

ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΑΛΕΞΗ 1

Βαθμύδα (Παραγινος)

Βαθμωτ & πεδίου $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

και Διαν. πεδίου $\underline{v}: \mathbb{Q} \rightarrow \Sigma$

οπὸ $\mathbb{Q} \subset \Sigma$ ανοικτή περιοχή.

με $\varphi, \underline{v} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{Q})$.

Θυμαται:

$$\nabla \varphi(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_k \underline{e}_k) \underline{e}_i$$

$$\nabla \underline{v}(\underline{x}) = \frac{\partial v_i(x_k \underline{e}_k)}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

ὅπου $v_i(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_i, \underline{x} \in \mathbb{Q}$,

και \underline{e}_i OK.

Υπολογισμός Βαθμίδας με Συνιστώσες

Λήμμα $\frac{\partial \chi_i}{\partial \chi_j} = \delta_{ij}$.

Σχόλιο Οι δείκτες στον παρονομαστή μερικών παραγώγων συμπεριλαμβάνονται στη σύμβαση πρόσθεσης.

π.χ. $\frac{\partial \chi_i}{\partial \chi_i}$ το i είναι επαναλαμβανόμενο δείκτης

οπότε $\frac{\partial \chi_i}{\partial \chi_i} = \delta_{ii} = 3$

Παραδείγματα Να βρεθεί η βαθμίδα των παρακάτω βαθμωτών ή διανυσματικών πεδίων με χρήση συνιστωσών. Η τεχνική απάντηση να εκφραστεί χωρίς συνιστώσες.

1) $\varphi(\underline{x}) = |\underline{x}|^2 \quad \forall \underline{x} \in E$

Βήμα α' Γράφουμε το πεδίο (σε περίπτωση βαθμωτού) ή τις συνιστώσες (σε περίπτωση διαν. πεδίου) με συνιστώσες

$$\varphi(\underline{x}) = |\underline{x}|^2 = \underline{x} \cdot \underline{x} = x_i x_i$$

Βήμα β' Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους ως προς x_i

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial (x_i x_i)}{\partial x_i} \quad \underline{\text{ΠΡΟΣΟΧΗ.}}$$

Λάθος: παραβιάζεται η σύμβαση προώθησης λόγω 3 i. Επιστρέφουμε στο βήμα α

$$\varphi(\underline{x}) = x_k x_k, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial (x_k x_k)}{\partial x_i}$$

Σχόλιο: Ισχύει ο κανόνας γινόμενου

$$= \frac{\partial x_k}{\partial x_i} x_k + x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki} x_k + x_k \delta_{ki}$$

εφαρμόζοντας το Λήμμα,

$$= 2 \delta_{ki} x_k = 2 x_i \quad (\text{ιδιότητα αντικατάστασης } \delta \text{ } \delta)$$

συνεπώς οι συνιστώσες της βαθμίδας:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2x_i'$$

Βήμα γ' Βαθμίδα χωρίς συνιστώσες

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \underline{e}_i = 2x_i' \underline{e}_i = 2\underline{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \varphi(\underline{x}) = 2\underline{x}} \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{E}$$

Σχόλιο Η βαθμίδα είναι διαν. πεδίο

$$2) \quad \underline{v}(\underline{x}) = \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{E}$$

Βήμα α' $v_i'(\underline{x}) = x_i'$

Βήμα β' $\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \delta_{ij}$
(από λημμάτα)

θυμ. ότι $\nabla_{\underline{v}}$ είναι ο TANG με συνιστώσες $[\nabla_{\underline{v}}]_{ij} = \frac{\partial v_i'}{\partial x_j'}$

Βήμα γ' $[\nabla_{\underline{v}}]_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow \nabla_{\underline{v}}(\underline{x}) = \underline{1}$
 $\forall \underline{x} \in \mathcal{E}$

$$3) \quad \underline{V}(\underline{x}) = |\underline{x}|^2 \underline{d} + (\underline{x} \cdot \underline{d}) \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{E}$$

οπου $\underline{d} = \text{σταθ.} \in \mathcal{E}$.

Βρίμα x_i' $V_i(\underline{x}) = x_k x_k d_i' + x_k d_k x_i'$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (x_k x_k d_i' + x_k d_k x_i') = \\ &= d_i' \frac{\partial}{\partial x_j} (x_k x_k) + d_k \frac{\partial}{\partial x_j} (x_k x_i') = \\ &= d_i' \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j} x_k + x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \right) + d_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j} x_i' + x_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \right) = \\ &= d_i' 2 \delta_{kj} x_k + d_k (\delta_{kj} x_i' + x_k \delta_{ij}) = \\ &= 2 d_i' x_j + x_i d_j + x_k d_k \delta_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

δηλ. ότι $(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = a_i' b_j$ οπότε

$$\nabla \underline{V}(\underline{x}) = 2 \underline{d} \otimes \underline{x} + \underline{x} \otimes \underline{d} + (\underline{x} \cdot \underline{d}) \underline{1}$$

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{E}$$

Σχόλιο Η βαθμίδα ΔΙΑΝ. ΠΕΔΙΟΥ
είναι ΤΑΝ. ΠΕΔΙΟ.

Άσκηση (A1) Υποδείξτε τις βαθμίδες των παρακάτω πεδίων.

$$1) \varphi(x) = \log(1 + |x|^2), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2) \chi(x) = (x \otimes x)x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$3) \varphi(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Κάποιο απ' αυτά δεν είναι παραγωγίσιμο κάπου. Ποιό; Πού;

Ερωτήσεις, σχόλια στο

ROSAKIS.P@GMAIL.COM