

1.3 Κίνηση σε δύο και τρεις διαστάσεις

Φροντιστηρίου

Άσκηση 1.3.1. Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου που κινείται στο οριζόντιο επίπεδο xy δίνεται από την σχέση $\vec{a} = 3t\hat{i} + 4t\hat{j}$, όπου η \vec{a} είναι σε m/sec^2 και ο χρόνος $t > 0$ σε sec . Την χρονική στιγμή $t = 0$, το διάνυσμα $\vec{r} = (2.00\text{ m})\hat{i} + (40.0\text{ m})\hat{j}$ προσδιορίζει την θέση του σωματιδίου, το οποίο εκείνη την στιγμή έχει διάνυσμα ταχύτητας $\vec{v} = (5.00\text{ m/s})\hat{i} + (2.00\text{ m/s})\hat{j}$. Την στιγμή $t = 4.00\text{ s}$, (α) πόσο είναι το διάνυσμα θέσης σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων και (β) πόση είναι η γωνία θ μεταξύ της κατεύθυνσης κίνησης και της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x ;

Απάντηση. (α) $\vec{r}(t = 4) = 54\hat{i} + \frac{272}{3}\hat{j}$ (β) $\theta = 0.92\text{ rad}$

Άσκηση 1.3.2. Από την ταράτσα ενός κτηρίου, σε ύψος $h = 45.0\text{ m}$ κάποιος ρίχνει μία πέτρα προς τα επάνω υπό γωνία $\theta = 30.0^\circ$ ως προς την οριζόντιο με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = 20.0\text{ m/s}$. (α) Βρείτε την ταχύτητα της πέτρας σαν συνάρτηση του χρόνου. (β) Πόσο χρόνο χρειάζεται η πέτρα για να φθάσει στο έδαφος; (γ) Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας όταν προσκρούει στο έδαφος; [Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι -10 m/s^2 .]

Απάντηση. (α) $\vec{v} = 17.3\text{ (m/s)}\hat{i} + 10.0(1 - t)\text{ (m/s)}\hat{j}$ (β) 4.16 s (γ) 36.0 m/s

Άσκηση 1.3.3. Το παγκόσμιο ρεκόρ άλματος με μοτοσυκλέτα είναι $d = 77.0\text{ m}$ και ανήκει στον Jason Renie. Υποθέστε ότι εγκατέλειψε την ράμπα υπό γωνία $\theta = 12^\circ$ ως προς την οριζόντιο κατεύθυνση και ότι τα ύψη απογείωσης και προσγείωσης είναι ίσα. Βρείτε την ταχύτητα προσγείωσης (αγνοήστε την αντίσταση του αέρα).

Απάντηση. 43.5 m/s

Άσκηση 1.3.4. Ένα υλικό σημείο P κινείται έτσι ώστε η επιβατική του ακτίνα ως προς την αρχή O να ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{c} \times \vec{r},$$

όπου \vec{c} είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Να αποδείξετε ότι το P κινείται με σταθερή ταχύτητα επί μιας κυκλικής τροχιάς [Υπόδειξη: πολλαπλασιάστε εσωτερικά την σχέση πρώτα με \vec{c} και μετά με \vec{r} .]

Άσκηση 1.3.5. Ένα αγωνιστικό αυτοκίνητο κινείται σε κυκλική πίστα ακτίνας b . Το αυτοκίνητο είναι αρχικά ακίνητο και η ταχύτητα του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό α . Να υπολογίσετε την γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων ταχύτητας και επιτάχυνσης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t .

Απάντηση. $\tan \theta = (\alpha/b)t^2$

Άσκηση 1.3.6. Μια μέλισσα πετάει σε τροχιά της οποίας οι πολικές συντεταγμένες συναρτήσει του χρόνου t είναι

$$r = \frac{bt}{\tau^2}(2\tau - t), \quad \theta = \frac{t}{\tau} \quad (0 \leq t \leq 2\tau),$$

όπου b, τ είναι θετικές σταθερές. (α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μέλισσας την χρονική στιγμή t . (β) Επίσης να δείξετε ότι η ελάχιστη ταχύτητα της μέλισσας είναι b/τ , και να βρείτε την επιτάχυνση της μέλισσας σε αυτή τη χρονική στιγμή.

Απάντηση. (α) $\vec{v} = \frac{2b}{\tau^2}(\tau - t)\hat{e}_r + \frac{bt}{\tau^3}(2\tau - t)\hat{e}_\theta$. (β) $v(t = \tau) = (b/\tau)\hat{e}_\theta$

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 1.3.7. Ένας ριφοκίνδυνος άνθρωπος βρίσκεται σε ύψος $h = 520 \text{ km}$ από την επιφάνεια της γης όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 8.4 \text{ m/sec}^2$. Έστω ότι ξεκινάει την κίνησή του με κάποια αρχική ταχύτητα \vec{v}_0 . (α) Τι κίνηση κάνει; (β) Ποια πρέπει να είναι η αρχική του ταχύτητα ώστε να κάνει ομαλή κυκλική κίνηση; (γ) Πώς τον λένε; [Η ακτίνα της Γης είναι $R_\Gamma = 6400 \text{ km}$.]

Απάντηση. (α) Κατακόρυφη πτώση, κυκλική ή ελλειπτική κίνηση, κλπ. (β) $7.6 \text{ (km/sec)} \hat{e}_\theta$

Άσκηση 1.3.8. (α) Να υπολογίσετε επίσης την επιτάχυνση της Γης λόγω της περιφοράς της γύρω από τον Ήλιο. (β) Ένα σώμα ηρεμεί σε κάποιο σημείο του Ισημερινού της Γης. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος λόγω της περιστροφής της Γης. [Δίνεται ότι η ακτίνα της Γης είναι $R_\Gamma = 6400 \text{ km}$. Θεωρείστε ότι ο Ήλιος είναι ακίνητο σημείο και ότι η Γη είναι υλικό σημείο που κινείται σε κυκλική τροχιά με κέντρο τον Ήλιο και με ακτίνα περιφοράς $L = 15 \times 10^{10} \text{ m}$.]

Απάντηση. (α) $5.96 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ (β) $3.38 \times 10^{-2} \text{ m/sec}^2$

Άσκηση 1.3.9. Ένα κουνούπι πετάει σε σπειροειδή τροχιά της οποίας οι πολικές συντεταγμένες συναρτήσει του χρόνου t είναι

$$r = be^{\Omega t}, \quad \theta = \Omega t,$$

όπου b, Ω είναι θετικές σταθερές. Να υπολογίσετε τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης του κουνουπιού, και να δείξετε ότι σε κάθε χρονική στιγμή σχηματίζουν γωνία $\pi/4$.

Απάντηση. $\vec{v} = r\Omega(\hat{e}_r + \hat{e}_\theta)$, $\vec{a} = r\Omega^2 \hat{e}_\theta$.

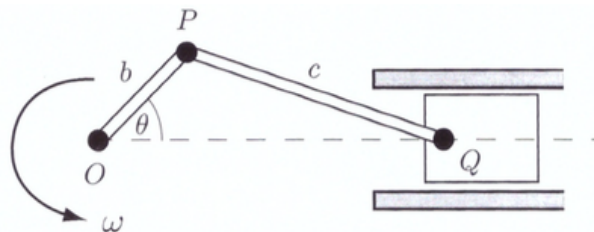
Άσκηση 1.3.10. Ένα υλικό σημείο κινείται πάνω σε μία καμπύλη του τριδιάστατου χώρου με ταχύτητα σταθερού μέτρου $v = |\vec{v}(t)| = \text{σταθ}$. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα ταχύτητας $\vec{v}(t)$ και επιτάχυνσης $\vec{a}(t)$ πρέπει να είναι κάθετα μεταξύ τους σε κάθε χρονική στιγμή [Υπόδειξη: παραγωγίστε την σχέση $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ ως προς τον χρόνο].

Συμπληρωματικές

Άσκηση 1.3.11. Το πιστόνι Q στο σχήμα κινείται λόγω της κίνησης του στροφάλου OP το οποίο περιστρέφεται γύρω από το σταθερό σημείο O με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Να υπολογίσετε την απόσταση OQ συναρτήσει των μηκών b, c και της γωνίας θ . Να δείξετε ότι εάν ο λόγος $\frac{b}{c}$ είναι μικρός, η απόσταση OQ προσεγγίζεται από τη έκφραση

$$OQ = c + b \cos \theta - \frac{b^2}{2c} \sin^2 \theta,$$

εάν αμελήσουμε ποσότητες τάξης $(\frac{b}{c})^4$ και μικρότερες. Χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση να υπολογίσετε τη μέγιστη επιτάχυνση που έχει το πιστόνι.



Άσκηση 1.3.12. Έστω ένα σωματίο το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση και η θέση του δίνεται από τις $x(t) = R \cos(t^2/2)$, $y(t) = R \sin(t^2/2)$, όπου R είναι σταθερά. Βρείτε την κεντρομόλο και την επιτρόχιο επιτάχυνση σαν συνάρτηση του χρόνου.

Άσκηση 1.3.13. Ένα αστέρι νετρονίων με ακτίνα $R = 20 \text{ km}$ εκτελεί μία περιστροφή ανά δευτερόλεπτο. (α) Πόση είναι η ταχύτητα των σωματίων στον ισημερινό του αστεριού; (β) πόσο το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης αυτών των σωματίων;

Άσκηση 1.3.14. Δίνεται η παραμετρική εξίσωση κίνησης στο επίπεδο

$$\vec{r}(t) = (1 + 3t)\hat{i} + (1 + 4t)\hat{j}.$$

Να μελετηθεί η κίνηση.

Άσκηση 1.3.15. Ένα υλικό σημείο P κινείται επί ενός κύκλου κέντρου O ακτίνας b . Σε κάποια χρονική στιγμή το μέτρο της ταχύτητας του είναι v και η επιτάχυνσή του σχηματίζει γωνία ϕ με την επιβατική ακτίνα PO . Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του P αυτή τη χρονική στιγμή.

Άσκηση 1.3.16. Δίνεται η παραμετρική εξίσωση κίνησης στο επίπεδο

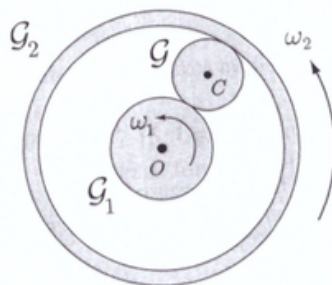
$$\vec{r}(t) = at\hat{i} - bt^2\hat{j}, \quad a, b > 0 \quad \text{σταθ.}$$

(α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (β) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση. (γ) Να βρεθεί η γωνία μεταξύ \vec{v} και \vec{a} .

Άσκηση 1.3.17. Ένα ψάρι κολυμπάει σε οριζόντιο επίπεδο και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0 = (4\hat{i} + \hat{j}) \text{ (m/sec)}$ σε ένα ορισμένο σημείο. Αφού κολυπήσει με σταθερή επιτάχυνση για 20 sec η ταχύτητά του είναι $\vec{v} = (20\hat{i} - 5\hat{j}) \text{ (m/sec)}$. Ποιές οι συνιστώσες της επιτάχυνσης;

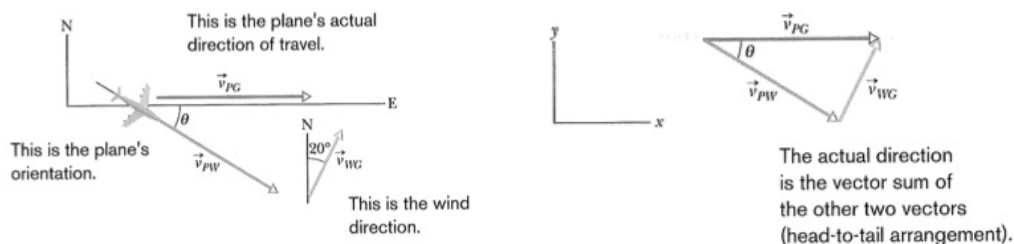
Άσκηση 1.3.18. Η τροχιά της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι κατά προσέγγιση κυκλική με ακτίνα $R = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$. Η Σελήνη χρειάζεται 27.3 ημέρες για να συμπληρώσει μία περιφορά γύρω από τη Γη. Βρείτε (α) την τροχιακή ταχύτητά της (β) την κεντρομόλο επιτάχυνσή της.

Άσκηση 1.3.19. Στον επικυκλικό μηχανισμό του σχήματος το κεντρικό γρανάξι G_1 και το εξωτερικό γρανάξι G_2 περιστρέφονται με γωνιακές ταχύτητας ω_1 και ω_2 , αντίστοιχα, γύρω από το κοινό τους κέντρο O . Το κέντρο C του ενδιάμεσου γραναζιού G κινείται επί κύκλου κέντρου O . Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κέντρου C του G και την γωνιακή ταχύτητα του γραναζιού G . Εάν το C συνδεθεί μέσω στερεάς ράβδου με το O , πόση θα είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου γύρω από το O ;



Άσκηση 1.3.20. Αεροπλάνο κινείται ανατολικά, ενώ βρίσκεται σε άνεμο που φυσάει προς βόρειο-ανατολικά. Αυτό επιτυγχάνεται αφού ο πιλότος έχει στρέψει το αεροπλάνο νότιο-ανατολικά. Το αεροπλάνο έχει ταχύτητα \vec{v}_{PW} ως προς τον άνεμο (δηλ. οι μηχανές δίνουν

στο αεροπλάνο μία ταχύτητα και ταυτοχρόνως ο άνεμος το παρασέρνει προς την κατεύθυνσή του) με μέτρο 215 km/h και κατεύθυνση υπό γωνία θ ως προς την ανατολή. Η \vec{v}_{WG} κατευθύνεται 20° ανατολικά του βορρά και έχει μέτρο 65 km/h . Πόσο είναι το μέτρο της \vec{v}_{PG} και πόση η θ ;



Σχήμα 1.1: Πηγή: [1].

Άσκηση 1.3.21. ([1] σελ 94 ασκ 4.3)

Άσκηση 1.3.22. ([1] σελ 99 ασκ 4.63) ομαλή κυκλική κίνηση

Άσκηση 1.3.23. ([1] σελ 100 ασκ 4.71) σχετική κίνηση σε μία διάσταση