Σχόλιο Η απόκλιση διαν. πεδίου $\underset{\sim}{v} = v_i \underset{\sim}{e}_i$ είναι όπως ξέρουμε το βαθμωτό

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Στον Απ. Λογισμό Ι. γράφαμε $v_1 = v$, $v_2 = u$, $v_3 = w$ για τις συνιστώσες v_i του $\underset{\sim}{v}$ και $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ για τις συνιστώσες x_i του $\underset{\sim}{x} = x_i \underset{\sim}{e}_i \in \mathbb{R}$. όποτε είχαμε

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{v} = div\, \underset{\sim}{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

που είναι το ίδιο με την προηγ. εξίσωση αλλά το $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}$ είναι πολύ πιο συμπαγές.

Scanned with CamScanner

Θυμάμαι: Απόκλιση ΤΑΝ πεδίου $\underset{\sim}{T}: \mathcal{R} \to Lin$ είναι το ΔΙΑΝ πεδίο

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{T} = \nabla \cdot \underset{\sim}{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \underset{\sim}{e}_i$$

<u>Συνιστώσες της $\operatorname{div} \underset{\sim}{T}$</u>

Έχουμε $[\operatorname{div} \underset{\sim}{T}]_i = \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$ και ο j είναι επαναλαμβανόμενος, ενώ ο i είναι ελεύθερος. Οπότε αν

$$\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{x}) = \operatorname{div} \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}) \quad \forall \underset{\sim}{x} \in \mathcal{R}$$

$$W_1 = \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}$$

$$W_2 = \frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}$$

$$W_3 = \frac{\partial T_{3j}}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}.$$

Όμως το $W_i = \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$ λέει το ίδιο πράγμα!

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $\underset{\sim}{T} : \mathcal{E} \to Lin$,

$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x} \quad \forall \underset{\sim}{x} \in \mathcal{E}$

ορίζει ένα TAN πεδίο, του οποίου η τιμή στο $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{E}$ είναι ο TAN $\underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x}$. Μη συγχέετε το $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x}$ με το $\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{d}$ που είναι το διάνυσμα $\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{d} = (\underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x})\underset{\sim}{d} = (\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{d})\underset{\sim}{x}$.

Βρίσκουμε το διαν. πεδίο $\underset{\sim}{W} = \operatorname{div} \underset{\sim}{T}$ με συνιστώσες.

Έχω $T_{ij} = x_i x_j$ άρα

$$w_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i x_j) =$$

$$= \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right) x_j + x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_j} = \delta_{ij} x_j + x_i \delta_{jj}$$

$$= x_i + 3x_i = 4x_i$$

Προσοχή $\delta_{jj} = 3$, $\delta_{jj} \neq 1$.

άρα $\operatorname{div}(\underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x}) = 4\underset{\sim}{x}$

$\forall \underset{\sim}{x} \in \mathcal{E}$

Θεώρημα Απόκλισης

Έστω $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ φραγμένη ανοικτή περιοχή με κανονικό σύνορο $\partial\mathcal{R}$ και εξωτερική μοναδιαία κάθετο $\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x})$ για $\underset{\sim}{x} \in \partial\mathcal{R}$.

Έστωσαν 3 πεδία ορισμένα στην κλειστή περιοχή $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$ βαθμωτό $\varphi : \overline{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}$, διαν. $\underset{\sim}{v} : \overline{\mathcal{R}} \to \mathcal{E}$, ΤΑΝ πεδίο $\underset{\sim}{T} : \overline{\mathcal{R}} \to \mathrm{Lin}$ και τα τρία $\in C^1(\overline{\mathcal{R}})$. Τότε.

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \varphi \underset{\sim}{n} \, d\underset{\sim}{A} = \int_{\mathcal{R}} \nabla\varphi \, dV \qquad (1)$$

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{n} \, dA = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{div}\, \underset{\sim}{v} \, dV \qquad (2)$$

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{n} \, dA = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{div}\, \underset{\sim}{T} \, dV \qquad (3)$$

<u>Σχόλια</u>: 1) Τα ολοκληρώματα στην αριστερή πλευρά των (1), (2), (3)

$\int_{\partial R} \ldots dA$ είναι <u>ολοκληρώματα επιφανείας</u> στο σύνορο ∂R.

Τα ολοκληρώματα στη δεξιά πλευρά είναι ολοκληρώματα όγκου.

$\int_{R} \ldots dV$ στην περιοχή R.

2) <u>Κανονικό</u> <u>σύνορο</u> σημαίνει ότι αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό λείων επιφανειών που συναντώνται σε πεπερασμένο αριθμό λείων τόξων. Οι επιφάνειες π.χ. σφαίρας, κύβου, ελλειψοειδούς είναι κανονικές

3) Η γνωστή σας σχέση είναι η (2) για <u>διαν.</u> πεδία όπως στον ΑΠ.3. Όμως εδώ δίνεται σχέση για βαθμωτά πεδία (1) και ΤΑΝ πεδία (3).

4) Το Θμ. είναι ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα της Μαθηματικής Φυσικής.

<u>Θμ. Εντοπισμού</u>.

Αν $\varphi \in C(R)$ και

$$\int_{\Omega} \varphi \, dV = 0 \quad \forall \; \Omega \subset R$$

τότε $\varphi(\underline{x}) = 0 \;\; \forall \, \underline{x} \in R$.

<u>Σχόλιο</u>. Προφανώς $\int_R \varphi \, dV = 0$ δε σημαίνει οτι $\varphi(\underline{x}) = 0 \;\; \forall \, \underline{x} \in R$. Όμως αν το ολοκλήρωμα σε οποιοδήποτε υποσύνολο της R μηδενίζεται τότε αναγκαστικά το φ είναι παντού μηδέν!

<u>Άσκηση</u> Χρησιμοποιώντας τη (2) στο Θμ. Απόκλισης, αποδείξτε τις (1) και (3) !!!