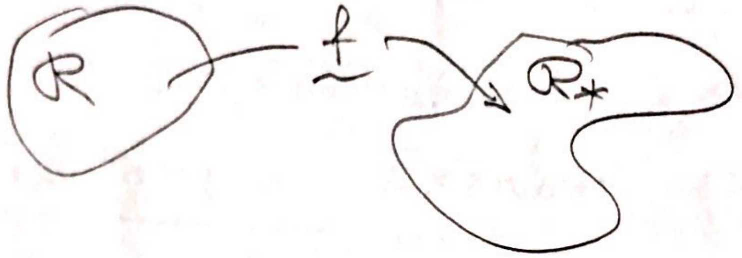
Μελέτη Παραμόρφωσης.

Ένταση, Έκταση, Διάτμηση.

Έστω παραμόρφωση $\mathbf{f} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}_*$



$\mathcal{R}$... περιοχή αναφοράς

$\mathcal{R}_*$... παραμορφωμένη περιοχή

<u>Ομοιογενής</u> <u>Παραμόρφωση</u> είναι παραμόρφωση με

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{f} = \text{σταθ} \quad \text{εν } \mathcal{R}$$

σταθερή βαθμίδα $\mathbf{F} \in \mathcal{L}in_+$

$\mathcal{L}in_+ = \{ \mathbf{A} \mid \mathbf{A} \in \mathcal{L}in, \ \det \mathbf{A} > 0 \}$.

<u>Θμ.</u> Η παρ/φωση $\mathbf{f}$ είναι ομοιογενής

$$\Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}$$

$$\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{d}. \qquad \mathbf{F} = \text{σταθ.} \in \mathcal{L}in_+, \quad \mathbf{d} = \text{σταθ} \in \mathcal{E}.$$

Ειδικές Περιπτώσεις

1) **Μεταφορά** (Παράλληλη Μετατόπιση)

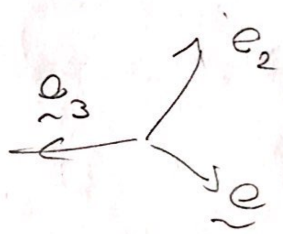
$F = 1$ $\qquad f(x) = x + d$, $d = \text{const.}$

$\Rightarrow \quad u(x) = d =$ σταθ. $\forall\, x \in \mathcal{B}$.

2) **Μοναξονική Έκταση**

με άξονα e, $|e| = 1$.

Αν $\{e, e_2, e_3\}$ ΟΚ $= X$



και

$$U = \lambda\, e \otimes e + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$$

δηλ. $[U]^X = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \lambda > 0$

$f(x) = U x$

$f_1(x) = \lambda x_1$

$f_2(x) = x_2$

$f_3(x) = x_3$

$\lambda \ldots$ έκταση

$\lambda > 1$ επιμήκυνση

$\lambda < 1$ συρρίκνωση.

3) Καθαρή Ομοιογενής Παραμόρφωση

Γενική Τριαξονική Έκταση

$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{x}$ $\qquad \underset{\sim}{U} \in Sym_+$

$Sym_+ = \{ \underset{\sim}{S} \mid \underset{\sim}{S} \in Lin,\ \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^T,\ \underset{\sim}{S}$ θετ. ορ. $\}$

$\Rightarrow \exists$ ΟΚ $\underset{\sim}{m}_1, \underset{\sim}{m}_2, \underset{\sim}{m}_3$

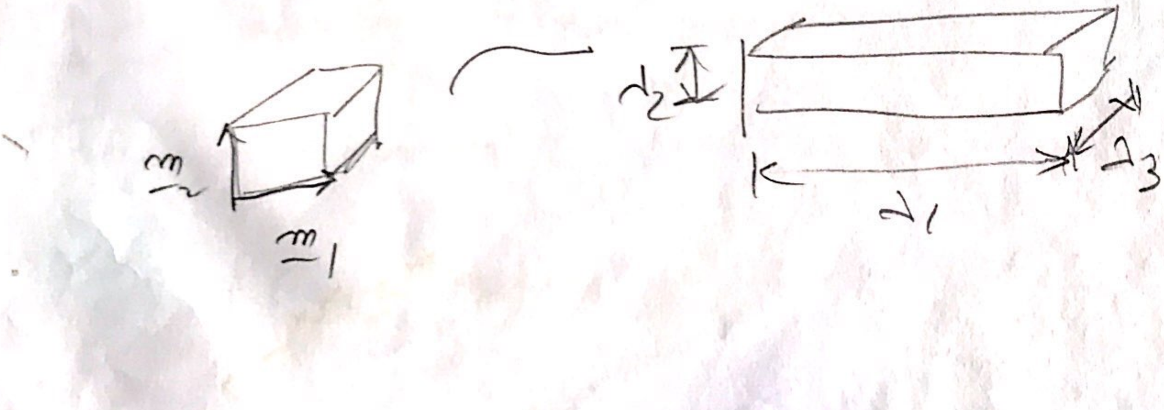
κύριες κατευθύνσεις

και $\lambda_i > 0$ κύριες εκτάσεις

τ.ω. $\underset{\sim}{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, \underset{\sim}{m}_i \otimes \underset{\sim}{m}_i$

ή στην κύρια βάση (των $\underset{\sim}{m}_i$)

$$[\underset{\sim}{U}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$



Αν στην ίδια βάση

$$[\underset{\sim}{U}_1] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\underset{\sim}{U}_2] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad [\underset{\sim}{U}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

τότε $\quad \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}_3 \underset{\sim}{U}_2 \underset{\sim}{U}_1$

και

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{f}_3(\underset{\sim}{f}_2(\underset{\sim}{f}_1(\underset{\sim}{x})))$$

όπου $\quad \underset{\sim}{f}_i(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{U}_i \, \underset{\sim}{x}$.

Κάθε καθαρή ομοιογενής παραμόρφωση είναι σύνθεση 3 μοναξονικών εκτάσεων σε 3 κάθετες κατευθύνσεις

4) <u>Άκαμπτη Παραμόρφωση</u> (Στερεού)

Επιστρέφουμε στις <u>γενικές</u> παραμορφώσεις (<u>όχι</u> αναγκαστικά <u>ομοιογενείς</u>)

Παραμόρφωση $\underset{\sim}{f}: \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_*$ λέγεται άκαμπτη

αν $\quad |\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{z}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})| = |\underset{\sim}{z} - \underset{\sim}{x}| \quad \forall\, \underset{\sim}{z}, \underset{\sim}{x} \in \mathcal{R}$.

<u>Θεώ.</u> Παραμόρφωση είναι άκαμπτη αν και μόνο άν

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{d} \quad \forall \underset{\sim}{x} \in \mathcal{R}$$

$$\underset{\sim}{d} = \text{σταθ} \in \mathcal{E}$$

$$\underset{\sim}{R} = \text{σταθ} \in Orth_+ \quad (\text{στροφή})$$

$$Orth_+ = \{\underset{\sim}{Q} \mid \underset{\sim}{Q} \in Lin,\ \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1},\ \det\underset{\sim}{Q} = 1\}$$

<u>Σχόλιο</u> Άρα οι άκαμπτη παραμόρφωση είναι πάντα <u>ομοιογενής</u>, $\nabla\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{R} = \text{σταθ}$, και σύνθεση περιστροφής και μεταφοράς.

Γενική Ομοιογενής Παραμόρφωση

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{d}, \quad \underset{\sim}{F} \in Lin \quad (1)$$

$$\text{σταθ.}$$

Θεώρημα Πολικής Παραγοντοποίησης

$\Rightarrow$

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{V}\underset{\sim}{R}, \quad \underset{\sim}{R} \in Orth_+$$

$$\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{V} \in Sym^+$$