$$\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{R}^T$$

$\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{V}$: δεξιός ή αριστερός τανυστής
έκτασης της παραμορφ. (1)

$\underset{\sim}{R}$ ... τανυστής περιστροφής της (1).

Ο $\underset{\sim}{U}$ έχει κύρια βάση με ΟΚ
διανύσματα $\underset{\sim}{m}_i$ (ιδιοδιανύσματα)
και κύριες εκτάσεις $\lambda_i > 0$ (ιδιοτιμές)

Άρα αν

$$\underset{\sim}{U} = \sum_i \lambda_i\, \underset{\sim}{m}_i \otimes \underset{\sim}{m}_i$$

$$\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{x} = \sum_i \lambda_i \left(\underset{\sim}{m}_i \cdot \underset{\sim}{x}\right) \underset{\sim}{m}_i$$

Αν γράψουμε $\underset{\sim}{m}_i \cdot \underset{\sim}{x} = x_i$

τότε $\left[\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{x}\right]_i = \begin{Bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \lambda_3 x_3 \end{Bmatrix}$.
στην ίδια βάση

$$\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{R}^T = \sum \lambda_i\, \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{m}_i \otimes \underset{\sim}{m}_i\right)\underset{\sim}{R}^T =$$

$$= \sum \lambda_i \left(\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{m}_i\right) \otimes \left(\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{m}_i\right) = \sum \lambda_i\, \underset{\sim}{n}_i \otimes \underset{\sim}{n}_i$$

όπου $\mathbf{m}_i' = \mathbf{R}\,\mathbf{m}_i'$

Δηλ.

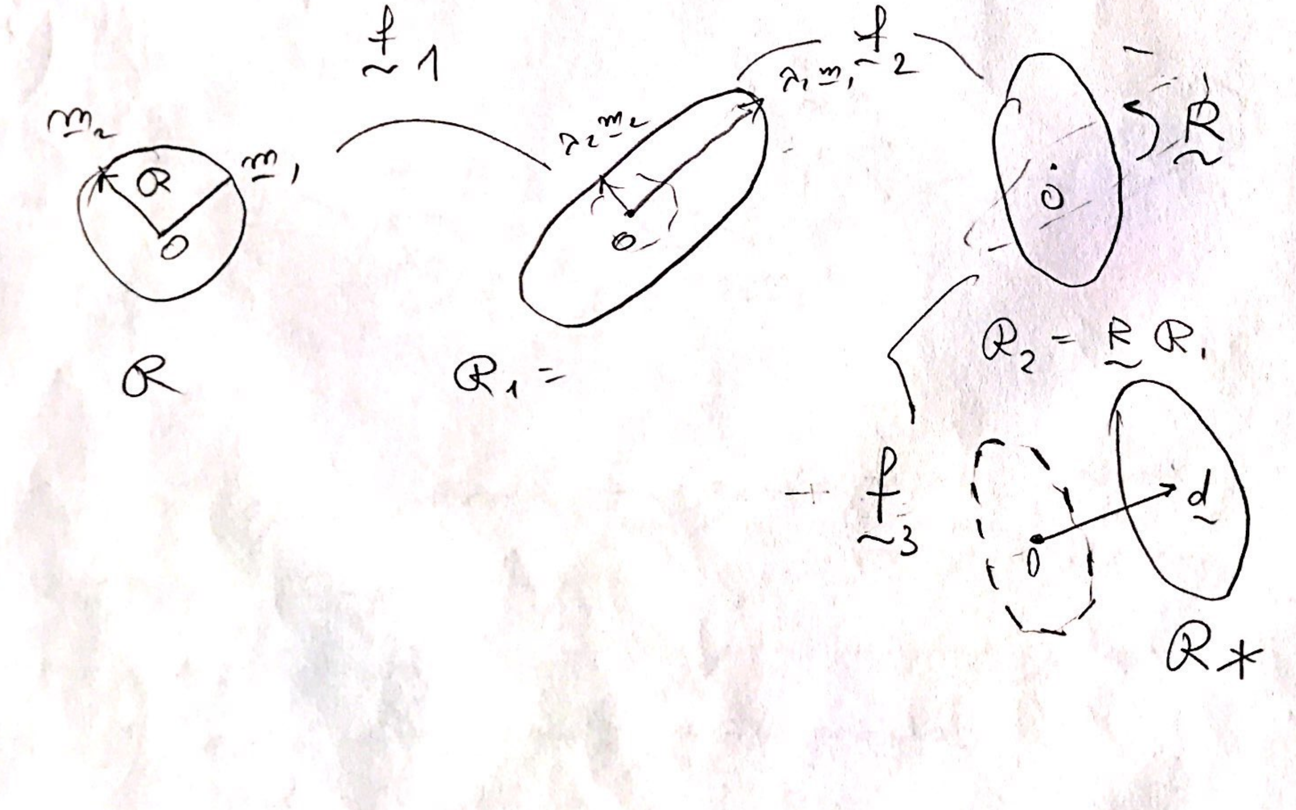
$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

$$= \mathbf{f}_3(\mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(\mathbf{x}))), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}$$

$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x}$ ... καθ. παραμόρφωση 3-αξονική έκταση στις κατευθ. $\mathbf{m}_i$ με εκτάσεις λ_i

$\mathbf{f}_2(\mathbf{z}) = \mathbf{R}\mathbf{z}$ ← περιστροφή κατά $\mathbf{R}$ = σταθ.

$\mathbf{f}_3(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \mathbf{d}$ ← μεταφορά κατά $\mathbf{d}$.



Ή αλλιώς

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{V}\,\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{d}.$$

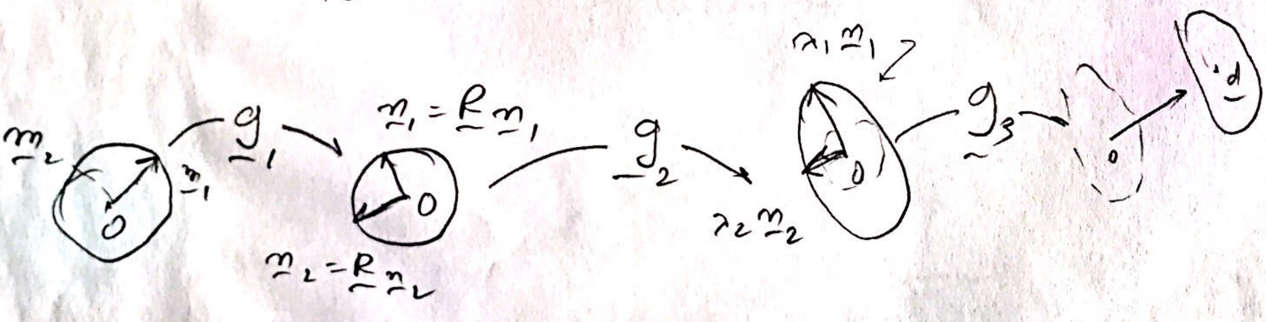
$$= \underset{\sim}{g}_3(\underset{\sim}{g}_2(\underset{\sim}{g}_1(\underset{\sim}{x})))$$

$\underset{\sim}{g}_1(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{x}$ περιστροφή κατά R

$\underset{\sim}{g}_2(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{V}\,\underset{\sim}{x}$ 3-αξονική έκταση στις κατευθύνσεις $\underset{\sim}{m}_i' = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{m}_i$ με εκτάσεις $\lambda_i' > 0$.

$\underset{\sim}{g}_3(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{d}$

μεταφορά κατά $\underset{\sim}{d}$.



Κάθε ομοιογενής <u>παραμόρφωση</u> είναι σύνθεση 3-αξ. έκτασης με περιστροφή και μεταφορά ή περιστροφής με τριαξ. έκταση και μεταφορά

Σχόλιο: Οι λ_i λέγονται κύριες εκτάσεις της παραμόρφωσης. Οι κύριες κατευθύνσεις $\underline{n}_i$ του $\underline{U}$ και $\underline{n}_i = \underline{R}\,\underline{n}_i$ του $\underline{V}$ είναι οι αναφορικές και παραμορφωμένες κύριες κατευθύνσεις έκτασης αντίστοιχα.

Παράδειγμα

Χαρακτηρίστε γεωμετρικά το είδωλο (εικόνα) της σφαίρας ακτίνας a

$\mathcal{R} = \{\underline{x} \,/\, \underline{x} \in \mathcal{E},\ |\underline{x}| \leq a\}$

κάτω από την ομογενή παραμόρφωση

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{F}\,\underline{x}, \quad \underline{F} \in Lin^+, \quad \underline{x} \in \mathcal{R}$$

αν $\mathcal{R}_* = \underline{f}(\mathcal{R})$

$$\underline{y} \in \mathcal{R}_* \Rightarrow \underline{y} = \underline{F}\,\underline{x}, \quad \underline{x} = \underline{F}^{-1}\underline{y}, \quad \underline{y} \in \mathcal{R}_*$$

$$|\underline{x}| \leq a \Leftrightarrow \underline{x}\cdot\underline{x} \leq a^2 \Rightarrow \left(\underline{F}^{-1}\underline{y}\right)\cdot\left(\underline{F}^{-1}\underline{y}\right) \leq a^2$$

$$\Rightarrow \underline{y}\cdot\underline{F}^{-T}\underline{F}^{-1}\underline{y} \leq a^2$$

$$\underline{F} = \underline{R}\,\underline{U} \Rightarrow \underline{F}^{-1} = \underline{U}^{-1}\underline{R}^{T}$$

$$\underline{F}^{-T} = \underline{R}\,\underline{U}^{-1}$$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{y} \cdot \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U}^{-2}\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{y} \le a^2 \quad \Leftrightarrow \underline{y} \in \mathcal{R}_*$

Αν $\underset{\sim}{U} = \sum \lambda_i' \underset{\sim}{m}_i' \otimes \underset{\sim}{m}_i'$

τότε $\underline{U}^{-2} = \sum_i \frac{1}{\lambda_i^2} \underline{m}_i' \otimes \underline{m}_i'$

$R\underline{U}^{-2}\underline{R}^T = \sum_i \frac{1}{\lambda_i'^2} \underline{n}_i \otimes \underline{n}_i \quad , \quad \underline{n}_i' = \underline{R}\,\underline{m}_i'$

Ώστε $\underline{y} \in \mathcal{R}_* \Rightarrow$

$$\sum_i \frac{(\underset{\sim}{y} \cdot \underset{\sim}{n}_i')^2}{a^2 \lambda_i^2} \le 1.$$

Άρα η σφαίρα $\mathcal{R}$ με ακτίνα a παραμορφώνεται σε ελλειψοειδές με ημιάξονες $a\lambda_i$ (λ_i... κύριες εκτάσεις) στις κατευθύνσεις $\underset{\sim}{n}_i = \underline{R}\,\underline{m}_i'$ (παραμ. κύριες κατευθύνσεις έκτασης).