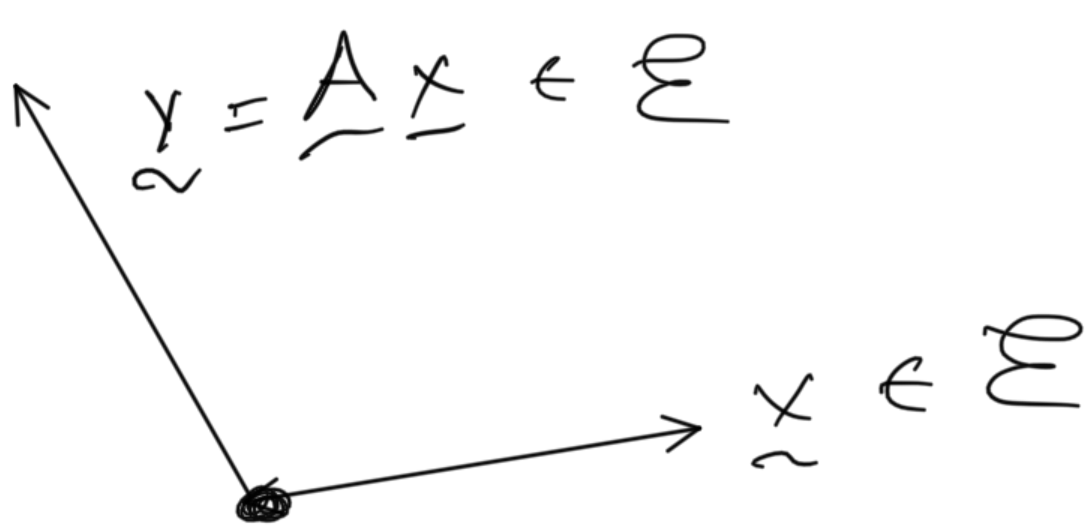
ΜΘΥ ΔΙΑΛΕΞΗ 2

Θυμάμαι ότι ΤΑΝ (τανυστής) σημαίνει γραμμικός μετασχηματισμός διανυσμάτων.

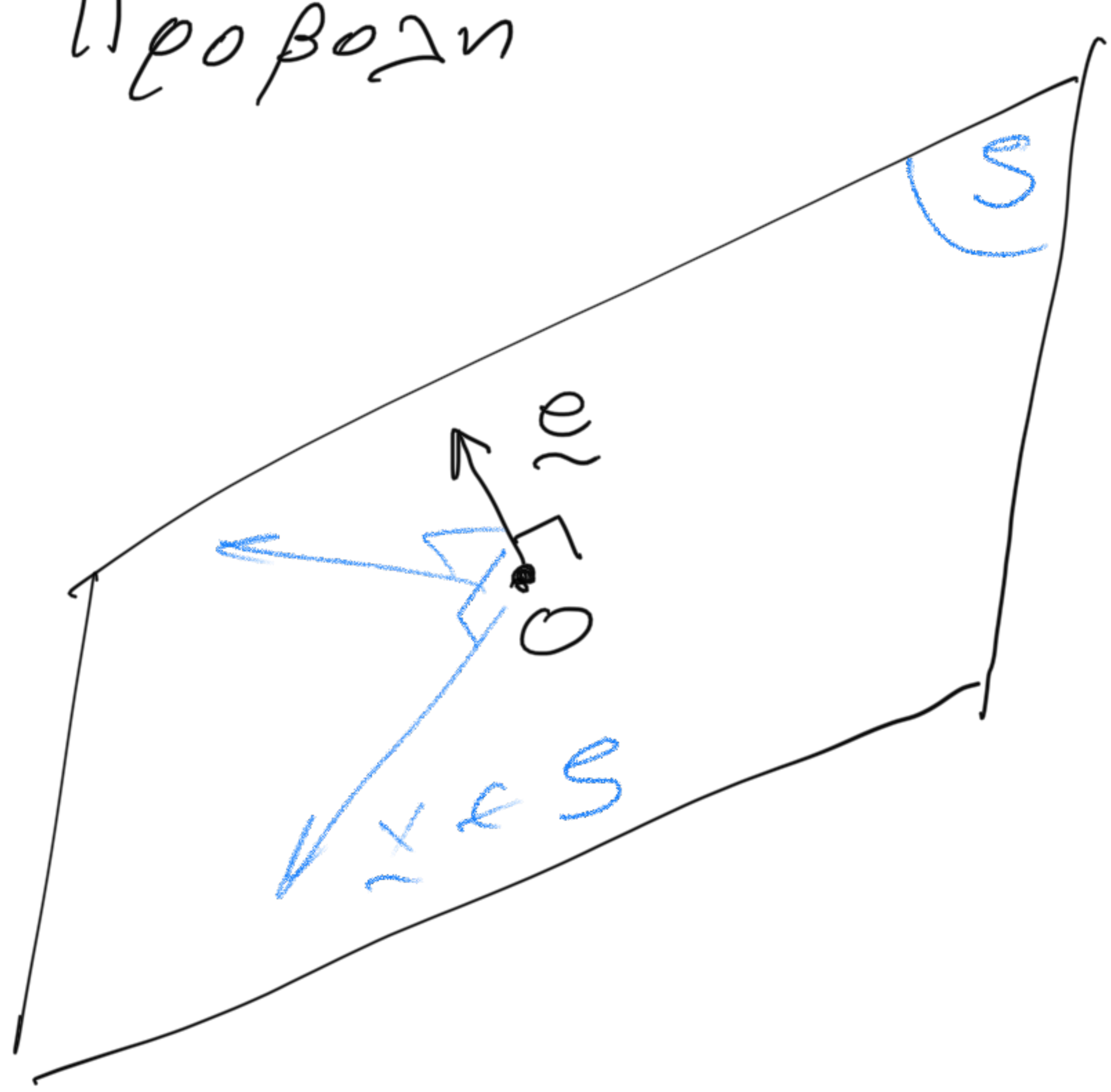
ΤΑΝ $\underset{\sim}{A}$

$$\mathcal{E} \qquad \underset{\sim}{x} \in \mathcal{E} \qquad \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} \in \mathcal{E}$$



Παραδείγματα ΤΑΝ

1) Προβολή

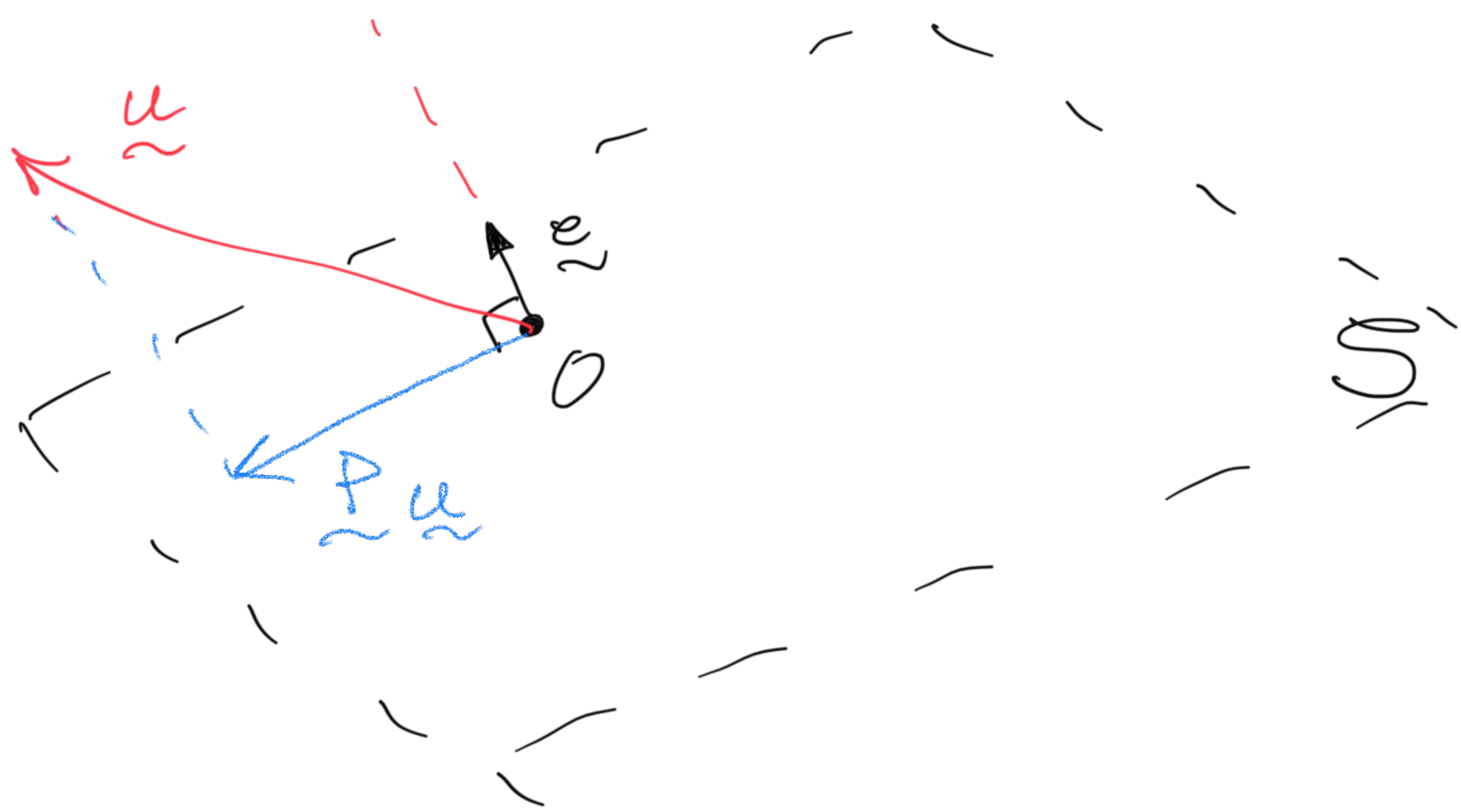


Έστω δεδομένο διαν. $\underset{\sim}{e} \in \mathcal{E}$, $\underset{\sim}{e} \neq \underset{\sim}{0}$ και ορίζω επίπεδο κάθετο στο $\underset{\sim}{e}$

$$S = \{ \underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{x} \in \mathcal{E},\ \underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{e} = 0 \}$$

Ορίζω $\underset{\sim}{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ότι για $\underset{\sim}{u} \in \mathcal{E}$,

$\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{u}$ = προβολή του $\underset{\sim}{u}$ στο S



$\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{u}$ σκιά του διανύσματος $\underset{\sim}{u}$ πάνω στο επίπεδο S.

<u>Ερώτηση</u>: Γιατί $\underset{\sim}{P}$ είναι ΤΑΝ;

Είναι το P γραμμικό;

μετασχηματισμός;

Η προβολή του $\underset{\sim}{\alpha u}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ είναι α φορές η προβολή του $\underset{\sim}{u}$ (σκιά)

Η προβολή (σκιά) του αθροίσματος $\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}$ είναι $\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{v}$ δηλ.

$$\underset{\sim}{P}(\alpha \underset{\sim}{u}) = \alpha \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{u}$$

$$\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{v}$$

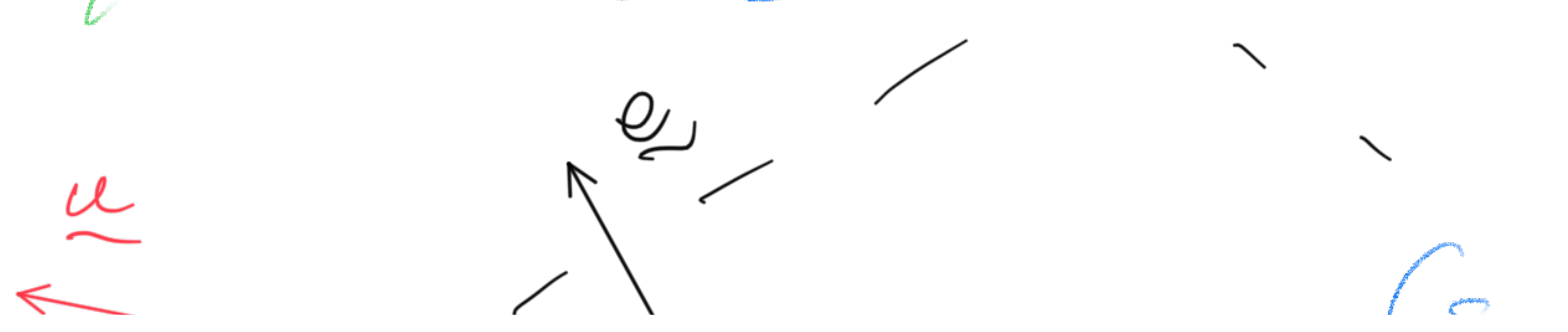
από γεωμετρία της σκιάς

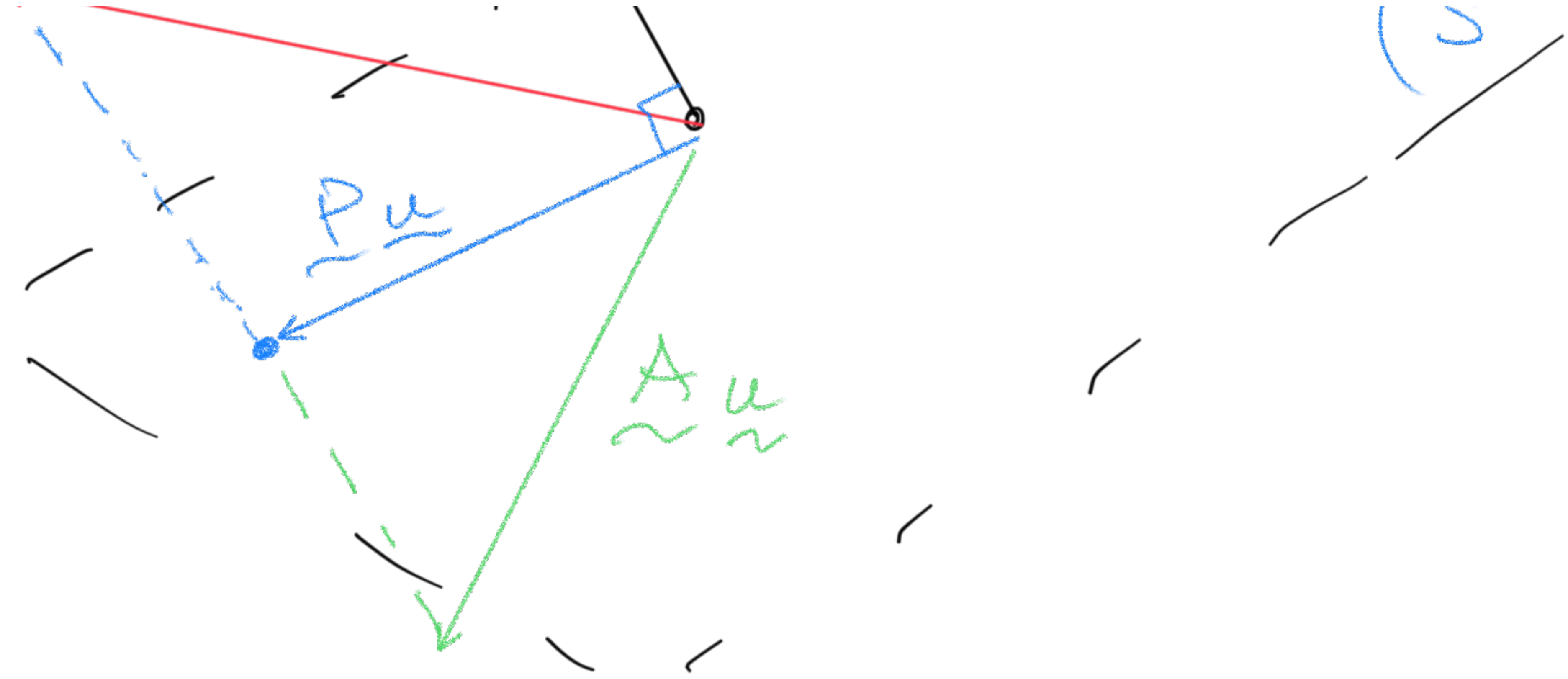
$\Rightarrow \underset{\sim}{P}$ γραμμικό $\Rightarrow$ ΤΑΝ.

2) Ανάκλαση $\underset{\sim}{A}$

με «καθρέφτη» το επίπεδο S

$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{u}$ ανάκλαση του $\underset{\sim}{u} \in E$ ως προς επίπεδο S.



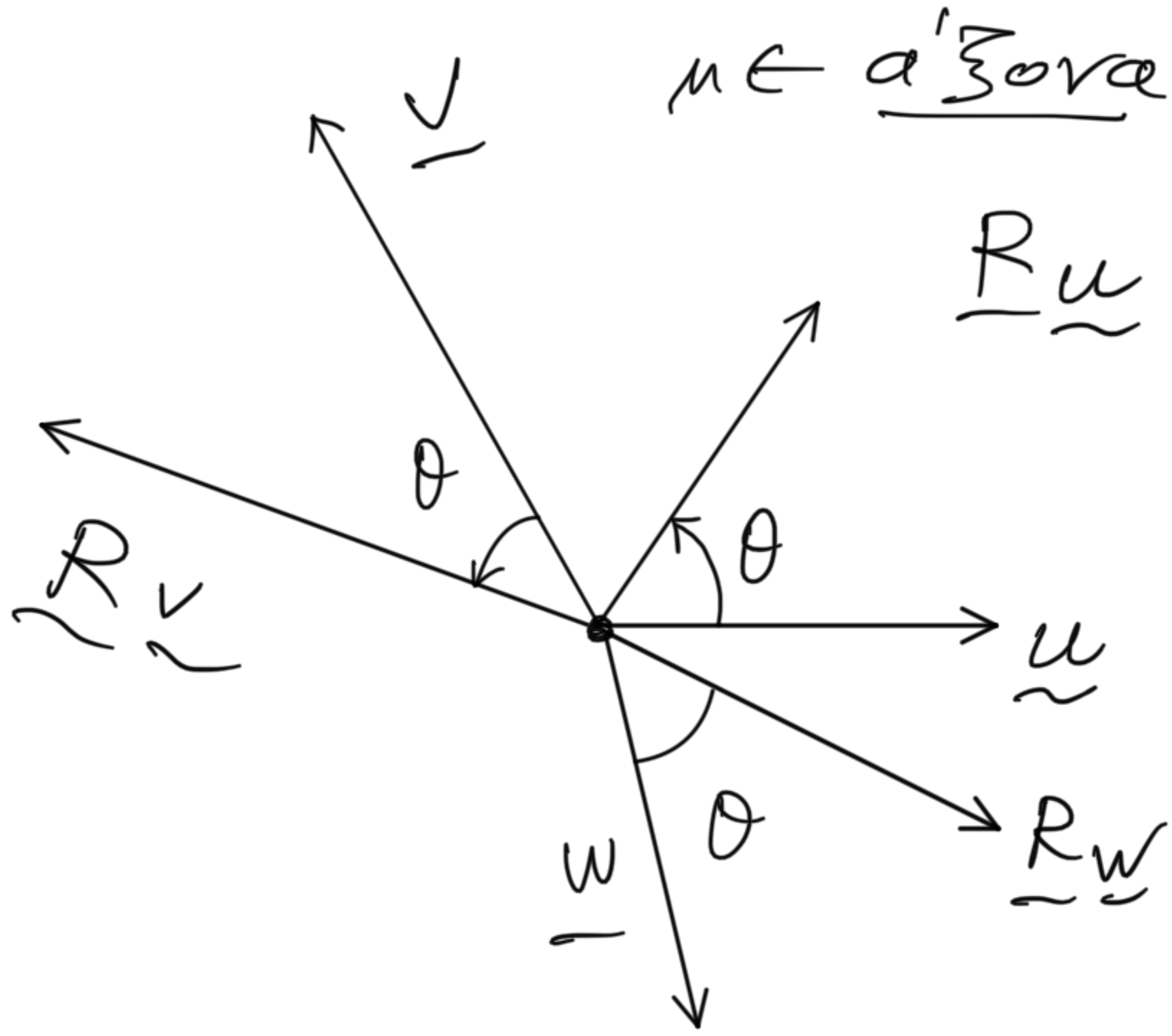


<u>Άσκηση</u> Δείξτε ότι

$$\underset{\sim}{A} = 2\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{1}$$

<u>Σχόλιο</u> Το επίπεδο S είναι 2-διάστατος υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

3) <u>Στροφή</u> $\underset{\sim}{R}$ (περιστροφή) με <u>άξονα</u> $\underline{e}$ κατά <u>γωνία</u> θ.



Γινόμενο ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{T}$ είναι ο ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{T}$ (χωρίς τελίτσες)

τ.ω.

$$(\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{S}(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{u}) \quad \forall \underset{\sim}{u} \in E$$

Σχόλιο αν θεωρήσω τα $\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{T}$ συναρτήσεις, τότε $\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{T}$ είναι η σύνθεσή τους:

$$\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{T}$$

Σημ. Γενικά $\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{T} \neq \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{S}$ όπως στους πίνακες.

Ορίζω δυνάμεις ΤΑΝ

$$\underset{\sim}{S}^2 = \underset{\sim}{S}\underset{\sim}{S}, \quad \underset{\sim}{S}^{n+1} = \underset{\sim}{S}^n \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}\underset{\sim}{S}^n$$

για $n \in \mathbb{N}$ (φυσικούς).

$$\underset{\sim}{S}^0 = \underset{\sim}{1}.$$

Σχόλιο είναι ανάλογο με το γινόμενο πινάκων 3x3.

Θεώρημα 1) Για κάθε ΤΑΝ S

$\exists!$ TAN $\underset{\sim}{S}^T$ τ.ω.

$$\underset{\sim}{u} \cdot (\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{u}) \cdot \underset{\sim}{v} \quad \forall\, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in \mathcal{E}$$

<u>Θμ. 2)</u> α') $(\underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{T})^T = \underset{\sim}{S}^T + \underset{\sim}{T}^T$

β') $(\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{T})^T = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{S}^T$

γ') $(\underset{\sim}{S}^T)^T = \underset{\sim}{S}$

<u>Αποδ.</u> β').

$$\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{S}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{S}(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v}) =$$

απο Θμ. 1

$$= (\underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{u}) \cdot (\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{u}) \cdot \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v}$$

απο Θμ. 1

$$= \underset{\sim}{T}^T (\underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{u}) \cdot \underset{\sim}{v} = (\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{S}^T) \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v}$$

απο ορισμό γινομένου

<u>Σχόλια</u> 1) Το $\underset{\sim}{S}^T$ λέγεται το <u>ανάστροφο</u> του $\underset{\sim}{S}$ ή ο <u>ανάστροφος</u> <u>TAN</u> <u>τν</u> $\underset{\sim}{S}$

2) Οι μπλέ παρενθέσεις είναι «προαιρετικές».

Ο ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ λέγεται συμμετρικός

αν $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^T$

Ο ΤΑΝ $\underset{\sim}{W}$ λέγεται αντισυμμετρικός ή λοξός

αν $\underset{\sim}{W} = -\underset{\sim}{W}^T$.

ΣΥΜΒΑΣΗ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ (Einstein)

Παρατήρηση: Σε εκφράσεις (με συνιστώσες) με δείκτες $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ και αθροίσματα

π.χ. $\underset{\sim}{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \underset{\sim}{e}_i$, $\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$

ο δείκτης επαναλαμβάνεται σχεδόν πάντοτε. Επίσης σε εκφράσεις με επαναλαμβανόμενους δείκτες υπάρχει σχεδόν πάντοτε άθροισμα

ΚΑΝΟΝΕΣ

1) Οι λατινικοί δείκτες i, j, k

παίρνουν πάντα τιμές 1, 2, 3 και το ότι $i, j, k, \ldots \in \{1, 2, 3\}$ υπονοείται και δε γράφεται.

π.χ. $u_i = v_i$ είναι 3 εξισώσεις: $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3$.

π.χ. $$S_{ij} = S_{ji}$$ είναι ισοδύναμο με 9 εξισώσεις.

2) Αν σε <u>μονώνυμο</u> (τμήμα μαθ/κης έκφρασης που δεν περιέχει +, −, = αλλά μόνο πιθανώς γινόμενα π.χ.

$$u_i + W_{ij} v_j + p_k z_k d_i = m_{ij} q_j + s_i$$

5 μονώνυμα

εμφανίζεται δείκτης <u>2 φορές</u> τότε λέγεται <u>επαναλαμβανόμενος δείκτης</u> και υπονοείται άθροισμα των τιμών του μονωνύμου για τις τιμές του δείκτη (1, 2, 3).

π.χ. $u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

$u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

δηλ. σημαίνει $\sum_{i=1}^{3} u_i v_i$ αλλά

το $\sum_{i=1}^{3}$ δεν γράφεται.

π.χ. $A_{ij} B_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{ij}$

Τα $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3}$ δεν γράφονται.

3) Απαγορεύεται η <u>επανάληψη</u> δείκτη πάνω από 1 φορά σε μονώνυμο.

<u>ΛΑΘΟΣ</u>	<u>Σ</u>ΩΣΤΟ
$u_i v_i w_i$	$u_i v_i w_j v_j$
$A_{ii} B_{ii}$	$A_{ii} B_{jj}$

<u>Σημ.</u>

Χωρίς τον 3).

$A_{ii} B_{jj} = (A_{11} + A_{22} + A_{33})(B_{11} + B_{22} + B_{33})$

$A_{11} B_{11} + A_{22} B_{22} + A_{33} B_{33}$

Αυτά τα 2 δεν είναι ίσα!

4) Δείκτες που εμφανίζονται 1 φορά σε μονώνυμο (δεν επαναλαμβάνονται) λέγονται ελεύθεροι δείκτες.
Κάθε μονώνυμο μαθ/κής έκφρασης πρέπει να περιέχει τους ίδιους ελεύθερους δείκτες, εκτός εάν είναι σταθερά.

π.χ.

$$u_i = v_i + w_i$$

i ελεύθερος

$$A_{ij} = B_{ik} C_{kj} + D_{ij}$$

i, j ελεύθεροι και είναι παντού

k επαναλαμβ. και είναι μόνο στο 2° μονώνυμο.

$$y_i = A_{ij} x_j$$

i ελεύθερο

j επαναλ.

άθροισμα ως προς j

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$z_i = w_i + 3$$

σταθερά.

Λάθη	Παραβίαση
~~$u_i = v_j$~~	κανόνας 4
~~$A_{ij} = B_{ij} c_j$~~	καν. 4.
~~$u_i v_i w_i$~~	καν. 3

Σημ. Μπορώ να ξαναβαφτίσω επαναλαμβ. δείκτες.

π.χ.

$$u_i v_i = u_j v_j = u_k v_k$$

διότι όλα τα παραπάνω ισούνται

με $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

$$A_{ii} = A_{jj}$$

$$A_{ii} + B_{jj} = C_{kk}$$

$$a_{ik} b_k + c_i = d_{mi} c_{mp} q_p$$

π.χ. Γινόμενο Πινάκων 3x3

$$[AB]_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

$$[ABCD]_{ij} = A_{ik} B_{km} C_{ml} D_{lj}$$

k, m, l επαν.

i, j ελεύθερα.

5) «Παραθυράκια» Σε περίπτωση που θέλουμε να παραβούμε τους κανόνες 2, 3, 4 το κάνουμε ως εξής:

1) $$\underset{\sim}{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i$$ γράφω

2) $$\underset{\sim}{A} \, \underset{\sim}{e}_i = \lambda_i \underset{\sim}{e}_i$$ γράφω <u>ΧΑ</u> (χωρίς άθροισμα)

δηλ. δηλώνω ότι i ελεύθερος

3 εξισώσεις (για i = 1, 2, 3)

π.χ.

γράφω

3) $u_i = v_j \quad , \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}.$

δηλ. $u_1 = u_2 = u_3 = v_1 = v_2 = v_3.$

<u>Λήμμα</u> <u>Ιδιότητα αντικατάστασης δεικτών</u> της δ του Kronecker

α') $\delta_{ij} u_j = u_i$

β') $A_{i \dots j \dots} \delta_{ik} \delta_{jp} = A_{k \dots p \dots}$

<u>Αποδ.</u> Άσκηση.

π.χ. $$A_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = A_{pq}.$$