ΦΥΣΙΚΗ 1 ΔΙΑΛΕΞΗ 11

ΦΥΣΙΚΗ 1

διάλεξη 11

Διατήρηση Ενέργειας σε 1Δ

Αν $\exists$ συνάρτηση $F(x)$ τ.ω. μια δύναμη $F = F(x)$ για όλες τις κινήσεις τγ ΥΣ τοτε (σε 1Δ) η δύναμη λέγεται <u>διατηρητική</u> (συντηρητική).

Αν μια συνάρτηση $U(x)$ ικανοποιεί

$$\frac{d}{dx}U(x) = -F(x) \qquad \forall\ x$$

τοτε η U είναι <u>Δυναμική Ενέργεια</u>

ή δυναμικό της F.

Αν η συνολική δύναμη που ασκείται στο ΥΣ είναι διατηρητική τότε η Μηχανική Ενέργεια διατηρείται κατά την κίνηση τ. ΥΣ.

Δηλ.

Κινητική Ενέργεια

$$K(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t).$$

Δυναμική Ενέργεια

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' \qquad (1)$$

$$= -\int^{x} F(z)\,dz$$

$\Big)_{x_0}$

Μηχανική Ενέργεια

$$K+U$$

Σε οποιαδ. κίνηση.

$$K(t)+U(x(t)) = \text{σταθ.} \quad \forall t$$

Αρχή Διατήρησης Μηχ. Ενέργειας

δηλ.

$$\frac{1}{2} m v^2(t) + U(x(t)) = \text{σταθ.} \quad (2)$$

ανεξ. της t.

Σχόλιο: Η Δυν. Ενερ. δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη:

Αν $U_1(x)$ είναι Δυν. Ενέργεια για τη δύναμη $F = F(x)$ τότε και οποιαδήποτε $U_2(x)$ τ.ω.

$$U_2(x) = U_1(x) + \text{σταθ.}$$

ό,τι γουστάρω

είναι επίσης Δυν. Ενέργεια επειδή

$$\frac{d}{dx} U_2(x) = \frac{d}{dx} U_1(x) \quad \forall x$$

$$= -F(x).$$

Η σταθερά στην (2) μπορεί να βρεθεί από αρχικές συνθήκες.

$$x(t_0) = x_0, \quad v(t_0) = v_0$$

όπου t_0, x_0, v_0 δεδομένες σταθερές

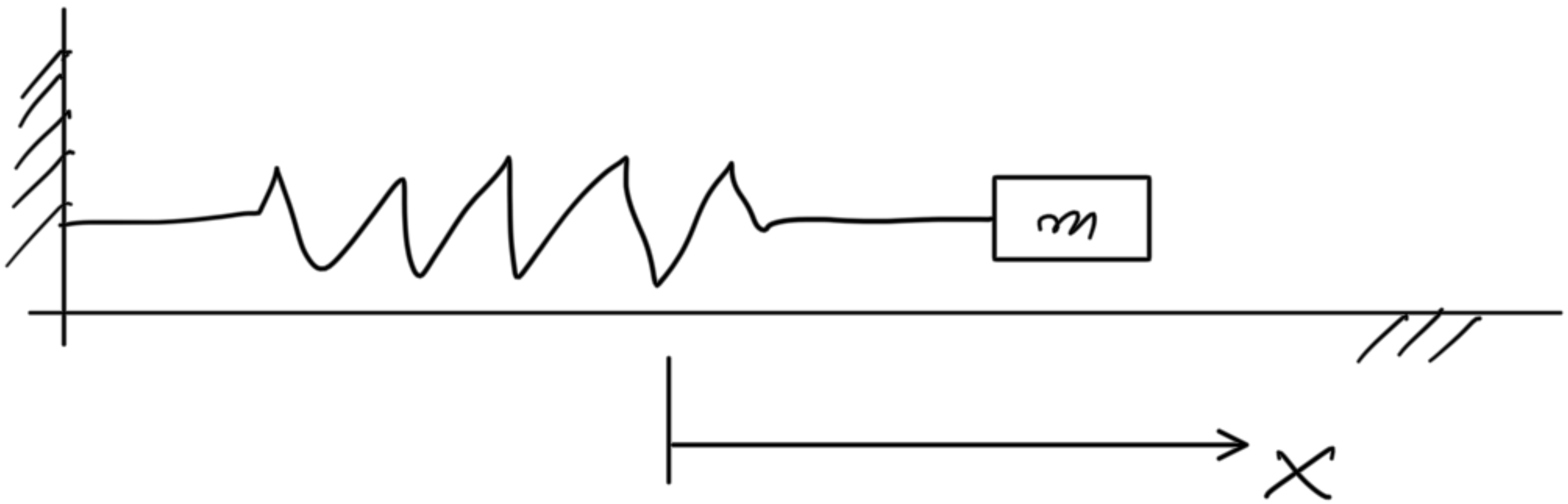
$$\frac{1}{2} m v^2(t) + U(x(t)) = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2(t_0) + U(x(t_0))}_{E_0 \,=\, \text{σταθ.}}$$

άρα έχω

$$\boxed{\frac{1}{2} m v^2(t) + U(x(t)) = E_0 \quad \forall t \ge t_0} \qquad (3)$$

Ερώτηση: Τι ρόλο παίζει η σταθερά;

Παράδειγμα Ταλαντωτής



x μετατόπιση της μάζας από τη θέση στο ελατήριο χαλαρό $(x=0)$.

Δύναμη ελατηρίου $F(x) = -kx$

Δυν. Ενέργεια $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \cancel{\text{σταθ.}}$

0

διαλέγω

σταθ. $= 0$

Δυν. Ενέργεια

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

(μετράω x από εκεί που ελατήριο χαλαρό).

$x = 0$: σημείο ισορροπίας.

διότι $F(0) = 0$.

Ερωτήσεις Ο ταλαντωτής θα πηγαίνει πέρα-δώθε δηλ. θα κάνει ταλάντωση:

1) Πόσο μακριά θα φτάσει από τη

θέση ισορροπίας. Πόσο είναι το

X_{max} = μέγιστη τιμή το $|x|$

2) Πόσο γρήγορα θα τρέξει; Πόσο θα είναι μέγιστη ταχύτητα

v_{max};

<u>Απάντηση:</u> Ένας τρόπος είναι να λύσουμε τελείως το 2ο Νόμο και να βρούμε $x(t)$ $\forall t$

ΟΜΩΣ $\exists$ εύκολος τρόπος από διατήρηση ενέργειας!

$$x = \pm X_{max} \Rightarrow U(X_{max}) = U_{max}$$

διότι $U(x) = kx^2/2$.

Η Διατήρηση (3) μου λέει ότι

$$x = x_{max} = U = U_{max} \Rightarrow K = K_{min}$$

κινητική

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV_{min}^2 = 0!$$

διότι $V_{min} = 0$.

$$\Rightarrow U_{max} = U(x_{max}) = E_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}k x_{max}^2 = E_0 = \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}_{\text{αρχ. συνθήκες}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{max} = \sqrt{2E_0/k} = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}}$$

Μέγιστη Ταχ.

$$V = V_{max} \Rightarrow U = U_{min} = \frac{1}{2} k x_{min}^2$$

$$= \frac{1}{2} k 0^2 = 0$$

$$x_{min}^2 = 0.$$

$$0 \le U \le E_0$$

$$U_{min} \qquad U_{max}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{2} m V_{max}^2 = E_0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{max} = \sqrt{2E_0/m} = \sqrt{V_0^2 + \frac{k}{m} x_0^2}}$$

<u>Θεώρημα</u> Κατα την κίνηση ΥΣ που διατηρεί ενέργεια

α') Η <u>Δυν. Ενέρ.</u> <u>είναι άνωθεν φραγμένη.</u> συγκεκρ. στην (3)

$$U(x(t)) \le E_0 \quad \forall\, t \ge t_0$$

β') Σε χρον. στιγμές t_* τ.ω.

$$U(x(t_*)) = E_0 \Rightarrow v(t_*) = 0$$

γ') Αν $\exists$ τιμή $x = x_*$ τ.ω.

$$U(x_*) \le U(x) \quad \forall\ x$$
$$\shortparallel$$
$$U(x_{min}).$$

τοτε αν $x(\hat{t}) = x_{min} \Rightarrow v(\hat{t}) = V_{max}$.

οπου $V_{max} = \max\limits_{t \ge t_0} |v(t)|$

Αποδ.

α') (3) $\Rightarrow$ $U(x) = E_0 - \frac{1}{2} m v^2 \le E_0$

διοτι $\frac{1}{2} m v^2 \ge 0$. ανω φράγμα.

β') Επίσης (3) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_0 - U(x) \Rightarrow$$

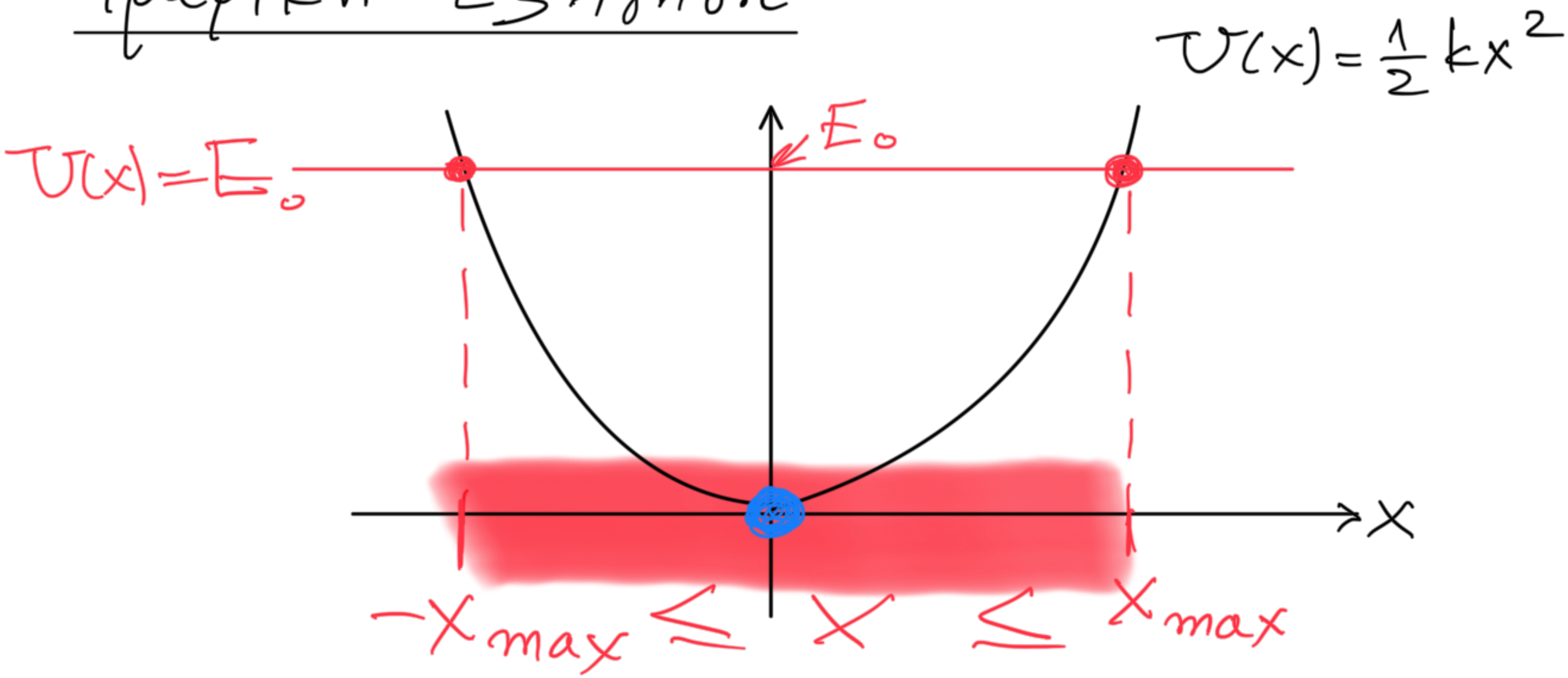
$\Rightarrow$ αν $U(x) = E_0$ τοτε $\frac{1}{2} m v^2 = 0$

$\Rightarrow v=0,$

γ') $\frac{1}{2} m v^2 = E_0 - U(x) \geq E_0 - U_{min}.$

κτλ.

Γραφική Εξήγηση



Επιτρέπονται μόνο τιμές της x

Τ.ω. $U(x) \le E_0$ δηλ.

$$-x_{max} \le x \le x_{max}$$

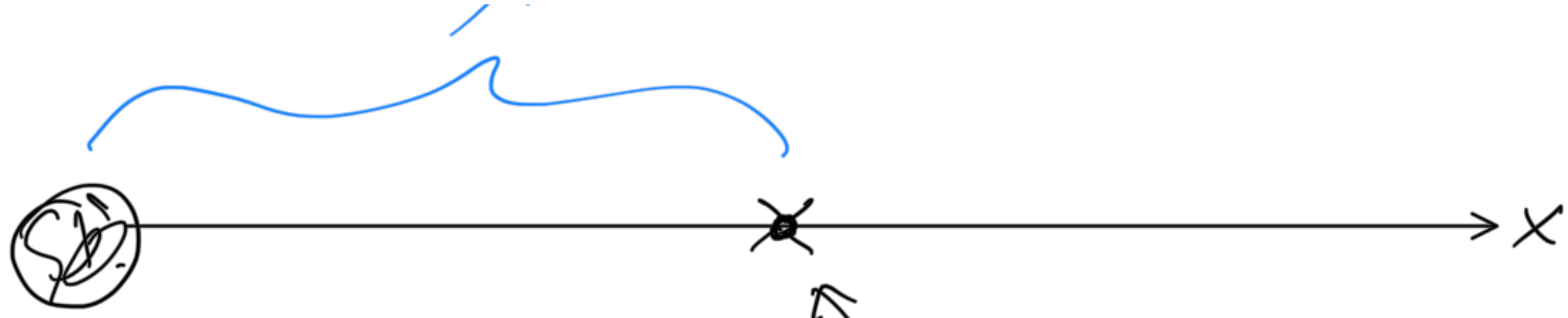
Όταν $x = \pm x_{max}$ τότε $v = 0$

Όταν $x = 0$ δηλ. $U = U_{min}$
τότε $v = v_{max}$.

Μπορεί η Δυν. Ενεργ. να είναι πιο πολύπλοκη.

<u>Παγκόσμια Έλξη.</u>

x

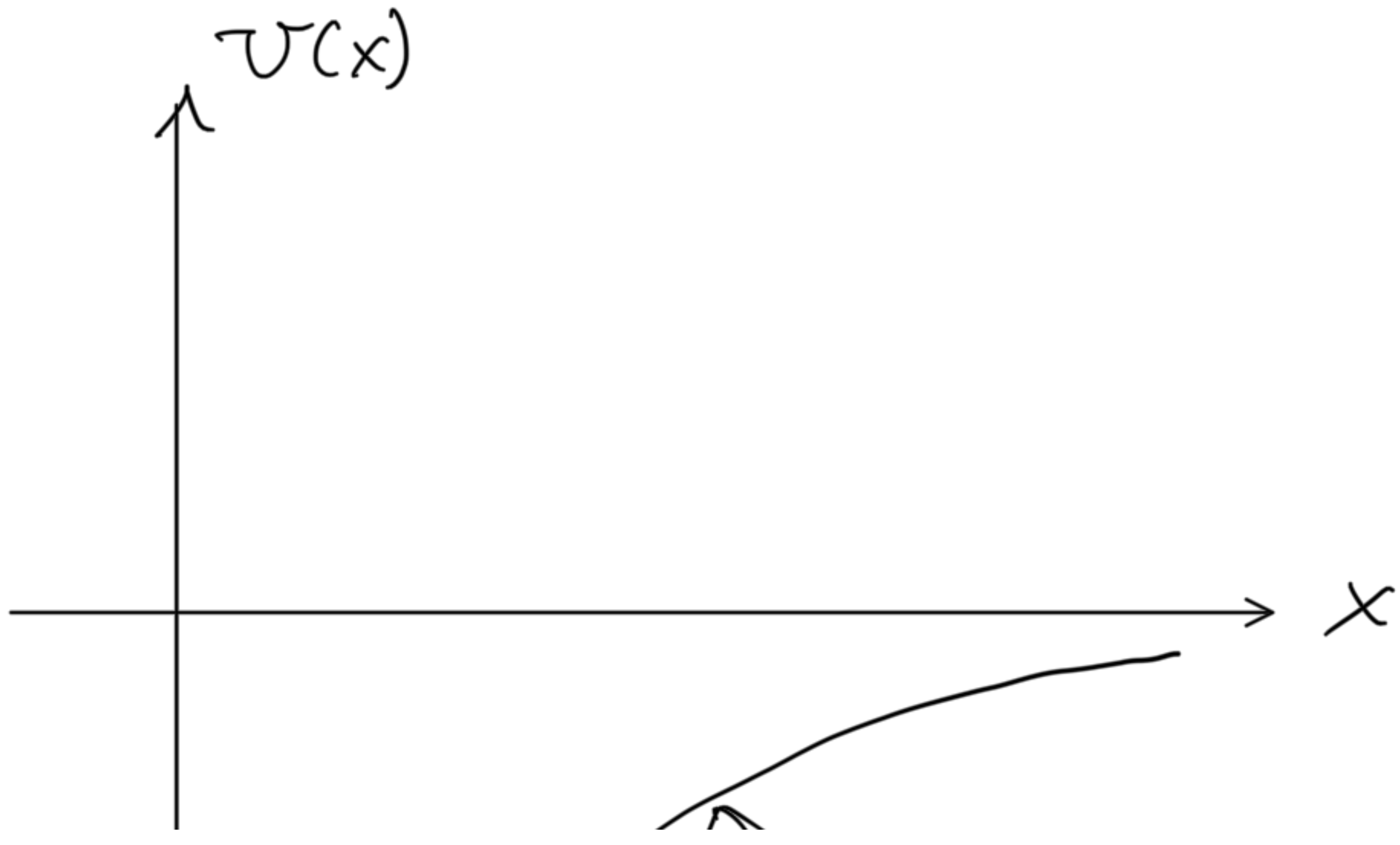


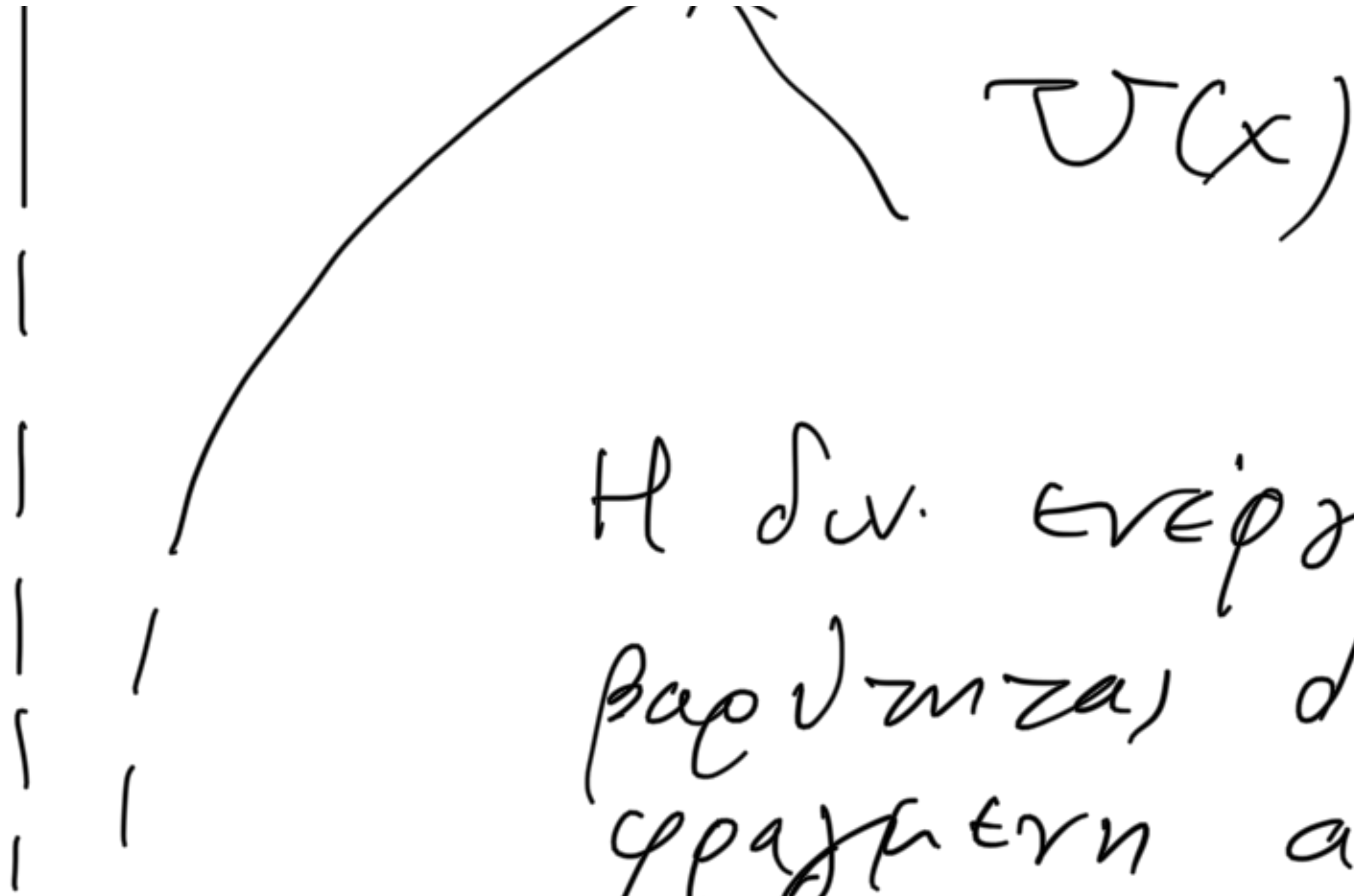
Πλανήτης
M = μάζα

δορυφόρος
μάζα m

$$U(x) = -K/x$$

$$K = \text{σταθ.} > 0$$
$$\parallel$$
$$GMm$$

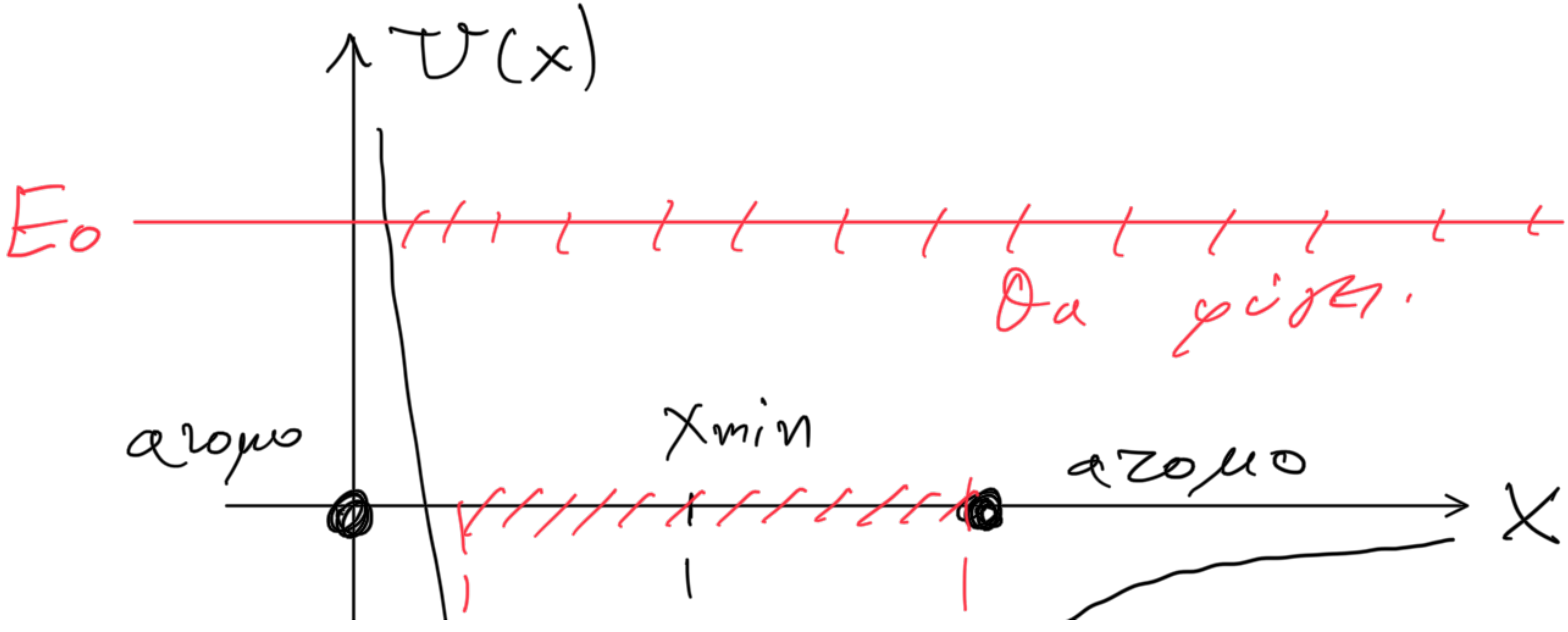


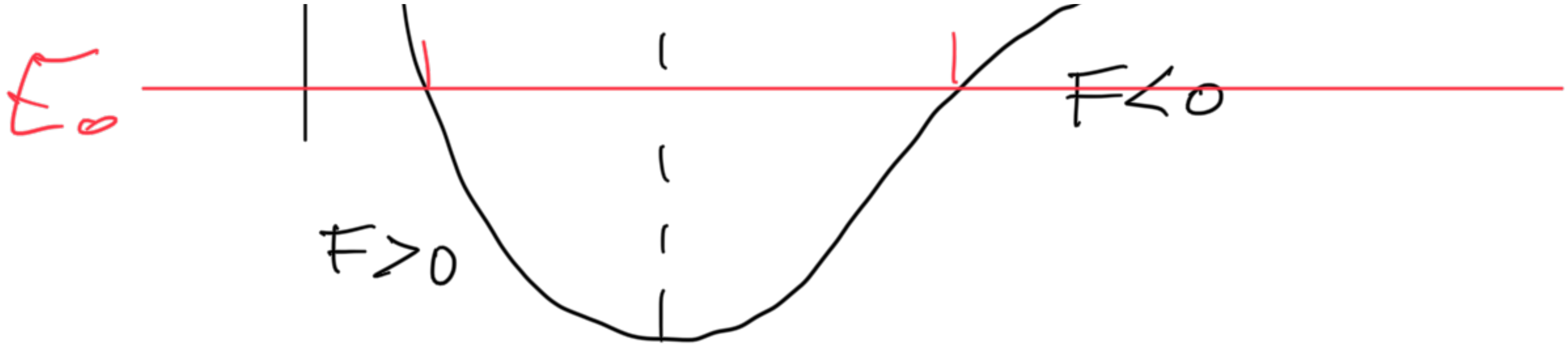


Η δυν. ενέργεια της βαρύτητας δεν είναι φραγμένη από κάτω.

$U(x) \to -\infty$ καθώς $x \to 0$

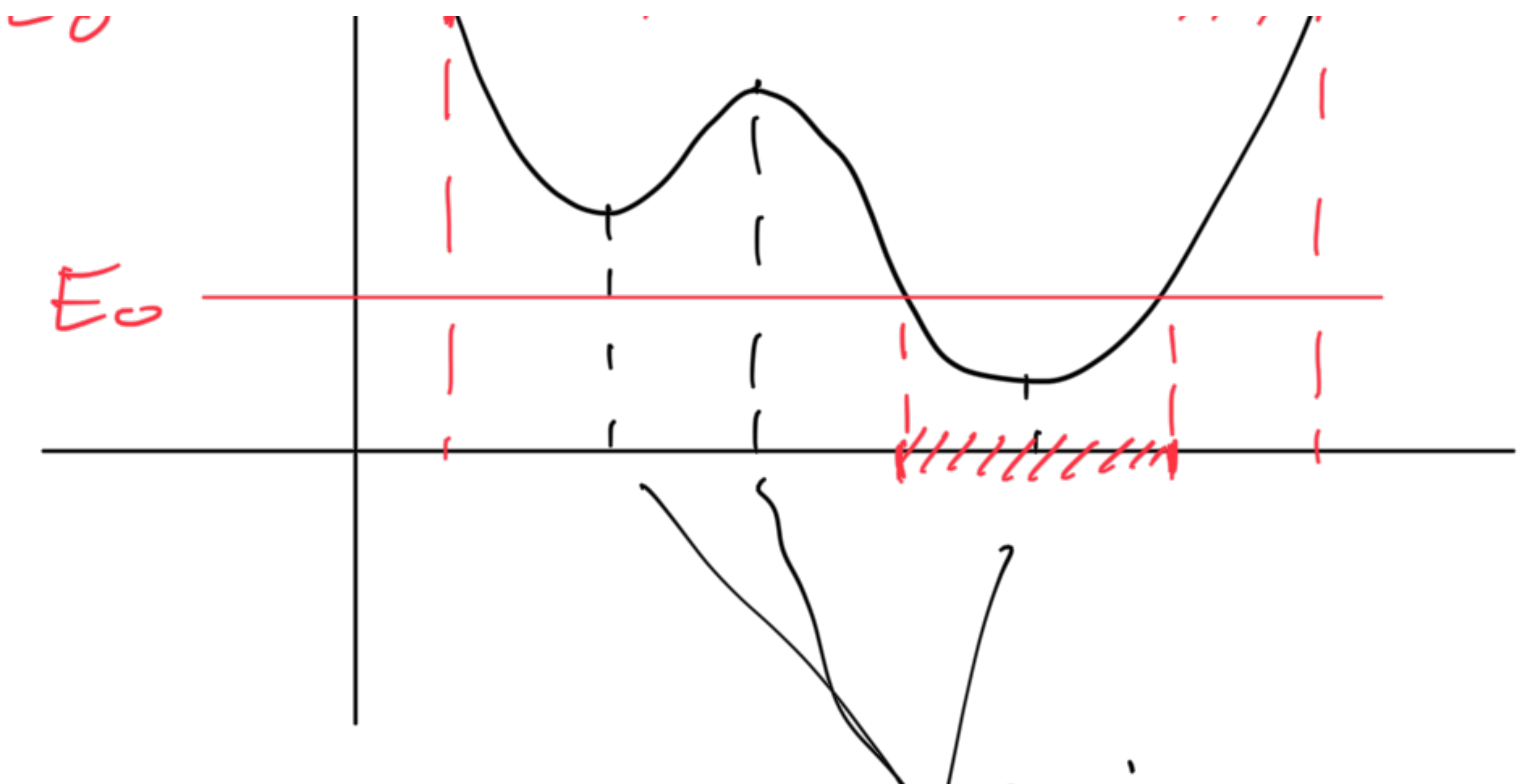
Δυνάμεις Μεταξ. Ατόμων.





Για αρκετά μικρό E_0 το άτομο θα μείνει κοντά στο «αδερφάκι» του. Για E_0 μεγαλύτερο τότε τα αποδεκτά x δεν είναι φραγμένα και μπορεί να φύγει ($x \to \infty$).

Αν Κιν. Ενερ. του ατόμου (Θερμοκρασία) αρκετά μεγάλη τότε φεύγει (υγρό γίνεται αέριο).



$$\frac{dU}{dx} = 0$$

Θέσεις ισορροπίας $F = 0$

<u>Ερώτηση</u>: Στο λύκειο μας είπαν για τον ταλαντωτή ότι κάνει απλή αρμονική κίνηση με συχνότητα

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

ΓΙΑΤΙ;

Από το 2^o Νόμο

$1^{ος}$ τρόπος

$-kx$

Διάγραμμα Δυνάμεων Σώματος

$2^{ος}$ Νόμος $\Rightarrow$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = V \end{gathered}}$$

Τερσένοβ

$$x(0) = v_0$$

Διαφορική Εξίσωση 2ης Τάξης
Ξέρω μόνο 1ης Τάξης.

2ος Τρόπος χρησιμοποιεί
Διατήρηση Ενέργειας