MSG 2019/2020 — Zirkel 7c

Tommaso Rosati

Probleme 26

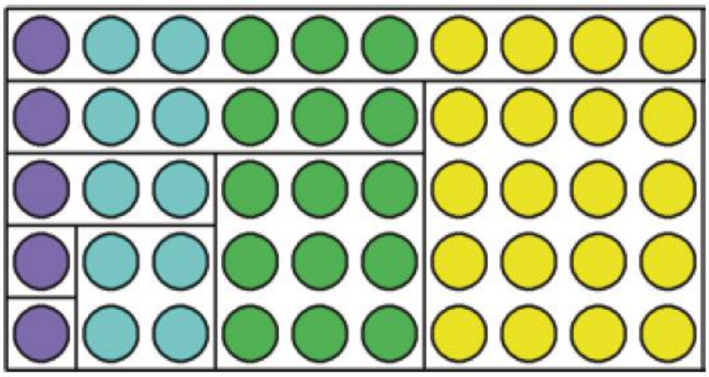
Der Mathematiker und Physiker Abu Ali al-Hasan ibn al-Haitham (965–1039) ist in Europa auch unter dem Namen Alhazen bekannt. Besonders berühmt wurde er wegen seiner optischen Experimente, u. a. gilt er als „Erfinder“ der Lupe. Wegen seiner zahlreichen bedeutenden Entdeckungen wird er auch als *Vater der Optik* bezeichnet.

al-Haithams genialer Ansatz zur Bestimmung der Summe der ersten n Quadratzahlen von natürlichen Zahlen lässt sich (wenn auch weniger anschaulich) sogar auf die Summen höherer Potenzen übertragen (vgl. Kap. 16).

Für die Herleitung einer Formel wird nur die Kenntnis der Formel (2.1) für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen vorausgesetzt, also:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots+n &= \tfrac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot n^2+\tfrac{1}{2}\cdot n \end{aligned}$$

Seine Idee: Man ergänze die Quadrate mit den Seitenlängen 1, 2, 3, …, n durch geeignete Rechtecke der Höhe 1 zu einem Rechteck der Höhe $n+1$.

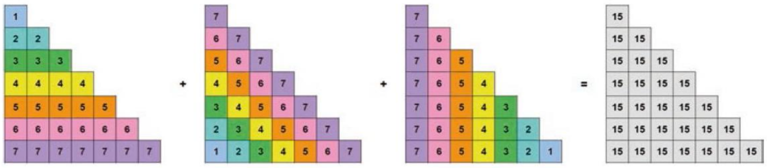


1. **Summe von Quadraten:**

   Wie kann man anhand der Abbildung unten begründen, dass

   $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

   gilt?

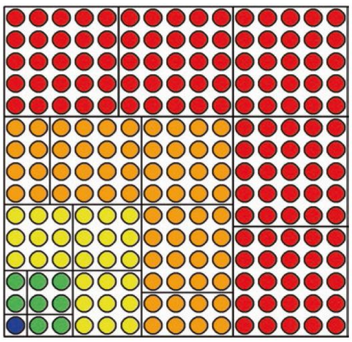
   Kannst du die Formel auch durch die Figur von al-Haitam wiederfinden?

2. **Summe von Würfel:**

   In dem Bild unten steckt eine Formel für die Summe der ersten n Kubikzahlen, also für

   $$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

   Finde und begründe sie (d.h. insbesondere muss begründet werden, warum die Aufteilung, die du im Bild siehst, für jedes $n \in \mathbb{N}$ möglich ist).

3. **Andere Summen:**

Einfach

Bestimme bei den Folgen jeweils die nächste Zahl:

- 1 2 3 4 ...
- 1 3 5 7 ...
- 2 4 6 8 ...
- 3 6 9 12 ...
- 1 4 7 10 ...
- 1 5 9 13 ...

2. **Schwieriger**

   Wie werden diese Folgen fortgesetzt?

   - 1 4 9 16 ...
   - 1 3 6 10 15 ...
   - 1 8 27 64 ...
   - 2 3 5 7 11 ...
   - 1 1 2 3 5 8 13 ...

Noch ein bisschen schwieriger

Sei n eine natürliche Zahl ($n \geq 1$). Zeichne einen Kreis, markiere auf der Kreislinie n Punkte und zeichne alle Sehnen zwischen diesen Punkten ein. In wie viele Flächenstücke wird der Kreis durch die n Sehnen maximal zerlegt?

4. **Ganze Zahlen?**

Für wie viele $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl:

$$\frac{n}{100-n}$$

eine ganze Zahl?