ΦΥΣΙΚΗ 1

διάλεξη 14

Αν ένα πεδίο δύναμης $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r})$ είναι διατηρητικό, με δυναμική ενέργεια $U(\underset{\sim}{r})$, πως σχετίζονται η $\underset{\sim}{F}$ με τη U;

<u>Λήμμα</u> α') Αν $\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}=0$ για κάποια $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}\in\mathbb{R}^3$ τότε δεν συνεπάγεται ότι $\underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{0}$ ή $\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{0}$

β') Έστω $\underset{\sim}{a}\in\mathbb{R}^3$. Αν

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}=0 \quad \forall\, \underset{\sim}{b}\in\mathbb{R}^3$$

τότε $\underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{0}$

<u>Αποδ.</u> α') Αν $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ είναι κάθετα και $\underset{\sim}{a}\neq\underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{b}\neq\underset{\sim}{0}$ τότε

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}=0.$$

χωρίς να είναι ένα τους $\underset{\sim}{0}$.

β'). Έστω ότι $\underset{\sim}{a}\neq\underset{\sim}{0}$. Τότε διαλέγω $\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{a}$ $\Rightarrow$

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{a}=0$$

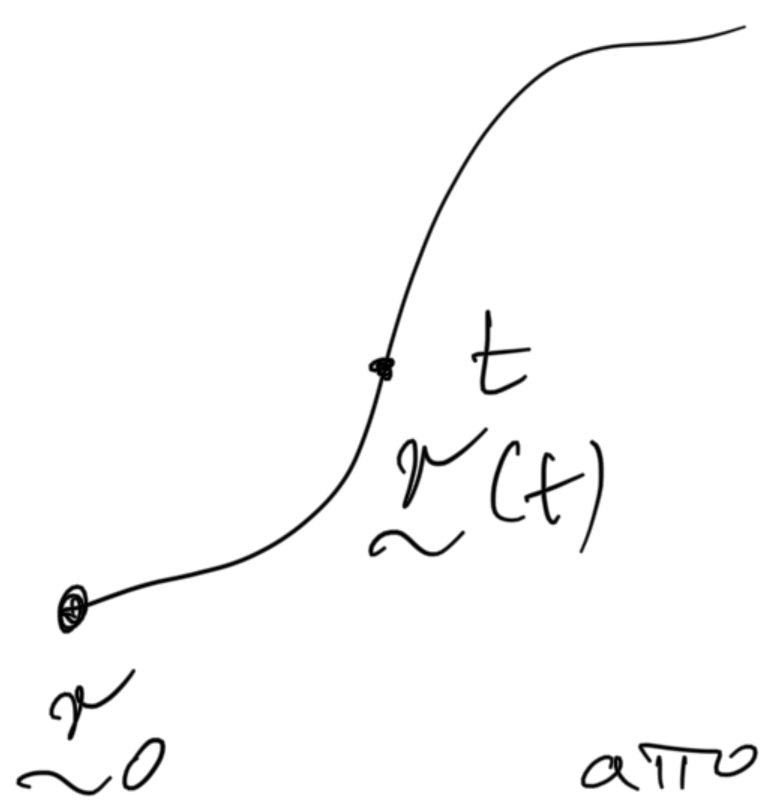
Αλλά $\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{a}=|\underset{\sim}{a}|^2>0$ διότι

έχω υπόθεση $\underset{\sim}{a}\neq 0$. $\Rightarrow$

$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{a}>0$ ΑΤΟΠΟ

Άρα $\underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{0}$. ΟΕΔ.

Έστω ότι $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r})$ διατηρητική:



$$-\int_{\underset{\sim}{r}_0}^{\underset{\sim}{r}(t)} \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r})\cdot d\underset{\sim}{r} =$$

$$= U(\underset{\sim}{r}(t)) - U(\underset{\sim}{r}_0)$$

από διάλεξη 13.

$\forall\ t \geq t_0$

Θα παραγωγίσω ως προς t.

Γράφω (αλλαγή μεταβλητής από $\underset{\sim}{r}$ σε t)

$$-\int_{\underset{\sim}{r}_0}^{\underset{\sim}{r}(t)} \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r}(t))\cdot \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}\, dt =$$

$$\int^{t}$$

$$-\int_{t_0} \underline{F}(\underline{r}(t'))\cdot \underline{v}(t')\,dt' =$$

$$= U(\underline{r}(t)) - U(\underline{r}_0)$$

παραγωγίζω ως προς t.

$$-\underline{F}(\underline{r}(t))\cdot \underline{v}(t) = \frac{d}{dt} U(\underline{r}(t)) \quad (1)$$

Προσοχή: είναι σύνθετη συνάρτηση του t αλλά το $\underline{r}(t)$ είναι διάνυσμα. Τι αλυσίδα ταιριάζει εδώ;

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

$$U(\underline{r}(t)) = U(x(t), y(t), z(t))$$

άρα $\frac{d}{dt} U(\underline{r}(t)) =$

$$= \frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t)) =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Όμως αν $\underline{v}(t) = v_x(t)\underline{i} + v_y(t)\underline{j} + v_z(t)\underline{k}$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} v_x + \frac{\partial U}{\partial y} v_y + \frac{\partial U}{\partial z} v_z \quad (2)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\ {}_x + \frac{\partial}{\partial y}\ {}_y + \frac{\partial}{\partial z}\ {}_z \qquad (2)$$

<u>Ορισμός</u> Η βαθμίδα, παράγωγος, grad, ανάδελτα κλπ του βαθμωτού πεδίου $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι το διάνυσμα

$$\nabla U(\underset{\sim}{r}) =$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z)\underset{\sim}{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z)\underset{\sim}{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z)\underset{\sim}{k}$$

Άρα η (2) λέει ότι:

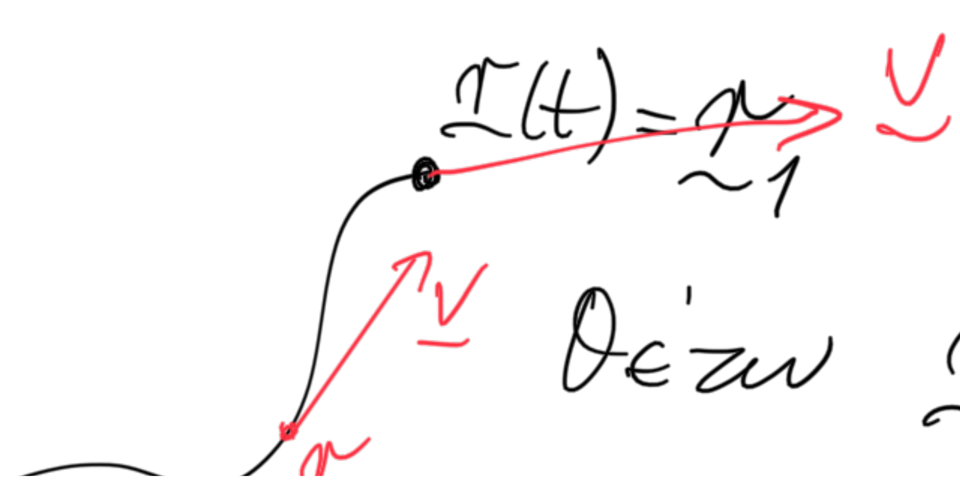
$$\frac{d}{dt} U(\underset{\sim}{r}(t)) = \nabla U(\underset{\sim}{r}(t)) \cdot \underset{\sim}{V}(t)$$

Όμως έχω (1) = (2) και.

$$-\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r}(t)) \cdot \underset{\sim}{V}(t) = \nabla U(\underset{\sim}{r}(t)) \cdot \underset{\sim}{V}(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\nabla U(\underset{\sim}{r}(t)) + \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r}(t))\right]}_{\underset{\sim}{a}} \cdot \underbrace{\underset{\sim}{V}(t)}_{\underset{\sim}{b}} = 0$$

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = 0$$



Θέτω $\underset{\sim}{r}_1 = \underset{\sim}{r}(t)$

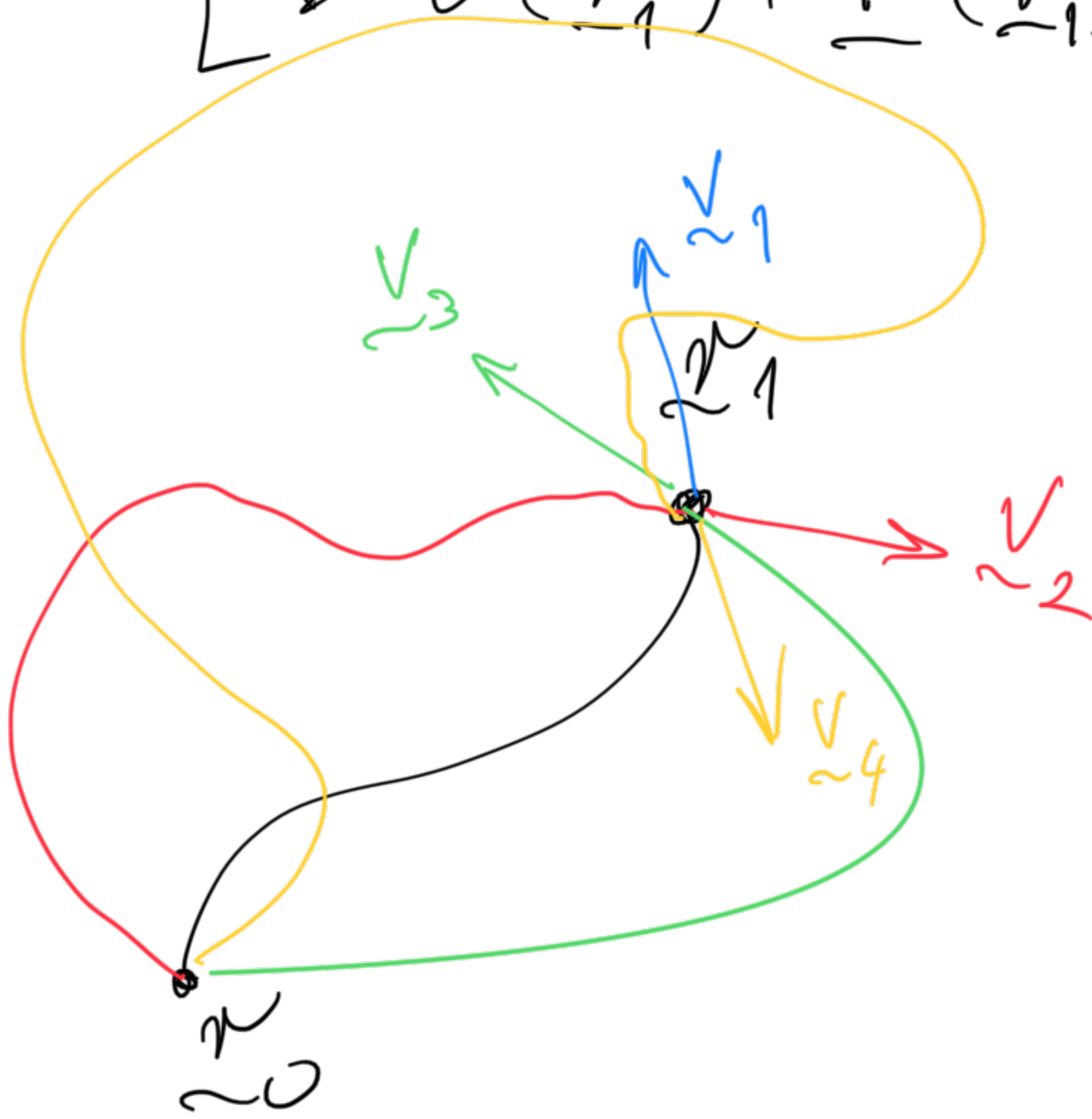
για συγκεκρ. c.

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_1$$

$$\left[\nabla U(\mathbf{r}_1) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_1)\right] \cdot \mathbf{V}_1 = 0$$

$$\cdot \mathbf{V}_2 = 0$$

$$\cdot \mathbf{V}_3 = 0$$



Επειδή όμως αυτό ισχύει $\forall$ τροχιές (μονοπάτια) που αρχίζουν στο $\mathbf{r}_0$ και τελειώνουν στο $\mathbf{r}_1$ και μπορώ να βρω τέτοια τροχιά όπου το $\mathbf{V}(t)$ στο $\mathbf{r}_1$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα $\in \mathbb{R}^3$ γουστάρω θα έχω

$$\left[\nabla U(\mathbf{r}_1) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_1)\right] \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\forall\ \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$$

Άρα το Λήμμα μέρος Β.

με $\mathbf{a} = [\nabla U(\mathbf{r}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{r}_1)]$

και $\mathbf{b} = \mathbf{V}$ μου λέει ότι.

$$\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1) = -\nabla U(\mathbf{r}_1)$$

αλλά $\mathbf{r}_1$ τυχαίο. $\forall\, \mathbf{r}_1$.

ξαναγράφω $\mathbf{r}$ για $\mathbf{r}_1$

Μόλις αποδείξαμε το εξής.

Θεώρημα. Η $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ είναι διατηρητική αν και μόνο αν $\exists\; U = U(\mathbf{r})$.

τ.ω.

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})}$$

$\forall\, \mathbf{r} \in$ πεδίο ορισμού της $\mathbf{F}$.

Παράδειγμα

$$U(\mathbf{r}) = \frac{k}{2}|\mathbf{r}|^2 \qquad k = \text{σταθ.} > 0 \quad (3)$$

Να βρεθεί η $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

Θέλω το $\nabla U(\mathbf{r})$. Θέλω το

$\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$. Πρέπει να γράψω το V σαν

$$V(x, y, z). \qquad (4)$$

$$|\underset{\sim}{r}|^2 = \underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{r} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$V(x, y, z) = \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Οι δύο μορφές $V(\underset{\sim}{r})$ στην (3) και $V(x,y,z)$ στην (4) είναι οι ίδιες, κάνοντας την αντικατάσταση

$$\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + z\underset{\sim}{k}.$$

οπότε

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = ky$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = kz$$

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r}) = -\nabla V(\underset{\sim}{r}) =$$

$$= -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\underset{\sim}{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\underset{\sim}{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\underset{\sim}{k}\right] =$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\underset{\sim}{i}+\frac{\partial}{\partial y}\underset{\sim}{j}+\frac{\partial}{\partial z}\underset{\sim}{k}\right] =$$

$$= -\left[kx\underset{\sim}{i}+ky\underset{\sim}{j}+kz\underset{\sim}{k}\right] =$$

$$= -k(x\underset{\sim}{i}+y\underset{\sim}{j}+z\underset{\sim}{k}) = -k\underset{\sim}{r}$$

$$V(\underset{\sim}{r}) = \frac{1}{2}k|\underset{\sim}{r}|^2 \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r}) = -k\underset{\sim}{r}.$$

Κεντρικές Δυνάμεις.

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r}) = f(|\underset{\sim}{r}|)\,\underset{\sim}{e}_r$$

αν ξαναγράψω

$$r = |\underset{\sim}{r}|$$

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r}) = f(r)\,\underset{\sim}{e}_r$$

όπου $\underset{\sim}{e}_r = \frac{1}{|\underset{\sim}{r}|}\underset{\sim}{r}$

Υπολογίζω το δυναμικό

$$\int^{\underset{\sim}{r}} \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r})\cdot d\underset{\sim}{r} = \int^{\underset{\sim}{r}} f(r)\,\underbrace{\underset{\sim}{e}_r\cdot d\underset{\sim}{r}}_{dr}$$

$$\int_{\underset{\sim}{r}_0} \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r})\cdot d\underset{\sim}{r} = \int_{\underset{\sim}{r}_0} f(r)\,dr$$

Σε 2Δ

$$\underset{\sim}{r} = r\,\underset{\sim}{e}_r \Rightarrow d\underset{\sim}{r} = dr\,\underset{\sim}{e}_r + r\,d\underset{\sim}{e}_r$$

αλλαγή απόστασης

αλλαγή κατεύθυν.

$$d\underset{\sim}{e}_r =$$

$$\frac{d\underset{\sim}{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\underset{\sim}{e}_\theta = \frac{d\theta}{dt}\,\underset{\sim}{e}_\theta$$

$$\Rightarrow d\underset{\sim}{e}_r = d\theta\,\underset{\sim}{e}_\theta.$$

οπότε έχω

$$d\underset{\sim}{r} = dr\,\underset{\sim}{e}_r + r\,d\theta\,\underset{\sim}{e}_\theta.$$

άρα $\underset{\sim}{e}_r\cdot d\underset{\sim}{r} = dr\,\overbrace{\underset{\sim}{e}_r\cdot\underset{\sim}{e}_r}^{1} +$

$$+\, r\,d\theta\,dr\,\underbrace{\underset{\sim}{e}_r\cdot\underset{\sim}{e}_\theta}_{0}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{e}_r\cdot d\underset{\sim}{r} = dr$$

$$\Rightarrow \int^{\underset{\sim}{r}} \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r})\cdot d\underset{\sim}{r} = \int^{r} f(r)\,dr$$

$$\int_{\underline{r}_0} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \int_{r_0} \ldots$$

Αν γράψω

$$V(r) = -\int f(r)\, dr$$

θα έχω

$$\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{F}(\underline{r}) \cdot \underline{r} = -\left[V(r) - V(r_0) \right]$$

$$|\underline{r}| \qquad |\underline{r}_0|$$

οποτε

Θμ. Για κεντρικες δυνάμεις η δυν. ενέργεια είναι:

$$V(|\underline{r}|) = V(r)$$

και $\underline{F}(\underline{r}) = -V'(r)\, \underline{e}_r$

όπου $r = |\underline{r}|$.

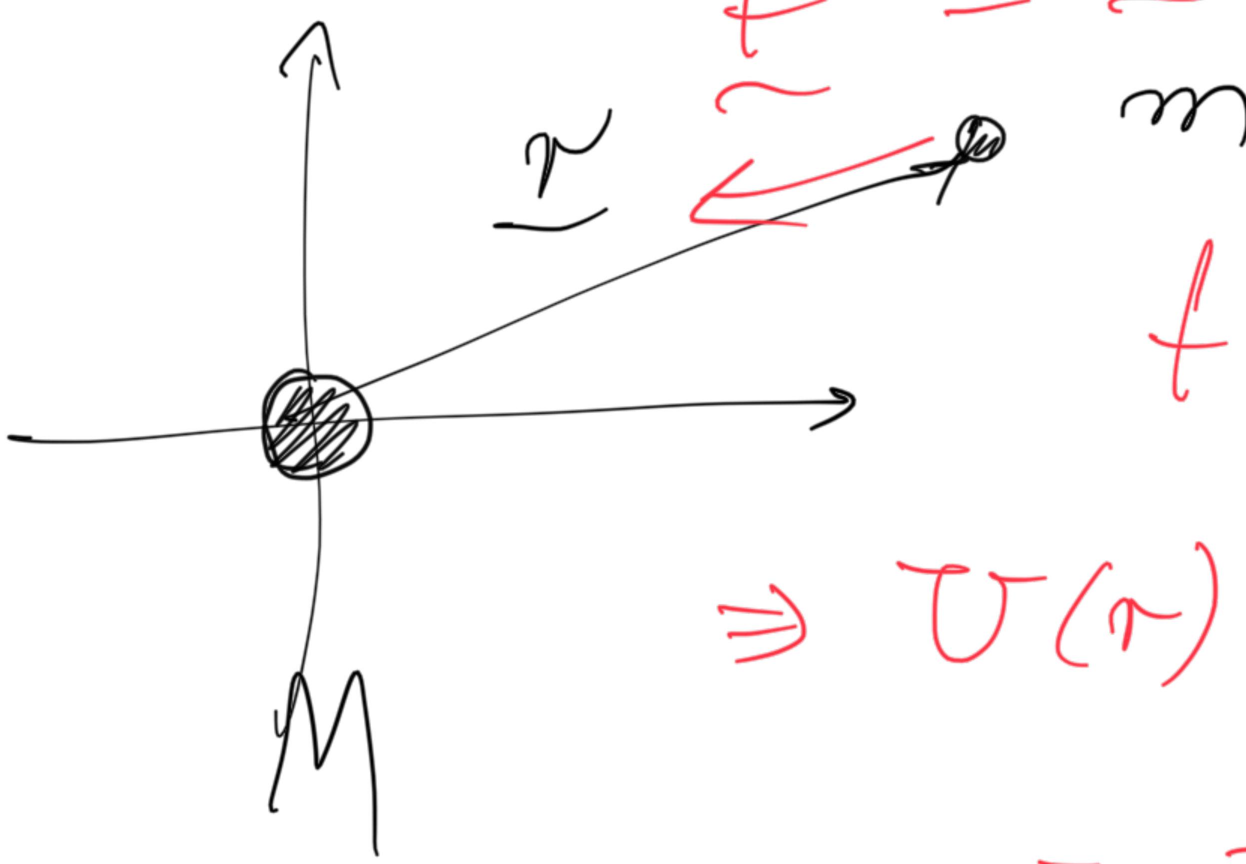
<u>Παραδείγματα</u>

1) Βαρύτητα

2) Ηλεκτροστατικές Δυνάμεις.

α) <u>Βαρύτητα</u>

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\,\underline{e}_r$$



$$f(r) = -\frac{GMm}{r^2}.$$

$$\Rightarrow U(r) = -\int f(r)\,dr$$

$$= -\frac{GMm}{r} + \text{σταθ.}$$

$$\left.\begin{array}{l} U(r) \to -\infty \\ |\underline{F}(r)| \to \infty \end{array}\right\} \text{καθώς } r \to 0.$$

β) <u>Ηλεκτροστατ. δύναμη</u> ίδια εκτός από τη σταθερά

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\frac{Kq_1 q_2}{r^2}\,\underline{e}_r$$

K, q_1, q_2 φορτία. (σταθ.)

στάθι