Oblig 1

Rosa Alsgaard

17. feb 2021

Merk, oblig delvis besvart i Latex og for hånd

Oppgave 1a

$$\mathbf{r}(t) = (a \cdot arcsinh\left(\frac{t}{a}\right), \sqrt{t^2 + a^2}), -b \leq t \leq b \tag{1}$$

Mellomregning for å finne $r'(t)$:

$\mathbf{r}'(t) = a \cdot \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{t}{a})^2}},\ 2t \cdot \frac{1}{2}(t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{t}{a})^2}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}\right) \tag{2}$$

Mellomregning for å vise at $||\mathbf{r}'(t)|| = 1\ \forall t$:

$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{t}{a})^2}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)^2}$

$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{\frac{1}{1+(\frac{t}{a})^2} + \frac{t^2}{t^2+a^2}}$

…dividerer andre ledd med a^2 oppe og nede

$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{\frac{1}{1+(\frac{t}{a})^2} + \frac{\frac{t^2}{a^2}}{\frac{t^2}{a^2}+1}}$

$||\mathbf{r}'(t)|| = \frac{1+\frac{t^2}{a^2}}{\frac{t^2}{a^2}+1}$

$$||\mathbf{r}'(t)|| = 1 \tag{3}$$

$||\mathbf{r}'(t)||$ er altså lik 1 ∀t.

Oppgave 1b

Mellomregning for å vise at kurvens buelengde B = 2b:

$B = \int_{-b}^{b} ||\mathbf{r}'(t)||$ dt

$B = \int_{-b}^{b} 1$ dt

$$B = 2b \tag{4}$$

Oppgave 1c

Ved hjelp av verdier fra oppgaveteksten kan vi vise at

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{S_0 S}{Sa}}{\frac{S_0}{S}} = \frac{s}{a}$

Fra oppgave 1a har vi at

$x = a \cdot arcsinh\left(\frac{t}{a}\right)$ og $y = \sqrt{t^2 + a^2}$,

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{t}{a})^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}}$ og $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}$

Ved hjelp av disse verdiene vet vi allerede at stigningstallet for **r** er

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}} / \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}} = \frac{t}{a}$

En sammenheng mellom s/a og t/a kan sees slik

$s/a = tan\theta = dy/dx = t/a$

Som gir s = t.

Oppgave 1d

Kode:

b = 3; a = 1;

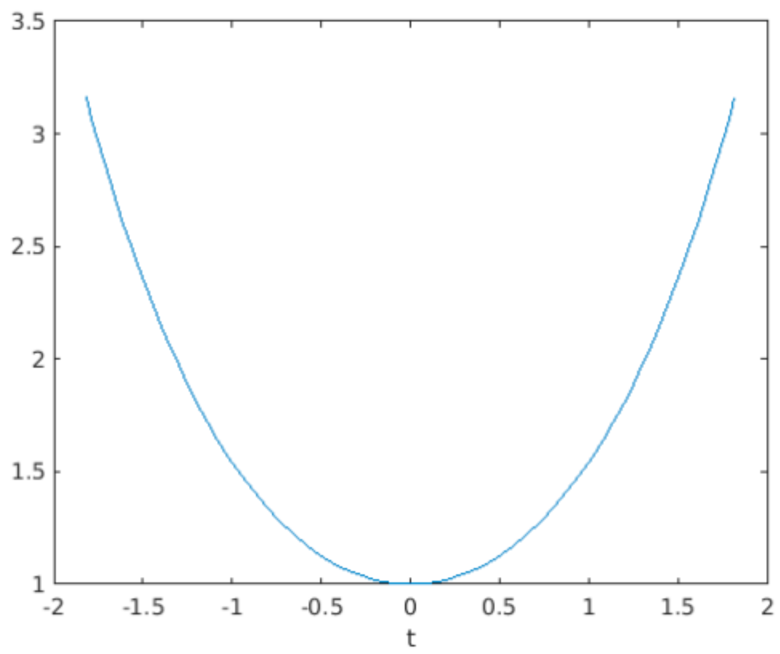
t = -b : 0.1 : b;

x = a * asinh(t/a); y = sqrt(t.^{2} + a.^{2});

plot(x,y)

xlabel('t')

Plott:



Oppgave 1e
Oppgave 1f -denne siden viser et sammendrag av alle uttrykkene i oppgaven

$$\rho = \left(a \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{t}{a}\right),\ \sqrt{t^2+a^2}\cos\theta,\ \sqrt{t^2+a^2}\sin\theta\right)$$

$$\rho_\theta = \left(0,\ -\sqrt{t^2+a^2}\sin\theta,\ \sqrt{t^2+a^2}\cos\theta\right)$$

$$\rho_t = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}},\ \frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}},\ \frac{t\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

$$\rho_{tt} = \left(-\frac{at}{(t^2+a^2)^{3/2}},\ \frac{a^2\cos\theta}{(t^2+a^2)^{3/2}},\ \frac{a^2\sin\theta}{(t^2+a^2)^{3/2}}\right)$$

$$\rho_{\theta\theta} = \left(0,\ -\sqrt{t^2+a^2}\cos\theta,\ -\sqrt{t^2+a^2}\sin\theta\right)$$

$$\rho_{t\theta} = \left(0,\ -\frac{t\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}},\ \frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

$$\rho_t \times \rho_\theta = \left(t,\ -a\cos\theta,\ -a\sin\theta\right) \square \qquad \|\rho_t \times \rho_\theta\| = \sqrt{t^2+a^2}$$

$$\vec{n} = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}},\ -\frac{a\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}},\ -\frac{a\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

$$E = \|\rho_t\|^2 = 1 \square \qquad F = \rho_t \cdot \rho_\theta = 0 \square \qquad G = \|\rho_\theta\|^2 = t^2+a^2$$

$$L = \rho_{tt}\cdot\vec{n} = -\frac{a}{t^2+a^2} \square \qquad M = \rho_{t\theta}\cdot\vec{n} = 0 \square \qquad N = \rho_{\theta\theta}\cdot\vec{n} = a \square \qquad H = 0$$

De fire neste sidene viser detaljerte utledninger av uttrykkene i oppgave 1e og 1f (samt for H = 0)

utledning av ρ_t

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\cancel{a} \frac{1}{\cancel{a}} \frac{1}{\sqrt{1+(t/a)^2}} \xrightarrow{} \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}},\ \frac{1}{\cancel{2}} \cos\theta \left(t^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cancel{2}t,\ \frac{1}{\cancel{2}}\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cancel{2}t \sin\theta \right)$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}},\ \frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}},\ \frac{t\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} \right)$$

utledning av ρ_{tt}

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \rho_t = \Bigg(-\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}t\, a \left(t^2+a^2\right)^{-3/2},$$

$$\frac{\cos\theta\left(\sqrt{t^2+a^2}\cdot 1 - t^2\left(t^2+a^2\right)^{-1/2}\right)}{t^2+a^2},$$

$$\frac{\sin\theta\left(\sqrt{t^2+a^2}\cdot 1 - \frac{1}{\cancel{2}}\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cancel{2}t\cdot t\right)}{t^2+a^2} \Bigg)$$

$$= \left(-\frac{at}{(t^2+a^2)^{3/2}},\ \frac{\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{\cos\theta\, t^2}{(t^2+a^2)^{3/2}},\ \frac{a^2\sin\theta}{(t^2+a^2)^{3/2}} \right)$$

$$= \left(-\frac{at}{(t^2+a^2)^{3/2}},\ \frac{a^2\cos\theta}{(t^2+a^2)^{3/2}},\ \frac{a^2\sin\theta}{(t^2+a^2)^{3/2}} \right)$$

utledning $\rho_{t\theta}$

$$\rho_{t\theta} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\rho_\theta = \left(0,\ -\sin\theta \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot \cancel{2}t\,(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}},\ \cos\theta \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}}\,\cancel{2}t\,(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \left(0,\ -\frac{t\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}},\ \frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

utledning av $\rho_t \times \rho_\theta$

$$\rho_t \times \rho_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}} & \frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} & \frac{t\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} \\ 0 & -\sqrt{t^2+a^2}\cos\theta & \sqrt{t^2+a^2}\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} & \frac{t\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} \\ -\sin\theta\sqrt{t^2+a^2} & \cos\theta\sqrt{t^2+a^2} \end{vmatrix},\ \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}} & \frac{t\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} \\ 0 & \cos\theta\sqrt{t^2+a^2} \end{vmatrix},\ \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{t^2+a^2}} & \frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} \\ 0 & -\sin\theta\sqrt{t^2+a^2} \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\vec{i}\,(t\cos^2\theta + t\sin^2\theta),\quad \vec{j}\,(a\cos\theta - 0),\quad \vec{k}\,(-\sin\theta \cdot a - 0)$$

$$= \vec{i}\,(t),\quad \vec{j}\,(a\cos\theta),\quad \vec{k}\,(-\sin\theta \cdot a).$$

$$\Rightarrow \rho_t \times \rho_\theta = (t,\ a\cos\theta,\ -\sin\theta\, a)$$

utledning av $\|\rho_t \times \rho_\theta\|$

$$\|\rho_t \times \rho_\theta\| = \sqrt{t^2 + a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} = \sqrt{t^2 + a^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}}$$

$$= \sqrt{t^2 + a^2}$$

utledning av $\vec{n}$

$$\vec{n} = \frac{\rho_t \times \rho_\theta}{\|\rho_t \times \rho_\theta\|} = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}, -\frac{a\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}}, -\frac{a\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

utledning av E

$$E = \|\rho_t\|^2 = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+t^2} + \frac{t^2\cos^2}{t^2+a^2} + \frac{t^2\sin^2}{t^2+a^2}}^{\,2}$$

$$= \frac{\cancel{a^2 + t^2}(\overbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}^{1})}{\cancel{a^2+t^2}} = 1$$

utledning av F

$$F = \rho_t \cdot \rho_\theta = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}}, \frac{t\cos\theta}{\sqrt{a^2+t^2}}, \frac{t\sin\theta}{\sqrt{a^2+t^2}}\right)$$

$$\cdot \left(0, -\sqrt{t^2+a^2}\sin\theta, \sqrt{t^2+a^2}\cos\theta\right)$$

$$= 0 - t\sin\theta\cos\theta + t\sin\theta\cos\theta = 0$$

utledning av G

$$G = \|\rho_\theta\|^2 = \sqrt{(t^2+a^2)\sin^2\theta + (t^2+a^2)\cos^2\theta}^{\,2}$$

$$= (t^2+a^2)\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} = t^2 + a^2$$

utledning av $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \rho_{tt} \cdot \vec{n} = \left(-\frac{at}{(t^2+a^2)^{3/2}}, -\frac{t^2\cos\theta}{(t^2+a^2)^{3/2}}, -\frac{t^2\sin\theta}{(t^2+a^2)^{3/2}} \right) \cdot$$

$$\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{1/2}}, -\frac{a\cos\theta}{(t^2+a^2)^{1/2}}, -\frac{a\sin\theta}{(t^2+a^2)^{1/2}} \right)$$

$$= -\frac{at^2}{(t^2+a^2)^{3/2+1/2}} - \frac{a^3\cos^2\theta}{(t^2+a^2)^{3/2+1/2}} - \frac{a^3\sin^2\theta}{(t^2+a^2)^{3/2+1/2}}$$

$$= -\frac{at^2 - a^3\overbrace{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}^{1}}{(t^2+a^2)^2} = \frac{-a\cancel{(t^2+a^2)}}{\cancel{(t^2+a^2)}} = -a$$

utledning av $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \rho_{t\theta} \cdot \vec{n} = \left(0, -\frac{t\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}}, \frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} \right) \cdot$$

$$\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}, -\frac{a\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}}, -\frac{a\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} \right)$$

$$= \frac{at\sin\theta\cos\theta}{t^2+a^2} - \frac{at\sin\theta\cos\theta}{t^2+a^2} = 0$$

utledning av $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N} = \rho_{\theta\theta} \cdot \vec{n} = \left(0, -\sqrt{t^2+a^2}\cos\theta, -\sqrt{t^2+a^2}\sin\theta \right) \cdot$$

$$\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}, -\frac{a\cos\theta}{\sqrt{t^2+a^2}}, -\frac{a\sin\theta}{\sqrt{t^2+a^2}} \right)$$

$$= a\cos^2\theta + a\sin^2\theta = a\overbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}^{1} = a$$

utledning av $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\,\frac{\overset{1}{E}\,\overset{a}{\mathcal{N}} - 2\overset{0}{F}\,\overset{0}{\mathcal{M}} + \overset{(t^2+a^2)}{G}\,\overset{\frac{-a}{(t^2+a^2)}}{\mathcal{L}}}{\underset{1}{E}\,\underset{t^2+a^2}{G} - \underset{0}{F^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{a + \frac{-\cancel{(t^2+a^2)}a}{\cancel{(t^2+a^2)}}}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\overbrace{a-a}^{0}}{t^2+a^2} = 0$$

Kommentar til H side 12

2a) Hvis $\vec{F} \cdot \vec{F^{\perp}} = 0$ betyr det at $F \perp F^{\perp}$

$$\vec{F}(x,y) \cdot \vec{F}^{\perp}(x,y) = (ax+by,\ cx+dy) \cdot (-cx-dy,\ ax+by)$$

$$= (ax+by)(-cx-dy) + (cx+dy)(ax+by)$$

$$= \cancel{-acx^2} \cancel{-axdy} \cancel{-bcxy} \cancel{-bdy^2} \cancel{+acx^2} \cancel{+bcxy} \cancel{+adxy} \cancel{+bdy^2}$$

$$= 0$$

Har vist at $\vec{F} \cdot \vec{F}^{\perp} = 0$, derfor er $\vec{F} \perp \vec{F}^{\perp}$ $\square$

2b) Finn d uttrykt ved a, b, c

$$\frac{\partial}{\partial x}(ax+by) - \frac{\partial}{\partial y}(-cx-dy) = \underbrace{a+d = 0}_{\text{antar at } a+d=0 \text{ fordi feltet } \vec{F}^{\perp} \text{ må være sirkulasjonsfritt (konservativt)}}$$

Det gir

$$a + d = 0$$
$$\underline{d = -a}$$

Finn/vis en potentialfunksjon for $\vec{F}^{\perp}$

$$f(x,y) = \int -cx + ay \, dx = \underbrace{-\frac{c}{2}x^2 + axy + g(y)}_{\text{en mulig potentialfunksjon}}$$

For å sjekke om den mulige potentialfunksjonen kan stemme (samt finne $g(y)$)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{2}x^2+axy+g(y)\right)=\underbrace{ax+g'(y)}$$

F^+ sin y-parameter sammenlignet

$$g'(y)=by \qquad \begin{cases} ax+g'(y) \\ ax+by \end{cases}$$

$$g(y)=\frac{1}{2}by^2+K$$

Da har vi funnet

$$\underline{\phi(x,y)=-\frac{c}{2}x^2+axy+\frac{b}{2}y^2}$$

2c $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ er en parametrisering av en nivåkurve N_c.

setning 3.7.8

Gradienten $\nabla\phi$ står normalt på nivåkurvene fordi $\vec{r}$ er en deriverbar kurve og ligger på nivåflaten. Hvis vi sier at $\vec{r}$ er i punkt $\vec{a}$ ved tiden t_0, og $\phi(\vec{r}(t)) = c$ for alle t og $\phi(\bar{a}) = c$, har vi

$$\nabla\phi(\bar{a}) = \bar{r}'(t_0) = 0$$

Dvs tangentvektoren til kurven i pkt $\vec{a}$ står normalt på gradienten $\nabla\phi(\bar{a})$ i punktet

Oppgave 2d

Vis at strømningslinjene er like eller sammenfallende med nivåkurvene, altså parallelle. Bruker at hvis A står normalt på B, og B står normalt på C så er A og C parallelle.

1) F står normalt på nivåkurvene

2) Gradienten $\nabla\phi$ står normalt på nivåkurvene til ϕ (ϕ er potensialfunksjon for $F^{\perp}$)

3) Det vil si at strømningslinjene til vektorfeltet F er parallelle med nivåkurvene til ϕ

Har da vist at strømningslinjer og nivåkurver er parallelle, og altså sammenfaller.

Kommentar til oppgave 1f

Fordi det er litt plass her.

Nederst på side 8 i denne pdf-en, under utledning av middelkrumningen H til flaten S;

At vi har funnet $H = 0$ vil si at flaten kan kalles en minimalflate.

Har da vist at S er en minimalflate.

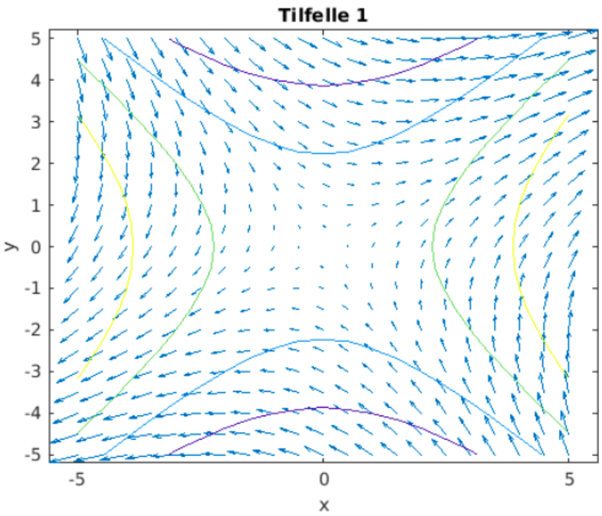
2e Bruker matrisen $A = \begin{pmatrix} c & -a \\ -a & -b \end{pmatrix}$

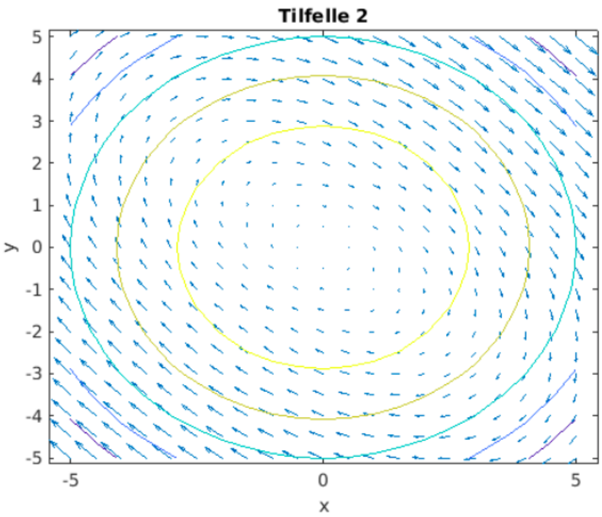
$\det(A) = -bc - a^2$

$\Delta > 0$ ellipse	$\Delta < 0$ Hyperbel
$-bc - a^2 > 0 \quad / \cdot (-1)$	$-bc - a^2 < 0 \quad / \cdot (-1)$
$\Rightarrow bc + a^2 < 0$	$\Rightarrow bc + a^2 > 0$
hvis $bc+a^2$ mindre enn 0 får vi ellipse	hvis $bc+a^2$ større enn 0 får vi hyperbel

Oppgave 2f

Plott og kode:





```
  % verdier for a, b, c
a1 = 1; b1 = 2; c1 = 2; d1 = -a1; % tilfelle 1
a2 = 1; b2 = 2; c2 = -2; d2 = -a2; % tilfelle 2

  % sjekke determinant-verdi
A1 = [c1 -a1 ; -a1 b1]; detA1 = det(A1); % D = 3
A2 = [c2 -a2 ; -a2 b2]; detA2 = det(A2); % D = -5

  % rutenett
x = -5:0.5:5; y = -5:0.5:5;
[x,y] = meshgrid(x,y);

  % matriser
u1 = a1*x+b1*y; v1 = c1*x+d1*y; % tilfelle 1
u2 = a2*x+b2*y; v2 = c2*x+d2*y; % tilfelle 2

  % funksjon til nivaakurve
z1 = c1*x.^2-2*a1*x*y-b1*y.^2; % tilfelle 1
z2 = c2*x.^2-2*a2*x*y-b2*y.^2; % tilfelle 2


%----------------------------------------


 % plotte vektorfelt med nivaakurver

  % tifelle 1
F1 = quiver(x,y,u1,v1);
hold on
nivaakurve1 = contour(x,y,z1, 4);

title('Tilfelle 1')
xlabel('x')
ylabel('y')

hold off

  % tilfelle 2
F2 = quiver(x,y,u2,v2);
hold on
nivaakurve2 = contour(x,y,z2, 5);

title('Tilfelle 2')
xlabel('x')
ylabel('y')
```