# MAT1110 Oblig 2

av Rosa Alsgaard

## 1a – *hvordan finner vi N*

For å få en enhetsnormalvektor må vi ta vektoren og dele den på sin egen lengde.

Lengden av AM = l. Lengden til for eksempel en vektor u = [a, b] er $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Hvis vi har l = $\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ kan vi sette N(x,y) = $(\frac{-y}{l}, \frac{x-a}{l})$.

Kommentar: Jeg er klar over at forklaringen over ikke er helhetlig.

## 1b – *plott vektorfeltet fra oppgave 1a*

Finner først et uttrykk for *(x-a).*

$$l = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$l^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$l^2 - y^2 = (x-a)^2$$

$$(x-a) = \pm\sqrt{l^2 - y^2} \Rightarrow (x-a) = \sqrt{l^2 - y^2}$$

Velger kun den positive roten i henhold til oppgaveteksten og går videre til plotting.

MatLab kode og plott forsøk 1, med rutenettet -100<x,y<100 og l = 3.

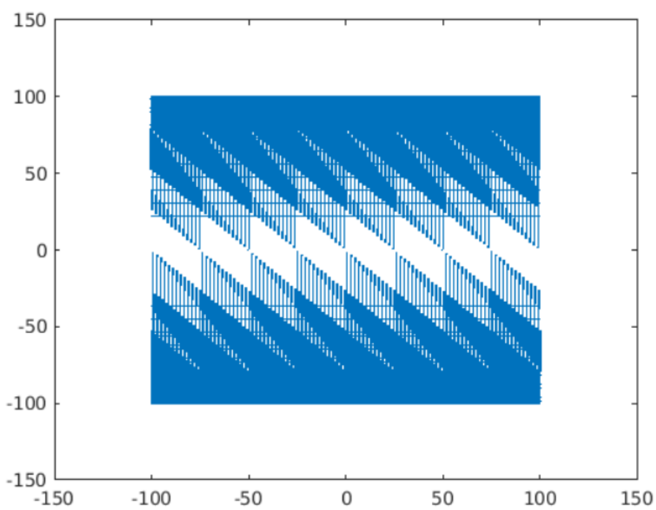
oppgave 1b

```
% rutenett
x = -100:0.5:100; y = -100:0.5:100;
[x,y] = meshgrid(x,y);

l = 3;
x_a = sqrt(l^2-y^2);

u = -y/l;
v = x_a/l;

% plott
N = quiver(x,y,u,v);
```



MatLab kode og plott forsøk 2, med rutenettet -5<x,y<5 og l = 5.

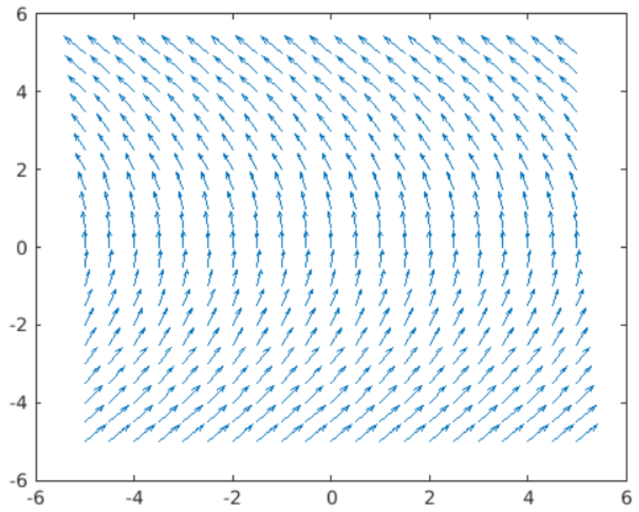
### oppgave 1b

```
% rutenett
x = -5:0.5:5; y = -5:0.5:5;
[x,y] = meshgrid(x,y);

l = 5;
x_a = sqrt(l^2-y^2);

u = -y/l;
v = x_a/l;

% plott
N = quiver(x,y,u,v);
```




Jeg tar utgangspunkt i at forsøk 2 gir en riktigere fremstilling av vektorfeltet.

## 1c – *vis at telleverket beregner arealet*

Begynner med å definere P og Q i henhold til Green's teorem, og finner deriverte av disse.

$$N = \left(-\frac{y}{l}, \frac{x-a}{l}\right) = \left(\underbrace{-\frac{y}{l}}_{P}, \underbrace{\frac{\sqrt{l^2-y^2}}{l}}_{Q}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{l} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\oint_{\partial S} N \, d\vec{r} = \iint_{\partial S} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx\,dy$$

$$= \iint_{\partial S} 0 - \left(-\frac{1}{l}\right) dx\,dy = \underline{\iint_{\partial S} \frac{1}{l} \, dx\,dy}$$

Setter «de deriverte» inn i Green's teorem.

fra side 588 i boka har vi formel for areal av et område i planet

$$\text{Areal}(s) = \iint_{s} f \, dx\,dy$$

Det passer godt med uttrykket vi har funnet:

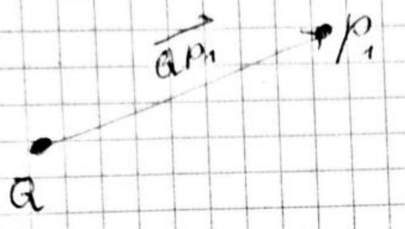
$$\underline{\iint_{\partial s} \frac{1}{l} \, dx\,dy}$$

Konkluderer ut ifra formelen på side 588 at tellerverket faktisk beregner arealet.

## 2a – *vis at lemniskate-likningen fungerer*

Begynner med å finne QP1 og QP2 vektorene. Deretter trenger vi lengdene av dem.

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad Q = (x, y)$$




$$\overrightarrow{QP_1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x, 0 - y\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x, -y\right)$$

$$\overrightarrow{QP_2} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - x, -y\right)$$

$$\|\overrightarrow{QP_1}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)^2 + (-y)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} - x\sqrt{2} + x^2 + y^2}$$

$$\|\overrightarrow{QP_2}\| = \dots = \sqrt{\frac{1}{2} + x\sqrt{2} + x^2 + y^2}$$

$$\|\overrightarrow{QP_1}\| \cdot \|\overrightarrow{QP_2}\| = \sqrt{\frac{1}{2} - x\sqrt{2} + x^2 + y^2}\,\sqrt{\frac{1}{2} + x\sqrt{2} + x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2} - x\sqrt{2} + x^2 + y^2\right)\left(\frac{1}{2} + x\sqrt{2} + x^2 + y^2\right) = \frac{1}{4}$$

$$\dots$$

$$x^4 + y^4 - x^2 + y^2 + 2x^2y^2 = 0$$

$$\underline{(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0}$$

Brukte internett-kalkulator for å forkorte uttrykket llQP1ll * llQP2ll. (Markert med tre prikker i håndskriften over.) Satte deretter resultatet lik ½ og kom frem til lemniskate-likningen.

## 2b – *finn lemniskate-likningen i polarkoordinate*

Erstatter x og y i lemniskate-likningen med polarkoordinater og forkorter ved hjelp av en internett-kalkulator (vist med tre prikker i håndskriften under.)

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2) = x^4+y^4-x^2+y^2+2x^2y^2 = 0$$

$$(r\cos\theta)^4+(r\sin\theta)^4-(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2+2(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2 = 0$$

$$\dots$$

$$r^4 - r^2\cos(2\theta) = 0$$

$$r^4 = r^2\cos(2\theta)$$

$$\underline{r^2 = \cos 2\theta}$$

## 2c – *plott lemniskate-likningen i MatLab*

MatLab kode og plott:

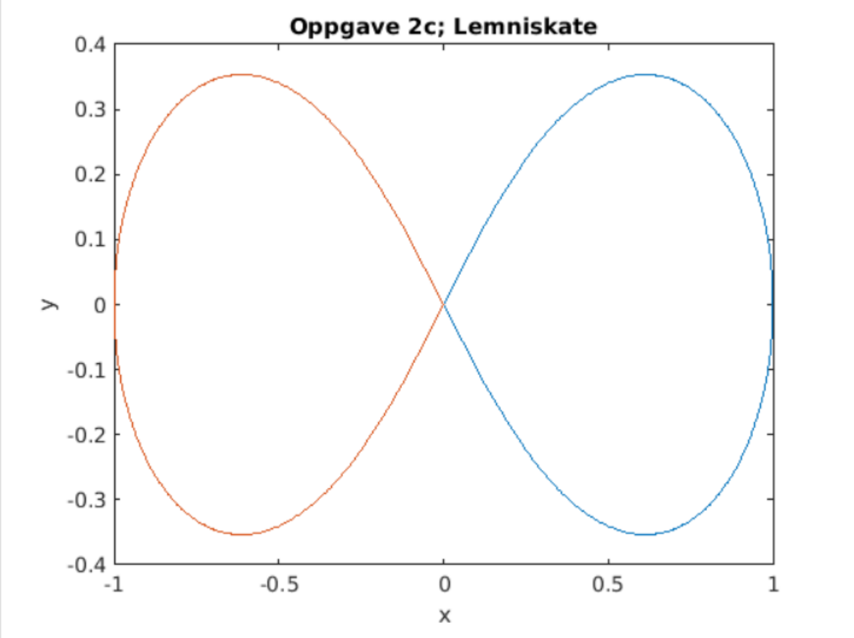
### oppgave 2c

```
% parametrisering
N = 500;
theta = linspace(-pi/4, pi/4, N);
x = sqrt(cos(2.*theta)).*cos(theta);
y = sqrt(cos(2.*theta)).*sin(theta);

theta2 = linspace(3*pi/4, 5*pi/4, N);
x2 = real(sqrt(cos(2.*theta2)).*cos(theta2));
y2 = real(sqrt(cos(2.*theta2)).*sin(theta2));

% plott
plot(x,y)
title("Oppgave 2c; Lemniskate")
xlabel('x')
ylabel('y')

hold on
plot(x2,y2)
```



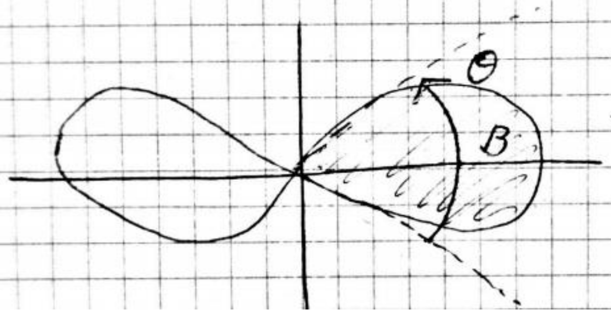
## 2d *– regn ut arealet omsluttet av lemniskaten*

finne grensene til r og θ:

$$r^2 = \cos(2\theta)$$

$r = \pm\sqrt{\cos 2\theta}$ r kan ikke være negativt

$$0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\theta}$$




Areal(s) = 2B

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Etter å ha funnet grensene går vi videre til selve integralet, hvor integranden må være 1. Gjort om til polarkoordinater har vi derfor integranden 1**jacobideterminanten r* = r.

$$\iint_R r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \underbrace{\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr}_{I}\,d\theta$$

$$I = \frac{1}{2}\left[r^2\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{1}{2}\sqrt{\cos 2\theta}^{\,2} = \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} I\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2}\cos 2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\left[\sin u\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}(1-(-1)) = \underline{\frac{1}{2}}$$

Arealet "B" er halvparten av total arealet

Areal (S):

$$B = \frac{Areal(S)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{Areal(S) = 1}$$

## 2e – *regn ut linjeintegralet*

$$\vec{r}(\theta) = (\underbrace{\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}}_{x},\ \underbrace{\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}}_{y = r\cdot\sin\theta})$$

internett kalkulator:

$$y' = \cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} - \frac{\sin\theta \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$\oint_S x\,dy = \oint_S x\cdot y' = \oint_S \cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}\left(\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} - \frac{\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2\theta \cos 2\theta - \sin\theta \sin 2\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= \left[ -\frac{\theta - \frac{\sin(4\theta)}{4}}{4} - \frac{2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2}}{16} + \left( \frac{2\theta + \frac{\sin 4\theta}{2}}{8} + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \frac{1}{2} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

internett kalkulator:

$$= \left[ \frac{\sin 4\theta + 2\sin 2\theta}{8} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{Arealet}(s) = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\text{Areal}(s) = 1}$$

Arealet vi får i denne oppgaven samstemmer med resultatet fra oppgave 2d.

## 2f – ***finn frem til formel for buelengden***

Buelengden kan uttrykkes ved integralet av sqrt(dx^2+dy^2). Begynner derfor med å finne uttrykkene som trengs.

$$x = \sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta \qquad x' = -\left( \frac{\cos\theta \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} + \sin\theta \sqrt{\cos 2\theta} \right)$$

$$y = \sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta \qquad y' = -\left( \frac{\sin\theta \sin 2\theta - \cos\theta \cos 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \right)$$

$$x'^2 = \sin^2\theta \cos 2\theta + 2\sin\theta \sin 2\theta \cos\theta + \sin 2\theta \cos^2\theta \tan 2\theta$$

$$y'^2 = \cos(2\theta)\cos^2\theta + \sin^2\theta \sin 2\theta \tan 2\theta - 2\sin\theta \sin 2\theta \cos\theta$$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{1}{\cos(2\theta)}$$

Setter inn utrykkene i formelen for buelengde. Gjør tilpasninger slik at likningen likner uttrykket fra oppgaveteksten.

$$\frac{1}{2} b = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x'^2 + y'^2 \, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} \, d\theta$$

$$\underline{b = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} \, d\theta}$$

## 3abcd

Matlab kode:

### oppgave 3a

```
% egenvektorer
P = [1 0.3 0 0 0;
    0 0.5 0.5 0 0;
    0 0.2 0.3 0.2 0;
    0 0 0.2 0.4 0;
    0 0 0 0.4 1];
[u,egenvektorer] = eig(P);
egenvektorer
```

### oppgave 3b

```
% sannsynlighet for å havne i endekurv
p = P^100
```

### oppgave 3c

```
% dette gjorde jeg allerede i oppgave 3b.
```

### oppgave 3d

```
% hvor var de 10 ballene opprinnelig
b = [2.070; 2.055; 1.293; 0.942; 3.64];
oppg3d = rref([P^3 b])
```

```
egenvektorer = 5×5
    1.0000         0         0         0         0
         0    1.0000         0         0         0
         0         0   -0.0000         0         0
         0         0         0    0.7732         0
         0         0         0         0    0.4268

p = 5×5
    1.0000    0.8769    0.6923    0.2308         0
         0    0.0000    0.0000    0.0000         0
         0    0.0000    0.0000    0.0000         0
         0    0.0000    0.0000    0.0000         0
         0    0.1231    0.3077    0.7692    1.0000

oppg3d = 5×6
    1.0000         0         0         0   -1.5000    0.0000
         0    1.0000         0         0    5.0000    2.0000
         0         0    1.0000         0   -5.0000    3.0000
         0         0         0    1.0000    2.5000    5.0000
         0         0         0         0         0         0
```

Utdypende forklaringer av MatLab kode:

3a:

Egenvektorene er i matrisen ved navn *egenvektorer.*

3b:

I matrisen ved navn *p* representerer første kolonne kurv s1, andre kolonne kurv s2 osv …

Første rad i matrisen representerer sannsynlighetene for at en ball fra sin respektive kolonne (eller kurv) havner i endekurven s1. Siste rad i matrisen representerer sannsynlighetene for at en ball fra sin respektive kolonne (eller kurv) til slutt faller i endekurven s5. I begge tilfeller har det blitt blåst 100 luftstøt, hvor en multiplikasjon med matrisen *P* (definert i oppgave 3a) representerer et luftstøt.

3c:

Dette gjorde jeg allerede i oppgave 3b.

3d:

Opphøyer matrisen *P* (definert i oppgave 3a) i tredje og legger til vektoren *b.* Når vi radreduserer denne matrisen ved navn *oppg3d* får vi resultatet i kolonne seks. Kolonnen ser slik ut

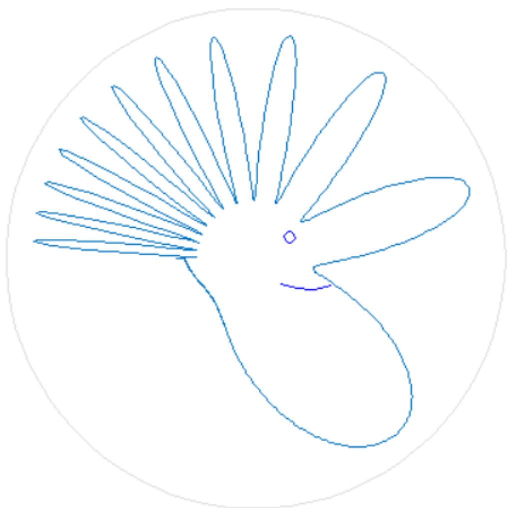
[0; 2; 3; 5; 0]

og forteller at to baller opprinnelig lå i kurv s2, tre baller lå opprinnelig i kurv s3, og de siste fem lå opprinnelig i kurv s3.

## (ekstraoppgave)

**ekstraoppgave**

```
% plott noe
theta = 0:0.01:2*pi; rho = sin(2.^theta)-1.7;
polarplot(theta,rho);
hold on
Z=[0.4+0.25i]; polarplot(Z,'b-o')
M = [0.3-0.3i 0.5-0.35i 0.7-0.37i 0.92-0.33i];
polarplot(M,'b');
Ax = gca; Ax.ThetaGrid = 'off'; Ax.RGrid = 'off';
Ax.RTickLabel = []; Ax.ThetaTickLabel = [];
```



**SLUTT**