

3.2 Δυναμική ενέργεια

Φροντιστηρίου

Άσκηση 3.2.1. Σημειακή μάζα εκκινεί από την ηρεμία από την κορυφή ακλόνητης σφαίρας και ολισθαίνει στη λεία επιφάνειά της (χωρίς τριβή). Να βρεθούν: (α) Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας της μάζας ως συνάρτηση της γωνίας θ που δίνει τη θέση της μάζας επάνω στη σφαίρα (θεωρούμε $\theta = 0$ στον βόρειο πόλο της σφαίρας). (β) Η κινητική ενέργεια ως συνάρτηση της γωνίας θ . (γ) Η ακτινική (κεντρομόλος) και η επιτρόχιος (εφαπτομενική) επιτάχυνση ως συνάρτηση της γωνίας θ . (δ) Η γωνία στην οποία η μάζα εγκαταλείπει τη σφαίρα (χάνει την επαφή της).

Άσκηση 3.2.2. Ένας χιονοδρόμος ξεκινά από ακινησία στην κορυφή ενός βουνού και κατεβαίνει μία λεία πλαγιά ύψους $h = 20\text{ m}$ με γωνία κλίσης $\theta = 20^\circ$. Στο τέλος της πλαγιάς ο χιονοδρόμος βρίσκει μία τραχιά οριζόντια επιφάνεια, η οποία έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο χιόνι και στα σκι $\mu = 0.21$. Πόσο μακριά πάει ο χιονοδρόμος προτού σταματήσει;

Άσκηση 3.2.3. Βραδύποδας μάζας $m = 2.0\text{ kg}$ κρέμεται από κλαδί σε ύψος $h = 5\text{ m}$ πάνω από το έδαφος. (α) Να υπολογισθεί η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος βραδύποδας-Γη αν θεωρήσουμε ως σημείο αναφοράς $y = 0$ (1) το έδαφος, (2) το δάπεδο μπαλκονιού που είναι σε ύψος 3.0 m πάνω από το έδαφος, (3) το κλαδί και (4) 1.0 m πάνω από το κλαδί. Θεωρήστε ότι στη θέση $y = 0$ η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδέν.

Σειράς ασκήσεων

Άσκηση 3.2.4. Ένας χιονοδρόμος ξεκινά από ακινησία στην κορυφή ενός βουνού και κατεβαίνει μία πλαγιά ύψους $h = 20\text{ m}$ με γωνία κλίσης $\theta = 30^\circ$. Στο τέλος της πλαγιάς ο χιονοδρόμος συνεχίζει να κινείται σε οριζόντια επιφάνεια. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης (στην πλαγιά και στην οριζόντια επιφάνεια) ανάμεσα στο χιόνι και στα σκι είναι $\mu = 0.21$. Πόση απόσταση διανύει ο χιονοδρόμος στην οριζόντια επιφάνεια προτού σταματήσει;

Άσκηση 3.2.5. Σώμα μάζας m κινείται κατά τον άξονα x υπό τη δράση δυνάμεως

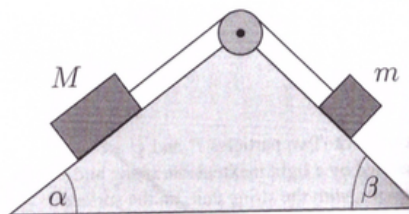
$$F(x) = -\frac{c}{x^2},$$

όπου $c > 0$ σταθερά. Ποια η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος x_m κατά την θετική κατεύθυνση x , αν στην αρχική θέση x_0 έχει ταχύτητα v_0 ;

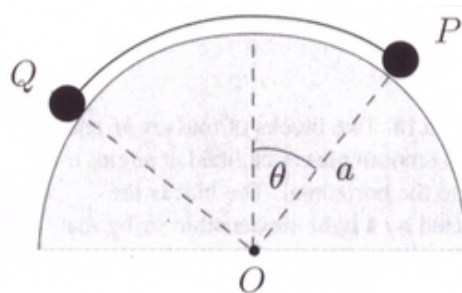
Άσκηση 3.2.6. Σωματίδιο P μάζας m έλκεται από σταθερό κέντρο O με δύναμη $F = m\gamma/r^3$, όπου r είναι η απόσταση του P από το O, και γ δοθείσα θετική σταθερά. Αρχικά ($t = 0$) το P βρίσκεται σε απόσταση a από το O και βάλλεται με ταχύτητα v_0 κατά την κατεύθυνση \vec{OP} . Να αποδείξετε ότι το P θα διαφύγει προς το άπειρο, εάν $(v_0)^2 > \gamma/a^2$. Για την περίπτωση $(v_0)^2 = \gamma/a^2$, να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση από το O στην οποία θα φθάσει και το χρόνο στον οποίο θα συμβεί αυτό.

Άσκηση 3.2.7. Ομογενής μη εκτατή αλυσίδα μάζας M και ολικού μήκους L βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι και ένα τμήμα της μήκους b κρέμεται κατακόρυφα στην άκρη του τραπεζιού. Αν η αλυσίδα αφεθεί ελεύθερη να κινηθεί υπό την επίδραση του βάρους του τμήματός της που κρέμεται από το τραπέζι, να υπολογίσετε την ταχύτητα κίνησής της όταν το κάτω άκρο του τμήματος που κρέμεται κατακόρυφα έχει μετακινηθεί κατά z από την αρχική του θέση.

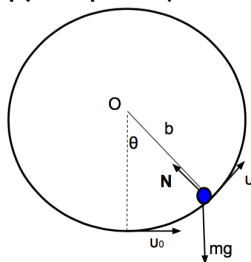
Άσκηση 3.2.8. Τα κιβώτια του σχήματος με μάζες M και m αντίστοιχα κινούνται χωρίς τριβή στα κεκλιμένα επίπεδα που σχηματίζουν με το οριζόντιο επίπεδο γωνίες α και β , αντίστοιχα. Τα κιβώτια συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα το οποίο περνά πάνω από αβαρή τροχαλία που επίσης δεν δημιουργεί αντίσταση τριβής. Να υπολογισθεί η επιτάχυνση του κιβωτίου μάζας m και η τάση του νήματος.



Άσκηση 3.2.9. Τα σωματίδια P και Q με μάζες M και m αντίστοιχα, κινούνται στην επιφάνεια οριζόντιου κυλίνδρου ακτίνας a . Τα σωματίδια συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα μήκους $\pi a/2$. Το σύστημα αρχικά ευρίσκεται σε ηρεμία σε συμμετρική θέση όπου $\theta = \pi/4$, και αφήνεται να κινηθεί με την επίδραση της βαρύτητας. Να διατυπώσετε την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας του συστήματος καθώς αυτό κινείται.



Άσκηση 3.2.10. Μια σταθερή κοίλη μεταλλική σφαίρα έχει κέντρο O και λεία εσωτερική επιφάνεια ακτίνας b . Σωματίδιο που βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας εκτοξεύεται από το κατώτατο σημείο με ταχύτητα v_0 . (α) Να δείξετε ότι αν το σωματίδιο κινείται συνεχώς σε επαφή με την εσωτερική επιφάνεια της σφαίρας, η ταχύτητά του δίνεται από την σχέση $v^2 = v_0^2 - 2gb(1 - \cos \theta)$ όπου θ είναι η γωνία μεταξύ της στιγμιαίας θέσης του σωματιδίου και της κατακόρυφης η οποία διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας. (β) Επίσης να υπολογίσετε την δύναμη που δέχεται το σωματίδιο από την εσωτερική επιφάνεια της σφαίρας. (γ) Εάν $v_0 = \sqrt{3gb}$ βρείτε την γωνία θ για την οποία το σωματίδιο θα πάψει κάποια στιγμή να κινείται σε επαφή με την επιφάνεια της σφαίρας.



Λύση. (έλεγχξε)

(α) Η ενέργεια του σωματίου διατηρείται και έχουμε

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgb = \frac{1}{2}mv^2 - mgb \cos \theta \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gb(1 - \cos \theta).$$

(β) Το σωματίο κάνει κυκλική κίνηση ακτίνας b και άρα θα δέχεται κεντρομόλο επιτάχυνση. Για τις δυνάμεις στην διεύθυνση την κάθετη στην σφαίρα, ισχύει

$$N - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{b} \Rightarrow N = m \frac{v_0^2}{b} + mg(3 \cos \theta - 2).$$

(γ) Για $v_0 = \sqrt{3gb}$ είναι

$$N = mg(6 \cos \theta - 2).$$

Το σωματίο χάνει επαφή με την σφαίρα όταν

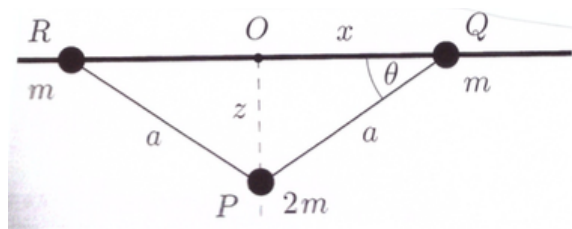
$$N = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 3.2.11. Μεταλλικό δοχείο μάζας $m = 0.40 \text{ kg}$ ολισθαίνει κατά μήκος οριζόντιου πάγκου χωρίς τριβές με ταχύτητα $v = 0.50 \text{ m/sec}$. Στη συνέχεια συγκρούεται (μετωπικά) με ελατήριο σταθεράς $k = 750 \text{ N/m}$ και το συσπειρώνει. Όταν το δοχείο σταματά στιγμιαία λόγω ελατηρίου κατά πόση απόσταση d συσπειρώνεται το ελατήριο;

Συμπληρωματικές

Άσκηση 3.2.12. Σφαιρίδιο P μάζας $2m$ κρέμεται με δύο αβαρή, μη εκτατά νήματα μήκους a από δύο οδηγούς R και Q που έχουν μάζα m ο καθένας και μπορούν να ολισθαίνουν χωρίς τριβή πάνω σε λεία οριζόντια ράβδο. Το σύστημα κινείται συμμετρικά έτσι ώστε το μέσο O του ευθυγράμμου τμήματος RQ να παραμένει σταθερό και το P να κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω. Αρχικά το σύστημα ηρεμεί έτσι ώστε το σωματίδιο P να βρίσκεται πάνω στη ράβδο και τα νήματα να είναι οριζόντια. Να διατυπωθεί η

εξίσωση διατήρησης ενέργειας του συστήματος καθώς αυτό κινείται όταν αφεθεί ελεύθερο.



Άσκηση 3.2.13. Η δυναμική ενέργεια σώματος μάζας m δίνεται από τη συνάρτηση

$$U(x) = ax^3 - bx,$$

όπου $a, b > 0$ σταθερές. (α) Ποια η δύναμη που δρα στο σωματίο; (β) Για ποιές τιμές του x η δύναμη μηδενίζεται; (γ) Αν η ολική ενέργεια του σωματίου είναι ίση με μηδέν, για ποιές τιμές του x η ταχύτητα μηδενίζεται; (δ) Εξετάστε τις διαφορετικές περιπτώσεις κίνησης του σωματίου για κάθε δυνατή τιμή της ολικής ενέργειας.

Άσκηση 3.2.14. Η δυναμική ενέργεια σώματος μάζας m δίνεται από τη συνάρτηση

$$U(x) = \frac{a}{4}x^4 - \frac{b}{2}x^2,$$

όπου $a = 1 \text{ J/m}^4$ και $b = 2 \text{ J/m}^2$. (α) Να σχεδιασθεί η δυναμική ενέργεια. (β) Να μελετηθεί η κίνηση για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας και για οποιαδήποτε επιτρεπτή αρχική συνθήκη. (γ) Για ποιές τιμές της ενέργειας και ποια αρχική το σώμα κάνει ταλάντωση; (δ) Για ποιές τιμές της ενέργειας και ποια αρχική το σώμα κάνει μη-πεπερασμένη κίνηση;