MSG 2019/2020 — Zirkel 7c

Tommaso Rosati

Probleme 23

1. **Fibonacci numbers:**

   Die ***Fibonacci-Folge*** ist eine Folge natürlicher Zahlen. Der Mathematiker Leonardo Fibonacci (Leonardo von Pisa) entwickelte sie, um das Wachstum einer Population von Kaninchen zu beschreiben, und publizierte sie in seinem Buch "Liber Abaci" aus dem Jahre 1202.

   Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch:

   $$f(1)=1, \qquad f(2)=1, \qquad f(n+2)=f(n)+f(n+1).$$

   Das bedeutet,

   - dass für die beiden ersten Zahlen die Werte Null und Eins vorgegeben wird, und
   - dass sich jede weitere Zahl durch Summieren der beiden vorherigen ergibt

   1. Konstruiere mit Excel die ersten 50 Glieder der Fibonacci-Folge.
   2. Untersuche die „Wachstumsgeschwindigkeit“, indem Du für jedes n den Quotienten $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ ermittelst.

   Die ***Lucas-Zahlenfolge*** ist ähnlich zur Fibonacci-Folge aufgebaut (nur die Startwerte unterscheiden sich):

   $$l(1)=3, \qquad l(2)=3, \qquad l(n+2)=l(n)+l(n+1).$$

   1. Konstruiere mit Excel die ersten 50 Glieder der Lucas-Zahlenfolge.
   2. Untersuche auch hierfür die „Wachstumsgeschwindigkeit“, indem Du für jedes n den Quotienten $\frac{l(n+1)}{l(n)}$ ermittelst. Was findest du? Kannst du deine Vermutung begründen?

2. **Gläser klingen:**

   1. Auf einer Party sind genau zehn Gäste. Zu Beginn stößt jeder mit jedem anderen Gast genau einmal an. Wie oft klingen zwei Gläser zusammen?

   2. Wie oft klingen die Gläser bei 20 Gästen? Wie lautet die Formel für n Gäste?

3. Auf einer anderen Party stößt ebenfalls jeder mit jedem anderen an. Man hört die Gläser 55 mal klingen. Wie viele Teilnehmer waren da?

4. Auf einer größeren Party hört man 210 mal Gläser klingen. Wie viele Teilnehmer waren da?

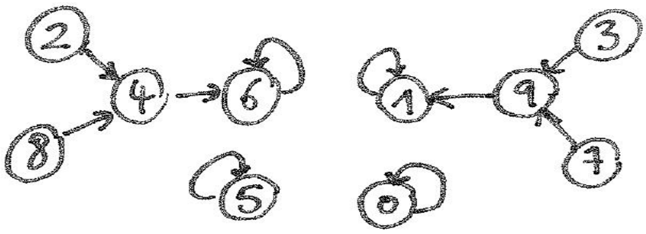
5. Bei wieder einer anderen Party behauptet jemand, dass es zu Beginn, als je zwei Gäste miteinander angestoßen haben, genau 80 mal geklungen hat. Was sagst du dazu?

3. **Quadrierpläne:**

Achtet man beim Quadrieren von natürlichen Zahlen nur auf die letzte Ziffer, dann zeigen sich folgende Ubergänge: Die Endziffern 1, 5, 6 und 0 führen auf sich selbst. Die anderen Endziffern sind in Zahlenketten enthalten:

$$2 \to 4 \to 6 \to 6, \qquad 4 \to 9 \to 1 \to 1, \qquad 7 \to 9 \to 1 \to 1, \qquad 8 \to 4 \to 6 \to 6.$$

Diese Zusammenhänge lassen sich im Quadrierplan modulo 10 darstellen.



Erstelle solche Quadrierpläne modulo n für die Reste $n=19$, $n=23$, $n=25$ und $n=27$.

4. **Eine Aufgabe von Erdos:**

Seien m, n zwei positive ganze Zahlen. Seien $a_1, \ldots, a_{mn+1}$ andere $mn+1$ unterschiedliche Zahlen. Beweise, dass es entweder eine Teilmenge von $m+1$ Zahlen gibt, so dass

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}}, \qquad (\text{mit} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1}),$$

oder $n+1$ Zahlen, so dass

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}, \qquad (\text{mit} \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1}).$$