

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California
Departamento de Oceanografía Física

**Modelo Hamiltoniano totalmente dispersivo para la propagación
de ondas en aguas someras con topografía variable.**

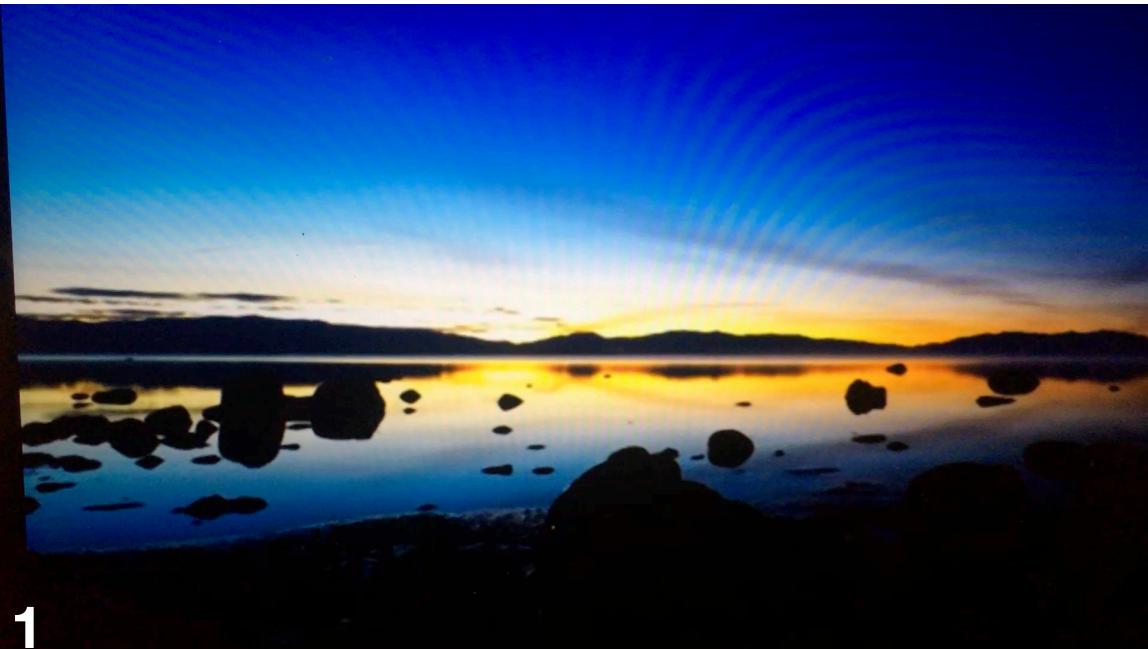
Alcances en la Oceanografía Física y Ciencias de la Atmósfera.

Dra. Rosa María Vargas Magaña
School of Mathematics, University of Edinburgh
Becario Postdoctoral CONACyT

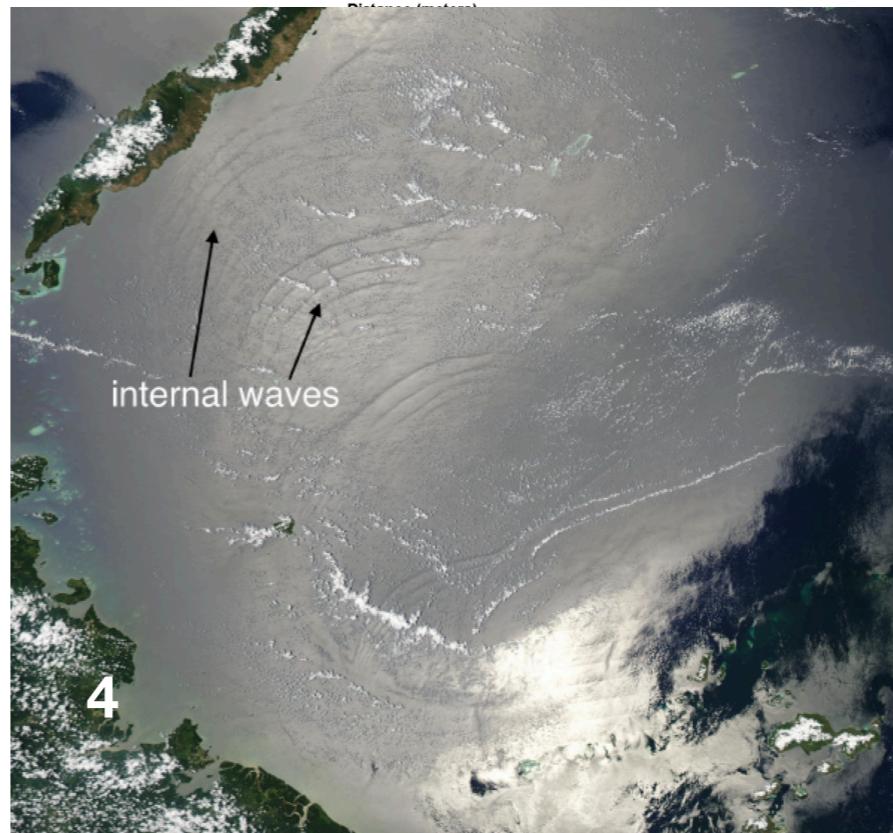
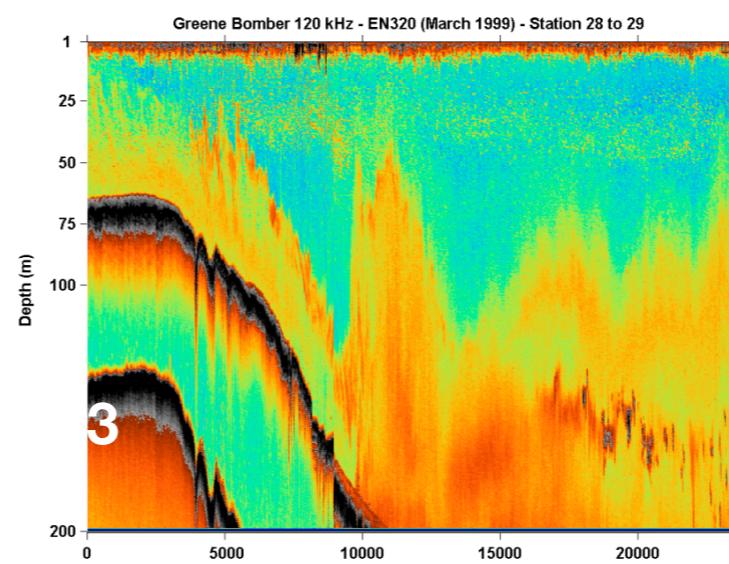
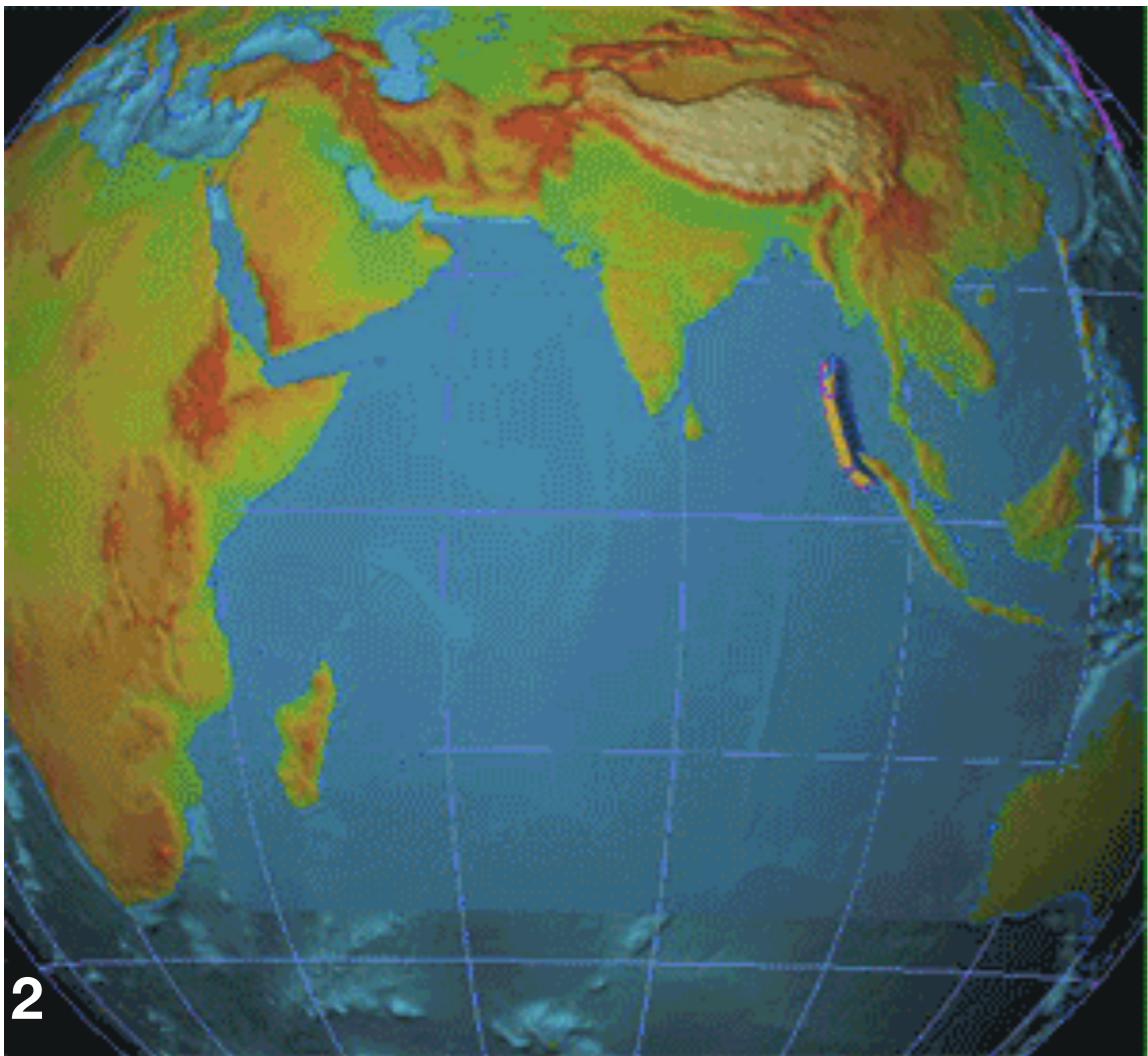


- Descripción de Fenómenos Oceanográficos que involucran topografía
- Modelo Whitham-Boussinesq de propagación de ondas en agua con topografía variable.
 - Formulación Hamiltoniana del problema de ondas en agua
 - Formulación espectral del modelo W-B y análisis espectral
- Resultados y Alcances del modelo Whitham-Boussinesq
 - Nuevas Líneas de investigación
- Conclusiones

Las ondas **superficiales** e **internas** son ubicuas en la naturaleza



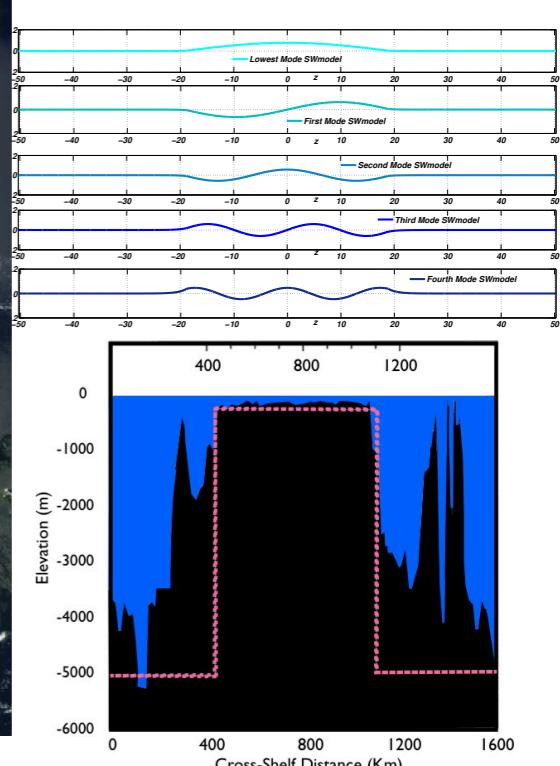
1. Ondas seiches en el Lago Tahoe **2. Ondas tipo tsunamis** propiciadas por un terremoto con epicentro en el Océano Índico, al noroeste de Sumatra, Indonesia en el 2004. **3. Onda Lee** en el borde norte de Georges Bank vista con ecosonda de 200 kHz. [Wiebe, P.H., J.D. Irish, R.C. Beardsley y T.K. Stanton. 2000.



4. Solitones Internos Oceánicos. en el mar de Sulu entre Filipinas y Malasia
5. Ondas estacionarias en el lab. **6. Ondas atrapadas** en plataformas continentales



5



Efectos de la Topografía I

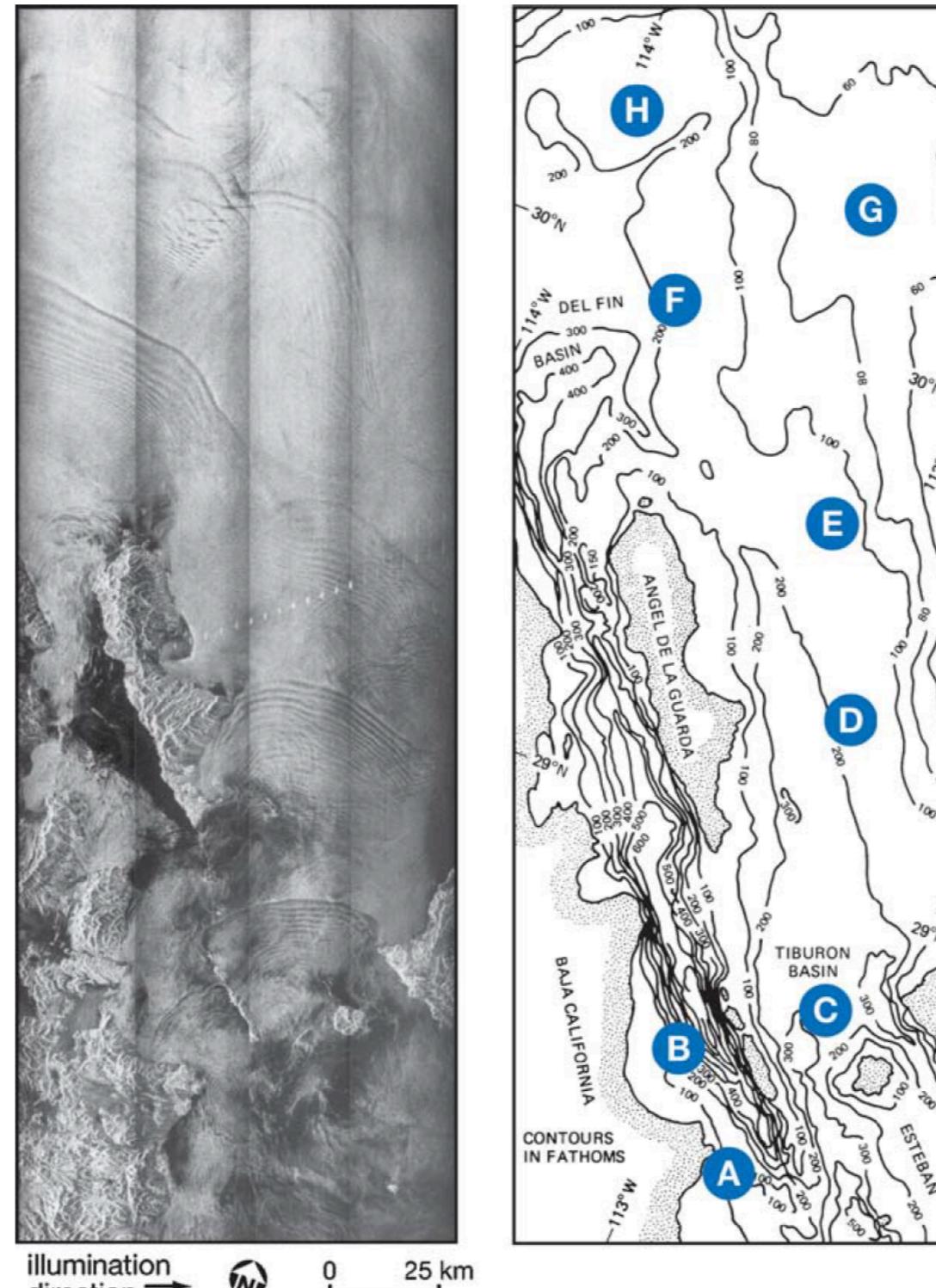
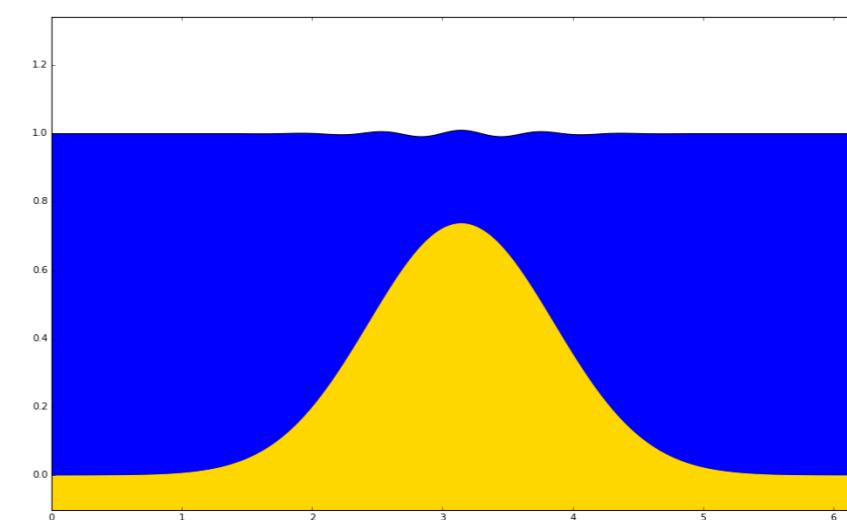
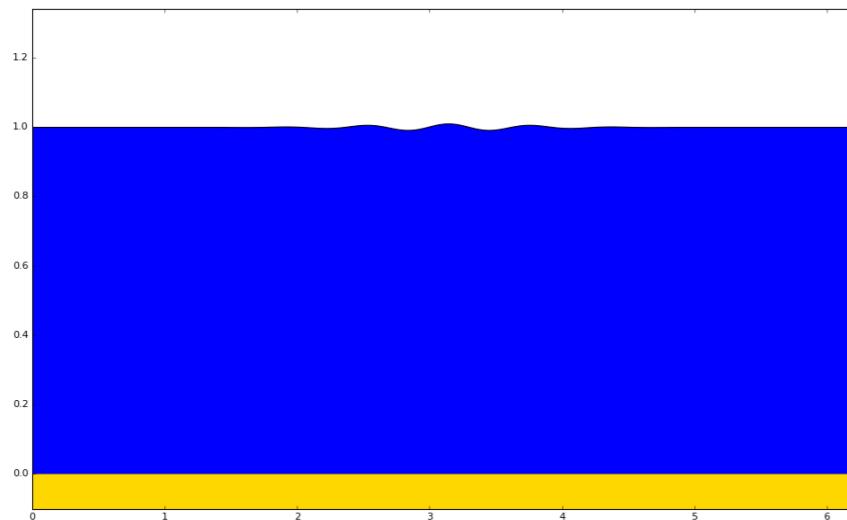
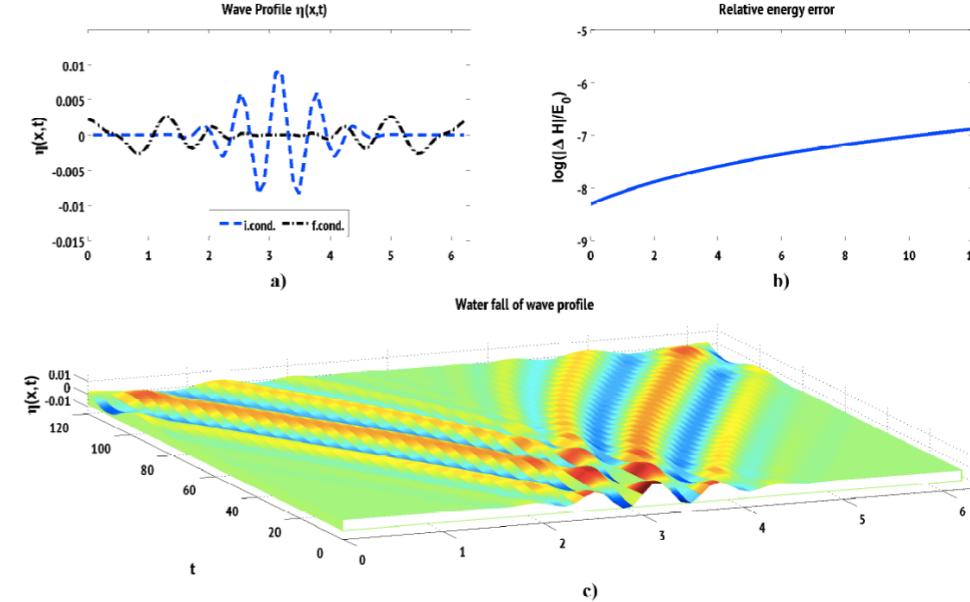
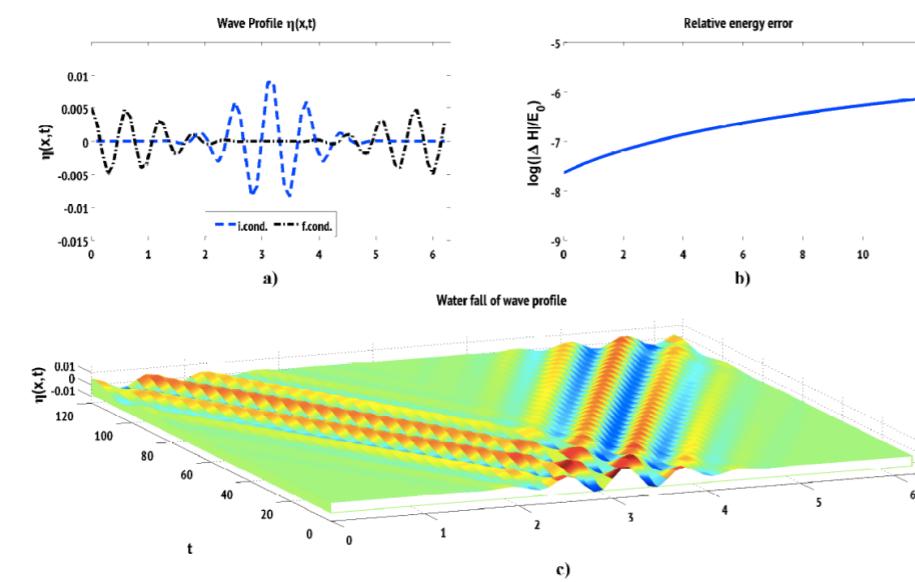
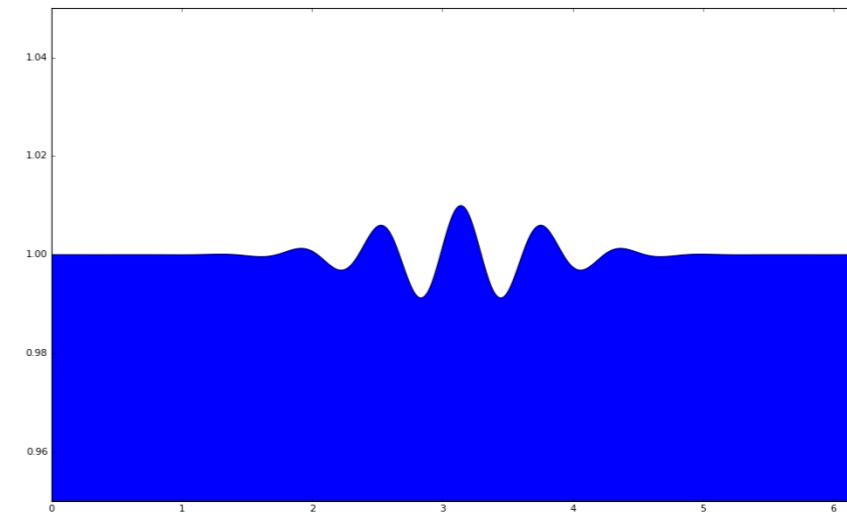
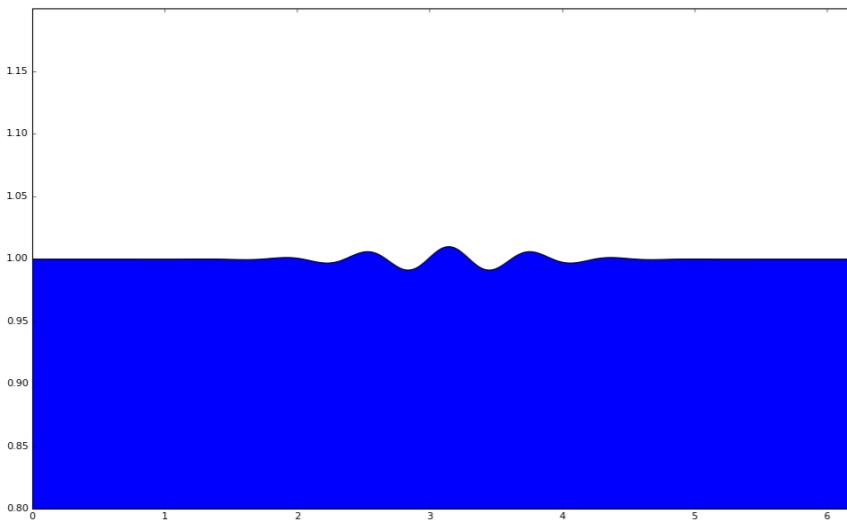


Imagen de radar de apertura sintética de una parte norte del Golfo de California de Fu & Holt (1982).

Efecto de latopografía



zoom



Simulaciones numéricas con el modelo Whitham-Boussinesq introducido en :

► R. M. Vargas-Magaña, P. Panayotaros A Whitham-Boussinesq long-wave model for variable topography, Wave Motion (2016)



Todas estas ondas son ejemplos de ondas de aguas poco profundas.



La superficie libre está bajo la influencia de la gravedad y la tensión superficial.



Las ondas largas se propagan "sin" disipación. Luego, pueden propagarse distancias muy largas.



La topografía puede producir efectos dramáticos sobre las olas, surgen preguntas adicionales sobre la dinámica de estos sistemas y es de interés para muchas aplicaciones.



Marco teórico riguroso

Ecuaciones de Euler en 2D

1

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \mathcal{D}(\beta(x), \eta(x, t))$$

2

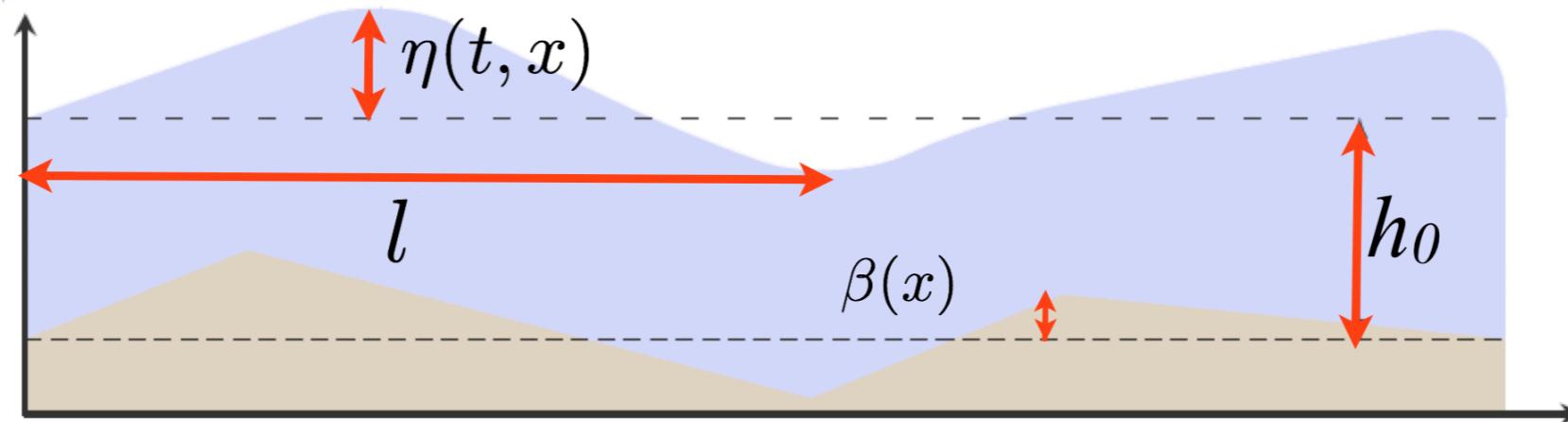
$$\eta_t + \eta_x \varphi_x - \varphi_y = 0 \quad y = \eta(x, t)$$

3

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + g\eta = 0 \quad y = \eta(x, t)$$

4

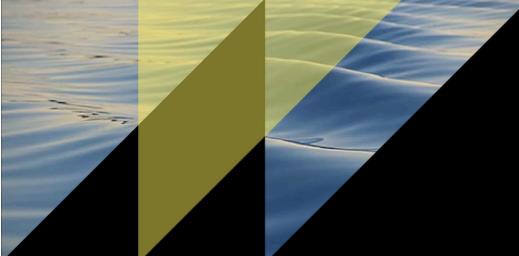
$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad y = -h_0 + \beta(x)$$



Para un fluido:

- Inviscid • Homogéneo • Incompressible • Irrotational ($v = \nabla \varphi$) • En un dominio simplemente conexo.

- Es preciso determinar la evolución de la frontera en cada instante del tiempo.
- Las condiciones de frontera en la superficie están dadas por ecuaciones fuertemente no lineales y las ecuaciones están acopladas.

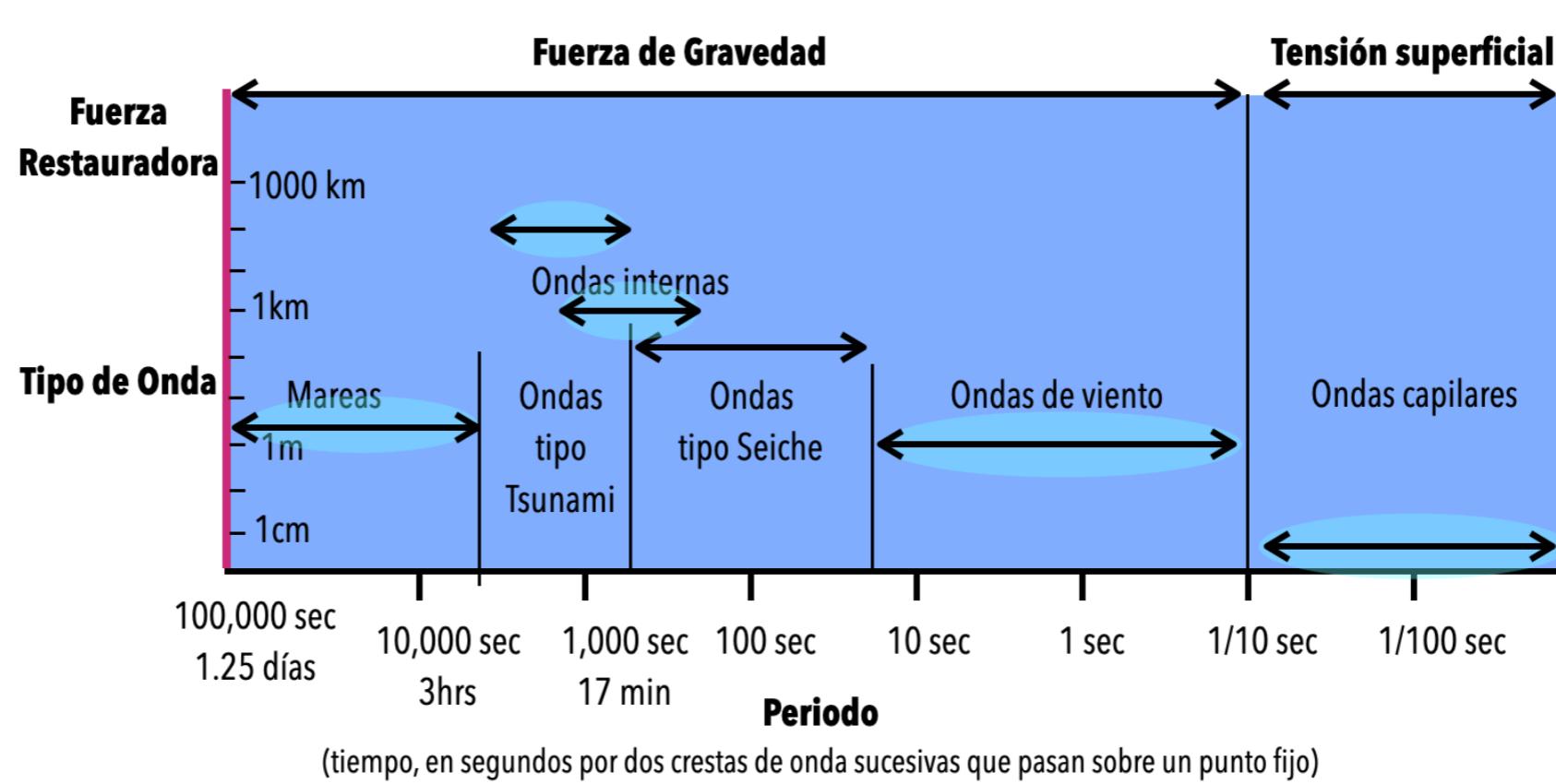
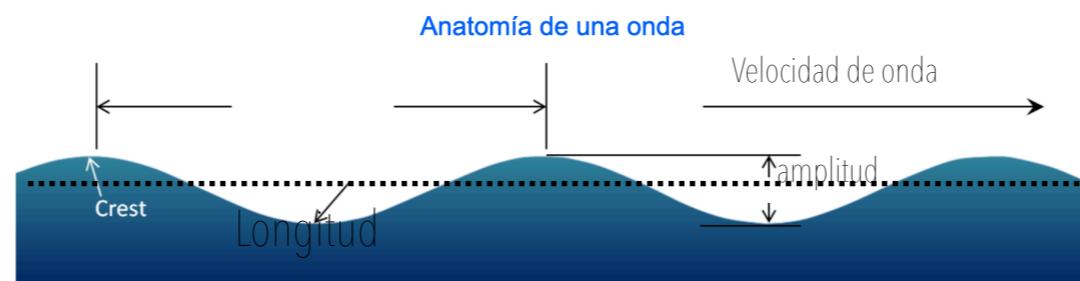


Primer Desafío

La derivación de **modelos simplificados** que sean **matemáticamente tratables para el estudio** de estos fenómenos y procesos reales que estudia la Oceanografía Física.

¿Cómo podemos derivar modelos simplificados?

1. Las **características del fluido**: densidad, homogeneidad, viscosidad, estratificación del fluido y **si en el flujo hay vorticidad** o las velocidades están dadas por un gradiente de velocidad.
2. Las **características típicas de las ondas** de estudio: amplitud, su longitud y periodo típica.



3. Fuerzas que imperan en el fluido como gravedad, tensión superficial u otras fuerzas superficiales como el viento.

La fuerza de restauración es **la gravedad**



$$\omega^2 = gk \tanh(h_0 k)$$

La fuerza de restauración es
la tensión superficial



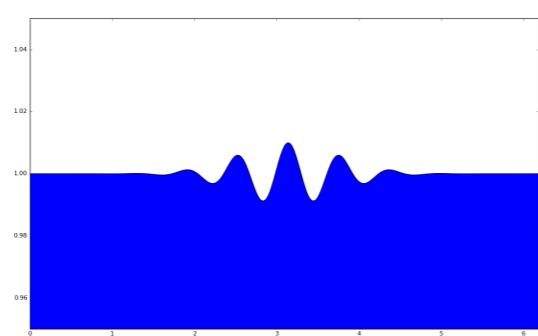
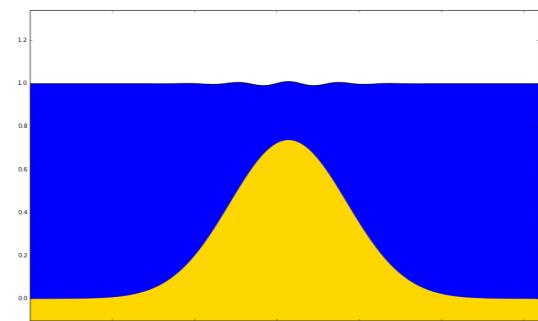
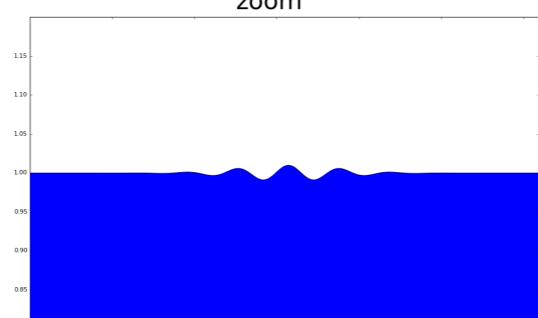
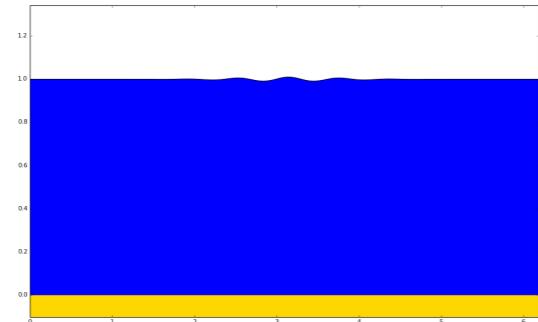
$$\omega^2 = (gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3) \tanh(kh)$$



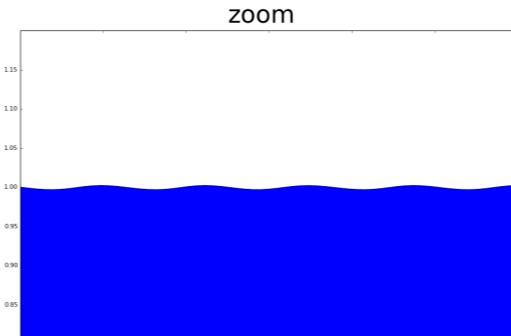
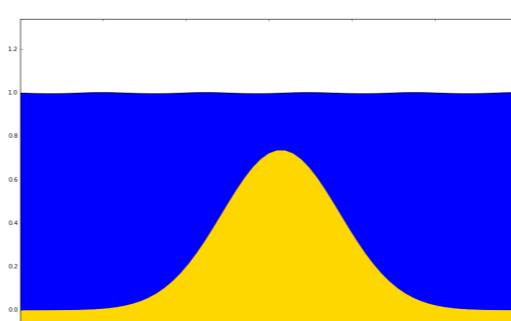
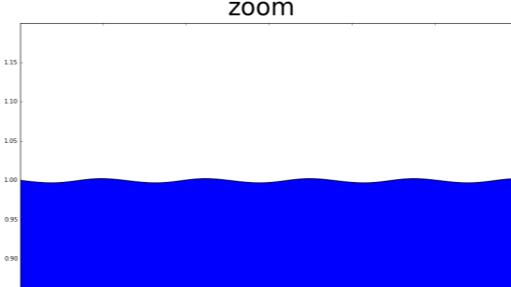
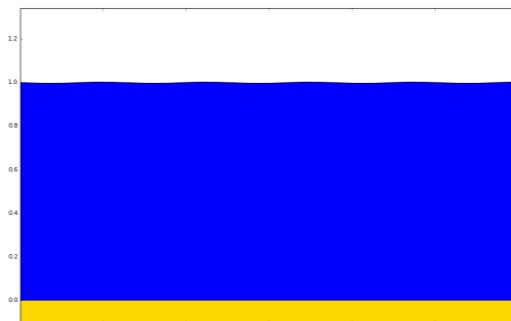
4. Dominios irregulares

, variaciones grandes de la profundidad, formaciones terrestres irregulares, puntos y regiones singulares en la frontera.

1. Variación en la velocidad de Propagación



2. Destrucción de comportamientos periódicos



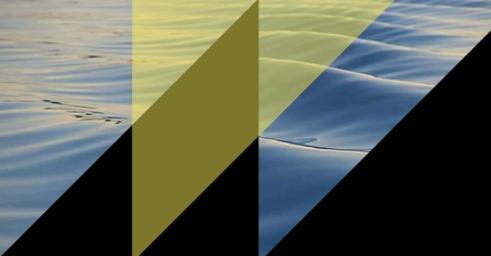
Simulaciones numéricas con el modelo
Whitham-Boussinesq introducido en

► R. M. Vargas-Magaña, P. Panayotaros
A Whitham-Boussinesq long-wave model for variable topography, Wave Motion (2016)



¿Por qué es relevante la obtención de estos modelos simplificados?

- 🌊 Gran desarrollo tecnológico en la instrumentación de medición **in situ** y en **laboratorio** de estos fenómenos.
- 🌊 Enorme capacidad de cómputo y el diseño de esquemas numéricos que preservan propiedades estructurales de las ecuaciones que ha permitido integrar numéricamente las ecuaciones por tiempos prolongados.
- 🌊 Se han registrado y documentado los **efectos no lineales** de la combinación de la dispersión de las ondas y la topografía y las fuerzas de restauración que se manifiestan ante la **propagación de ondas por** periodos prolongados del tiempo.
- 🌊 Se han observado numéricamente **ondas coherentes estables e inestables** y los **efectos de radiación, resonancia, disipación, vorticidad, enfoque y desenfoque** de las ondas, tren de ondas periódicos, frentes de ondas etc.



Desafíos en la modelación de ondas

1. La **limitación de algunos modelos** utilizados en la actualidad en varias disciplinas para la descripción de estos fenómenos.
2. La necesidad de derivación de modelos con **gran estructura que sean: matemáticamente tratables, numéricamente integrales y que logren capturar con el nivel de detalle cualitativo y cuantitativo los efectos no lineales que se manifiestan en la propagación de las ondas.**
3. La relevancia de modelos que puedan ser **extendibles a otras dimensiones y a dominios con varios estratos.**

Teoría de ondas superficiales

► **1755** Ecuaciones de Euler para un dominio con superficie libre (EE)

► **1872** Boussinesq
► **1895** Korteweg-de Vries

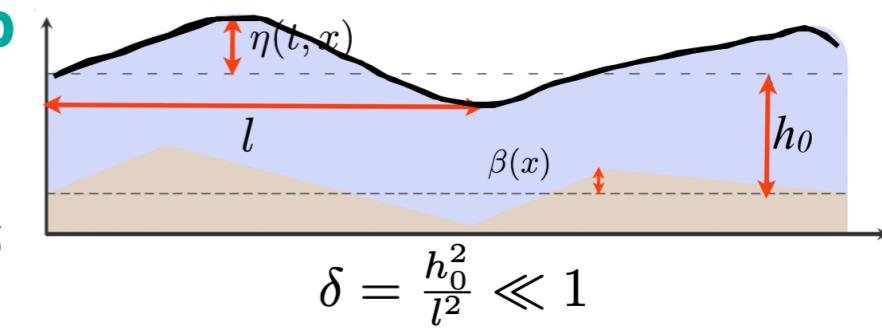
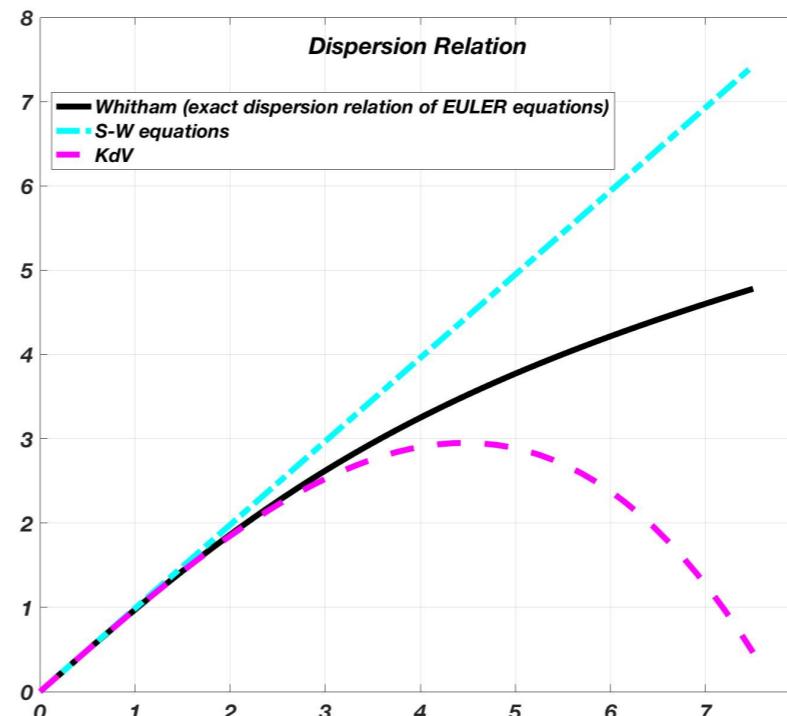
► **1967** Whitham
► **1968** Formulación Hamiltoniana del problema de ondas en agua **V. Zakharov**

► **1993** Introducción del Operador D-N en el Hamiltoniano del sistema. Derivación de ecuaciones Clásicas (KdV, Boussinesq, etc). **W. Craig y C. Sulem**

► **2013** Whitham-Boussinesq (Fondo Plano) **Aceves y P. Panayo**

► **2016 Whitham-Boussinesq (Fondo Variable)**

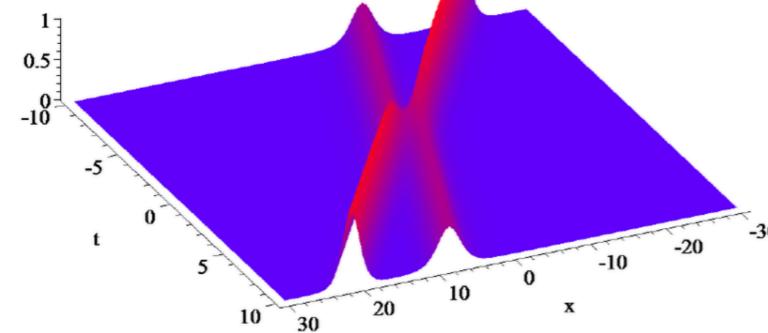
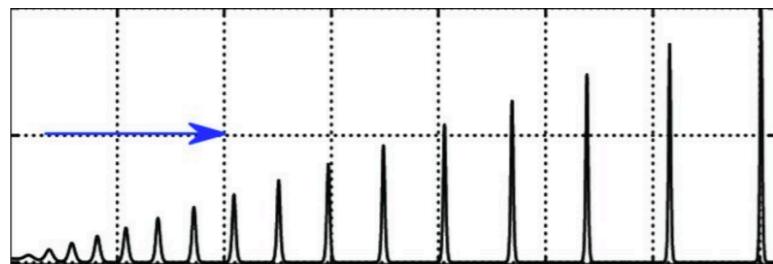
R.M Vargas-Magana y P. Panayotaros



Ecuación KdV

$$\eta_t + \frac{3}{2} \frac{g}{\sqrt{h_0}} \eta \eta_x + \eta_{xxx} = 0$$

- ▶ Infinitas cantidades conservadas
- ▶ Sus soluciones **no rompen**
- ▶ Las soluciones de la KdV sólo son de dos tipos: **ondas tipo solitón** que sólo ocurren en un número finito y trenes de onda lineales



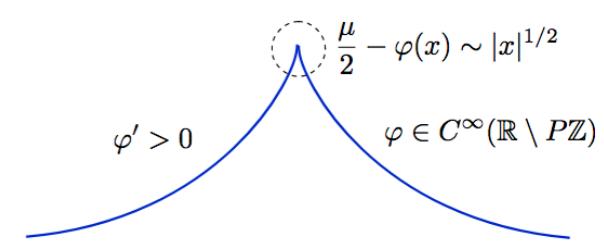
vs

Ecuación de Whitham

$$\eta_t + \eta \eta_x + K_{h_0} * \eta_x = 0$$

$$K_{h_0} := \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{g}{\xi} \tanh(h_0 \xi)}\right)$$

- ▶ Existencia de **ondas periódicas**
(Ehrnstrom, Kalisch, 2009)
- ▶ **Ondas solitarias** (Ehrnstrom, Groves, Wahlen, 2009),
- ▶ Las soluciones **sí rompen**
(Naumkin, Shishmarev, 1994),
(Constantin, Escher, 1998), (Hur, 2015)
- ▶ **Stokes waves**
(Ehrnstrom, Wahlen, 2016).
- ▶ Mejor descripción de **ondas cortas**



Formulación Hamiltoniana

Zakharov (1968) planteó las ecuaciones de evolución en forma de un sistema Hamiltoniano en donde las variables canónicas son las cantidades superficiales: $(\eta(x), \xi(x))$ con $\xi(x, t) = \varphi(x, \eta(x, t), t)$

$$\partial_t \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\eta H \\ \delta_\xi H \end{pmatrix} = J \delta H,$$

V.E. Zakharov (1968), J.W. Miles, (1977)

$$\begin{aligned} H &= K + P \\ &= \int_x \int_{y=-h+\beta(x)}^{\eta(x)} \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 dy dx + \int_x \frac{g}{2} \eta^2 dx \\ K &= \int_D \rho \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} dV = \frac{\rho}{2} \int_{\partial D} \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV = \frac{\rho}{2} \int_{\partial D} \xi (\nabla \varphi \cdot \hat{n}) |_{y=\eta} dS \end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\xi G(\beta, \eta) \xi + g \eta^2) dx$$

W. Craig and C. Sulem (1993)

Ecuaciones de evolución del problema de ondas en agua

1

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \mathcal{D}(\beta(x), \eta(x, t))$$

2

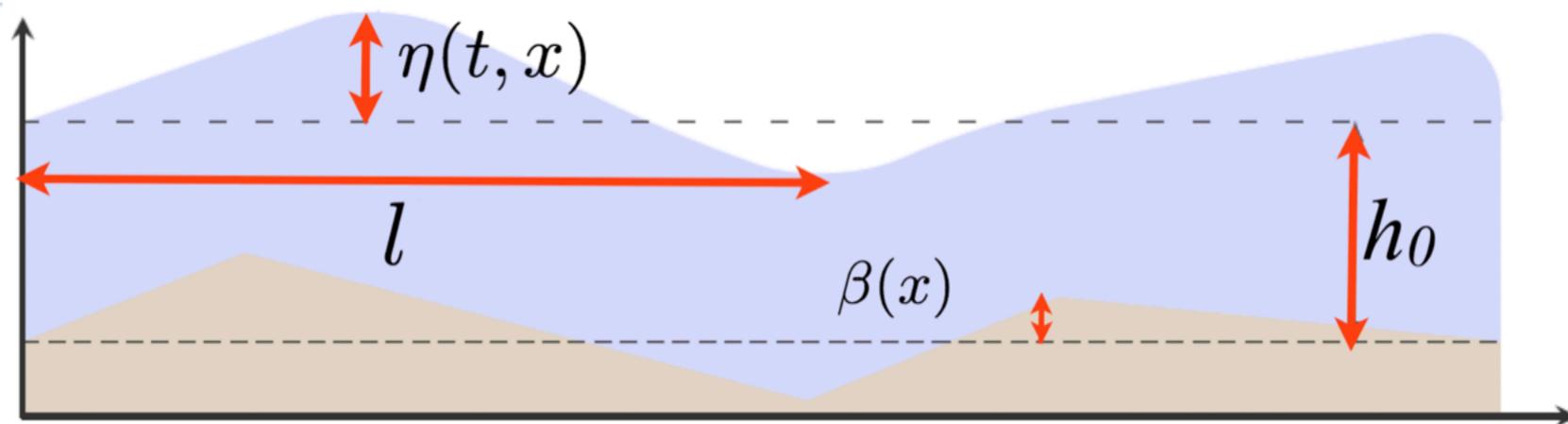
$$\eta_t + \eta_x \varphi_x - \varphi_y = 0 \quad y = \eta(x, t)$$

3

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + g\eta = 0 \quad y = \eta(x, t)$$

4

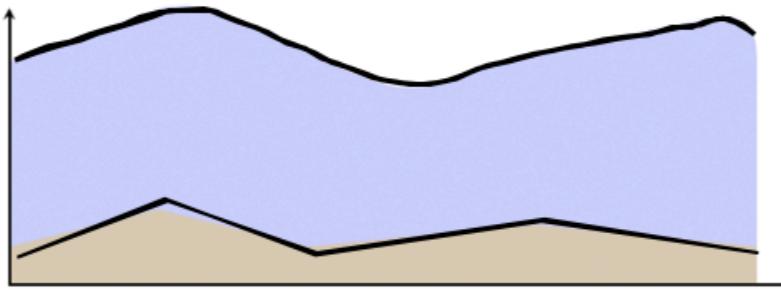
$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad y = -h_0 + \beta(x)$$



Observación: $\eta_t = \varphi_y - \eta_x \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$

Operador Dirichlet-Neumann

Considera el dominio del fluido: $\mathcal{D}(\beta(x), \eta(x, t))$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} |_{-h_0 + \beta(x)} = 0$$

Dada la condición de frontera del tipo Dirichlet $\xi(x)$, existe una única solución $\varphi(x, y)$ de

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{en } \mathcal{D}(\beta(x), \eta(x, t)) \\ \varphi(x, \eta(x)) = \xi(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} = 0 & \text{en } y = -h_0 + \beta(x) \end{cases}$$

Y el operador Dirichlet-Neumann $G(\beta, \eta)$ se define como

$$G(\beta, \eta)\xi = \nabla \varphi |_{y=\eta} \cdot N \quad \text{en donde} \quad N = (-\partial_x \eta, 1)^T$$

$$\xi(x) \longmapsto \varphi(x, y) \longmapsto N \cdot \nabla \varphi (1 + |\nabla_x \eta|^2)^{1/2} := G(\eta)\xi(x)$$

Hamiltoniano del Problema de ondas en agua

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\xi G(\beta, \eta) \xi + g \eta^2) dx$$

$$\eta_t = G(\beta, \eta) \xi$$

$$\xi_t = \frac{-1}{2(1+\eta_x^2)} (\xi_x^2 - (G(\beta, \eta) \xi)^2 - 2\eta_x \xi_x G(\beta, \eta) \xi)^2 - 2\eta_x \xi_x G(\beta, \eta) \xi - g \eta$$

- En general no existe una expresión explícita para este operador!
- El único caso en el que es posible obtener una expresión del operador Dirichlet-Neumann es

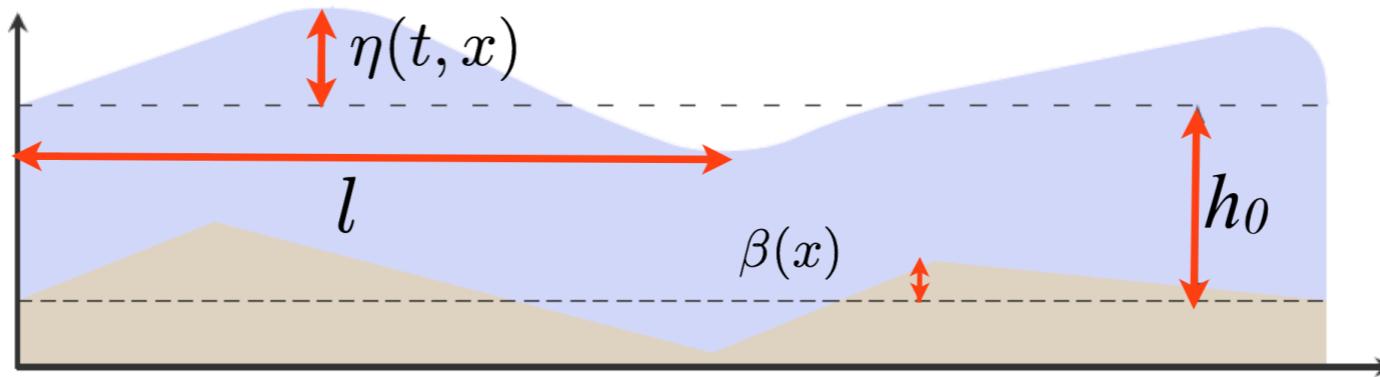


$$[G(0, 0)] : \xi \mapsto D \tanh(D) \xi \quad \text{¿Qué es este objeto?}$$

Donde D es el operador diferencial usual $D = -i\partial_x$

$$\xi(x) \mapsto \hat{\xi}(\kappa) \mapsto \kappa \tanh(h_0 \kappa) \hat{\xi}(\kappa) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \kappa \tanh(h_0 \kappa) \hat{\xi}(\kappa) e^{i \kappa x} d\kappa := [D \tanh(h_0 D)] \xi$$

Régimen de aguas someras



$$\delta = \frac{h_0^2}{l^2} \ll 1 \quad \sim \quad \epsilon = \frac{\eta}{h_0} \quad \text{¡Pequeño!}$$

$$[G(\beta, \epsilon\eta)](\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} [G_n(\beta, \eta)](\xi) \epsilon^n$$

$$G_0(\beta, \eta) = D \tanh(h_0 D) + DL(\beta),$$

$$G_1(\beta, \eta) = D\eta D - G_0\eta G_0,$$

$$G_2(\beta, \eta) = \frac{1}{2}(G_0D\eta^2D - D^2\eta^2G_0 - 2G_0\eta G_1),$$

Coifman and Meyer (1985)
Craig, Schanz and Sulem (1997)

Craig and Sulem (2005)

Craig, Guyenne, Nicholls, Sulem (2005)

$$\text{con } D = -i\partial_x$$

y $L(\beta)$ Involucra operadores **pseudo-diferenciales**

Operador $L(\beta)$

- El operador $L(\beta)$, can be written in the semi-explicit form:

$$L(\beta) = -B(\beta)A(\beta)$$

donde

$$A(\beta)\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \sinh(\beta(x)k) \operatorname{sech}(hk) \hat{\xi}(k) dk,$$

$$C(\beta)\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \cosh(-1 - \beta(x))k \hat{\xi}(k) dk,$$

y $B(\beta) = C(\beta)^{-1}$

W. Craig, P. Guyenne, D. Nicholls, C. Sulem (2005)

- Expansión del operador:

$$L_0(\beta) = 0,$$

$$L_1(\beta) = -\operatorname{sech}(hD)\beta D \operatorname{sech}(hD),$$

$$L_2(\beta) = \operatorname{sech}(hD)\beta D \sinh(hD)L_1(\beta),$$



Modelo Whitham-Boussinesq de Ondas en aguas someras con profundidad variable

$$H_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\xi G_{\mathcal{A}}(\beta, \epsilon\eta) \xi + g\eta^2) dx$$

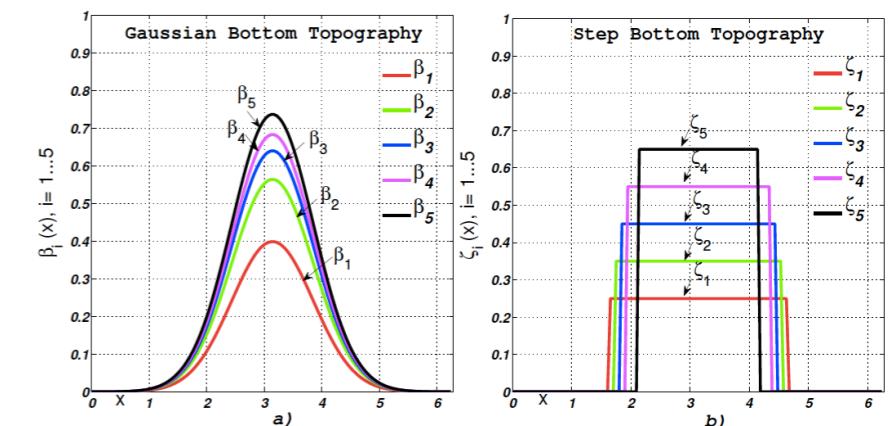
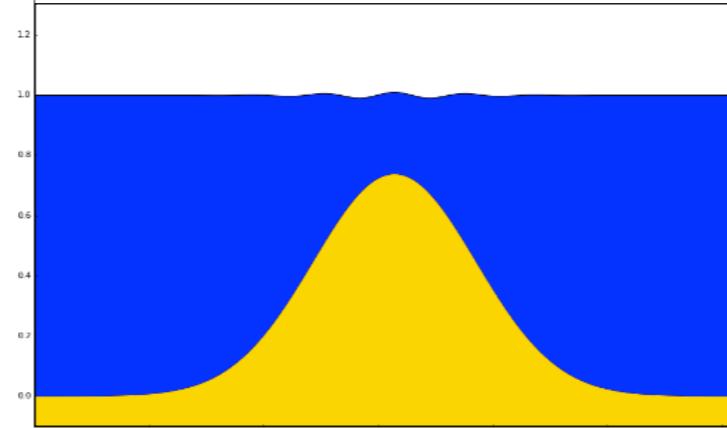
$$G_{\mathcal{A}} = Sym\left(\frac{D}{\sqrt{\epsilon}} \tanh(\sqrt{\epsilon}h(x)D)\right)$$

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\eta}_k = \frac{\partial H}{\partial \hat{\xi}_k^*} \\ \partial_t \hat{\xi}_k = -\frac{\partial H}{\partial \hat{\eta}_k^*} \end{cases}, \quad k \in J_M, \quad \text{con} \quad J_M = [1, \dots, M].$$

Profundidad Constante



Grandes Variaciones en la Profundidad



$$G_{\mathcal{A}_0} = \frac{\tilde{D}}{\sqrt{\epsilon}} \tanh(h_0 \sqrt{\epsilon} \tilde{D}) + \epsilon \tilde{D} \tilde{\eta} \tilde{D}$$

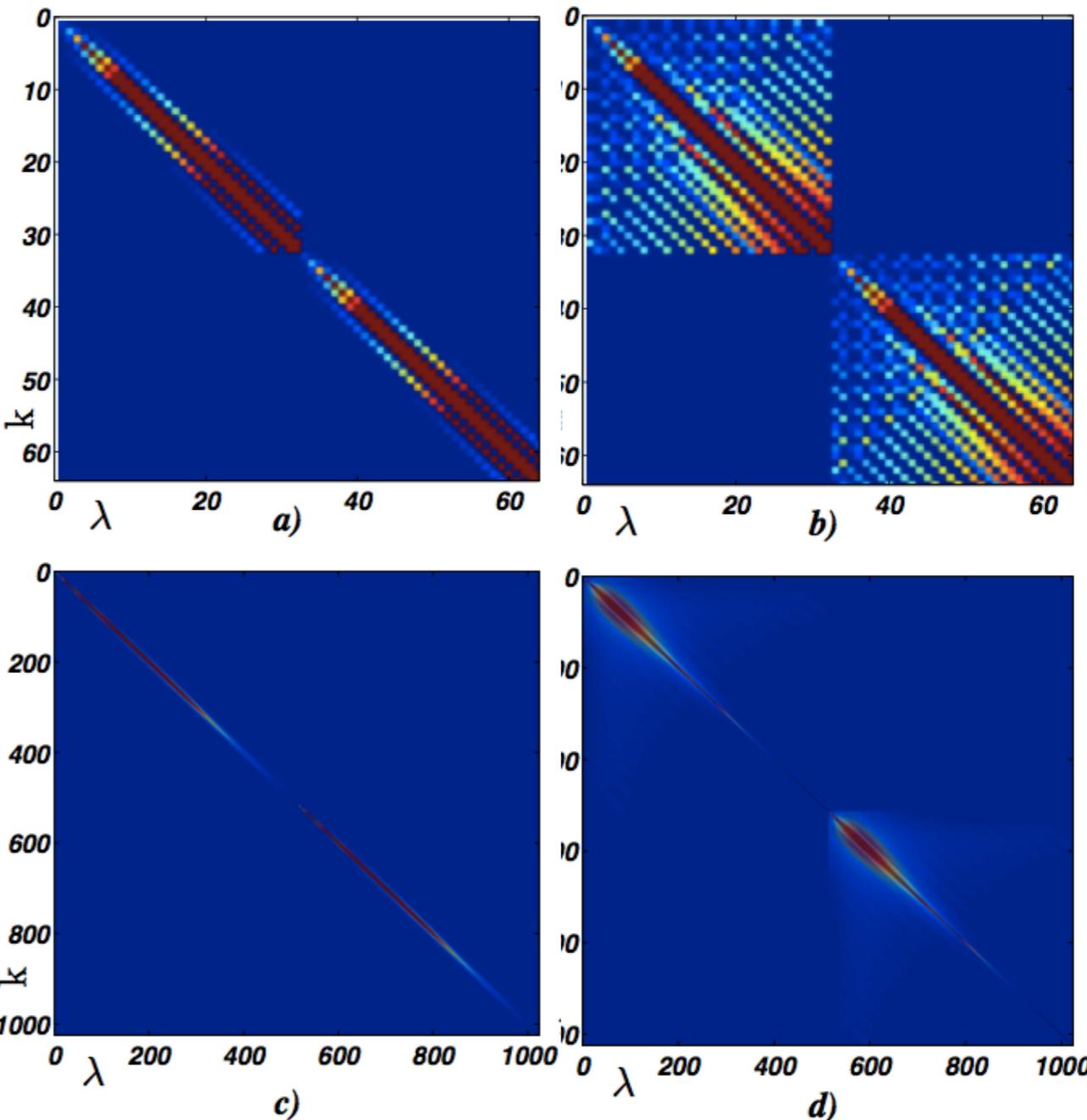
$$G_{\mathcal{A}_2} = Sym\left(\frac{\tilde{D}}{\sqrt{\epsilon}} \tanh(\sqrt{\epsilon}(-1 + \beta(x))\tilde{D}) + \epsilon \tilde{D} \tilde{\eta} \tilde{D}\right)$$



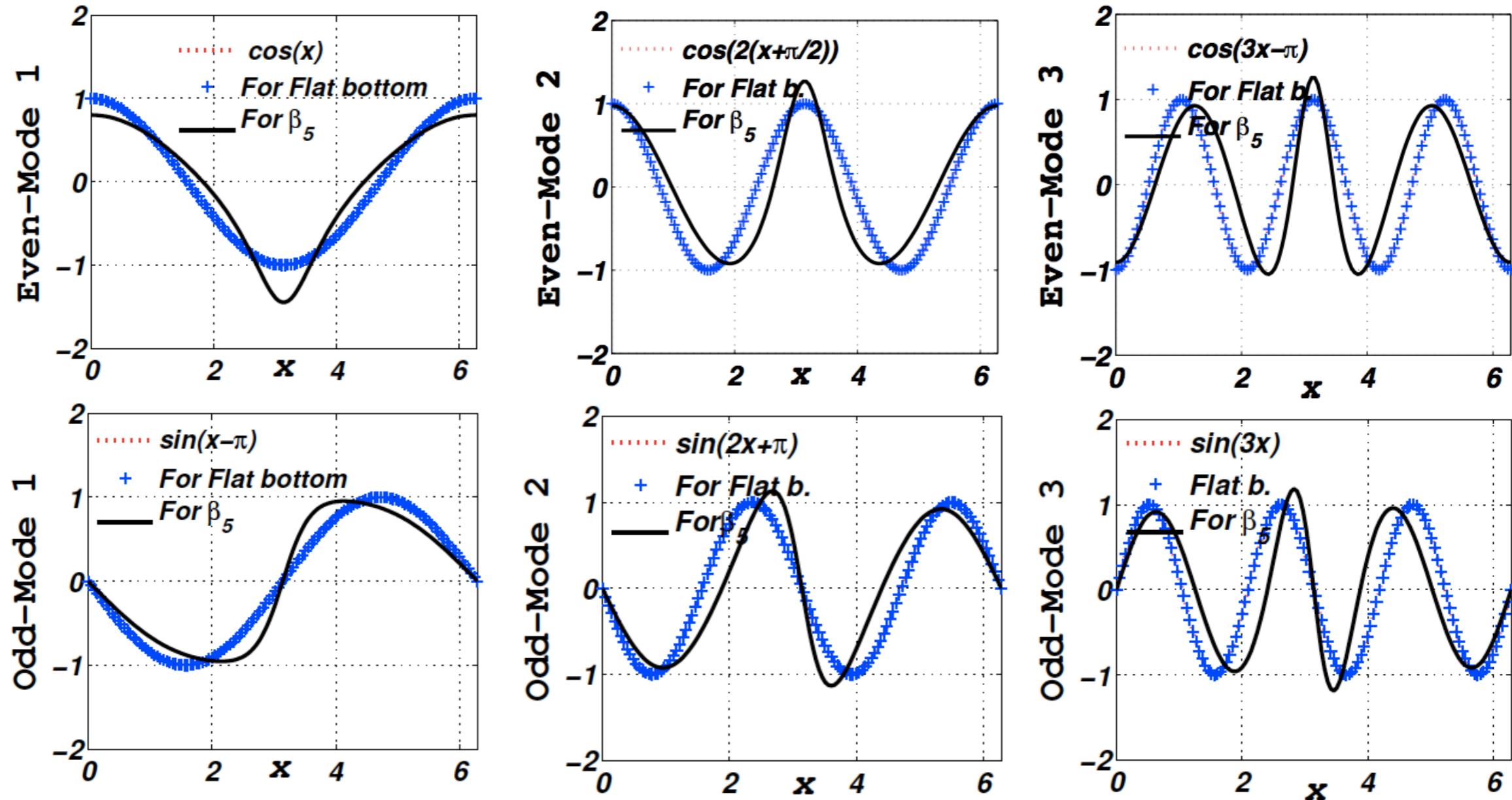


Análisis Espectral Numérico

En un marco periódico obtenemos una **representación matricial infinita del operador PDF** en términos de los coeficientes de Fourier del símbolo del operador.

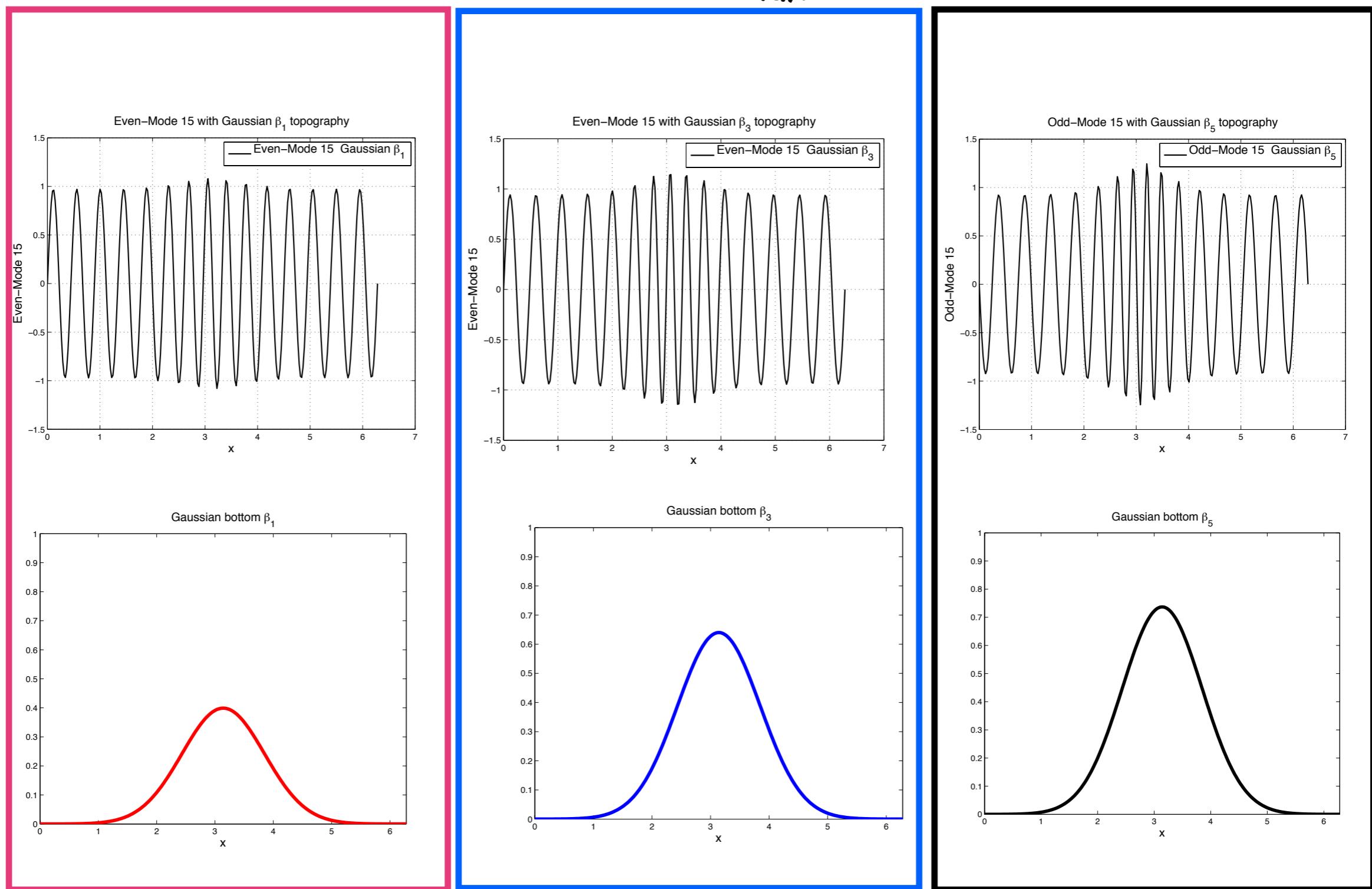


Modos más escarpados y con ancho de banda



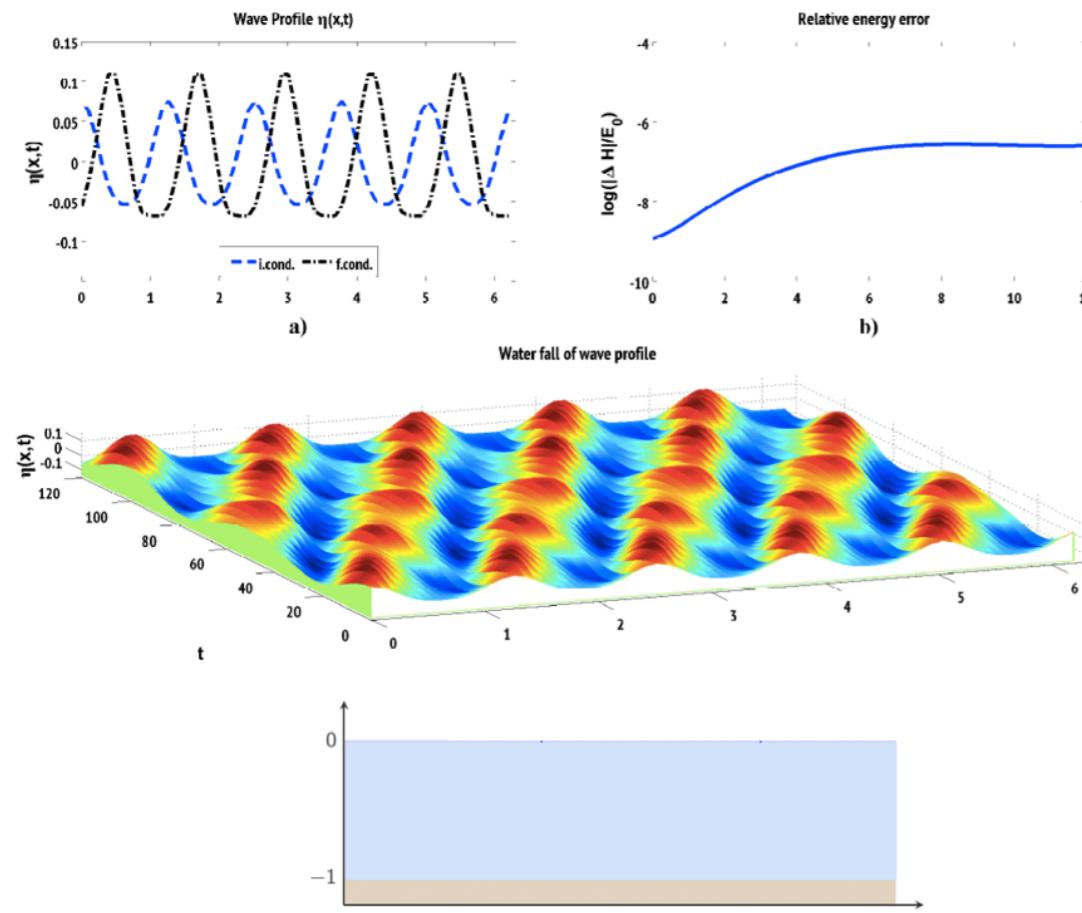
Modulación

Mode 15 $k_{\text{Max}} = 27$



Integración numérica : Segunda aproximación de tren de ondas de Stokes para W-B

$k_{\text{Max}} = 2^5$ $\epsilon = 0.01$
 $dt = 0.001$ $t_{\text{final}} = 120$

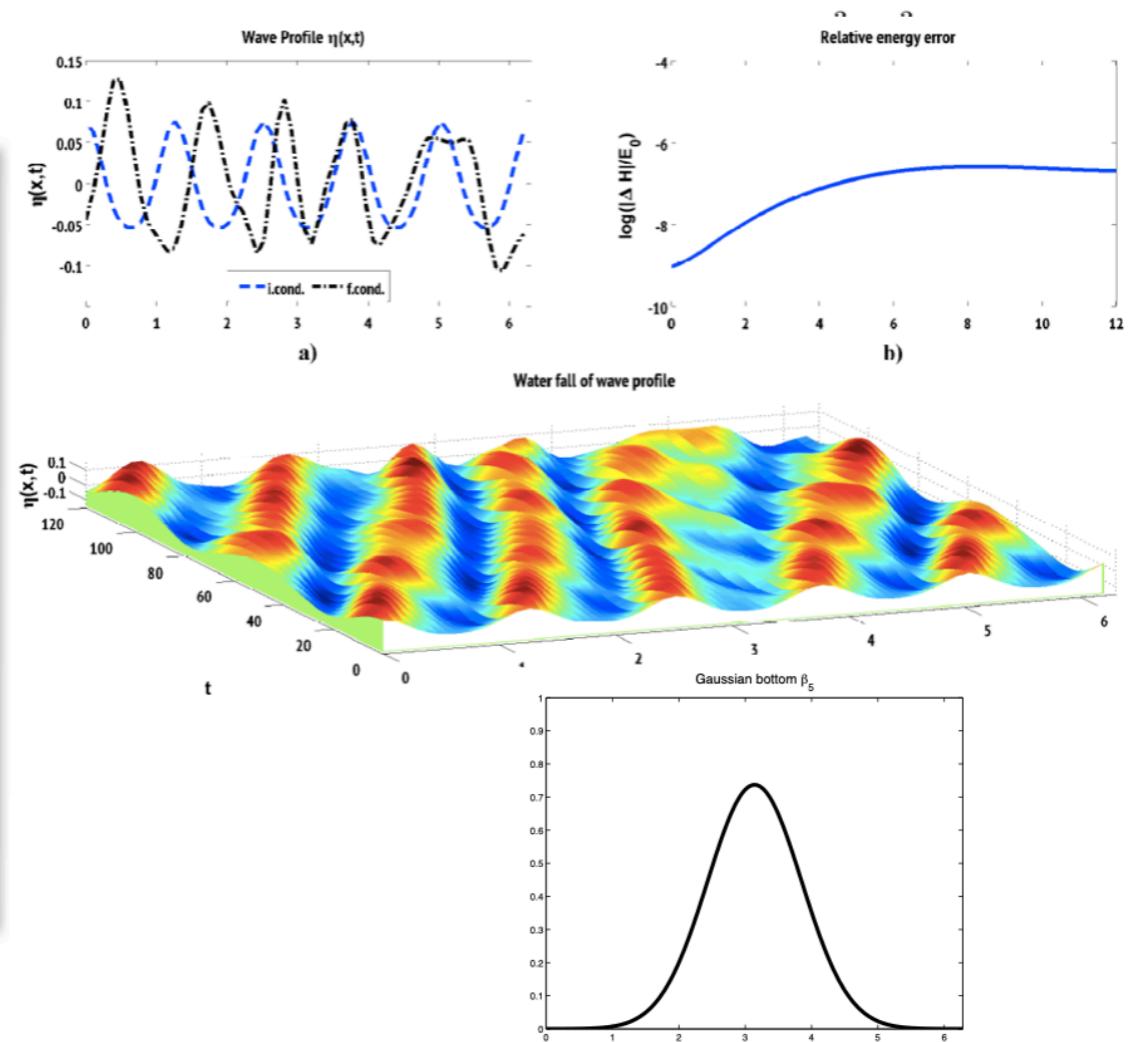


a = 0.065

$\lambda = 5$

$$\begin{aligned}\eta_0(x) &= a \cos(\lambda x) + \mu_2 a^2 \cos(2\lambda x), \\ \xi_0(x) &= \nu_1 a \cosh(\lambda(\eta_0 + h)) \sin(\lambda x) + \nu_2 a^2 \cosh(2\lambda(\eta_0 + h)) \sin(2\lambda x)\end{aligned}$$

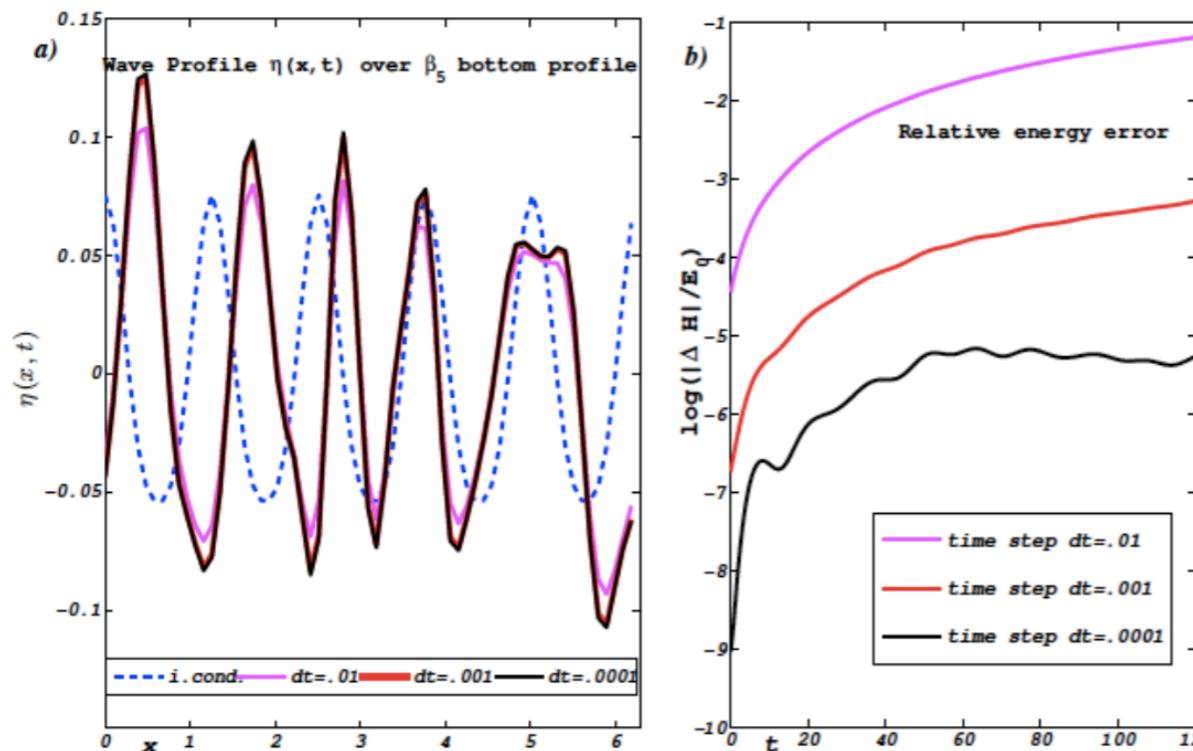
$$\mu_2 = \frac{1}{2} \lambda \coth(h\lambda) \left(1 + \frac{3}{2 \sinh(\lambda h)} \right),$$



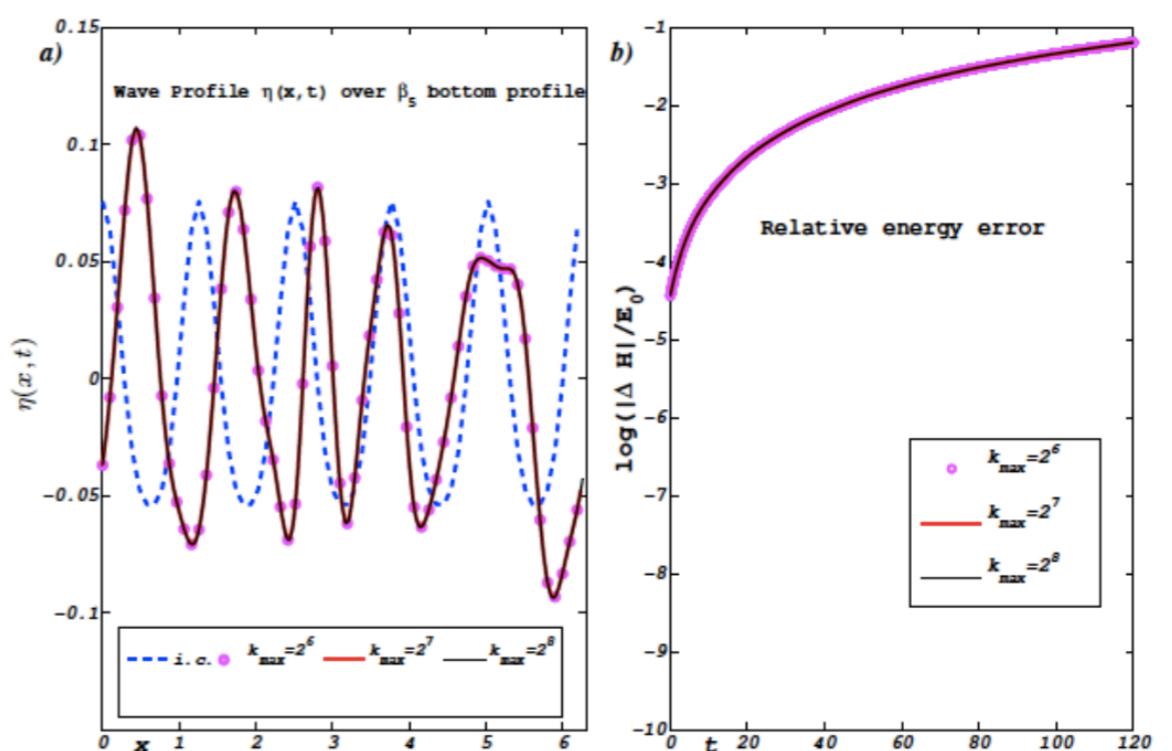
La integración numérica se realiza mediante un Adams-Bashforth / Moulton de cuarto-quinto orden (ABM) esquema predictor-corrector. Método completamente espectral

Precisión del Esquema Numérico

**Dependencia de los resultados con el paso
el tamaño de del paso del tiempo Δt .**



**Dependencia de los resultados con la
resolución espectral $k_{\text{Max}}=M$**

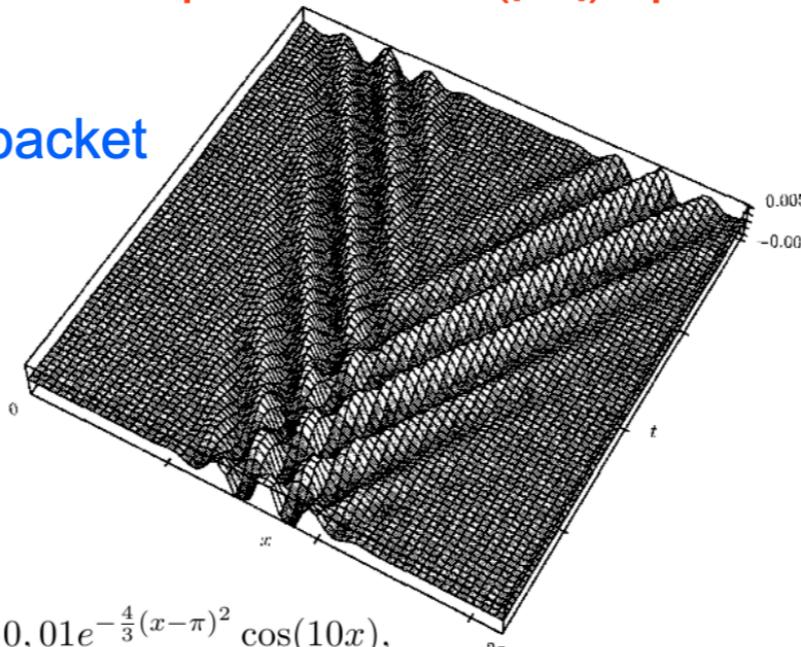


$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\xi G(0, \eta) \xi + g\eta^2) dx$$

$$G(0, \eta) = G_0(0, \eta) + G_1(0, \eta) + G_2(0, \eta) + G_3(0, \eta) + G_4(0, \eta) + G_5(0, \eta)$$

Use expansions of $G(\beta, \eta)$ up to order 5!!!!

Modulated wave packet



$$k_{\text{Max}} = 2^5$$

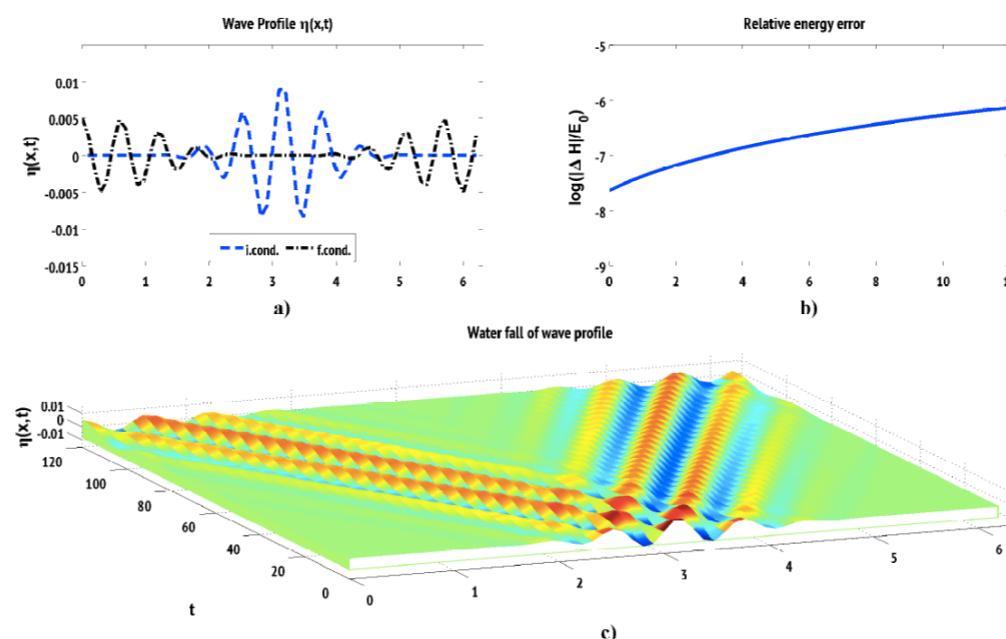
$$\varepsilon = 0.01$$

$$dt = 0.001$$

$$t_{\text{final}} = 120$$

$$\begin{aligned}\eta_0(x) &= 0,01e^{-\frac{4}{3}(x-\pi)^2} \cos(10x), \\ \xi_0(x) &= 0, \forall x \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Craig and Sulem (1993)



$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\xi G(\beta, \eta) \xi + g\eta^2) dx$$

$$\begin{aligned} G(\beta, \eta) &= G_0(\beta, \eta) + G_1(\beta, \eta) + G_2(\beta, \eta) + G_3(\beta, \eta) + G_4(\beta, \eta) + G_5(\beta, \eta) \\ &+ G_6(\beta, \eta) + G_7(\beta, \eta) + G_8(\beta, \eta) \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{Use expansions of } G(\beta, \eta) \\ \text{up to order 8!!!} \end{matrix}$$

$$L(\beta) = L_0(\beta) + L_1(\beta) + L_2(\beta) \quad \begin{matrix} \text{Use expansions of } L(\beta) \text{ up to order 2} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} L_0(\beta) &= 0, \\ L_1(\beta) &= -\operatorname{sech}(hD)\beta D \operatorname{sech}(hD), \\ L_2(\beta) &= \operatorname{sech}(hD)\beta D \sinh(hD)L_1(\beta), \end{aligned}$$

W. Craig, P. Guyenne, D. Nicholls and C. Sulem (2005)

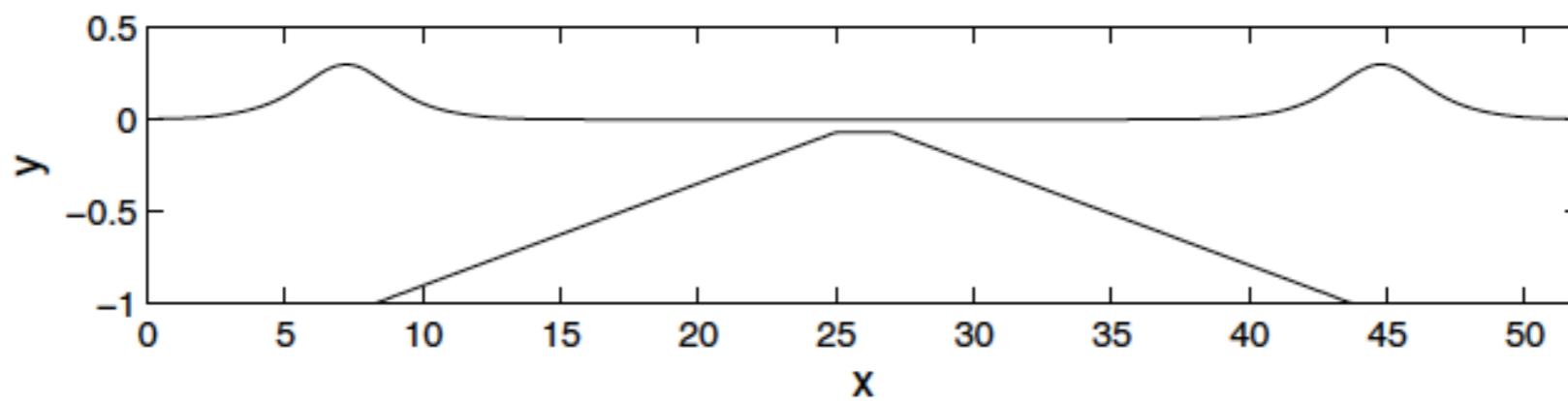


FIG. 4.2. *Bottom topography and initial condition in the solitary wave shoaling problem. The two solitary waves are of amplitude $a_0 = 0.3$ and the bottom slope is $s = 1/18$.*

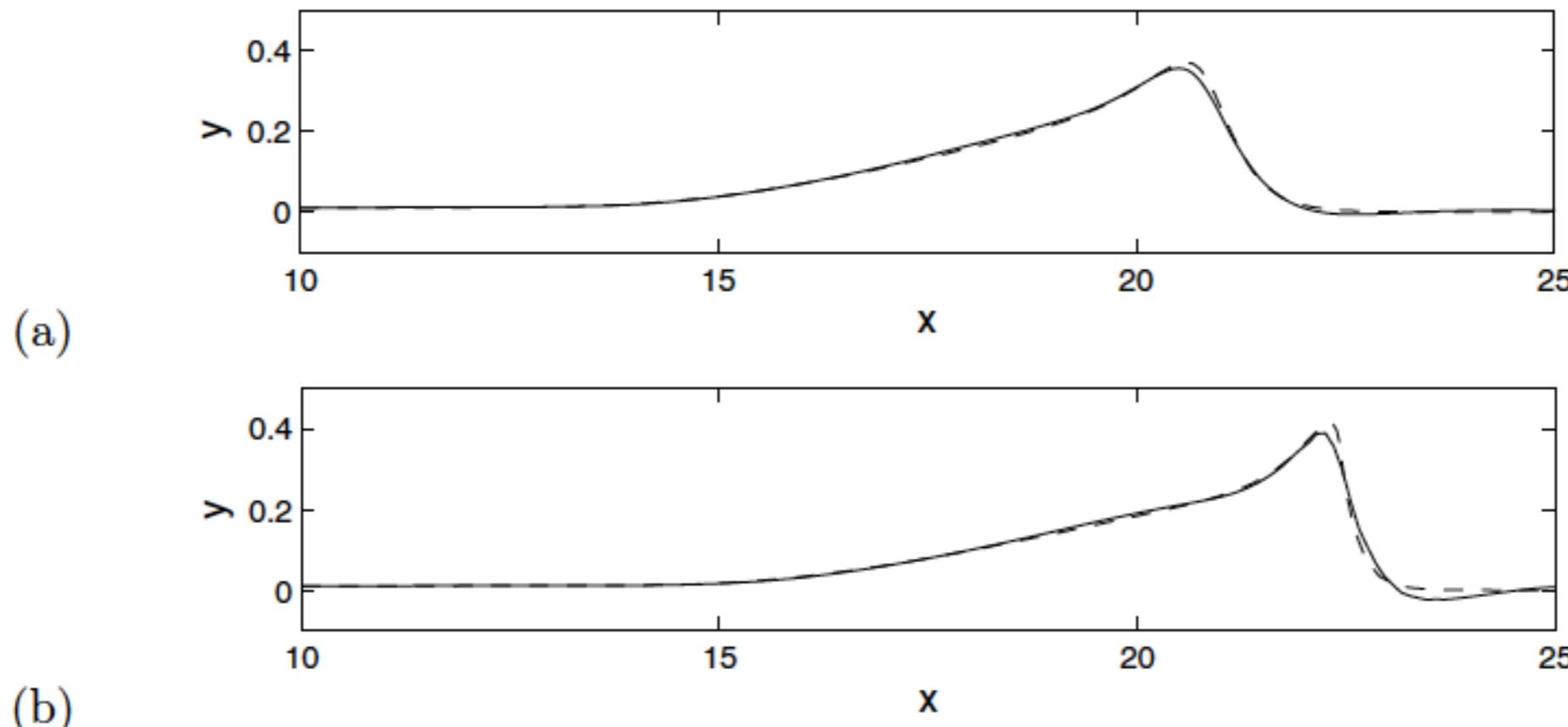
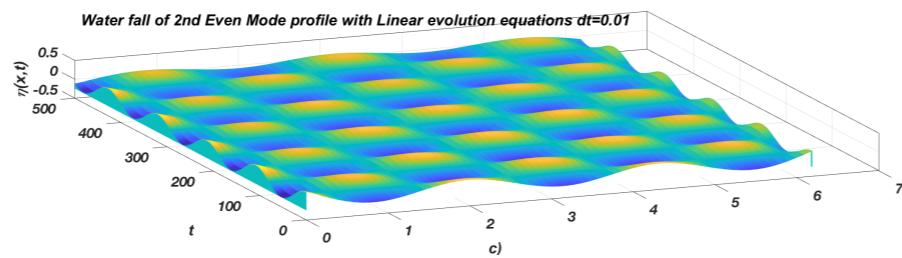


FIG. 4.3. *Comparison of solitary wave profiles between boundary element (dashed line) and spectral (solid line) methods for $a_0 = 0.3$ at times (a) $t = 12$ and (b) $t = 13.6$.*

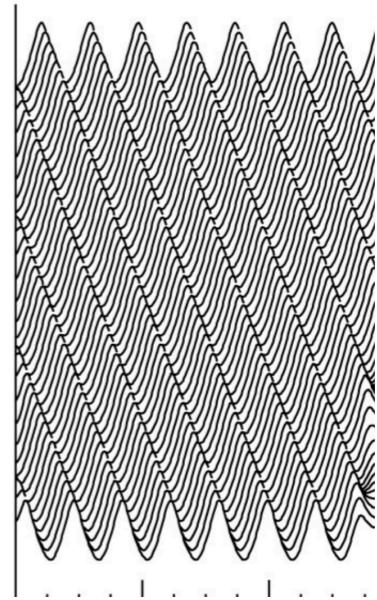
P. Guyenne, D. Nicholls (2007)

Alcances e importantes hallazgos del modelo W-B

🌊 Cálculo de Modos de oscilación Transversal y Longitudinales para dominios de fluido con sección transversal acotada. Comparación con resultados analíticos exactos



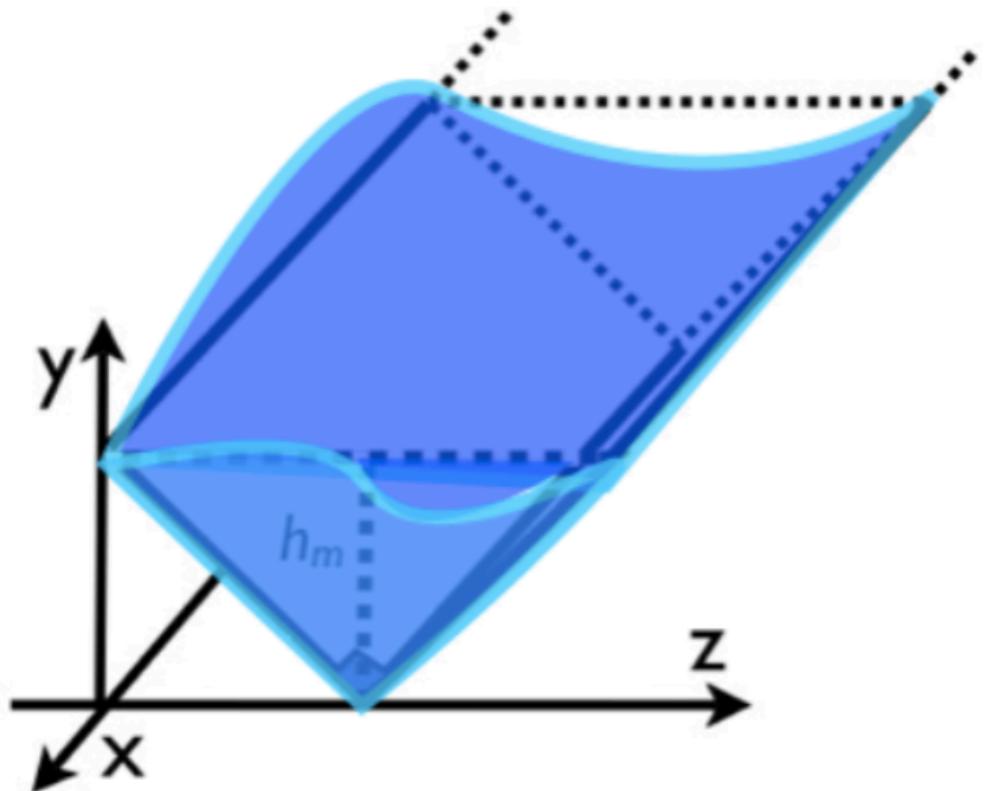
🌊 Cálculo de Modos Atrapados para dominios del fluido con sección transversal no acotada. Ondas 3D.



🌊 Medidas macroscópicas de las ondas completamente no lineales conocidas como "Undular Bores" en el contexto de ondas en agua. El mejor ajuste con las respectivas mediciones de DSW de las ecuaciones de Euler.

🌊 Modelo W-B captura el fenómeno de inestabilidad de Benjamin-Feir

Modos de oscilación transversal y longitudinales en canales con sección transversal constante y acotada

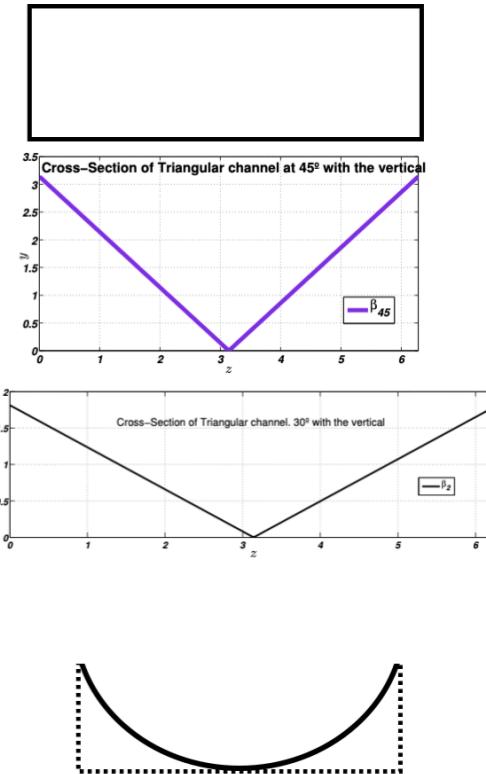


THERE ARE EXACT SOLUTIONS

Kirchhoff (1880)
Lamb (1932)

Greenhill (1887),
Macdonald (1893),
Packham (1980),
Groves (1994)

Evans, Linton (1993)



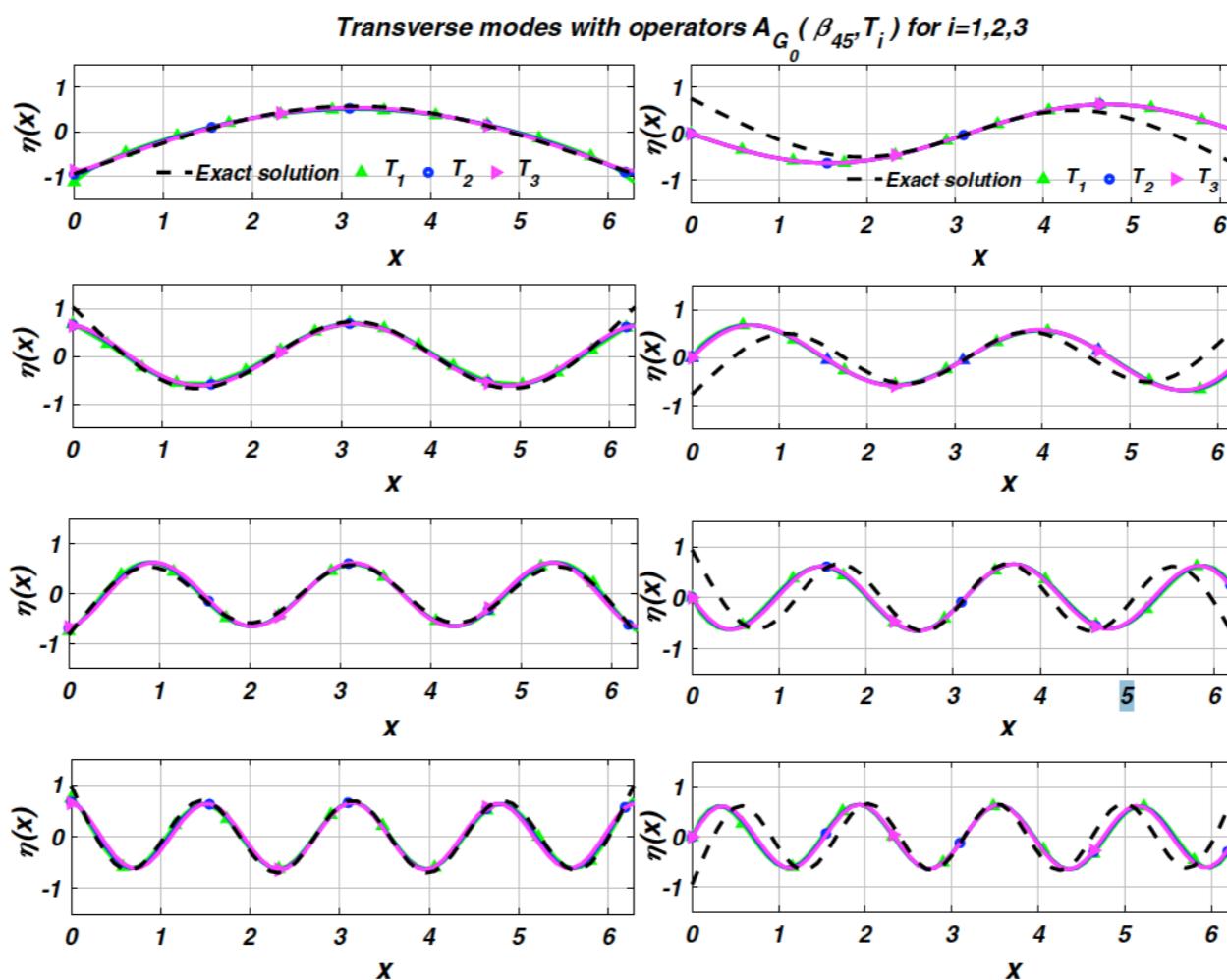
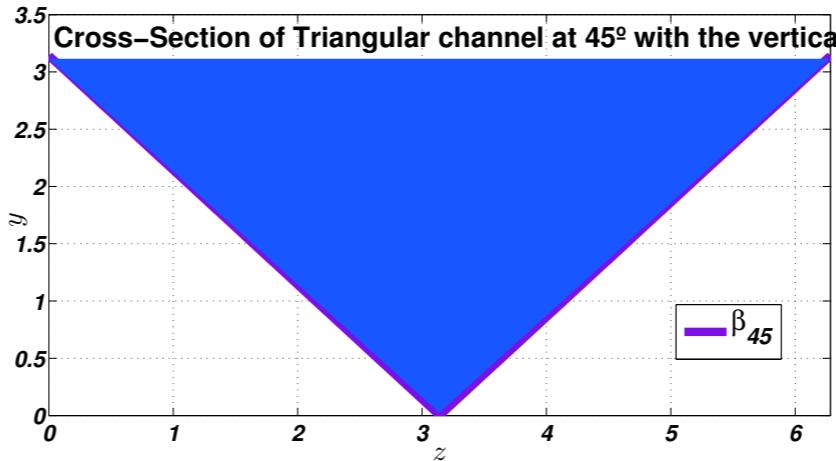
LINEARIZED EULER'S EQUATIONS

$$\begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & \mathcal{D} \\ \hline \varphi_{tt} + g\varphi_y = 0 & \Gamma_F \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \Gamma_B \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\psi = 0 \text{ at } \Omega, \\ \psi(z, y) = f \text{ at } \Omega \cap \Gamma_F, \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ at } \Omega \cap \Gamma_B \end{array} \right.$$

$$(G_0[f])(z) = \omega^2 f.$$

$$\mathcal{A}_{G_0}[f] = Sym(D \tanh(h(x)D))[f]$$



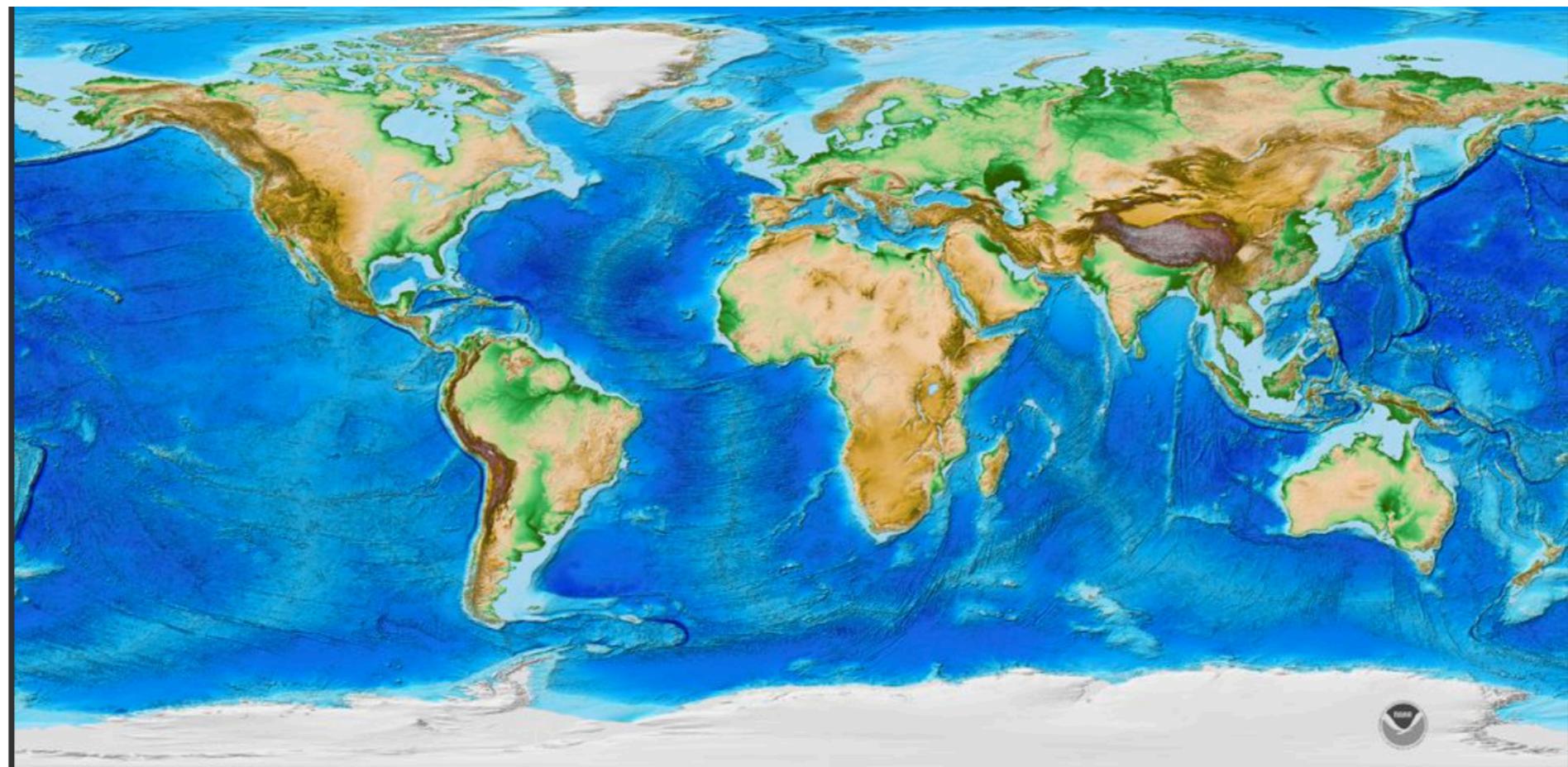
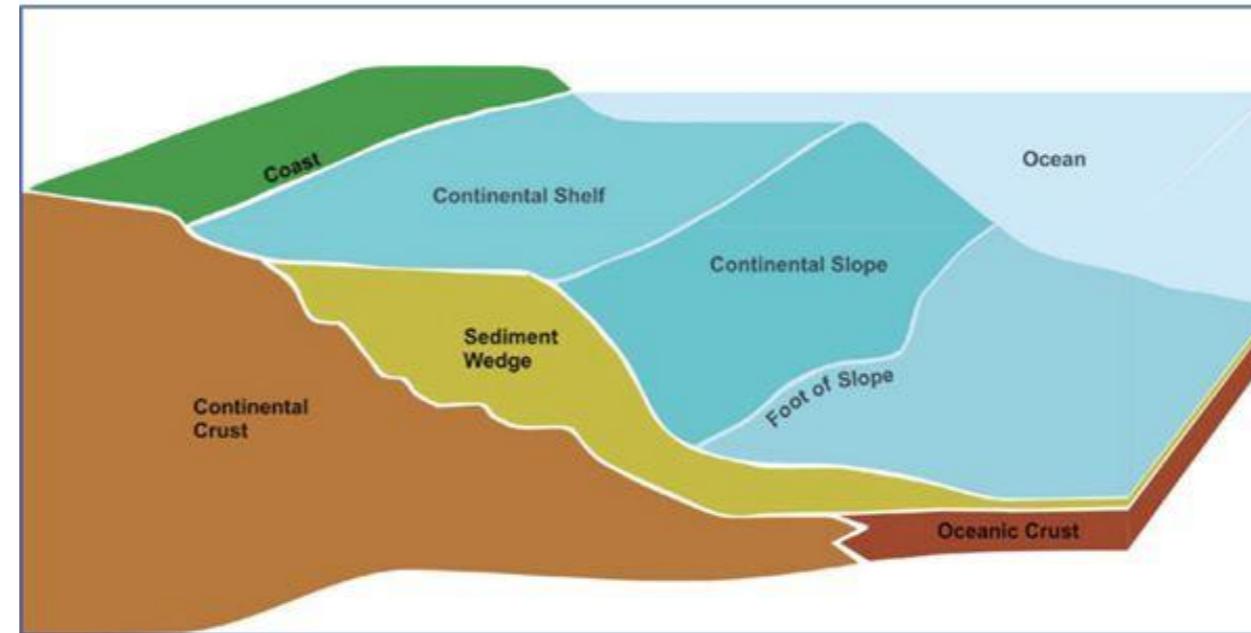
►R. M. Vargas-Magaña, P. Panayotaros, A. A. Minzoni
Linear Modes for Channels of Constant Cross-Section and
Approximate Dirichlet-Neumann Operators Water Waves (2019)



Modelo de ondas
en agua para areas
costeras.

Ondas seiches
en Lagos

Plataforma continental oceánica y talud

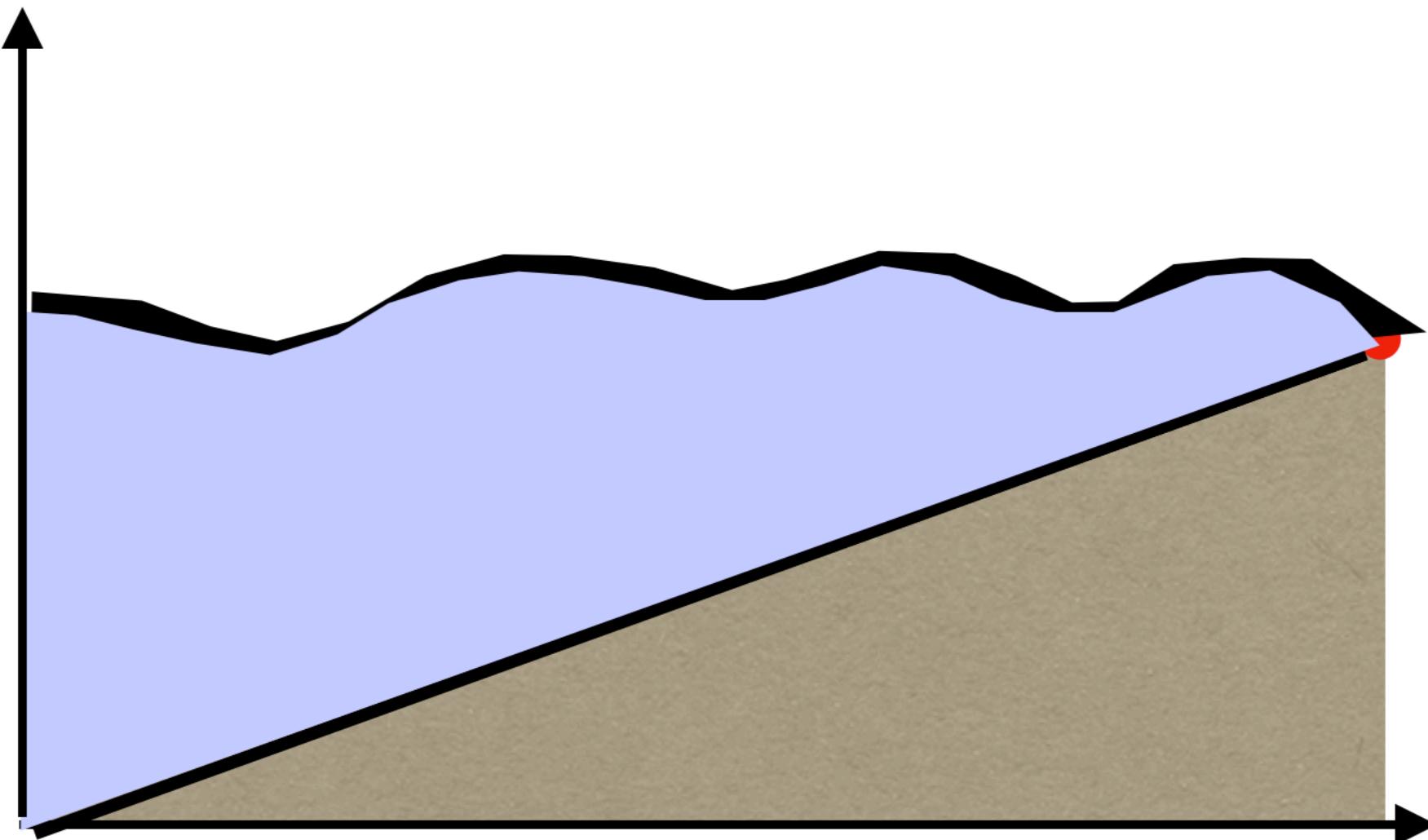


Mapa cortesía de NOAA: Amante, C. y B. W. Eakins,ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model: Procedures, Data Sources and Analysis. NOAA Technical Memorandum NESDIS NGDC-24, 19 pp, marzo de 2009.

Este mapa muestra datos topográficos y batimétricos, lo que nos permite ver las plataformas continentales que se extienden desde cada continente.



Modelo de propagación de ondas en dominios con planos inclinados.



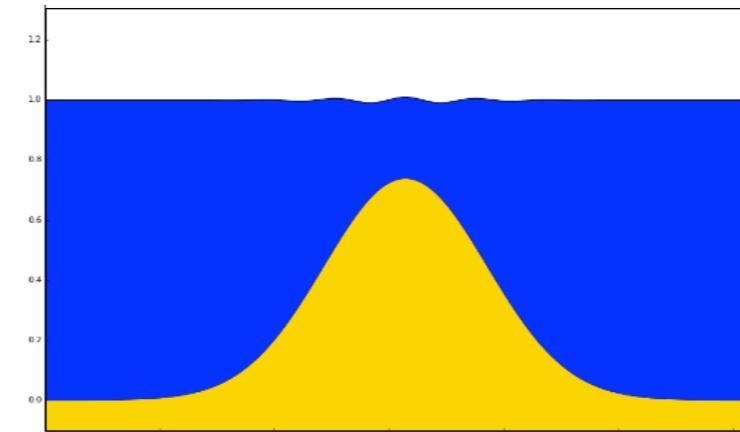
Desafío:

$$H_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\xi G_{\mathcal{A}}(\beta, \epsilon\eta) \xi + g\eta^2) dx$$
$$G_{\mathcal{A}} = Sym\left(\frac{D}{\sqrt{\epsilon}} \tanh(\sqrt{\epsilon}h(x)D)\right)$$

Profundidad Constante

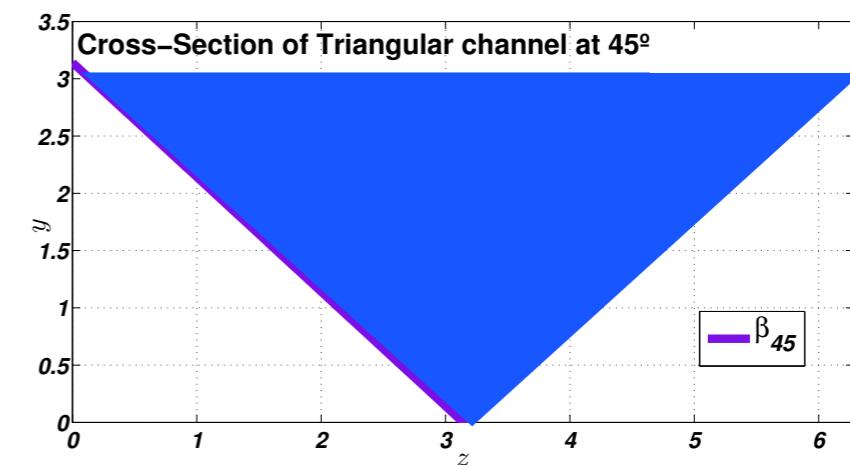


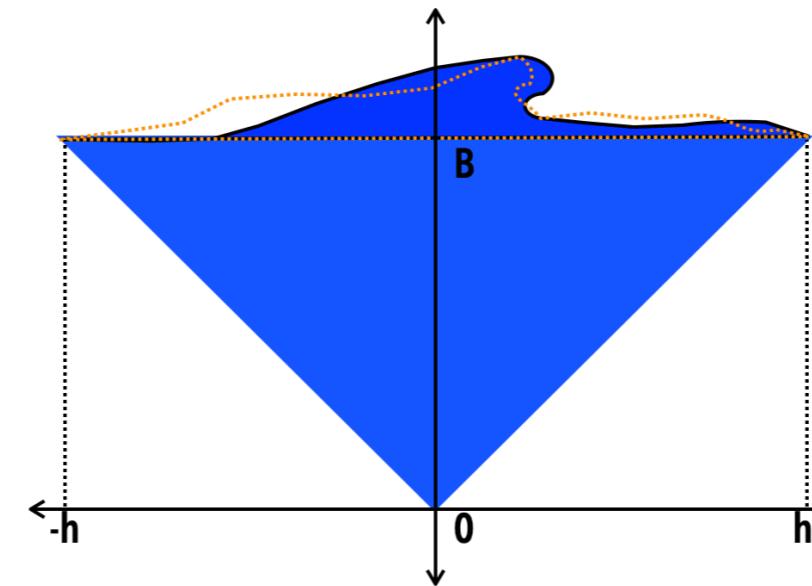
Grandes Variaciones en la Profundidad



Proyecto: la derivación de un modelo débilmente no lineal y su formulación en su forma espectral para dominios en donde la profundidad se hace cero

Planos inclinadas

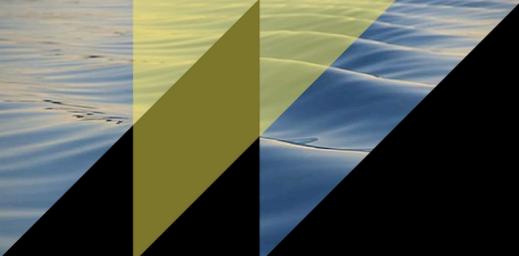




1. Parametrización de la superficie libre. $[X(s, t), Y(s, t)] = \mathcal{G}^\epsilon(s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad s \in [-h, h]$
 2. Resulta de aplicar un campo de velocidades de la superficie en reposo por un tiempo t . De tal forma que la curva está dada por la integración en el tiempo del campo de velocidades.
- $$\frac{dr}{d\tau} = \nabla V(r, t), \quad r \in \mathcal{W},$$
3. Y podemos aproximarla a primer orden por una sencilla regla de aproximación de Euler.
- $$\mathcal{G}^\epsilon(s, t) = [s, B] + \epsilon[\partial_x V([s, B], t), \partial_y V([s, B], t)] + O(\epsilon^2).$$
4. Las velocidades del problema están dadas por un potencial que es armónico, esto es, podemos expresarlas en términos de los modos normales del problema los cuales forman una base para el problema y satisfacen las condiciones del problema en este dominio triangular.

$$\phi(\cdot, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \Phi_n(\cdot)$$

Trabajo en colaboración con el **Dr. P. Panayotaros**. En proceso

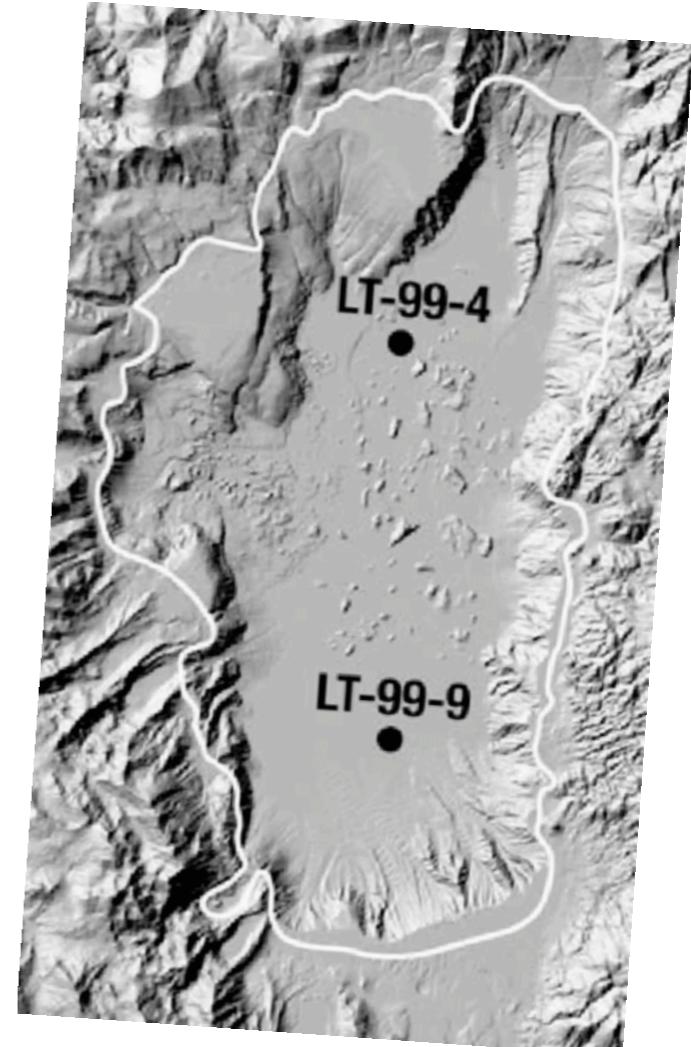
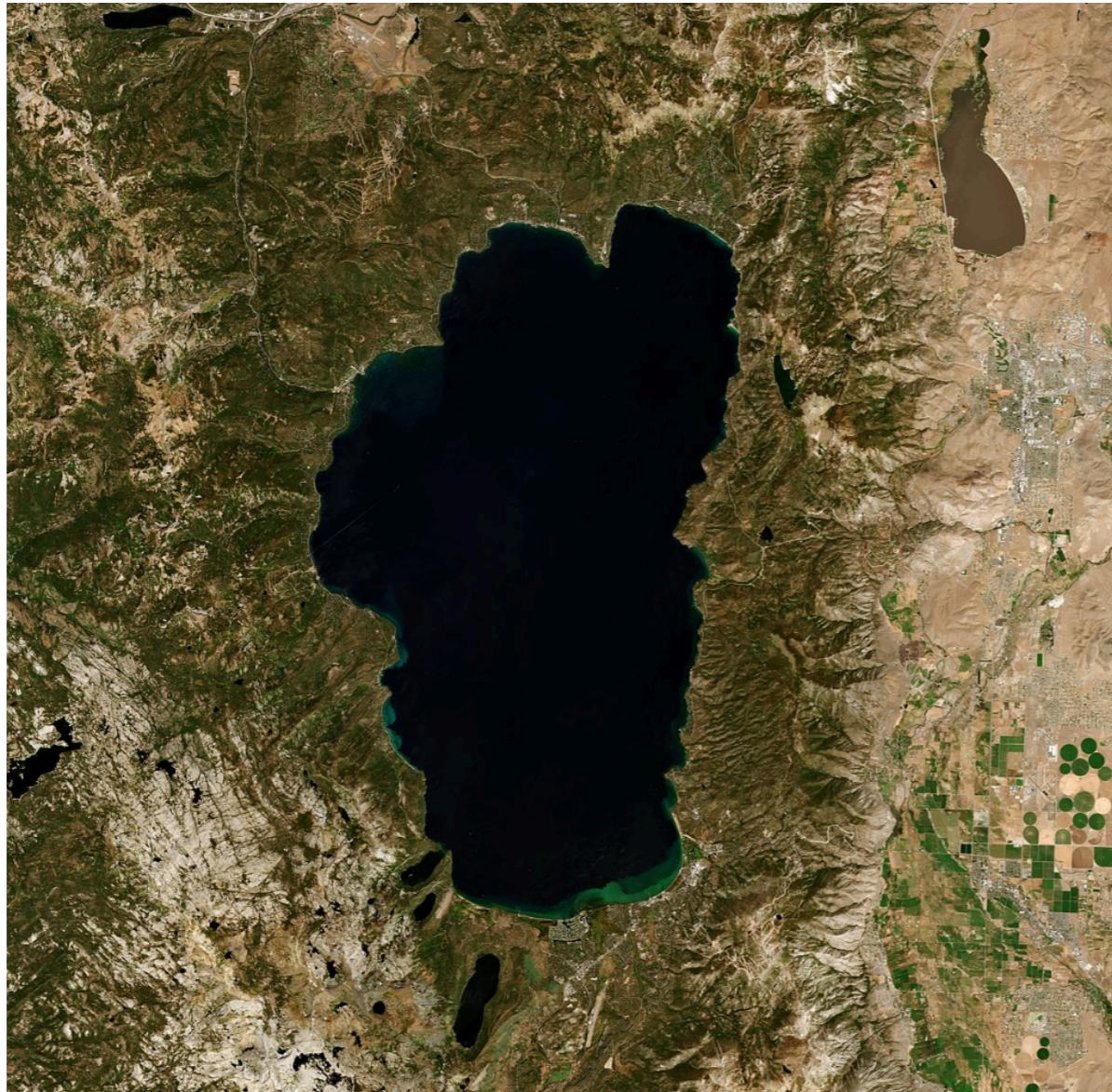


Desafíos

-  Modelo aproximado a primer orden adecuado para planos inclinados que permite el doblamiento de la onda de superficie.
-  Es preciso encontrar una representación explícita con pocos modos para la implementación numérica de las ecuaciones de evolución
-  Explorar la rotación de los modos normales para obtener un modelo adecuado para áreas costeras con inclinación arbitraria
-  Realizar pruebas experimentales de ondas tipo tsunami y contrastar con otros modelos de onda larga débilmente no lineales.



Lago Tahoe, Sierra Nevada



Los pequeños seiches rítmicos casi siempre están presentes en los lagos más grandes: los seiches del lago Tahoe ocurren cada 6-8 minutos y varían hasta 7 pulgadas de alto en promedio.



Modos atrapados para dominios de fluido con sección transversal no acotada

Ecuaciones Lineales de Euler

$$\Delta\varphi = 0 \quad \mathcal{D}$$

$$\varphi_{tt} + g\varphi_y = 0 \quad \Gamma_F$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_B$$

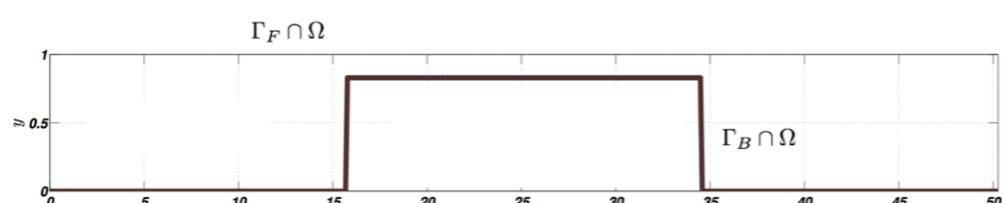
$$\varphi(x, y, z, t) = \psi(y, z) \cos(\kappa x - \omega t)$$

LONGITUDINAL MODES

$$\Delta\psi = \kappa^2\psi \quad \mathcal{D} \cap \Omega$$

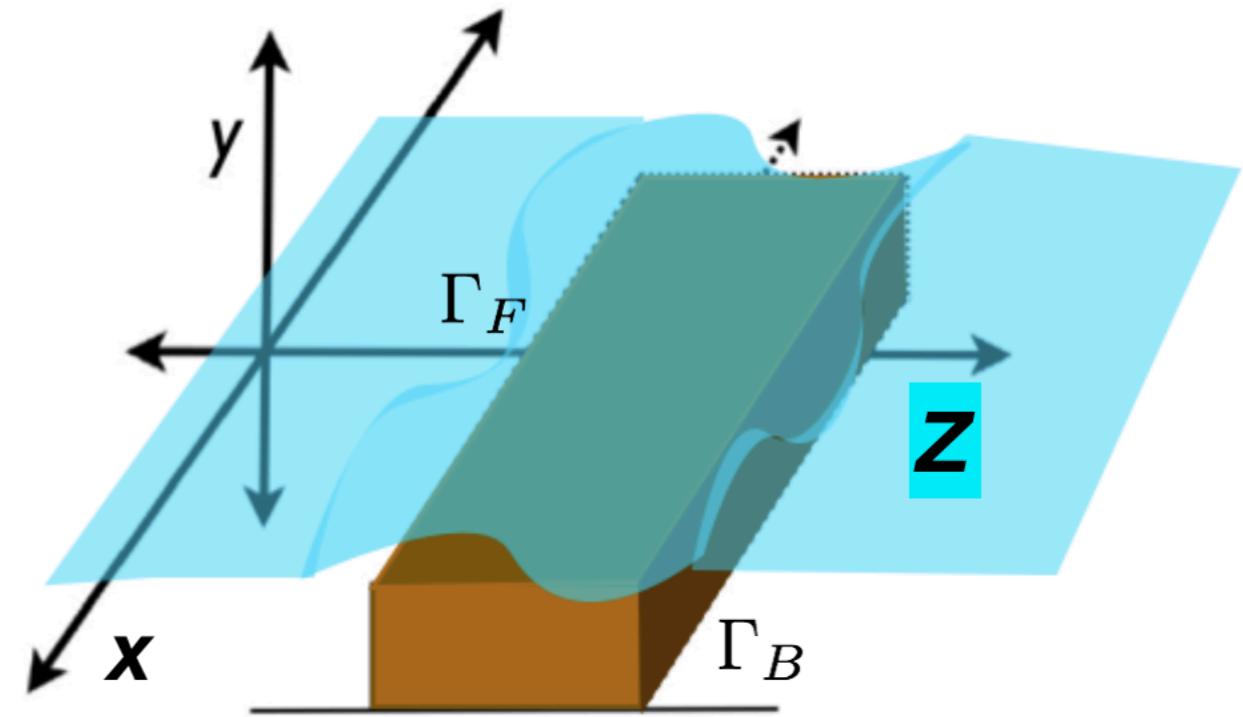
$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad \Omega \cap \Gamma_B$$

$$-\omega^2\psi + g\psi_y = 0 \quad \Omega \cap \Gamma_F$$



We introduce the D-N operator

$$[G]f = \frac{\partial\psi(z,y)}{\partial y} \Big|_{y=h_M}$$



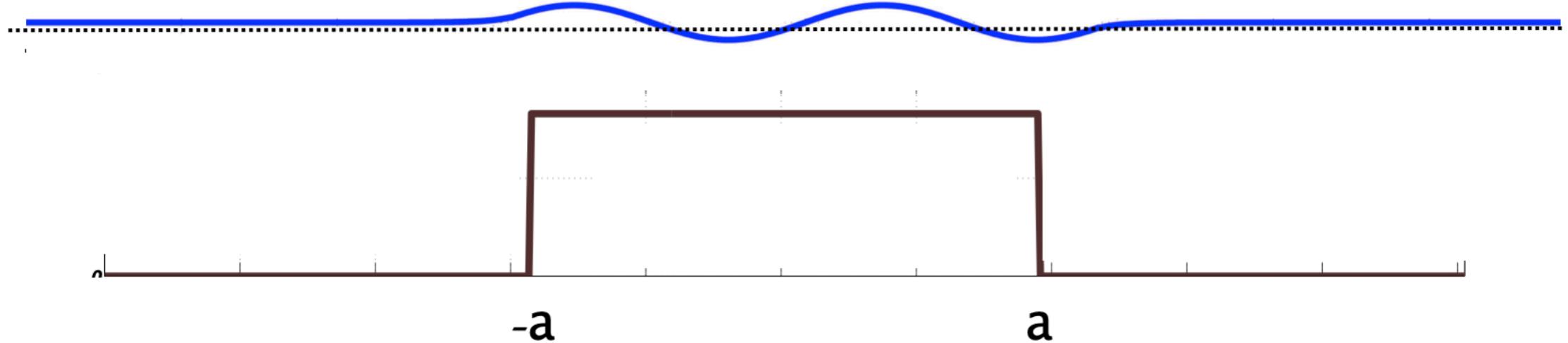
$$G_{0,\kappa}(\beta)f = [\sqrt{\kappa^2 + D^2} \tanh(\textcolor{red}{h}_0 \sqrt{\kappa^2 + D^2})]f$$

$$\mathcal{A}_{G_{0,\kappa}}(\beta)f = [\sqrt{\kappa^2 + D^2} \tanh(\textcolor{red}{h}(x) \sqrt{\kappa^2 + D^2})]f$$

$$D = -i\partial_x$$

k fija

Modos atrapados son modos Longitudinales que decaen al infinito





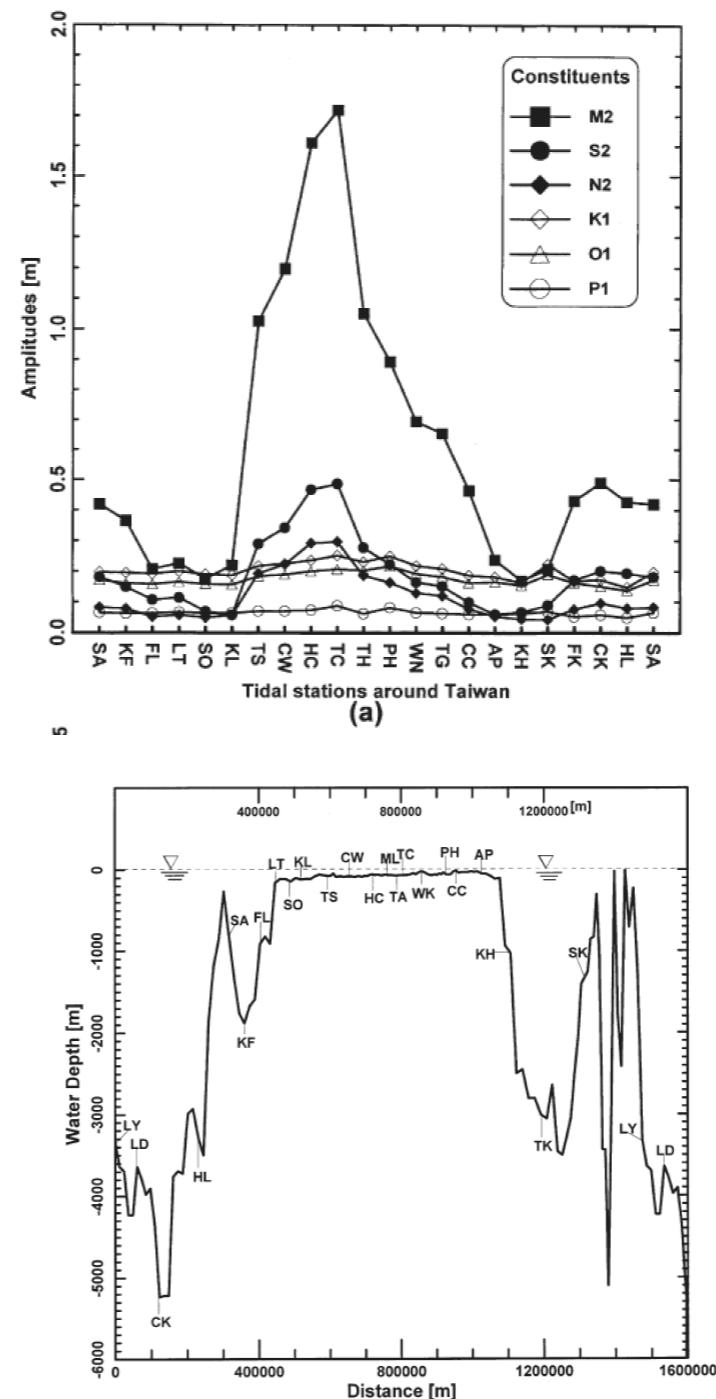
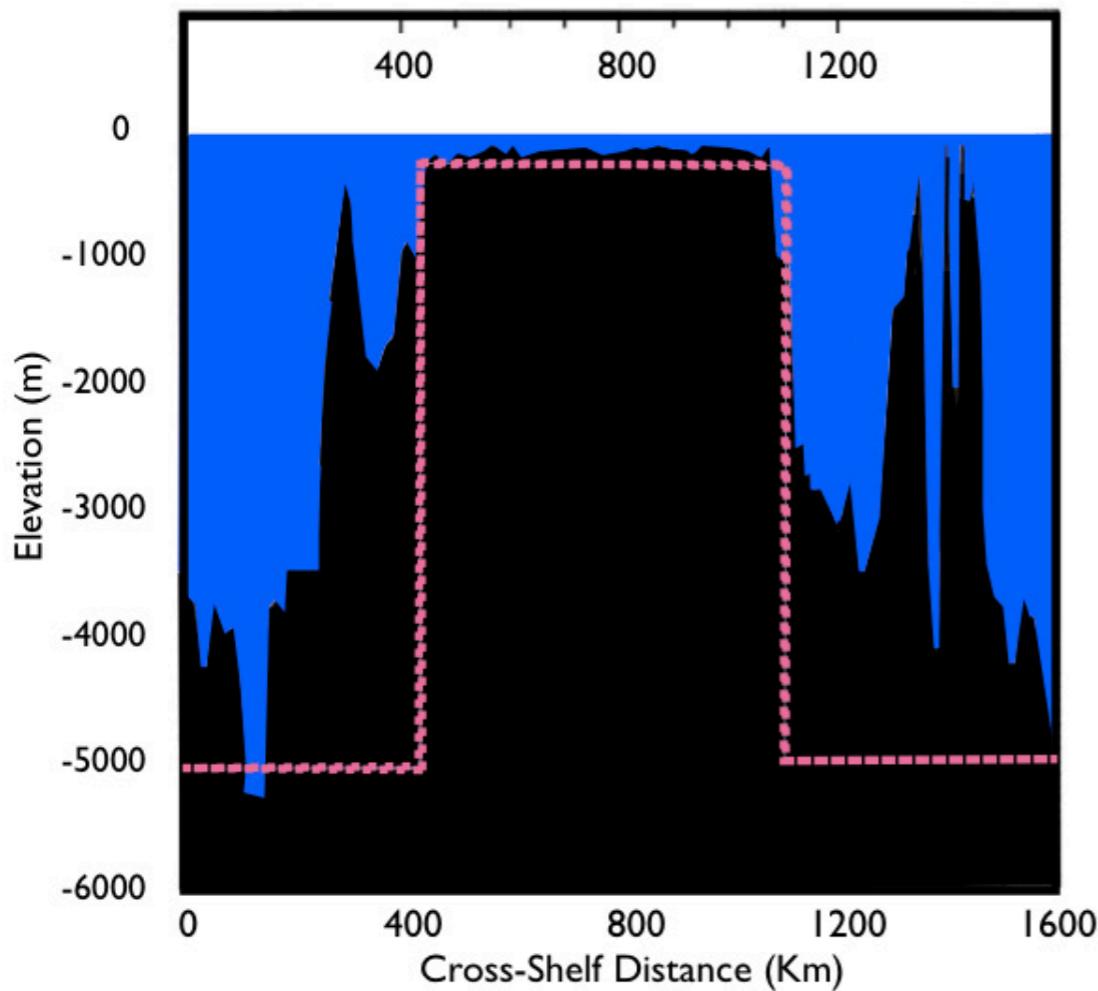
Modos atrapados
en plataformas
continentales

Ondas Guiadas



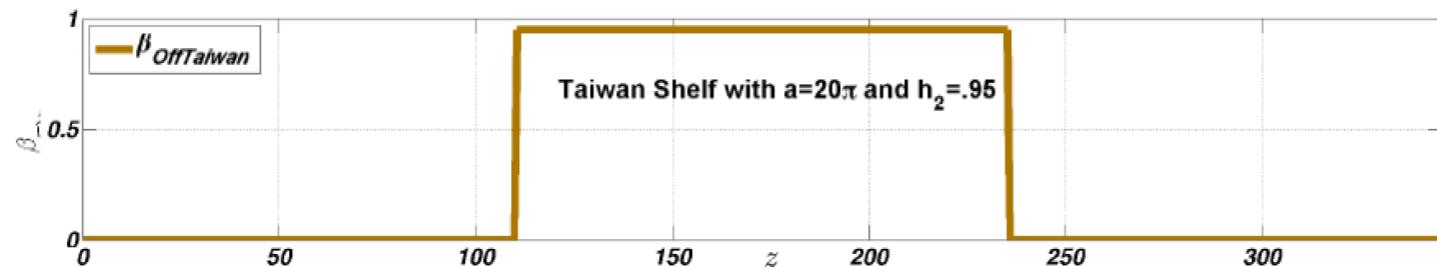
Modos atrapados para dominios de fluido con sección transversal no acotada

Plataforma continental de la Costa Oeste de Taiwan



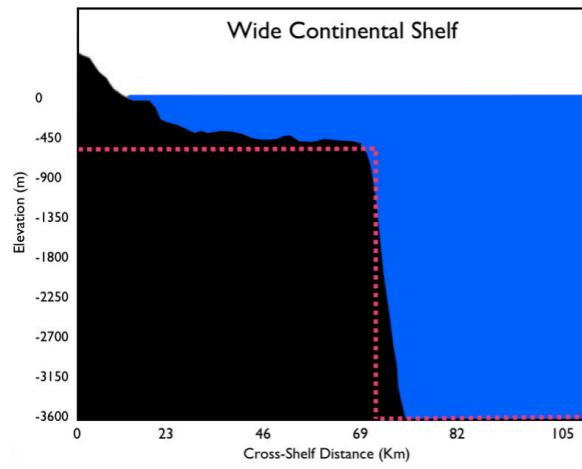
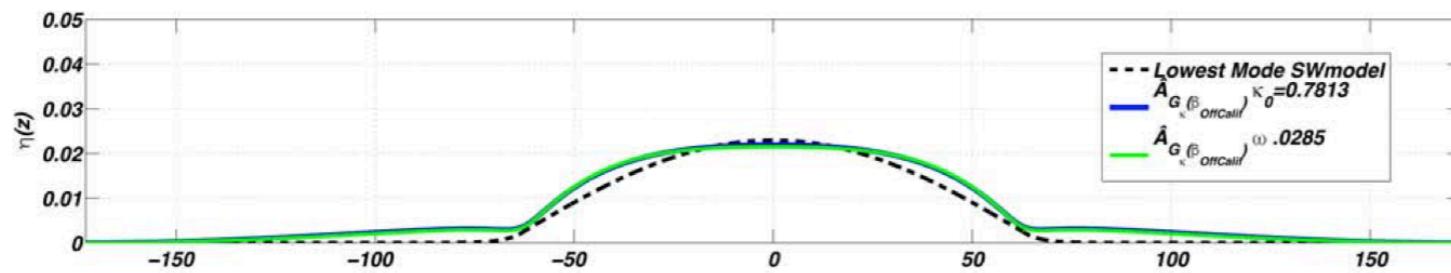
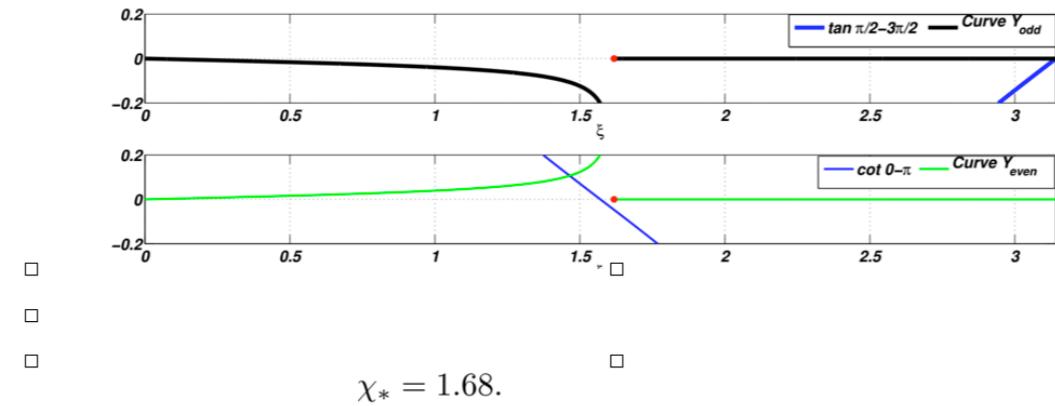
Utilizaron datos de campo que muestran claramente que en la parte superior de esta topografía pueden detectar un aumento en la amplitud de onda de una onda específica con una frecuencia fija.
-Que esta amplitud resuena con las mareas se acercan a un topográfico.

Detectores de corriente entorno a Taiwan. Ming-Chung Le et al.

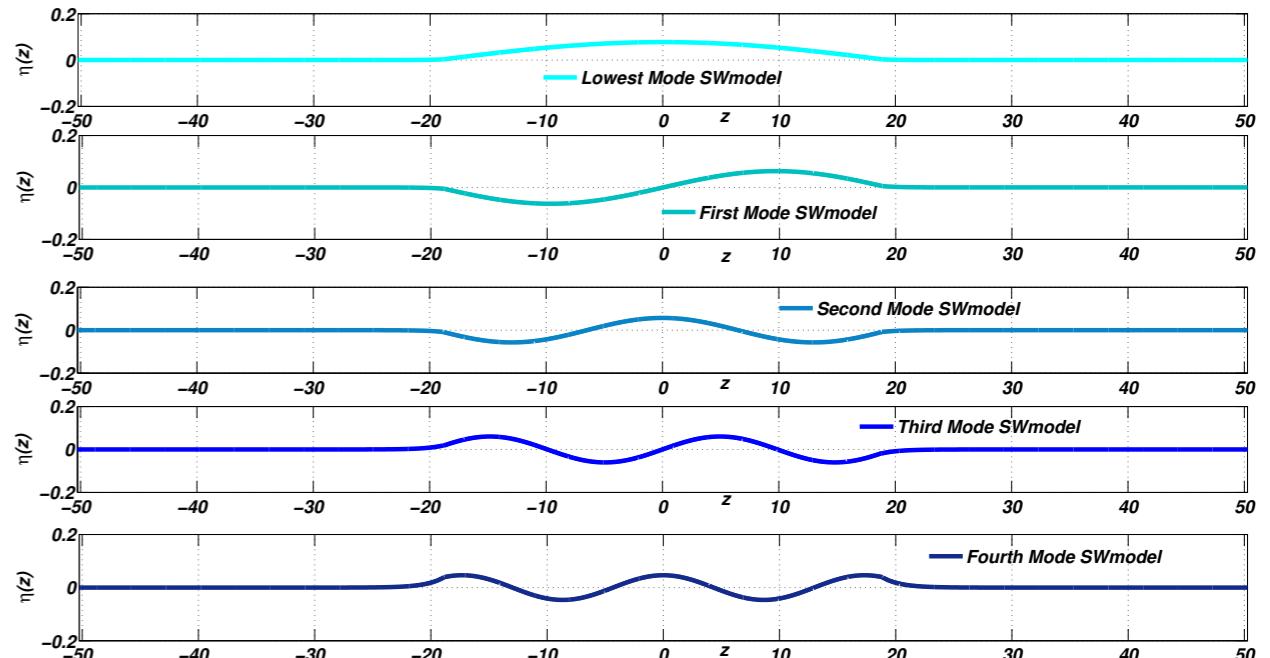
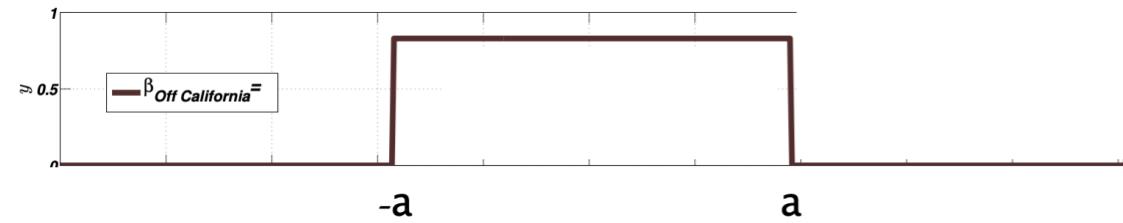


$$\begin{aligned} h_2 &= 80m \\ h_1 &= 5000m \\ 2a &= 650km \end{aligned}$$

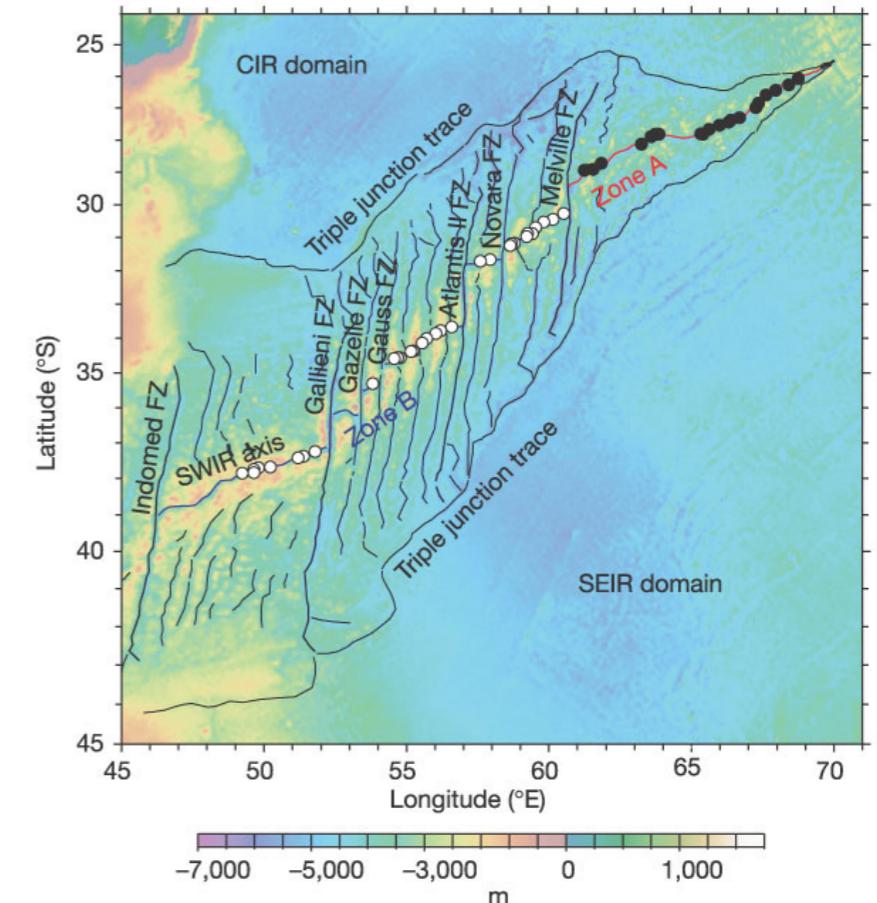
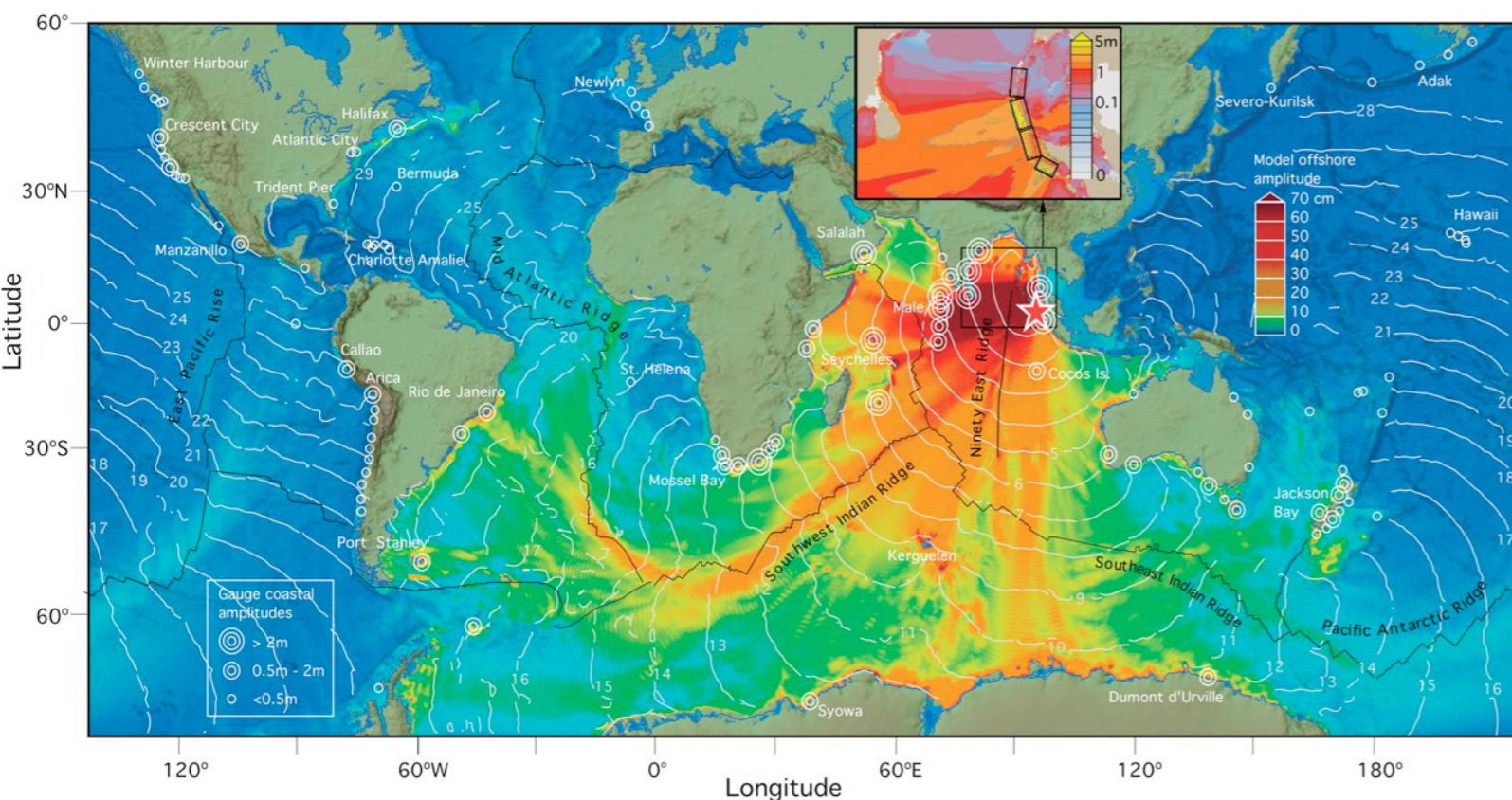
Figure 21: Taiwan shelf, see (4.28).



$$\omega = .1582$$



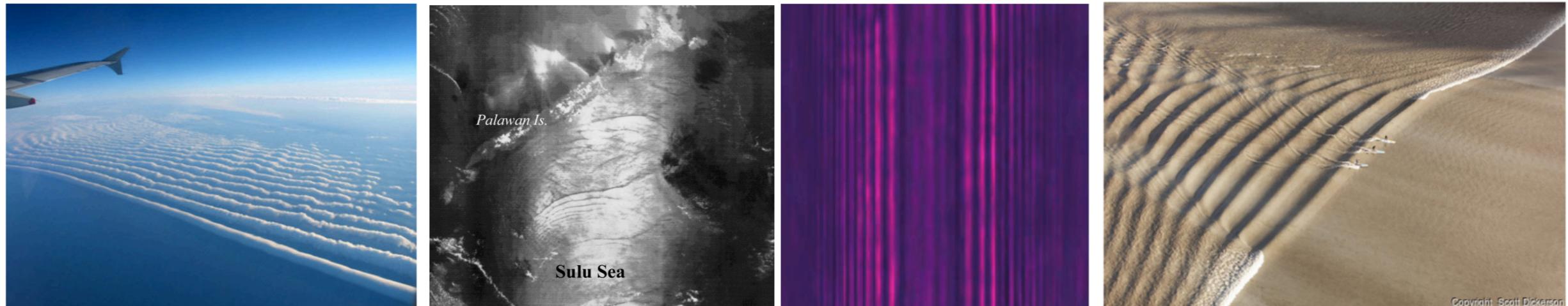
Ondas guiadas



Mapa topográfico de la cordillera del suroeste de la India (SWIR)

Extraído de: A discontinuity in mantle composition beneath the Southwest Indian Ridge
Christine Meyzen, Michael J Toplis, Eric Humler et al.

Ondas de choque dispersivas regidas por ecuaciones bidireccionales de Whitham-Boussinesq VS Euler



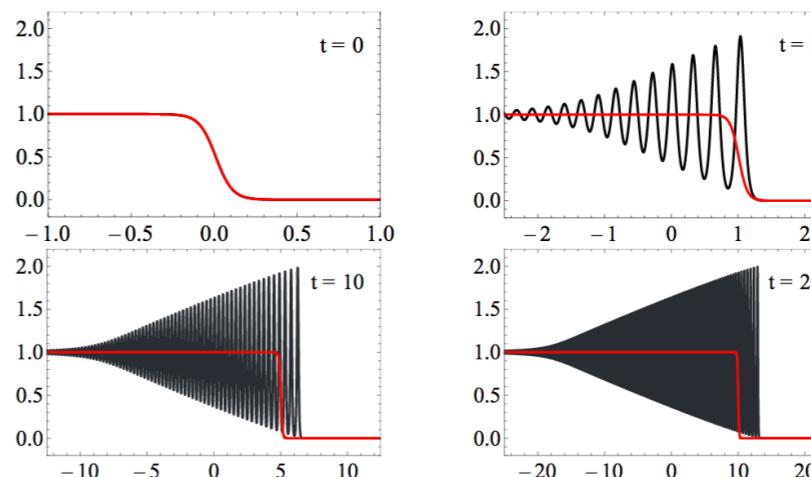
En la atmósfera a) Nube de gloria por la mañana. b) Solitones oceánicos internos c) Imagen del conjunto de salida de un cristal foto refractivo desenfocado. d) Salto oscilatorio en un río en Turnagain Arm, Alaska.

¿Qué es una onda de choque dispersiva?

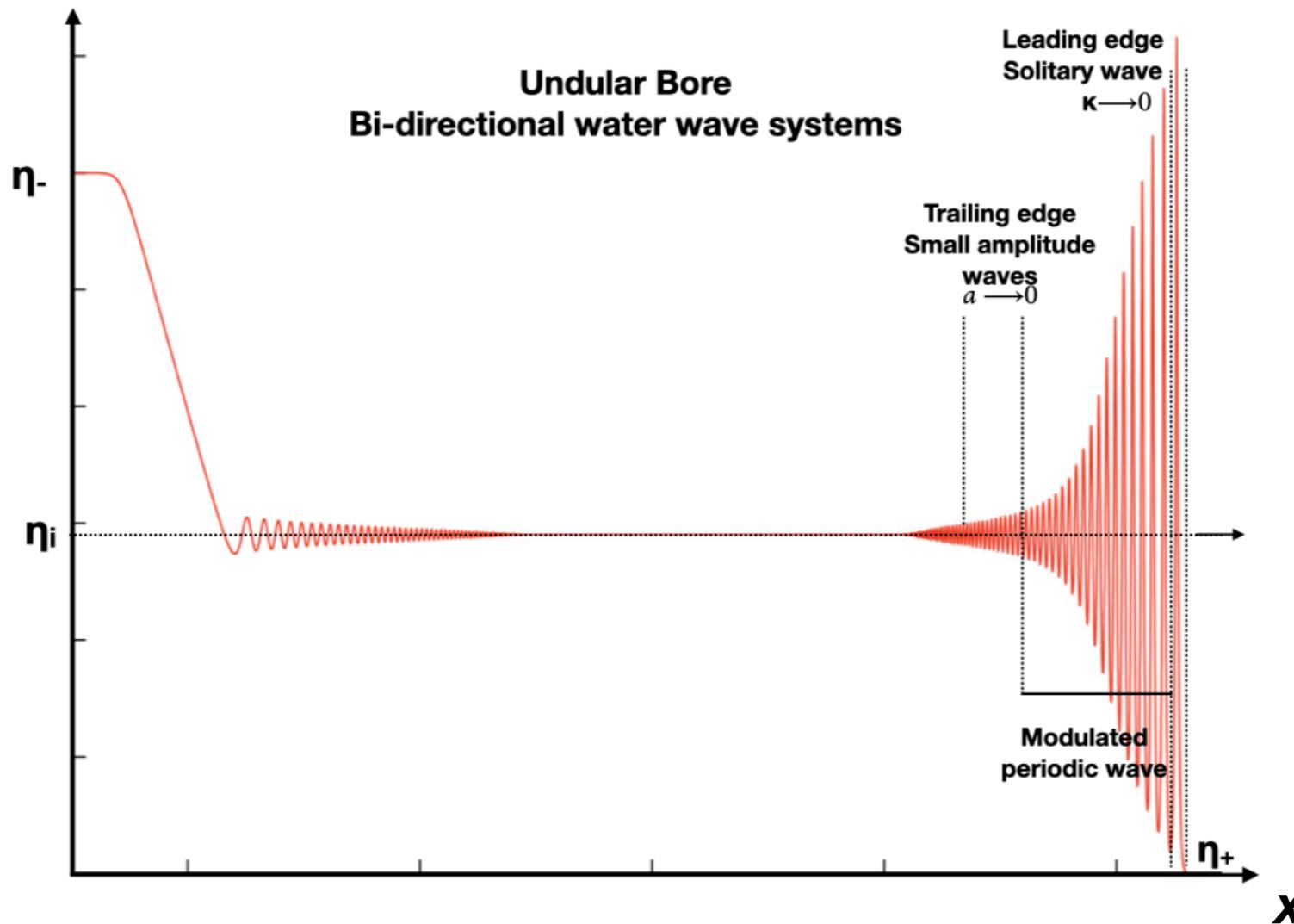
Un DSW es la resolución dispersiva de un frente de onda pronunciado.

$$u_t + uu_x = 0$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$



Anatomía de un DSW y cantidades macroscópicas



Por medio del método de G. El y colaboradores es posible medir estas cantidades macroscópicas de las ondas de choque dispersivas.

- ▶ Amplitud de la onda solitaria líder
- ▶ Velocidad de la onda solitaria líder
- ▶ El número de onda del tren de ondas armónico



Métodos analíticos para determinar las propiedades macroscópicas las ondas de choque dispersivas

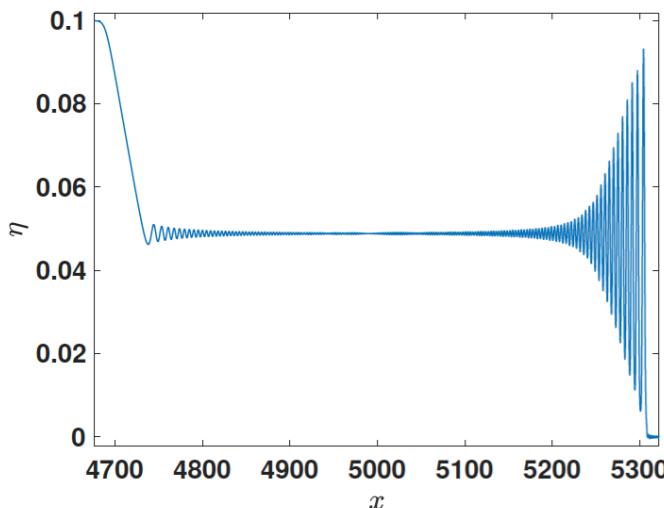
- ◆ Teoría de modulación
- ◆ **Método de Ajuste de Ondas de choque dispersivas**

- Las ecuaciones de modulación son estrictamente hiperbólicas, no lineales y de **ellas pueden plantearse sistemas reducidos para límites de onda corta** (ondas solitarias) y lineales (límite de tren de ondas armónico).
- La **teoría** matemática existente para medir analíticamente estas cantidades es válida para cierto régimen físico y no se había probado su validez en sistemas completamente no lineales.

Modelos de ondas en agua débilmente no lineales VS Completamente no lineales

Modelo Boussinesq Estándar:

$$\begin{aligned}\eta_t &= -u_x - (\eta u)_x, \\ u_t &= -uu_x - \eta_x - \frac{1}{3}\eta_{xxx}.\end{aligned}$$



Esquema de descomposición en el tiempo que resuelve a un tiempo la parte lineal y luego la parte no lineal de la ecuación.

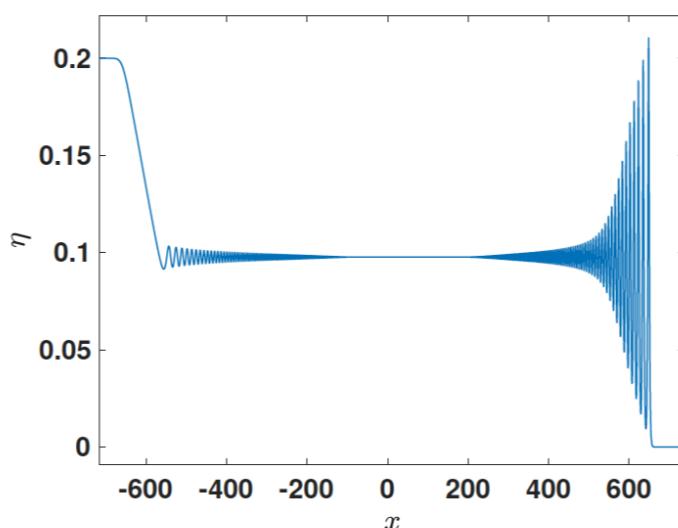
El esquema numérico es pseudo-espectral y la integración en el tiempo mediante un método Runge Kutta

Euler Equations:

Esquema basado en la formulación Hamiltoniana del problema de ondas de agua. Es un esquema pseudo-espectral y contempla 3 términos de la expansión de este operador D-N y es mediante filtros de las frecuencias más altas que logramos evitar las inestabilidades numéricas relativas a las derivadas de orden mayor a 2 que aparecen en los términos recursivos de la expansión.

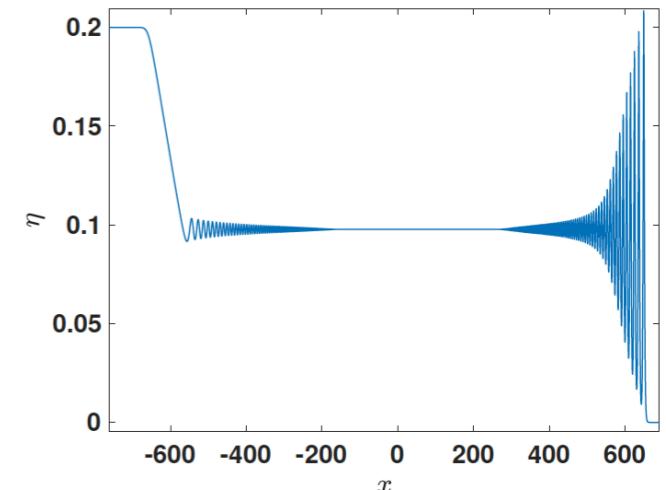
Modelo Boussinesq con relación de dispersion completa:

$$\begin{aligned}\eta_t &= -u_x - (\eta u)_x, \\ u_t &= -uu_x - \partial_x \left(\left[\frac{\tanh D}{D} \right] \eta \right)\end{aligned}$$

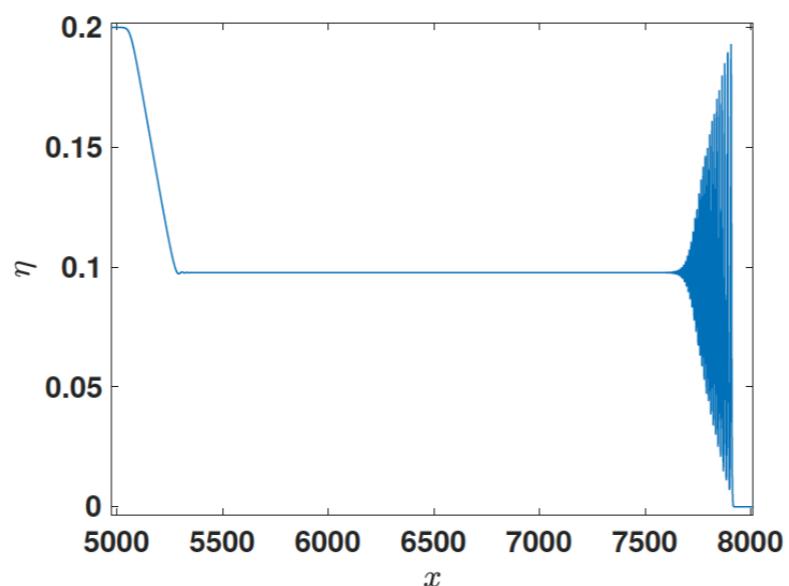


Modelo Whitham-Boussinesq:

$$\begin{aligned}\eta_t &= -\partial_x \left(\left[\frac{\tanh D}{D} \right] u \right) - (\eta u)_x \\ u_t &= -\eta_x - uu_x.\end{aligned}$$

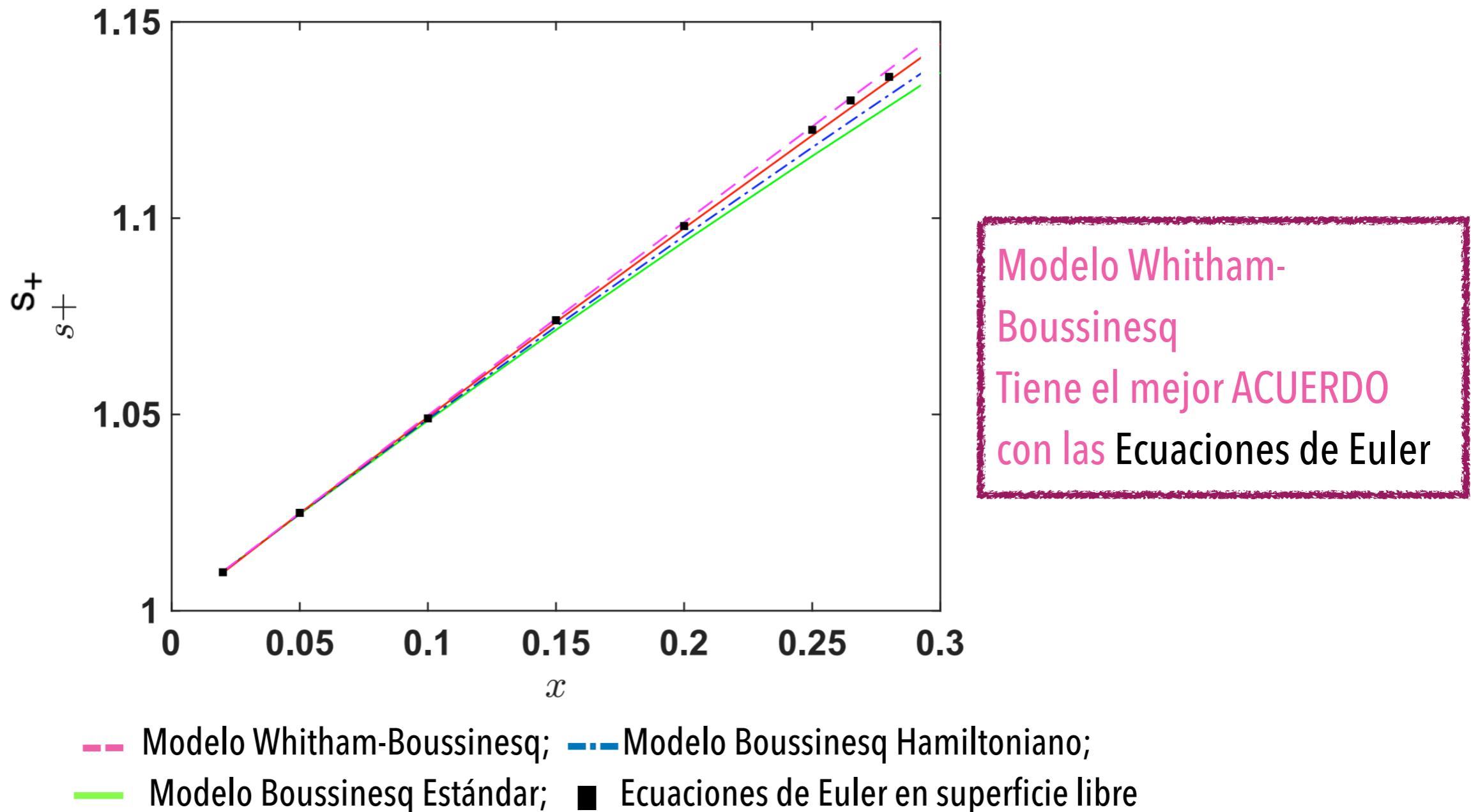


Esquema pseudo-espectral basado. Integración en el tiempo por un método Runge-Kutta de orden 4 dividido en el tiempo



► **R. M. Vargas-Magaña**, N. Smyth and T. Marchant
Numerical and analytical study of undular bores governed
by the full water wave equations and bi-directional
Whitham-Boussinesq equations **IN PREP 2020**

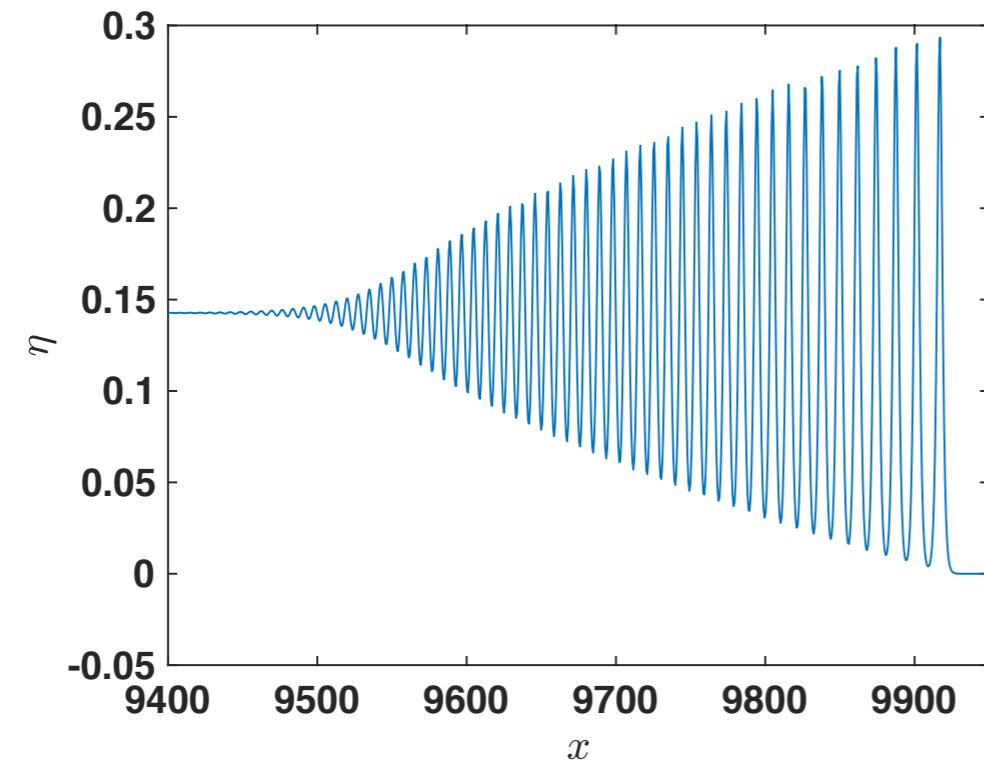
Velocidad de la onda solitaria líder del DSW para distintos modelos débilmente no lineales y las ecuaciones completas de Euler



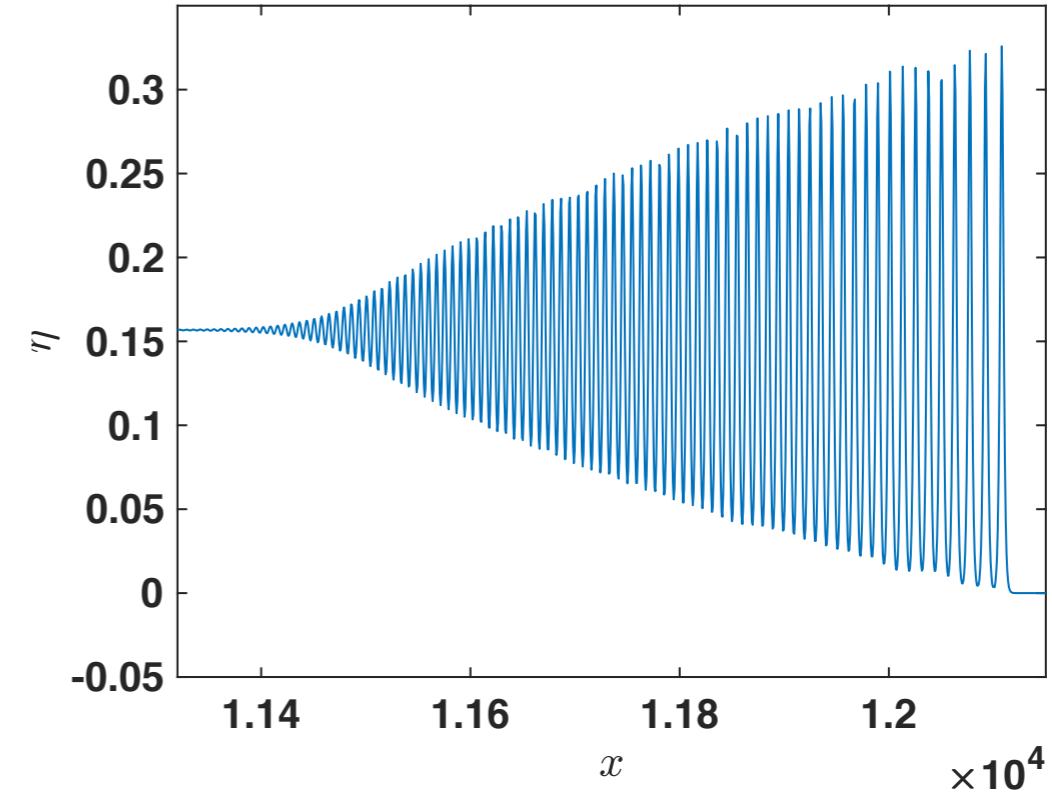
► R. M. Vargas-Magaña, N. Smyth and T. Marchant Numerical and analytical study of undular bores governed by the full water wave equations and bi-directional Whitham-Boussinesq equations **IN PREP 2020**



Onda de choque dispersiva de las ecuaciones de Euler hasta el tiempo t=1700



Salto inicial 0.295

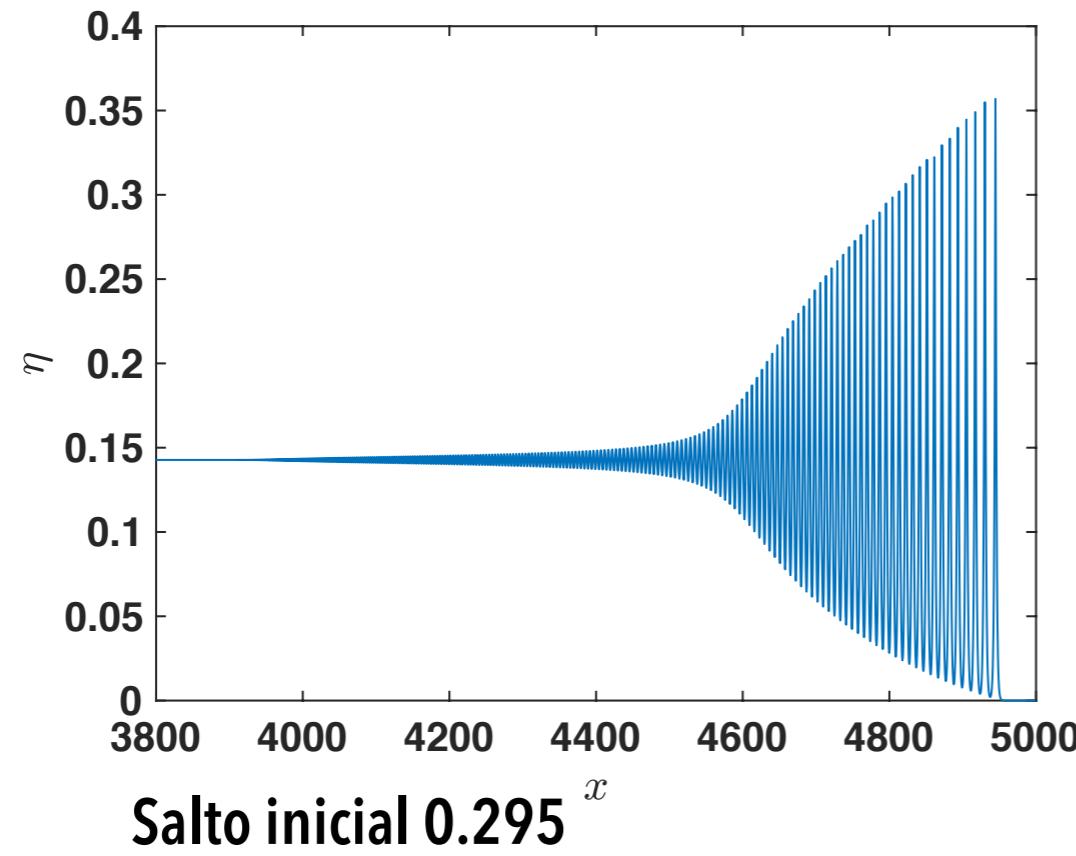


Salto inicial 0.315

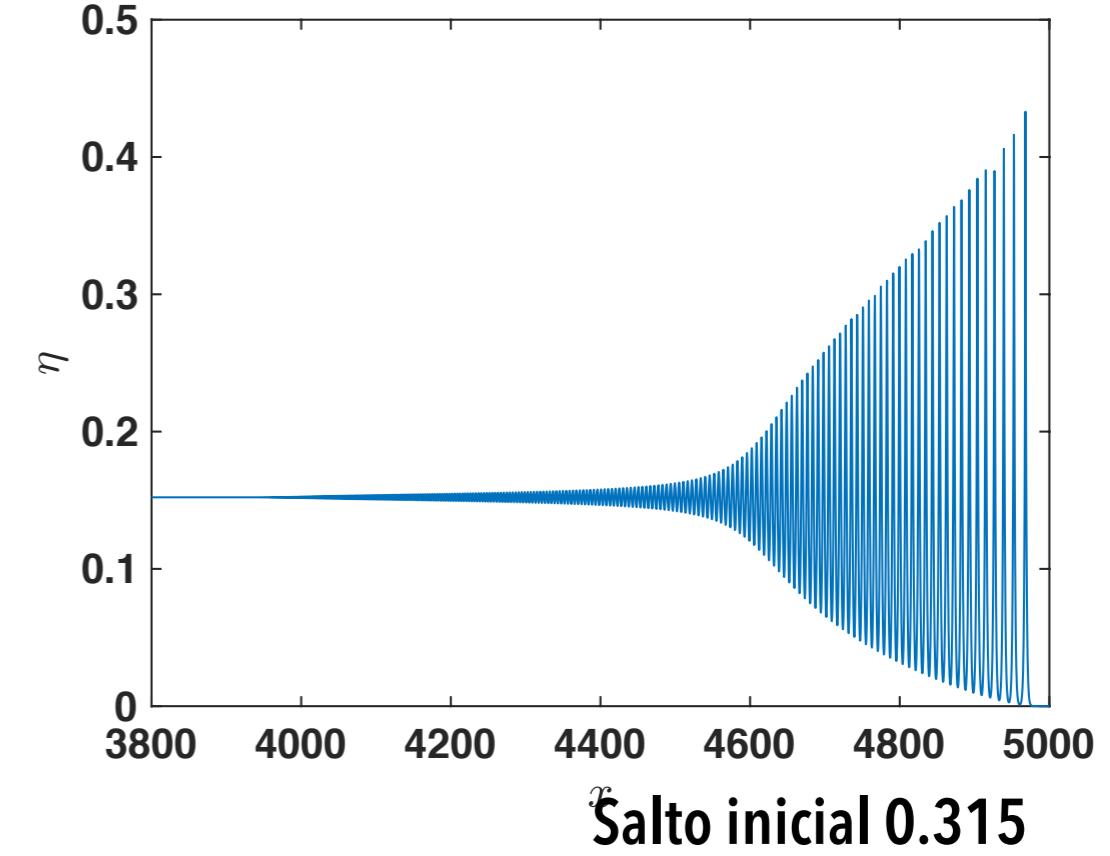
El estudio del modelo Whitham-Boussinesq que considera la relación de dispersión completa captura los efectos de onda corta lo cual fue fundamental para obtener la inestabilidad de Benjamin-Feir que se observa en las Ecuaciones de Euler para evolución larga de trenes de ondas lineales

► **R. M. Vargas-Magaña**, N. Smyth and T. Marchant Numerical and analytical study of undular bores governed by the full water wave equations and bi-directional Whitham-Boussinesq equations **IN PREP 2020**

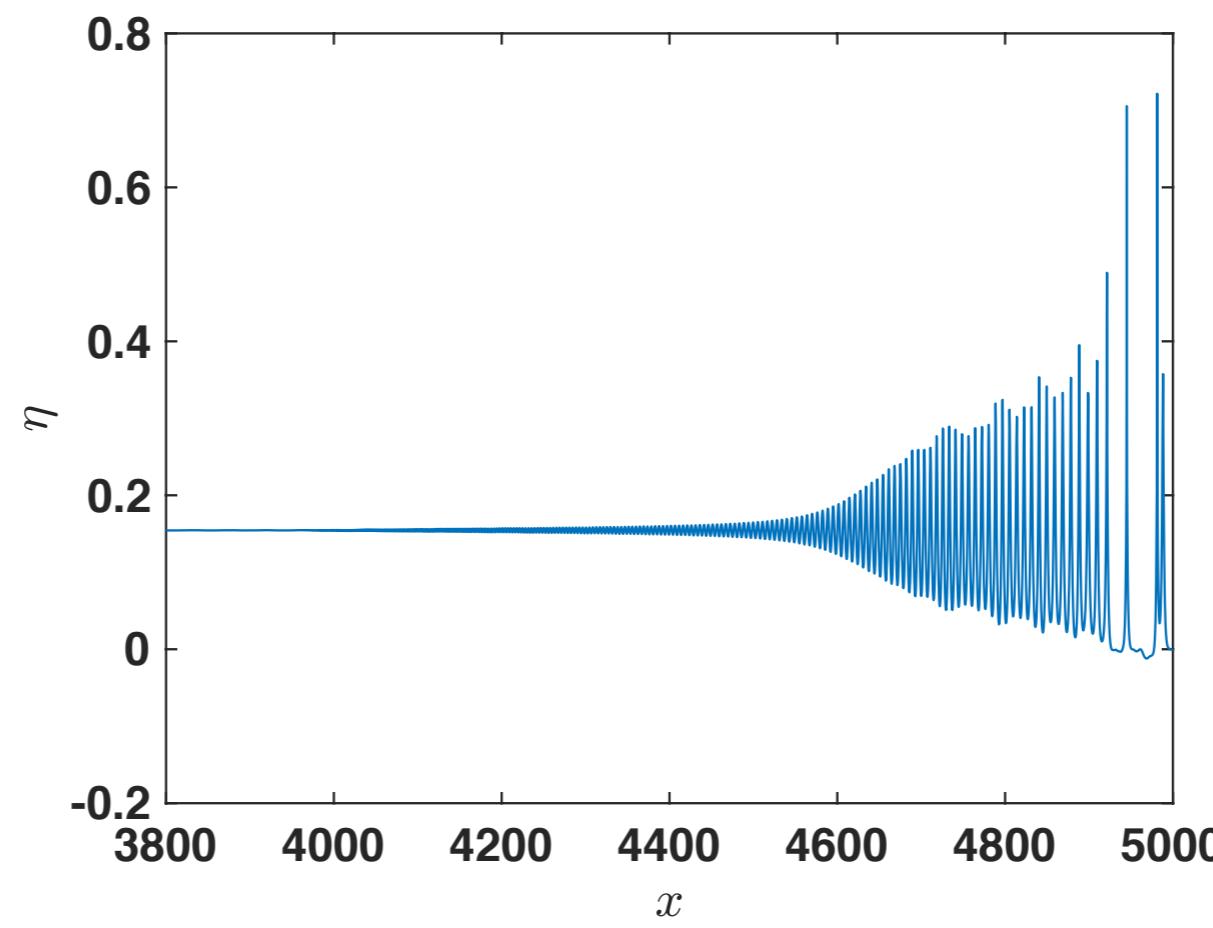
RESULTADOS



Salto inicial 0.295



Salto inicial 0.315



Salto inicial 0.32

DSW en modelo
W-B con tensión
superficial



Whitham-Boussinesq con tensión superficial

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \eta u + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tanh D}{D} [1 + \alpha D^2] u &= 0, \quad \alpha = \frac{T}{\rho}.\end{aligned}$$

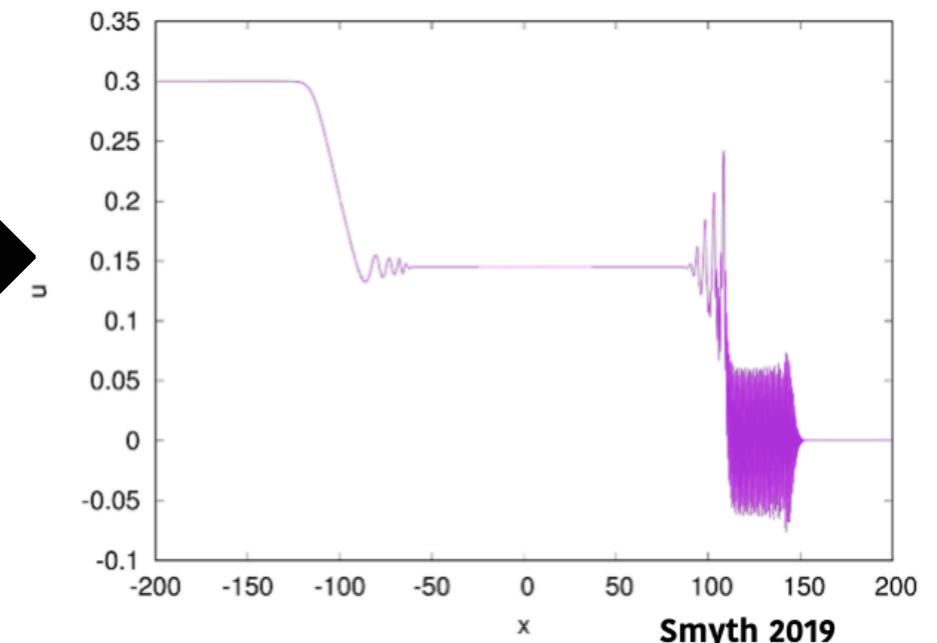
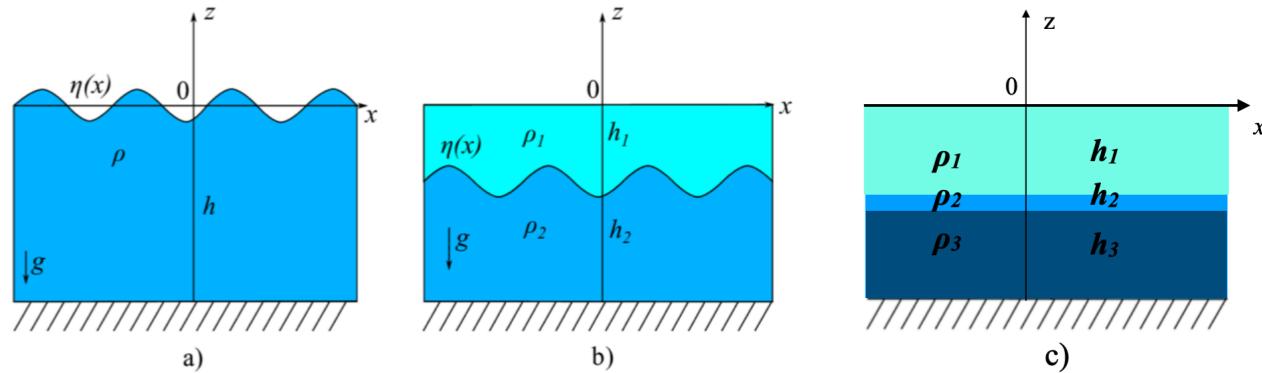


Fig. Undular bore del modelo Whitham-Boussinesq con tensión superficial y fondo plano $T=0$ and $u_0=0$.



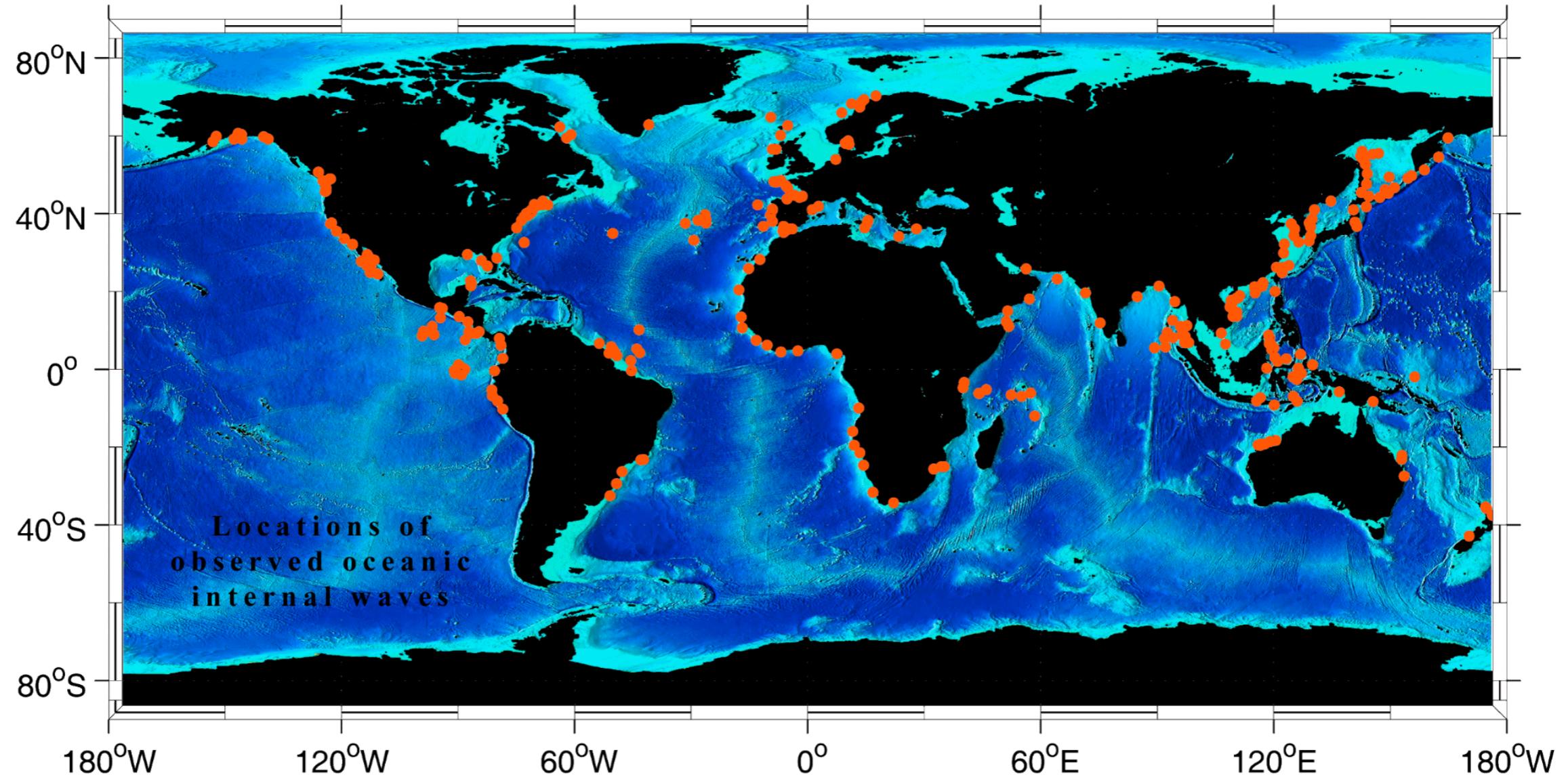
Implementación de modelo tipo **Whitham-Boussinesq**

para fluidos
estratificados



- Derivación de modelo tipo "Whitham-Boussinesq" para la propagación de ondas internas en la interfaz entre dos capas de fluidos inmiscibles de diferentes densidades, bajo el supuesto de tapa rígida y con fondo plano.

Regiones del mundo donde se han observado manifestaciones de ondas oceánicas internas

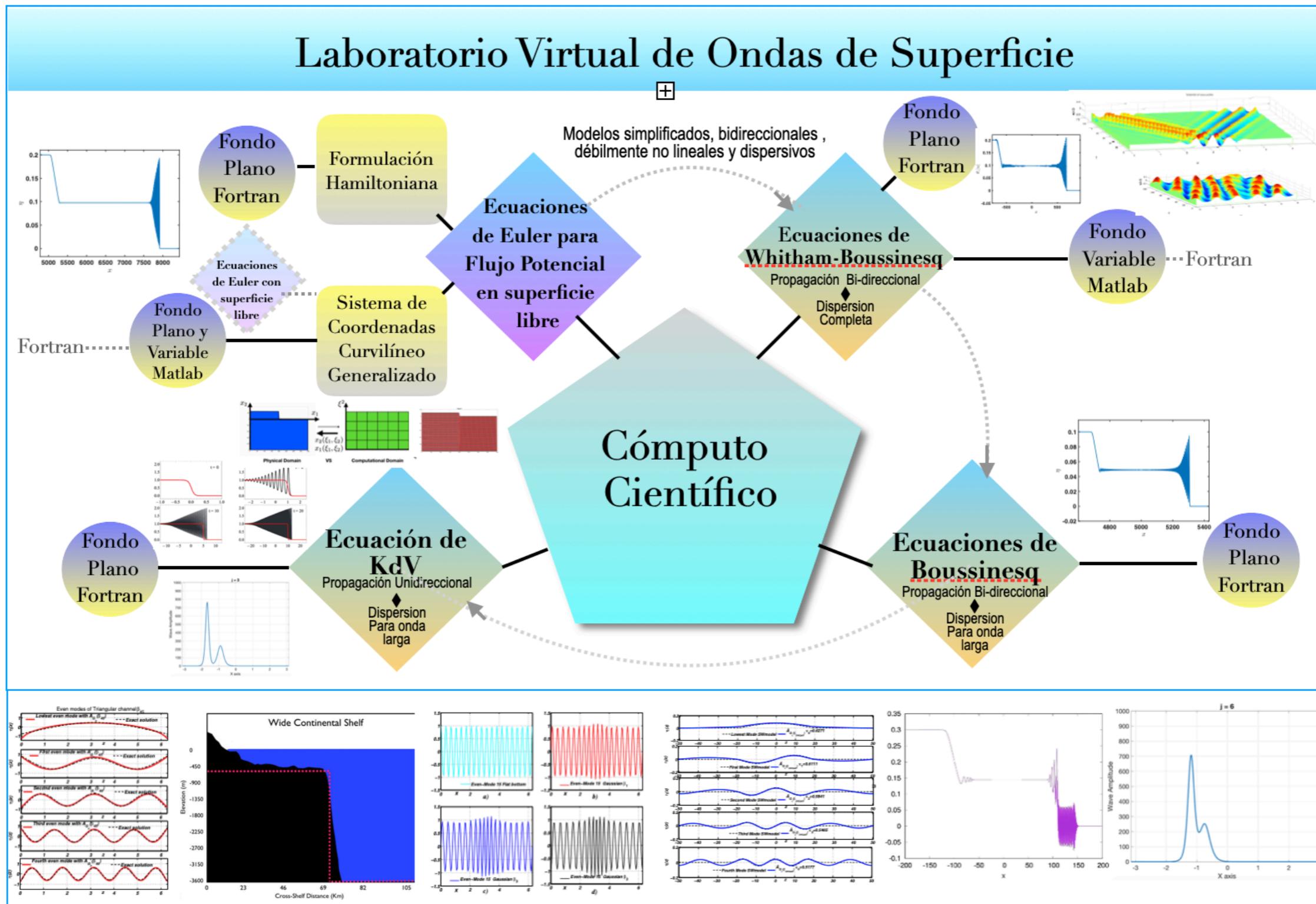


Un Atlas de Ondas Internas Solitarias Oceánicas (mayo de 2002) Oceanic Internal Waves and Solitons por Global Ocean Associates Preparado para la Oficina de Investigación Naval - Código 322 P05.

La gran mayoría son imágenes de satélite. La falta de sitios en mar abierto refleja la escasez de datos allí. En algunos casos, sin embargo, ha sido in-situ data el que ha demostrado la existencia de tales ondas.

Los estudios de caso incluyen información sobre las distribuciones espaciales de los solitones, especulando sobre fuentes, características (longitudes de onda y velocidades).

Laboratorio Virtual de Ondas Superficiales y ondas internas en fluidos estratificados



Fuente: Elaboración Propia



Resumen

- 🌊 Se introdujo un modelo de ondas en agua rico en estructura, que nos permite responder a preguntas y desvelar algunos mecanismos de la dinámica de la propagación de **ondas superficiales** en el régimen de ondas largas al incluir el efecto de la topografía.
- 🌊 Los modelos que abordamos se derivan en el **marco de las formulaciones más recientes en teoría de ondas superficiales** en el agua y que han tenido un amplio desarrollo en el régimen de onda larga. Dichos modelos poseen una **estructura matemática muy rica** y un marco teórico muy completo que nos permite aplicar teorías avanzadas del análisis matemático y es posible su **implementación numérica**.
- 🌊 Se describe la metodología para la **derivación de modelos de ondas** mas generales y pertinentes **que no tienen una contraparte con los modelos que existen en la actualidad**. Son modelos de frontera en la teoría matemática y que pretenden ser extendidos a otras disciplinas.
- 🌊 Se plantea el estudio del fenómeno desde varios frentes, **analítico, numérico** y con la posibilidad de poder contrastar los resultados con **marcos experimentales** que pueden ser reproducidos en el laboratorio o bien fenómenos oceanográficos y atmosféricos. Los modelos buscan capturar con un nivel de detalle de gran precisión los efectos no lineales que se manifiestan en la propagación de las ondas en tiempos prolongados.

Gracias por su atención