ΜΘΥ ΔΙΑΛΕΞΗ 6

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Βαθμωτό $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι <u>ιδιοτιμή</u> (ιδ/μή) του ΤΑΝ $\underset{\sim}{S} \in Lin$, αν $\exists$ <u>μη μηδενικό</u> <u>διαν.</u> $\underset{\sim}{v} \in E$ τ.ω.

$$\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{v} = \lambda \underset{\sim}{v} \qquad (1)$$

οπότε το $\underset{\sim}{v}$ λέγεται <u>ιδιοδιάνυσμα</u> (ιδ/μα) του ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ που αντιστοιχεί στην ιδ/μή λ.

<u>Σχόλια</u> 1) αν επιτρέπαμε μηδενικά διαν. $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}$ στην (1) τότε θα ίσχυε $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2) Τα ιδ/τα ενός ΤΑΝ είναι τα διαν. των οποίων ο ΤΑΝ αλλάζει μόνο το μήκος (ή και τη φορά) αλλά όχι τη διεύθυνση.

3) Αν $\underset{\sim}{v}$ είναι ιδ/μα του $\underset{\sim}{S}$ με ιδ/μή λ τότε και $\alpha \underset{\sim}{v}$

είναι επίσης για $\alpha \neq 0$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

<u>Χαρακτηριστικός Χώρος</u> της $\underset{\sim}{S}$ που αντιστοιχεί σε ιδ/μη λ είναι ο υπόχωρος της $\mathcal{E}$ που αποτελείται από <u>όλα</u> τα $\underset{\sim}{u} \in \mathcal{E}$ τ.ω.

$$\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{u} = \lambda \underset{\sim}{u}$$

<u>Σχόλιο</u> Δεν ορίζουμε «μιγαδικές ιδ/μες».

<u>Θμ</u> Οι χαρ. χώροι συμμετρικού ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ είναι <u>ορθογώνιοι</u> μτξ. τους και μπορεί να είναι ευθείες, επίπεδα, ή όλος ο χώρος $\mathcal{E}$.

<u>Φασματικό Θμ.</u>

Έστω $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^T$ (συμμ. ΤΑΝ $\in$ Lin).
Τότε $\exists$ ΟΚ βάση $\{\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \underset{\sim}{v}_3\}$ αποτελούμενη από ιδ/τα της $\underset{\sim}{S}$.
Επίσης άν λ_i είναι ιδ/μες της $\underset{\sim}{S}$ αντίστοιχες στα $\underset{\sim}{v}_i$ τότε

$$\underset{\sim}{S} = \sum^{3} \lambda_i \underset{\sim}{v}_i \otimes v_i \qquad (2)$$

$i=1$

(Φασματική Μορφή της $\underset{\sim}{S}$)

Επίσης υπάρχουν μόνο οι εξής 3 περιπτώσεις.

1) Ο $\underline{S}$ έχει 3 διαφορετικές ιδ/μές λ_i. Τότε οι αντίστοιχοι χαρ. χωρ. είναι 3 ευθείες κάθετες μεταξύ τους (3 ορθογώνιοι άξονες).

2) Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ τότε

$$\underset{\sim}{S} = \lambda_1 \underset{\sim}{v}_1 \otimes \underset{\sim}{v}_1 + \lambda(\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{v}_1 \otimes \underset{\sim}{v}_1) \quad (3)$$

ο χαρ. χώρος της λ είναι επίπεδο (2-διάστατος) κάθετο στο $\underline{v}_1$.

3) Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ τότε

$$\underset{\sim}{S} = \lambda \underset{\sim}{1} \quad (5)$$

και ο χαρ. χώρος είναι ο E.

<u>Σχόλιο</u> Θυμάμαι ότι για οκ βάση $\underline{V} = \{\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \underset{\sim}{v}_3\}$

$$\underset{\sim}{S} = S_{ij}\, \underset{\sim}{v}_i \otimes \underset{\sim}{v}_j \quad (6)$$ (άθροισμα με 9 όρων)

όπου S_{ij} συνιστώσες του $\underline{S}$ στη βάση $\underline{Y}$. Αν συγκρίνω την 6 με τη (2) προκύπτει ότι

$$S_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i, & i = j \end{cases}$$

$$\left[S_{ij}\right]^{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

δηλ. (2) λέει ότι σε ΟΚ $\underline{Y}$ των ιδ/μων του $\underline{S}$ ο πίνακας συνιστωσών του $\underline{S}$ είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία τις αντίστοιχες ιδ/μες λ_i.

Ασκηση 1) Αποδείξτε τη παραπάνω πρόταση μέσα στο κόκκινο κουτί αρχίζοντας από τη (2).
δηλ ότι (2) $\Rightarrow$ (7).

Βάση λέγεται κύρια βάση της συμμ. ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ αν είναι ΟΚ και αποτελείται από ιδ/τα του $\underset{\sim}{S}$. Οι ιδ/μές λέγονται και κύριες τιμές, οι ιδιοκατευθύνσεις λέγονται κύριες κατευθύνσεις.

Άσκηση 2 Αποδείξτε ότι αν $\underline{e}_i$ ΟΚ τότε

$$\underline{e}_i \otimes \underline{e}_i = \underset{\sim}{1}$$

Άσκηση 3. Αποδείξτε τις (3), (5) από τη (2).

ΤΑΝ $\underset{\sim}{S} \in \mathrm{Lin}$ λέγεται θετικά ορισμένος αν

$$\underline{u} \cdot (\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{u}) > 0 \quad \forall \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0},\ \underline{u} \in \mathcal{E}$$

Θμ Συμμετρικός ΤΑΝ $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^T$

είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδ/μες τ8 είναι θετικές.

Γράφω ΣΘΟ για «συμμετρικός, θετικά ορισμένος»

Θμ. Τετραγωνικής Ρίζας

Έστω $\underset{\sim}{C} \in \mathcal{L}in$ $\underline{\Sigma\Theta O}$. Τότε $\exists$ μοναδικός ΣΘΟ ΤΑΝ $\underset{\sim}{U} \in \mathcal{L}in$ τ.ω.

$$\underset{\sim}{U}^2 = \underset{\sim}{C}$$

Σχόλιο Γράφουμε τότε $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{C}^{1/2}$ και ο $\underset{\sim}{U}$ λέγεται τετραγωνική ρίζα τ8 $\underset{\sim}{C}$.

Αποδ. Ύπαρξη

Έστω $\underline{V} = \{\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \underset{\sim}{v}_3\}$ η κύρια βάση τ8 $\underset{\sim}{C}$ με λ_i ιδ/μες.

$\Rightarrow [C]^{\underline{V}} = [\lambda_1 \ 0 \ 0$

$$[\underset{\sim}{C}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

δηλ φασματικο θμ ⇒

$$\underset{\sim}{C} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \underset{\sim}{v}_i \otimes \underset{\sim}{v}_i \, , \quad \lambda_i > 0$$

Ο πινακας στην (8) εχει θετικα διαγ. στοιχεια λ_i καθοτι ΣΘΟ.

Ορίζω πίνακα

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Προφανως

$$\underline{U}\,\underline{U} = \underline{U}^2 = (8) = [\underset{\sim}{C}]^{\Upsilon}$$

Φτιαχνω ΤΑΝ $\underset{\sim}{U}$ τ.ω.

$$[\underset{\sim}{U}]^{\Upsilon} = \underline{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$0 \quad 0 \quad \sqrt{\lambda_3}\,]$

Τότε

$$\underbrace{[\underset{\sim}{U}]^{\underline{v}}\,[\underset{\sim}{U}]^{\underline{v}}} = \underline{U}^2 = [\underset{\sim}{C}]^{\underline{v}}$$

$$\Rightarrow [\underset{\sim}{U}^2]^{\underline{v}} = [\underset{\sim}{C}]^{\underline{v}}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{U}^2 = \underset{\sim}{C}$$

όπου $\underset{\sim}{U}$ είναι ο ΤΑΝ από τη (10).

δηλ. έχει ιδ/μες $\sqrt{\lambda_i}$ και ιδ/τα $\underset{\sim}{v}_i$

δηλ (φασματικό Θμ)

$$\underset{\sim}{U} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\lambda_i}\, \underset{\sim}{v}_i \otimes \underset{\sim}{v}_i \quad (11)$$

αυτή είναι μια ΣΘΟ τετραγωνική ρίζα του $\underset{\sim}{C}$.

Μοναδικότητα

Έστω $\underset{\sim}{S} \in Lin$ ΣΘΟ με

$$\underset{\sim}{S}^2 = \underset{\sim}{C} \qquad (12)$$

Θα αποδείξω ότι $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{U}$ της (11).

$$(12) \Rightarrow \underset{\sim}{S}^2 \underset{\sim}{v}_i = \lambda_i \underset{\sim}{v}_i \qquad \text{XA}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{S}^2 \underset{\sim}{v}_i - \lambda_i \underset{\sim}{v}_i = \underset{\sim}{0} \qquad \text{XA}$$

Ορίζω $\mu_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$.

$$\Rightarrow \underset{\sim}{S}^2 \underset{\sim}{v}_i - \mu_i^2 \underset{\sim}{v}_i = \underset{\sim}{0} \qquad \text{XA}$$

$$\Rightarrow \left(\underset{\sim}{S}^2 - \mu_i^2 \underset{\sim}{1}\right) \underset{\sim}{v}_i = 0 \qquad \text{XA}$$

«διαφορά τετραγώνων»

$$\Rightarrow \left(\underset{\sim}{S} + \mu_i \underset{\sim}{1}\right) \underbrace{\left(\underset{\sim}{S} - \mu_i \underset{\sim}{1}\right) \underset{\sim}{v}_i}_{\underset{\sim}{f}_i} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{XA}$$

Ορίζω

$$\underset{\sim}{f}_i = \left(\underset{\sim}{S} - \mu_i \underset{\sim}{1}\right) \underset{\sim}{v}_i \qquad (13)$$

$$\Rightarrow \left(\underset{\sim}{S} + \mu_i \underset{\sim}{1}\right) \underset{\sim}{f}_i = \underset{\sim}{0} \qquad \text{XA}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{S}\, \underset{\sim}{f}_i + \mu_i \underset{\sim}{f}_i = \underset{\sim}{0} \qquad \text{XA}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{f}_i + \mu_i \underset{\sim}{f}_i = \underset{\sim}{0} \qquad XA$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{f}_i = -\mu_i \underset{\sim}{f}_i \qquad XA.$$

$(i=1,2,3)$.

όπου $\mu_i > 0$

Αν $\underset{\sim}{f}_i \neq 0$ τότε είναι ιδ/μα του $\underset{\sim}{S}$ με ιδ/μη $-\mu_i < 0$ ενώ $\underset{\sim}{S}$ είναι ΣΘΟ $\Rightarrow$ άτοπον

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{f}_i = \underset{\sim}{0} \qquad !!!$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{f}_i = \left(\underset{\sim}{S} - \mu_i \underset{\sim}{1}\right)\underset{\sim}{v}_i = \underset{\sim}{0} \quad XA$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{v}_i - \mu_i \underset{\sim}{v}_i = \underset{\sim}{0} \quad XA$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{v}_i = \mu_i \underset{\sim}{v}_i \qquad XA$$

$\Rightarrow$ $\underset{\sim}{v}_i$ ιδ/μα του $\underset{\sim}{S}$ με ιδ/μη $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$. Τότε φασματικό θμ. $\Rightarrow$

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\lambda_i}\, \underline{v}_i \otimes \underline{v}_i \overset{(11)}{=} \underset{\sim}{U}$$

άρα, εάν $\underset{\sim}{S}$ ΣΘΟ ρίζα του $\underset{\sim}{C}$ τότε αναγκαστικά $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{U}$ που ορίζεται από την (11)