ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΑΛΕΞΗ 2

Βαθμίδα, Απόκλιση

Σχόλιο. Παράγωγος κατά κατεύθυνση $\underset{\sim}{e}$ (όπ. $|\underset{\sim}{e}|=1$, $\underset{\sim}{e}$ δεδομένο μοναδιαίο διάν.) τ. πεδίου $\psi : \mathcal{R} \to \mathcal{V}$ στο $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{R}$ είναι

$$D_{\underset{\sim}{e}} \psi(\underset{\sim}{x}) = \frac{d}{dt} \psi(\underset{\sim}{x} + t\underset{\sim}{e}) \Big|_{t=0}$$

όπ. πρώτα υπολογίζουμε την παράγωγο ως προς t και κατόπιν θέτουμε $t=0$.

Θμ. Αν $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, $\underset{\sim}{v} : \mathcal{R} \to \mathcal{E}$ είναι $C^1(\mathcal{R})$ τότε οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\underset{\sim}{x}) = D_{\underset{\sim}{e}_i} \varphi(\underset{\sim}{x})$$

$$\frac{\partial v_i(\underset{\sim}{x})}{\partial x_j} = D_{\underset{\sim}{e}_j} [\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{e}_i]$$

Συμβολισμός Μερικών Παραγώγων

Γράφουμε

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \varphi_{,ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad T_{ij,k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$$

και γενικότερα

$$\varphi_{,\underbrace{ij\ldots k}_{N \text{ δείκτες}}} = \frac{\partial^N \varphi}{\partial x_i \partial x_j \ldots \partial x_k}$$

Σχόλιο. Ισχύει η σύμβαση προσθέσεως, π.χ.

$$v_{i,i} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3}$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Σχόλιο $\nabla \varphi = \varphi_{,i} \underset{\sim}{e}_i$, $\nabla \underset{\sim}{v} = v_{i,j} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$

Απόκλιση Διανυσματικού Πεδίου

Αν $\underset{\sim}{v} : R \to \mathcal{E}$, $\underset{\sim}{v} \in C^1(R)$

η απόκλιση (divergence)

της $\underset{\sim}{v}$ στο $\underset{\sim}{x} \in R$ είναι το

βαθμωτό

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x}) = \nabla \cdot \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x}) =$$

$$= \operatorname{tr}[\nabla \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})].$$

Προσοχή στην τελεία.

Άλλο $\nabla \cdot \underset{\sim}{v}$ με τελεία

και άλλο $\nabla \varphi$ χωρίς τελεία

Λήμμα Με συνιστώσες

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{v} = v_{i,i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Απόκλιση ΤΑΝ πεδίου

Έστω $\underset{\sim}{T} : \mathcal{R} \to Lin$ τανυστικό πεδίο με $\underset{\sim}{T} \in C^1(\mathcal{R})$.

Η απόκλιση του $\underset{\sim}{T}$ στο $\underset{\sim}{x}$ είναι το διάνυσμα που γράφεται

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}) = \nabla \cdot \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x})$$

τέτοιο ώστε

$$\left(\operatorname{div} \underset{\sim}{T}\right) \cdot \underset{\sim}{d} = \operatorname{div}\left(\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{d}\right) \qquad (1)$$

$$\forall\, \underset{\sim}{d} = \text{σταθ.} \in \mathcal{E}.$$

Σχόλια Η αριστ. μεριά είναι εσωτερικό γινόμενο.
Το $\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{d}$ είναι διαν. πεδίο οπότε ορίζεται η απόκλισή του.
Η τιμή του $\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{d}$ στο $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{R}$ είναι $\underset{\sim}{T}^T(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{d}$. Το $\underset{\sim}{d}$ = σταθ. σημαίνει $\underset{\sim}{d}$ ανεξάρτητο του $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{R}$.

<u>Θμ</u>. $\operatorname{div} \underset{\sim}{T} = T_{ij,j}\, \underset{\sim}{e}_i$

δηλ. $[\operatorname{div} \underset{\sim}{T}]_i = T_{ij,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}$

<u>Αποδ.</u> Με συνιστώσες,

$(\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{d})_i = T_{ji}\, d_j \Rightarrow$

$\operatorname{div}(\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{d}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(T_{ji} d_j)$

$= \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_i} d_j$ εφόσον $d_j =$ σταθ.

$= T_{ji,i}\, d_j = \operatorname{div}(\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{d})$ (2)

Εστω $\underset{\sim}{v} = \operatorname{div} \underset{\sim}{T}$. Τοτε στη (2)

$(\operatorname{div} \underset{\sim}{T}) \cdot \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{d} = v_j d_j$ (3)

Τώρα (2), (3) $\Rightarrow$

$(\operatorname{div} \underset{\sim}{T}) \cdot \underset{\sim}{d} - \operatorname{div}(\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{d}) = v_j d_j - T_{ji,i} d_j$

$= (v_j - T_{ji,i})\, d_j \quad \forall\, \underset{\sim}{d} =$ σταθ.

6

Άρα (1) $\Rightarrow$

$$(v_j - T_{ji,i})\,d_j = 0 \quad \forall\, \underset{\sim}{d} \qquad (4)$$

Από παλιότερο λήμμα, αν

$$g_j = v_j - T_{ji,i} \quad \text{τότε}$$

$$g_j d_j = \underset{\sim}{g}\cdot\underset{\sim}{d} = 0 \quad \forall\, \underset{\sim}{d}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{g} = 0.$$

οπότε (4) $\Leftrightarrow$

$v_j - T_{ji,i} = 0$ ή με αλλαγή δεικτών (4) $\Leftrightarrow$

$$v_i = T_{ij,j}$$

Όμως $\underset{\sim}{v} = \operatorname{div} \underset{\sim}{T}$ και (1) $\Leftrightarrow$ (4)

οπότε $(\operatorname{div} \underset{\sim}{T})_i = T_{ij,j} = \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$

οεδ

<u>Ασκήσεις</u> 1) Αποδείξτε το Λήμμα στη σελ. 3. αυτής της διάλεξης.

2) Χρησιμοποιείστε συνιστώσες για να βρείτε div $\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$ και div $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x})$ όπου

α') $\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x}$

β') $\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x}) = |\underset{\sim}{x}|^2 \underset{\sim}{x}$

γ') $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{d}$

δ') $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x}$

$\forall \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}$.