ΜΘΥ ΔΙΑΛΕΞΗ 4

<u>Σχόλιο</u>: στο χώρο $\mathbb{R}^3$ οι γραμμικοί μετασχηματισμοί είναι πίνακες 3×3.

Ο χώρος $\mathcal{E}$ «μοιάζει» με τον $\mathbb{R}^3$ (ισόμορφοι). <u>Ερώτηση</u>: πώς σχετίζονται οι ΤΑΝ με τους πίνακες 3×3;

Έστω ΟΚ βάση $\{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$

Κάθε διαν. $\underset{\sim}{u}\in\mathcal{E}$ έχει <u>συνιστώσες</u>

$u_i = \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{e}_i$ τ.ω. $\underset{\sim}{u} = u_i\underset{\sim}{e}_i$.

Δεδομένης της βάσης $\underset{\sim}{e}_i$ το $\underset{\sim}{u}\in\mathcal{E}$ αντιστοιχεί με μοναδικό διάνυσμα

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

γραμμή όχι σκουληκάκι

που είναι η τριάδα των συνιστωσών u_i του $\underset{\sim}{u}\in\mathcal{E}$ στη συγκεκρ. βάση.

<u>Συνιστώσες</u> του ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ στην ΟΚ βάση $\{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ είναι τα

9 βαθμωτά

$$S_{ij} = \underset{\sim}{e}_i \cdot \left(\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{e}_j\right)$$

Δηλαδή S_{ij} = η συνιστώσα, στην κατεύθυνση $\underset{\sim}{e}_i$, του διανύσματος $\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{e}_j$

Προσοχή $\exists\ \infty$ ΟΚ βάσεις.
Ένα διαν. $\underset{\sim}{u}$ ή ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ έχει διαφορετικές συνιστώσες σε διαφορετικές βάσεις

Ο πίνακας (ή μητρώο) συνιστωσών της ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ στην ΟΚ βάση $X = \{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ είναι

$$[\underset{\sim}{S}]^{X} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

Θμ 1 Αν $\underset{\sim}{v} = v_i \underset{\sim}{e}_i$, $\underset{\sim}{u} = u_i \underset{\sim}{e}_i$,
και $S_{ij} = \underset{\sim}{e}_i \cdot \left(\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{e}_j\right)$ τότε

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{u} \iff v_i = S_{ij} u_j$$

δηλ. $$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

<u>Αποδ:</u> ότι $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{u} \Rightarrow v_i = S_{ij} u_j$

$$\underset{\sim}{v} = v_i \underset{\sim}{e}_i, \quad \underset{\sim}{u} = u_j \underset{\sim}{e}_j$$

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{S}(u_j \underset{\sim}{e}_j) =$$

$$= u_j \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{e}_j = \underset{\sim}{v}$$

λόγω γραμμικότητας του ΤΑΝ

Όμως

$$v_i = \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{v}$$

$$= \underset{\sim}{e}_i \cdot (u_j \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{e}_j) = u_j \underbrace{\underset{\sim}{e}_i \cdot (\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{e}_j)}$$

$$= u_j S_{ij} \quad (\text{από ορισμό } S_{ij})$$

$$= S_{ij} u_j \Rightarrow v_i = S_{ij} u_j$$

υπόλοιπο προαιρετική άσκηση.

Α.. 2

α') $[\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}]_{ij} = a_i b_j$

β') $\underset{\sim}{S} = S_{ij}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$

γ') $[\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}]_{ij} = A_{ik} B_{kj}$

δηλ. $[\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}]^{\mathbb{X}} = [\underset{\sim}{A}]^{\mathbb{X}} [\underset{\sim}{B}]^{\mathbb{X}}$

ο πίνακας συνιστωσών του γινομένου ΤΑΝ ισούται με το γινόμενο των πινάκων τους.

δ') $[\underset{\sim}{S}^T]_{ij} = S_{ji}$

Απόδ. Άσκηση

Σχόλιο Τα α'), γ') δ') είναι «αναμενόμενα». Το β') λέει ότι κάθε ΤΑΝ είναι γραμμικός συνδυασμός των 9 ΤΑΝ που προκύπτουν από

ΤΑΝ γινόμενο των διαν. κάποιας ΟΚ βάσης με τα ίδια. $\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$

Έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι το <u>σύνολο των ΤΑΝ του</u> $\mathcal{E}$ είναι 9-διάστατος διαν. χώρος με βάση τα $\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$.

Ορίζω

$$\mathcal{L}in = \{ \underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A} \ \text{ΤΑΝ} \}$$

Πχ. $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{L}in \Leftrightarrow \underset{\sim}{B}$ είναι ΤΑΝ

<u>Ίχνος</u> ΤΑΝ (trace) είναι συνάρτηση

$$\mathrm{tr} : \mathcal{L}in \to \mathbb{R}$$

που

α') <u>είναι γραμμική</u> δηλ.

$$\mathrm{tr}(\alpha \underset{\sim}{S} + \beta \underset{\sim}{T}) = \alpha \, \mathrm{tr}\underset{\sim}{S} + \beta \, \mathrm{tr}\underset{\sim}{T}$$

χωρίς παρενθέσεις.

β') $\mathrm{tr}(\underset{\sim}{u} \otimes \underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{T} \in \mathcal{L}in, \ \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in \mathcal{E}.$

$\underline{Θμ\,3}$: $\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{S} = S_{ii} = S_{11}+S_{22}+S_{33}$

όπου S_{ij} συνιστώσες τ8 ΤΑΝ S σε κάποια ΟΚ βάση.

$\underline{Αποδ.}$ Από β') τ8 Θμ. 2.

$$\underset{\sim}{S} = S_{ij}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{S} = \mathrm{tr}\big(\underbrace{S_{ij}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j}_{\text{άρα γραμμικός συνδυασμός}}\big) \overset{\text{ιδιότητα α')}}{=}$$

$$= S_{ij}\, \mathrm{tr}(\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) \overset{\text{ιδιότητα β')}}{=} S_{ij}\, \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j$$

$$\overset{\text{ορισμός ΟΚ βάσης}}{=} S_{ij}\,\delta_{ij} \overset{\text{ιδιότητα αντικατ.}}{=} S_{ii} = S_{jj}\,.$$

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΤΑΝΥΣΤΕΣ

$\underline{Ερώτηση:}$ $\exists$ ΤΑΝ που να διατηρεί μήκη ΔΙΑΝ και γωνίες μεταξύ τους;

Τανυστής $\underset{\sim}{Q}$ λέγεται <u>ορθογώνιος</u> αν διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα δηλ. αν

$$(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{u})\cdot(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v} \quad \forall\, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in \mathcal{E}$$

Σχόλιο άρα οι ορθογώνιοι ΤΑΝ διατηρούν μήκη ΔΙΑΝ και γωνίες μεταξύ τους.

Θμ.4 ΤΑΝ $\underset{\sim}{Q}$ είναι ορθογώνιος

$$\iff \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q}.$$

Σχόλιο: $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ή/και $\beta = 0$.

$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b} = 0 \not\Rightarrow$ ότι $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$ ή $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$ διότι μπορεί να είναι κάθετα μεταξύ τους.

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} \not\Rightarrow \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} \text{ ή } \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{O}$$

Αν ισχύει για $\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ τότε πρέπει $\det \underset{\sim}{A} = 0$ (θα το ορίσουμε) αλλά δεν είναι αναγκαίο το $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{O}$.

Λήμμα α') Έστω $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{E}$.

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{u} = 0 \quad \forall\, \underset{\sim}{u} \in E$$

$$\Longrightarrow \quad \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}.$$

β') Έστω ΤΑΝ $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{L}in$.

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} \quad \forall\, \underset{\sim}{u} \in E$$

$$\Longrightarrow \quad \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{O}.$$

<u>Αποδ.</u> α') $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{u} = 0 \quad \forall\, \underset{\sim}{u} \in E$

$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{a} = 0$ διαλέγοντας $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{a}$

$\Rightarrow \quad |\underset{\sim}{a}|^2 = 0 \Rightarrow |\underset{\sim}{a}| = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}.$

β') $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} \quad \forall\, \underset{\sim}{u}$ ορισμός του μηδεν. ΤΑΝ $\underset{\sim}{O}$. /.

<u>Σχόλιο</u>. Χωρίς το $\forall\, \underset{\sim}{u} \in E$ δεν ισχύει το λήμμα.

<u>Αποδ. Θμ. 4</u>

$\underset{\sim}{Q}$ ορθογ. $\Longleftrightarrow$

$\forall \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in E$

$$\left\{\begin{aligned}
&\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v} = 0 \iff \\
&\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v} = 0 \iff \\
&\underset{\sim}{u} \cdot \left[\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{v}\right] = 0 \iff \\
&\underset{\sim}{u} \cdot \left[\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{v}\right] = 0 \iff \\
&\underset{\sim}{u} \cdot \left[\left(\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} - \underset{\sim}{1}\right)\underset{\sim}{v}\right] = 0 \iff \\
&\underset{\sim}{u} \cdot \left[\left(\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} - \underset{\sim}{1}\right)\underset{\sim}{v}\right] = 0 \quad \forall \underset{\sim}{u} \iff
\end{aligned}\right.$$

(λήμμα α')

$$\iff \left(\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} - \underset{\sim}{1}\right)\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0} \quad \forall \underset{\sim}{v}$$

Λήμμα β')

$$\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} - \underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{O}$$

$$\iff \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1}\,.$$

Σχόλιο Μπορούμε να δείξουμε ότι οποιοσδήποτε ορθογώνιος ΤΑΝ είναι ή προφή, ή ανάκλαση

ή γινόμενο προφής και ανάκλασης.