INTRODUZIONE ALLE RETI TEMPORALI

Università degli Studi di Catania

Dipartimento di Matematica e Informatica

Corso di Laurea Triennale in Informatica

A.A. 2021/2022

Rosario Cannavò

m. 1000004011

Corso di Introduzione al Data Mining

Prof. Giovanni Micale

INTRODUZIONE

- La maggior parte dei sistemi complessi naturali, sociali e tecnologici può essere modellata mediante grafi composti da archi e vertici.
- La tipica struttura dei grafi, composta da collegamenti tra i vari nodi, permette **di capire, analizzare e predire i comportamenti dei sistemi dinamici** con cui stiamo lavorando introducendo un formalismo matematico.
- Tuttavia, in molti sistemi reali **gli archi che collegano due nodi non sono sempre attivi**, basti pensare ad un sistema che rappresenti i contatti sociali: due individui connessi a livello sociale non sono sempre fisicamente insieme, dunque l'arco che li unisce non è sempre attivo.
- Le reti tradizionali non tengono conto di questo aspetto, a tal proposito vengono introdotte le reti temporali, ovvero delle particolari reti che permettono di analizzare le interazioni che avvengono all'interno di un sistema complesso considerando un'ulteriore fondamentale dimensione: **il tempo**.
- Alla luce di quanto detto, una rete temporale può essere vista come la rappresentazione di «quando le cose accadono» in un sistema dinamico.

NASCITA DELLE RETI TEMPORALI

- Lo studio delle reti temporali è stato sviluppato contemporaneamente in diversi ambiti scientifici e sociali.
- Per tale motivo nell'ambito delle reti temporali non esiste una **terminologia univoca** e con diversi termini si indicano concetti analoghi.
- Il maggiore vantaggio che apporta l'operazione di rappresentare un sistema complesso tramite un grafo è quello di poter studiare il sistema stesso senza però conoscerne le dinamiche. E' possibile infatti estrapolare delle informazioni che trascendono dal sistema reale.
- Si afferma che, come per i sistemi complessi statici, una particolare situazione può essere rappresentata tramite una rete temporale se essa è caratterizzata da interazioni tra coppie di elementi che avvengono con un certo **grado di incertezza** (randomness) e un certo **grado di regolarità.**

CONDIZIONI DI RAPPRESENTAZIONE

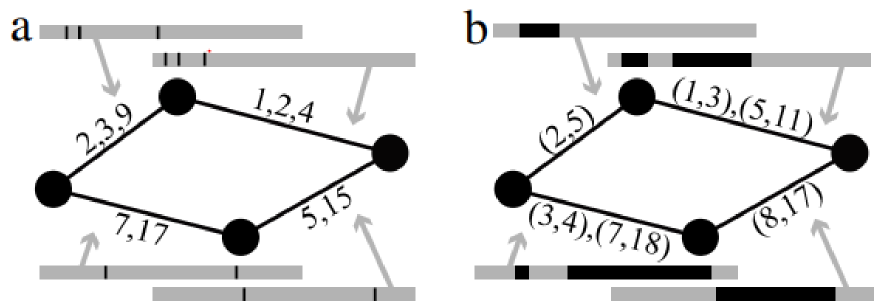
- L'unica condizione aggiuntiva che un sistema deve soddisfare per poter essere rappresentato tramite una rete temporale è legata agli **intervalli temporali**: se le informazioni sulla rete si trasmettono troppo velocemente in relazione alla velocità dei cambiamenti della rete o dell'attivazione degli archi, non è necessario utilizzare una rete temporale in quanto il sistema è ben approssimabile da una rete statica. Un esempio è **internet,** dove i cambiamenti della topologia della rete sono trascurabili rispetto alla velocità con cui i pacchetti viaggiano.
- In conclusione, le reti temporali sono un'ottima strategia di rappresentazione per i sistemi in cui le dinamiche di trasmissione delle informazioni su di essi sono fortemente legate ai cambiamenti topologici della rete nel tempo.

TIPOLOGIE DI RETI TEMPORALI

- **Comunicazione persona a persona:** L'uso delle reti temporali è particolarmente adatto all'analisi delle comunicazioni elettroniche che avvengono tra due individui, infatti rende semplice rappresentare la **diffusione di informazioni** o di **virus informatici**. In questo caso l'analisi di una rete temporale e delle sue misure di centralità può essere utile ad attuare strategie in grado di contenere un virus informatico o una «fake news».
- **Biologia cellulare:** Esistono una molteplicità di sistemi cellulari che possono essere modellati tramite una rete anche se non tutti necessitano di una rappresentazione dinamica. Un sistema che però trae beneficio da questa particolare rappresentazione è l'**interattoma**, l'insieme complessivo delle interazioni molecolari in una particolare cellula. In genere, queste interazioni sono rappresentate tramite una rete statica anche se, molte delle funzioni biologiche nascono dal fatto che le connessioni non sono attive tutte il tempo.
- **Reti infrastrutturali:** Molte reti infrastrutturali cambiano così lentamente da rendere inutile la rappresentazione tramite reti temporali, come detto prima ne è un esempio internet. In altri casi, come per alcune tipologie di **trasporti,** potrebbe tornare utile applicare alcuni concetti delle reti temporali, per esempio la durata di un percorso temporale o la centralità.

RAPPRESENTAZIONE DEL TEMPO

- Quando si parla di reti temporali è necessario definire una rappresentazione del tempo. Le due tipologie di rappresentazione principali sono la rappresentazione tramite **sequenze di contatti** e i **grafi intervallari**:



- Nel primo caso (a), il tempo è rappresentato tramite **sequenze di contatto**: ad ogni arco vengono associati dei valori che indicano gli istanti t in cui l'arco si attiva dove t va da 0 a ∞.
- Nel secondo caso (b), invece il tempo è rappresentato tramite un **grafo intervallare**: ad ogni arco sono associate delle coppie (x,y) dove x indica il tempo in cui l'arco si attiva e y quello in cui si spegne, l'arco rimane attivo per tutti gli istanti da t=x a t=y.

FORMALISMI

- Definiamo adesso formalmente le due tipologie di rappresentazione:
- Nel primo caso la rete è composta da un insieme di N vertici V che interagiscono tra di loro in certi istanti la cui durata temporale è trascurabile. In questo caso il sistema viene rappresentato da una **sequenza di contatti** ovvero un insieme **C** di triple (**i, j, t**) dove i, j ∈ V e t rappresenta l'istante del contatto. Questa rappresentazione è utile per rappresentare sistemi in cui la durata del contatto è trascurabile.
- Nel secondo caso la rete prende il nome di **grafo intervallare**: in questo caso gli archi non sono attivi in dati istanti ma in dati intervalli $t_e = \{(t_1, t_1'), \ldots, (t_n, t_n')\}$ dove gli elementi di ogni coppia indicano l'inizio e la fine di un intervallo. Il grafo statico che contiene un arco tra i e j se e solo se si è verificato un contatto tra i e j prende il nome di **grafo aggregato**. Questa tipologia di rappresentazione è utile quando è necessario rappresentare un contatto che si prolunga nel tempo.

CONDIZIONI MATEMATICHE

- Come per le reti statiche è utile definire una funzione che rappresenti l'esistenza di una connessione ad un determinato periodo, questa funzione prende il nome di **funzione presenza**:

$$a(i, j, t) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ and } j \text{ are connected at time } t \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Vengono inoltre definite le seguenti **condizioni**:
  - **Una tripla non occorre mai più di una volta**: questo indica che i contatti possono essere ordinati univocamente;
  - Per i grafi intervallari si assume **che non esistano intervalli vuoti o sovrapposti**, formalmente, dati due intervalli (t_i, t_i') e (t_j, t_j'), valgono le seguenti condizioni:
    - 1. $(t_i < t_i')$
    - 2. $(t_j < t_j')$
    - 3. $t_i < t_j \Leftrightarrow t_i' < t_j'$

MISURE PER LE RETI TEMPORALI

- La struttura topologica di una rete statica è caratterizzata da una vasta quantità di misure basate su vari approcci come il numero di connessioni tra i vicini di un nodo o tra l'insieme più grande di nodi.
- **Alcune di queste misure possono essere ripensate e adattate alle reti temporali**.
- Mentre alcune misure possono essere applicate al grafo aggregato, altre sono invece influenzate dall'ordine di attivazione dei nodi: ad esempio, nelle reti temporali un qualsiasi percorso che trasporta informazioni sulla rete deve obbligatoriamente rispettare una sequenza ordinata in base al tempo dei contatti in quanto per poter attraversare il grafo, gli archi in quel preciso istante temporale devono essere attivi.
- Di seguito verranno discusse varie misure che vengono utilizzate per effettuare delle osservazioni sulle reti temporali.

TIME-RESPECTING PATHS-1

- In un grafo statico un **percorso** è semplicemente una sequenza di archi tale che uno di essi arco termini sul nodo iniziale del successivo. Nelle reti temporali i percorsi devono necessariamente essere vincolati ad una **sequenza di attivazione** degli archi con tempo **non-decrescente** che collega due vertici. In letteratura un tale percorso prende il nome di **time-respecting path** (oppure **journey** o **non-decreasing path**).
- A differenza dei percorsi statici, i time-respecting path sono **intransitivi**, in quanto dato che esiste il vincolo temporale, se i è raggiungibile tramite un time respecting path da j non vale il viceversa.
- Inoltre, l'esistenza di un cammino temporale da i a j e da j a k non implica che esista un cammino temporale da i a k, in quanto esiste una dipendenza dagli archi che vanno al nodo j;
- Da quanto osservato risulta che i cammini temporali dipendono anch'essi dal tempo.

TIME-RESPECTING PATHS-2

- Data la proprietà dei **time respecting path**, l'esistenza di un percorso temporale da i a j all'istante t' non garantisce l'esistenza di un percorso temporale da i a j all'istante $t > t'$.
- Quindi un time-respecting path definisce quali vertici possono essere raggiunti a partire da un nodo, considerata una **finestra di osservazione** $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{T}]$.
- L'insieme di questi nodi prende il nome di **insieme di influenza** di i.
- Il numero medio di vertici presenti all'interno degli insiemi di influenza di ogni i-esimo nodo della rete prende il nome di **reachability ratio.**
- Allo stesso modo è possibile definire l'**insieme sorgente** di i come l'insieme dei vertici che possono raggiungere i tramite un time-respecting path ad un istante t.

CONNETTIVITÀ E COMPONENTI CONNESSE

- Il concetto di **connettività** può essere generalizzato alle reti temporali come segue:
  - Due vertici i e j di una rete temporale si definiscono **fortemente connessi** se esiste un cammino temporale **diretto** da i a j e viceversa;
  - Due vertici i e j di una rete temporale si definiscono **debolmente connessi** se esiste un cammino temporale **indiretto** da i a j e viceversa.
- A questo punto una rete temporale si dice fortemente o debolmente connessa se ogni coppia di essa soddisfa i precedenti criteri.
- Si è dimostrato che il problema di trovare le componenti fortemente connesse di una rete temporale può essere mappato nel problema di trovare la **clique massimale nel grafo affine**.
- Inoltre è possibile definire per le reti temporali un'ulteriore misura, ovvero la **connettività transitiva:** un sottografo è transitivamente connesso se l'esistenza dei cammini temporali da i a j e da j a k implica l'esistenza di un cammino temporale da i a k.

LATENZA

- Come per le reti statiche è utile definire una misura che permetta di misurare quanto **velocemente** un vertice può raggiungere gli altri attraverso dei cammini temporali.
- Ogni cammino temporale è associato ad una **durata** misurata come la differenza tra l'ultimo e il primo contatto del percorso, questa quantità prende il nome di **lunghezza temporale del percorso**.
- Analogamente ai cammini minimi dei grafi statici è possibile definire il **fastest time-respecting path** tra due nodi come il cammino temporale che permette di collegare il più velocemente possibile due nodi i e j di una rete temporale.
- Il tempo minimo impiegato da i per raggiungere j prende il nome di **latenza** o **temporal distance** ed è definito come $\varphi_{i,t}(j)$.
- Definiamo inoltre $\lambda_{i,t}(j) = t - \varphi_{i,t}(j)$ come l'**information latency** di i rispetto a t per misurare quanto **vecchie** siano le informazioni di i che provengono da j a tempo t.

MISURE DI CENTRALITÀ

- Nella teoria dei grafi, sono state definite diverse misure che identificano l'importanza di un vertice a prescindere dal grado del vertice stesso.
- Effettuando il passaggio alle reti temporali è possibile definire più di una misura che abbia lo stesso scopo delle misure di centralità nelle reti statiche.
- Un approccio diretto è quello di rimpiazzare il ruolo dei **cammini** per le reti statiche con quello dei **time-respecting path** nelle reti temporali.

CLOSENESS CENTRALITY

- A questo punto osserviamo un esempio di traduzione della **closeness centrality**: per le reti statiche la misura è la seguente:

$$C_C(i) = \frac{N-1}{\sum_{j \neq i} d(i,j)},$$

- Dove $d(i,j)$ rappresenta la distanza tra i e j;
- Similmente per le reti temporali è possibile definire la **temporal closeness centrality** come segue:

$$C_C(i,t) = \frac{N-1}{\sum_{j \neq i} \lambda_{i,t}(j)},$$

- Dove $\lambda_{i,t}(j)$ è la **latenza** tra i e j.
- *Questa misura quantifica quanto velocemente un vertice può raggiungere tutti gli altri ad un istante t.*
- La temporal closeness centrality espressa come visto prima soffre però di un grosso problema: non è definita per nodi che hanno **latenza infinita.**
- Per risolvere questo problema la misura può essere formulata nella seguente maniera:

$$C_E(i,t) = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_{i,t}(j)}$$

- Dove $\frac{1}{\lambda_{i,t}(j)}$ è pari a **0** se non esistono cammini temporali da j a i che arrivano a tempo t o prima.

EIGENVECTOR CENTRALITY

- Un’altra classe di misura si basa sul concetto che un’informazione che viaggia sulla rete non viaggia solo da un punto A ad un punto B ma si **diffonde randomicamente** nella rete stessa.
- Per quanto riguarda le reti statiche queste misure sono state largamente studiate e tra le più comuni sono presenti quelle che usano come struttura di supporto una matrice, tra di esse abbiamo la **Eigenvector centrality** e la **PageRank centrality.**
- Utilizzando l’approccio utilizzato fino ad ora per «tradurre» le misure di centralità dovremmo generalizzare la matrice ad un **tensore tridimensionale.**
- Per evitare di lavorare con queste strutture algebriche è possibile però generalizzare un algoritmo per il calcolo della eigenvector centrality.

EIGENVECTOR CENTRALITY: ALGORITMO

- **1.** Ogni vertice viene inizializzato con un **centrality value** pari a 1;
- **2.** Ogni volta che avviene un contatto tra i vertici i e j, aggiorniamo i valori C_E dopo il contatto al tempo t come segue:

$$C_E^{t+1}(i) = \zeta C_E^t(i) + (1 - \zeta) C_E^t(j)$$

and

$$C_E^{t+1}(j) = \zeta C_E^t(j) + (1 - \zeta) C_E^t(i).$$

- **3.** L'algoritmo termina quando non avvengono più contatti.
- Alla fine otterremo una distribuzione della centralità che ben approssima la eigenvector centrality.
- Il parametro ζ indica il grado di centralità trasmessa ad ogni contatto:
  - ζ alto enfatizza maggiormente i contatti recenti.
- In genere un buon range per ζ è [0, ½] ma nella pratica è bene ottimizzare il parametro attraverso dei dati esterni.

MOTIVI

- Un approccio che permette di ottenere i pattern significativi all'interno di una rete statica è la **ricerca dei motivi** dove un motivo è un sottografo statisticamente ricorrente all'interno del grafo principale.
- Esistono diversi modi per estendere il concetto di «motivo» alle reti temporali, quello più semplice consiste nel effettuare delle **«istantanee»** della rete a diversi istanti t e contare quanti sottografi sono ricorrenti nei diversi stati temporali della rete ottenuti.
- Tuttavia questo approccio **proietta fuori dall'ordine temporale della rete** i motivi trovati in quanto i motivi saranno semplici reti statiche e non più reti temporali.
- Sono stati studiati altri approcci costruiti su modelli reali come il tracciamento delle telefonate o delle reazioni che avvengono a livello metabolico nel corpo umano, tuttavia il problema della ricerca di motivi all'interno delle reti temporali risulta essere ancora un problema aperto e oggetto di studio.

BURSTINESS

- Oltre alle misure che caratterizzano le reti temporali e i loro modelli approfondiamo i più piccoli elementi costitutivi di tali reti: i vertici, gli archi, e le sequenze di contatti ad essi associate. In una tipica rete temporale, sono presenti contatti multipli tra i vertici connessi, e le correlazioni nei tempi di tali contatti giocano un ruolo importante.
- In particolare, per le reti temporali che rappresentano la comunicazione umana, è stato scoperto che tali tempi sono spesso **esplosivi** (**bursty)** e si discostano da dai tempi più uniformi che ci si aspetta da un processo di Poisson casuale e senza memoria.
- E' possibile derivare direttamente una misura di burstiness per qualsiasi sequenza di tempi di contatto tramite la definizione di Goh e Barabasi.

BURSTINESS DI GOH E BARABASI

- Goh e Barabasi hanno proposto come punto di partenza **il coefficiente di variazione**, definito come il rapporto tra la deviazione standard dei tempi di contatto alla loro media, $\boldsymbol{\sigma_\tau / m_\tau}$.
- Per una sequenza di contatto ***poissoniana***: **στ /mτ = 1**.
- Usando questa quantità, la burstiness di una sequenza è quindi definita come:

$$B = \frac{\sigma_\tau / m_\tau - 1}{\sigma_\tau / m_\tau + 1} = \frac{\sigma_\tau - m_\tau}{\sigma_\tau + m_\tau}.$$

- Per le sequenze finite di contatti, la varianza è sempre finita, e **B ∈ (-1, 1)**, tale che:
- B = 1 indica una sequenza esplosiva;
- B = 0 indica una sequenza con tempi di contatto poissoniani;
- B = -1 indica una sequenza completamente periodica;

MODELLI DI RETI TEMPORALI

- In generale i **modelli delle reti** vengono utilizzati per vari scopi: possono infatti catturare delle caratteristiche salienti della rete o essere utilizzati per produrre delle **reti sintetiche** con caratteristiche desiderate allo scopo di effettuare **esperimenti** computazionali o analizzare processi dinamici.
- Un'altra classe di modelli è quella delle **reference network randomizzate**. In questo caso, le reti empiriche vengono prese come input da delle procedure di randomizzazione il cui scopo è rimuovere alcune delle loro relazioni caratteristiche.
- Nelle successive slide prenderemo in analisi diversi modelli che sono stati sviluppati fino ad ora per le reti temporali.

MODELLI DI RETI DI CONTATTI

- Un modo semplice di estendere le reti statiche per coinvolgere un **ricambio di vicini** è stato proposto da Volz e Meyers.
- Questo modello ha lo scopo di imitare il cambiamento dei partner per generare strutture di contatto allo scopo di effettuare delle simulazioni **sulla diffusione di una malattia sessualmente trasmissibile.**
- L'algoritmo di generazione del modello funziona selezionando due nodi con una certa probabilità ad ogni passo temporale e scambiandoli.

- Le regole del modello sono le seguenti:
- **1. (a)**: Una nuova coppia viene generata con **probabilità ρ** e le componenti sono scelte a seconda di una **mixing function φ:**
  - **i.** Seleziona due individui i e j randomicamente;
  - **ii.** Si decide se i e j formano una coppia a seconda di φ(i, j);
  - **iii.** In caso di risposta affermativa, il passo finisce, altrimenit torna a i.
  - **(b)**: Ripeti lo step 1 N/2 volte.
- **2.** In ogni coppia composta da un suscettibile e un infetto, la malattia è trasmessa con probabilità η;
- **3.** Ogni coppia si divide con probabilità σ.
- La funzione **φ** è introdotta per essere in grado di creare coppie di elementi di gradi assortiti e non uguali:

$$\phi(i, j) = 1 - \xi + \xi \frac{k_i k_j}{k_{\max}^2}$$

- Il parametro **ξ** stabilisce quanto debbano essere assortite o disassortite le coppie.
- **K-max** è un limite superiore del grado;
- Ad oggi si è scoperto che le reti sessuali seguono una **distribuzione power-law** quindi questa funzione non fornisce una rappresentazione precisa ma rimane comunque efficace.

MODELLI DI RIFERIMENTO RANDOMIZZATI

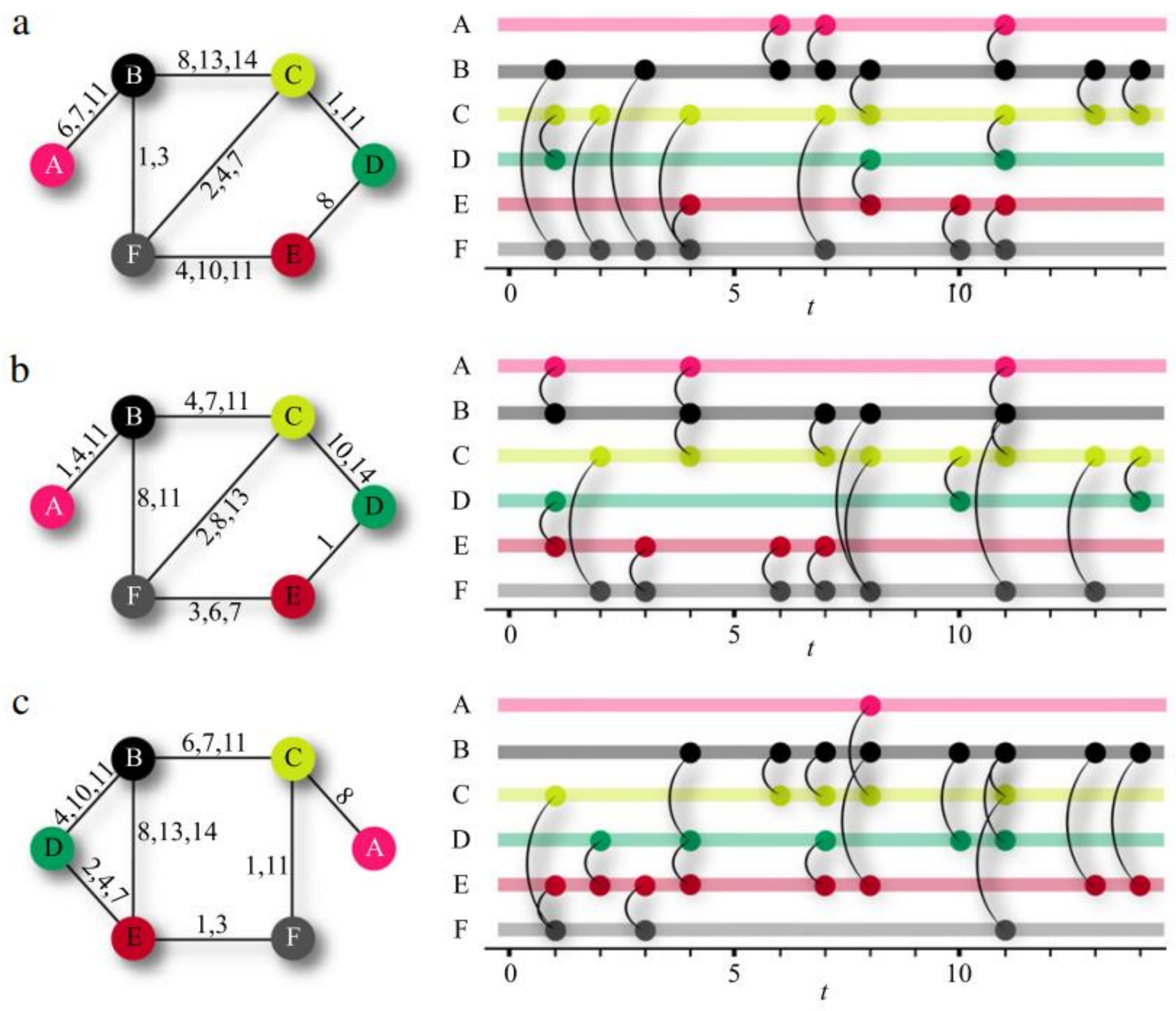
- Per le reti statiche, un modo comune di valutare l'importanza, l'imprevedibilità, la sovrarappresentazione o la sottorappresentazione di caratteristiche topologiche delle reti empiriche è quello di **confrontare le caratteristiche con un modello di riferimento in cui la rete è randomizzata**. Grazie a questi modelli, si può valutare l'importanza delle caratteristiche topologiche quantitative del grafo reale attraverso un confronto diretto tra il grafo reale e i modelli generati.
- Per i grafi temporali, si può applicare un approccio simile: in questo caso, le sequenze di eventi originali sono randomizzate o rimescolate casualmente in un modo da rimuovere la struttura temporale.
- Tuttavia, esistono diversi tipi di correlazioni temporali possibili e diverse scale temporali in cui le correlazioni sono importanti, e **quindi non è possibile progettare un unico modello per ogni utilizzi**; per questo motivo sono stati progettati diversi modelli costruiti a partire dal problema da risolvere.
- Un uso tipico per tali modelli nello studio dei processi dinamici è quello di applicarli essenzialmente tutti, e controllare come la dinamica del processo dipende dal modello di riferimento**: se la rimozione di un certo tipo di correlazione cambia di molto la dinamica, allora ovviamente quest'ultima gioca un ruolo importante per la dinamica stessa**.
- Introduciamo adesso diverse tipologie di modelli temporali presenti in letteratura assumendo che la rete di partenza sia una **sequenza di contatti**.

RANDOMIZED EDGES (RE)

- Algoritmicamente il metodo è definito come segue:
  - 1. Analizza tutti gli archi in sequenza;
  - 2. Per ogni arco (i, j), scegli un altro arco (i’, j’);
  - 3. Con probabilità ½ sostituisci (i, j) e (i′, j′) con (i, j′) e (i′, j), altrimenti sostituisci con (i, i′) e (j, j ′)
  - 4. Se il passo 3 ha creato un cappio o un arco multiplo, allora viene annullato e si ricomincia dal passo 2.
- Per accelerare il processo, si possono saltare gli archi che sono già stati ricollegati nel passo 1 (essendo stati selezionati in un precedente passo 2). D'altra parte, questa procedura è lineare e raramente produce bottleneck computazionali.
- Questo modello mantiene tutte le correlazioni e i difetti della rete di partenza.

RANDOMLY PERMUTED TIMES (RP)

- Come controparte temporale del modello di configurazione, si possono permutare i **tempi di contatto** in modo casuale, mantenendola struttura della rete e il numero di contatti tra tutte le coppie di vertici invariati. Tecnicamente, questo è molto più semplice dell'applicazione dello schema di rewiring degli archi di RE e richiede solo lo scambio casuale dei tempi di tutti i contatti.
- Questa procedura può essere fatta rimescolando casualmente l'ordine dei timestamp temporali in un array.
- Questo modello permette di studiare gli effetti di un determinato ordinamento temporale sulla rete e le correlazioni che nascono nel tempo.



- (a) mostra una sequenza di contatti.

- In (b) è randomizzata tramite procedura **RP** in modo che i contatti avvengano lo stesso numero di volte per arco, e la topologia della rete aggregata rimanga la stessa.

- In (c) la sequenza di contatti in (a) è randomizzata dalla procedura **RE**. Con RE, la sequenza temporale dei contatti lungo un arco è conservata, e così anche la sequenza dei gradi della rete originale, ma tutte le strutture della topologia sono distrutte.

RANDOMIZED EDGES WITH RANDOMLY PERMUTED TIMES (RE+RP)

- In primo luogo, la struttura della rete viene randomizzata utilizzando la procedura RE. Poi, i timestamp temporali di tutti i contatti sono rimescolati con lo schema RP.
- Il risultato è un grafo temporale, dove tutte le correlazioni strutturali e tutte le correlazioni temporali ad eccezione del tasso complessivo di contatti (come lo schema giornaliero/settimanale) sono state distrutte.

RANDOMIZED CONTACTS (RC)

- In questo caso, si mantiene la topologia del grafo fissa ma si ridistribuiscono i contatti in modo casuale tra gli archi.
- Dopo questa randomizzazione, il numero di contatti per bordo segue la **distribuzione binomiale** piuttosto che una distribuzione power-law tipica dei dati empirici.
- Questa randomizzazione può essere utilizzata per testare l'effetto della distribuzione del numero di contatti per arco in combinazione con l'ordine degli eventi.

EQUAL-WEIGHT EDGE RANDOMIZATION (EWER)

- Questo particolare modello è progettato per rimuovere le correlazioni temporali tra le **sequenze di contatto di archi adiacenti**, pur mantenendo le caratteristiche temporali associate agli archi, compresa la distribuzione dei tempi di contatto sui singoli archi stessi.
- Nella pratica, le intere sequenze di contatti associate agli archi, cioè tutti i timestamp sono scambiati casualmente tra gli archi che hanno lo stesso numero di contatti.
- Questo modello richiede un sistema abbastanza grande in modo che ci siano abbastanza archi con lo stesso numero di contatti.

EDGE RANDOMIZATION (ER)

- Questo modello è simile al modello EWER con l'eccezione che le sequenze possono essere scambiate tra archi che hanno qualsiasi numero di contatti. Questo corrisponde allo scambio casuale dei pesi degli archi (misurati come numero di contatti) nella rete aggregata attraversata dalla sequenza di contatti, e quindi le correlazioni peso-topologia sono distrutte.
- Tuttavia, le distribuzioni temporali delle sequenze di contatto dei bordi non sono cambiate in quanto le sequenze sono solo collocate altrove nella rete.

TIME REVERSAL (TR)

- Questo modello è progettato per valutare la frequenza e l'importanza delle sequenze causali di contatti, dove **contatti innescano ulteriori contatti**.
- Per ottenere questo modello è sufficiente semplicemente l'esecuzione della sequenza originale di eventi **all'indietro nel tempo**.
- Se le sequenze di contatti consecutivi fossero causate solo dalle correlazioni temporali, un numero simile di tali sequenze dovrebbe essere osservare quando il tempo scorre sia in avanti che indietro.
- la mancanza di tali catene nel modello invertito nel tempo rispetto alla originale può essere attribuita alla **«freccia del tempo»** ovvero un concetto della fisica moderna molto discusso che denota **l'asimmetria** (unica direzione) del tempo.

RICAPITOLANDO

- I diversi modelli di riferimento randomizzati discussi conservano e distruggono tipi specifici di correlazioni topologiche e temporali, e quindi, ad esempio negli studi dei processi dinamici, permettono di evidenziare l'importanza delle varie correlazioni: le correlazioni più importanti possono essere individuate confrontando gli effetti di diversi modelli di randomizzazione
- I modelli RE e RP permutano gli archi e i tempi di contatto. La loro applicazione simultanea (RE + RP) distrugge tutte le correlazioni a eccezione del tasso di contatto complessivo.
- Quando si studiano i ruoli dei tempi esatti di contatto degli archi e le correlazioni tra gli archi adiacenti i modelli EWER e ER dovrebbero funzionare, dato che essi mantengono le caratteristiche statiche della tranne per le correlazioni peso-topologia.

CONCLUSIONI

- In questa presentazione è stato illustrato come diversi sistemi possono beneficiare della rappresentazione temporale e sono stati discussi metodi per analizzare e misurare strutture che si trovano nel dominio del tempo.
- Lo studio delle reti temporali, delle loro caratteristiche e delle loro dinamiche è ancora un campo piuttosto giovane e vi sono molte questioni aperte e direzioni inesplorate. Di seguito, elenchiamo alcune di queste questioni:
- **Modelli generativi per reti temporali:** esistono solo pochissimi modelli per le reti temporali e le loro sequenze di contatti, e uno degli importanti problemi aperti è chiaramente la costruzione e lo studio di modelli generativi parametrizzati di reti temporali;
- **Misure per la struttura della rete temporale:** Anche se un gran numero di misure e caratteristiche per i grafi temporali sono state discusse, sono state per lo più **generalizzazioni** di misure di reti statiche, si ritiene dunque che c'è molto spazio per miglioramenti;
- **Comprendere i meccanismi:** Un terzo tema, in gran parte inesplorato, è perché i contatti tra due vertici in una rete temporale avvengono in quei precisi momenti;

SVILUPPI FUTURI

- I problemi aperti menzionati sopra riguardano principalmente gli sviluppi teorici e metodologici. Tuttavia, il vero problema delle reti temporali è la loro **applicazione a problemi concreti e specifici.**
- Alcuni di essi sono: biologia delle popolazioni, biologia cellulare, ecologia, neuroscienze, scienze sociali e politiche, economia, chimica e così via.
- Finora, il quadro delle reti temporali è stato, con non molte eccezioni, studiato teoricamente piuttosto che utilizzato per spiegare il mondo che ci circonda.
- Eppure la maggior parte dei sistemi complessi nel mondo sono dipendenti dal tempo, dinamici e in movimento.
- Risulta evidente che la struttura delle reti temporali sia davvero uno strumento per far progredire la scienza, per tal motivo risulta ancora un campo aperto e sensibile a nuovi studi.