March 29, 2021

MAT 1110

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 22. april 2021, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

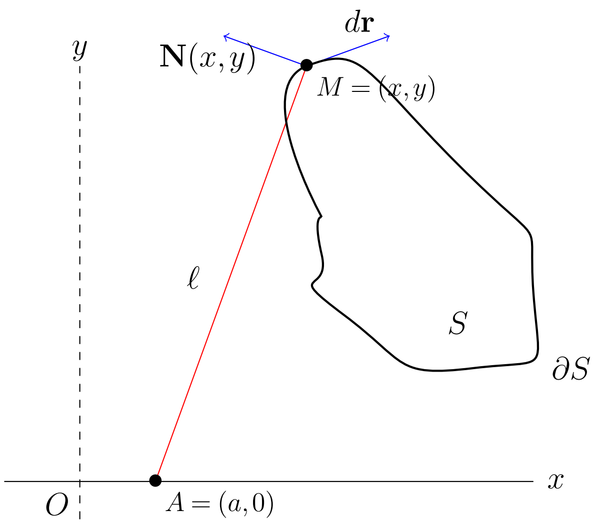
LYKKE TIL!

Alle delspørsmålene teller like mye og for å få godkjent trengs ca. 70 % av maks-skår.

Oppgave 1. Denne opgaven dreier seg om et mekanisk instrument som kalles et **planimeter**.

Et planimeter er et instrument som kan brukes til å måle arealet av et område avgrenset av et omriss i planet. Det ble oppfunnet av den bayerske ingeniøren J.H.Hermann i 1814. Hans planimeter var et såkalt lineært planimeter, mens et polart planimeter ble konstruert av Jacob Amsler rundt 1854.

Her er en skjematisk illustrasjon av det lineære planimeteret:



Planimeteret har en fast akse, i figuren representert ved x-aksen. Armen AM mellom punktene $A=(a,0)$ og $M=(x,y)$ har lengde $\ell=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ og endepunktet A kan bevege seg fritt langs med x-aksen. Punktet M fører vi manuelt langs kurven ∂S og punktet A vil da følge etter, fram og tilbake langs x-aksen. På armen AM sitter det et telleverk som måler hvor langt punktet M beveger seg på tvers av AM, dvs. parallelt med normalvektoren $\mathbf{N}(x,y)$. Ideen med planimeteret er at når punktet $\mathbf{M}$ føres rundt omrisset ∂S, så vil telleverket måle arealet innenfor omrisset.

a) Vi lar $\mathbf{N}(x,y)$ være vektorfeltet som i punktet M består av en enhetsvektor (mot venstre) som står normalt på AM. Forklar hvorfor vi har

$$\mathbf{N}(x,y) = (\frac{-y}{\ell}, \frac{x-a}{\ell})$$

b) Lag et MATLAB-plot av dette vektorfeltet. Velg en passende verdi for lengden ℓ.

Ved et omløp rundt ∂S vil telleverket beregne uttrykket

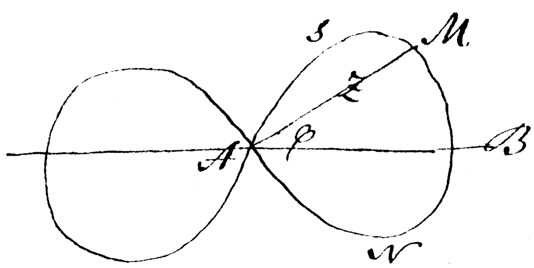
$$\oint_{\partial S} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r}$$

hvor ∂S er parametrisert ved $\mathbf{r}(t)$. Greens teorem sier at for et vektorfelt $\mathbf{N} = (P, Q)$ og en lukket kurve ∂S, parametrisert ved $\mathbf{r}$ og som omslutter et område $\mathcal{S}$ i planet, så har vi

$$\oint_{\partial S} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

c) Bruk Greens teorem til å vise at telleverket faktisk (opp til multiplikasjon med en konstant) beregner arealet av S. (NB. Husk at a er en funksjon av x og y gjennom likningen $\ell^2 = (x-a)^2 + y^2$)

Oppgave 2. Den neste oppgaven dreier seg om Bernoulli-lemniskaten:



Tegningen over er hentet fra Niels Henrik Abels skissebok og finnes også på mange 20-kroners-mynter. Abel viste stor interesse for akkurat denne kurven og publiserte flere resultater om den.

Lemniskaten er definert som alle punkter hvor produktet av avstanden til to gitte punkter er konstant.

a) La $P_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ og $P_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Vis at mengden av alle punkter $Q = (x, y)$ som oppfyller

$$\|QP_1\| \cdot \|QP_2\| = \tfrac{1}{2}$$

tilfredsstiller lemniskate-likningen

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

b) Vis at lemniskate-likningen i polar-koordinater kan uttrykkes ved

$$r^2 = \cos(2\theta), \qquad \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

Det betyr at vi kan parametrisere lemniskaten ved

$$x = \sqrt{\cos(2\theta)}\cos(\theta), \quad y = \sqrt{\cos(2\theta)}\sin(\theta), \quad \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

c) Lag et MATLAB-plot av lemniskaten.

d) Regn ut arealet av området S som lemniskaten omslutter.

Greens teorem gir at

$$\oint_{\partial S} x\,dy = \iint_S 1\,dx\,dy = \text{areal}(S)$$

hvor ∂S er lemniskaten.

e) Verifiser denne formelen ved å regne ut linjeintegralet

$$\oint_{\partial S} x\,dy$$

for for den høyre halvdelen av lemniskaten (dvs. for $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) og sammenlikn svaret med det du fant i oppgave d).

f) Vis at buelengden til hele lemniskaten er gitt ved

$$b = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$$

og finn en numerisk verdi for integralet, f.eks. ved hjelp av MATLAB.

Verdien av det uegentlige integralet

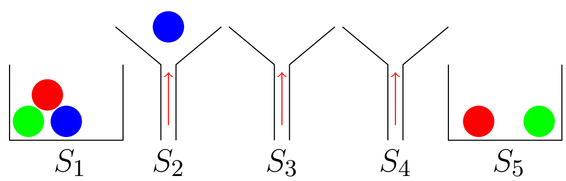
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = \omega$$

har fått et eget symbol $\omega = 2.622057\ldots$. Dette er den lemniskatiske konstanten (spiller samme rolle for en lemniskate som π gjør for en sirkel). Den lemniskatiske konstanten ble introdusert av Gauss i 1798. Han viste samtidig at

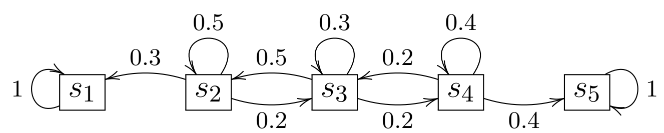
$$\omega = \frac{\pi}{agm(1,\sqrt{2})}$$

hvor $agm(a,b)$ står for den aritmetisk-geometriske middelverdien av a og b. Denne verdien er beregnet som følger: La $a_0 = a$ og $g_0 = b$ og sett $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + g_n)$ (aritmetisk middel) og $g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n}$ (geometrisk middel) De to følgene $\{a_n\}$ og $\{g_n\}$ konvergerer mot den samme verdien $agm(a,b)$. Tallet $G = \frac{1}{agm(1,\sqrt{2})} = \frac{\omega}{\pi} = 0.8346268\ldots$. kalles for øvrig Gauss´ konstant.

Oppgave 3.



Illustrasjonen over skal forestille følgende: De tre Y-ene i midten er trakter hvor det med jevne mellomrom kommer opp kraftige luftstøt, illustrert med de røde pilene. Den blå ballen blir blåst opp i lufta og når luftstøtet avtar faller den ned, enten i samme trakt som den kom fra eller i en av nabotraktene, eventuelt i en av kurvene på endene. De øvrige ballene i figuren er allerede i en av endekurvene. Hvor den faller vil variere fra gang til gang og fordelingen er gitt ved en sannsynlighetsfordeling. En mer skjematisk figur som illustrerer oppsettet er gitt i følgende figur, hvor sannsynlighetene også er satt inn:



Vi kan beskrive det som skjer ved hvert luftstøt ved hjelp av en 5×5-matrise P, gitt ved

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Eksempelvis vil tallene i den tredje søylen bety at en ball som befinner seg i S_3 etter et luftstøt vil havne i S_2 med 50% sannsynlighet, i S_4 med 20 % sannsynlighet og det resterende, 30%, gir sannsynligheten for at ballen faller ned i S_3 igjen. En slik matrise hvor summen av elementene i hver søyle er 1 kalles en **stokastisk matrise**.

a) Bruk MATLAB (eller Python) til å finne egenverdiene til P.

Dersom vi starter med en ball i en av S_2, S_3 eller S_4 vil ballen i hvert luftstøt hoppe fram og tilbake, men til slutt vil den havne i S_1 eller S_5 og bli der siden det ikke er noen vei ut av endekurvene.

b) Bruk MATLAB til å finne sannsynligheten for at ballen ender i henholdsvis S_1 og S_5 når den 1) starter i S_2, 2) starter i S_3 og 3) starter i S_4.

(Hint: En ball i S_2 kan vi beskrive ved en vektor $(0, 1, 0, 0, 0)$, og hvert luftstøt er gitt ved en multiplikasjon med P. Etter f.eks. 100 støt vil ballen med nesten 100% sannsylighet ha falt til ro i S_1 eller S_5).

c) En alternativ måte å løse oppgave b) er å beregne P^{100}. Gjør det (bruk MATLAB) og forklar hva vi ser.

Anta at vi starter med 10 baller fordelt på S_2, S_3 og S_4. Vi kjenner ikke fordelingen, men vi vet at etter to 3 luftsstøt er det forventede antall baller i de 5 posisjonene (forventning = antall baller × sannsynlighet) gitt ved vektoren

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2.070 \\ 2.055 \\ 1.293 \\ 0.942 \\ 3.640 \end{bmatrix}$$

d) Kan du finne ut hva den opprinnelige fordelingen av de 10 ballene var?

Ekstraoppgave:
Plott i MATLAB:
theta = 0:0.01:2*pi; rho = sin(2.^theta)-1.7; polarplot(theta,rho)
hold on
Z=[0.4+0.25i]; polarplot(Z,'b-o')
M=[0.3-0.3i 0.5-0.35i 0.7-0.37i 0.92-0.33i]; polarplot(M,'b')
Ax = gca; Ax.ThetaGrid = 'off'; Ax.RGrid = 'off'; Ax.RTickLabel = []; Ax.ThetaTickLabel = [];

(Inspirasjon til egne kunstverk!)