ΦΥΣΙΚΗ 1

διάλεξη 8

Δυνάμεις που εξαρτώνται από την ταχύτητα ⇒ διαφορική εξίσωση λύση με χωρισμό μεταβλητών.

<u>Πτώση</u> Αλέξη (πτωτιστή) με τετραγωνική αντίσταση αέρα.

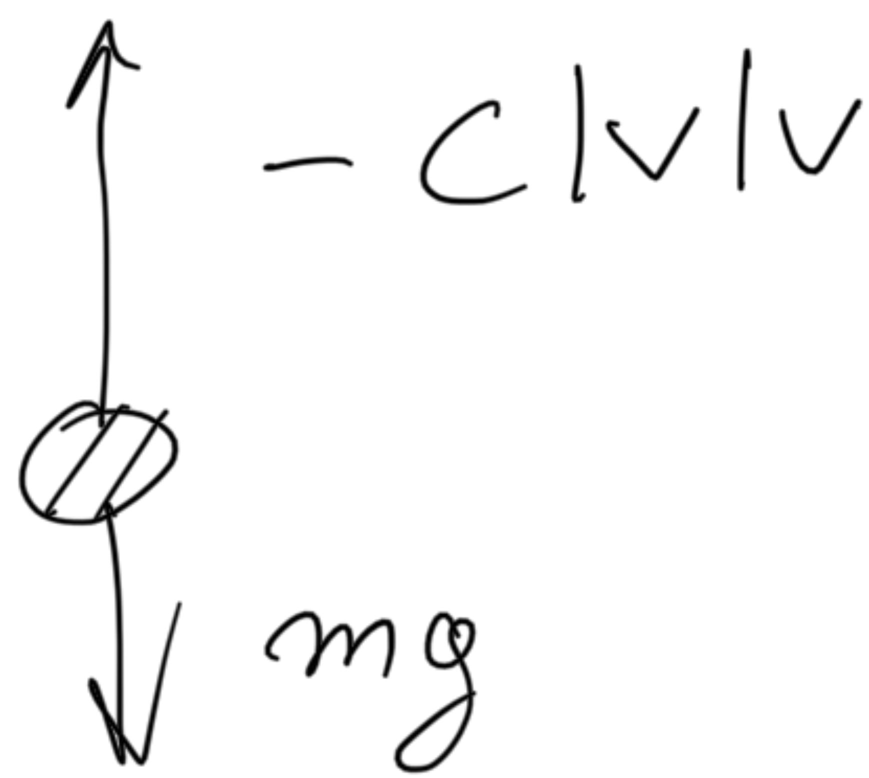
Αντίσταση

$$F(v) = -C|v|v$$

Θυμάμαι οτι εχει την ιδιότητα
$F(v)v \le 0 \quad \forall v.$

Αλεξης πηδαει στο κενο με
αρχ. ταχ. $v(0)=0$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΩΜΑΤΟΣ



Για να ξεφορτωθω την απόλυτη
τιμη περιμενω $v(t)>0$ για $t>0$
και δεν θα αλλάξει προσημο.

$\downarrow +$ Άρα για $t > 0$ θα έχω

$$F(v) = -C v^2 \quad , \quad C = \sigma\tau\alpha\theta. > 0$$

2ος Νόμος λέει:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - C v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = g - k v^2 \quad , \quad k = C/m$$

Χωρισμός Μεταβλητών:

$$\frac{dv}{} = dt$$

$$g - kv^2$$

$$\int \frac{dv}{g - kv^2} = \int dt$$

$$\int \frac{dv}{1 - \frac{k}{g} v^2} = g \int dt$$

Ορίζω $A = \sqrt{k/g}$, $\frac{k}{g} = A^2$

$A > 0$

$$\int \frac{dv}{\quad} = g \int dt$$

$$\sqrt{\overline{1 - A^2 v^2}} \quad \Big]\Big\}$$

Πως θα κάνω το ολοκλήρωμα;

$$\frac{1}{1-A^2v^2} = \frac{1}{(1-Av)(1+Av)} =$$

χωρίζω κλάσματα:

$$= \frac{\alpha}{1-Av} + \frac{\beta}{1+Av}$$

Ψάχνω τα α, β. Τα κάνω ομώνυμα

$$= \frac{\alpha(1+Av)}{} + \frac{\beta(1-Av)}{} =$$

$(1-Av)(1+Av) \qquad\qquad (1-Av)(1+Av)$

$$= \frac{\alpha+\beta + Av(\alpha-\beta)}{(1-Av)(1+Av)} = \frac{1}{(\quad)(\quad)}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha+\beta &= 1 \\ \alpha-\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-A^2v^2} = \frac{1}{2(1+Av)} + \frac{1}{2(1-Av)}$$

ολοκληρώνονται.

$$= \frac{1}{2(Av+1)} - \frac{1}{2(Av-1)}.$$

Άρα

$$\frac{1}{2}\int \frac{dv}{Av+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{Av-1} = g\int dt$$

$$(*) \quad \frac{1}{2A}\log(Av+1) - \frac{1}{2A}\log(Av-1) = gt + c_1 \quad (*)$$

$c_1 =$ σταθ. ολοκλ.

Λίγο προσοχή στους λογαρίθμους!!

Είχαμε κάνει την παραδοχή

ότι $V(t) > 0$ για $t > 0$, αλλά έχω ότι $V(0)=0$ άρα για t μικρό ο όρος $Av << 1$

Ο 2ος όρος $\log(Av-1)$ δεν ορίζεται! Τι ΘΑ ΚΑΝΩ; Πού είναι η ΠΑΤΑΤΑ!!

ΛΑΘΟΣ

$$\cancel{\int \frac{1}{x}\,dx = \log x}$$ ΌΧΙ

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| \quad \forall x \neq 0$$

ΣΩΣΤΟ!!

Το γράφω τώρα σωστά και έχω, αντί για την (*), την εξής:

$$\frac{1}{2A}\log|Av+1| - \frac{1}{2A}\log|Av-1| = gt + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2A}\log\left|\frac{Av+1}{Av-1}\right| = gt + C_1.$$

Για t μικρό, $Av+1>0$ αλλά $Av-1<0$, $\Rightarrow$

$$\left|\frac{Av+1}{}\right| = -\frac{Av+1}{} = \frac{1+Av}{}$$

$$|Av-1| \qquad Av-1 \qquad 1-Av$$

$$\frac{1}{2A} \log \frac{1+Av}{1-Av} = gt + C_1 .$$

τουλάχιστον για μικρά t

$$\Rightarrow \log \frac{1+Av}{1-Av} = 2Agt + \underbrace{C_2}_{2A\,C_1}$$

$$\Rightarrow \frac{1+Av}{1-Av} = e^{2Agt + C_2} =$$

$$= e^{2gAt}\, \underbrace{e^{C_2}}_{C_3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+Av}{1-Av} = C_3\, e^{2gAt} \qquad (**)$$

Αρχ. συνθήκη λέει $t=0 \Rightarrow v=0$.

άρα $(**)$ γίνεται

$$1 = C_3 \cdot 1 \Rightarrow C_3 = 1.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+Av}{1-Av} = e^{2gAt}$$

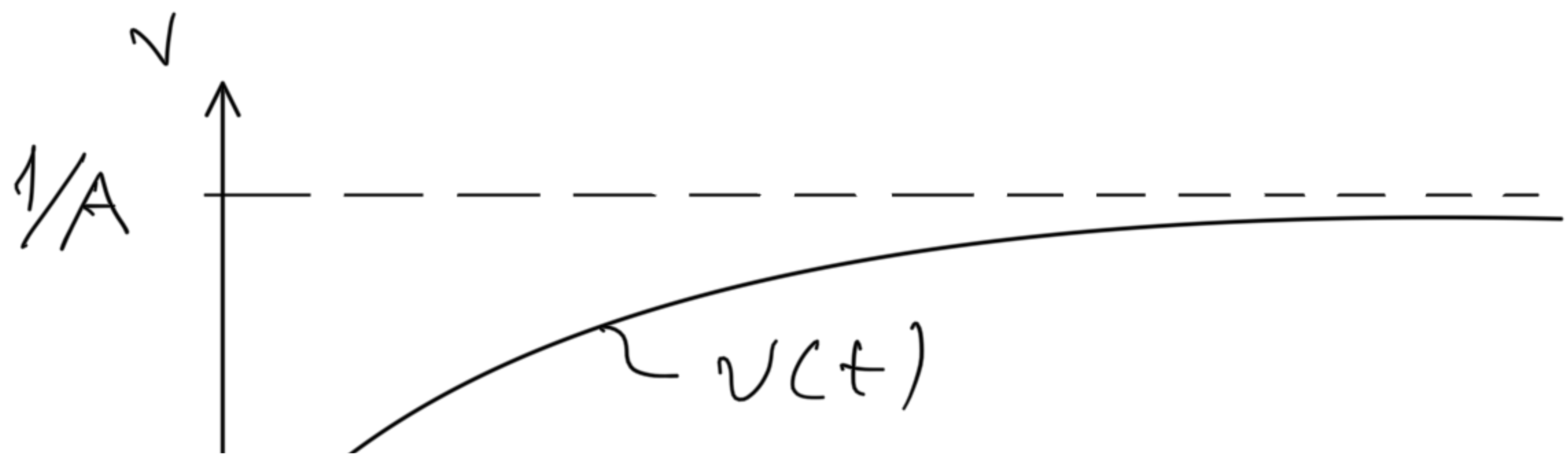
λύνω ως προς v.

$$1 + Av = e \quad (1 - Av)$$

$$\Rightarrow \quad Av\left(1 + e^{2gAt}\right) = e^{2gAt} - 1 \quad \Rightarrow$$

<u>Λύση</u> : για $t > 0$

$$\boxed{v = v(t) = \frac{1}{A}\,\frac{e^{2gAt} - 1}{e^{2gAt} + 1} \qquad t \geq 0}$$



Έχω $v(0)=0$, εύκολα δείχνω

$$\frac{dv}{dt}(t) > 0 \Rightarrow v(t) \text{ αύξουσα}$$

και επίσης $v(t) \longrightarrow 1/A$, $t \to \infty$.

άρα είναι όπως τη ζωγράφισα.

Θυμάμαι $A = \sqrt{\frac{c}{mg}}$

$$\frac{1}{A} = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

Οριακή Ταχύτητα

$$\lim v(t) = v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\;}}$$

$t \to \infty$

Θυμάμαι ότι για γραμμική αντίσταση είχα οριακή ταχ.

$$V_\infty = mg/c$$

Οριακή Ταχύτητα πολύ σημαντική (Θέμα ζωής και θανάτου).

μικρό $V_\infty \Rightarrow$ ζωή

μεγάλο $V_\infty \Rightarrow$ θάνατος.

Γενικότερα Μπορώ να βρω V_∞

Ερώτηση: Μπορώ να βρω v_∞ χωρίς να λύσω διαφ. εξίσωση;

Έστω ότι έχω δεδομένη μορφή αντίστασης.

$$F(v) < 0 \quad \text{για} \quad v > 0$$

Πχ. $F(v) = -cv$

$$F(v) = -c|v|v$$

$$F(v) = -cv^3$$

$2^{ος}$ Νόμος $\Rightarrow$

$$\boxed{\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\to 0} = mg + F(v).}$$

καθώς $t \to \infty$, $v(t) \to v_\infty = \underline{\underline{\underline{\text{σταθ.}}}}$

$\Rightarrow$ επιταχ. $\frac{dv}{dt}(t) \longrightarrow 0.$

άρα στο όριο ισχύει:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow mg + F(v) = 0.$$

για $v = v_\infty$

άρα

ΟΡΙΚΗ ΤΑΧ. ΕΙΝΑΙ Η ΛΥΣΗ

ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

$$\boxed{mg + F(V_\infty) = 0 \qquad (***)}$$

Τι δίνει στις γνωστές περιπτώσεις;

α') <u>Γραμμική</u> $F(v) = -cV$.

$(***) \Rightarrow mg - cV_\infty = 0$

λύνω για V_∞

$$V_\infty = mg/c$$

σωστό!

β') Τετραγωνική Αντίσταση

$$F(v) = -c v^2$$

$$(***) \Rightarrow mg - c v_\infty^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_\infty = \sqrt{mg/c}$$

σωστό όπως βρήκαμε παραπάνω

γ') Κυβική Αντίσταση

$$F(v) = -c v^3$$

$$F(v) = -cv$$

$$\Rightarrow \quad mg - c v_\infty^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_\infty = \left(mg/c \right)^{1/3}$$