Γενικές (Ανομοιογενείς) Παραμορφώσεις

Έστω $\mathbf{f} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}_*$ γενική παραμόρφωση, δηλ. $\mathbf{f} \in C^2(\mathcal{R})$, $\mathbf{f}$ ολικά αντιστρέψιμη, $\det \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) > 0$ $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{R}$. Η __βαθμίδα__ __παραμόρφωσης__

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{R}$$

__δεν__ είναι γενικά σταθερή και αποτελεί ένα τανυστικό πεδίο $\mathbf{F} : \mathcal{R} \to \mathrm{Lin}_+$.

Χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor γύρω από $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$ έχουμε, για $\mathbf{z} \in \mathcal{R}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})(\mathbf{z} - \mathbf{x}) + o(|\mathbf{z} - \mathbf{x}|)$$

καθώς $|\mathbf{z} - \mathbf{x}| \to 0$

__Σημ.__ Αν η παραμόρφωση ήταν ομοιογενής με $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} =$ σταθ, τότε

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}[\mathbf{z} - \mathbf{x}]$$

Scanned with CamScanner

Δηλαδή οποιαδήποτε (γενική) παραμόρφωση είναι τοπικά προσεγγιστικά ομοιογενής, δηλαδή στη γειτονιά τυχαίου σημείου $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{R}$ η $\underset{\sim}{f}$ συμπεριφέρεται προσεγγιστικά σαν ομοιογενής με βαθμίδα την τοπική $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$. Με άλλα λόγια σε μια απειροστική περιοχή η $\underset{\sim}{f}$ είναι σαν ομογενής.

Τοπικές Έννοιες Έκτασης και Διάτμησης

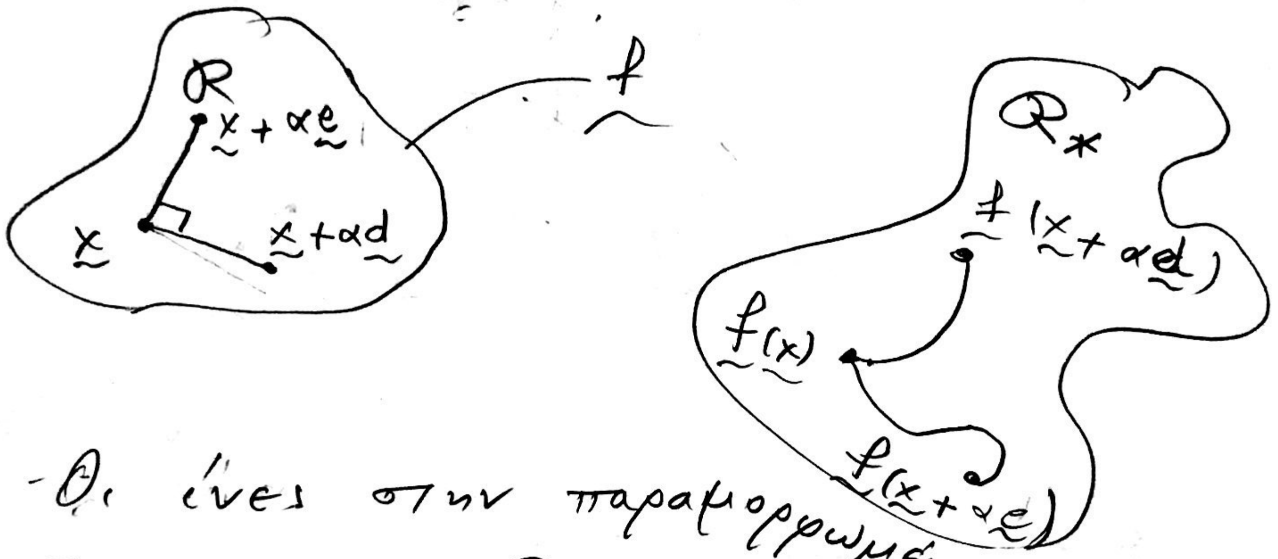
Ορίζουμε τα τανυστικά πεδία στροφής $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{x})$, έκτασης $\underset{\sim}{U}(\underset{\sim}{x})$, Cauchy-Green $\underset{\sim}{C}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{F}^T(\underset{\sim}{x})\,\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{U}^2(\underset{\sim}{x})$ $\forall\ \underset{\sim}{x} \in \mathcal{R}$.

Π.χ. με συνιστώσες έχουμε

$$F_{ij}(\underset{\sim}{x}) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$$

$$C_{ij}(\underset{\sim}{x}) = F_{ki}(\underset{\sim}{x})\,F_{kj}(\underset{\sim}{x}) = \frac{\partial f_k(\underset{\sim}{x})}{\partial x_i}\frac{\partial f_k(\underset{\sim}{x})}{\partial x_j}, \quad \underset{\sim}{x} \in \mathcal{R}$$

Έστωσαν υλικές ίνες πυ στην κατάσταση αναφοράς είναι ευθύγραμμα τμήματα με άκρα $\underset{\sim}{x}$ και $\underset{\sim}{x}+\alpha\underset{\sim}{e}$ η μεν, $\underset{\sim}{x}$ & $\underset{\sim}{x}+\alpha\underset{\sim}{d}$ η δε, $\alpha>0$, $|\underset{\sim}{d}|=|\underset{\sim}{e}|=1$.
$\underset{\sim}{d}\cdot\underset{\sim}{e}=0$



Οι ίνες στην παραμορφωμένη διαμόρφωση δεν είναι πλέον ευθείες αλλά καμπύλες.

<u>Τοπική έκταση</u> στο $\underset{\sim}{x}\in R$ στην κατεύθυνση $\underset{\sim}{e}$

$$\lambda(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{e}) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{|\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}+\alpha\underset{\sim}{e})-\underset{\sim}{f}(x)|}{\alpha}$$

Προφανώς

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}+\alpha \underset{\sim}{e}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})}{\alpha} =$$

$$\frac{d}{d\alpha} \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}+\alpha\underset{\sim}{e}) \Big|_{\alpha=0} = \left[\nabla \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}+\alpha\underset{\sim}{e}) \frac{d}{d\alpha}(\underset{\sim}{x}+\alpha\underset{\sim}{e}) \right]_{\alpha=0}$$

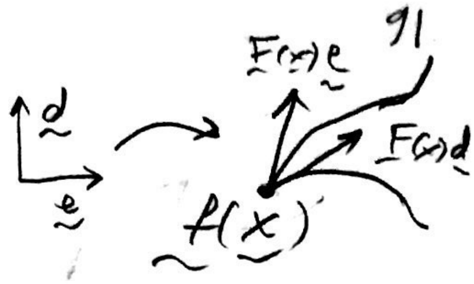
$$= \nabla \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) \underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) \underset{\sim}{e}$$

Άρα

$$\lambda(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{e}) = |\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) \underset{\sim}{e}| = |\underset{\sim}{U}(\underset{\sim}{x}) \underset{\sim}{e}|$$

$$= \sqrt{\underset{\sim}{e} \cdot \underset{\sim}{C}(\underset{\sim}{x}) \underset{\sim}{e}}$$

όπως ακριβώς και στην ομοιογενή περίπτωση με τη διαφορά ότι τώρα οι $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{U}$ εξαρτώνται από το $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{R}$ και η έκταση είναι λόγος μηκών απειροστής ίνας.



Τα διανύσματα

$\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{e}$ κι $\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{e} = \left[\frac{d}{d\alpha}\mathbf{f}(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{e})\right]_{\alpha=0} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d} = \left[\frac{d}{d\alpha}\mathbf{f}(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d})\right]_{\alpha=0}$$

είναι εφαπτομενικά στις καμπύλες παραμορφωμένες ίνες στο σημείο $\mathbf{x}$ άρα η γωνία μεταξύ των ινών αυτών μπορεί να οριστεί σαν

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{e}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d}}{|\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{e}|\,|\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d}|}$$

άρα και η γωνία διάτμησης

$$\sin\gamma(\mathbf{e},\mathbf{d}) = \frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{d}}{\sqrt{\mathbf{e}\cdot\mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{e}}\,\sqrt{\mathbf{d}\cdot\mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{d}}}$$

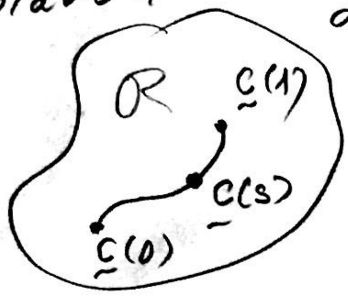
όπως και στην ομογενή περίπτωση.

Έστω τυχαίο τόξο στην περιοχή αναφοράς (η), παραμετροποιημένη καμπύλη

$$\mathbf{c} : [0,1] \longrightarrow R, \quad \mathbf{c} \in C^1([0,1])$$

$$\mathbf{c}(s) \in R \text{ για } 0 \leq s \leq 1.$$

Το διάνυσμα $\frac{d}{ds}\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}'(s)$ είναι εφαπτόμενο



στην καμπύλη στο σημείο $\mathbf{c}(s)$.

Μήκος Καμπύλης είναι

$$\int_0^1 |\mathbf{c}'(s)|\, ds =$$

Παραμορφωμένη Καμπύλη είναι

$$\overset{*}{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{c}(s)) \in R^*, \quad 0 \leq s \leq 1$$

Εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\overset{*}{\mathbf{c}}{}'(s) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{c}(s))\,\mathbf{c}'(s) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(s))\,\mathbf{c}'(s)$$

<u>Μήκος Παραμορφωμένης Καμπύλης</u>

$$\int_0^1 |\overset{*}{\mathbf{c}}{}'(s)|\, ds = \int_0^1 |\mathbf{U}(\mathbf{c}(s))\,\mathbf{c}'(s)|\, ds = \int_0^1 \sqrt{\mathbf{c}'(s) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{c}(s))\,\mathbf{c}'(s)}\; ds$$

(επειδή $|\mathbf{U}\mathbf{e}| = \sqrt{\mathbf{U}\mathbf{e} \cdot \mathbf{U}\mathbf{e}} = \sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{U}^2 \mathbf{e}}$)