1a Betingent konvergent rekke er en rekke hvor absolutt verdi av rekken ikke konvergerer, men til gjengjeld konvergerer likevel selve rekken.

Eks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$$ har absverdi som divergerer

$$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$$

$$p = 1/3 \leq 1$$

men selve følgen konvergerer:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \dots$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$$

$$a_{n+1} \leq a_n$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

2a A lukket, begrenset i $\mathbb{R}^2$

f kontinuerlig $\mathbb{R}$
deriverbar

Hvis f er strengt voksende vil vi finne min. punkt og maks. punkt i hvert respektive endepunkt til f fordi f er kontinuerlig og deriverbar.

Hvis f er strengt avtagende finner vi også ekstremalpunktene (et min.pkt, et maks. pkt) i endepunktene. Disse måtene kan gi oss globale ekstremalpunkter. (randen)

$\nabla f = 0$ hjelper oss å finne kritiske punkter. og kan være et lokalt bunn/toppunkt.
Altså å finne den deriverte eller gradienten til f og løse for $\nabla f = 0$.

1b Konvergensradie til $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$a_1 = x$

$$a_{n+1} = -\frac{n+1}{n}\frac{x}{k}a_n \qquad n \geq 1$$

$$a_2 = -\frac{1+1}{1}\frac{x}{k}\cdot a_1$$

$$= -2\frac{x}{k}\cdot x$$

$$= -2\frac{x^2}{k}$$

forholdstesten for $n=1$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_2}{a_1}\right| = \left|\frac{-2\frac{x^2}{k}}{x}\right| = \left|-\frac{2x^{\cancel{2}}}{k}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right|$$

$$= \left|-2\frac{x}{k}\right| = \frac{2|x|}{k}$$

konvergens radien.

Regner med at k er en konstant selv om det ikke er spesifisert.

Konvergensradie: $\frac{2}{k}$

1c vis at uttrykke er i rekkens konvergens-område:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n x^n}{2^{n-1}}}_{\mathrm{I}} = \underbrace{-\frac{4x}{(2+x)^2}}_{\mathrm{II}} .$$

kan derivere på begge sider når vi er i konvergensområdet:

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{II}}{\partial x}$$

1c

$$\frac{d\left(-\frac{4x}{(2+x)^2}\right)}{dx} = \frac{4(x-2)}{(x+2)^3}$$

$$\sum n^2 2^{1-n} (-1)^n x^{n-1} = \frac{4(x-2)}{(x+2)^3}$$

$$\sum (-x)^{n-1} n^2 2^{1-n} = -\frac{4(x-2)}{(x+2)^3}$$

$$\sum \frac{(-x)^{n-1} n^2}{2^{n-1}} = -\frac{4(x-2)}{(x+2)^3}$$

gikk litt frem og tilbake i utregningen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{-8+4x}{(x+2)^3}$$

Stemmer med sum av geometrisk rekke, og vi kan komme fram til likningen ved å gå baklengs igjen.
Fjerner integrasjonskonstanten i så fall med $x=0$ og begge sider blir 0.

2b Stasjonært punkt

kar. polynom til $H f(\bar{a})$:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$\chi(\lambda = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

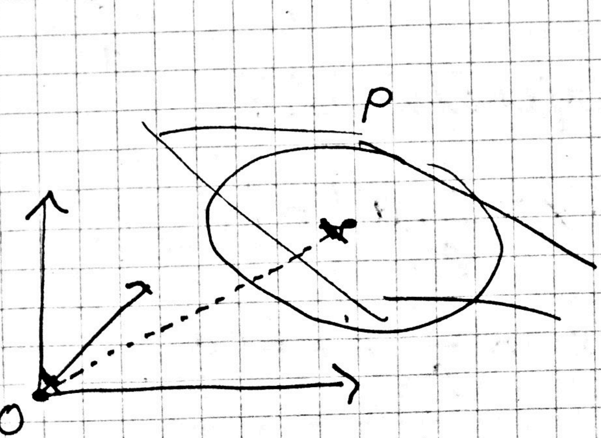
gir

$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 > 0 \\ \lambda_2 &= 1 > 0 \end{aligned}\right\}$ egenverdiene er positive

Hvis alle egenverdier er positive har vi at $\vec{a}$ er et lokalt minimum.

2c Lagranges multiplikatormetode

$\mathbb{R}^3$: $ax + by + cz = d$, med $a^2 + b^2 + c^2 = 1$



minimer funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Finner likningssett:

partiell -deriverte

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & ax + by + cz = d \\ \mathrm{II} & 2x = \lambda a \\ \mathrm{III} & 2y = \lambda b \\ \mathrm{IV} & 2z = \lambda c \end{array}$$

$$\lambda = \frac{2x}{a} \quad \Bigg| \quad y = \frac{\lambda b}{2} = \frac{\cancel{2}x}{a}\frac{b}{\cancel{2}} = \frac{b}{a}x$$

$$z = \frac{\lambda c}{2} = \frac{\cancel{2}x}{a}\frac{c}{\cancel{2}} = \frac{c}{a}x$$

$$x = x$$

$$\mathrm{I}: \quad ax + b\frac{b}{a}x + c\frac{c}{a}x = d$$

$$ax + \frac{b^2}{a}x + \frac{c^2}{a}x - d = 0$$

$$x\left(a + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right) = d$$

$$x = \frac{ad}{\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{1}} \underline{= ad}$$

funnet x. Tilsvarende:

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{\cancel{a}}\cancel{a}d \underline{= bd}$$

$$z = \frac{c}{a}x = \frac{c}{\cancel{a}}d\cancel{a} \underline{= cd}$$

Vi får funksjonsverdien $f(ad, bd, cd)$

3a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

matLab kommando 'eig(A)' gir egenverdier:

$$\frac{a}{2} + \frac{d}{2} \pm (a^2 - 2ad + 4b^2 + d^2)^{1/2}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{d}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 2ad + 4b^2 + d^2}}{2}$$

Spektralteoremet forteller at symmetriske matriser har reelle egenverdier.

3b $\vec{F}(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & 4/15 \\ 4/15 & -1/5 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

eig (B) gir

3c **Kontraksjon**

For å vise at en funksjon $\vec{F}$ er en kontraksjon har vi kriteriet

$$\|\vec{F}(x)-\vec{F}(y)\| \le C\|x-y\| \qquad C<1$$

Det betyr også at vi kan se om absolutt-verdien av begge egenverdiene er mindre enn 1 ved først å sjekke om summen av kvadratene av egenverdiene er mindre eller lik 1. I det tilfelle er kriteriet nådd. (Men ikke nødvendigvis i motsatt tilfelle.)

$$\boxed{\|\nabla f_1(\vec{a})\|^2 + \|\nabla f_2(\vec{a})\|^2 \le 1} \qquad C<1$$

$$f_1 = \frac{1}{5}x + \frac{4}{15}y + 1$$

$$f_2 = \frac{4}{15}x - \frac{1}{5}y + 1$$

$$\frac{1}{25} + \frac{16}{15^2} + \frac{16}{15^2} + \frac{1}{25} = \frac{2}{9} < C$$

I tillegg er $|\text{egenverdi}_1| = \frac{1}{3} < 1$ og $|\text{egenverdi}_2| = \frac{1}{3} < 1$ og $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1$

Finn integral

4 a $\vec{F}(x,y) = (\underbrace{2xy + y^3 + g(x)}_{P}, \underbrace{x + x^2 + 3xy^2 + h(y)}_{Q})$

$0 \leq r \leq 2\pi\theta - \theta^2$

$\mathcal{C}: r(\theta) = 2\pi\theta - \theta^2 > 0$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$r(0) = r(2\pi)$, lukket kurve

Greens teorem:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2x + 3y^2$$

positiv orientasjon

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 3y^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cancel{2x} + \cancel{3y^2} - \cancel{2x} - \cancel{3y^2} = 1$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi\theta-\theta^2} 1 \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2\pi\theta-\theta^2} d\theta$$

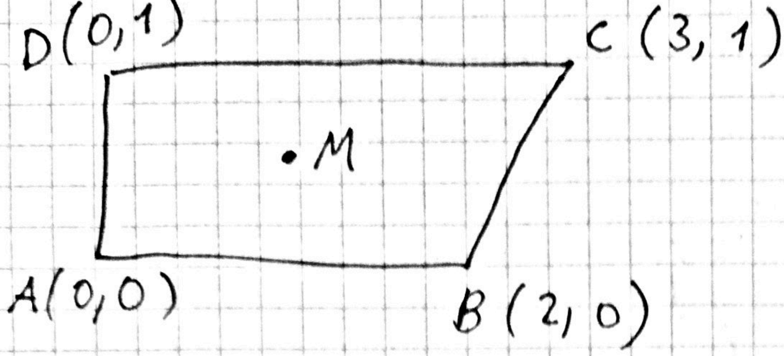
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\theta^4 - 4\pi\theta^3 + 4\pi^2\theta^2\right) d\theta$$

$$= \frac{\theta^3(3\theta^2 - 15\pi\theta + 20\pi^2)}{30}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \underline{\frac{8\pi^5}{15}}$$

Integrasjonsutregning gjort ved hjelp av 'www.integral-calculator.com'

5a Tyngdepunkt: regner det som massesenter.

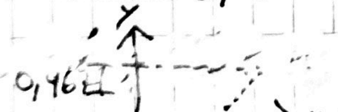


www.easycalculation.com

distance parallell sides:	1
smaller side:	2
larger side:	3

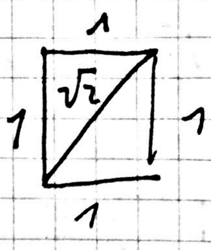
svar: 0,4667

Massesenter i en trapes ligger mellom de parallelle sidene. Nettkalkulator gir resultatet 0,4667 fra negativ y-retning.



Y-koordinatet for massesenteret er $y: 1-0,4667 \approx \frac{8}{15}$.

$$\bar{x} = \left(\frac{b}{2} + \frac{(2a+b)(c^2-d^2)}{6(-a^2+b^2)}\right)$$

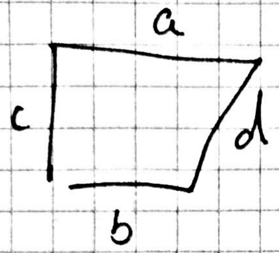


$a = 3$

$b = 2$

$c = 1$

$d = \sqrt{2}$



formel for $\bar{x}$ er hentet fra wolframalpha.

og gir: $\frac{2}{2} + \frac{((2\cdot 3)+2)(1^2-\sqrt{2}^2)}{6(-3^2+2^2)} = \frac{19}{15}$

koordinatet for massemiddelpkt (tyngdepunkt):

$(\bar{x}, \bar{y}) = (19/15, 8/15)$