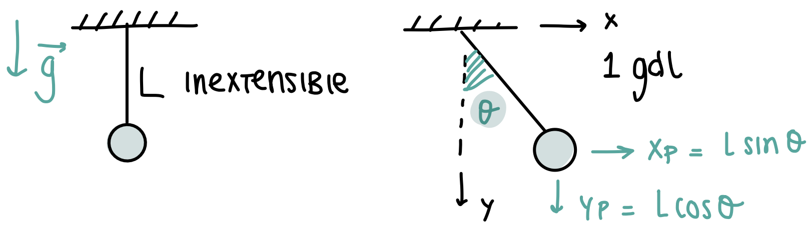
$q(t)$ ≡ coordenada generalizada no es única



$T = \frac{1}{2} J \dot{q}^2 = \frac{1}{2} M \dot{q}^2$ energía cinética

péndulo
$J = ML^2$

$U = \frac{1}{2} k q^2$ energía potencial

$K = MgL$

coef. amort. viscoso

$D = \frac{1}{2} F \dot{q}^2$ energía disipada o amortiguada

1) · viscosa → fluido (aire, líquido, combustible ...)

2) · histerético
· estructural } → deformación de la estructura

· proporcional → modelo matemático

3) · rozamiento o coulomb → movimiento relativo entre partes

$W = p \cdot q$ trabajo

· $J\ddot{q} + F\dot{q} + kq = P(t)$ ec. sistema 1 gdl linealizado + condiciones iniciales

$F \ll J \circ k$
$F \sim 0$
sistema conservativo

$q(0) = q_0$
$\dot{q}(0) = \dot{q}_0$
(percusión)

J ≡ almacén de energía cinética
K ≡ almacén de energía potencial
q_0 ≡ aporte en $t=0$ de energía potencial
$\dot{q}_0$ ≡ " " de energía cinética

· Un sistema conservativo no pierde energía

$T = \frac{1}{2} J \dot{q}^2(t)$
$U = \frac{1}{2} K q^2$
} $T + U = E = cte$

$U(0) = \frac{1}{2} k q(0)^2$ / $T(0) = \frac{1}{2} J \dot{q}(0)^2$

si $U = 0,\ q = 0 \rightarrow T = E_{max},\ \dot{q}_{max}$
$T = 0,\ \dot{q} = 0 \rightarrow U = E_{max},\ q_{max}$

$$\begin{cases} J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = P(t) \\ q(0) = q_0 \\ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \rightarrow q(t) = q_1 + q_2$$

$$\begin{aligned} & J\ddot{q}_I + F\dot{q}_I + Kq_I = 0 \\ & q_I(0) = q_0 \\ & \dot{q}_I(0) = \dot{q}_0 \end{aligned} \rightarrow q_I(t)\Big|_{t\to\infty} \rightarrow 0$$

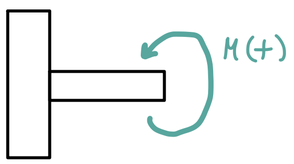
respuesta transitoria

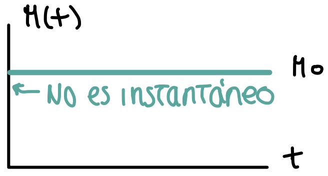
$$\begin{aligned} & J\ddot{q}_{II} + F\dot{q}_{II} + Kq_{II} = P(t) \\ & q_{II}(0) = 0 \\ & \dot{q}_{II}(0) = 0 \end{aligned} \rightarrow q_{II}(t)\Big|_{t\to\infty} \neq 0$$

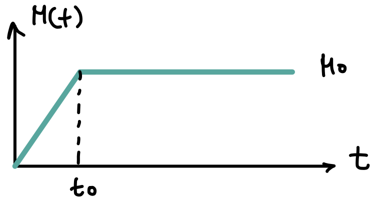
respuesta permanente

• respuesta permanente ⇒ A) Dominio del tiempo
B) Dominio de la frecuencia

A) · cargas de corta duración y que dependen de un parámetro



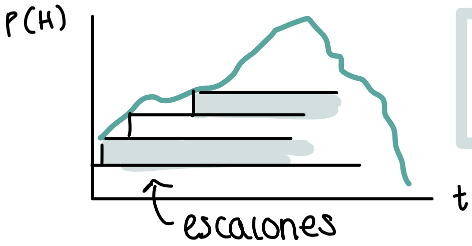




∃ to / alarge vida (reduzca esfuerzos sobre el eje ?)

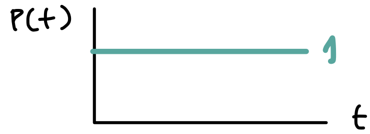
q(t, to) ⇒ minimizar los esfuerzos (solución paramétrica)
↳ solución dominio tiempo

• integral convolución o Duhamel

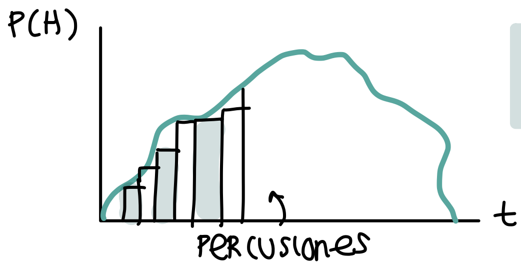


$$\boxed{q(t) = H(t)\,p(0) + \int_0^t H(t-\tau)\,p'(\tau)\,d\tau}$$

H (t) ≡ función de instalación , respuesta del sistema a carga escalón unidad con condiciones iniciales nulas



• H(t) { analíticamente
experimentalmente



$$\boxed{q(t) = \int_0^t I(t-\tau)\,p(\tau)\,d\tau}$$

I(t) ≡ función de memoria y es la respuesta del sistema a una percusión de intensidad unidad

19/09/2022

$$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = P(t)$$

F ≡ coef. amortiguamiento viscoso $D = 1/2\, F\dot{q}^2$

sol. dominio del tiempo → cargas corta duración

$P(t,\sigma) \longrightarrow q(t,\sigma)$ " encontrar σ" tal que $q(t,\sigma)$ cumpla cierta condición $\begin{cases} |\ddot{q}| < \ddot{q}_{max} \\ Eq < Eq_{max} \\ q < q_{max} \end{cases}$

Ω ≡ frec. de excitación

• dominio de la frecuencia

$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = P(t)$ ← función armónica $= P_0 e^{i\Omega t}$

(siendo rigurosos $e^{i(\Omega t + \delta)}$)

P(t) será la parte real o la parte imaginaria
(excitaciones cosenoidales o senoidales)

ejemplo : máquinas rotativas (Ω ≡ vel. rotación máquina)

PERIODO

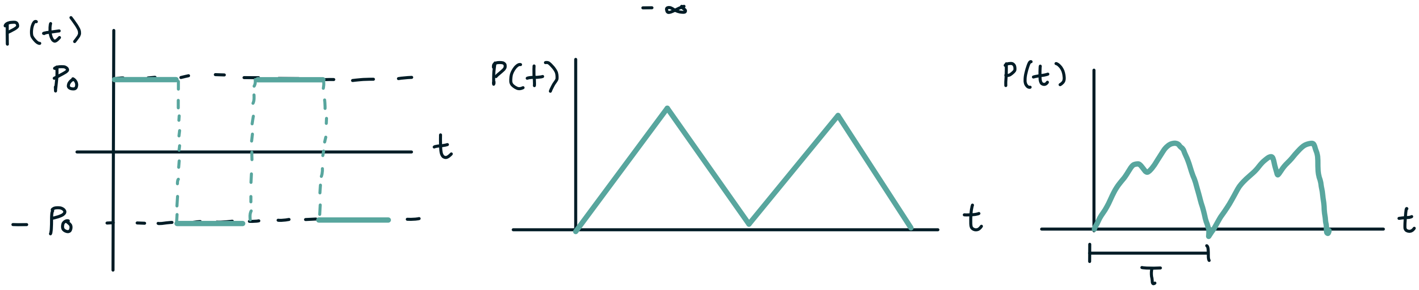
* CARGAS PERIÓDICAS $P(t+T) = P(t)$ ⇒ ADMITEN DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

$$P(t) = \sum_{0}^{\infty}\left[a_n \cos(n\Omega_0 t) + b_n \sin(n\Omega_0 t)\right]$$

con $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ → FRECUENCIA FUNDAMENTAL

COEF. COMPLEJOS

ó $$P(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\Omega_0 t}$$



* SI P(t) NO ES PERIÓDICA PUEDE POSEER TRANSFORMADA FOURIER
CUMPLE QUE $\int_{-\infty}^{\infty} |P(t)|\, dt < \infty$ SEA CONVERGENTE
↳ ENERGIA APORTADA AL SISTEMA FINITA
Y Nº DISCONTINUIDADES FINITAS, Nº FINITO DE DISCONTINUIDADES FINITAS
↳ P(t) SE PUEDE EXPRESAR COMO UNA INTEGRAL

$$\boxed{P(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(i\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE P(t)

con $$\mathcal{P}(i\Omega) = T \times F(P(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt$$

• LAS IGUALDADES EN EL DESARROLLO EN SERIE Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER SE JUSTIFICAN MATEMÁTICAMENTE POR LAS PROPIEDADES DE ORTOGONALIDAD DE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS sin, cos.

$$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = P(t) \begin{cases} \text{ARMÓNICA} \\ \text{PERIÓDICA} \\ \text{TRANS. FOURIER} \end{cases}$$

↳ ESTAMOS INTERESADOS EN OBTENER LA RESPUESTA PERMANENTE
TRANSITORIA → DEPENDE DE C.I. ; $t \to \infty$; $q_I(t) \to 0$
PERMANENTE → C.I. NULAS ; $q_{II}(t) \neq 0$ SIEMPRE QUE $P(t) \neq 0$

$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = P(t)$ ← TIENE TRANSFORMADA DE FOURIER
↳ SI ES ARMÓNICA $\delta(\omega - \Omega)$ (DELTA DIRAC)

q(t) TAMBIÉN TENDRÁ TRANSF. FOURIER, $Q(i\Omega) = T \times F(q(t))$

$$(-\Omega^2 J + i\Omega F + K)\, Q(i\Omega) = P(i\Omega)$$

$$Q(i\Omega) = \underbrace{\frac{1}{K-\Omega^2 J + i\Omega F}}_{\text{FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA}} P(i\Omega)$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA $H(i\Omega)$ ó $FRF(i\Omega)$

$$= \frac{1}{\sqrt{(K-\Omega^2 J)^2 + (\Omega F)^2}}\, e^{-i\varphi} = \frac{\frac{1}{K} e^{-i\varphi}}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2 J}{K}\right)^2 + \left(\frac{\Omega F}{K}\right)^2}}$$

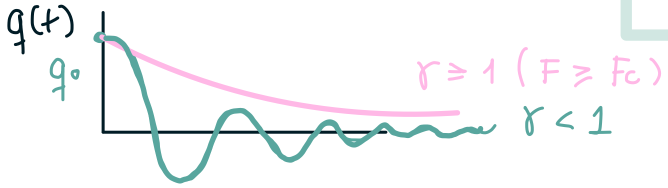
con $\varphi = TG^{-1} \dfrac{\Omega F}{K-\Omega^2 J}$

* $\sqrt{\dfrac{K}{J}} = \omega_0$ = FRECUENCIA NATURAL DEL SIST. NO AMORTIGUADO $(F \equiv 0)$

* $\dfrac{F}{K} = \dfrac{2F\sqrt{J}}{2\sqrt{K}\sqrt{K}\sqrt{J}} = \dfrac{2F}{2\sqrt{KJ}} \cdot \dfrac{1}{\omega_0} = \dfrac{2\gamma}{\omega_0}$ ← COEFICIENTE ADIMENSIONAL DE AMORTIGUAMIENTO

↳ $\gamma = \dfrac{F}{2\sqrt{KJ}} = \dfrac{F}{F_c}$ $(<< 1)$ $(\gamma \sim 0.02, 0.05)$

F_c ← COEF. AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO



$$\boxed{H(i\Omega) = \frac{1}{K} \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\gamma \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$

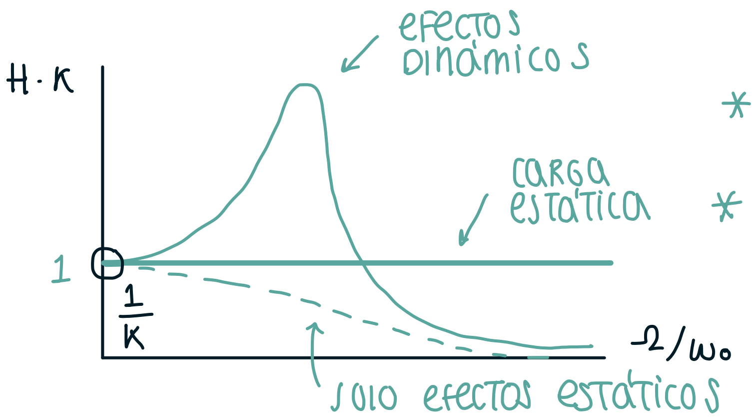
$$\boxed{\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\Omega F}{K-\Omega^2 J} = tg^{-1} \frac{2\gamma \frac{\Omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

* LA REPRESENTACIÓN DE $|H(i\Omega)|$ vs Ω/ω_0 y φ vs Ω/ω_0 SE DENOMINA DIAGRAMA DE BODE Y PROPORCIONA INFORMACIÓN DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA ANTE UNA CARGA P(t).

$$|H(i\Omega)| \cdot K = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$$ vs. $\dfrac{\Omega}{\omega_0}$ PARA VARIOS VALORES DE γ

$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = P(t)$ con $P(t)$ DINÁMICA

si $P(t) = P_0$ (CTE) $\Rightarrow$ $\boxed{q_0 = \dfrac{P_0}{K}}$ $\Rightarrow$ DEFORMACIÓN ESTÁTICA DEL SISTEMA ANTE UNA CARGA DE LA MISMA INTENSIDAD A LA ARMÓNICA



* si $\gamma \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ los efectos dinámicos son despreciables
* si $\gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$ los efectos dinámicos son importantes

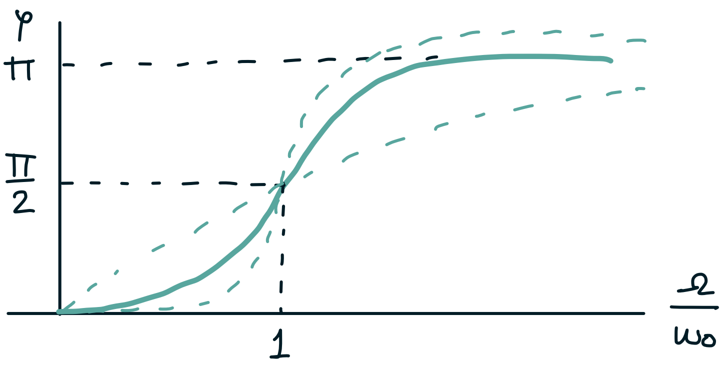
* $H(i\Omega)\,k - 1 \Rightarrow D(i\Omega)$ función de amplificación dinámica
(como de importantes son los efectos dinámicos)
↳ $H(i\Omega)\,k$ alcanza el máximo a la frecuencia $\frac{\Omega}{\omega_0} = \sqrt{1-2\gamma^2}$

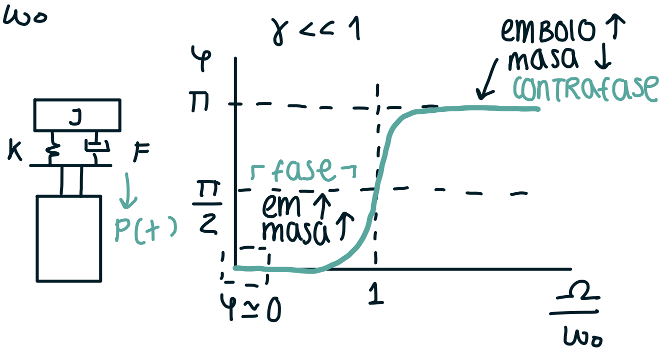
y vale $[|H(i\Omega)|k]_{max} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}}\Big|_{\gamma \ll 1} \simeq \frac{1}{2\gamma}$

(p.e. si $\gamma \sim \frac{1}{100}$, $[H(i\Omega)K] \simeq 50$)
↳ los efectos dinámicos son 50 veces mayores que la misma carga aplicada de forma estática
⇒ condición de entrada en resonancia en amplitud ⇒ con muy poca energía de excitación se consigue una gran amplitud de respuesta (situación a evitar excepto en algunas aplicaciones como un amplificador de sonido)

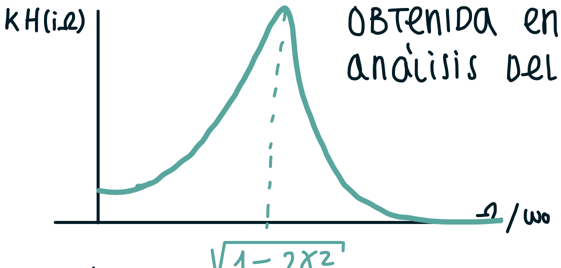
$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\gamma\,\Omega/\omega_0}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

* $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si $\frac{\Omega}{\omega_0} = 1 \;\; \forall\gamma$ → resonancia en fase $\sqrt{\frac{K}{J}}$
* $\varphi \to 0$ si $\frac{\Omega}{\omega_0} \to 0$ → cualidad única amortiguam. viscoso (parte de 0)
* $\varphi \simeq 0$ para $\frac{\Omega}{\omega_0} < 1$ y $\varphi \simeq \pi$ para $\frac{\Omega}{\omega_0} > 1$ →

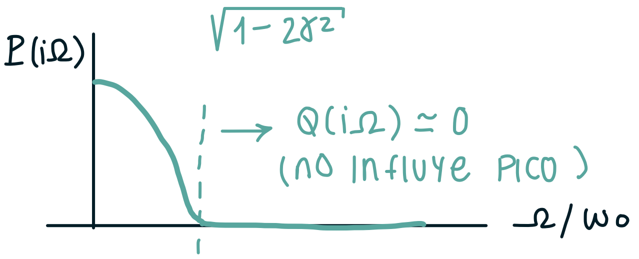


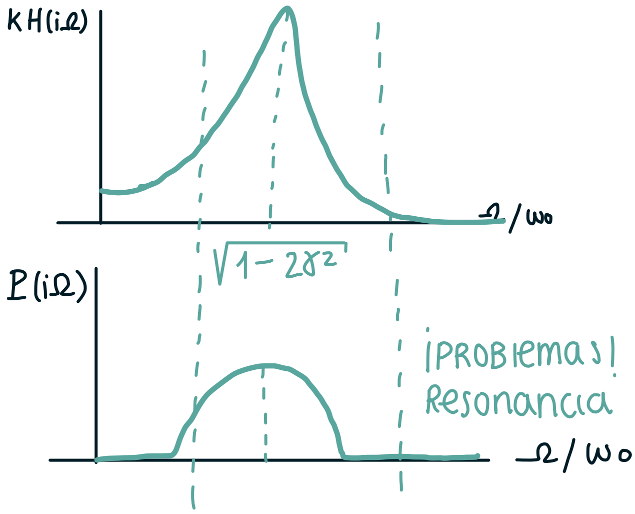


$$\boxed{Q(i\Omega) = H(i\Omega)\,P(i\Omega)}$$



Obtenida en ensayo o análisis del sistema



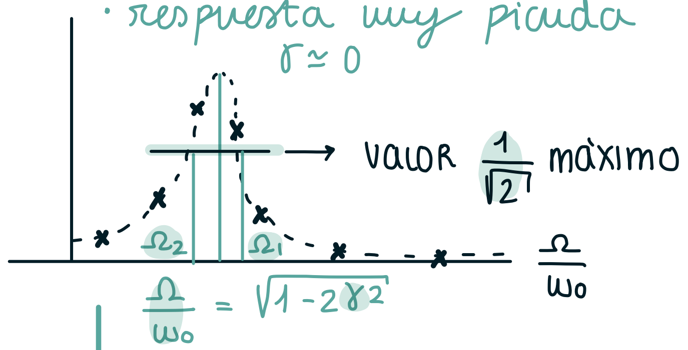


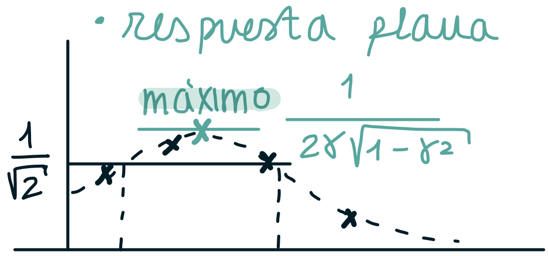
- Modifico la carga
- Modifico el sistema (cambio su frecuencia natural)

* En muchos casos interesa además de conocer $H(i\Omega)$ las propiedades del sistema J, F, K. No olvidemos que es un modelo de un sistema complejo

* K se determina por una carga estática (zona baja frecuencia) $\Omega/\omega_0 \rightarrow 0$

↳ conocido "K" vamos a la fase φ y detectamos el punto del paso por $\pi/2$ $\longrightarrow \Omega = \omega_0 = \sqrt{K/J} \longrightarrow$ J inercia sistema





se demuestra que

$$\boxed{\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\omega_0} = \gamma}$$

$Q(i\Omega) = H(i\Omega) \cdot P(i\Omega)$

- Puede ser que en un ensayo lo medido sea la función de memoria $I(t)$, respuesta a la percusión unidad (códigos numéricos CFD, lo fácil de tener es la función memoria)
- La función de memoria está relacionada con la función de transferencia mediante una transformada de Fourier

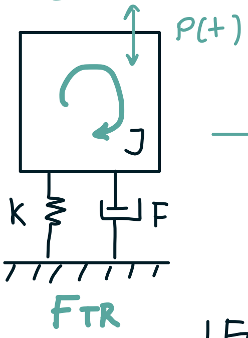
$$\boxed{H(i\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt}$$

→ más fácil dar una percusión (pulso)

* MODELOS USADOS CONVENCIONALMENTE CON SISTEMAS DE 1 GDL

1) movimiento base
2) fuerza transmitida

2) FUERZA TRANSMITIDA



$$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = P(t)$$
$$Q(i\Omega) = H(i\Omega)\,P(i\Omega)$$

$\longrightarrow$ FUERZA TRANSMITIDA : $F_{TR} = kq + F\dot{q}$

$$F_{TR}(i\Omega) = (K + i\Omega F)\,Q(i\Omega) = (K + i\Omega F)\,H(i\Omega)\,P(i\Omega)$$

POR TANTO

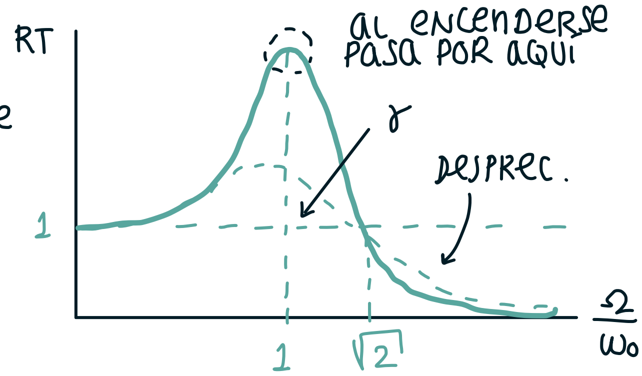
$$|F_{TR}(i\Omega)| = \cancel{K}\left[1 + \left(2\frac{\gamma\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{1/2} \frac{1}{\cancel{K}\left[\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{1/2}}\, P(i\Omega)$$

$\hookrightarrow$ TRANSMISIBILIDAD $\dfrac{|F_{TR}(i\Omega)|}{P(i\Omega)} = \sqrt{\dfrac{1+(2\gamma\Omega/\omega_0)^2}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$

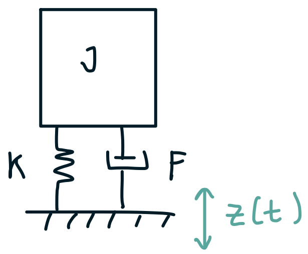
* si $\dfrac{\Omega}{\omega_0} > \sqrt{2}$ efectos dinámicos despreciables

a menor γ, la fuerza transmitida se reduce $\longrightarrow$ $\gamma \simeq 0$ (picos mayores)

$\gamma \simeq$ compromiso para que en arranque y parada el pico de la respuesta sea menor que un límite



1) MOVIMIENTO DE LA BASE



$q(t) \equiv$ desplazamiento absoluto J

edificio - seísmo
satélite - lanzador
microscopio - mesa lab.

$$T = \frac{1}{2}J\dot{q}^2$$
$$U = \frac{1}{2}k(q-z)^2$$
$$D = \frac{1}{2}F(\dot{q}-\dot{z})^2$$

$$J\ddot{q} + F\dot{q} + k\dot{q} = \underbrace{F\dot{z} + Kz}_{\text{fuerza ejercida por el entorno}}$$

$$Q(i\Omega) = \sqrt{\frac{1+(2\gamma\Omega/\omega_0)^2}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0}\right)^2}}\; Z(i\Omega)$$

• Buscamos el movimiento relativo entre base y sistema

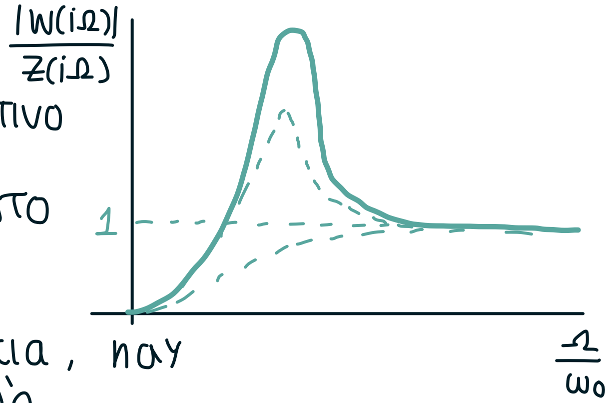
$$w(t) = q(t) - z(t)$$

$$\hookrightarrow \quad J(\ddot{w} + \ddot{z}) + F\dot{w} + Kw = 0$$

$$J\ddot{w} + F\dot{w} + kw = -J\ddot{z}$$

$$w(i\Omega) = \frac{J\Omega^2}{K - \Omega^2 J + i\Omega F} z(i\Omega)$$ por tanto

$$|W(i\Omega)| = \frac{(\Omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1 - (\frac{\Omega}{\omega_0})^2)^2 + (\frac{2\delta\Omega}{\omega_0})^2}} Z(i\Omega)$$



* si $\frac{\Omega}{\omega_0} \simeq 0$, $\left|\frac{W}{Z}\right| \to 0 \Rightarrow$ mov. relativo casi nulo, el sistema se mueve tanto como la base

* si $\frac{\Omega}{\omega_0} \simeq 1 \to$ condición de resonancia, hay efecto de amplificación

* si $\frac{\Omega}{\omega_0} \to \infty$, $\left|\frac{W}{Z}\right| \to 1$, $q \to 0 \Rightarrow$ el sistema posee una inercia tan elevada $\omega_0 << 1$ que hace que el sistema apenas se mueva bajo la acción del entorno

• Debemos intentar que $\omega_0 << 1 = \sqrt{K/J}$ | masa muy grande
rigidez muy baja

23 - 09 - 2022

excitaciones aleatorias

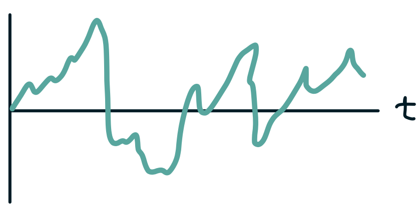
$P(t) \equiv$ función determinista, especificado "t" obtengo $P(t)$
podemos integrar en función del tiempo y obtener una respuesta también determinista $q(t)$

Existen excitaciones que no cumplen esta propiedad

ej: ruido generado por un motor cohete
rugosidad de la pista de aterrizaje (carretera convencional)
altura de las olas en una playa

Funciones aleatorias cuya respuesta es una función aleatoria

↳ la solución al problema de vibraciones se obtiene en función de variables estadísticas en términos de cuál es la probabilidad de que la respuesta del sistema supere un cierto límite q_{max}.



• Proceso aleatorio estacionario → está formado por un conjunto de registros $X_K(t)$ $K = 1 \ldots n$

la media del valor del proceso aleatorio en el instante t_1:

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_k(t_1)$$

⊛ dificil en el caso ingenieril

- Un proceso aleatorio se dice estacionario si las variables estadísticas (media, media cuadrática ... etc) son independientes del instante t_1
- Medias temporales, proceso ergódico →

$x_1(t)$, $x_2(t)$ ... $x_k(t)$ ...

- Consideramos un registro cualquiera $x_k(t)$, la media temporal se define como

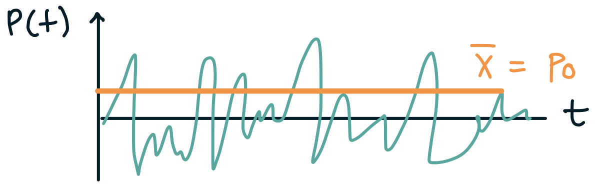
$$\bar{x}(k) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t)\, dt$$

- Un proceso aleatorio se dice ergódico si las propiedades estadísticas son independientes del registro "k" que hemos considerado. $\bar{x}$, $\bar{x}^2$ ... para nosotros todos los procesos van a ser ergódicos. La respuesta de un sistema a una excitación aleatoria que sea un proceso ergódico, también es ergódica.

- *media cuádratica* (tal vez también la media) *y función de autocorrelación*

$$\bar{x}^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2\, dt \qquad \bar{x} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt$$

la media de la excitación es un valor constante



$$M\ddot{q} + F\dot{q} + kq = P_0 \ , \quad \boxed{q_0 = \frac{P_0}{K}}$$

$x = q - q_0$ ← de la media

$P = P(t) - P_0$

$\bar{P} = 0$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t+\tau)\, dt \quad \rightarrow \text{función de autocorrelacion}$$

$$R_{xx}(0) = \bar{x}^2$$

Propiedades:

1. Función simétrica $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$
2. Cumple $R_{xx}(0) = \bar{x}^2$
3. $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) \pm x(t-\tau))^2 dt > 0 =$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x^2(t) + x^2(t-\tau) \pm 2x(t)\, x(t-\tau))\, dt =$$

$$2R_{xx}(0) \pm 2R_{xx}(\tau) > 0 \quad \Rightarrow \quad R_{xx}(0) \geq |R_{xx}(\tau)|$$

el máximo de la función de autocorrelación se alcanza en $\tau = 0$

4. $R_{\dot{x}x}(\tau) = R'_{xx}(\tau)$

$R_{\dot{x}x}(\tau) = -R''_{xx}(\tau)$

entonces $R_{\dot{x}x}(0) = R'_{xx}(0) = 0$

la función de autocorrelación indica cómo de relacionados están los registros separados por el tiempo τ, $R_{xx}(\tau \to \infty) \to 0$

- Definimos la varianza σ_x^2 como

$$\sigma^2_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (x(t)-\bar{x})^2 \Big|_{si\ \bar{x}=0} = \bar{x}^2$$

$$\sigma^2_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (x^2(t) - 2x(t)\bar{x} + \bar{x}^2)\, dt =$$

$$= \overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

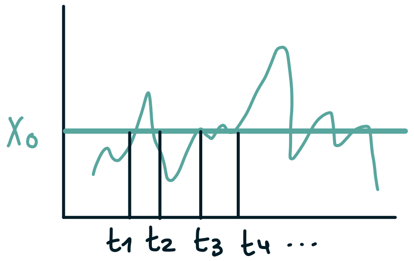
- La raíz cuadrada de $\overline{x^2}$ se denomina valor RMS, si $\bar{x} = 0$ la desviación estándar $\sigma_x = RMS_x$

* FUNCIÓN DE PROBABILIDAD $\Rightarrow$ La probabilidad de que una función $x(t)$ no supere un cierto valor x_0

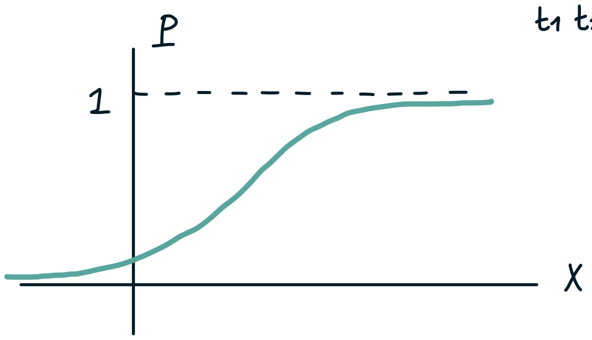
$P(x(t) < x(0))$

$P(-\infty) = 0$

$P(\infty) = 1$

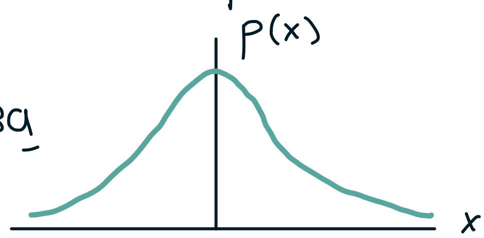


$$P(x(t) < x_0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_i \Delta t_i$$



- La función densidad de probabilidad $p(x)$ se define como:

$$\frac{dP}{dx} = p(x) \quad \text{con} \quad p(-\infty) = 0, \quad p(\infty) = 0$$



- Los procesos ergódicos aleatorios se ajustan a funciones de densidad de probabilidad $p(x)$ con distribución normal o gaussiana

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

y para media nula

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

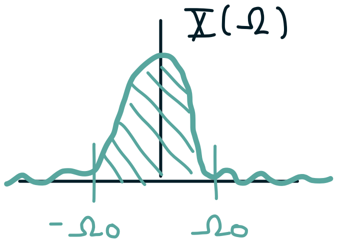
- Transformada de Fourier $\longrightarrow$

$$TxF(x(t)) = X(i\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(i\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega$$

- Permite expresar una función en el dominio del tiempo mediante una integral

$\hookrightarrow$ $X(i\Omega)$ representa la contribución de la frecuencia Ω a la función $x(t)$



- La transformada de Fourier de la función de autocorrelación $R_{xx}(\tau)$ se denomina densidad espectral de potencia $S_{xx}(\Omega)$

$$S_{xx}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-i\Omega\tau}\, d\tau$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\Omega)\, e^{i\Omega\tau}\, d\Omega$$

- $S_{xx}(\Omega)$ es la energía aportada al sistema en la frecuencia Ω

$$\boxed{\overline{x^2} = R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\Omega)\, d\Omega}$$ ¡importante!

$\hookrightarrow$ σ_x y si $\bar{x} = 0 \Rightarrow p(x)$ para proceso gaussiano

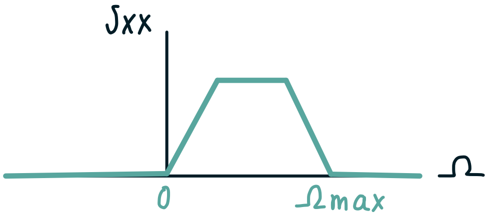
- Dado un sistema lineal sometido a una excitación aleatoria proceso ergódico, de densidad espectral de potencia de la excitación $S_{xx}(\Omega)$ se puede demostrar que la densidad espectral de potencia de la respuesta vale

$$\boxed{S_{yy}(\Omega) = |H(i\Omega)|^2\, S_{xx}(\Omega)}$$

dato

función transferencia

- Si $S_{xx}(\Omega)$ es nulo en un rango de frecuencias, la densidad espectral de la respuesta también será no nula en el rango $[0, \Omega_{max}]$



- No hay transferencia de energía fuera del rango de excitación

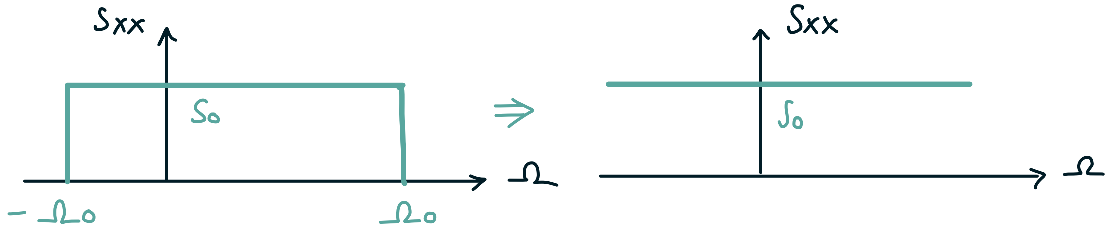
- $$\overline{y^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\Omega)\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(i\Omega)|^2\, S_{xx}(\Omega)\, d\Omega$$

$$|H(i\Omega)| = \frac{1}{k\left[\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{1/2}}$$

la calculo por respuesta a carga determinista

• Densidad espectral de potencia ⟶ Fenómenos de banda ancha y fenómenos de banda estrecha

* banda ancha = procesos de PSD ≃ constante en un rango de frecuencias relativamente amplio
se aproximan con RUIDO BLANCO, que posee una PSD uniforme S_0 para todas las frecuencias



* banda estrecha = Sxx es picuda y concentrada en una única frecuencia. Se aproxima por la función delta de Dirac a la frecuencia Ω_0

* Proceso en la solución de un sistema de 1gdl

1. $M\ddot{y} + F\dot{y} + Ky = x(t)$
2. conocemos PSD $S_{xx}(\Omega) \equiv$ DATO
   " $H(i\Omega)$ del sistema $\begin{cases} \text{ensayos} \\ \text{análisis} \end{cases}$
3. obtenemos la PSD de la respuesta $S_{yy}(\Omega) = |H(i\Omega)|^2 S_{xx}(\Omega)$
4. calculamos la media cuadrática de la respuesta

$$\bar{y}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(i\Omega)|^2 S_{xx}(\Omega)\, d\Omega$$

estimamos si podemos simplificar con el concepto de banda ancha o estrecha la integral

5. si $\bar{x} = 0$ (valor medio nulo), $\bar{y} = 0$ ⟶ obtenemos la desviación estándar. Suponemos un proceso de distribución normal o gaussiana. Calculamos el valor RMS $= (\bar{y}^2)^{1/2}$
6. probabilidad de que la respuesta supere un cierto escalón conocido σ_x

$$\begin{cases} \lambda = 1 \rightarrow y > \pm\sigma_x = 31.7\% \\ \lambda = 2 \rightarrow y > \pm 2\sigma_x = 4.6\% \\ \lambda = 3 \rightarrow y > \pm 3\sigma_x = 0.3\% \end{cases}$$