

Caracterización del error de un clasificador

Percepción - ETSInf

Curso 2018/2019

Se parte de definir el clasificador G , entrenado a partir de muestras de entrenamiento, como un regresor, de forma que:

$$G(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$$

Se define también el valor verdadero para $x \in E$ como un valor $y \in \mathbb{R}$ tal que:

$$y = F(x) + \epsilon$$

Donde F sería la función verdadera que se trata de estimar con G y ϵ es el ruido inherente a los datos.

Dado esto, se define el criterio de error como el valor esperado (esperanza matemática \mathbb{E}) del error cuadrático:

$$\mathbb{E}[(y - G(x))^2]$$

Desarrollando esto, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(y - G(x))^2] &= \mathbb{E}[y^2 - 2yG(x) + G(x)^2] = \\ &\mathbb{E}[G(x)^2] - 2\mathbb{E}[G(x)]\mathbb{E}[y] + \mathbb{E}[y^2]\end{aligned}$$

Una propiedad de la esperanza matemática \mathbb{E} es que, sobre cualquier variable aleatoria Z , se tiene:

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2] + \mathbb{E}[Z]^2$$

Llamando $\bar{Z} = \mathbb{E}[Z]$, esto quedaría como:

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[(Z - \bar{Z})^2] + \bar{Z}^2$$

Por tanto, llamando también $\overline{G(x)} = \mathbb{E}[G(x)]$ y $\bar{y} = \mathbb{E}[y]$, tendremos que:

$$\mathbb{E}[(y - G(x))^2] = \mathbb{E}\left[\left(G(x) - \overline{G(x)}\right)^2\right] + \overline{G(x)}^2 - 2\overline{G(x)}\bar{y} + \mathbb{E}[(y - \bar{y})^2] + \bar{y}^2$$

Aquí se puede aplicar la propiedad de cancelación del error, que nos dice que $\bar{y} = \mathbb{E}[F(x) + \epsilon] = F(x)$, con lo que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(y - G(x))^2] &= \mathbb{E}\left[\left(G(x) - \overline{G(x)}\right)^2\right] + \overline{G(x)}^2 - 2\overline{G(x)}F(x) + \mathbb{E}\left[(y - F(x))^2\right] + F(x)^2 = \\ &= \mathbb{E}\left[\left(G(x) - \overline{G(x)}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[(y - F(x))^2\right] + \overline{G(x)}^2 - 2\overline{G(x)}F(x) + F(x)^2 = \\ &= \mathbb{E}\left[\left(G(x) - \overline{G(x)}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[(y - F(x))^2\right] + \left(\overline{G(x)} - F(x)\right)^2\end{aligned}$$

Cada uno de estos términos representa lo siguiente:

- $\mathbb{E}\left[\left(G(x) - \overline{G(x)}\right)^2\right]$ es la *variance*: sensibilidad del clasificador al entrenamiento disponible, es decir, capacidad de generalización del clasificador
- $\left(\overline{G(x)} - F(x)\right)^2$ es el *bias*: capacidad del clasificador de ajustarse a la auténtica distribución de los datos
- $\mathbb{E}\left[(y - F(x))^2\right]$ es el *noise*: ruido presente en los datos