31. januar 2021

MAT 1110

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 18. februar 2021, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Alle delspørsmålene teller like mye og for å få godkjent trengs ca. 70 % av maks-skår.

Oppgave 1. I denne oppgaven kan du få bruk for de hyperbolske funksjonene

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

og deres omvendte funksjoner $\operatorname{arcsinh}(x)$ og $\operatorname{arccosh}(x)$. Funksjonene oppfyller relasjonen $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ og vi har

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arccosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(a) En kurve $\mathcal{C}$ er gitt ved parametriseringen

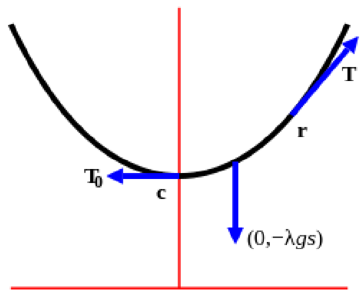
$$\mathbf{r}(t) = \left(a \cdot \operatorname{arcsinh}(\frac{t}{a}), \sqrt{t^2+a^2}\right), \quad -b \le t \le b$$

hvor $b > 0$. Finn hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(t)$ til kurven, og vis at vi har $||\mathbf{r}'(t)|| = 1$ for alle t.

(b) Vis at buelengden til kurven er $2b$. Det betyr at kurven er parametrisert ved sin buelengde.

En **kjedelinje** er den kurven som fremkommer når en kjede henges opp mellom to faste holdepunkt. Den kalles også en **katenær** kurve etter *catena* - kjede på latin. På hver del av kjeden virker kun tyngdekraften og strekkraften langs kjeden.

Figuren til høyre illustrerer en kjedelinje, og pilene svarer til kreftene som virker på den delen av kurven som ligger mellom punktene $\mathbf{c}$ og $\mathbf{r}$. La s være lengden av denne delen av kurven. Tyngdekraften ($-\lambda g s$, hvor g er tyngdens akselerasjon og λ er kurvens spesifikke masse pr. lengdeenhet) er vertikalt rettet, mens snordragene er tangensielle til kurven, $\mathbf{S}_0$ i bunnpunktet er horisontalt rettet mot venstre, langs tangenten $\mathbf{T}_0$, mens $\mathbf{S}$ i punktet $\mathbf{r}$ virker motsatt vei, parallelt med tangenten $\mathbf{T}$ og med vinkel θ med horisontalen hvor $\tan(\theta) = \frac{dy}{dx}$.



(c) Siden kjeden er i ro vil summen av kreftene som virker være 0. Hvis vi setter $a = \frac{S_0}{\lambda g}$ hvor $S_0 = ||\mathbf{S}_0||$, får vi for kreftene i horisontal retning $S_0 = S\cos(\theta)$ og i vertikal retning $\frac{S_0 s}{a} = S\sin(\theta)$, med $S = ||\mathbf{S}||$. Bruk dette til å finne et uttrykk for $\frac{dy}{dx} = \tan(\theta)$ og sammenlikn svaret med stigningstallet for kurven $\mathbf{r}(t)$ i a) ved å utnytte at

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

(d) Bruk MATLAB eller et annet program til å lage en illustrasjon av kjedelinjen for passende verdier av a og b, f.eks. $a = 1$ og $b = 3$.

Omdreiningsflaten $\mathcal{S}$ vi får ved å dreie kjedelinjen om x-aksen kalles en **katenoide**. Den kan parametriseres ved

$$\rho(t,\theta) = \left(a \cdot \operatorname{arcsinh}(\frac{t}{a}), \sqrt{t^2+a^2} \cdot \cos(\theta), \sqrt{t^2+a^2} \cdot \sin(\theta)\right)$$

hvor $-b \leq t \leq b$ og $0 \leq \theta < 2\pi$. Vi skal bruke notasjonen $\rho_t = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\rho_{t\theta} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial \theta}$, etc.

Flatenormalen til en parametrisert flate i et gitt punkt står normalt på alle tangentretningene til flaten i punktet. Vi kan derfor finne flatenormalen ved å regne ut kryss-produktet $\rho_t \times \rho_\theta$. Hvis vi vil ha en enhetsnormal må vi i tillegg dele på lengden slik at vi får en enhetsvektor.

(e) Finn en enhets-flatenormal $\mathbf{n}$ til katenoiden $\mathcal{S}$.

Definer nå følgende størrelser:

$$E = ||\rho_t||^2, \quad F = \rho_t \cdot \rho_\theta, \quad G = ||\rho_\theta||^2$$

og

$$L = \rho_{tt} \cdot \mathbf{n}, \quad M = \rho_{t\theta} \cdot \mathbf{n}, \quad N = \rho_{\theta\theta} \cdot \mathbf{n},$$

Middelkrumningen til flaten $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$H = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

En flate kalles en **minimalflate** dersom middelkrumningen $H = 0$ overalt.

(f) Vis at flaten $\mathcal{S}$ er en minimalflate.

Sluttkommentar: La Σ_1 være en sirkel i et parallellplan til (y,z)-planet med sentrum i $(-b \cdot \operatorname{arcsinh}(\frac{b}{a}), 0, 0)$ og med radius $\sqrt{a^2+b^2}$, og la Σ_2 være en parallell sirkel med sentrum i $(b \cdot \operatorname{arcsinh}(\frac{b}{a}), 0, 0)$ og samme radius. At $\mathcal{S}$ er en minimalflate betyr at av alle sammenhengende glatte flater som omslutter de to sirklene Σ_1 og Σ_2, så vil $\mathcal{S}$ være flaten med minst areal. Hvis man kunne dyppe de to parallelle sirklene ned i såpe vann, ville såpefilmen mellom dem være en minimalflate og dermed en katenoide. Ta gjerne en titt på opptaket fra Abelforelesningene ved UiO i 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=Iip8VNrHK_8>. Etter rundt 16 minutter lager Matt Parker en katenoide av såpefilm.

Oppgave 2. Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ hvor a, b, c og d er reelle konstanter. Vi kan konstruere et annet vektorfelt som står normalt på $\mathbf{F}$, vi kaller det **normalfeltet** til $\mathbf{F}$, gitt ved $\mathbf{F}^\perp(x,y) = (-cx-dy, ax+by)$.

(a) Vis at feltene $\mathbf{F}$ og $\mathbf{F}^\perp$ står normalt på hverandre.

(b) Bestem konstanten d uttrykt ved a, b og c slik at feltet $\mathbf{F}^\perp$ er konservativt, og vis at

$$\phi(x,y) = -\frac{c}{2}x^2 + axy + \frac{b}{2}y^2$$

er en potensialfunksjon ϕ for $\mathbf{F}^\perp$. I resten av oppgaven forholder vi oss til denne verdien av d som gjør feltet $\mathbf{F}^\perp$ konservativt.

Nivåkurvene til ϕ er gitt ved

$$cx^2 - 2a\,xy - by^2 = K$$

La $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ være en parametrisering av en nivåkurve.

(c) Bruk kjerneregelen til å vise at gradienten $\nabla\phi$ til potensialfunksjonen ϕ står normalt på nivåkurvene.

(d) Forklar hvorfor (c) gir at nivåkurvene til potensialfunksjonen ϕ er strømningslinjer for vektorfeltet $\mathbf{F}$.

Nivåkurvene til ϕ kan uttrykkes ved hjelp av den kvadratiske formen

$$(cx^2 - 2a\,xy - by^2) = (x\ y)\begin{pmatrix} c & -a \\ -a & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Etter spektralteoremet kan enhver symmetrisk matrise diagonaliseres og den har reelle egenverdier. Det betyr at etter et basisskifte vil den kvadratiske formen se ut som

$$(u\ v)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2)$$

Hva slags kjeglesnitt nivåkurvene utgjør, er bestemt av determinanten Δ til den kvadratiske matrisen: Hvis $\Delta < 0$, så er kurvene hyperbler, og hvis $\Delta > 0$, så er kurvene ellipser.

(e) Avgjør hva slags nivåkurver vi har som funksjon av verdiene på konstantene a, b og c.

(f) Velg to sett av verdier for a, b og c, ett med $\Delta > 0$ og ett med $\Delta < 0$. Bruk MATLAB til å illustrere vektorfeltet $\mathbf{F}$ i disse to tilfellene. Tegn også inn noen nivåkurver i hvert av tilfellene. (Bruk MATLAB-kommandoen contour).