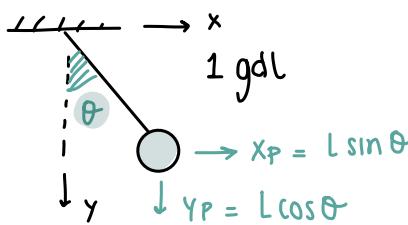
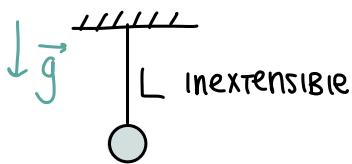


$q(+)$ = coordenada generalizada no es única



Péndulo

$$T = \frac{1}{2} J \dot{q}^2 = \frac{1}{2} M \dot{q}^2 \quad \text{energía cinética}$$

$$J = M L^2$$

$$U = \frac{1}{2} k q^2 \quad \text{energía potencial}$$

$$k = M g L$$

$$D = \frac{1}{2} F \dot{q}^2 \quad \text{energía dissipada o amortiguada}$$

- 1) • Viscosa \rightarrow FLUIDO (aire, líquido, combustible ...)
 - 2) • HISTERÉTICO } \rightarrow DEFORMACIÓN DE LA ESTRUCTURA
 - 3) • ESTRUCTURAL
 - PROPORCIONAL \rightarrow MODELO MATEMÁTICO
 - 3) • ROZAMIENTO o CAVIOMB \rightarrow MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE PARTES
- $W = P \cdot q$ trabajo

- $J \ddot{q} + F \dot{q} + K q = P(t)$ ec. sistema 1 gdl linealizado

+ condiciones iniciales

$$\begin{cases} F \ll J \cdot k \\ F \approx 0 \end{cases}$$

sistema conservativo

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \quad (\text{PERCUSIÓN})$$

J = almacén de energía cinética
 K = almacén de energía potencial
 q_0 = aporte en $t=0$ de energía potencial
 \dot{q}_0 = " " " de energía cinética

- Un sistema conservativo no pierde energía

$$T = \frac{1}{2} J \dot{q}^2 (+)$$

$$U = \frac{1}{2} K q^2$$

$$T + U = E = \text{cte}$$

$$U(0) = \frac{1}{2} k q(0)^2 \quad / \quad T(0) = \frac{1}{2} J \dot{q}(0)^2$$

$$\text{si } U=0, \dot{q}=0 \rightarrow T=E_{\max}, \dot{q}_{\max}$$

$$T=0, \dot{q}=0 \rightarrow U=E_{\max}, \dot{q}_{\max}$$

$$J \ddot{q} + F \dot{q} + K q = P(t) \rightarrow q(+) = q_1 + q_2$$

$$q(0) = q_0$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

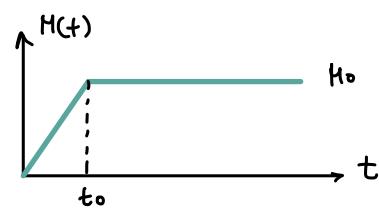
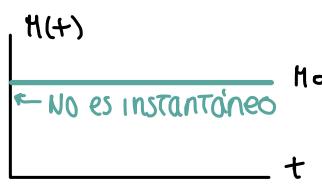
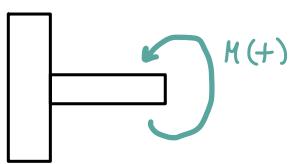
$$\begin{cases} J \ddot{q}_I + F \dot{q}_I + K q_I = 0 \rightarrow q_I(+) \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0 \\ q_I(0) = q_0 \\ \dot{q}_I(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \quad \text{RESPUESTA TRANSITORIA}$$

$$\begin{cases} J \ddot{q}_{II} + F \dot{q}_{II} + K q_{II} = P(t) \rightarrow q_{II}(+) \Big|_{t \rightarrow \infty} \neq 0 \\ q_{II}(0) = 0 \\ \dot{q}_{II}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{RESPUESTA PERMANENTE}$$

• respuesta permanente \Rightarrow A) dominio del tiempo

B) dominio de la frecuencia

A) cargas de corta duración y que dependen de un parámetro

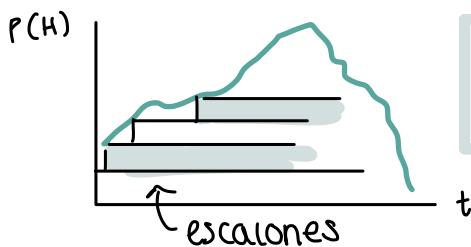


$\exists t_0 /$ alargarse vida (reducir esfuerzos sobre el eje?)

$q(t, t_0) \Rightarrow$ minimizar los esfuerzos (solución paramétrica)

↳ solución dominio tiempo

• integral convolución o Duhamel

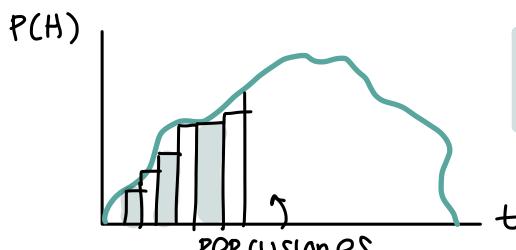


$$q(t) = h(t) p(0) + \int_0^t h(t-z) p'(z) dz$$

$h(t) \equiv$ función de instalación, respuesta del sistema a carga escalón unidad con condiciones iniciales nulas



• $h(t)$ analíticamente experimentalmente



$$q(t) = \int_0^t I(t-z) p(z) dz$$

$I(t) \equiv$ función de memoria y es la respuesta del sistema a una percusión de intensidad unidad

19/09/2022

$$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = p(t)$$

$F \equiv$ coef. amortiguamiento viscoso $D = 1/2 F \dot{q}^2$

SOL. DOMINIO DEL TIEMPO \rightarrow CARGAS CORTA DURACIÓN

$p(t, \sigma) \rightarrow q(t, \sigma)$ "ENCONTRAR σ " tal que

$q(t, \sigma)$ cumpla cierta condición

$$\left. \begin{array}{l} |\ddot{q}| < \ddot{q}_{\max} \\ F\dot{q} < F\dot{q}_{\max} \\ q < q_{\max} \end{array} \right\}$$

$\omega \equiv$ frecuencia de excitación

• dominio de la frecuencia

$$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = p(t) \leftarrow \text{función armónica} = P_0 e^{i\omega t}$$

(siendo rigurosos $e^{i(\omega t + \delta)}$)

$p(t)$ será la parte real o la parte imaginaria

(excitaciones cosenoidales o senoidales)

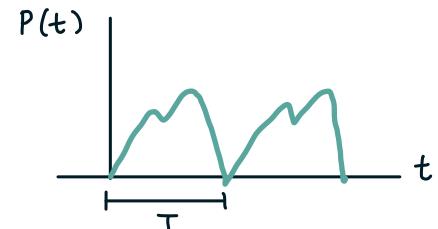
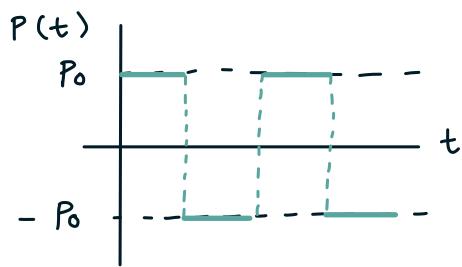
Ejemplo: máquinas rotativas ($\omega \equiv$ vel. rotación máquina)

* CARGAS PERIÓDICAS $P(t+T) = P(t) \Rightarrow$ ADMITEN DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$\text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \text{FRECUENCIA FUNDAMENTAL}$$

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$



* SI $P(t)$ NO ES PERIÓDICA PUEDE POSEER TRANSFORMADA FOURIER

COMPLEJO QUE $\int_{-\infty}^{\infty} |P(t)| dt < \infty$ SEA CONVERGENTE

\hookrightarrow ENERGIA APORTADA AL SISTEMA FINITA

\hookrightarrow Y N.º DISCONTINUIDADES FINITAS, N.º FINITO DE DISCONTINUIDADES FINITAS

\hookrightarrow $P(t)$ SE PUEDE EXPRESAR COMO UNA INTEGRAL

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE $P(t)$

$$\text{con } P(i\omega) = T \times F(P(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) e^{-i\omega t} dt$$

• LAS IGUALDADES EN EL DESARROLLO EN SERIE Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER SE JUSTIFICAN MATEMÁTICAMENTE POR LAS PROPIEDADES DE ORTOGONALIDAD DE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS SIN, COS.

$$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = P(t) \left\{ \begin{array}{l} \text{ARMÓNICA} \\ \text{PERIÓDICA} \\ \text{TRANS. FOURIER} \end{array} \right.$$

\hookrightarrow ESTAMOS INTERESADOS EN OBTENER LA RESPUESTA PERMANENTE

TRANSITORIA \rightarrow DEPENDE DE C.I. ; $t \rightarrow \infty$; $q_I(t) \rightarrow 0$

PERMANENTE \rightarrow C.I. NULAS ; $q_{II}(t) \neq 0$ SIEMPRE QUE $P(t) \neq 0$

$$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = P(t) \leftarrow \text{TIENE TRANSFORMADA DE FOURIER}$$

\hookrightarrow SI ES ARMÓNICA $\delta(\omega - \omega_0)$ (DELTA DIRAC)

$q(t)$ TAMBIÉN TENDRÁ TRANSF. FOURIER , $Q(i\omega) = T \times F(q(t))$

$$(-\omega^2 J + i\omega F + K) Q(i\omega) = P(i\omega)$$

$$Q(i\omega) = \frac{1}{K - \omega^2 J + i\omega F} P(i\omega)$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA H(i ω) o' FRF(i ω)

$$= \frac{1}{\sqrt{(K - \omega^2 J)^2 + (\omega F)^2}} e^{-i\varphi} = \frac{\frac{1}{K} e^{-i\varphi}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2 J}{K})^2 + (\frac{\omega F}{K})^2}}$$

$$\text{con } \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega F}{K - \omega^2 J}$$

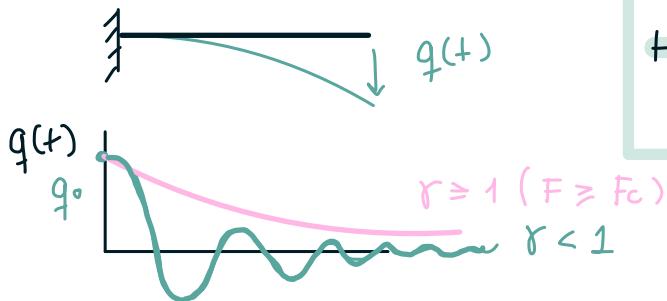
* $\sqrt{\frac{K}{J}} = \omega_0$ = FRECUENCIA NATURAL DEL SIST. NO AMORTIGUADO ($F = 0$)

$$* \frac{F}{K} = \frac{2F\sqrt{J}}{2\sqrt{K}\sqrt{K}\sqrt{J}} = \frac{2F}{2\sqrt{KJ}} \cdot \frac{1}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0}$$

COEFICIENTE ADIMENSIONAL DE AMORTIGUAMIENTO

$$\hookrightarrow \gamma = \frac{F}{2\sqrt{KJ}} = \frac{F}{F_c} \quad (\ll 1) \quad (\gamma \sim 0.02, 0.05)$$

COEF. AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO



$$H(i\omega) = \frac{1}{K} \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + (2\gamma \frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

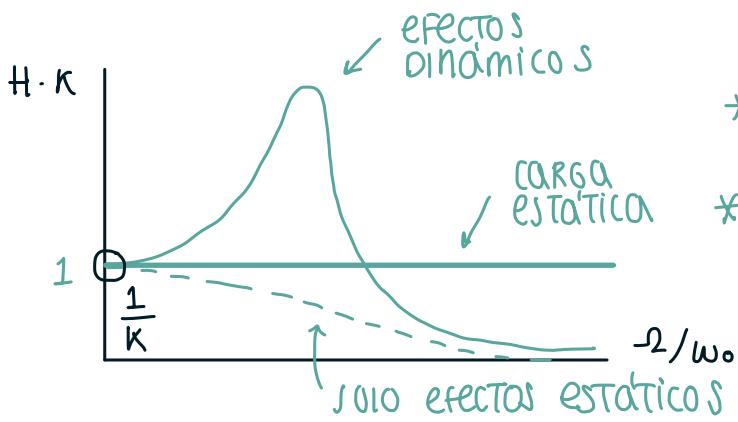
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega F}{K - \omega^2 J} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\gamma \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

* LA REPRESENTACIÓN DE $|H(i\omega)|$ VS ω/ω_0 Y φ VS ω/ω_0 SE DENOMINA DIAGRAMA DE BODE Y PROPORCIONA INFORMACIÓN DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA ANTE UNA CARGA P(t).

$$|H(i\omega)| \cdot K = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + (\frac{2\gamma\omega}{\omega_0})^2}} \quad \text{VS. } \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{PARA VARIOS VALORES DE } \gamma$$

$$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = P(t) \quad \text{CON } P(t) \text{ DINÁMICA}$$

si $P(t) = P_0$ (CTE) $\Rightarrow q_0 = \frac{P_0}{K}$ \Rightarrow Deformación estática del sistema ante una carga de la misma intensidad a la armónica



- * si $\gamma \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ los efectos dinámicos son despreciables
- * si $\gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$ los efectos dinámicos son importantes

* $H(i\omega)K - 1 \Rightarrow D(i\omega)$ Función de amplificación dinámica

(como de importantes son los efectos dinámicos)

↳ $H(i\omega)K$ alcanza el máximo a la frecuencia $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2\gamma^2}$

$$\text{y vale } [H(i\omega)K]_{\text{max}} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2}} \Big|_{\gamma \ll 1} \simeq \frac{1}{2\gamma}$$

(p.e. si $\gamma \sim \frac{1}{100}$, $[H(i\omega)K] \simeq 50$)

↳ los efectos dinámicos son 50 veces mayores que la misma carga aplicada de forma estática

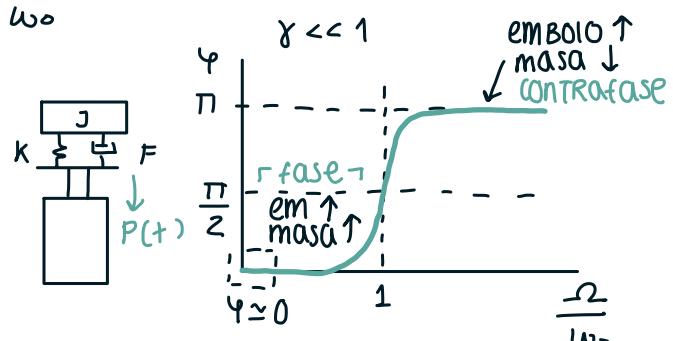
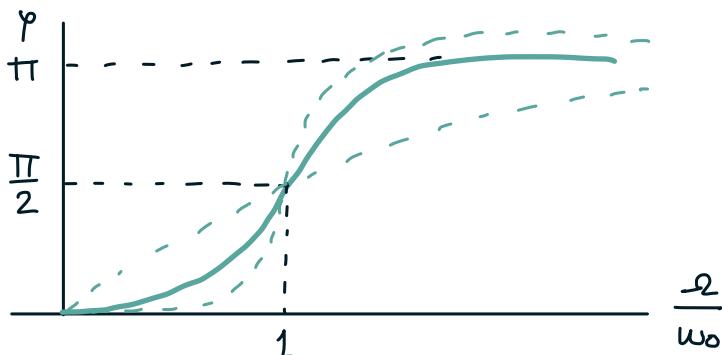
⇒ condición de entrada en resonancia en amplitud ⇒ con muy poca energía de excitación se consigue una gran amplitud de respuesta (situación a evitar excepto en algunas aplicaciones como un amplificador de sonido)

$$\Psi = \arctg \left(\frac{2\gamma\omega/\omega_0}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \right)$$

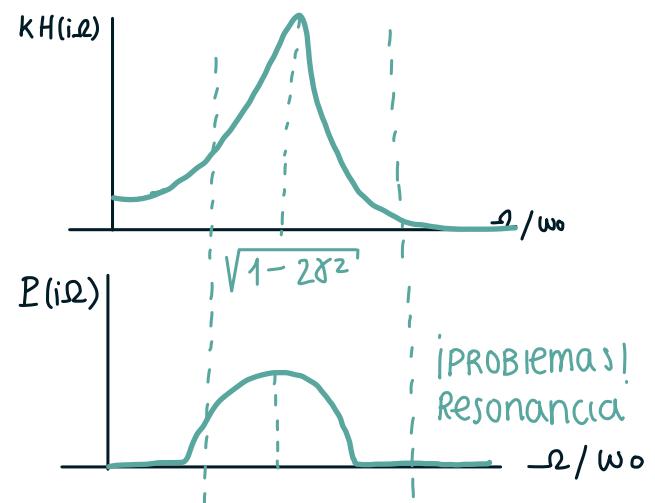
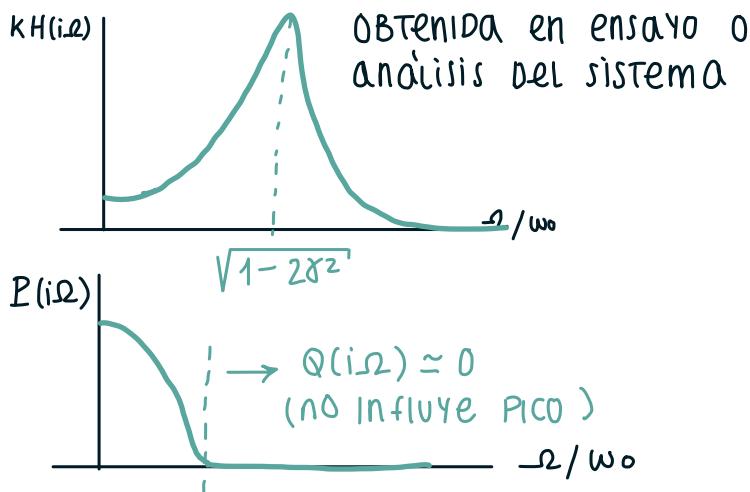
* $\Psi = \frac{\pi}{2}$ si $\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \neq \gamma \rightarrow$ resonancia en fase $\sqrt{\frac{K}{J}}$

* $\Psi \rightarrow 0$ si $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0 \rightarrow$ calidad única amortiguam. viscosa (parte de 0)

* $\Psi \simeq 0$ para $\frac{\omega}{\omega_0} < 1$ y $\Psi \simeq \pi$ para $\frac{\omega}{\omega_0} > 1$



$$Q(i\omega) = H(i\omega) P(i\omega)$$

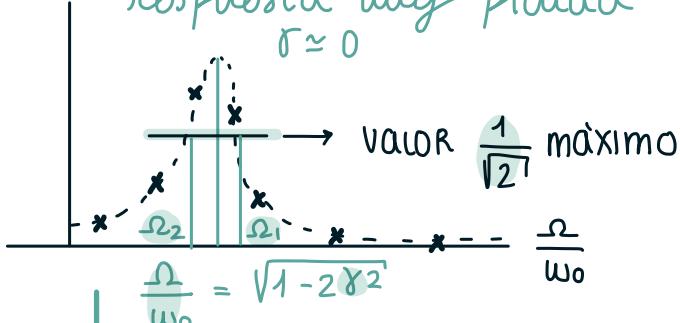


- * EN MUCHOS CASOS INTERESA ADÉMÁS DE CONOCER $H(i\omega)$ LAS PROPIEDADES DEL SISTEMA J, F, K . NO OLVIDEMOS QUE ES UN MODELO DE UN SISTEMA COMPLEJO
- * K SE DETERMINA POR UNA CARGA ESTÁTICA (ZONA BAJA FRECUENCIA) $\omega/\omega_0 \rightarrow 0$

- MODIFICO LA CARGA
- MODIFICO EL SISTEMA (CAMBIO SU FRECUENCIA NATURAL)

Conocido "K" vamos a la fase γ y detectamos el punto del paso por $\pi/2$ $\rightarrow \omega = \omega_0 = \sqrt{K/J} \rightarrow$ INERCIA SISTEMA

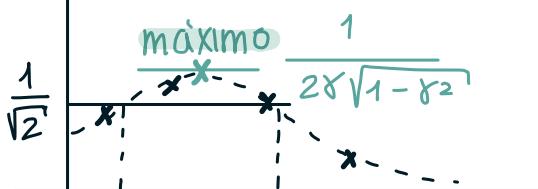
• respuesta muy picuda $\gamma \approx 0$



se demuestra que

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0} = \gamma$$

• respuesta plana



$$Q(i\omega) = H(i\omega) \cdot P(i\omega)$$

- PUEDE SER QUE EN UN ENSAYO LO MEDIDO SEA LA FUNCIÓN DE MEMORIA $I(t)$, RESPUESTA A LA PERCUSIÓN UNIDAD (CÓDIGOS NUMÉRICOS CFD, LO FÁCIL DE TENER ES LA FUNCIÓN MEMORIA)
- LA FUNCIÓN DE MEMORIA ESTÁ RELACIONADA CON LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA MEDIANTE UNA TRANSFORMADA DE FOURIER

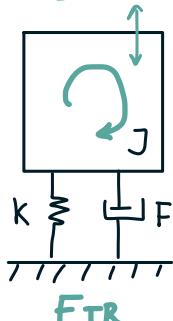
→ MAS FÁCIL DAR UNA PERCUSIÓN (PULSO)

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{-i\omega t} dt$$

* MODELOS USADOS CONVENCIONALMENTE CON SISTEMAS DE 1 GDL

- 1) movimiento base
- 2) fuerza transmitida

2) FUERZA TRANSMITIDA



$$\begin{aligned} J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq &= P(i\omega) \\ Q(i\omega) &= H(i\omega) P(i\omega) \end{aligned}$$

FUERZA TRANSMITIDA : $F_{TR} = kq + F\dot{q}$

$$\begin{aligned} F_{TR}(i\omega) &= (K + i\omega F) Q(i\omega) = \\ &= (K + i\omega F) H(i\omega) P(i\omega) \end{aligned}$$

POR TANTO

$$|F_{TR}(i\omega)| = K \left[1 + \left(\frac{2\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{ \left[\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{2\omega}{\omega_0} \right)^2 }} P(i\omega)$$

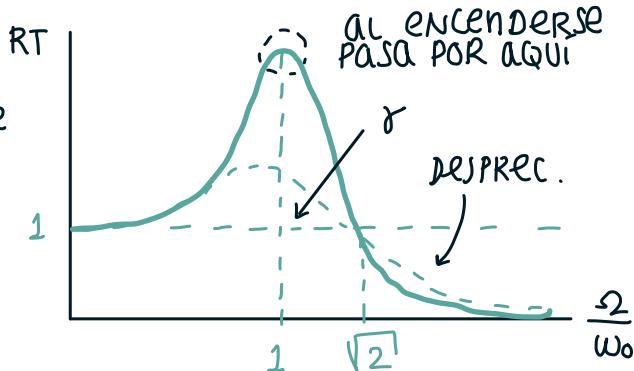
Transmisibilidad

$$\frac{|F_{TR}(i\omega)|}{P(i\omega)} = \sqrt{\frac{1 + (2\omega/\omega_0)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

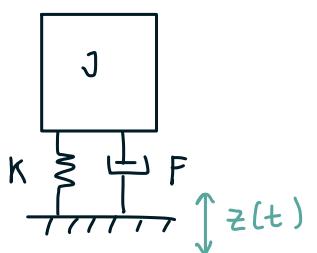
* si $\frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}$ efectos dinámicos despreciables

a menor γ , la fuerza transmitida se reduce $\rightarrow \gamma \approx 0$ (picos mayores)

$\gamma \approx$ compromiso para que en arranque y parada el pico de la respuesta sea menor que un límite



1) Movimiento de la Base



$q(t) \equiv$ desplazamiento ABSOLUTO J

$\left. \begin{array}{l} \text{EDIFICIO - SEISMO} \\ \text{SATÉLITE - LANZADOR} \\ \text{MICROSCOPIO - mesa lab.} \end{array} \right\}$

$$T = \frac{1}{2} J \dot{q}^2$$

$$U = \frac{1}{2} K (q - z)^2$$

$$D = \frac{1}{2} F (\dot{q} - \dot{z})^2$$

$$J\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = F\dot{z} + Kz$$

FUERZA EJERCIDA POR el entorno

$$Q(i\omega) = \sqrt{\frac{1 + (2\omega/\omega_0)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2}} z(i\omega)$$

- BUSCAMOS EL MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE BASE Y SISTEMA

$$w(t) = q(t) - z(t)$$

$$\hookrightarrow J(\ddot{w} + \ddot{z}) + F\dot{w} + Kw = 0$$

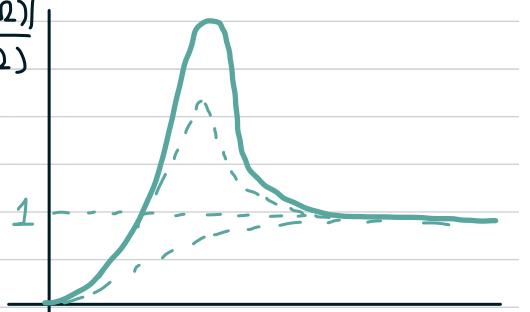
$$J\ddot{w} + F\dot{w} + Kw = -J\ddot{z}$$

$$w(i\omega) = \frac{J\omega^2}{K - \omega^2 J + i\omega F} z(i\omega) \text{ POR TANTO}$$

$$|w(i\omega)| = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + (\frac{2\delta\omega}{\omega_0})^2}} |z(i\omega)|$$

* si $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 0$, $|w| \rightarrow 0 \Rightarrow$ MOV. RELATIVO

casi nulo, el sistema se mueve TANTO como la base



* si $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \rightarrow$ CONDICIÓN DE RESONANCIA, hay efecto de amplificación

* si $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$, $|\frac{w}{z}| \rightarrow 1$, $q \rightarrow 0 \Rightarrow$ el sistema posee una

INERCIA TAN ELEVADA $\omega_0 \ll 1$ que hace que el sistema apenas se mueva bajo la acción del entorno

• DEBEMOS INTENTAR QUE $\omega_0 \ll 1 = \sqrt{K/J}$ | masa muy GRANDE
RIGIDEZ muy BAJA