Παράδειγμα 1 Σώμα αποτελείται από 2 ΥΣ ενωμένα με αβαρή ράβδο



αβαρής ράβδος ενώνει 2 ΥΣ

Περιστρέφεται γύρω από το κέντρο της ράβδου, ώστε τα ταχ. των ΥΣ τη στιγμή t να είναι



$\boldsymbol{v}$ και $-\boldsymbol{v}$.

$(\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})$

α) Πόση είναι η ορμή του σώματος;

β) Πόση είναι η ΚΕ;

α) $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + m(-\boldsymbol{v}) = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

<u>Σχόλιο</u> Το ΚΜ δεν πάει πουθενά.

β) $KE = 0$ διότι η ταχ. του $KM = 0$

ΛΑΘΟΣ.

ΚΕ = αθροισμα των ΚΕ των ΓΣ

$$KE = \frac{1}{2} m |\underline{v}|^2 + \frac{1}{2} m |-\underline{v}|^2 =$$

$$= m |\underline{v}|^2 > 0$$

Λοιπον εχω ενα σώμα με ορμή μηδεν αλλα ΚΕ > 0!!!!!

Αυτό δεν μπορεί να συμβεί σε ενα ΓΣ.

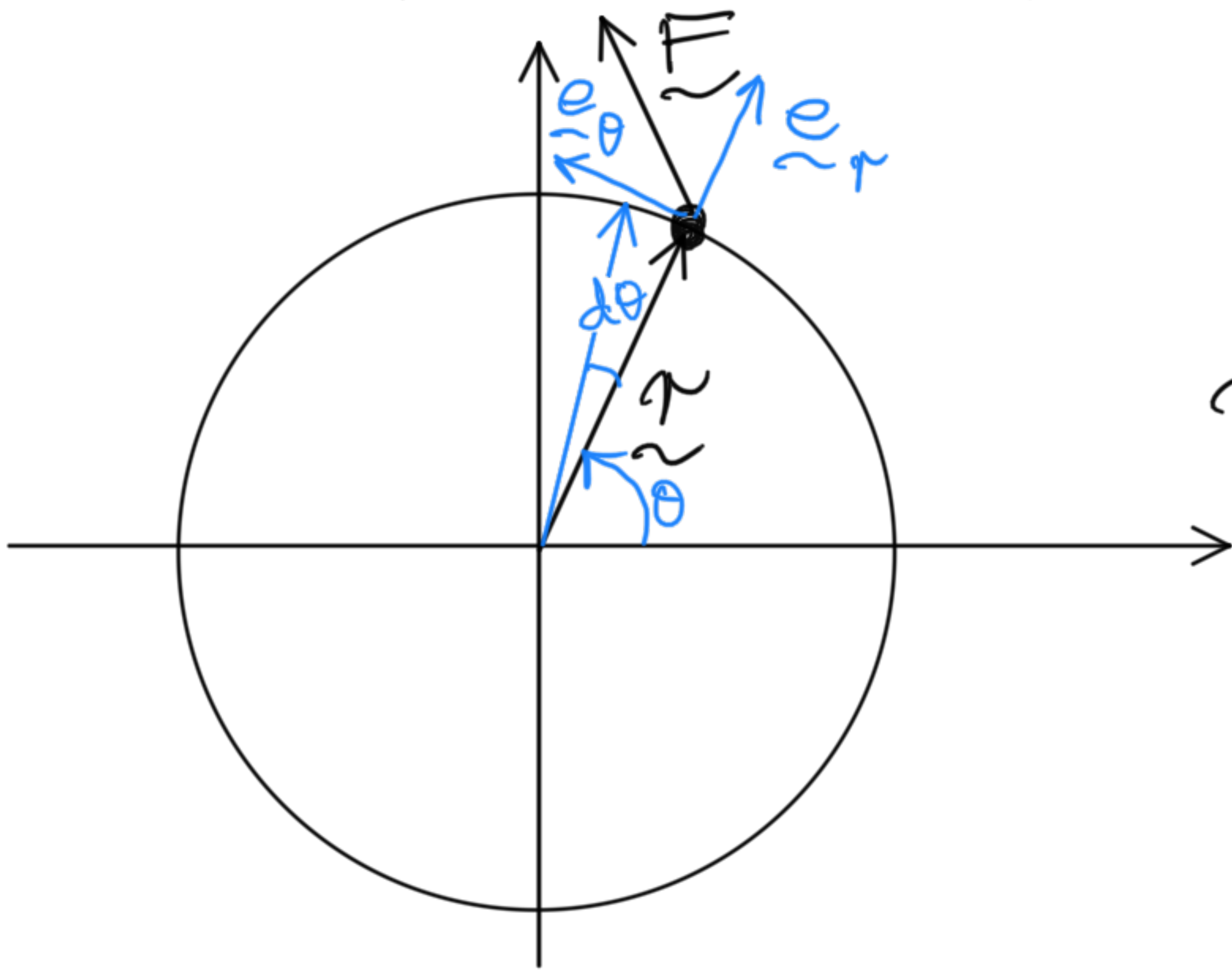
Άρα για εκτεταμένα σώματα
(συστήματα ΥΣ ή στερεά σώματα)
τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα
απ' ότι για ΥΣ

Ποια είναι η διαφορά;
Ένα ΥΣ μπορεί να κινείται.

Ένα σώμα μπορεί να κινείται
(δηλ. να κινείται το ΚΜ)
αλλά επίσης μπορεί να περιστρέ-
φεται γύρω από το ΚΜ.

ΡΟΠΗ, ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

εκτεταμένων σωμάτων.



$\underset{\sim}{e}_r(t)$

$$\underset{\sim}{r} = r\,\underset{\sim}{e}_r$$

σταθ.

Ένα ΥΣ κάνει <u>κυκλική κίνηση</u>

Ασκείται τυχαία δύναμη $\underset{\sim}{F}$

θέλω να βρω το απειροστό έργο της $\underset{\sim}{F}$ όταν ΥΣ κινείται ώστε η γωνία να αλλάξει κατά $d\theta$.

$$dW = \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r}$$

Πόσο είναι το $d\underset{\sim}{r}$ για κυκλ. κίνηση;

$$\underset{\sim}{r} = r\underset{\sim}{e}_r \Rightarrow \frac{d}{dt}\underset{\sim}{r} = r\frac{d}{dt}\underset{\sim}{e}_r$$

Θυμάμαι $\frac{d}{dt}\underset{\sim}{e}_r = \frac{d\theta}{dt}\underset{\sim}{e}_\theta$

$$\Rightarrow \quad d\underset{\sim}{r} = r\, d\underset{\sim}{e}_r = r\, d\theta\, \underset{\sim}{e}_\theta$$

$$\underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r} = r\, d\theta\, \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{e}_\theta = dW$$

τι είναι;

$\underline{F} \cdot \underline{e}_\theta$: συνιστώσα της δύναμης εφαπτόμενη στην τροχιά.

$$F_T = \underline{F} \cdot \underline{e}_\theta .$$

$$dW = r F_T \, d\theta$$

$$\underline{F} \cdot d\underline{r} = \underbrace{r F_T}_{} \, d\theta = dW$$

$\tau = r F_T$ = ροπή της δύναμης $\underline{F}$.

$$dW = \underline{F} \cdot d\underline{r} = \tau \, d\theta$$

Εργο = δύναμη $\times$ αλλαγή θέσης =

= <u>ροπη</u> $\times$ αλλαγη γωνίας

Ροπη είναι αυτο που κάνει έργο πανω στην αλλαγη της γωνίας (οπως δύναμη κάνει έργο πανω στην αλλαγη της θέσης)

Τι ειναι η <u>ροπή</u>;

Υπομονη, θα την ορίσουμε.

$$\underset{\sim}{F} = F_x \underset{\sim}{i} + F_y \underset{\sim}{j}$$

Εφαπτομένη συνιστώσα

$$F_T = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{e}_\theta , \qquad \underset{\sim}{e}_\theta = -\sin\theta\, \underset{\sim}{i} + \cos\theta\, \underset{\sim}{j}$$

$$\left(\underset{\sim}{e}_r = \cos\theta\, \underset{\sim}{i} + \sin\theta\, \underset{\sim}{j} \right)$$

Αντικαθιστώ

$$F_T = -\sin\theta F_x + \cos\theta F_y$$

Ροπή

$$\tau = r F_T = \underbrace{-r\sin\theta}_{-y} F_x + \underbrace{r\cos\theta}_{x} F_y =$$

$$\tau = -y F_x + x F_y \qquad \text{ΡΟΠΗ}$$

Θυμίζει κάτι;

δεν είναι εσωτ. γινόμενο, αλλά

τι σόι γινόμενο είναι;

βρωμάει εξωτερικό γινόμενο

$$\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} = \det \begin{bmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{bmatrix} =$$

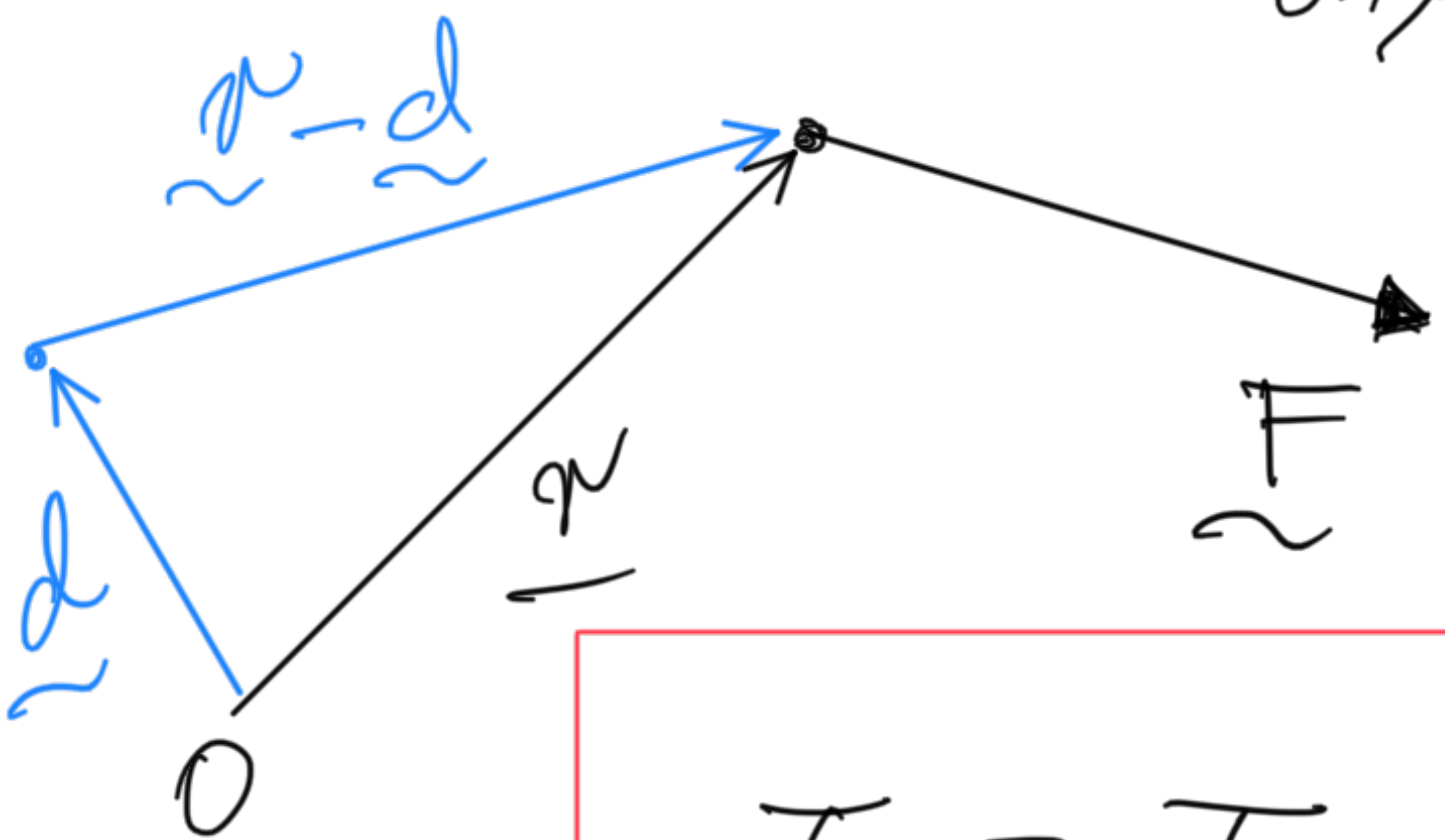
επίπεδο

$$= 0\underset{\sim}{i} + 0j + (xF_y - yF_x)\underset{\sim}{k} = \tau \underset{\sim}{k}$$

(περι το O)

Ορισμός Ροπής ως προς το O

δύναμης $\underset{\sim}{F}$ που ασκείται στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\underset{\sim}{r}$ ορίζεται

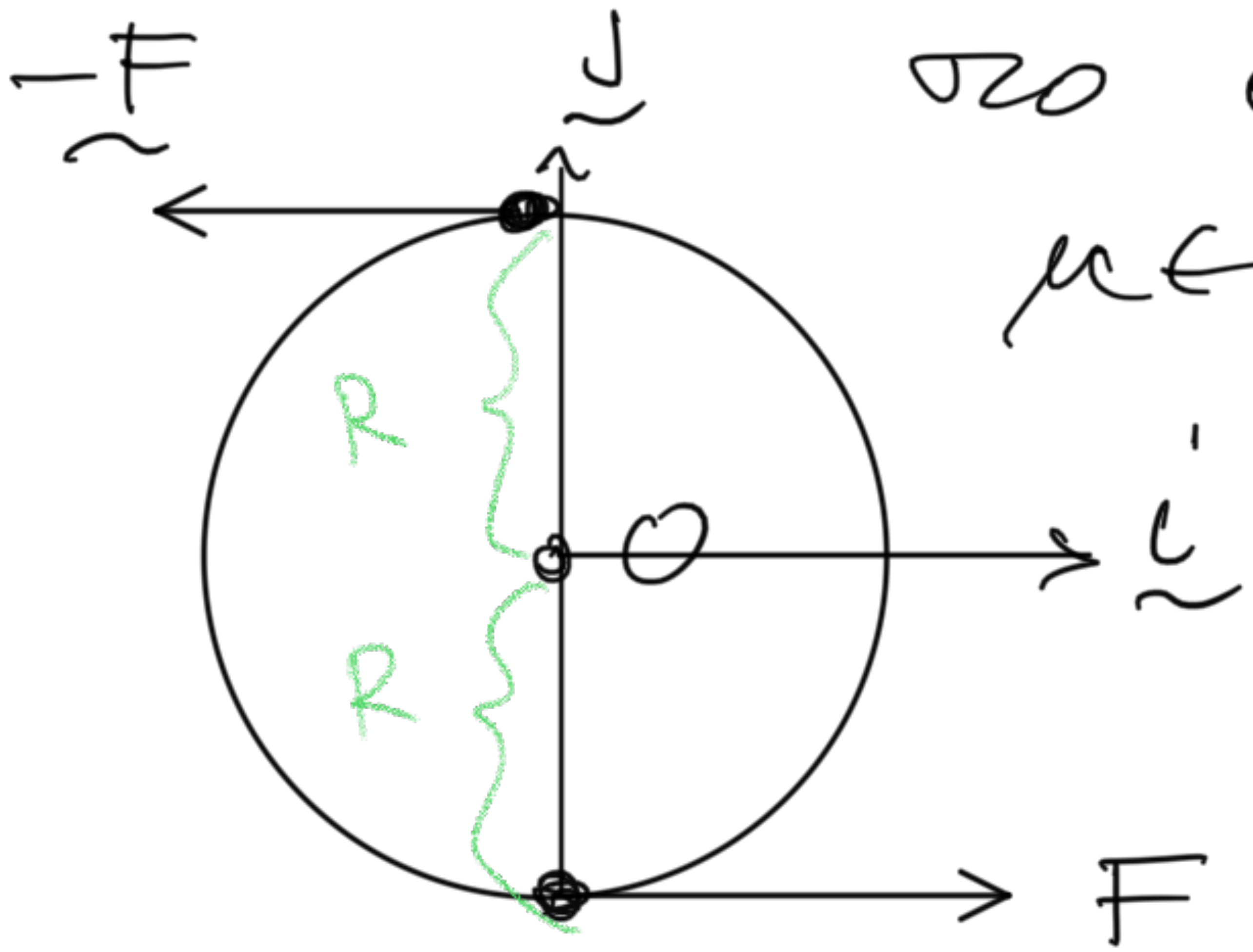


$$\boxed{\underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{\tau}/_O = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}}$$

Ροπή της $\underset{\sim}{F}$ περί το σημείο με διαν. θέσης $\underset{\sim}{d}$

$$\underset{\sim}{\tau}/\underset{\sim}{d} = (\underset{\sim}{r} - \underset{\sim}{d}) \times \underset{\sim}{F}$$

Παράδειγμα 2 Δίσκος ακτίνας R στο επίπεδο xy με κέντρο στο O



Να βρεθεί η συνολική δύναμη και ροπή των 2 δυνάμεων (βλ. σχήμα)

Συνολική Δύναμη $\underset{\sim}{F} - \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0}$

Συνολική Ροπή περί το O = άθροισμα των ροπών

$$\underset{\sim}{\tau} = R\underset{\sim}{j} \times (-F\underset{\sim}{i}) + (-R\underset{\sim}{j}) \times (F\underset{\sim}{i})$$

$$= -RF(\underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{i}) - RF\,\underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{i} =$$

$$= -2RF(\underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{i})$$

αλλά $\underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{i} = -\underset{\sim}{k}$

άρα

$$\underset{\sim}{\tau} = 2RF\underset{\sim}{k} \neq \underset{\sim}{0}$$

Στροφορμή

Ορισμός Στροφορμή περί το O ενός ΥΣ με μάζα m και ταχ. $\underset{\sim}{V}$ και θέση $\underset{\sim}{r}$ ως προς το O είναι το διάνυσμα

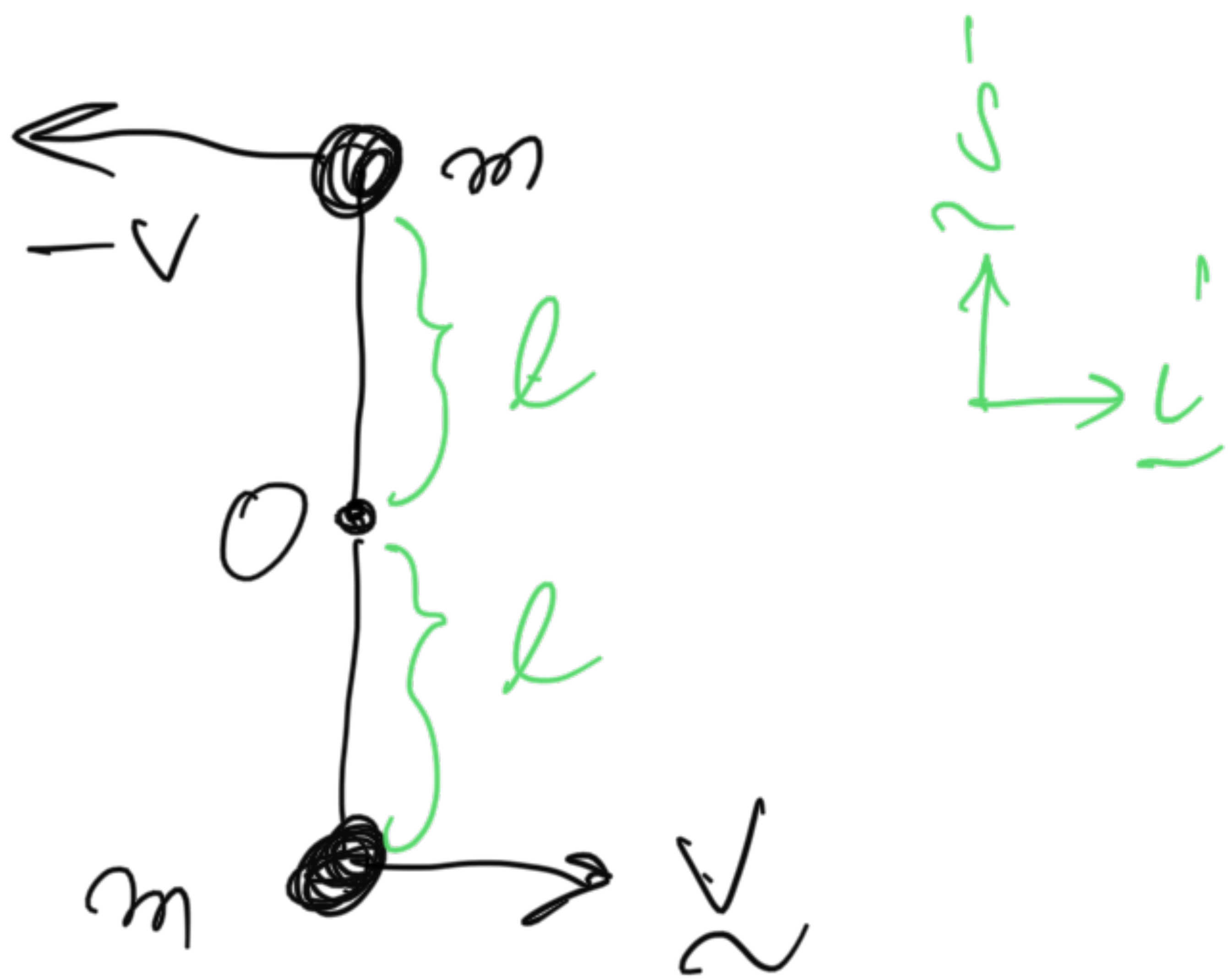
$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}/_{O} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{r} \times m\underset{\sim}{V}$$

$$= m\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{V}$$

Παράδειγμα 3 Ποιά είναι

η συνολική στροφορμή περί το O

τσ συστήματος στο παράδειγμα 1 ;



$$\underset{\sim}{V} = v\underset{\sim}{i}$$

$$\underset{\sim}{L}/_{O} = l\underset{\sim}{j} \times (-mv\underset{\sim}{i}) + (-l\underset{\sim}{j}) \times (mv\underset{\sim}{i})$$

$$= 2lmv\underset{\sim}{k} \neq \underset{\sim}{0}$$

ακριβώς όπως
στο 2

Σχόλιο Η συνολική ΟΡΜΗ $= \underset{\sim}{0}$.

Έχω
$$\underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}, \quad \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{p}.$$

$2^{ος}$ Νόμος λέει
$$\underset{\sim}{F} = \dot{\underset{\sim}{p}}$$

Κατ' αναλογίαν, περιμένω
$$\underset{\sim}{\tau} = \dot{\underset{\sim}{L}}$$

Θεώρημα Για ένα ΝΣ με μάζα m, ταχ. $\underline{v}$, θέση $\underset{\sim}{r}$ ως προς το O, στο οποίο ασκείται συνολική δύναμη $\underset{\sim}{F}$

$$\underset{\sim}{\tau}_{/O} = \dot{\underset{\sim}{L}}_{/O}$$

<u>Αποδ.</u> $\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{r} \times (m\underset{\sim}{v})$

Παραγωγίζω ως προς t

$$\dot{\underset{\sim}{L}} = \underset{\sim}{r} \times \dot{\underset{\sim}{p}} = \underset{\sim}{r} \times (m\dot{\underset{\sim}{v}}) =$$

$$= \underset{\sim}{r} \times (m\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\tau}$$

~~2ος Νόμος~~

~~ο.ε.δ.~~

ΛΑΘΟΣ!

Φτου κι' απ' την αρχή!

$$\dot{\underset{\sim}{L}} = \overset{\bullet}{\overbrace{\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{p}}} = \underset{\sim}{r} \times \dot{\underset{\sim}{p}} + \dot{\underset{\sim}{r}} \times \underset{\sim}{p}$$

Κανόνας γινομένου

διότι $\underset{\sim}{r} \neq$ σταθ.

$$\dot{\underset{\sim}{L}} = \underset{\sim}{r} \times \dot{\underset{\sim}{p}} + \underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{p} =$$

$$= \underset{\sim}{r} \times (m \dot{\underset{\sim}{v}}) + \underset{\sim}{v} \times m \underset{\sim}{v} =$$

$$= \underset{\sim}{r} \times (m\underset{\sim}{a}) + m(\cancel{\underset{\sim}{V} \times \underset{\sim}{V}})^{\underset{\sim}{0}}$$

$$= \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\tau}$$

Ο.Ε.Δ.

ΠΡΟΣΟΧΗ Ο νομος ισοζυγιου στροφορμης

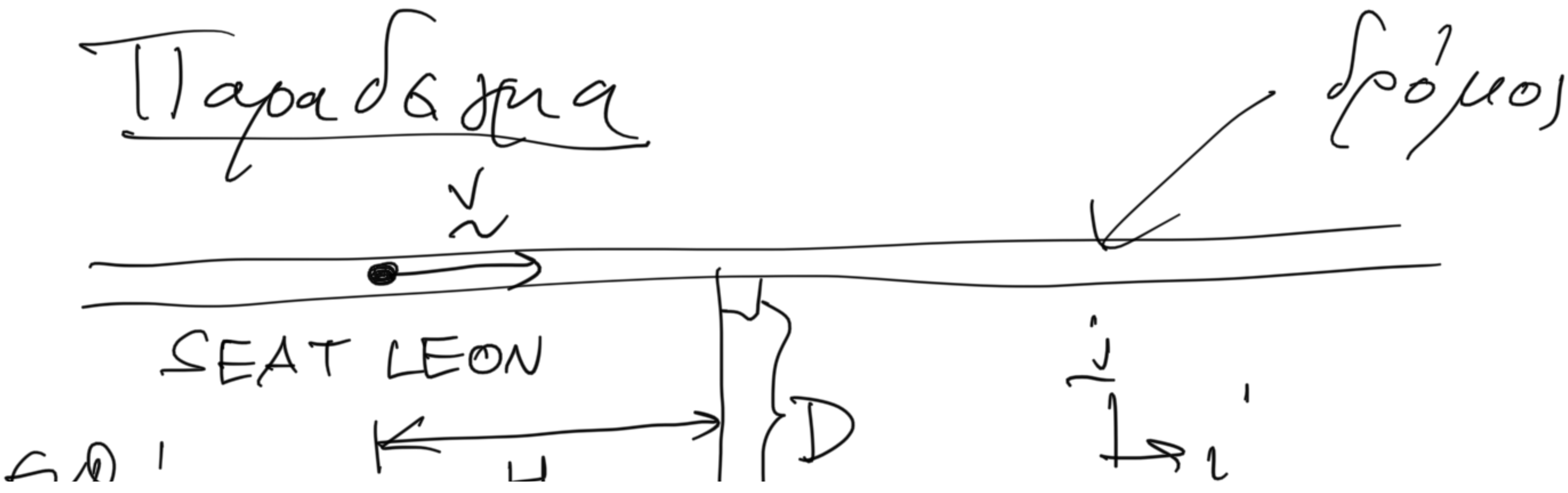
$$\underset{\sim}{\tau} = \dot{\underset{\sim}{L}}$$

είναι θεώρημα για ένα ΥΣ.

Για στερεά σώματα δεν μπορεί να αποδειχτεί από το 2ο Νόμο.
οπότε είναι ΑΞΙΩΜΑ.

Σχόλιο Οι ορισμοί ροπής, στροφορμής για ΥΣ ισχύουν $\forall$ κίνηση, όχι μόνο κυκλική.

Παράδειγμα



ευθύγραμμη κίνηση

$$\underset{\sim}{L}_O = \underset{\sim}{r} \times m\underset{\sim}{v} = \left(-H\underset{\sim}{i} + D\underset{\sim}{j}\right) \times \left(m v \underset{\sim}{i}\right)$$

$$= -mDv\underset{\sim}{k} \neq \underset{\sim}{0}$$

υπάρχει στην ευθύγραμμη κίνηση.