ΜΘΥ ΔΙΑΛΕΞ 5

<u>Ερώτηση</u> Τι κάνει ένας ΤΑΝ ανάκλασης που δεν κάνει ένας ΤΑΝ στροφής; (και οι 2 είναι ορθογώνιοι.)

Η ανάκλαση αλλάζει τον προσανατολισμό τη χώρου, π.χ. κάνει μια δεξιόστροφη βίδα αριστερόστροφη. Αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί με μια ποσότητα, βαθμωτή συνάρτηση από το $\mathcal{L}in$ στο $\mathbb{R}$ που λέγεται ορίζουσα determinant $\det : \mathcal{L}in \to \mathbb{R}$.

Έστω ΟΚ βάση $X = \{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$, ΤΑΝ $\underset{\sim}{S} \in \mathcal{L}in$, ορίζω τον πίνακα των συνιστωσών τη $\underset{\sim}{S}$ στη βάση X

$$[\underset{\sim}{S}]^X = \underline{S}^X$$ με στοιχεία

$$S_{ij} = \underset{\sim}{e}_i \cdot (\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{e}_j)$$

Ορισμός Η ορίζουσα $\det \underset{\sim}{S}$ του ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ είναι

$$\det \underset{\sim}{S} = \det S^{X} \quad (1)$$

Σχόλιο: Ο ορισμός είναι της πλάκας (για τα πανηγύρια) Γιατί; Διότι οι συνιστώσες S_{ij} εξαρτώνται από τη βάση X οπότε και το $\det \underset{\sim}{S}$ θα εξαρτάται από τη βάση X !!!

Θμ 1 Το $\det \underset{\sim}{S}$ όπως ορίζεται από τη (1) είναι το ίδιο $\forall$ ΟΚ βάσεις δηλ. ανεξάρτητο της βάσης X άρα εξαρτάται μόνο από τον ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$.

Σχόλιο Δηλ. το $\det \underset{\sim}{S}$ είναι θεμελιώδης ιδιότητα του

γεωμετρικού μετασχηματισμού
$\underset{\sim}{S}$ και όχι των συνιστωσών
S_{ij} σε κάποια ΟΚ βάση.

ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ είναι αντιστρέψιμος
αν $\exists$ ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}^{-1}$ τ.ω.

$$\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{S}^{-1} = \underset{\sim}{S}^{-1}\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{1}$$

δηλ. $\underset{\sim}{S}^{-1}$ είναι η αντίστροφη
απεικόνιση της γραμμικής
απεικόνισης $\underset{\sim}{x} \longmapsto \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{x}$ δηλ.

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{x} \Rightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{S}^{-1}\underset{\sim}{y}.$$

(διότι, αν $\underset{\sim}{S}$ αντιστρέψιμος,

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{x} \Rightarrow \underset{\sim}{S}^{-1}\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{S}^{-1}(\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{x})$$

$$= (\underset{\sim}{S}^{-1}\underset{\sim}{S})\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{S}^{-1}\underset{\sim}{y}.\,)$$

<u>Θμ</u> $\underset{\sim}{S}$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det \underset{\sim}{S} \neq 0$

$$\det(AB) = \det A \det B$$

$$\det(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}) = \det\underset{\sim}{A}\,\det\underset{\sim}{B}$$

$$\det(\underset{\sim}{A}^T) = \det\underset{\sim}{A}$$

$$\det(\underset{\sim}{A}^{-1}) = 1/\det\underset{\sim}{A}$$

$$(\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{T})^{-1} = \underset{\sim}{T}^{-1}\underset{\sim}{S}^{-1}$$

$$(\underset{\sim}{S}^{-1})^T = (\underset{\sim}{S}^T)^{-1} =: \underset{\sim}{S}^{-T}$$

$\underset{\sim}{Q}$ ορθογώνιος $\iff \underset{\sim}{Q}^{-1} = \underset{\sim}{Q}^T$

ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΤΥΠΟΙ.

Αν σε ΟΚ βαση ο ΤΑΝ $\underset{\sim}{A}$ εχει συνιστώσες A_{ij} τοτε

$$\det\underset{\sim}{A} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$

$$\det\underset{\sim}{A} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr}$$

$$A^{-1}_{ij} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_{ik\ell}\varepsilon_{jpq} A_{pk} A_{q\ell}}{\det\underset{\sim}{A}}$$

Σχόλιο

Αν $\mathbf{Q}$ ορθογώνιος

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{1} \Rightarrow \det(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}) = 1$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{Q}^T)\det\mathbf{Q} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\det\mathbf{Q}]^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\mathbf{Q} = \pm 1$$

Μπορεί να δειχτεί ότι

αν $\mathbf{Q}$ ορθογώνιος με $\det\mathbf{Q} = 1$

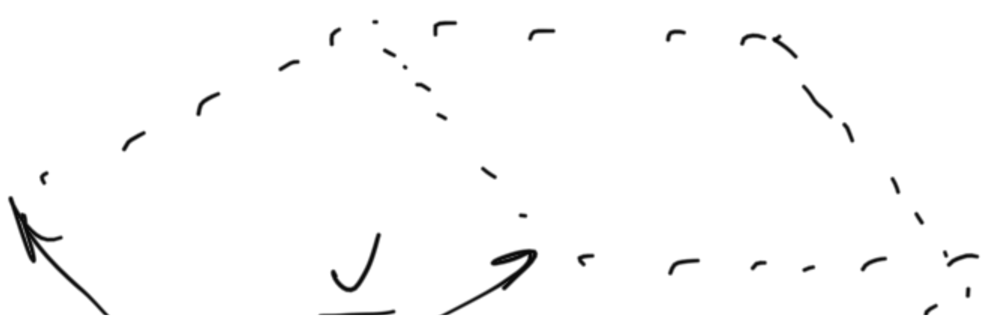
$\Rightarrow$ στροφή.

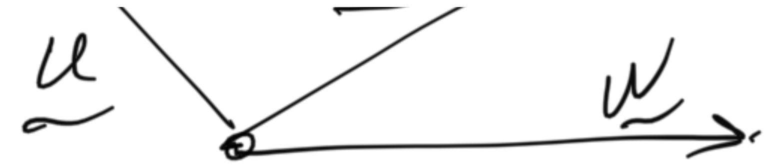
αν $\mathbf{Q}$ ορθογώνιος με $\det\mathbf{Q} = -1$

$\mathbf{Q}$ ανάκλαση ή ανάκλαση επί στροφή.

Αν $\det\mathbf{Q} = -1$ τότε αλλάζει τον προσανατολισμό.

Σχόλιο. Όγκος παραλληλεπ. με ακμές $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$





γρ. ανεξ.

$$V = \pm\, u \cdot (v \times w)$$

Άσκηση: δείξετε ότι

$$u \cdot (v \times w) = \varepsilon_{ijk}\, u_i v_j w_k$$

$$= \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Θμ. Αν u, v, w γρ. ανεξ. $A \in \mathrm{Lin}$

$$\det A = \frac{(Au)\cdot\big((Av)\times(Aw)\big)}{u\cdot(v\times w)}$$

άρα $\det A$ λόγος όγκου μετασχηματισμένου παραλληλεπιπέδου δια όγκο αρχικού παραλληλεπ.

ΑΛΛΑΓΕΣ ΒΑΣΗΣ

Οι συνιστώσες $u_i' = u \cdot e_i'$

ενός ΔΙΑΝ $\underset{\sim}{u} \in \mathcal{E}$ ή $S_{ij} = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{e}_j$
ενός ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ εξαρτώνται από
τη ΒΑΣΗ $\mathcal{X} = \{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$

Αν αλλάξω βάση αλλάζουν οι συνιστώσες χωρίς να αλλάξει ο ΤΑΝ.

Ερώτηση: ΠΩΣ αλλάζουν;

Έστω $\mathcal{Y} = \{\underset{\sim}{f}_1, \underset{\sim}{f}_2, \underset{\sim}{f}_3\}$ άλλη ΟΚ βάση τ. $\mathcal{E}$. Άρα $\exists$ ΤΑΝ $\underset{\sim}{Q}$ ορθογώνιος τ.ω.

$$\underset{\sim}{f}_i = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{e}_i$$

Οι συνιστώσες τ. ΤΑΝ $\underset{\sim}{S}$ στις 2 βάσεις είναι:

$$S^{\mathcal{X}}_{ij} = \underset{\sim}{e}_i \cdot \left(\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{e}_j\right)$$

$$S^{\mathcal{Y}}_{ij} = \underset{\sim}{f}_i \cdot \left(\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{f}_j\right) =$$

$$= \mathbf{Q}\mathbf{e}_i \cdot \left(\mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{e}_j\right) =$$

ορισμό ανάστροφο

$$= \mathbf{e}_i \cdot \left[\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{S}\mathbf{Q}\right)\mathbf{e}_j\right]$$

$$= \mathbf{e}_i \cdot \left(\mathbf{Q}^T\mathbf{S}\mathbf{Q}\right)\mathbf{e}_j$$

$$S^{Y}_{ij} = \left[\mathbf{Q}^T\mathbf{S}\mathbf{Q}\right]^{X}_{ij} =$$

$$= Q^{X}_{ki} S^{X}_{kl} Q^{X}_{lj}$$

άρα:

ΤΥΠΟΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΒΑΣΗΣ

ΓΙΑ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΝ

$$\boxed{S^{Y}_{ij} = Q^{X}_{ki} S^{X}_{kl} Q^{X}_{lj}}$$

ή

$$[\mathbf{S}]^{Y} = \left([\mathbf{Q}]^{X}\right)^{T} [\mathbf{S}]^{X} [\mathbf{Q}]^{X} \quad (2)$$

όπου $Y = \mathbf{Q}X$

Αποδ. Θμ. 1.

(2) $\underline{S}^{Y} = \underbrace{\underline{Q}^{X^T} \underline{S}^{X} \underline{Q}^{X}}$

$\Rightarrow \det \underline{S}^{Y} = \det\left(\quad \right)$

$= \det\left(\underline{Q}^{X^T}\right) \det\left(\underline{S}^{X}\right) \det\left(\underline{Q}^{X}\right)$

$= \det\left(\underline{S}^{X}\right) \det\left(\underline{Q}^{X^T}\right) \det\left(\underline{Q}^{X}\right)$

$= \det\left(\underline{S}^{X}\right) \underbrace{\det}_{= 1}\left(\underbrace{\underline{Q}^{X^T}\underline{Q}^{X}}_{\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\right)$

$\Rightarrow \det \underline{S}^{Y} = \det \underline{S}^{X}$

όμως Y X τυχαίες
ΟΚ βάσεις οπότε

$\det \underline{S}^{Y}$ ανεξάρτητο
της βάσης Y.

ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ

ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$\mathbf{u} \in E$

$$\mathbf{u} = \underbrace{u_i^{X}}_{\text{συνιστώσες της } \mathbf{u} \text{ στη βάση } X} \mathbf{e}_i = \underbrace{u_i^{Y}}_{\text{συνιστώσες της } \mathbf{u} \text{ στη βάση } Y} \mathbf{f}_i$$

$$u_i^{Y} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_i = \mathbf{u} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}\,\mathbf{e}_i}_{\mathbf{f}_i} =$$

$$= \mathbf{Q}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = \left[\mathbf{Q}^T \mathbf{u}\right]_i^{X}$$

άρα

$$u_i^{Y} = \left[\mathbf{Q}^T \mathbf{u}\right]_i^{X}$$

$$= Q_{ji}^{X}\, u_j^{X}$$

$$\boxed{u_i^{Y} = Q_{ji}^{X}\, u_j^{X}}$$

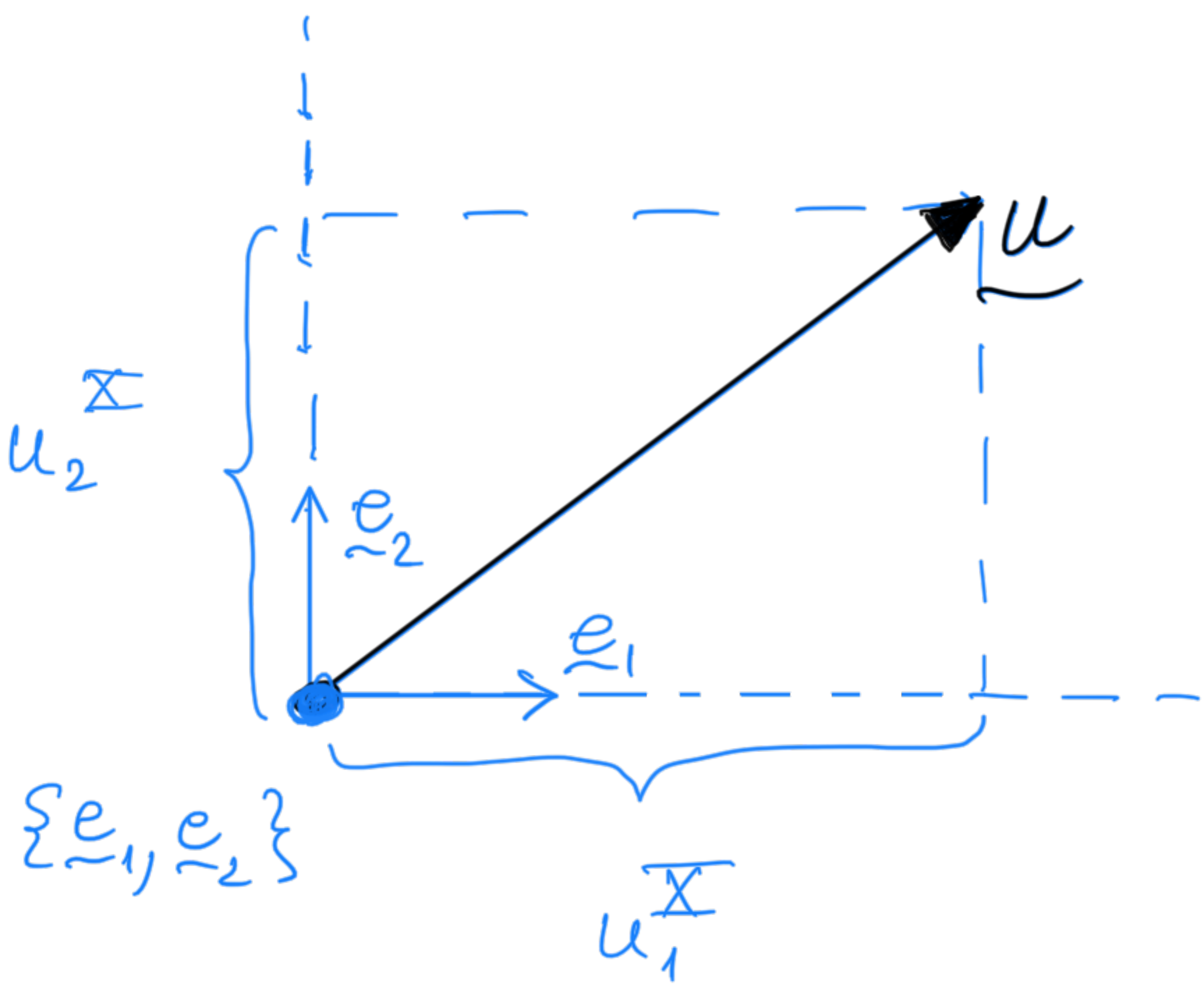
ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

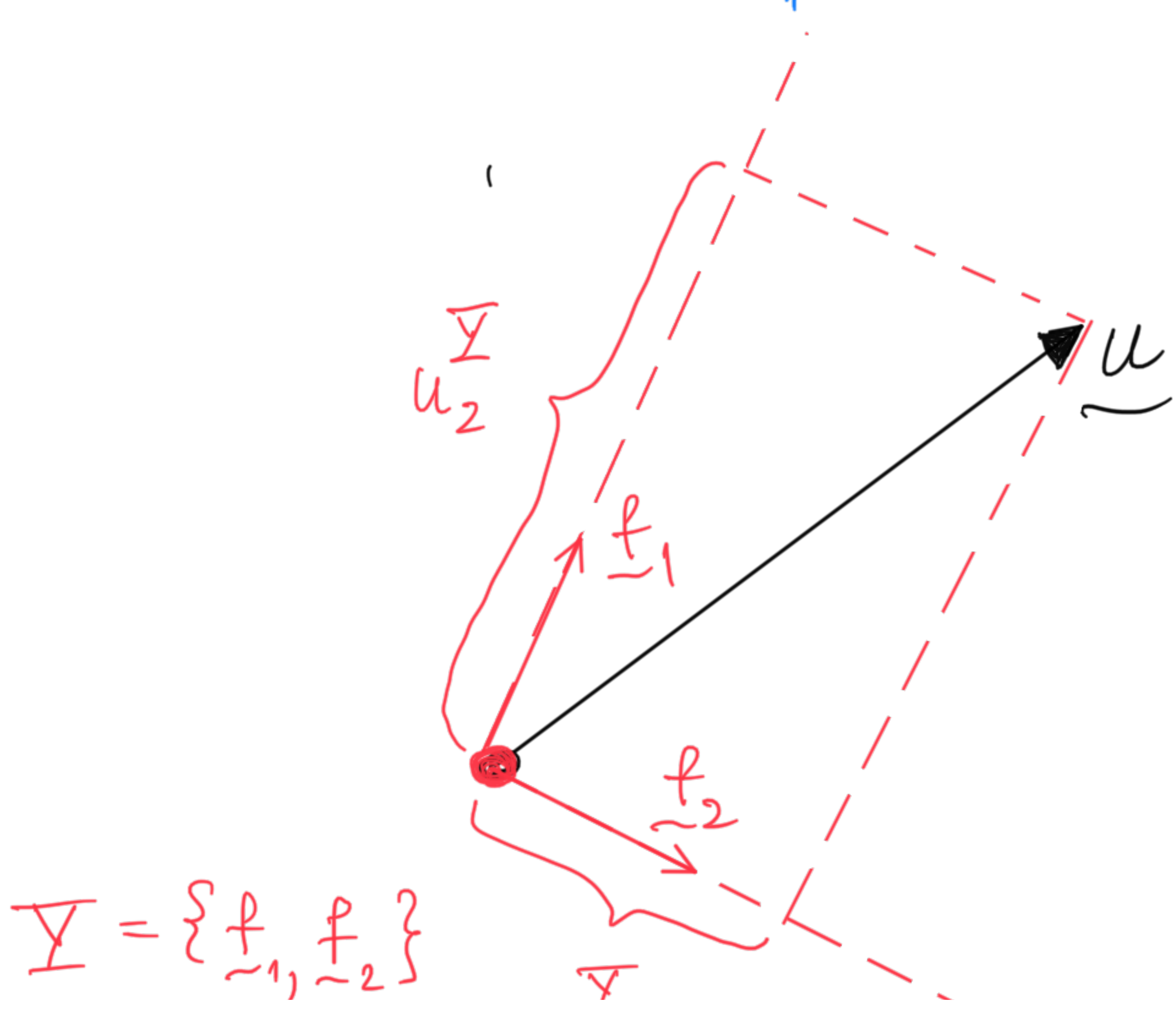
όπου $Q_{ij}^{X} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Q}\, \mathbf{e}_j$

Παράδειγμα σε 2 διαστάσεις

Συνιστώσες τη ΔΙΑΝ $\underset{\sim}{u}$ (μαύρου βέλους) σε 2 διαφορετικές βάσεις $\mathbb{X}=\{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2\}$ και $\mathbb{Y}=\{\underset{\sim}{f}_1, \underset{\sim}{f}_2\}$

είναι $\begin{bmatrix} u_1^{\mathbb{X}} \\ u_2^{\mathbb{X}} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} u_1^{\mathbb{Y}} \\ u_2^{\mathbb{Y}} \end{bmatrix}$ βλ. σχήμα





u_1

ΤΗΝ ΕΠΟΜΕΝΗ ΤΕΤΑΡΤΗ

11-1 ασκήσεις εδώ.

Τις ασκήσεις τις στέλνετε στο (PDF)

MEM287uoc@gmail.com