ΜΘΥ ΔΙΑΛΕΞΗ 1

Εισαγωγικά Σχόλια

Τι είναι ΜΘΥ;

Μηχανική του Παραμορφωσίμου Σώματος με αυστηρά μαθηματικά.

Μηχανική: κλάδος της φυσικής που εξετάζει κίνηση σωμάτων υπό δυνάμεις που ασκούνται.

Μαθηματικά Μοντέλα για σώματα:

1) υλικό σημείο • $\in \mathbb{R}^3$
2) στερεό σώμα 

χωρίο (περιοχή) στον $\mathbb{R}^3$ $\quad \subset \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ μαθηματικό μοντέλο του χώρου.

Άλλα μοντέλα $\mathbb{R}^4$ ... χωροχρόνος

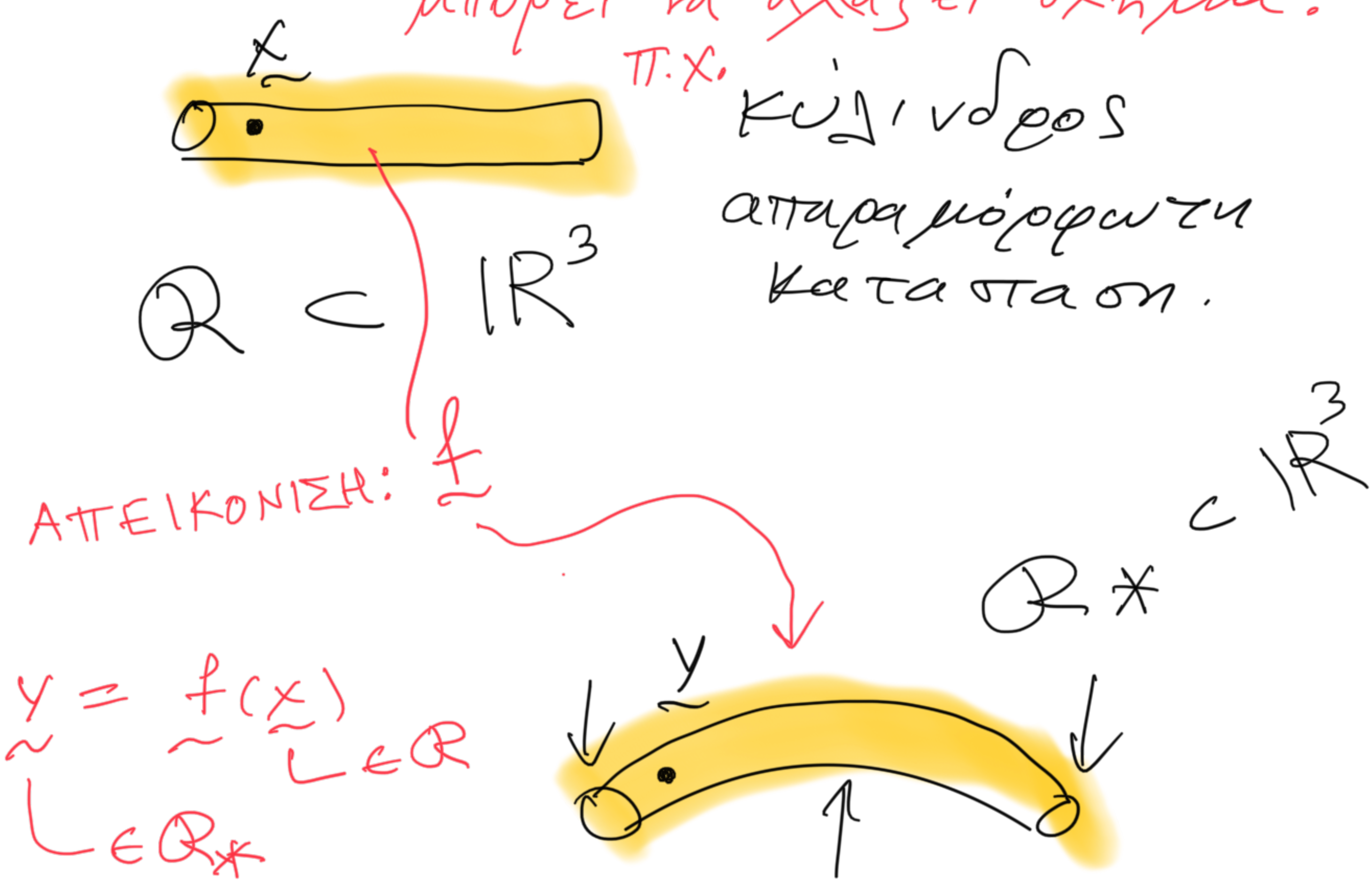
Γενική σχετικότητα: καμπυλωτή

υπερεπιφάνεια (4-διάστατη)

<u>Σχόλιο</u> Τα <u>στερεά</u> <u>σώματα</u> δεν παραμορφώνονται. Μπορούν μόνο να μετατοπιστούν και να περιστραφούν.

4) <u>Παραμορφώσιμο Σώμα</u>

μπορεί να αλλάξει σχήμα!



Παραμόρφωση:

<u>Απεικόνιση</u>

$$\underset{\sim}{f} : Q \longrightarrow Q_*$$

→ 3 βαθμωτές συναρτήσεις καθε μια τριων βαθμωτων μεταβλητών

Σημείο $\underset{\sim}{x} \in Q$

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in Q \subset \mathbb{R}^3$$

$x_i \quad (i = 1, 2, 3)$ συνιστώσες της $\underset{\sim}{x}$.

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$$

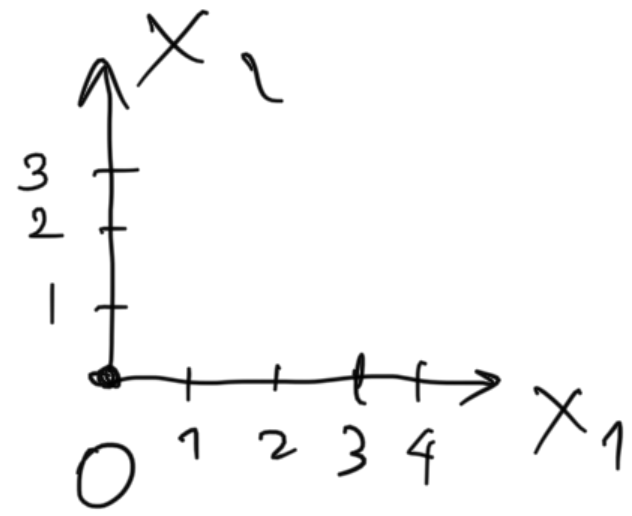
Αν $\underset{\sim}{y} = \underline{f}(\underset{\sim}{x})$

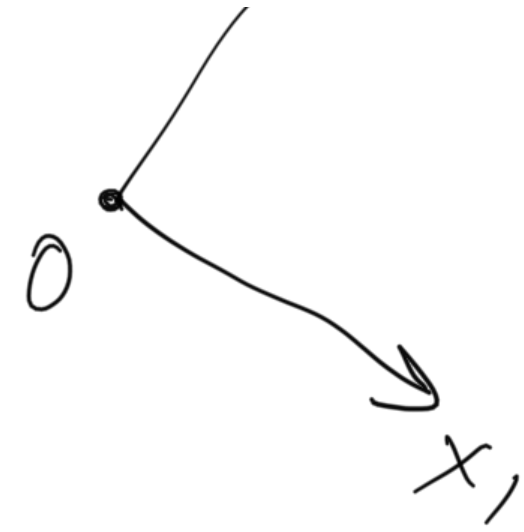
$$\underset{\sim}{y} \in Q_* \subset \mathbb{R}^3$$

<u>Ερωτηση</u> Ποιό είναι το σημείο

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} ;$$

x_2





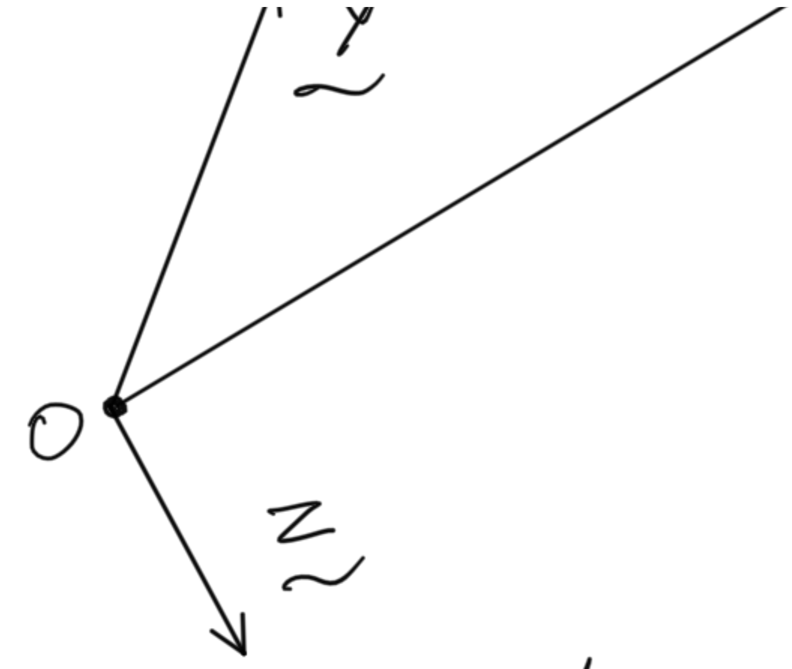
Για να το πω χρειάζομαι σύστημα συντεταγμένων.

Επειδή ο χώρος δεν έχει σπεσιάλ συντεταγμένες και $\exists\ \infty$ επιλογές τους τις πετάω στα σκουπίδια! μαζί με τον $\mathbb{R}^3$

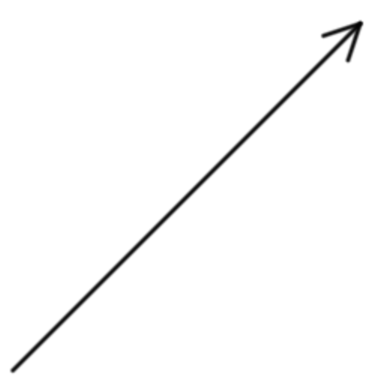
ΧΩΡΟΣ $\mathcal{E}$

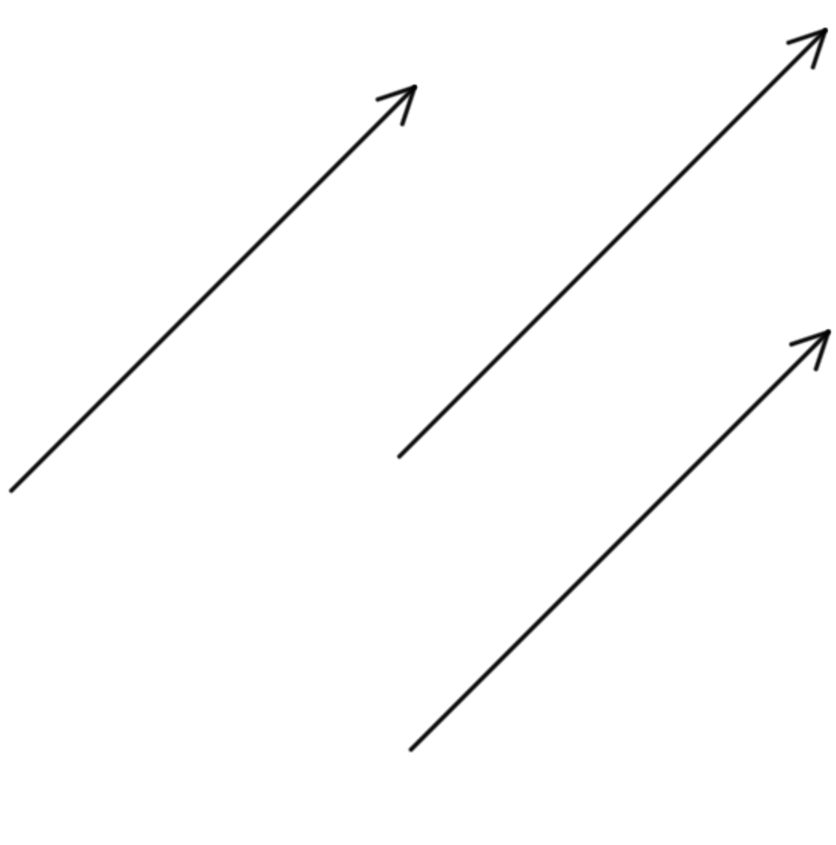
(μαθηματικό μοντέλο του φυσικού χώρου)

Διανυσματικός χώρος (3-διάστατος, Ευκλείδειος) $\mathcal{E}$



με στοιχεία (διανύσματα)
$\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{z} \in \mathcal{E}$, βελάκια
δηλ. ευθύγραμμα τμήματα
με κατεύθυνση, ταυτίζοντας
τα βελάκια που
σχετίζονται με
παράλληλη μεταφορά





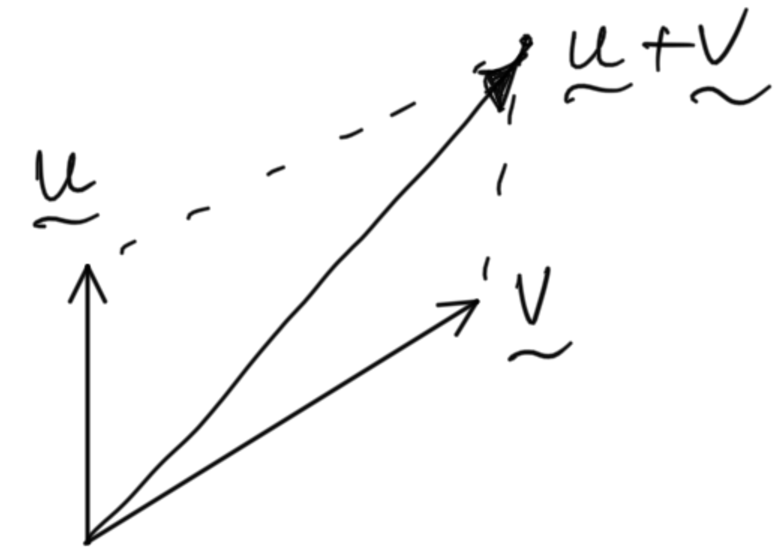
ίδια.

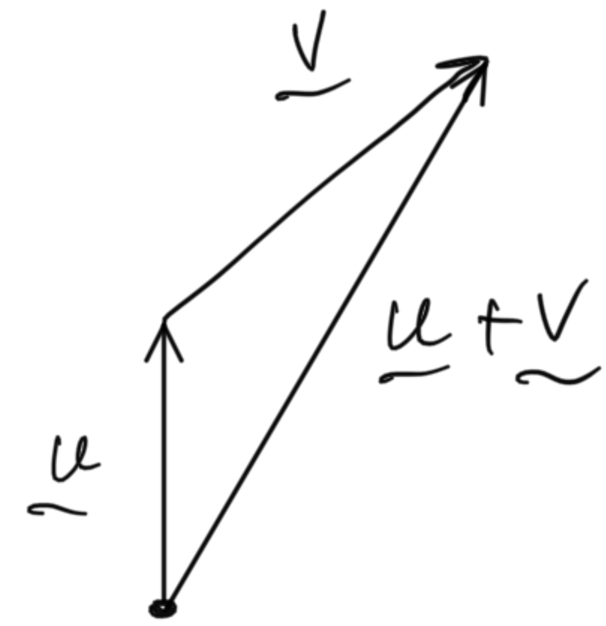
πραγματικοί

βαθμωτά $\alpha, \beta, \dots \gamma \in \mathbb{R}$

άθροισμα με κανόνα

παραλληλογράμμου





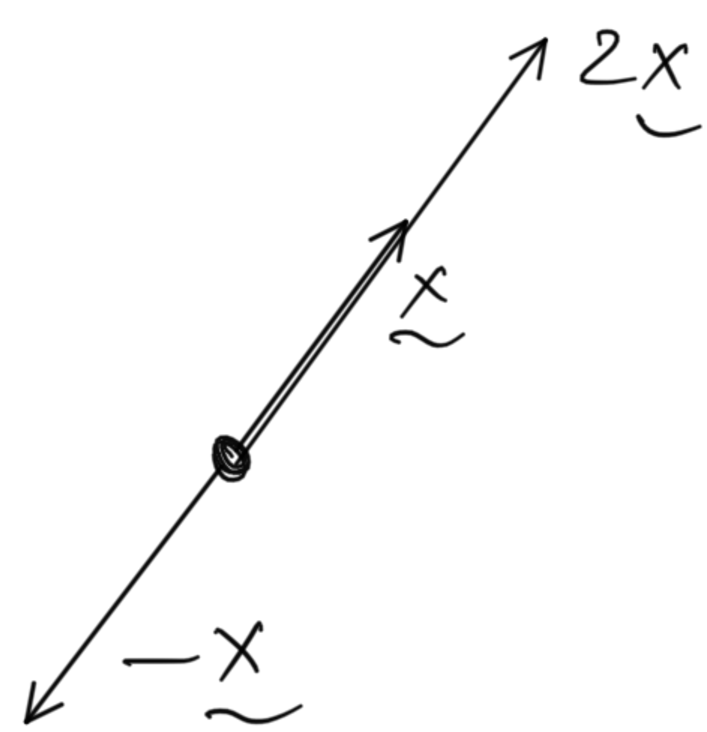
ή με συνολική μετατόπιση.

Πολλαπλασιασμός με βαθμωτό

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \underset{\sim}{x} \in E$ τότε

$\alpha \underset{\sim}{x} \in E$ π.χ.

$2\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{x}$



$-\underset{\sim}{x} = (-1)\underset{\sim}{x}$ αντίθετο του $\underset{\sim}{x}$.

Εσωτερικό Γινόμενο των

$\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in E$ είναι το βαθμωτό

$\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v} \in \mathbb{R}$ των

$\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v} \in \mathbb{R}$ τ.ω.

1) $\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{u}$

2) $(\alpha \underset{\sim}{u} + \beta \underset{\sim}{v}) \cdot \underset{\sim}{z} = \alpha(\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{z}) + \beta(\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{z})$

3) $$\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{u} \begin{cases} > 0 & \text{αν } \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0} \\ = 0 & \text{αν } \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} \end{cases}$$

$\forall\ \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{z} \in \mathcal{E}, \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(συμμετρία 1), γραμμικότητα 2), θετικότητα 3)).

<u>μέτρο</u>, <u>νόρμα</u>, <u>μέγεθος</u>

$$|\underset{\sim}{u}| = \sqrt{\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{u}}$$

(μεζούρα για μήκη, αποστάσεις).

<u>Γωνία</u> μτξ διανυσμάτων $\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{v} \neq \underset{\sim}{0}$ είναι $\theta \in [0, \pi]$ τ.ω.

$$\cos\theta = \frac{\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v}}{|\underset{\sim}{u}|\,|\underset{\sim}{v}|}.$$

Σχόλια 1) $\underset{\sim}{0}$ μηδενικό διάνυσμα

(π.χ. $\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{u}$)

Ξεχωρίζω το $\underset{\sim}{0}$ από το $0 \in \mathbb{R}$.

2) Η γωνία ορίζεται διότι ισχύει η ανισότητα Cauchy - Schwartz

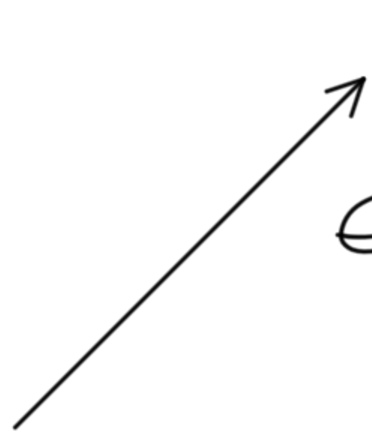
$$|\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v}| \le |\underset{\sim}{u}|\,|\underset{\sim}{v}|$$

απόλυτη τιμή

νόρμα

Τα $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}$ είναι κάθετα ή ορθογώνια μτξ τους αν $\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v} = 0$

3) Ο χώρος $\mathcal{E}$ δεν είναι ο $\mathbb{R}^3$

 $\in \mathcal{E}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

αν και ισομορφος. Δεν
εχει καμμια ξεχωριστη
«συνήθη βάση»

<u>Βάση</u> για τον $\mathcal{E}$ είναι
τριάδα οποιωνδήποτε διαν.
$\{\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w}\}$ που είναι
γραμμικώς ανεξάρτητα
δηλ. <u>οχι</u> <u>συνεπίπεδα</u>

Μια βαση $\{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ είναι
<u>ορθοκανονική</u> (ΟΚ) αν

$$\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$i, j \in \{1, 2, 3\}$

δέλτα του Kronecker

$i=j \Rightarrow \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_i = 1 = |\underset{\sim}{e}_i|^2 \Rightarrow$

$\underset{\sim}{e}_i$ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ

$i \neq j \Rightarrow \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j = 0 \Rightarrow$ κάθετα μτξ τους.

Θμ. Συνιστώσες διανύσματος

$\forall \underset{\sim}{u} \in \mathcal{E} \quad \exists!\ u_i \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\underset{\sim}{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \underset{\sim}{e}_i = u_1 \underset{\sim}{e}_1 + u_2 \underset{\sim}{e}_2 + u_3 \underset{\sim}{e}_3$$

οπου $\underset{\sim}{e}_i$ δεδομένα διαν. βάσης.

Ασκηση Αποδείξτε το.

Τα u_i στο Θμ. λέγονται οι συνιστώσες του διαν. $\underset{\sim}{u}$ στη βαση των $\underset{\sim}{e}_i$.

Θμ. Αναπαράστασης Γραμμικών Βαθμωτών Συναρτήσεων

Έστω $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμική

δηλ. $\varphi(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{u}) = \alpha \varphi(\mathbf{v}) + \beta \varphi(\mathbf{u})$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}$$

Τότε $\exists ! \ \mathbf{a} \in \mathcal{E}$ τ.ω.

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}$$

<u>ΤΑΝΥΣΤΗΣ</u> $\mathbf{A}$ είναι

γραμμικός μετασχηματισμός στον $\mathcal{E}$

δηλ. γραμμική συνάρτηση

$\mathbf{S} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δηλ.

$\mathbf{v} \in \mathcal{E}$ τότε $\mathbf{S}(\mathbf{v}) \in \mathcal{E}$ τ.ω.

$$\mathbf{S}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{S}(\mathbf{u}) + \beta \mathbf{S}(\mathbf{v})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}$$

Αντί για $\mathbf{z} = \mathbf{S}(\mathbf{u})$ γράφω

$\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{u}$ και το $\underset{\sim}{S}$

λέγεται <u>τανυστής</u>. ΤΑΝ

<u>Σχόλιο</u>. 2 ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{T}$

<u>ισούνται</u> αν

$$\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{u} \quad \forall \underset{\sim}{u} \in E$$

<u>Προσοχή</u> Ποτέ δε γράφουμε

$\cancel{\underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{u}}$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ

<u>Αθροισμα</u> ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{T}$ είναι

ο ΤΑΝ $\underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{T}$ τ.ω.

$$(\underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{T})\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{u} \quad \forall \underset{\sim}{u} \in E$$

Πολ/μος ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ με βαθμωτό α

είναι ο ΤΑΝ $\alpha\underset{\sim}{S}$ τ.ω.

$$(\alpha \underset{\sim}{S})\underset{\sim}{u} = \alpha(\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{u}) \quad \forall \underset{\sim}{u} \in E.$$

<u>Μηδενικός ΤΑΝ</u> $\underset{\sim}{O}$

$$\underset{\sim}{O}\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} \quad \forall \underset{\sim}{u} \in E$$

Μοναδιαίος ΤΑΝ $\underset{\sim}{1}$
(ταυτοτικός)

$$\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u} \quad \forall \underset{\sim}{u} \in E$$