MSG 2019/2020 — Zirkel 7c

Tommaso Rosati

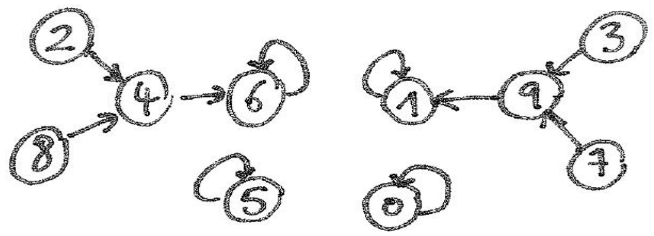
Probleme 24

1. **Quadrierpläne:**

   Achtet man beim Quadrieren von natürlichen Zahlen nur auf die letzte Ziffer, dann zeigen sich folgende Übergänge: Die Endziffern 1, 5, 6 und 0 führen auf sich selbst. Die anderen Endziffern sind in Zahlenketten enthalten:

   $$2\to4\to6\to6,\qquad 4\to9\to1\to1,\qquad 7\to9\to1\to1,\qquad 8\to4\to6\to6.$$

   Diese Zusammenhänge lassen sich im Quadrierplan modulo 10 darstellen.



   Erstelle solche Quadrierpläne modulo n für die Reste $n=19$, $n=23$, $n=25$ und $n=27$.

2. **Quadrate (wie immer, $n\in\mathbb{N}$):**

   - Begründe anschaulich: Der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen ist immer eine ungerade Zahl.
     Kannst du den Abstand zwischen n^2 und $(n+1)^2$ explizit angeben (als **funktion**[1] von n), so dass man sofort sieht, dass diese Zahl ungerade ist? Kannst man das auch durch ein Bild sehen?
   - Begründe: Auch die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist immer ungerade und daher stets als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen schreibbar. Schreibe die Summen

     $$1^2+2^2,\quad 2^2+3^2,\quad 4^2+5^2$$

     als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen.
   - Gib eine allgemein Darstellung für die Summe $n^2+(n+1)^2$ als Summe zweier aufeinanderfolgender Zahlen an, die beide eine **Funktion** von n sind.

1. Eine Funktion „f“ von einer Variable (z.B. n) ist ein Rezept, das jedem Wert der Variable (n) einen neuen Wert $f(n)$ zuordnet. Siehe Problem #3.

- Wenn eine Zahl die Summe zweier aufeinandervolgender Zahlen ist, ist sie sicherlich ungerade oder gerade?

3. **Funktionen**:

Eine Funktion f besteht aus **3 Elementen:**

- Eine Definitionsmenge D.
- Eine Zielmenge Z.
- Ein „Rezept“, das jedem Element $x \in D$ der Definitionsmenge ein Element $f(x) \in Z$ in der Zielmenge zuordnet.

Man schreibt dann kurz:

$$f\colon D \to Z.$$

Gegeben $z \in Z$, nennt man $f^{-1}(z)$ das Urbild von z. $f^{-1}(z)$ ist die Teilmenge von D die aus allen Elementen x besteht, so dass:

$$f(x) = z$$

gilt.

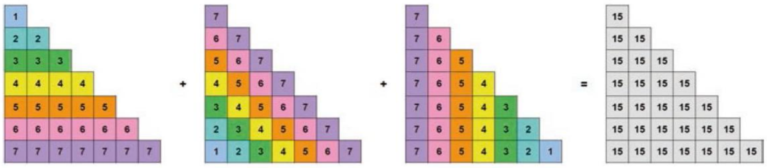
- Gib 3 Beispiele von Funktionen
$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$
- Eine Funktion ist **injektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge höchstens ein Element im Urbild hat. Welches von den 5 Beispielen ist injektiv? Wenn keines, kannst du ein Beispiel finden?
- Eine Funktion ist **surjektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge mindestens ein Element im Urbild hat. Welches von den 5 Beispielen ist surjektiv? Wenn keines, kannst du ein Beispiel finden?
- Sie ist **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist, wenn also jedes Element der Zielmenge genau ein Element im Urbild hat. Welches von den 5 Beispielen ist bijektiv? Wenn keines, kannst du ein Beispiel finden?
- Antworte die selben Fragen für Funktionen
$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}.$$

4. **Summe von Quadraten:**

Wie kann man anhand der Abbildung unten begründen, dass

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

gilt?

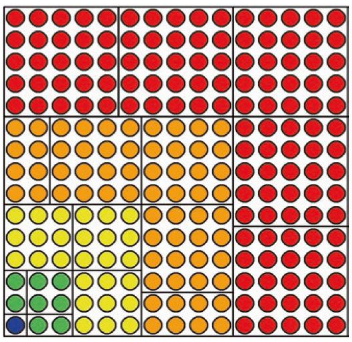


5. **Summe von Würfel:**

In dem Bild unten steckt eine Formel für die Summe der ersten n Kubikzahlen, also für

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

Finde und begründe sie (d.h. insbesondere muss begründet werden, warum die Aufteilung, die du im Bild siehst, für jedes $n\in\mathbb{N}$ möglich ist).



6. **Eine Aufgabe von Erdos:**

Seien m,n zwei positive ganze Zahlen. Seien $a_1,\ldots,a_{mn+1}$ andere $mn+1$ unterschiedliche Zahlen. Beweise, dass es entweder eine Teilmenge von $m+1$ Zahlen gibt, so dass

$$a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_{m+1}}, \qquad (\text{mit} \quad i_1<i_2<\cdots<i_{m+1}),$$

oder $n+1$ Zahlen, so dass

$$a_{j_1}>a_{j_2}>\cdots>a_{j_{n+1}}, \qquad (\text{mit} \quad j_1<j_2<\cdots<j_{n+1}).$$