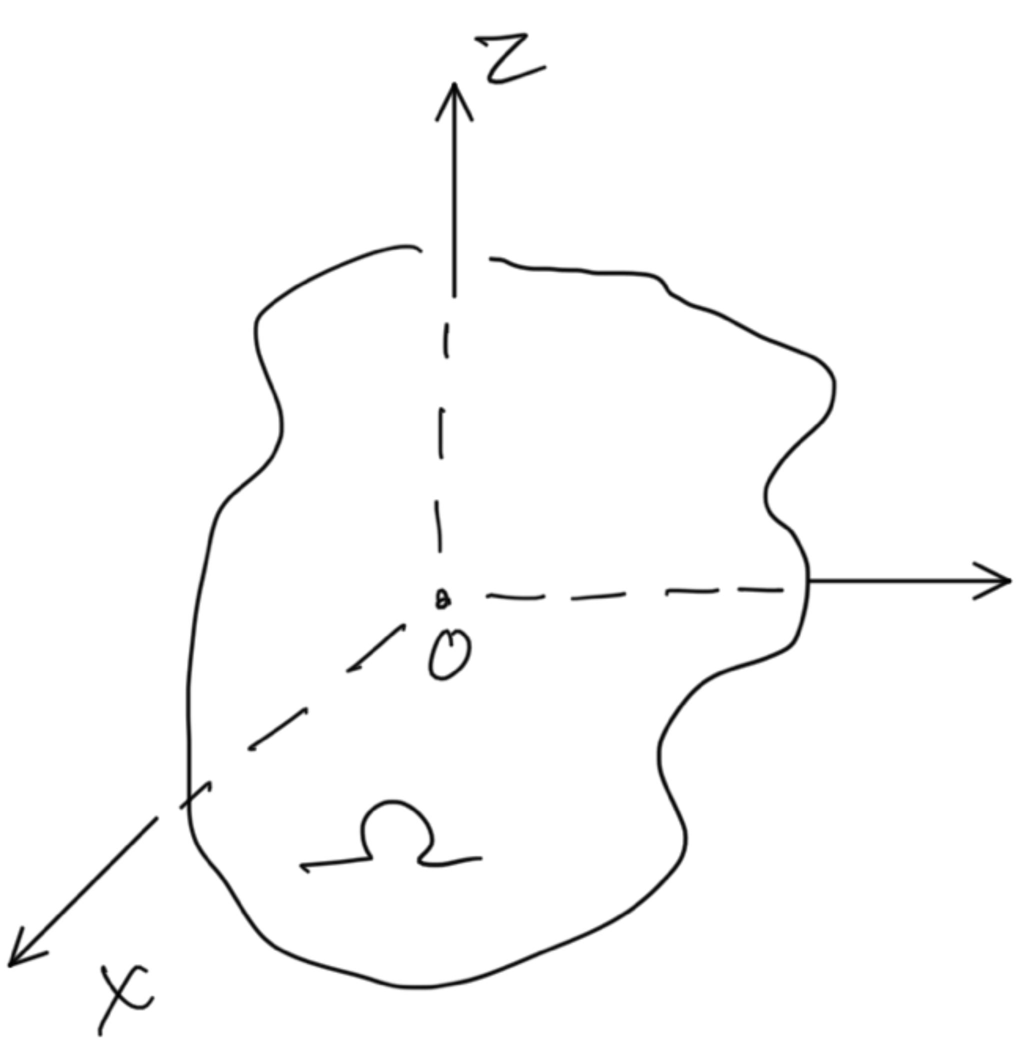
ΦΥΣΙΚΗ 1

διάλεξη 22

Θυμάμαι:

Ροπή Αδράνειας περί τον άξονα Z



$$I = \int_{\Omega} r^2 \, dm$$

στοιχείο μάζας

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Προσοχή: γενικά ένα σημείο $\in \Omega$ έχει συντεταγμένες x, y, z

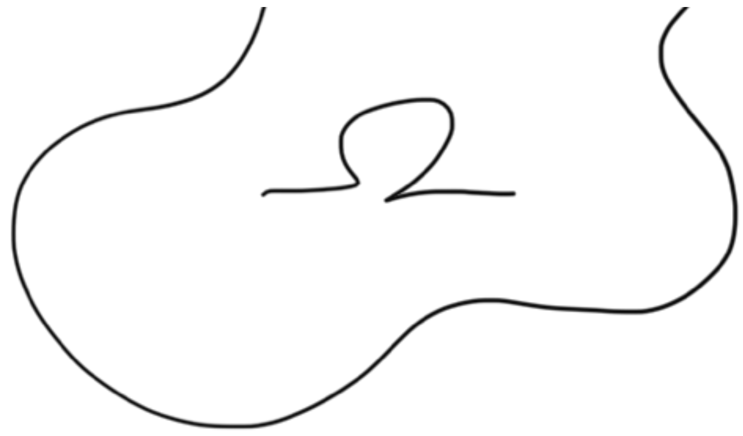
Το $r^2 = x^2 + y^2$ δεν έχει z.

r είναι η απόσταση από τον άξονα z και όχι από το O.

3Δ σώμα

$$dm = \rho \, dV$$

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$



dV

πυκνότητα: μάζα ανά μονάδα όγκου

$$I = \iiint_{\Omega} \rho r^2 \underbrace{dV}_{dx\,dy\,dz.}$$

ΟΛΟΚΛ. ΟΓΚΟΥ

$\rho(x,y,z)$

2Δ σώμα π.χ. πλάκα λεπτή, λεπτή μεμβράνη, π.χ. μπαλόνι κλπ.

το θεωρώ επιφάνεια Σ με αμελητέο πάχος

$$dm = \sigma\, dA$$

$$\sigma = \frac{dm}{dA}$$

μάζα ανά μονάδα επιφανείας.

$\sigma(x,y,z)$.

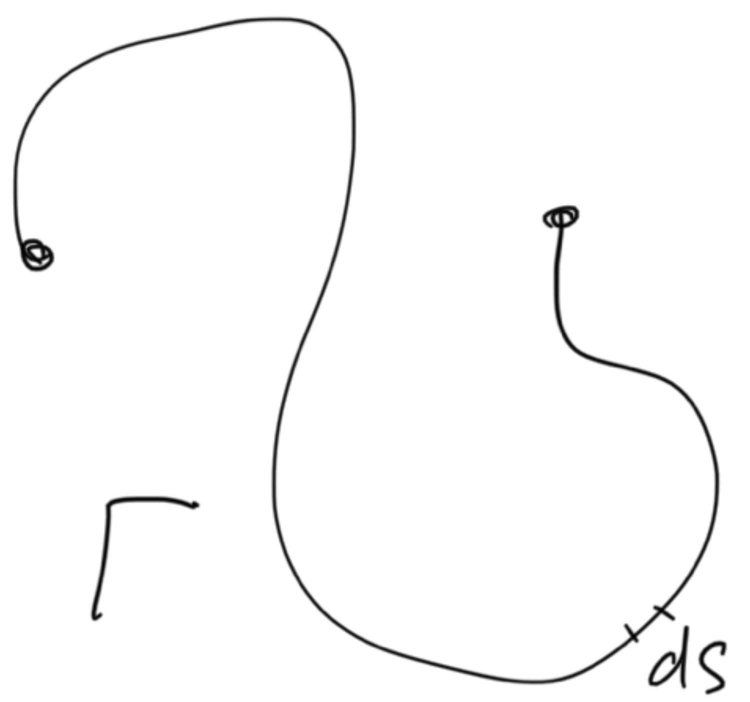
$$I = \iint \sigma r^2 dA$$

Σ

Επιφανειακό ολοκλήρωμα.

1Δ σώμα Γ καμπύλη $\subset \mathbb{R}^3$

π.χ. μοντέλο ενός σύρματος με μάζα αλλά αμελητέα διατομή (πάχος).



Γ: $\underset{\sim}{r} = \hat{\underset{\sim}{r}}(s)$

μήκος τόξου

$$I = \int_\Gamma \lambda r^2 \, ds$$

$x^2(s) + y^2(s)$

επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\lambda = \frac{dm}{ds}$$

μάζα ανά μονάδα μήκους

$$dm = \lambda ds$$

Θυμάμαι. Αν σώμα περιστρέφεται περί τον άξονα z με γων. ταχ.

$\dot{\omega}$ τοτε Κ.Ε.

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Θυμάμαι <u>Ισοζύγιο</u> <u>Στροφορμής</u>

$$\underset{\sim}{\tau} = \dot{\underset{\sim}{L}} \qquad \text{(Αξίωμα)} \quad (1)$$

ροπή (συνολική) $\nearrow$

$\nwarrow$ στροφορμή (ρυθμός αλλαγής).

<u>Ερώτημα</u> Πόσο είναι η στροφορμή ενός ΣΣ που περιστρέφεται περί άξονα z με γων. ταχ. ω;

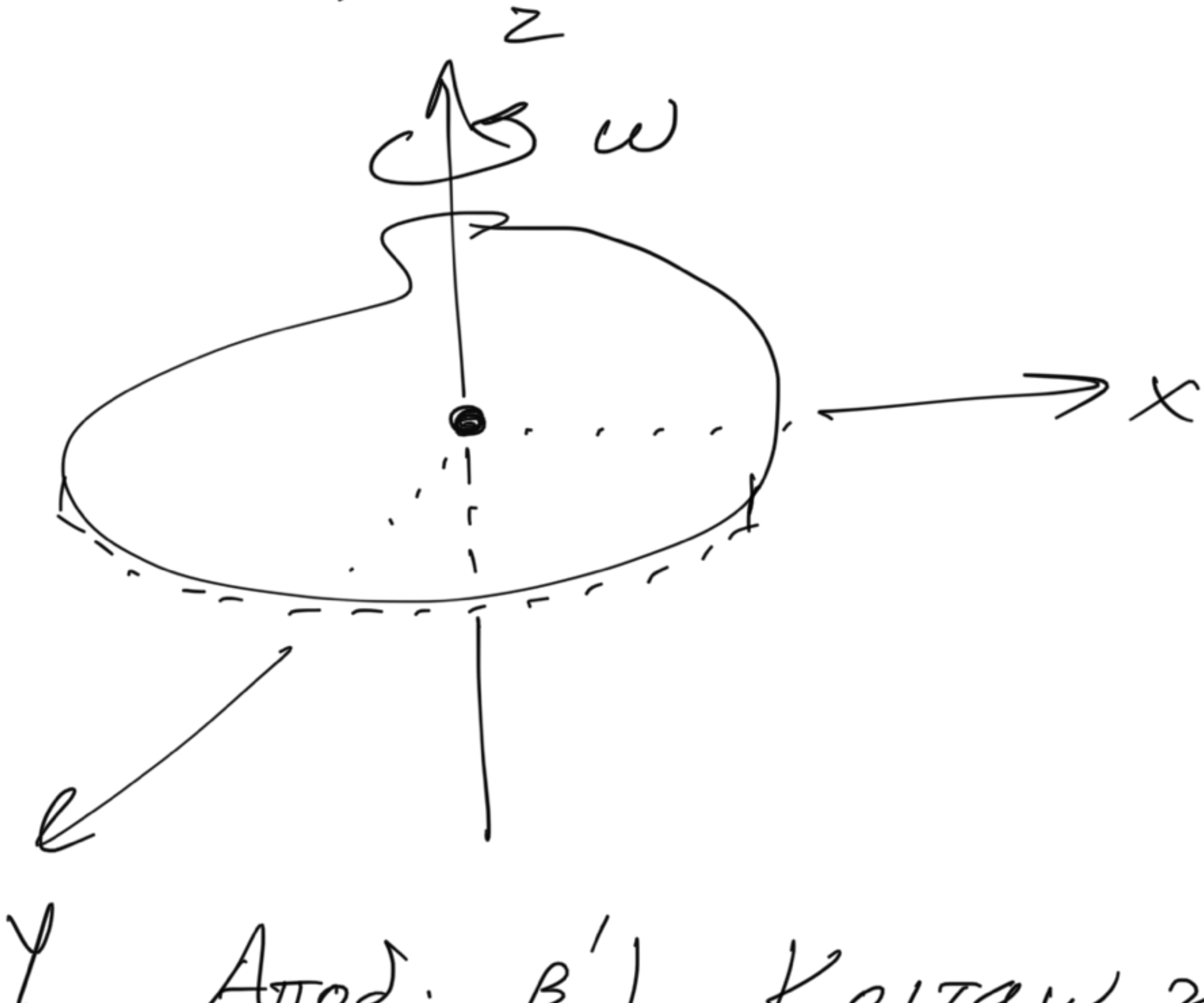
<u>Θμ</u> α) Για γενικό σώμα

$$L_z = I\omega \qquad (2)$$

συνιστώσα z $\nearrow$ $\quad \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{k} = L_z$

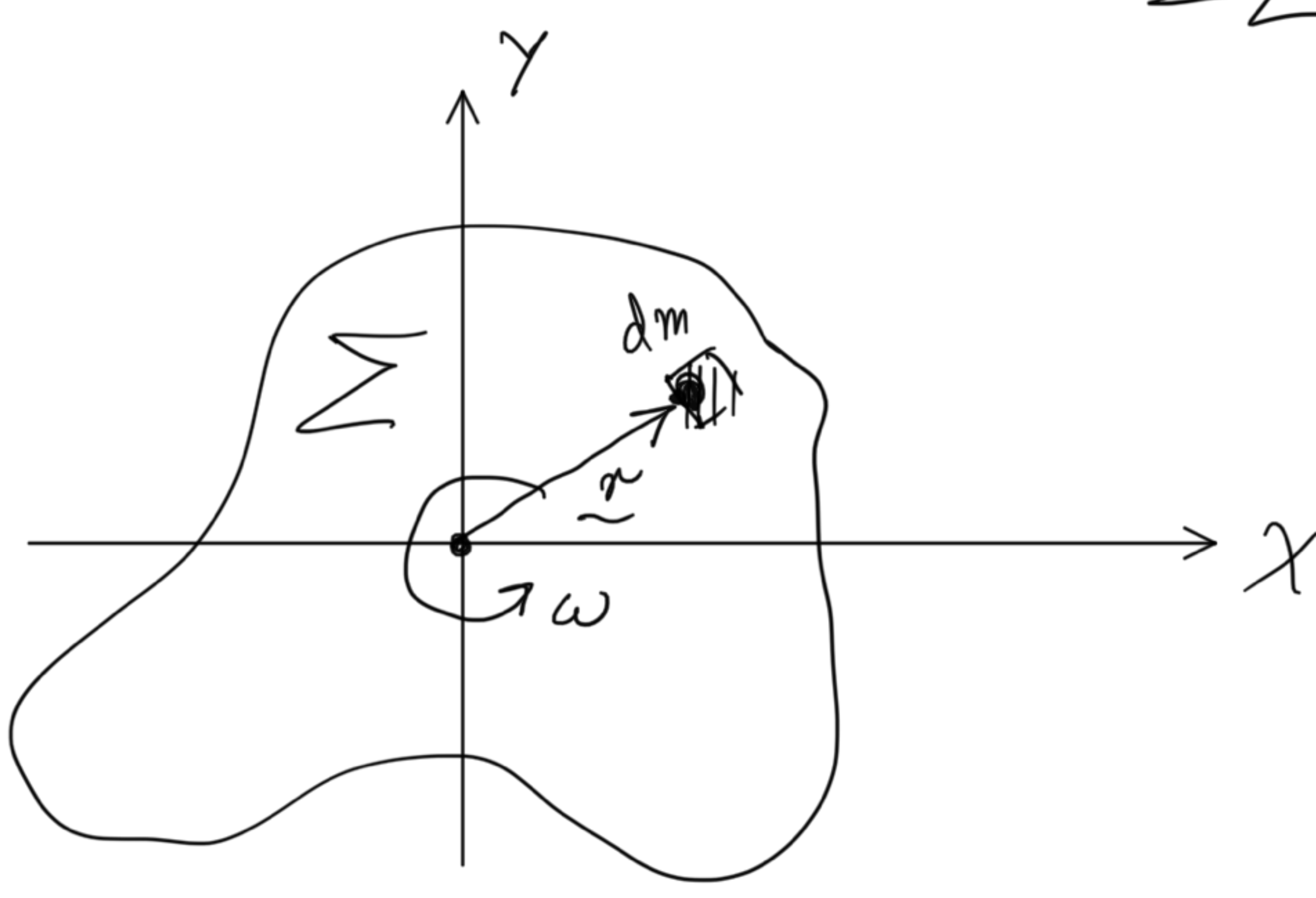
β) Αν το σώμα είναι 2Δ στο επίπεδο xy τοτε

$$\underset{\sim}{L} = I\omega \underset{\sim}{k} \qquad (3)$$



<u>Αποδ.</u> β΄). Κοιτάω το σώμα Σ από τον άξονα z

2Δ



τυχαίο σημείο $\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} =$

$= r\underset{\sim}{e}_r$

$\underset{\sim}{v} = r\omega \underset{\sim}{e}_\theta$

επειδή κάθε σημείο κάνει

κυκλική κίνηση!

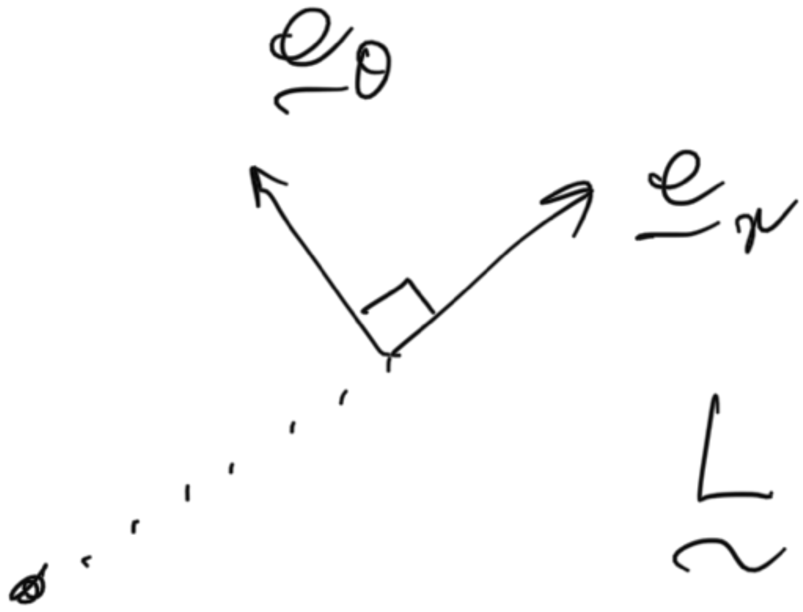
Στροφορμή ενός κομματιού με μάζα dm (απειροστού)

$$d\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \underbrace{(dm\,\mathbf{v})}_{d\mathbf{p}}$$

ολοκληρώνω

$$\mathbf{L} = \int_{\Sigma} \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = r\mathbf{e}_r \times r\omega\,\mathbf{e}_\theta =$$
$$= r^2\omega\,\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = r^2\omega\,\mathbf{k}$$



$$\mathbf{L} = \int_{\Sigma} r^2\, dm\; \omega\,\mathbf{k}$$

$$dm = \sigma\, dA$$

$$\mathbf{L} = \iint \sigma r^2\, dA\; \omega\,\mathbf{k}$$

$$\sum$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{L} = I\omega\underset{\sim}{k}$$

<u>Θμ</u> Ισοζύγιο Στροφορμής για ΣΣ που περ. με γων. ταχ $\omega(t)$ περι τον άξονα Z

$$\tau_Z = I\dot{\omega} \quad (4).$$

<u>Αποδ.</u> Παίρνω $\cdot\underset{\sim}{k}$ στην (1)

$$\underset{\sim}{\tau}\cdot\underset{\sim}{k} = \dot{\underset{\sim}{L}}\,\underset{\sim}{k}$$

$$\tau_Z = \dot{L}_Z = \frac{d}{dt}(L_Z) =$$

$$= \frac{d}{dt}(I\omega) = \dot{I}\omega + I\dot{\omega}$$

όμως $\dot{I} = 0$

$$\Rightarrow \tau_Z = I\dot{\omega} \text{ ΟΕΔ.}$$

Σχόλια 1)

Σχόλια 4)

Το $\dot{\omega} = \alpha$ γωνιακή επιτάχυνση

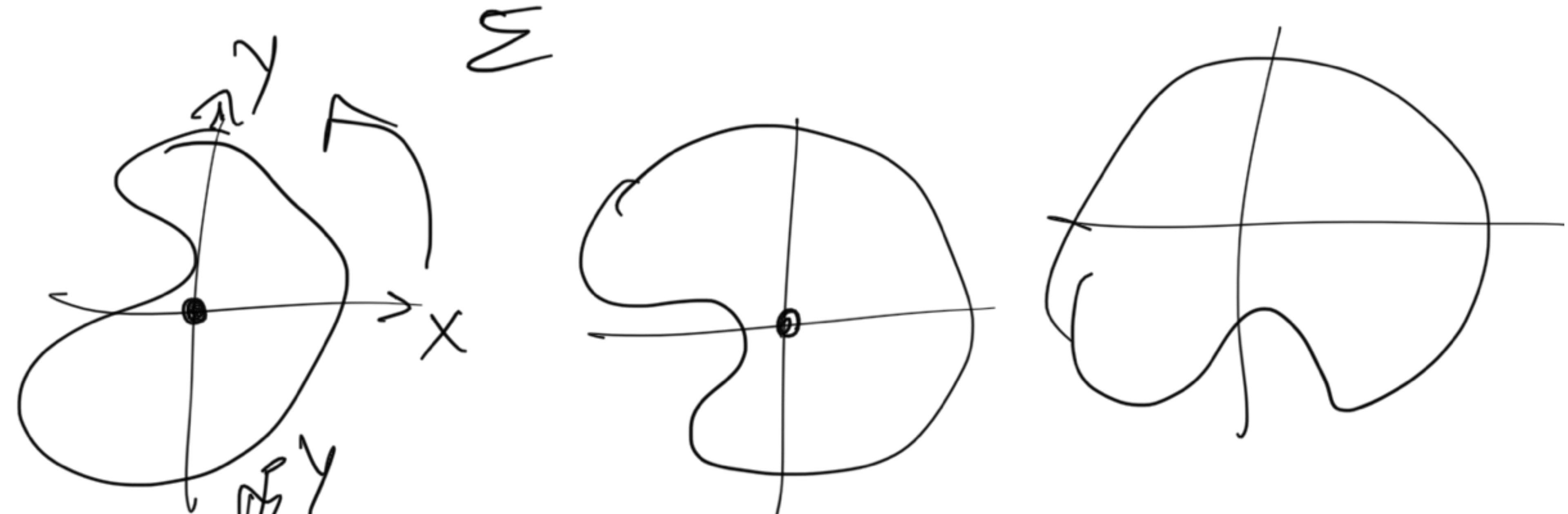
όχι a

$$\tau_z = I\alpha$$

ανάλογο του $F_z = m a_z$

2) Γιατί $\dot{I} = 0$ ενώ η περιοχή δοκιμήρωσης περιστρέφεται

$$I = \iint_{\Sigma} r^2 \, dA$$



Επειδή το r^2 = απόσταση από το 0

η περιστροφή δεν αλλάζει το

δοκ. και $\dot{I} = 0$.

Είμαστε τυχεροί που η περιστροφή

είναι στο επίπεδο xy.

3) Αν πάρω (3) · $\underset{\sim}{k}$ ⇒ (2)

4) Από δω και πέρα γράφω

$$\tau = \tau_z$$

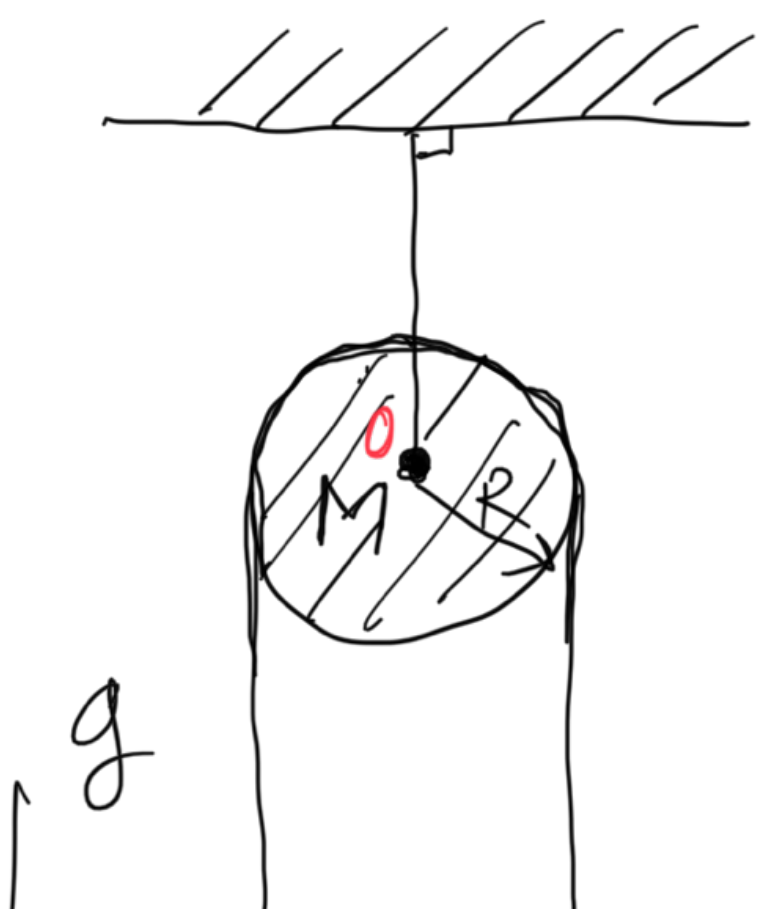
Ισοζύγιο Στροφορμής 2Δ

$$\tau = I\dot{\omega}$$

ή

$$\tau = I\alpha$$

<u>Παράδειγμα</u> Τροχαλία με βαράκια



Τροχαλία
Δίσκος μάζα M, ακτίνα R περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από O. Νήμα αβαρές

μη εκτατο.

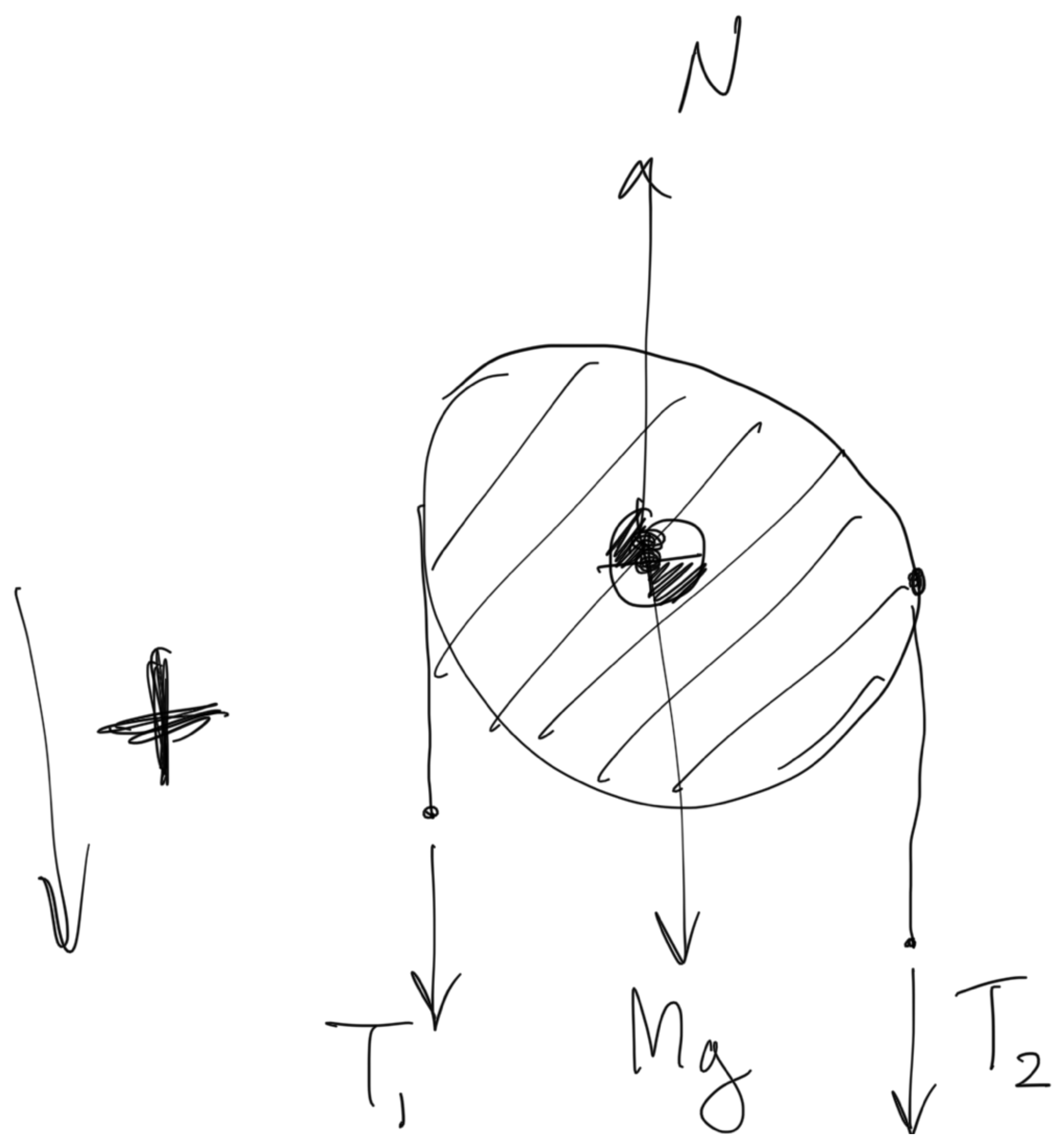
Μαζες m_1, m_2.

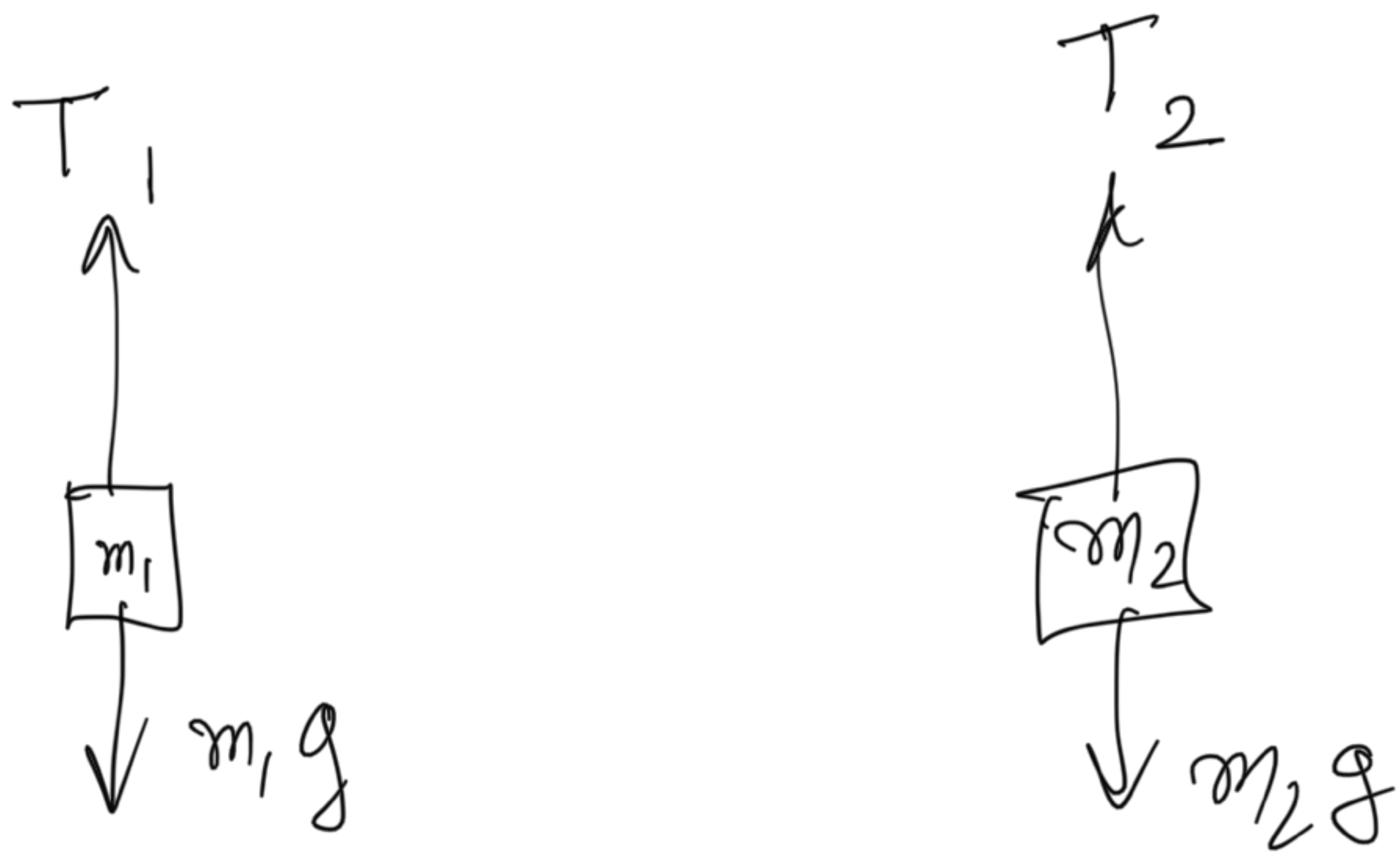
Θέλω επιταχ. της μάζας m_2.
Νήμα δεν γλιστραίνει σε σχέση με την τροχαλία. (τριβή μεταξ τροχαλίας και νήματος).

<u>Ισοζύγια Ορμών Στροφορμών</u>

κτλ.

Διαγράμματα Δυνάμεων Σώματος για τα 3 σώματα.





Ισοζύγια Ορμών. (2ος Νόμος)

m_2: $\quad m_2 g - T_2 = m_2 a_2$

m_1 $\quad m_1 g - T_1 = m_1 a_1$.

όμως $a_1 = -a_2$

γράφω $a_2 = a$, $a_1 = -a$

Ξαναγράφω Ισοζύγια Ορμών

Μάζες $\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a & (A) \\ m_1 g - T_1 = -m_1 a & (B) \end{cases}$

Τροχαλία

$$T_1 + T_2 + Mg - N = 0 \qquad (\Gamma)$$

διότι $a_{CM} = 0$ για την τροχαλία παρόλο που περιστρέφεται περί το ΚΜ.

Έχω 4 άγνωστες T_1, T_2, α, N, έχω 3 εξισώσεις. Λείπει:

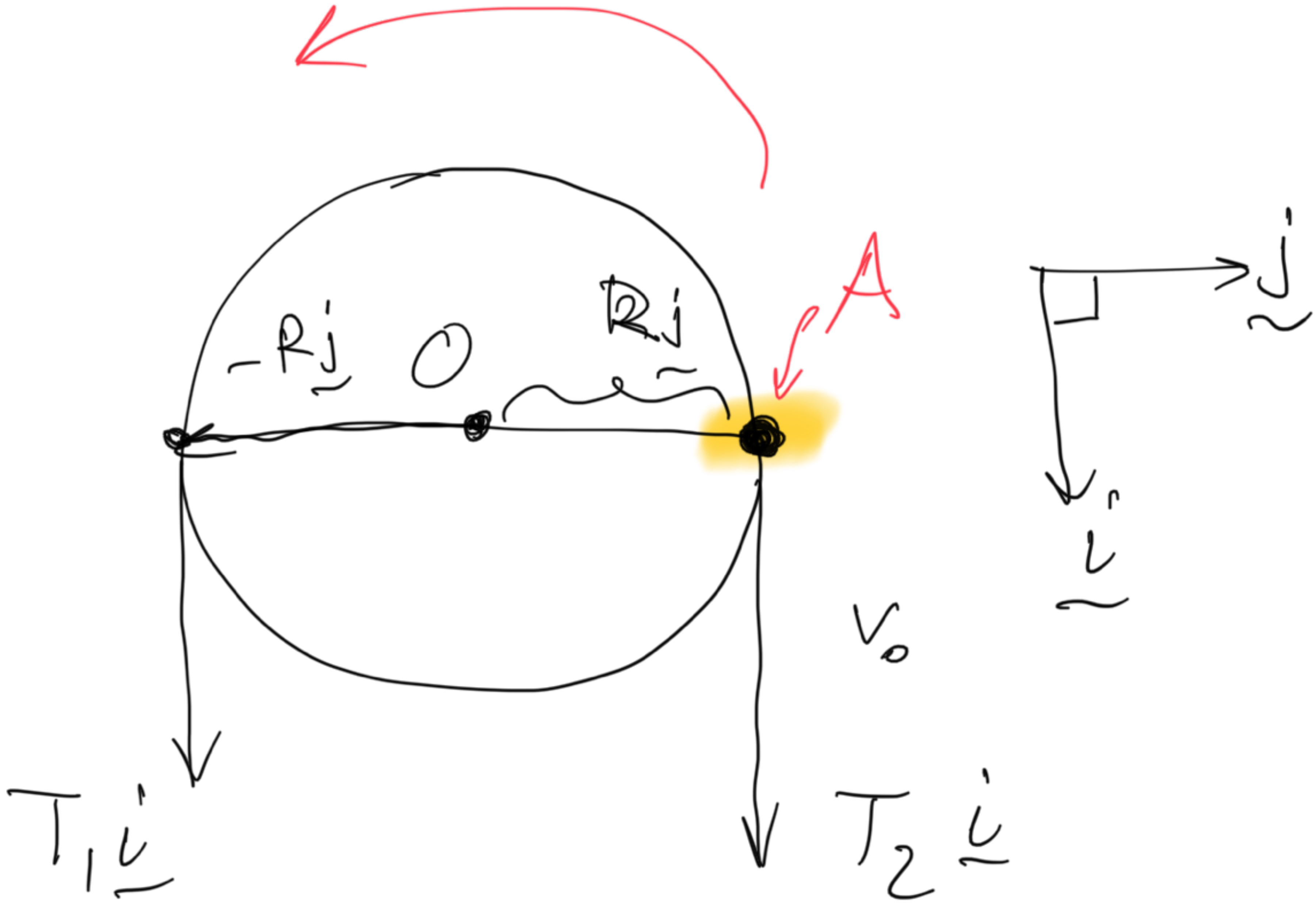
Ισοζύγιο Στροφορμής Τροχαλίας

$$\tau_{/O} = I_{/O}\,\dot{\omega}$$ περί το σημείο O (Δ)

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

$$\tau = \dot{J}$$

$\omega = ;$



$$\underset{\sim}{\tau} = R\underset{\sim}{j} \times T_2 \underset{\sim}{i} - R\underset{\sim}{j} \times T_1 \underset{\sim}{i} =$$

$$= -RT_2 \underset{\sim}{k} + RT_1 \underset{\sim}{k} =$$

$$\underset{\sim}{\tau} = R(T_1 - T_2)\underset{\sim}{k}$$

$$\tau = \tau_z = R(T_1 - T_2)$$

$$\dot{\omega} = ;$$

Ποιο είναι το ω;

Το σημείο A πάνω στην τροχαλία κάνει κυκλική

$$v_A = -R\omega \underset{\sim}{i} = v \underset{\sim}{i}$$

$\underline{v}_A = -R\omega\,\underline{j} = v\,\underline{j}$

όπου v ταχύτητα νήματος

= ταχύτητα μάζας 2.

$$-R\omega = v$$

Παραγωγίζω

$$-R\dot{\omega} = a \Rightarrow \dot{\omega} = -a/R$$

<u>Ισοζύγιο Στροφορμής</u>

$$\tau = I\dot{\omega} \qquad (\Delta)$$

$$\cancel{R}(T_1 - T_2) = \frac{MR^{\cancel{2}}}{2}\left(\frac{-a}{\cancel{R}}\right)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{M}{2}a \qquad (E)$$

τέταρτη εξίσωση μαζί με τις (Α)(Β)(Γ)

Το λύνω και βρίσκω την
a

$(A)-(B)$:

$$T_1 - T_2 = (m_2+m_1)a + (m_1-m_2)g$$

Αντικαθ. από (Ε) (Ϛ)

για $T_1 - T_2$, λύνω

για a

$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2+M/2}\,g} \quad (Z)$$

επιταχ.
της μάζας m_2.

Όταν $m_1 = m_2$, $\Rightarrow a=0$
ισορροπία

Όταν $M=0$, $(E) \Rightarrow T_1 = T_2$

(αβαρής τροχαλία)