ΜΘΥ ΔΙΑΛΕΞΗ 3

<u>Αποδ.</u> Ιδιότητας αντικατάστασης τη δ_{ij}

Θα δείξω μόνο το

$$a_i \delta_{ij} = a_j \qquad (1)$$

<u>Σχόλιο</u>: i επαναλ., j ελεύθερος

$$(1) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i \delta_{i1} = a_1 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \delta_{i2} = a_2 \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \delta_{i3} = a_3. \qquad (4)$$

Κοιτάω τη (2)

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \delta_{i1} = a_1 \underbrace{\delta_{11}}_{=1} + a_2 \underbrace{\delta_{21}}_{=0} + a_3 \underbrace{\delta_{31}}_{=0}$$

από ορισμό δ_{ij}

$$= a_1$$

$\Rightarrow$ ισχύει η (2).

Κοιτάω (3)

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \delta_{i2} = a_1 \underbrace{\delta_{12}}_{=0} + a_2 \underbrace{\delta_{22}}_{=1} + a_3 \underbrace{\delta_{32}}_{=0}$$

$$= a_2 \Rightarrow (3)$$

(4) ομοίως.

Ερώτηση: Τι σημαίνει a_{ii}

$$a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

επαναλ.

Παραδείγματα

1) $a_{ij}\delta_{ij} = a_{jj} = a_{ii}$

επαναλ.

2) $\boxed{\delta_{ii} = 1 \quad \text{ΛΑΘΟΣ}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

i επαναλαμβ.

άρα $\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} =$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1}_{=3} \neq 1$$

$$\boxed{\delta_{ii} = \delta_{kk} = \delta_{jj} = 3}$$

3) $\delta_{ij}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\delta_{ij} =$

$\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2 + \delta_{13}^2 + \delta_{21}^2 + \delta_{22}^2 + \delta_{23}^2$

$+ \delta_{31}^2 + \delta_{32}^2 + \delta_{33}^2 =$

$= 1+0+0+0+1+0+0+0+1 = 3$

<u>Λημμα.</u>

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{jj} = 3$$

Θυμαίμαι <u>συνιστωσες</u> <u>διαν.</u> $\underset{\sim}{u} \in E$ στη βαση $\{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ είναι τα $u_i \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\underset{\sim}{u} = u_i \underset{\sim}{e}_i = u_1 \underset{\sim}{e}_1 + u_2 \underset{\sim}{e}_2 + u_3 \underset{\sim}{e}_3$$

<u>Θμ.</u> Αν $\underset{\sim}{e}_i$ ΟΚ τοτε.

α') $$u_i = \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{e}_i \qquad (2)$$

β) Αν επίσης $\underset{\sim}{v} = v_i \underset{\sim}{e}_i \in \mathcal{E}$

$$\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v} = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \qquad (3)$$

Αποδ.

παίρνω εσωτ. γιν. με $\underset{\sim}{e}_i$

$\underset{\sim}{u} = u_i \underset{\sim}{e}_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{e}_i = (u_i \underset{\sim}{e}_i) \cdot \underset{\sim}{e}_i$ ΛΑΘΟΣ

ελεύθερο $3i$ παρα-επαναλ.

τουλ. 2 παραβάσεις.

συνεχίζω χαλαρά

$$u \cdot \underset{\sim}{e}_i = u_i \underbrace{\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_i}_{\delta_{ii}=3} = 3u_i$$

ΠΑΤΑΤΑ

Σωστό: Παίρνω εσωτ. γινόμενο με $\underset{\sim}{e}_j$ (άλλος δείκτης)

(τα i δεν μπορώ να τα ξαναβάλω στο ίδιο μονώνυμο).

$$\underset{\sim}{u} = u_i \underset{\sim}{e}_i \Rightarrow \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{e}_j = (u_i \underset{\sim}{e}_i) \cdot \underset{\sim}{e}_j$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{e}_j = u_i (\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j)$$

όμως ορισμός ΟΚ βάσης

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{e}_j = u_i \delta_{ij} = u_j$$

$$\Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{e}_j = u_j$$

$$\Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{e}_i = u_i \Rightarrow (2).$$

Αποδ. β') Θέλω να δείξω ότι

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_i v_i \qquad (3)$$

Ξέρω ότι $\underline{u} = u_i \underline{e}_i$

$\underline{v} = v_i \underline{e}_i$

οπότε

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \cancel{(u_i \underline{e}_i) \cdot (v_i \underline{e}_i)}$$

~~ΛΑΘΟΣ~~

~~4i~~

Σωστό.

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (u_i \underline{e}_i) \cdot (v_k \underline{e}_k)$$

ουδήποτε εκτός από i.

$$= u_i \underline{e}_i \cdot (v_k \underline{e}_k) = u_i v_k \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k$$

ορισμός $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = \delta_{ik}$

$$= u_i v_k \delta_{ik} = u_k v_k$$

$$= u_i v_i \Rightarrow (3)$$

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε το Θμ χωρίς να βλέπετε σημειώσεις.

<u>Εναλλάκτης</u> (Σύμβολο Μετάθεσης)

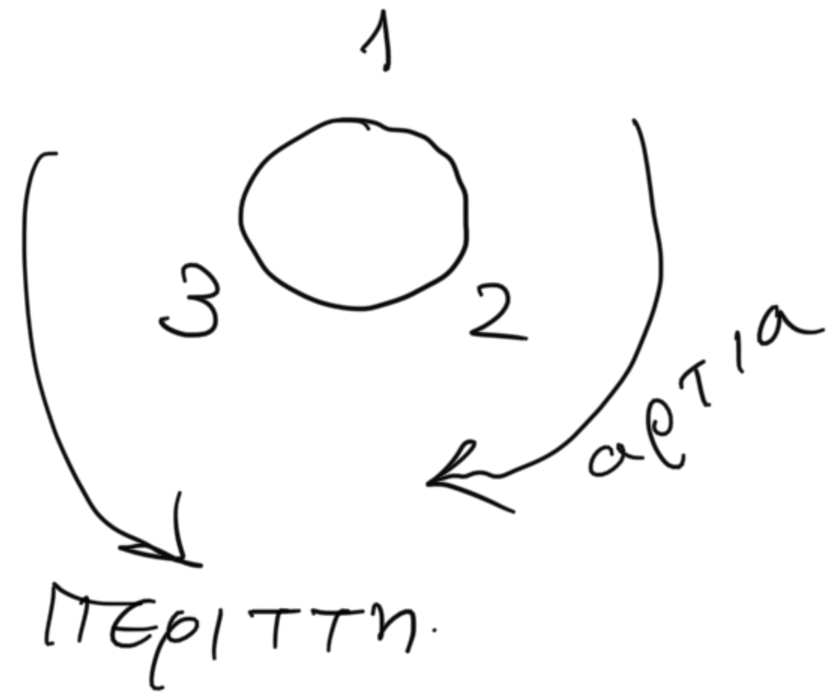
Σύμβολο Levi-Civita 3-Δ.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (i,j,k) = \text{άρτια μετάθεση του } (1,2,3) \\ -1, & (i,j,k) = \text{περιττή μετάθεση του } (1,2,3) \\ 0, & \text{κάποιοι από } i, j, k \text{ ισούνται} \end{cases}$$

π.χ. $\varepsilon_{123} = 1 = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1.$$

$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{333} = \varepsilon_{133} = \dots = 0.$$



Σχόλιο.

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}$$

αντισυμμετρικο ως προς τα ζευγη δεικτων.

ενω $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ συμμετρικος

Διανυσματικο Γινομενο των

$$\underset{\sim}{a} = a_i \underset{\sim}{e}_i , \quad \underset{\sim}{b} = b_i \underset{\sim}{e}_i \in \mathcal{E}$$

$$\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} \in \mathcal{E}$$

αν $\underset{\sim}{c} = c_i \underset{\sim}{e}_i$ τοτε

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k\, \underset{\sim}{e}_i$$

Μπορείτε να δείξετε ότι

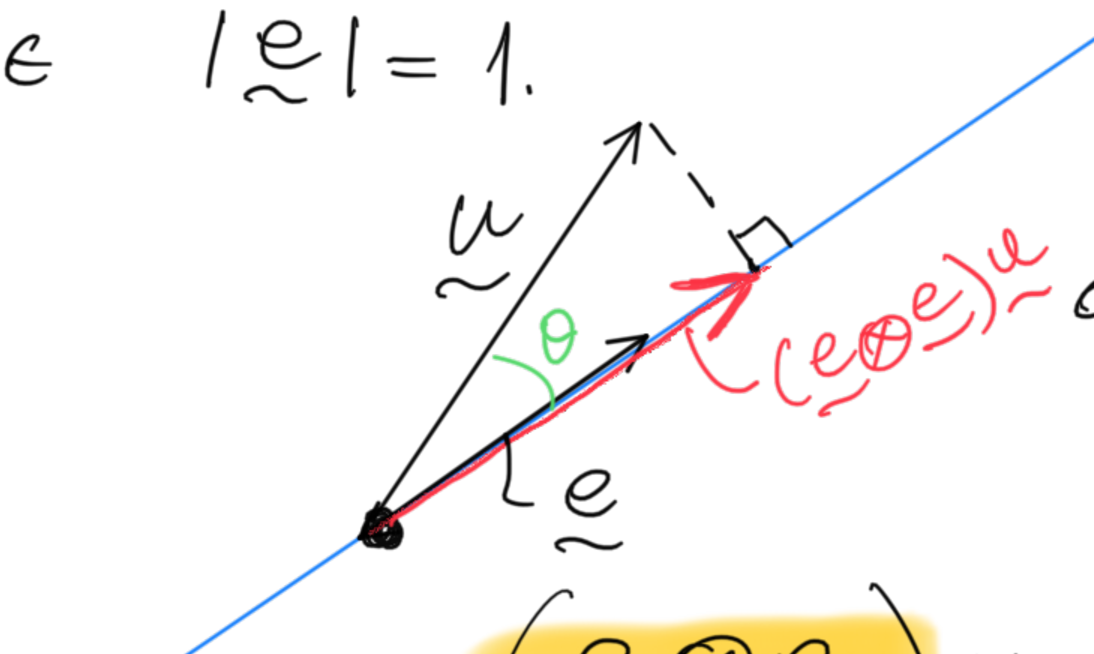
$$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = \det\begin{pmatrix} \underset{\sim}{e}_1 & \underset{\sim}{e}_2 & \underset{\sim}{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

ΤΑΝΥΣΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

των διαν. $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathcal{E}$ είναι ο ΤΑΝ $\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}$ τ.ω.

$$\left(\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}\right) \underset{\sim}{x} = \left(\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{x}\right) \underset{\sim}{a} \qquad \forall\, \underset{\sim}{x} \in \mathcal{E}$$

Παράδειγμα. Έστω $\underset{\sim}{e} \in \mathcal{E}$ με $|\underset{\sim}{e}| = 1$.



Τι σημαίνει ο ΤΑΝ $\left(\underset{\sim}{e} \otimes \underset{\sim}{e}\right)$;

$$\left(\underset{\sim}{e} \otimes \underset{\sim}{e}\right) \underset{\sim}{u} = \left(\underset{\sim}{e} \cdot \underset{\sim}{u}\right) \underset{\sim}{e}$$

$$= \big(\underbrace{|\underset{\sim}{e}|}_{1}\,|\underset{\sim}{u}|\cos\theta\big)\,\underset{\sim}{e}$$

$$(\underset{\sim}{e}\otimes\underset{\sim}{e})\,\underset{\sim}{u} = |\underset{\sim}{u}|\cos\theta\,\underset{\sim}{e}$$

Το $(\underset{\sim}{e}\otimes\underset{\sim}{e})\underset{\sim}{u}$ είναι η διανυσματική προβολή του $\underset{\sim}{u}$ στον άξονα $\underset{\sim}{e}$.

Ο ΤΑΝ $\underset{\sim}{e}\otimes\underset{\sim}{e}$ είναι <u>Τανυστής προβολής</u> στον άξονα του $\underset{\sim}{e}$.

<u>Άσκηση</u> 1) Δείξτε ότι η προβολή σε επίπεδο με κάθετο $\underset{\sim}{e}$ $(|\underset{\sim}{e}|=1)$ είναι

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{e}\otimes\underset{\sim}{e}$$

2) Βρείτε αντίστοιχο τύπο

για την ανάκλαση $\underset{\sim}{A}$

ως προς το επίπεδο με

κάθετο $\underset{\sim}{e}$.