MSG 2019/2020 — Zirkel 7c

Tommaso Rosati

# Probleme 25

1. **Zum Aufwärmen:**

   Daniel hat eine von 10 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gewählt. Die Summe der anderen 9 Zahlen ergibt 2020.

   Welche Zahl hat Daniel gewählt?

2. **Quadrate (wie immer, $n \in \mathbb{N}$):**

   - Begründe anschaulich: Der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen ist immer eine ungerade Zahl.

     Kannst du den Abstand zwischen $n^2$ und $(n+1)^2$ explizit angeben (als **funktion**[1] von $n$), so dass man sofort sieht, dass diese Zahl ungerade ist? Kannst man das auch durch ein Bild sehen?
   - Begründe: Auch die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist immer ungerade und daher stets als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen schreibbar. Schreibe die Summen

     $$1^2+2^2, \quad 2^2+3^2, \quad 4^2+5^2$$

     als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen.
   - Gib eine allgemein Darstellung für die Summe $n^2+(n+1)^2$ als Summe zweier aufeinanderfolgender Zahlen an, die beide eine **Funktion** von $n$ sind.
   - Wenn eine Zahl die Summe zweier aufeinandervolgender Zahlen ist, ist sie sicherlich ungerade oder gerade?

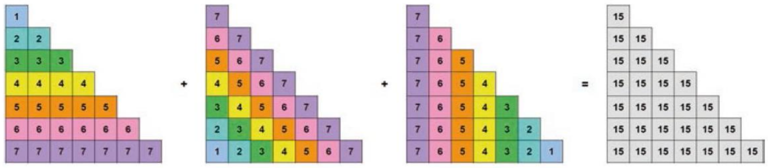
3. **Summe von Quadraten:**

   Wie kann man anhand der Abbildung unten begründen, dass

   $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

   gilt?

1. Eine Funktion „$f$" von einer Variable (z.B. $n$) ist ein Rezept, das jedem Wert der Variable ($n$) einen neuen Wert $f(n)$ zuordnet. Siehe Problem #3.

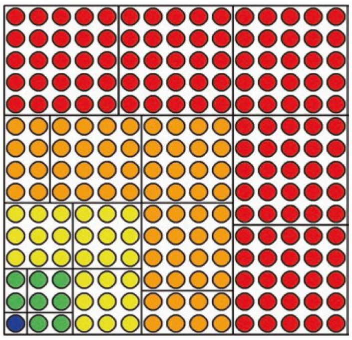


4. **Summe von Würfel:**

   In dem Bild unten steckt eine Formel für die Summe der ersten $n$ Kubikzahlen, also für

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

   Finde und begründe sie (d.h. insbesondere muss begründet werden, warum die Aufteilung, die du im Bild siehst, für jedes $n \in \mathbb{N}$ möglich ist).



5. **Modulo Rechnen Revisited:**

   Erinnere dich an volgender Definition. Wir schreiben, für ganze Zahlen $a, b$ und eine natürliche Zahl $n$:

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{falls } n \text{ ein Teiler von } a - b \text{ ist.}$$

   Wenn $R$ der Rest von der Division mit Rest von $a$ durch $n$ ist, dann gilt:

$$a \equiv R \pmod{n},$$

   oder $\boldsymbol{R}$ **ist die Restklasse von** $\boldsymbol{a}$ **mod** $(\boldsymbol{n})$**.**

   - Zeige, durch die Distributive Regel, also $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ , dass folgende Formel für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(a + b)^2 \;=\; a^2 + b^2 + 2ab.$$

   - Wende diese Regel an, um zu Zeigen, dass:

$$(-1)^2 \;\equiv\; (n-1)^2 \mod (n)$$

gilt.

- Kannst du die Regel anwenden um die Restklasse von $28^2 \bmod (29)$ zu bestimmen, ohne dass du $28^2$ explicit rechnest?
- Kannst du die Regel verallgemeinern, um zu zeigen, dass

$$(a+n)^2 \equiv a^2 \bmod (n)$$

für alle $a, n$ gilt?

6. **Funktionen**:

Eine Funktion $f$ besteht aus **3 Elementen:**

- Eine Definitionsmenge $D$.
- Eine Zielmenge $Z$.
- Ein „Rezept", das jedem Element $x \in D$ der Definitionsmenge ein Element $f(x) \in Z$ in der Zielmenge zuordnet.

Man schreibt dann kurz:

$$f: D \to Z.$$

Gegeben $z \in Z$, nennt man $f^{-1}(z)$ das Urbild von $z$. $f^{-1}(z)$ ist die Teilmenge von $D$ die aus allen Elementen $x$ besteht, so dass:

$$f(x) = z$$

gilt.

- Gib 3 Beispiele von Funktionen

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

- Eine Funktion ist **injektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge höchstens ein Element im Urbild hat. Welches von den 5 Beispielen ist injektiv? Wenn keines, kannst du ein Beispiel finden?
- Eine Funktion ist **surjektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge mindestens ein Element im Urbild hat. Welches von den 5 Beispielen ist surjektiv? Wenn keines, kannst du ein Beispiel finden?
- Sie ist **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist, wenn also jedes Element der Zielmenge genau ein Element im Urbild hat. Welches von den 5 Beispielen ist bijektiv? Wenn keines, kannst du ein Beispiel finden?
- Antworte die selben Fragen für Funktionen

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}.$$

7. **Eine Aufgabe von Erdos:**

Seien $m, n$ zwei positive ganze Zahlen. Seien $a_1, ..., a_{mn+1}$ andere $mn+1$ unterschiedliche Zahlen. Beweise, dass es entweder eine Teilmenge von $m+1$ Zahlen gibt, so dass

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}}, \qquad (\text{mit} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1}),$$

oder $n+1$ Zahlen, so dass

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}, \qquad (\text{mit} \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1}).$$