IUT de Lannion
Université Rennes 1
Département Informatique

Guide de survie dans un espace probabilisable

Première partie

Adib N. Rahmouni.

6 septembre 2013

Extrait du "Discours de la méthode"
Deuxième partie.

Le premier étoit de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle ; c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenteroit si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerois, en autant de parcelles qu'il se pourroit, et qu'il seroit requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connoître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connoissance des plus composés, et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.

René Descartes.

Table des matières

1 Introduction

Sommaire

1.1 Théorie des Probabilités

1.1.1 Définitions

Espace d'évènements : Univers
ensemble des possibles ou **univers** (fini ou pas)
$\omega \in \Omega$ issues ou évènements élémentaires.

Quelques exemples d'expériences aléatoires (EA)
Lancer d'une pièce, $\Omega = \{F, P\}$, $card(\Omega) = 2$.
Lancer d'un dé jusqu'à l'obtention d'un 6 : $\Omega = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ ensemble infini dénombrable.
Choisir un nombre au hasard entre 0 et 1 : $\Omega = [0, 1]$ infini non dénombrable.

événement ensemble des issues de l'expérience qui vérifent une propriété donnée.
C'est donc une partie A de Ω, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Exemples :
EA1 On obtient "face" : A = {F}.
EA2 On obtient le premier 6 entre le troisième coup et le septième coup (inclus)
EA3 On choisit un nombre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, $A =]\frac{1}{2}, 1]$.

1.1.2 Espaces probabilisables

Définition *Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$. On appellera tribu sur Ω toute famille F de parties de Ω telle que*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$ (Ω est appelé l'évènement certain)

ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ (stabilité de F pour la complémentation)

iii) $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$. Stabilité de F pour la réunion.

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est alors appelé espace d'événements.
Cet espace n'est evidemment pas unique :

- **Algèbre la plus simple**
  $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$.
- **Algèbre de Bernoulli**
  $\mathcal{F} = \{\Omega, A, A^c, \emptyset\}$, où A désigne un évènement ($A \subset \Omega$).
- **Algèbre complète**
  Dans ce cas $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Suivant le choix de la tribu on aura un modèle probabiliste plus ou moins rafiné.
permettra de décrire de manière plus ou moins judicieuse l'expérience aléatoire.
Ω est fini ou infini on choisit généralement l'algèbre complète.
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne forme pas une tribu : on considère l'ensemble des intersections et réunions dénombrables d'intervalles de $\mathbb{R}$: ensemble des Boréliens..

Définition *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace d'évènement, on appelle* **probabilité** *sur cet espace toute application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{F}$ vérifiant :*

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ la probabilité de l'évènement certain est 1 (normalisation)

ii) $\forall A \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

iii) Pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ on a

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est alors appelé *espace probabilisé.*
Propriétés.

i) $\mathbb{P}$ est une fonction croissante, i.e. pour tout couple d'évènements (A,B) tel que A implique B, on a $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

en particulier $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

ii)

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$$

iii) Formule de Poincaré

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$
$$+ \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j})$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

1.1.3 Le cas dénombrable

Si $\Omega = \bigcup_{i \in I} (\omega_i)$, $I \subset \mathbb{N}$ est fini ou dénombrable, il suffit de connaitre la probabilité des évènements élémentaires ω_i,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{j \in J} (\omega_j)) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(\omega_j)$$

Si $\Omega = \omega_1, \ldots \omega_N$ est fini on obtient

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{1 \leq i \leq N} \omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\omega_i) = 1.$$

Si l'on suppose les ω_i équiprobables

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{N}$$

Pour tout évènement $A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{\omega_i\}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{n}{N}$$

on retrouve ainsi une définition classique mais particulière et intuitive de la probabilité :
Lorsque les issues d'une EA sont en nombre fini et équiprobables, la probabilité d'un évènement associé à cette épreuve est le rapport du nombre de cas "favorables" au nombre de cas possibles.
Limitations : Ω infini.
Si Ω est infini on ne peut pas avoir équiprobabilité.

1.1.4 Exemples

Exemples :
EA1 : lancé d'une pièce,
$\Omega = \{P, F\}$, on peut choisir $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
Si la pièce n'est pas truquée notre probabilité est entièrement définie par

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \ \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \ \text{ et } \ \mathbb{P}(\{F\} = \mathbb{P}\{P\} = \frac{1}{2}$$

EA2 : lancé d'un dé jusqu'à l'obtention d'un 6.
On a $\Omega = \mathbb{N}$ et on choisit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
On définit alors la probabilité $\mathbb{P}$ sur les singletons par :

$$\mathbb{P}(\{i\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6}$$

la probabilité de faire 1,2,3,4 ou 5 aux (i-1) premiers coups est alors $\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$ et $\frac{1}{6}$ la probabilité de faire 6 au ième coup.
vérifier (exercice) que $\mathbb{P}$ est une probabilité.

EA3 : choisir "uniformément" un nombre entre 0 et 1.
Dans ce cas $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des Boréliens de $[0,1]$.
On définit alors $\mathbb{P}$ par

$$\mathbb{P}([a,b]) = \mathbb{P}(]a,b]) = \mathbb{P}([a,b[) = \mathbb{P}(]a,b[) = b - a$$

on peut noter qu'on a lors $\forall a \in [0,1], \ \mathbb{P}(\{a\}) = 0$.
On dit que c'est un événement presque impossible.

1.2 Probabilités conditionnelles

1.2.1 Définitions

On notera $\mathbb{P}_A(B)$, la probabilté de B sachant que A s'est réalisé

Définition *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, A et B deux événements sur cet espace tels que* $\mathbb{P}(A) \neq 0$. *Alors la la probabilité de B sachant A est définie par*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Dans le cas où $\mathbb{P}(A) = 0$, *on pose* $\mathbb{P}_A(B) = 0$.

- L'application $\mathbb{P}_A$ définie précédemment est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$; elle est appelée probabilité conditionnelle sachant A.
- Soient $A, B \in \mathcal{F}$. On a
  1. $\mathbb{P}_A(B^c) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.
  2. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)$

1.2.2 Probabilités des causes

Probabilités des causes : théorème de Bayes

Définition *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, on dit que la famille $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ constitue un système complet d'événements (relatif à cet espace) si cette famille forme une parttition de Ω, c'est à dire si :*

1. $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Théorème *Soit $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ un système complet d'événement de Ω. On a*

1. $\forall B \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$ *Formule des probabilités totales.*
2. $\forall B \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}_B(A_k) = \dfrac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$ *Formule de Bayes*

1.2.3 Indépendance

Dire que l'événement A est indépendant de B revient à dire que la réalisation de B ne modifie pas $\mathbb{P}(A)$, c'est à dire qu'elle n'apporte aucune informations sur l'éventuelle réalisation de A.

Définition *Soit $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. On dit que A est indépendant de B si*

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

On peut déjà remarquer que si A est indépendant B alors B l'est de A (i.e. les deux événements sont indépendants). En effet, on a

$$\mathbb{P}(A).\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

On peut aussi adopter comme définition

$$\text{A et B indépendants} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

cette "définition" met en évidence que l'indépendance est une relation d'équivalence.

Proposition *Si A et B sont deux événements indépendants alors il en est de même pour A et B^c, pour A^c et B et pour A^c et B^c*

La démonstration est laissée en exercice.

Remarques 1 *Si A et B sont deux événements indépendants, alors en remarquant que $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_{B^c}(A) = \mathbb{P}(A)$ on a*

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_{B^c}(A).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ n événements.

Définition *Les événements A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sont dits indépendants deux à deux $(0 < \mathbb{P}(A_i) < 1)$*

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ i \neq j, \quad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i).\mathbb{P}(A_j)$$

Cette notion d'indépendance deux à deux n'est pas très utile car elle ne signifie pas que ces événements sont indépendants. On a donc besoin d'une notion plus forte

Définition *Les événements A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sont dits mutuellement indépendants si $\forall k = 1 \ldots n$, $\forall (i_1, \ldots, ß_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq i_n$ on a*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Pour trois événements A, B et C l'indépendance mutuelle se traduit par $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C)$.

2 Variables aléatoires

Sommaire

2.1 Variables aléatoires

2.1.1 Définitions et propriétés

Définition *Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\Omega', \mathcal{F}')$ deux espaces d'événements. On appelle variable aléatoire de l'espace d'événements vers $(\Omega', \mathcal{F}')$ une application*

$$X : \Omega \longrightarrow \Omega'$$

telle que

$$\forall A' \in \mathcal{F}, \quad X^{-1}(A') \in \mathcal{F}$$

où $X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A'\}$.

On sera souvent amené à considérer des cas où $\Omega' \subset \mathbb{R}$, par exemple $(\Omega', \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$
La variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\Omega', \mathcal{F}')$ est alors appelée variable aléatoire réelle (v.a.r.).
On a la caractérisation suivante d'une v.a.r. (admis)

Proposition *Une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur l'espace d'événements $(\Omega, \mathcal{F})$ si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}.$$

Remarques 2 • *Si l'ensemble des images $X(\Omega)$ est dénombrable, la variable aléatoire est dite discrète. Si $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, X est dite continue.*

- *Si Ω est dénombrable, alors sur l'espace d'événements $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.*
- *Si $\Omega' = \mathbb{Z}$ alors la variable aléatoire est dite entière (positive si $\Omega' = \mathbb{N}$).*
- *Si $\Omega' = \mathbb{R}^n$ la variable aléatoire est dite vectorielle ou vecteur aléatoire (formé de n variables aléatoires réelles).*

1. *Variable aléatoire indicatrice.*
Soit $A \in \mathcal{F}$ un événement.
La fonction indicatrice $\mathbb{I}_A$ de A définie sur Ω est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Cette variable aléatoire est dite indicatrice ou variable de Bernoulli.
2. *Variable aléatoire certaine.*
Toute application constante $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définit une variable aléatoire dite certaine.

1. *Somme des valeurs de dés.*
On s'intéresse à la somme des points lors du lancé de deux dés équilibrés. On peut donc associer à cette épreuve (lancé de deux dés) l'application suivante définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$

$$\begin{aligned} X : \quad & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ & w_{ij} = (i, j) \longrightarrow X(w_{ij}) = i + j \end{aligned}$$

On peut vérifier aisément que cette application est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Soit X et Y seux v.a.r. sur le **même** espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$

- $S = X + Y$ et $P = XY$ sont deux variables aléatoires sur le même espace.
- Si X est une variable aléatoire réelle, alors αX, $\alpha \in \mathbb{R}$ est aussi une variable aléatoire réelle.
- L'ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

2.1.2 Fonction de répartition

Définition *Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'application*

$$\begin{aligned} F_X : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ & x \longmapsto \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) \end{aligned}$$

est appellée fonction de répartition (ou fonction cumulative) de X.
On a $\mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\})$, et que l'on écrira, par abus de notation, $\mathbb{P}(X \leq x)$.

Proposition *Soit X une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La fonction de répartition F_X associée à X vérifie*

1. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
3. *F_X est croissante :* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$
4. *F_X est continue à droite.*

F_X permet de calculer la probabilité d'un intervalle quelconque. En effet, sil'on souhaite calculer $\mathbb{P}([a, b[)$ il suffit d'écrire

$$]-\infty, a[\cup [a, b[=]-\infty, b[$$

d'où

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) \\ &\mathbb{P}(X \geq c) = 1 - F_X(c) \end{aligned}$$

2.1.3 Propriétés

Proposition *Soit X une v.a.r. sur$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors F_X vérifie*

1. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
3. *F_X est croissante :* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$
4. *F_X est continue à droite.*

Démonstration

1. $\lim_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

2.1.4 V.A.R. discrètes

Définition *Une v.a.r. X est dite discrète si elle ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$*
Dans ce cas la fonction

$$\begin{aligned} p : \quad & I \longrightarrow [0,1] \\ & i \mapsto p_i \end{aligned}$$

où $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ est appelée fonction de masse de la v.a.r. X.

2.1.5 Quelques résultats

Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, par convention

$$p_i = 0,\ \forall i \in \mathbb{N} - I.$$

Proposition *Si X est une v.a.r. discrète dont les valeurs sont $\{x_i,\ x_i \in Nn\}$, alors sa fonction de répartition F_X est constante par morceaux, ayant pour points de discontinuités $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.*

Démonstration
On suppose que les x_i peuvent être rangées dans l'ordre croissant $x_0 < x_1 < x_2 \ldots$. Alors on a

$$\begin{array}{llll} x < x_0 & \Rightarrow F_X(x) & = & \mathbb{P}(X \leq x) = 0 \\ x \in [x_0, x_1 & \Rightarrow F_X(x) & = & \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = x_0) \\ & & = & p_0 \\ x \in [x1, x2[& \Rightarrow F_X(x) & = & \mathbb{P}(X = x_0 \,\text{ou}\, x_1) \\ & & = & \mathbb{P}(\{X = x_0\} \cup \{X = x_1 \\ & & = & p_0 + p_1 \\ \vdots & & & \\ x \in [x_k, x_{k+1} & \Rightarrow F_X(x) & = & \sum_{i=0}^{k} p_i \end{array}$$

2.1.6 V.A.R. continues

Définition *Une v.a.r. X est dite absolument continue s'il existe une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée f_X, telle que la fonction de répartition F_X de la v.a.r. X admette la représentation intégrale suivante :*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Ceci est équivalent à dire que F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f_X. La fonction f_X est appelée densité de X. On parle aussi de v.a.r. à densité pour désigner une v.a.r. absolument continue.

2.1.7 Propriétés

on omettra le terme "absolument" : on parlera plus simplement de v.a.r continues.

1. Généralement f est continue "presque sûrement" sur $\mathbb{R}$
2. Ainsi on a "presque sûrement" (on dit aussi "presque partout")
$$F'_X(x) = f(x)$$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\,x = 1$

1. On a
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X < b) &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_a^b f(x)d\,x \end{aligned} \tag{2.1}$$

Proposition *Toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\,x = 1$$

est la densité d'un v.a.r continue.

Remarques importantes
Lorsque la v.a.r est absolument continue on a $\mathbb{P}(X = x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ (pour le voir il suffit d'utiliser (2.1) : une v.a.r. continue ne "charge" pas les points.

Plus généralement, pour une variable aléatoire continue la probabilité pour qu'elle prenne un ensemble dénombrable de valeurs quelconques est toujours nulle.

Il n'y a pas unicité de la densité de probabilité pour une fonction de répartition F_X donnée. Il suffit de changer la valeur de la densité en un nombre fini (ou dénombrable) de points (en vertu de la remarque précédente).

2.1.8 Loi d 'une V.A.R.

Proposition *Soient X une variable aléatoire de l'espace d'événements $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\Omega', \mathcal{F}')$ et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.*
L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X :\ & \mathcal{F}' \longrightarrow [0,1] \\ & A' \longmapsto \mathbb{P}(X^{-1}(A')) \end{aligned} \tag{2.2}$$

définit une probabilité sur l'espace d'événements $(\Omega', \mathcal{F}')$. Cette probabilité est appelée loi de la variable aléatoire X.

on a ainsi "transporté" la probabilité définie sur Ω vers Ω'
On peut montrer que $\mathbb{P}_X$ vérifie bien les conditions pour être une probabilité. **Caractérisation de $\mathbb{P}_X$**
Soit X une v.a.r. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit A un Borélien de $\mathbb{R}$.

- Si X est une v.a.r discrète, alors
$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_j)\, \mathbb{I}_A(x_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j \mathbb{I}_A(x_j)$$
où $\mathbb{I}_A$ désigne la fonction caractéristque de A.
- Si X est une v.a.r continue, alors
$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X(t)\,d\,t = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A f_X(t)\,d\,t.$$

On voit ainsi que la connaissance de la fonction de masse pour une v.a.r. discrète ou la fonction de densité dans le cas d'une v.a.r. continue suffit à définir $\mathbb{P}_X$
Exercice récapitulatif
Soit X une v.a. qui suit une loi de densité f_X donnée par

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{\alpha}{t} & \text{si} \quad t \in [1, 2[\\ 0 & \text{si} \quad t \in [2, +\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer α pour que f_X soit une densité de probabilité (dans toute la suite α sera supposé égal à cette valeur).

2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(X \geq -1)$ et $\mathbb{P}(-1 \leq X < 1)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$ et σ_X.

Solution

1. f_X est une densité de probabilité ssi
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$$
or on a
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt &= \int_{-\infty}^{1} f_X(t)dt + \int_{1}^{2} f_X(t)dt \\ &+ \int_{2}^{+\infty} f_X(t)dt \\ &= 0 + \int_{1}^{2} \frac{\alpha}{t}dt + 0 \\ &= \alpha\,[ln(t)]_1^2 = \alpha ln(2)\end{aligned}$$
il faut donc choisir $\alpha = \frac{1}{ln(2)}$.
2. La fonction de répartition est donnée par
$$\forall x, x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$
d'où en séparant les cas
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{1}^{x} f_X(t) & \text{si } x \in]1,2] \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{1}^{2} f_X(t) & \text{si } x \in]2,+ \end{cases}$$
soit en remplaçant f_X par sa valeur
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, \\ \frac{1}{ln(2)}\,[ln(t)]_1^x = \frac{ln(x)}{ln(2)} & \text{si } x \in]1,2] \\ 1 & \text{si } x \in]2,+\infty \end{cases}$$
3.
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 2) &= F_X(2) = 1. \\ \mathbb{P}(X \geq -1) &= 1 - \mathbb{P}(X < -1) \\ &= 1 - F_X(-1) = 1 \\ \mathbb{P}(-1 \leq X < 1) &= F_X(1) - F_X(-1) = 0\end{aligned}$$

Fiche TD 0

Exercice 1.1 La loi de probabilité d'un dé pipé à six faces est donnée par le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

Soit les évènements $A = \{i; i \leq 4\}; B = \{i; i \geq 4\}; C = \{i; i < 4\}$.
Calculer

$$\mathbb{P}[A];\ \mathbb{P}[B];\ \mathbb{P}[C];\ \mathbb{P}[A \cap B];\ \mathbb{P}[A \cap C];\ \mathbb{P}[B \cap C].$$

Exercice 1.2 Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}_X(x)$	0.1	0.3	0.4	0.1	0.05	0.05

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Déterminer et représenter la fonction de répartition de X
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}[X < 4]$; $\mathbb{P}[X > 2]$; $\mathbb{P}[3 < X \leq 4.5]$; $\mathbb{P}[2 \leq X < 4]$; $\mathbb{P}[2 < X < 4]$.

Exercice 1.3 On joue avec deux dés à quatre faces. Sur le premier dé, les faces portent les numéros $1, 2, 3$ et 3. Sur le deuxième dé, les faces portent les numéros $1, 2, 2$ et 2. Deux règles du jeu sont possibles :

1. La partie coûte 1 euro. On lance les deux dés.
   a) Si la somme est 2, on gagne 6 euros,
   b) Si la somme est 3 ou 4, on gagne 2 euros,
   c) Si la somme est 5, on ne gagne rien.
2. La partie coûte 10 euros. On lance les deux dés.
   a) Si la somme est 2, on gagne 60 euros,
   b) Si la somme est 3 ou 4, on gagne 12 euros,
   c) Si la somme est 5, on ne gagne rien.

En étudiant l'espérance et l'écart-type de chacun de ces jeux, trouver lequel est le plus intéressant.

Exercice 1.4 Une loterie comporte 20 billets dont 2 gagnants, l'un pour un lot de 100 euros et l'autre pour un lot de 60 euros. On a acheté 3 billets.

1. Calculer les probabilités suivantes en supposant tous les tirages équiprobables :
   a) Gagner les 2 lots.
   b) Gagner le lot de 100 euros seulement.
   c) Gagner le lot de 60 euros seulement.
   d) Ne rien gagner.
2. Déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X qui à tout ensemble de trois billets associe la somme gagnée.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Le prix de vente du billet étant fixé à $\mathbb{E}(X)/3$, vérifier que la vente des 20 billets permet d'obtenir la somme mise en jeu.

Exercice 1.5 Dans un atelier textile, la température exprimée en Farenheit, ne s'écarte jamais de plus de 2 degrés de 62 degrés. Plus précisément, la température est une variable aléatoire F de distribution :

f	60	61	62	63	64
$\mathbb{P}(F = f)$	0.05	0.25	0.4	0.25	0.05

1. Calculer l'espérance et la variance de F.
2. On a décidé de lire la température sur l'échelle des degrés Celsius qui satisfait $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Quelle est l'espérance et la variance de la température exprimée en degrés Celsius ?

Lois de probabilités discrètes

Exercice 1.6 On considère l'expérience qui consiste à choisir au hasard une personne dans une population comportant 5% de personnes pratiquant un instrument de musique.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la personne choisie joue d'un instrument et 0 sinon ? On dennera le ou les paramètres.
2. Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
3. On choisit maintenant 3 personnes et on considère la variable aléatoire correpondant au nombre de personnes (parmi ces 3) jouant d'un instrument. Quelle loi suit cette variable aléatoire ? (on préisera ses paramètres).
4. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 1.7 Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de blanches est p.
Les tirages se font avec remise ainsi la proportion de boules blanches ne change jamais. Soit X l'évènement obtenir une boule blanche. Quelles sont l'espérance et la variance de cette variable ? on précisera la loi de cette variable aléatoire.

Exercice 1.8 On joue à pile ou face. Si on obtient pile, on gagne 1 euro. Sinon, on perd 1 euro. On considère une série de 10 lancers.

1. Si la pièce est non truquée (équiprobabilité) :
   a) Quelle est la probabilité de gagner 10 euros ?
   b) Quelle est l'espérance de gain ?
2. Si la pièce est légèrement truquée et tombe sur face dans 60% des cas
   a) Quelle est la probabilité de gagner 10 euros ?
   b) Quelle est l'espérance de gain ?

Exercice 1.9 Dans un atelier, le nombre d'accidents au cours d'une année suit une loi de Poisson de paramètre 5.
Calculer la probabilité des évènements suivants :

1. Il n'y a pas d'accidents au cours d'une année
2. Il y a exactement 4 accidents au cours de l'année
3. Il a plus de 6 accidents au cours de l'année.

Exercice 1.10 On considère 4 lettres et 4 enveloppes correspondantes. On met, au hasard, les 4 lettres dans les enveloppes et on définit une variable aléatoire X comme étant le nombre de lettres qui atteindront leur destinataire. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 1.11 Un automobiliste rencontre sur son trajet 5 feux de circulation tricolores. Pour chacun de ces feux, le rouge dure 15 secondes, l'orange 5 secondes et le vert 40 secondes. Les 5 feux ne sont pas synchronisés et l'on suppose que les aléa de la circulation sont tels que l'état d'un feu devant lequel se présente l'automobiliste ne dépend pas de l'état des autres feux rencontrés.

1. L'automobiliste se présente devant un feux. Quelle est la probabilité que ce feu soit vert ?
2. Quelle est la probabilité que sur son trajet, l'automobiliste rencontre exactement 3 feux verts sur les 5 feux rencontrés ?
3. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés sur le trajet. Quelle est sa loi de probabilité et son espérance ?

Exercice 1.12 On considère un ascenseur qui dessert k étages d'un immeuble, avec n personnes qui rentrent dans cet ascenseur vide au rez de chaussée. On suppose que chacune de ces personnes, indépendamment des autres, a une probabilité uniforme $1/k$ de sortir à l'un ou l'autre des étages et on suppose également que personne ne rentre dans l'ascenseur à un étage au dessus du rez de chaussée.

1. Soit j un étage entre 1 et k. Quelle est la probabilité que l'ascenseur s'arrête à l'étage j ?
2. Quelle est l' espérance du nombre d'arrêts de l'ascenseur ?

Exercice 1.13 On suppose que sur 1000 personnes voyageant par chemin de fer à un instant donnée, il y a en moyenne 1 médecin. On suppose que le nombre aléatoire de médecins dans un train suit une loi de Poisson. Quelle est la probabilité de ne trouver aucun médecin ? Un médecin ? Deux médecins ? Cinq médecins ?

Fiche TD 1

Exercice 1.14 Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda(x-1)(x+3) & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \mu \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$f_3(x) = \begin{cases} \nu(1-\nu x) & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Pour chacune des fonctions précédentes dire si ce sont des densités de probabilités, on donnera alors les valeurs de λ, μ et ν correspondantes. Sinon dire pourquoi elles ne le sont pas.
2. Pour toutes celles qui sont des densités expliciter leur fonction de répartition.

Exercice 1.15 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x^2+x-2} & \text{si} \quad x \in [2,3] \\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Déterminez les réels α et β (en fonction de λ) tels que

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+2}$$

2. Déterminez λ pour que f_X soit bien la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

Exercice 1.16 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x^4} & \text{si} \quad x \in [1, +\infty[\\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. pour quelle valeur de λ, f est-elle une densité de probabilités d'une v.a.r. X. Dans toute la suite on supposera λ égal à cette valeur.
2. Expliciter sa fonction de répartition.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre (en fonction de α) $\mathbb{P}(X \leq x) = \alpha$.

Exercice 1.17 Soient X et Y deux v.a dont les fonctions de répartitions F_X et F_Y sont égales.
Que peut on dire de leurs densités de probabilités. Justifier votre réponse.

Exercice 1.18 La fontion définie par

$$F(x) = \begin{cases} \lambda(1-x^2) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

peut-elle être la fonction de répartition d'une v.a. (justifier votre réponse).

Exercice 1.19 Soit F_X la fonction de répartition d'une v.a.r. X. Exprimer la fonction de répartition, F_Y, de la v.a.r. $Y = X^2 + 1$ en fonction de F_X.

Exercice 1.20 La fonction de répartition d'une v.a. X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ \dfrac{ln(x)}{ln(2)} & \text{si } x \in]1, 2] \\ 1 & \text{si } x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

1. Calculer sa densité de probabilité f_X.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_-$, résoudre dans $\mathbb{R}$
$$\mathbb{P}(X \geq 2\alpha) = \alpha$$

Exercice 1.21 La densité de probabilité d'une v.a. X est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \leq 0 \\ \lambda e^{-3x} & \text{si } \ x > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer λ pour que f_X soit bien une densité de probabilité (dans toute la suite λ sera supposé égal à cette valeur).
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X \geq -1)$ et $\mathbb{P}(-2 \leq X < 1)$.

Exercice 1.22 On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

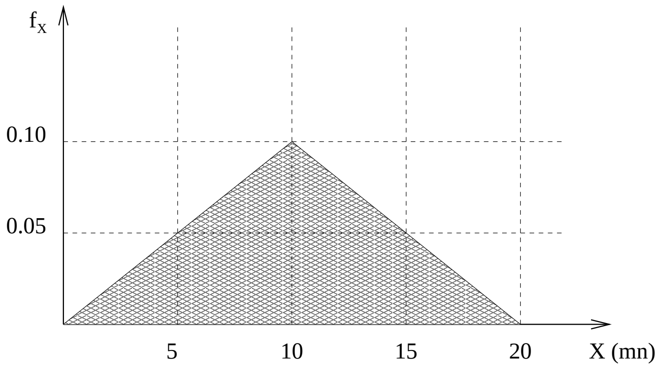
$$f(t) = \begin{cases} kt^2 & \text{si } \ -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité. On supposera désormais que k est égal à la valeur trouvée, et que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de X.
   On séparera les cas $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 1$ et $x \geq 1$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de a, les valeurs de x telles que $\mathbb{P}(X > x) = a$.

Exercice 1.23 Attendre ou pas le bus.
Chaque matin pour vous rendre à l'IUT vous passez à coté d'un abri-bus et vous vous posez la même question : attendre un bus ou continuer à pied.
- Vérifier que la fonction définie ci-dessous (par son graphique) est une densité de probabilité.
- On suppose que le temps d'attente du bus a la densité de probabilité précédente. Si vous devez attendre plus de 15 mn, vous serez en retard. Quelle est la probabilité de cet événement (pas si rare pour certains !).
- Calculer $\mathbb{P}(X \leq 5)$ et $\mathbb{P}(5 \leq X \leq 15)$.
- Quel est le temps d'attente moyen.

Exercice 1.24 Soit X une variable aléatoire de densité f_X avec

$$f_X(t) = \begin{cases} 1 + t & \text{si } \ t \in [-1, 0] \\ \alpha & \text{si } \ t \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



- Représenter la densité de X.
- Déterminer α .
- Calculer et représenter la fonction de répartition de X.
- Calculer $\mathbb{P}(X > 12)$.
- Calculer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire $Y = X^2$, en déduire sa densité f_Y.
- Représenter les deux fonctions f_Y et F_Y.

Exercice 1.25 Soit X une variable aléatoire de densité f_X :

$$f_X(t) = Kt^2 \text{ si } t \in [-\alpha, \alpha], \quad 0\text{sinon}$$

1. Représenter la densité de X.
2. Déterminer K en fonction de α.
3. Déterminer puis représenter la fonction de répartition F_X de X.
4. Calculer $\mathbb{P}(X > 2)$.

Exercice 1.26 Soit X une v.a. qui suit une loi de densité f_X donnée par

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{\alpha}{t} & \text{si} \quad t \in [1, 2[\\ 0 & \text{si} \quad t \in [2, +\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer α pour que f_X soit une densité de probabilité (dans toute la suite α sera supposé égal à cette valeur).
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(X \geq -1)$ et $\mathbb{P}(-1 \leq X < 1)$.

Fiche TD 2

Exercice 2.27 On considère l'espace vectoriel, E, des V.A.R sur un même espace et admettant une espérance et une variance.

1. Montrer que
$$X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0.$$
2. En déduire que $Var(X) \geq 0$.
3. En partant de
$$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$
et en utilisant la linéarité de l'espérance, montrer que
$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(x)^2.$$
4. Montrer que
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, Var(X + \lambda) = Var(X) \quad \text{et} \quad Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$$
5. La variance est-elle une application linéaire sur E ?
6. On considère une v.a.r. constante $(X = a)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
7. Montrer que
$$X \;\text{ v.a.r. constante} \Longleftrightarrow Var(X) = 0$$

Exercice 2.28 Soit X une v.a.r. d'espérance μ et de variance σ^2.

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Exprimer en fonction de α, β, μ et σ l'espérance et la variance de la v.a.r.
$$Y = \frac{X - \alpha}{\beta}$$
2. En déduire les valeurs de α et β pour que Y soit une v.a.r. centrée réduite.

Exercice 2.29 Variable aléatoire uniforme sur [a, b].
On dit que la variable aléatoire réelle X suit une loi uniforme sur $[a, b])$ $(X \sim \mathcal{U}([a, b]))$ si elle est à valeurs dans $[a, b]$ avec pour densité la fonction
$$f_X(t) = \frac{1}{b - a}.\mathbb{I}_{[a,b]}(t)$$

1. Vérifier que f_X est bien une densité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?
3. Comment obtenir à partir $\mathcal{U}([a, b])$ une v.a.r. centrée réduite suivant une loi uniforme ?

Exercice 2.30 Un nombre x est choisi aléatoirement suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. On forme alors le nombre $y = 3x + 5$ et on notera $Y = 3\mathcal{U} + 5$ la variable aléatoire représentant ce nombre.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y.
Indication : *Ecrire d'abord la fonction de répartition de* $\mathcal{U}([0, 1])$.
2. En déduire la densité de probabilité f_Y de Y.
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$.

3 Lois usuelles

Sommaire

3.1 Principales lois de probabilité

Lois discrètes finies

3.1.1 Loi de Bernoulli

• **Loi de Bernoulli :** $\mathcal{B}(1,p)$ $p \in]0,1[$

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p (on note $X \sim \mathcal{B}(1,p)$ si elle est à valeurs dans $\{0,1\}$ avec $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$.
Cette loi modélise l'issue d'une expérience en ne s'intéressant qu'au "succès" ou à l' "échec" de l'expérience.

3.1.2 Loi binomiale

• **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ $n \in \mathbb{N}^*$ $p \in]0,1[$

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi binomiale de paramètre (n,p) (on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si elle est à valeurs dans $\{0,1,\ldots,n\}$ avec

$$\forall i = 0,\ldots,n \;\; \mathbb{P}(X=i) = C_n^i p_i (1-p)^{n-i}$$

Cette loi modélise une succession de "succès" et d"'échecs", p étant la probabilité du succès.

3.1.3 Loi Uniforme

• **Loi uniforme sur** $\{1,\ldots,N\}$

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi uniforme sur $\{1,\ldots,N\}$ (on note $X \sim \mathcal{U}_N$) si elle est à valeurs dans $\{1,\ldots,N\}$ avec

$$\forall k \in \{1,\ldots,N\} \;\; \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{N}$$

Cette loi modélise l'issue d'une expérience où les résultats sont équiprobables.

3.1.4 Loi Géometrique

V.A.R. "infinies dénombrables"
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$ La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi géométrique de paramètre p (on note $X \sim \mathcal{G}(p)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \;\; \mathbb{P}(X=i) = p(1-p)^{i-1}$$

. Cette loi modélise une série d' "échecs" suivie du premier "succès".

3.1.5 Loi de Poisson

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$
on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$\forall i \in \mathbb{N}, \;\; \mathbb{P}(X=i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

C'est l'une des lois discrètes les plus utilisées en modélisation, en particulier pour les files d'attente, elle régit par exemple le nombre d'accidents, les déchets de fabrication, les appels téléphoniques à un standard. . . Cette loi est aussi appelée loi des événements rares.

3.1.6 Loi Uniforme continue

Variables aléatoires continues
La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi uniforme sur $[a, b]$ (on note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$) si elle est à valeurs dans $[a, b]$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a}.\mathbb{I}_{[a,b]}(t)$$

Sa fonction de répartition

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 1 & \text{si} \quad x \geq b \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1.7 Loi Normale

Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2), \quad m \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 > 0$
La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) (on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad t \in \mathbb{R}$$

Cette loi est parfois appelée loi de Laplace-Gauss.

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi de Cauchy si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

3.1.8 Loi Gamma

Loi Gamma, $\Gamma(a, b), \quad a > 0, \quad b > 0$
La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi Gamma de paramètres (a, b) (on note $X \sim \Gamma(a, b)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} b^a t^{a-1} e^{-bt} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

où

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du, \quad \forall a > 0.$$

La fonction Γ prolonge la fonction factorielle sur l'ensemble des réels au sens où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n! \text{ et } \forall a > 0, \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

. De plus, on a

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt(\pi)$$

3.2 Valeurs moyennes

3.2.1 Espérence

Définition *Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Si X est une v.a.r. discrète, on appelle espérence de X et on note $\mathbb{E}(X)$*, la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités de réalisation*
autrement dit, lorsque cette quantité existe,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} i\mathbb{P}(X = i)$$

Définition *De même, si X est une v.a.r. continue de densité* f_X*, on appelle espérance de X et on note* $\mathbb{E}(X)$*, lorsqu'elle existe, la quantité*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

Attention, cette quantité peut ne pas exister.

Soit la v.a. continue de densité

$$f_X = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Sa moyenne est alors donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$$

Propriétes de l'espérance

- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$
- Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- $\mathbb{E}(a) = a$

Attention $\mathbb{E}(a)$ existe.
Généralisation.

Définition *Soit X une v.a.r. et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. L'espérance de $g(X)$ est définie par (lorsqu'elle existe)*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X)) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} g(i).\mathbb{P}(X=i) && \textit{Si } X \textit{ v.a. discrète} \\ \mathbb{E}(g(X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x).f_X(x)dx && \textit{Si } X \textit{ v.a. continue} \end{aligned}$$

3.2.2 Variance

Mesure "l'éparpillement" ou la "dispersion" de X autour de la moyenne

Définition *Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
La variance de la v.a.r. X est définie, lorsque cette quantité existe, par

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right]$$

ou encore, en utilisant la linéarité de $\mathbb{E}(X)$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Propriétés

$Var(X)$	n'existe pas toujours
$Var(X) \geq 0$	
$Var(X+\lambda)$	$= Var(X) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$
$Var(\lambda X)$	$= \lambda^2 Var(X) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$
X v.a. constante	$\Leftrightarrow Var(X) = 0$

Définition *Soit X une v.a.r. telle que Var(X) existe. L'écart-type de X est défini par*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Mesure aussi "l'éparpillement" ou la "dispersion" de X autour de la moyenne.
On l'utilise plus souvent que la variance. Loi $\mathcal{B}(1,p)$: Espérance p ; Variance $p(1-p)$
Loi $\mathcal{B}(n,p)$: Espérance np ; Variance $np(1-p)$
Loi $\mathcal{P}(\lambda)$: Espérance λ ; Variance λ
Loi $\mathcal{U}([a,b])$: Espérance $\dfrac{a+b}{2}$; Variance $\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Loi $\mathcal{E}(\lambda)$: Espérance $\dfrac{1}{\lambda}$; Variance $\dfrac{1}{\lambda^2}$
Loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$: Espérance m ; Variance σ^2

Corollaire *Si X est une v.a.r. pour laquelle $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$ existent, alors la v.a.r. Y définie par*

$$Y = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$$

est appelé v.a.r. centrée réduite associée à la v.a.r X. Elle vérifie

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \quad \textit{et} \quad Var(Y) = 1$$

Réduction d'une loi Normale $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Il suffit de poser

$$Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

On a alors

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

. La fonction de répartition $F_Z = \Phi$ de Z est donnée par les tables. Comment en déduire celle de X ?
Il suffit d'ecrire :

$$\begin{aligned} F_X(a) &= \mathbb{P}(X \leq a) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{a-m}{\sigma}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{a-m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

De la même manière

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Soit $X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$ donc $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\sigma = 2$.
on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 1) &= \mathbb{P}(\frac{X-1}{2} \leq \frac{1-1}{2}) \\ &= \mathbb{P}(\frac{X-1}{2} \leq 0) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq 0) \\ &= \Phi(0) = 0.5 \ \text{ Cf tables} \end{aligned}$$

On peut calculer de la même manière $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

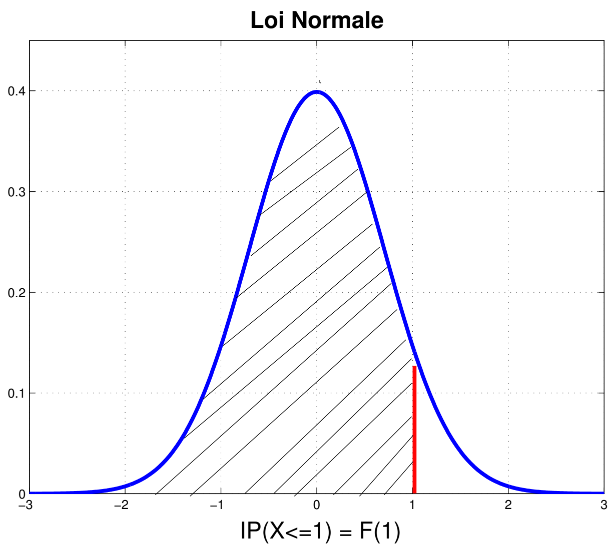


FIGURE 3.1 – Densité d'une v.a. de loi normale

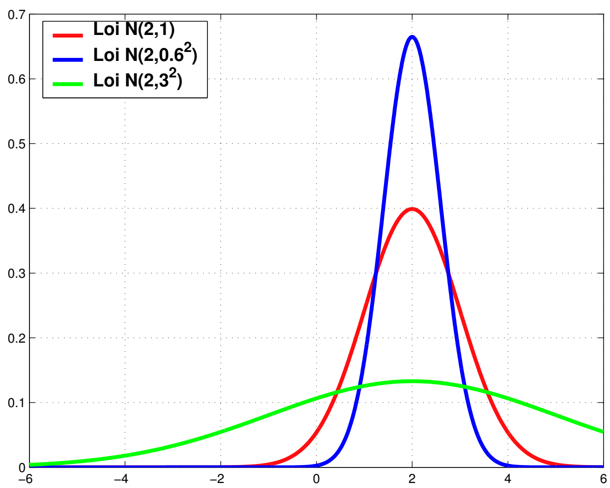


FIGURE 3.2 – Même espérance, diverses variances.

3.3 Couple de v.a.r

Définition *Soit X_1, X_2 deux v.a.r. définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
On appelle couple aléatoire, l'application définie par

$$\begin{aligned} X: \quad & \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \omega \longmapsto (X_1(\omega), X_2(\omega)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

On note $X = (X_1, X_2)$.

3.3.1 Définitions et Propriétés

Définition *On appelle fonction de répartition du couple de v.a.r. $X = (X_1, X_2)$ l'application*

$$\begin{aligned} F_X: \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) \longmapsto \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec $\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\})$

Définition *Le couple de v.a.r. $X = (X_1, X_2)$ est dit discret s'il est à valeurs dans un sous ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{R}^2$*
Le couple de v.a.r. $X = (X_1, X_2)$ est dit absolument continue s'il admet une représentation intégrale dans $\mathbb{R}^2$

Définition *On appelle espérance du couple aléatoire $X = (X_1, X_2)$ l'élément de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1, X_2) = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2))$$

Si $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2))$ existent il en sera de même pour $\mathbb{E}(X)$.

Définition *Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de v.a.r, si $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2))$ existent, on appelle covariance du couple aléatoire $X = (X_1, X_2)$ le réel*

$$Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1.X_2) - \mathbb{E}(X_1).\mathbb{E}(X_2))$$

notons que $Cov(X_1, X_1) = Var(X_1)$

3.3.2 Indépendance

Définition *Deux v.a.r. X et Y sont dites indépendantes si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \\ \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x).\mathbb{P}(Y \leq y) \tag{3.4}$$

Théorème *Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes, on a*

$$\mathbb{E}(X.Y) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y)$$

Définition *On appelle coefficient de corrélation de deux v.a.r. X et Y le réel défini par*

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}$$

où $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{Cov(X,X)}$.
Ce taux mesure le degré de "dépendance" de deux v.a.r.

Exercice récapitulatif
Variable aléatoire exponentielle.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ ssi elle admet comme densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f_X est bien une densité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Écrire la fonction de répartition de X.

Solution

1.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \\ &= \lambda \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

(on peut aussi l'intégrer en remarquant qu'elle s'ecrit $u'\ e^u$) f_X est donc bien une densité de probabilité.

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx\end{aligned}$$

On intègre par parties en posant

$u = -x \quad v' = -\lambda e^{-\lambda x}$

$$\begin{aligned} &= \left[x\, e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx \\ &= 0 + \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

même type de calcul pour la variance en utilisant la formule de Koenig, on trouve

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3.

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= 1 - e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

Fiche TD 3

Exercice 3.34 Soit X une v.a. suivant une loi normale centrée réduite, $X \sim \mathcal{N}(0, 1^2)$, calculez en utilisant la table :

1. $\mathbb{P}(X \geq 0)$.
2. $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
3. $\mathbb{P}(X \leq -1,56)$.
4. $\mathbb{P}(X > 1,62)$
5. $\mathbb{P}(X > 1,31)$.
6. $\mathbb{P}(1,5 \leq X \leq 2)$.
7. $\mathbb{P}(-1,7 \leq X \leq -1)$
8. $\mathbb{P}(-1,5 \leq X \leq 2)$.

Exercice 3.35 Soit X une v.a. suivant une loi normale centrée réduite, $X \sim \mathcal{N}(0, 1^2)$, déterminer grâce à la table x_0 tel que

1. $\mathbb{P}(-x_0 \leq x \leq x_0) = 0,5$
2. $\mathbb{P}(-x_0 \leq x \leq x_0) = 0,68$
3. $\mathbb{P}(-x_0 \leq x \leq x_0) = 0,95$
4. $\mathbb{P}(-x_0 \leq x \leq x_0) = 0,997$

Exercice 3.36 Soit X une v.a.r. suivant une loi $\mathcal{N}(2, 3^2)$, $(X \sim \mathcal{N}(2, 3^2))$. Calculer

1. $\mathbb{P}(X \leq 1)$.
2. $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
3. $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 3)$.

Exercice 3.37 Soit X une v.a. normale, $X \sim \mathcal{N}(2, 4^2)$

1. Calculer $\mathbb{P}(X > 1)$, $P(|X| \leq 4)$.
2. Determiner le plus grand α tel que $\mathbb{P}(X - 2 > \alpha) > 10^{-2}$.
3. Quelle est la loi de $\dfrac{X-1}{2}$

Exercice 3.38 Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles telles que :

$$X \sim \mathcal{N}(3, 2^2), \quad X \sim \mathcal{N}(0, 3^2) \quad \text{et} \quad Z \sim \mathcal{N}(2, 1^2)$$

. Parmi les égalités suivantes lesquelles sont vraies (sans faire de calculs) :

I/ i) $\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X \geq 2)$
ii) $\mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(Y \geq 2)$
iii) $\mathbb{P}(Z \leq 2) = \mathbb{P}(Z \geq 2)$

II/ i) $\mathbb{P}(X \leq -3) = \mathbb{P}(X \geq 3)$
ii) $\mathbb{P}(Y \leq -3) = \mathbb{P}(Y \geq 3)$
iii) $\mathbb{P}(Z \leq -3) = \mathbb{P}(Z \geq 3)$

III/ i) $\mathbb{P}(X \leq -1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1)$
ii) $\mathbb{P}(Y \leq -1) = 1 - \mathbb{P}(Y \geq 1)$
iii) $\mathbb{P}(Z \leq -1) = 1 - \mathbb{P}(Z \geq 1)$

IV/ i) $\mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2)$
ii) $\mathbb{P}(Y \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2)$
iii) $\mathbb{P}(Z \leq 2) = \mathbb{P}(Z \leq 2)$

On considère maintenant une v.a.r S de loi **quelconque** sur $[-5, 5]$, parmi les propriétés suivantes lesquelles sont **toujours** vraies

i) $\mathbb{P}(S \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(S \leq 2)$
ii) $\mathbb{P}(S \geq 2) = \mathbb{P}(S \leq -2)$

iii) $\mathbb{P}(S \leq -2) = 1 - \mathbb{P}(S \leq 2)$

Exercice 3.39 Soient $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) telle que

$$X \sim \mathcal{N}(9, 2^2)$$

.

1. Calculer, en utilisant la table de la loi normale centrée réduite,

$$\mathbb{P}(X \leq 11), \ \ \mathbb{P}(X \geq 5), \ \ \mathbb{P}(5 \leq X \leq 9) \ \text{ et } \ \mathbb{P}(7 \leq X \leq 15)$$

2. Déterminer λ et α tels-que

$$\mathbb{P}(X \leq 7) = \lambda \ \text{ et } \ \mathbb{P}(X \leq \alpha) = 0.2$$

3. Quelle loi suit la variable aléatoire Y définie par

$$Y = 2.X + 1$$

Indication On calculera $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 3.40 Le temps nécéssaire aux étudiants pour terminer une épreuve d'examen est une variable normale, de moyenne 90 minutes et d'écart type 15 minutes.

1. Quelle est la proportion des étudiants qui terminent l'épreuve en moins de 2 heures.
2. Quelle devrait être la durée de l'épreuve si l'on souhaite 90% des étudiants puissent la terminer.

Exercice 3.41 La note obtenue par des étudiants à un examen est une v.a.r. normale $X \sim \mathcal{N}(7, 3^2)$.

1. Calculer le pourcentage d'individus ayant plus de 10, et la note en dessous de laquelle se trouvent 10 % des étudiants.
2. Compte tenu de ces résultats, on décide de revaloriser l'ensemble des notes par une transformation linéaire $Z = aX + b$. Quelles valeurs doit-on donner à a et b pour que les valeurs précédentes passent respectivement à 50 % et 7 ?
   Indication : calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $Var(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 3.42 L'éclairage d'une commune est assuré par 2000 lampes dont la durée de vie moyenne est 1000 heures. Cette durée de vie suit une loi normale d'écart type $\sigma = 300$

1. Quel est le nombre de lampes hors d'usage au bout de 700h ? de 1500h ? de 3000h ?
2. Au bout de combien d'heures 5% sont hors d'usage ?
3. D'autres ampoules ont une durée de vie qui suit une loi $\mathcal{N}(1100, 400)$. Quelles ampoules faut-il choisir si l'on veut :
   i) Que la durée de vie moyenne soit maximale.
   ii) Que la durée pendant laquelle 95% des ampoules fonctionnent soit maximale.

4 Théorèmes limites

Sommaire

4.1 Théorèmes limites

On s'intérèsse à un évènement E de probabilité inconnue $\mathbb{P}(E)$.
On veut une estimation de $\mathbb{P}(E)$.
Si l'on répète N fois l'expérience obtient t'on "en moyenne" une approximation de $\mathbb{P}(E)$?
Que se passe t'il lorsque N tend vers l'infini ?

Exemple

Nous avons un dé truqué et nous voulons savoir quelles sont les nouvelles proba.

4.1.1 Loi faible des grands Nombres

Théorème *Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a.r. de même loi, de même espérance m, de même variance σ^2 et indépendantes (mutuellement). Alors la v.a.r. $\bar{X}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers m. On écrira*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$$

Convergence en probabilité : pour n grand $\bar{X}_n$ est **probablement** très proche de m
Cette loi confirme notre intuition : une fréquence tend à se stabiliser lors d'épreuves répétées.
On peut le vérifier expérimentalement.
Plus précisément : lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'un évènement est "proche" de sa probabilité.
C'est cette "convergence en probabilité" qui explique par exemple comment retrouver, en sondant un échantillon, la structure d'une population.

4.1.2 Loi forte des grands Nombres

Théorème *Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a.r. de même loi, de même espérance m et indépendantes. Alors la v.a.r. $\bar{X}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge* **presque sûrement** *vers m. On écrira*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} m$$

Convergence en p.s. : pour n grand $\bar{X}_n$ est "presque partout" très proche de m

Loi forte ou Loi faible ?

Ces deux lois nous assurent que $\bar{X}_n$ tend vers m lorsque n tend vers l'infini.
La loi faible nous assure que pour n assez grand $\bar{X}_n$ est assez proche de m mais elle n'exclut pas que pour des valeurs p plus grandes que n, $\bar{X}_n$ s'éloigne de m.
En effet il se peut que pour certaines valeurs (dont la probabilité collective est très faible) $\bar{X}_n$ s'éloigne de m.
La loi forte exclut cette éventualité.

4.1.3 Théorème Central Limite : de la limite centrale

Théorème *Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a.r. indépendantes de même loi, d'espérance m et de variance σ^2 alors la v.a.r. $S_n \sum_{i=0}^{n} X_i$ vérifie*

$$\frac{S_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}} \Longrightarrow Y \quad avec \;\; Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

c'est à dire que la v.a.r. $\frac{S_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}}$ suit pour n grand une loi normale centrée réduite.
C'est le théorème le plus important en probabilité.
Les v.a.r. X_i suivent **une** lois quelconque (la même pour toutes les v.a.r.).

Ce théorème permet de donner des approximations pour le calcul des probabilités d'évènement faisant intervenir une somme de v.a.r.
Il explique aussi pourquoi beaucoup de phénomènes aléatoires naturels admettent des distributions normales.

Proposition *Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n v.a.r. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. La v.a.r. $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. et S_n "tend" vers une loi normale de paramètres $(np, \sqrt{np(1-p)}$ lorsque n tend vers l'infini.*

En pratique en approche une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi normale de paramètres dès que $np \approx 20$

Proposition *Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n v.a.r. indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ. La v.a.r. $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ et S_n "tend" vers une loi normale de paramètres $(n\lambda, \sqrt{n\lambda}$ lorsque n tend vers l'infini.*

En pratique en approche une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par une loi normale dès que $np \approx 20$

4.2 Statistiques

Problème : évaluer une quantité α déterministe à partir d'un échantillon.
L'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de taille à déterminer pour satisfaire une exigence de "fiabilité", on parlera de **Niveau ou seuil de confiance**
Problème dit d'estimation ponctuelle.

Définition *Soient $X_1, \dots, X_n$ une suite de V.A. indépendantes admettant une moyenne μ et un écart type σ on note $\bar{X}$ la* **moyenne empirique** *de l'échantillon*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1} nX_i$$

Définition *Soient $X_1, \dots, X_n$ une suite de V.A. indépendantes admettant une moyenne μ et un écart type σ on note S^2 la* **variance empirique** *de l'échantillon*

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1} n(X_i - \bar{X})^2$$

Moyenne et variance empirique sont des v.a.
Si n est grand, d'après le théorème central-limite

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

En pratique σ est **inconnu** on le **remplace** par S, d'où

$$\mathbb{P}(\mu \in [\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}])$$

et donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\mu \in [\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}]) \\ = \ & \mathbb{P}(|\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{S}| \leq t) \\ \approx \ & 2\Phi(t) \end{aligned}$$

où

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t exp(-x^2/2)$$

En pratique
On choisit un **niveau ou seuil de confiance** α (en général $\alpha = 0.95$ ou $\alpha = 0.99$.
On estime grâce à la table ou par un calcul approché t_α, par exemple $t_{0.95} \approx 1.96$.
On peut alors affirmer

$$\mathbb{P}(\mu \in [\bar{X} - t_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}]) \approx \alpha$$

L'intervalle

$$[\bar{X} - t_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

est appelé intervalle de confiance pour μ au seuil (niveau) de confiance α
la v.a. $\bar{X}$ est dite estimateur de μ
Test d'hypothèse : on veut tester une hypothèse, par exemple équiprobabilité des lancés d'un dé.
Si X est une v.a. de moyenne μ on veut savoir si $\mu = \mu_0$ (appelée hypothèse nulle).
L'outil mathématique nous aide à prendre la décision : rejeter l'hypothèse ou pas.
Si on rejette l'hypothèse on a lhypothèse alternative, ici $\mu \neq \mu_0$.
Deux erreurs possible :
1/ On rejette l'hypothèse alors qu'elle est vraie : erreur de première espèce dont la probabilité est appelée risque de première espèce (noté α).

2/ On accepte l'hypothèse alors qu'elle est fausse : erreur de deuxième espèce dont la probabilité est appelée risque de deuxième espèce (noté β, $1-\beta$ est appelé puissance du test).
On souhaite bien sûr minimiser les deux risques, souvent dans la pratique minimiser l'un entraine une augmentation de l'autre.
D'après l'intervalle de confiance vu précédemment

$$\mathbb{P}(\mu \in [\bar{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}]) \approx \alpha$$

d'où

$$\mathbb{P}(\mu \in [\mu_0 - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \mu_0 + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}])$$

représente (si on accepte l'hypothèse) le risque de première espèce $1-\alpha$.
La note obtenue par des étudiants à un examen est une v.a.r. normale $X \sim \mathcal{N}(7, 3^2)$.

1. Calculer le pourcentage d'individus ayant plus de 10, et la note en dessous de laquelle se trouvent 10 % des étudiants.

On cherche $\mathbb{P}(X \geq 10)$, il suffit de centrer et réduire pour se ramener à une v.a. normale centrée réduite (on la notera dans cet exercice$Y$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 10) &= \mathbb{P}(\frac{X-7}{3} \geq \frac{10-7}{3}) \\
&= \mathbb{P}(Y \geq 1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) \\
&= 1 - F_Y(1)
\end{aligned}$$

On consulte la table

environ 16% des étudiants ont plus de 10.
on a donc $\mathbb{P}(Y \leq \frac{x_0-7}{3}) = 0.1$, en consultant la table on trouve (on cherche plutot x_1 tel que $\mathbb{P}(Y \leq \frac{x_1}{)} = 0.9$, on aura alors $\frac{x_0-7}{3} = -x_1$, vous pouvez vous en convaincre sur le graphique de la loi normale)

$$\frac{x_0-7}{3} = -1.28$$

on en déduit alors x_0.
Soit p la proportion de la population favorable à un candidat.
On souhaite grâce à un sondage avoir une estimation de p.
On intéroge un échantillon de n personnes et on prend comme approximation de p le nombre $\tilde{p}$ de personnes favorables à ce candidat dans l'échantillon.
Déterminer, grâce au théorème de la limite centrée, la taille de l'échantillon pour que $\tilde{p}$ approche p à 10^{-2} prés avec une probabilité de 0,95.
On souhaite, à taille d'échantillon fixée, trouver la précision obtenue. calculer

1. la précision ϵ sachant que l'échantillon est de taille $n = 1000$ et pour un seuil de confiance de $0,95$ (autrement dit qu'elle est la précision obtenue dans 95% des cas si l'échantillon est de taille $n = 1000$).
2. la précision ϵ sachant que l'échantillon est de taille $n = 1000$ et pour un seuil de confiance de $0,99$

On a lancé (Weldon) un dé 315 672 fois et tiré 106 602 fois l'une des faces 5 ou 6.

1. Calculer les fréquences théorique et observée d'apparition des faces 5 ou 6.
2. Calculer la fluctuation (différence entre les fréquences observée et théorique)
3. Quelle loi représente cette expérience aléatoire.
4. En utilisant le théorème central-limite, montrer que l'hypothèse d'un dé équilibré est à rejeter

test du χ^2 (imaginé par Pearson)
But : déterminer si une v.a. X suit une loi particulière.
On souhaite donc tester l'hypothèse :
H : X suit une loi $\mathcal{L}$.
On calcule les effectifs n_i extraits de notre échantillons de taille n
d'après le théorème central limite n_i/n tend vers p_i (probabilité théorique), plus précisément :

$$T = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2$$

C'est cette "tendance" qui nous fournira le test.

Fiche TD 4

Exercice 4.43 On lance une pièce parfaitement équilibrée 100 fois.
On s'intérèsse alors au nombre de “Pile”. Si S_{100} désigne la v.a. de cette expérience aléatoire, calculer grâce au théorème de la limite centrée :

1. $\mathbb{P}(S_{100} \leq 45)$
2. $\mathbb{P}(45 \leq S_{100} \leq 55)$
3. $\mathbb{P}(S_{100} > 63)$
4. $\mathbb{P}(S_{100} < 57)$

Exercice 4.44 On lance 420 fois un dé. Quelle est la probabilité que la somme des lancés soit entre 1400 et 1550.

Exercice 4.45 Un QCM de mathématiques est composé de 48 questions, les réponses proposées à chaque question sont “vrai” ou “faux”. L'étudiant A répond correctement à chaque question avec une probabilité de 3/4, un autre étudiant, B, se contente de répondre au hasard.
Sachant qu'il faut obtenir 30 bonnes réponses pour réussir cet examen, calculer les probabilités de succés des étudiants A et B.

Exercice 4.46 Soit p la proportion de la population favorable à l'adoption d'un texte de loi (donc $1-p$ la proportion de personnes hostile à ce texte).
On souhaite grâce à un sondage avoir une estimation de p, pour cela on intéroge un échantillon de n personnes et on prend comme approximation de p le nombre $\tilde{p}$ de personnes favorables à ce texte dans l'échantillon.
Déterminer, grâce au théorème de la limite centrée, la taille de l'échantillon pour que $\tilde{p}$ approche p à 10^{-2} prés avec une probabilité de 0,95.
<u>*Indication et Rappel*</u> On s'intérèsse à la somme de n v.a. de Bernoulli de paramètre p. C'est donc une v.a. de loi binomiale et de paramètres n, p.

Exercice 4.47 Suite à l'annulation d'un concert, un guichet procède à certaines heures au remboursement des places. Le prix moyen d'une place est de 10 euros avec un écart type de 5 euros.
Quelle est la probabilité pour qu'à une heure donnée, le guichet, disposant de 1000 euros, puisse rembourser les 120 personnes qui s'y présentent ?
<u>*Indication*</u> La v.a. X représentant le montant à rembourser est la somme de 120 v.a. supposées indépendantes.

Exercice 4.48 Le département d'informatique de l'IUT de Lannion souhaite avoir 118 étudiants de première année mais ne peut acceuillir plus de 140 étudiants. On suppose que chaque postulant retenu s'inscrit effectivement avec une probabilité de 0.6 et que l'on peut modéliser ce phénomène aléatoire avec une v.a. de Bernoulli.
Si le département retient 170 candidatures, quelle est la probabilité d'avoir trop d'étudiants.
Même question si le département retient 200 candidatures.

Exercice 4.49 Sur 53680 familles de lapins ayant 8 petits (soit 429440 petits en tout), il y a 221023 mâles et 208417 femelles. On souhaite savoir si le nombre de mâles est significativement plus élevé que celui des femelles.

1. Si l'on suppose que les chances sont égales d'avoir un mâle ou une femelle, quelle loi suit la v.a. "le ième petit est un mâle"
2. Grâce au théorème de la limite centrée, déterminer x_0 tel que la v.a. S représentant le nombre de mâle vérifie
$$\mathbb{P}(214720 - x_0 \leq S \leq 214720 + x_0) \geq 0,95$$
3. Conclure

Exercice 4.50 Une compagnie aérienne constate qu'en général 90% des passagers qui réservent un billet d'avion se présentent effectivement au départ. Cette compagnie décide alors d'accepter 340 réservations sur un vol de 300 sièges (surbooking[1]).

1. Quelle loi suit la variable aléatoire modélisant la présence effective d'un voyageur (ayant réservé une place) au départ de l'avion ? Justifier votre réponse.
2. Quelle est la probabilité de voir plus de passager se présenter au départ que de places disponibles ?
3. Que devient cette probabilité si la compagnie n'accepte désormais que 324 réservations.
Les dirigeants de la compagnie décident alors d'effectuer un sondage auprès d'un échantillon de clients pour savoir s'ils trouvent compréhensible la pratique du surbooking.
On notera C la proportion de clients trouvant le surbooking compréhensible et $\tilde{C}$ la proportion de clients **dans l'échantillon** trouvant le surbooking compréhensible.
4. Montrer que $\forall p, p \in [0,1], p(1-p) \leq 1/4$.
5. Si l'on interroge 300 clients, quelle est la précision obtenue dans 95% des cas si l'on approche C par $\tilde{C}$?
Indication : *On pourra utiliser l'inégalité de la question précédente*

1. Le surbooking consiste à accepter plus de réservations que de places disponibles

Fiche TD 5

Exercice 5.51 On veut tester l'hypothèse mendelienne : yeux bleus (gènes) récessifs et yeux marrons dominants.

1. Si l'hypothèse est vraie, qu'elle la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard ait les yeux bleus.
2. Si l'hypothèse mendelienne est valide, combien de personnes doit on observer pour être certain avec une probabilité de 99,8% que la proportion de personnes aux yeux marrons sera comprise entre 0,7 et 0,8.

Exercice 5.52 Soit p la proportion de la population favorable à l'adoption d'un texte de loi (donc $1-p$ la proportion de personnes hostile à ce texte).
On souhaite grâce à un sondage avoir une estimation de p, pour cela on intéroge un échantillon de n personnes et on prend comme approximation de p le nombre $\tilde{p}$ de personnes favorables à ce texte dans l'échantillon.
Déterminer, grâce au théorème de la limite centrée, la taille de l'échantillon pour que $\tilde{p}$ approche p à 10^{-2} prés avec une probabilité de 0,95.

Exercice 5.53 A précision donnée quelle taille d'échantillon ?
On reprends les notations de l'exercice précédent. On souhaite déterminer le nombre de personnes à interroger pour ce sondage afin d'approcher p à ϵ prés avec une probabilité α. En remarquant que $p(1-p) \leq 1/4$ calculer

1. la taille n de l'échantillon pour approcher p à $0,01$ avec une probabilité de 95%.
2. la taille n de l'échantillon pour approcher p à $0,01$ avec une probabilité de 99%.

Exercice 5.54 On reprends les notations de l'exercice 3. On souhaite, à taille d'échantillon fixée, trouver la précision obtenue. En remarquant que $p(1-p) \leq 1/4$ calculer

1. la précision ϵ sachant que l'échantillon est de taille $n = 1000$ et pour un seuil de confiance de $0,95$ (autrement dit qu'elle est la précision obtenue dans 95% des cas si l'échantillon est de taille $n = 1000$).
2. la précision ϵ sachant que l'échantillon est de taille $n = 1000$ et pour un seuil de confiance de $0,99$

Exercice 5.55 Le dé est-il biaisé ?
Weldon a lancé un dé 315 672 fois et tiré 106 602 fois l'une des faces 5 ou 6.

1. Calculer les fréquences théorique et observée d'apparition des faces 5 ou 6.
2. Calculer la fluctuation (différence entre les fréquences observée et théorique)
3. Quelle loi représente cette expérience aléatoire.
4. En utilisant le théorème central-limite, montrer que l'hypothèse d'un dé équilibré est à rejeter

5 TP sur machine

Simulation de variables aléatoires discrètes

La commande `rand` (voir aussi `grand`) de Scilab permet de simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ (tous les réels entre 0 et 1 ont la même probabilité d'être choisis).

Exemple introductif : Loi de Bernoulli

On cherche à simuler un jeu de pile ou face avec une pièce équilibrée. On peut facilement, en utilisant un générateur de nombres pseudo-aléatoires (`rand` sous Scilab), simuler ce genre En effet, à partir de la variable aléatoire uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ on définit la variable aléatoire $X = \mathbb{I}_{\{\mathcal{U}<\frac{1}{2}\}}$, on a alors

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, il suffit de "tirer" un nombre pseudo-aléatoire entre $[0,1]$ puis de comptabiliser un pile s'il est supérieur à $\frac{1}{2}$, sinon un face.
Pour une loi de Bernoulli de paramètre p, on procède de la même manière.
Notons enfin, que ce procédé va nous permettre de simuler des lois discètes à valeurs dans $\{1, ...N\}$.

On considère une variable aléatoire (v.a.) X à valeurs dans $\{2,3,4,5\}$ et de loi

i	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=i)$	0.25	0.125	0.5	0.125

Ecrire une fonction scilab simulant cette variable aléatoire. Tester votre fonction (on fera un grand nombre de tirages et on comparera les fréquences théoriques et observées).

Ecrire une fonction scilab qui simule une variable aléatoire uniforme sur le carré unité.
Vérifier graphiquement votre fonction (il suffit de faire un grand nombre de tirage puis d'afficher les points).
Ecrire une fonction scilab qui simule une variable aléatoire uniforme sur $[-1,1]$.

Ecrire, en utilisant les instructions rand et int (partie entière) une fonction simulant le résultat du lancer d'un dé non pipé à six faces.
Pour tester la validité de cette fonction, calculer la fréquence de sortie d'un chiffre entre 1 et 6 au bout de N tirages (prendre N très grand).

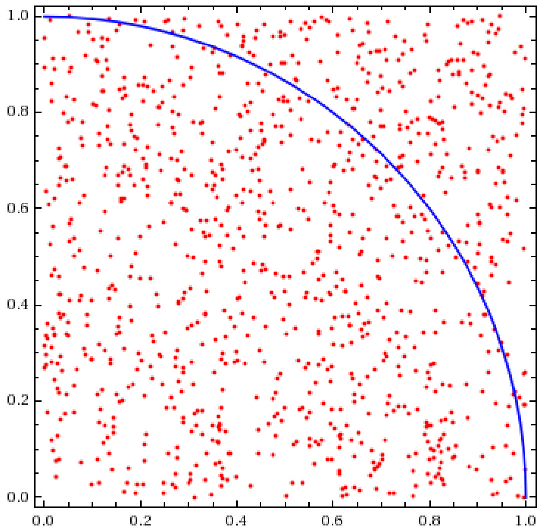
Générer un vecteur de taille $N = 1000$ (i.e. une matrice de dimension $(1,N)$) dont les composantes sont des réalisations indépendantes de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$ avec la fonction rand.
Tracer l'histogramme correspondant avec la fonctionhistplot.
Augmenter $N (N = 10000, 100000...)$. Que constatez-vous ?
Ecrire une fonction scilab simulant une loi binomiale de paramètres n et p (qu'on passera en paramètres d'entrée de la fonction).

Le paradoxe du chevalier de Méré

Est-il avantageux, lorsqu'on joue au dé, de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 fois le dé ? Est-il avantageux de parier sur l'apparition d'un double-six, quand on lance 24 fois deux dés ?
Le chevalier de Méré, qui était un grand joueur, avait remarqué que le premier jeu était avantageux.
Se laissant abuser par un soi-disant argument d'homothétie, le chevalier considérait que le deuxième pari était aussi avantageux : en lançant un dé, il y a 6 issues ; en lançant deux 2 dés, il y en a 36, soit 6 fois plus. Puisqu'il est avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant le dé 4 fois de suite, il doit être avantageux de miser sur l'apparition d'un double-six en lançant un dé 24=4x6 fois de suite.
Malheureusement pour le chevalier, les règles des probabilités sont plus complexes, et c'est Pascal qui calcula la vraie probabilité, très légèrement inférieure à 0.5 : le deuxième jeu n'est pas avantageux.
En effectuant un grand nombre de simulation des deux jeux précédents, vérifier que le premier jeu est avantageux alors que le second ne l'est pas, contrairement à l'intuition du chevalier de Méré. . . .

Méthode de Monte-Carlo

Il est souvent difficile (sinon impossible) de déterminer analytiquement l'intégrale d'une fonction compliquée (et donc l'aire d'une surface).
Dans certains cas des méthodes probabilistes permettent d'obtenir de bons résultats. Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes probabilistes très répandues (leur nom provient bien de la ville du même nom célèbre pour ses casinos).
Nous allons mettre en œuvre une telle méthode pour approcher π puis pour le calcul d'une intégrale. La justification mathématique de cette approche sera vue en cours.
On considère un carré de coté unité dans lequel on inscrit un quart de cercle. On tire aléatoirement les coordonnées d'un point (x, y) avec $0 \leq x, y \leq 1$.



1. Quelle est la probabilité pour que ce point soit à l'intérieur du quart de cercle.
2. Faire "help rand" sous scilab pour vérifier que les nombres (pseudo) aléatoires sont générés entre 0 et 1.
3. En utilisant la commande "rand" sous scilab, écrire une fonction scilab ayant comme paramètre d'entrée le nombre n de nombres aléatoires et qui renvoie une approximation de pi (rappel : le carré de la distance d'un point (x, y) à l'origine est $x^2 + y^2$).
4. Lancer la fonction pour n grand, que remarquez-vous.
5. Adapter le programme précédent pour calculer l'intégrale d'une fonction entre 0 et 1. On se limitera à la fonction exp. Tracer l'erreur en fonction de n (nombres de points aléatoires)
6. Généralisation : calculer l'intégrale d'une fonction entre a et b. On peut remarquer qu'en faisant le changement de variable $x = a + (b - a)t$ on se ramène au cas précédent (t varie alors entre 0 et 1).

La ruine du joueur

Exercice 5.56 Lors de l'étude d'un phénomène qui dépend du hasard, il est souvent nécéssaire de prendre en compte l'évolution de ce phénomène au cours du temps. Le modèle probabiliste correspondant est alors appelé **processus stochastique**.
Nous allons nous intéresser au cas particuliers pour lesquels l'espace des temps est un espace dénombrable (dans notre cas fini), on parle alors de **chaine de Markov**.
Un joueur participe à un jeu de pile ou face. Il mise un euro à chaque lancé. Il double sa mise (1 euro) si la pièce tombe sur pile et perd sinon. Le jeu s'arrête dès que le joueur est en possession de 6 euros ou qu'il a tout perdu. Si le joueur débute la partie avec 3 euros, on souhaite connaitre la probabilité pour que le jeu s'arrête au bout de 5 lancés, de 24 lancés.
A tout moment le joueur possède 0,1,...,6 euros, on dira qu'il est à l'état $s_0, s_1, \dots, s_6$.
Le jeu consiste donc à bouger d'un état à l'autre. Nous supposerons qu'un joueur à l'état s_3 à autant de chance de se retrouver (au prochain lancé) en s_2 qu'en s_4. Par contre si le joueur atteint les états s_0 ou s_6 il ne peut plus changer d'état (on dit que les bords sont absorbants).
On note $p_i(n)$ la probabilité que le joueur soit à l'état s_i aprés n lancés.

1. Exprimer $p_i(n+1), \;\; 0 \leq i \leq 6$ en fonction de $p_i(n), \;\; 0 \leq i \leq 6$
2. Ecrire le résultat précédent sous forme matricielle (c'est la matrice de transition).
3. Ecrire une fonction scilab qui calcule la probabilité de se retrouver dans un état quelconque apres n tirages.
4. Ajouter en paramètre de la fonction la somme en possession du joueur au début de la partie. Comparer les probabilités pour que le jeu s'arrête sur un gain de 6 euros en fonction de la somme en possession du joueur en début de partie.
   Lorsque le jeu s'arrête dans ce cas on dit que le joueur "a fait sauter la banque" (un gain maximal est souvent fixé dans les jeux d'argent).
5. Que devient la matrice de transition si le joueur mise 2 euros à chaque fois ?

Prévisions de ventes

Exercice 5.57 Les dirigeants d'un hebdomadaire local, *le Trégor*, ont établis grâce à une étude qu'une personne qui achète leur journal la semaine i, a 75% de chance de l'acheter la semaine suivante $(i+1)$. Ils ont de la même manière déterminé qu'une personne qui n'achète pas leur journal la semaine i a 20% de chance de l'acheter la semaine suivante.
La semaine 1, 7500 personnes sur les 20000 habitants de Lannion ont acheté le journal.
Afin d'accroître la rentabilité du journal, en tirant le bon nombre d'exemplaires, les dirigeants se posent les questions suivantes :
- Si une personne achète le journal cette semaine (semaine 1), quelle est la probabilité qu'elle l'achète la semaine 2 ? la semaine 3, la semaine n ?
- Quel est le nombre de ventes que le journal peut espérer réaliser la semaine 2 ? la semaine 3, la semaine n ?
- Le nombre d'exemplaires vendus varie t'il beaucoup de semaine en semaine ou a t'il tendance à se stabiliser ?

On vous confie ce travail, et vous remarquez que finalement en semaine n la population se divise en deux groupes distincts : le groupe de ceux qui ont acheté le journal, que vous décidez de noter $g_{1,n}$ et le groupe de ceux qui ne l'ont pas acheté, que vous notez $g_{2,n}$.

1. En notant
$$P_n = \begin{pmatrix} g_{1,n} \\ g_{2,n} \end{pmatrix},$$
donner la matrice, T, de transition. Justifier votre réponse.
Indications et remarques
La matrice $T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où t_{ij} est la probabilité pour qu'une personne se trouvant dans le goupe j ($j = 1, 2$) une certaine semaine se retrouve dans le groupe i la semaine suivante.
La matrice T vérifie
$$P_{n+1} = T.P_n$$
2. Exprimer P_n en fonction de l'état initial P_1.
3. Ecrire une fonction scilab donnant le nombre d'exemplaires susceptibles d'être vendus au bout de n semaines. Donner les résultats obtenus pour $n = 10, 20, 47$.
4. Que représente les coefficients de la matrice T^2, T^3.
Indications et remarques
On pourra se poser la question pour T et remarquer que ce sont des probabilités.
5. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant acheté le journal une semaine donnée ne l'achète pas 7 semaines plus tard ? De la même manière, quelle est la probabilité qu'une personne n'ayant pas acheté le journal, l'achète deux semaines plus tard.
Indications et remarques
On pourra utiliser la question précédente.
6. En notant enfin que si le nombre d'exemplaires vendus se stabilise, on a
$$P_n = P_{n+1} = P_{n+2} = \dots$$
montrer que P_n est un vecteur propre de T. Quelle est la valeur propre associée.
Indications et remarques
Un vecteur $u \neq 0$ est un vecteur propre d'une matrice A s'il vérifie $A.u = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est alors une valeur propre de A.
7. Donner le nombre de journaux vendus lorsqu'on atteint l'équilibre.
Indications et remarques
On pourra remarquer qu'on cherche un vecteur propre v associé à la valeur propre de la question précédente et dont la somme des composantes est 20000 (on expliquera pourquoi).
On notera par ailleurs que si u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ alors il en va de même pour $\alpha u, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$.

Loi Normale

Un ascenseur peut porter une charge de $600kg$. On suppose que les utilisateurs éventuels ont un poids distribué suivant une loi normale d'espérance $E = 85kg$, et de variance $V = 81kg^2$. On désire trouver le nombre maximum M de personnes autorisées à monter dans l'ascenceur sans pour autant dépasser la charge maximale avec une probabilité supérieure à un millième.

1. Ecrire un programme réalisant le calcul de M.
   Rappel et Indication : La charge de n personnes correspond à une variable aléatoire normale de moyenne nE et de variance nV.
   On pourra utiliser sous scilab *cdfnor*.

Le Problème du voyageur de commerce

Fonctions scilab suceptibles d'être utiles pour ce TP		
diag	grand	sum
sort	find	zeros
gsort	setdiff	

Introduction

Un voyageur de commerce doit se rendre à n villes. Il souhaite le faire en parcourant le moins de distance possible sans repasser deux fois par une même ville sauf pour la première puisqu'il souhaite (à priori!) revenir chez lui.
Ce problème est, contrairement aux apparences, très difficile à résoudre. Il faut en effet des milliards d'années pour trouver la meilleure solution pour 30 villes.
Dans la pratique le problème est encore plus complexe puisqu'il faut tenir compte, en plus de la distance, du coût réel du trajet (route abrupte, ou coût financier : péage ...).
Pour toutes ces raisons, on se contetera de trouver une “bonne” solution au problème. Pour ce faire nous allons utiliser un algorithme génétique.

Algorithmes Génétiques

Ces algorithmes sont inspirés de la théorie de l'évolution et des principes de la génétique.
On part donc d'un ensemble de solutions du problème qu'on essaie d'améliorer en les modifiant par “*croisement*” et par “*mutation*”.
Afin de ne pas grossir l'ensemble inutilement, on “*sélectionne*” les meilleures solutions, les plus “*adaptées*”.
On voit ainsi que l'on retouve le vocabulaire et les différentes phases de la théorie de l'évolution (et les principes de la génétique) :

Individu	$\longrightarrow$	Une solution du problème.
Population	$\longrightarrow$	Tous les individus, toutes les solutions.
Reproduction	$\longrightarrow$	Croisement de deux individus, deux solutions, pour en produire de nouveaux.
Mutation	$\longrightarrow$	Modification aléatoire d'un individu, d'une solution.
Adaptation	$\longrightarrow$	Evaluation d'un individu, d'une solution (par rapport au problème à résoudre)
Selection	$\longrightarrow$	Elimination des individus, des solutions les moins adaptés.

Application

On mettra en pratique dans ce TP un algorithme génétique pour la résolution du problème du voyageur de commerce. On trouvera, bien entendu, **une solution** qui ne sera pas nécéssairement la meilleure.
Les n villes à parcourir seront numérotées de 1 à n et on considère que le voyageur partira toujours de la ville 1 (chez lui) et qu'il y retournera à la fin de son périple.

Ecrire une fonction scilab, **Carto** prenant comme paramètre d'entrée le nombre n de villes à parcourir et donnant en sortie une matrice aléatoire nxn, D, représentant les distances entre les villes, Il s'agira de notre carte. L'élément d_{ij} de D représentera ainsi la distance entre les villes i et j.

Indications et remarques

La matrice doit être symétrique à diagonale nulle (la distance des villes i à j est évidemment la même qu'entre j et i ; la distance de i à i est nulle).
Si A est une matrice quelconque alors la matrice $A + {}^tA$ est symétrique.

Ecrire une fonction scilab, **Populat**, prenant comme paramètres d'entrée le nombre n de villes et le nombre $2m$ de solutions (individus) que l'on souhaite générer et qui renvoie une matrice, P, de solutions aléatoires. Il s'agira de notre population de départ.

Indications et remarques

La matrice sera donc de taille $(n, 2m)$. Chaque colonne est une solution possible dont le premier élément sera toujours 1 (ville de départ imposée) et les autres des permutations de $\{2, \ldots, n\}$.

Ecrire une fonction scilab, **CalculAdapt**, qui prend comme paramètre d'entrée une solution (un individu) et qui renvoie la distance totale parcourue si l'on suit ce trajet.

Indications et remarques

Il ne faut pas oublier le dernier trajet, de la dernière ville à la première (pour rentrer à la maison !).
Pour calculer la distance si l'on suit le trajet $(1, 4, 3, 2)$ il suffira de faire $d_{14} + d_{43} + d_{32} + d_{21}$.
Les matrice D des distances sera supposée déjà crée, cette fonction prendra donc en paramètre d'entrée une solution et utilisera D pour calculer son "adaptation".
On pourra modifier cette fonction pour calculer les distances des $2m$ solutions, la fonction prendra alors la matrice des $2m$ solutions en entrée et donnera en sortie un vecteur de taille $2m$ contenant les distances des $2m$ solutions.

Ecrire une fonction **SelectElit** qui prend en paramètre une population P de $2m$ individus (au début de l'algorithme la population sera donnée par la fonction **Populat**) et qui renvoie les m meilleures solutions.

Indications et remarques

La fonction **SelectElit** utilisera bien-sûr la fonction **CalculAdapt**. Cette sélection est dite élitiste puiqu'elle ne conserve que la meilleure moitié de l'ensemble des solutions.

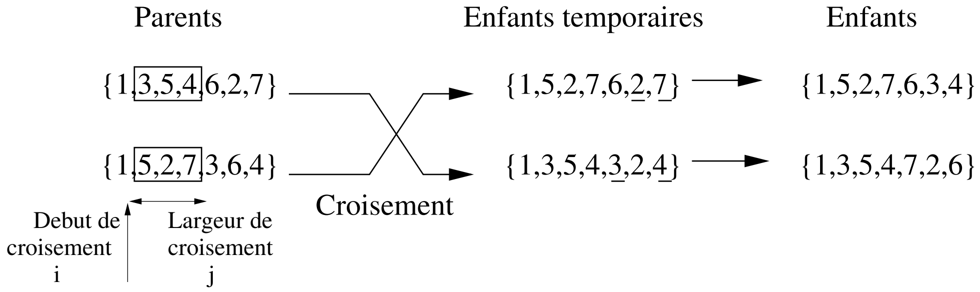
Ecrire une fonction **SelectTourn** qui prend en paramètre une population P de $2m$ individus et qui renvoie m solutions. Dans cette fonction on choisira au hasard 2 solutions parmi les $2m$ et ne conservera que la meilleure des deux, on répetera cette élimination m fois. Cette fonction donnera donc en sortie m solutions parmi les $2m$ initiales.

Indications et remarques

La fonction, **SelectTourn**, met en oeuvre une méthode par tournoi : on choisit deux individus, on les fait combattre et on ne conserve que le meilleur.
Il est possible qu'un individu (solution) participe à plusieurs tournois et ainsi être conservé en plusieurs exemplaires (s'il gagne). Il peut donc y avoir parmi les m solutions en sortie de cette fonction plusieurs solutions identiques.

Croisement

Après avoir sélectionné les m individus les plus adaptés, on répartit ces survivants en couple aléatoire que l'on croise pour obtenir deux individus (enfants).
Le croisement consiste à échanger des parties des parents, on obtient ainsi des enfants temporaires dans lesquels il peut y avoir des villes en double. Il faut alors remplacer les doublons par les villes manquantes en respectant l'ordre du parent n'ayant pas donné la partie croisée.



Dans l'exemple ci-dessus on a croisé à partir de $i = 2$ et pour une largeur de $j = 3$. Les enfants temporaires ainsi obtenus possèdent des doublons, dans le premier enfant par exemple on retrouve deux fois les villes 2 et 7, il convient alors de les remplacer par les villes manquantes (ici 3 et 4). On ajoute les villes manquantes dans le même ordre que celui où elles apparaissent dans le parent "principal" (celui donnant la partie non croisée : sur le graphique il est sur la même ligne). Attention, on ne modifie pas la partie croisée.

Ecrire une fonction **Croisement** qui prend en paramètre d'entrée 2 individus et qui renvoie deux enfants obtenus par le procédé décrit précédemment.

Indications et remarques

Les entiers i, de début de croisement, et j de largeur de croisement sont choisis aléatoirement, $i \in 2, \dots n-1$ (la première ville du parcours sera toujours à 1) et $j \in 1, \dots, n-i$.
Les parties obtenues par croisement ne doivent pas être altérées.
On peut remarquer que les parties croisées permettent de déterminer les éléments en double et ceux manquant. Il suffit alors de chercher l'indice des éléments en double en dehors de la plage d'indice du croisement et de les remplacer par les éléments manquants (dans l'ordre du parent !).
Cette fonction est assez délicate, on fera des tests simples pour s'assurer de son bon fonctionnement.

Ecrire une fonction **Mutation** qui prend en entrée un individu et qui renvoie un autre obtenu par mutation. On se limitera au cas le plus simple : une mutation permutera au hasard deux villes de l'individu en entrée (à l'exclusion de la ville 1).

Indications et remarques

Cette fonction est particulièrement simple puisqu'elle se résume au tirage aléatoire de deux entiers, i et j, (indices) entre 2 et n et à l'échange des villes en positions i et j.

Ecrire la fonction principale **Genetiq** qui prend en entrée un entier n (nombre de villes), le nombre d'individus, $2m$, dans la population initiale, le taux, τ, de la population subissant une mutation à chaque itération, la méthode de sélection choisie (élitiste ou par tournoi) et enfin le nombre *iter* d'itérations.
Cette fonction donnera en sortie la solution retenue.

Indications et remarques

Le nombre d'itérations est choisi au début par l'utilisateur. Au début de la fonction on crée une population de départ (Génèse) et une fois pour toute une carte (fonction Carto) puis à chaque itération on commence avec les $2m$ solutions (du début pour la première itération puis avec les solutions de l'itération précédente) que l'on sélectionne par la méthode retenue (élitiste ou par tournoi). On croise ensuite les m solutions retenues pour revenir à $2m$ solutions. On fait enfin muter τ de ces solutions. A la dernière itération on sélectionne la meilleure solution.

A.1. Table de la loi normale

Table de la Loi Normale Centrée Réduite $Z \sim \mathcal{N}(0;1^2)$.

$$F_z(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{et pour } x < 0, \text{ on a } F_z(x) = 1 - F_z(-x).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

A.2. Solutions

5.1 Solutions

Solution de l'exercice 1.1

1.
2.

Solution de l'exercice 1.3

Solution de l'exercice 1.14

1. (a) On peut remarquer que f_1 change de signe entre $[0, 2]$ (elle s'annule en -3 et 1 on peut s'assurer qu'elle change alors de signe), elle ne peut donc pas être une densité de probabilité.

   (b) Pour que f_2 soit une densité il faut

$$\begin{cases} f_2(x) \geq 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\, dx = 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

   ce qui donne

$$\begin{cases} \mu \geq 0 \\ \displaystyle\int_{0}^{1} f_2(x)\, dx = \mu \left[ln(x+1)\right]_0^1 = 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

   et finalement on trouve

$$\mu = \frac{1}{ln(2)} \quad (ln(2) > 0)$$

   (c) que f_3 soit une densité il faut

$$\begin{cases} f_3(x) \geq 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)\, dx = 1 \end{cases} \tag{5.3}$$

   ce qui donne

$$\begin{cases} f_3(x) \geq 0 \\ \displaystyle\int_{0}^{2} \nu(1-\nu x)\, dx = -\frac{1}{2}[(1-\nu x)^2]_0^2 = 1 \end{cases} \tag{5.4}$$

   soit

$$\begin{cases} f_3(x) \geq 0 \\ 2\nu^2 - 2\nu + 1 = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

   or l'équation $2\nu^2 - 2\nu + 1 = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ $(\Delta < 0)$; f_3 n'est donc pas une densité.

2. La fonction de répartition F_2 de f_2 est donnée par

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f_2(t)\,dt$$

soit,

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{ln(2)} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [1,+\infty[\end{cases} \tag{5.6}$$

et finalement,

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{ln(x+1)}{ln(2)} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [1,+\infty[\end{cases} \tag{5.7}$$

Solution de l'exercice 1.15 1. Il suffit de réduire au même dénominateur et d' identifier, on peut aussi remarquer directement que

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{x-1} + \frac{-\lambda}{x+2}$$

soit $\alpha = -\beta = \lambda$. (On peut aussi bien sûr donner deux valeurs à x et résoudre !).

2. On peut d' abord noter que $x^2 + x - 2 > 0$ pour $x \in [2,3]$ (car $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$). Pour que f_X soit bien la densité de probabilité d'une v.a. il faut donc déjà que $\lambda > 0$ ($f_X > 0$).
Ensuite il suffit d' écrire que

$$\int_2^3 f_X(x)dx = 1$$

soit en utilisant la question précédente

$$\int_2^3 \frac{\lambda}{x-1}dx + \int_2^3 \frac{-\lambda}{x+2}dx = 1$$

i.e.

$$\lambda[ln(x-1)]_2^3 - \lambda[ln(x+2)]_2^3 = 1$$

on trouve alors

$$\lambda = \left[ln\left(\frac{8}{5}\right)\right]^{-1}$$

Solution de l'exercice 1.20 1. Il suffit de dériver la fonction de répartition, on trouve

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[\\ \dfrac{1}{xln(2)} & \text{si} \quad x \in]1,2] \end{cases} \tag{5.8}$$

2. Il suffit de remarquer que si $\alpha \notin [0,1]$, alors il n'y pas de solution.

Solution de l'exercice 1.21 1. Pour que f_X soit bien une densité de probabilité il faut avoir

$$\begin{cases} f_X(x) \geq 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \end{cases} \tag{5.9}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \lambda \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}\,dx = 1 \end{cases} \tag{5.10}$$

on trouve

$$\frac{-\lambda}{3}[e^{-3x}]_0^{+\infty} = 1$$

c'est à dire

$$\lambda = 3$$

2. La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0] \\ \displaystyle\int_0^x 3e^{-3t}\,dt & \text{si} \quad x \in [0, +\infty[\end{cases} \tag{5.11}$$

ou encore

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0] \\ 1 - e^{-3x} & \text{si} \quad x \in [0, +\infty[\end{cases} \tag{5.12}$$

3.

$$\mathbb{P}(X < 1) = F_X(1) = 1 - e^{-3}, \quad \mathbb{P}(X \geq -1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -1) = 1$$

et

$$\mathbb{P}(-2 \leq X < 1) = F_X(1) - F_X(-2) = 1 - e^{-3}$$

Solution de l'exercice 1.22 1. Pour que f soit une densité de probabilité, on doit avoir

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} f(t)dt \ \text{ car } f \text{ est nulle à l'exterieur de } [-1,1] \\ &= \int_{-1}^{1} kt^2dt = k\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\ &= \tfrac{2}{3}k \end{aligned}$$

On doit donc avoir $k = 3/2$.

2. (a) <u>1^{er} cas</u> $x \in]-\infty, -1]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) <u>$2^{ème}$ cas</u> $x \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-1}^{x} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c) <u>$3^{\text{ème}}$ cas</u> $x \in [1,+\infty[$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

finalement

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty,-1] \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

3. On peut déjà noter que si $a \notin [0,1]$ il n'y a pas de solution (une probabilité prends ses valeurs dans $[0,1]$, d'autre part
$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F_X(x).$$
On veut dont résoudre
$$1 - F_X(x) = a \Leftrightarrow F_X(x) = 1 - a$$
donc, puisque $1 - a \in [0,1]$ et d'après la question précédente
   (a) Si $a = 1$ on a une infinité de solutions $x \in]-\infty,-1]$
   (b) Si $a = 0$ on a une infinité de solutions $x \in [1,+\infty[$
   (c) Si $a \in]0,1[$ il faut résoudre
   $$1/2(x^2+1) = 1 - a$$
   d'où
   $$x^2 = 1 - 2a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-2a}$$

4.
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} 3/2t.t^2 dt \\ &= 3/2 \int_{-1}^{1} t^3 \\ &= 3/2 \left[t^4/4\right]_{-1}^{+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

<u>***Solution de l'exercice 2.29***</u> D'abord f_X est bien une densité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 1$$

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{1}{b-a}.\mathbb{I}_{[a,b]}(t)dt \\ &= \int_a^b t\frac{1}{b-a}dt \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}Var(X) &= \mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\frac{1}{b-a}.\mathbb{I}_{[a,b]}(t)dt - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \int_a^b t^2\frac{1}{b-a}dt - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2.30 On peut facilement résoudre cet exercice en remarquant que Y suit aussi une loi uniforme (mais pas sur $[0,1]$).
Calculons d'abord $\mathcal{F}_{\mathcal{U}([0,1])}$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}([0,1])}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty,0] \\ \displaystyle\int_0^x dt = x & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in]1,+\infty] \end{cases} \tag{5.13}$$

1.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leq x) \\ &= \mathbb{P}(3\mathcal{U}+5 \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\mathcal{U} \leq \tfrac{x-5}{3}) \\ &= \mathcal{F}_{\mathcal{U}([0,1])}(\tfrac{x-5}{3})\end{aligned} \tag{5.14}$$

Il suffit donc de remplacer ds (5.13).

$$\mathcal{F}_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{x-5}{3} \in]-\infty,0] \\ \frac{x-5}{3} & \text{si} \quad \frac{x-5}{3} \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad \frac{x-5}{3} \in]1,+\infty] \end{cases} \tag{5.15}$$

soit finalement

$$\mathcal{F}_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty,5] \\ \frac{x-5}{3} & \text{si} \quad x \in]5,8] \\ 1 & \text{si} \quad x \in]8,+\infty] \end{cases} \tag{5.16}$$

On voit donc que Y suit une loi uniforme sur $[5,8]$, $Y = \mathcal{U}([5,8])$.

2. Pour déterminer la densité de probabilité de Y, deux solutions possibles : on dérive la fonction de répartition ou on utilise l'annexe sachant que $Y = \mathcal{U}([5,8])$. On trouve

$$f_Y(x) = 1/3 \text{ si } x \in [5,8] \text{ 0 ailleurs}$$

3. Pour le calcul de $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$ il suffit de consulter l'annexe du cours :

$$\mathbb{E}(Y) = 7.5 \quad \text{et} \quad Var(Y) = 3/4$$

4. Remarquons d'abord que $\mathbb{P}(Y > y) = \alpha \Rightarrow 1 - F_Y(y) = \alpha$, on cherche donc à résoudre

$$F_Y(y) = 1 - \alpha$$

   (a) Si $1 - \alpha = 0$ c'est à dire, si $\alpha = 1$ alors les $y \in]-\infty, 5]$ sont solutions.
   (b) Si $1 - \alpha = 1$ c'est à dire, si $\alpha = 0$ alors les $y \in]8, +\infty]$ sont solutions.
   (c) Si $0 \leq 1 - \alpha \leq 1$ c'est à dire, si $0 \leq \alpha \leq 1$ alors y est donné par

$$\frac{y-5}{3} = \alpha \Rightarrow y = 3\alpha + 5$$

   (d) Enfin si $\alpha \notin [0,1]$ pas de solutions.

<u>Solution de l'exercice 2.32</u> 1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \\
&= \lambda \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(on peut aussi l'intégrer en remarquant qu'elle s'ecrit $u'\ e^u$) f_X est donc bien une densité de probabilité.

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx \\
& \quad \text{On intègre par parties en posant} \\
& \quad u = -x \quad v' = -\lambda e^{-\lambda x} \\
&= \left[x\, e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\
&= 0 + \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

même type de calcul pour la variance en utilisant la formule de Koenig, on trouve

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.37 1. on cherche $\mathbb{P}(X > 1)$, on se ramène donc à la loi normale centrée réduite Z :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 1) &= \mathbb{P}(\tfrac{X-2}{4} > \tfrac{1-2}{4}) \\ &= \mathbb{P}(Z > -0.25) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq 0.25) \end{aligned}$$

après lecture de la table on obtient le résultat

2.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X - 2 > \alpha) &= \mathbb{P}(\tfrac{X-2}{4} \geq \tfrac{\alpha}{4}) \\ &= \mathbb{P}(Z \geq \tfrac{\alpha}{4}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Z < \tfrac{\alpha}{4}) \end{aligned}$$

On veut α tel que $\mathbb{P}(X - 2 > \alpha) > 10^{-2}$, on doit donc avoir

$$1 - \mathbb{P}(Z < \frac{\alpha}{4}) > 10^{-2}$$

ou encore

$$F_Z(\frac{\alpha}{4}) < 0.99$$

Il suffit alors de consulter la table pour trouver $\frac{\alpha}{4}$ puis en déduire α.

3.

$$X \sim \mathcal{N}(2, 4^2) \Rightarrow \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$$

Solution de l'exercice 3.39 1. On centre et on réduit, puis on utilise la table (Z désignera la v.a.r suivant une loi normale centrée réduite)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 11) &= \mathbb{P}\left(\tfrac{X-9}{2} \leq \tfrac{11-9}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq 1) \\ &= 0.8413 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 5) &= \mathbb{P}\left(\tfrac{X-9}{2} \geq \tfrac{5-9}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z \geq -2) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq 2) \\ &= 0.9772 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(5 \leq X \leq 9) &= \mathbb{P}\left(\tfrac{5-9}{2} \leq \tfrac{X-9}{2} \leq \tfrac{9-9}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}(-2 \leq Z \leq 0) \\ &= \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.9772 - 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(7 \leq X \leq 15) &= \mathbb{P}\left(\tfrac{7-9}{2} \leq \tfrac{X-9}{2} \leq \tfrac{15-9}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 3) \\ &= F_Z(3) - F_Z(-1) \\ &= F_Z(3) - (1 - F_Z(1)) \\ &= 0.9987 + 0.8413 - 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 7) = \lambda &\Longrightarrow \mathbb{P}(\frac{X-9}{2} \leq \frac{7-9}{2}) = \lambda \\ &\Longrightarrow \mathbb{P}(Z \leq -1) = \lambda \\ &\Longrightarrow 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1) = \lambda \\ &\Longrightarrow \lambda = 1 - 0.8413 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq \alpha) = 0.2 &\Longrightarrow \mathbb{P}(\frac{X-9}{2} \leq \frac{\alpha-9}{2}) = 0.2\\ &\Longrightarrow \mathbb{P}(Z \leq \frac{\alpha-9}{2}) = 0.2\\ &\Longrightarrow \mathbb{P}(Z \leq -\frac{\alpha-9}{2}) = 0.8\\ &\Longrightarrow -\frac{\alpha-9}{2} = 0.84\\ &\Longrightarrow \alpha = 2 \times 0.84 + 9\end{aligned}$$

3. Il suffit de calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2.X+1) = 2.\mathbb{E}(X) + 1 = 19$$

de même

$$Var(Y) = Var(2.X+1) = Var(2.X) = 4.Var(X) = 16$$

On en déduit

$$Y \sim \mathcal{N}(19, 4^2)$$

Solution de l'exercice 4.46 Remarque préliminaire :

$$(2p-1)^2 = 4p^2 - 4p + 1 \quad \Rightarrow \quad 4p^2 - 4p + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad p(1-p) \leq 1/4$$

1. Soit X_i la v.a. de Bernoulli représentant le vote de la personne i ; X_i vaut 1 si cette personne est favorable au texte et 0 sinon (le paramètre de cette v.a. de Bernoulli est p). On notera n la taille de l'échantillon et S la v.a. représentant le nombre de personnes favorables au texte : $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La proportion de personnes favorables à ce texte dans l'échantillon est donnée par

$$\tilde{p} = \frac{S}{n}$$

$\tilde{p}$ est appelé un estimateur de p.
On cherche n pour que

$$\mathbb{P}(|p - \tilde{p}| \leq 10^{-2}) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(p - 10^{-2} \leq \tilde{p} \leq p + 10^{-2}) = 0.95$$

or d'aprés le théorème central-limite pour n grand (ou la proposition 1) $S \sim \mathcal{N}(np; \sqrt{np(1-p)}$ d'où

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(p - 10^{-2} \leq \frac{S}{n} \leq p + 10^{-2})\\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{10^{-2}\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{S-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{10^{-2}\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\\ &= \mathbb{P}(-\alpha \leq Z \leq \alpha)\end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha = \dfrac{10^{-2}\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
On détermine d'abord α grâce à la table :

$$\mathbb{P}(-\alpha \leq Z \leq \alpha) = 2F_Z(\alpha) - 1 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1.96$$

et finalement on a

$$10^{-2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} = 1.96 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} = 1.96 \times 10^2\sqrt{p(1-p)}$$

et grâce à la remarque préliminaire

$$\Rightarrow \quad n \geq 196^2 \times \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad n \geq 9604$$

Il faut donc interroger au moins 9604 personnes pour que $\tilde{p}$ approche p à 10^{-2}.

2. On reprend exactement le même raisonnement avec $\epsilon = 0,01$ et une probabilité de 99%

Solution de l'exercice 4.47 Soit X_i la v.a. représentant le montant à rembourser pour la $i\grave{e}me$ personne et X la v.a. représentant le montant total à rembourser. On a On connait la moyenne et l'écart type de X_i : $\mathbb{E}(X_i) = 10$ et $\sigma_{X_i} = 5$; de plus

$$X = \sum_{i=1}^{120} X_i$$

Le guichet ne disposant que de 1000 euros, on cherche donc

$$\mathbb{P}(X \leq 1000) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{120} X_i \leq 1000)$$

or d'après le théorème central-limite

$$\frac{\sum_{i=1}^{120} X_i - 120.10}{5\sqrt{120}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 1000) &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{120} X_i \leq 1000) \\
&= \mathbb{P}(\frac{\sum_{i=1}^{120} X_i - 120.10}{5\sqrt{120}} \leq \frac{1000-120.10}{5\sqrt{120}}) \\
&\quad \text{il suffit alors de consulter la table} \\
&= \mathbb{P}(Z \leq -0.0068) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0.0068) \approx F_Z(0.007) \\
&\approx 0.498 \ \text{(une approximation suffit i.e. 0.5}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.48 La v.a. de Bernoulli X_i représentant l'inscription effective ou non (2 choix possibles) a pour paramètre $p = 0.6$, X_i prend la valeur 1 si le $i^{\grave{e}me}$ étudiant (postulant retenu) s'inscrit effectivement et 0 sinon. La v.a. X représentant le nombre total d'étudiants effectivement inscrits est donc donnée par

$$X = \sum_{i=1}^{170} X_i$$

on cherche

$$\mathbb{P}(X > 140)$$

Il suffit d'appliquer la proposition 1 (Cf rappels), c'est possible car $n.p = 170 * 0.6 \geq 20$:

$$X \sim \mathcal{N}(170 * 0.6, \sqrt{170 * 0.6 * (1-0.6)}) \ \ i.e. \ \ X \sim \mathcal{N}(102; 6.39)$$

d'où (on centre et on réduit)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 140) &= \mathbb{P}(\frac{X-102}{6.39} > \frac{140-102}{6.39}) \\
&= \mathbb{P}(Z > 5.95) \\
&= 1 - F_Z(5.95) \\
&\quad \text{on peut consulter la table} \\
&\approx 0.0000\ldots
\end{aligned}$$

Donc dans ce cas pas de problèmes, la probabilité de dépasser notre capacité d'acceuil est quasi nulle.
On refait exactement le même raisonnement pour $n = 200$.

Solution de l'exercice 4.49

1. Soit X_i la v.a. "le ième petit est un mâle". C'est une v.a. de Bernoulli (2 choix possibles c'est un mâle ou pas) de paramètre $p = 0.5$ car on suppose que les chances sont égales d'avoir un mâle ou une femelle ; X_i vaut 1 si le ième petit est un mâle et 0 sinon.
2. le nombre de mâles est représenté par la v.a. S telle que

$$S = \sum_{i=1} 429440 X_i$$

D'après la proposition 1

$$S \sim \mathcal{N}(429440 * 0.5, \sqrt{429440 * 0.5 * 0.5}) \;\; i.e. \;\; S \sim \mathcal{N}(214720; 327,66)$$

d'où (on centre et on réduit)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(214720 - x_0 \leq S \leq 214720 + x_0) &= \mathbb{P}(-\frac{x_0}{327.66} \leq \frac{S - 214720}{327.66} \leq \frac{x_0}{327.66}) \\
&= \mathbb{P}(-\frac{x_0}{327.66} \leq Z \leq \frac{x_0}{327.66}) \\
&= F_Z(\tfrac{x_0}{327.66}) - F_Z(-\tfrac{x_0}{327.66}) \\
&= 2F_Z(\tfrac{x_0}{327.66}) - 1
\end{aligned}$$

on cherche donc x_0 tel que

$$\begin{aligned}
2F_Z(\frac{x_0}{327.66}) - 1 = 0.95 &\Rightarrow F_Z(\frac{x_0}{327.66}) = 0.975 \\
&\Rightarrow \frac{x_0}{327.66} = 1.96 \\
&\Rightarrow x_0 = 642,21
\end{aligned}$$

3. Dans la question précédente on a montré que (on remplace x_0 par sa valeur, on prend la partie entière car on s'intérèsse au nombre de petits)

$$\mathbb{P}(214720 - 642 \leq S \leq 214720 + 642) \geq 0,95$$

soit

$$\mathbb{P}(214078 \leq S \leq 215362) \geq 0,95$$

autrement dit, si l'on suppose l'équiprobabilité (autant de chances d'avoir un mâle qu'une femelle) on a plus de 95% de chances pour que le nombre de mâles soit compris entre 214078 et 215362. Comme ce n'est pas le cas (nbr de mâles est de 221023), cela signifie que notre hypothèse (autant de chances d'avoir un mâle qu'une femelle) est à rejeter.
Ce genre de tests s'appellent tests d'hypothèses. Ils consistent à faire une hypothèse puis à vérifier si cela donne des résultats cohérents avec les observations.

Solution de l'exercice 4.50 1. Il s'agit d'une loi de Bernoulli (car il n'y a que deux choix possibles : le voyageur s'est présenté ou pas) de paramètre 0,9 (car 90% des passagers qui réservent un billet d'avion se présentent effectivement au départ). On notera X_i cette variable aléatoire, l'indice i faisant référence au $i^{ème}$ passager.

2. Le nombre de passagers se présentant au départ est donné par

$$S = \sum_{i=1}^{340} X_i$$

On cherche la probabilité $\mathbb{P}(S > 301)$ (on peut aussi écrire $\mathbb{P}(S \geq 301)$, cela n'aura pas trop d'influence). Comme $n.p = 340 * 0.9 > 20$ on peut utiliser la proposition 1 du cours :

$$S \sim \mathcal{N}(0.9 \times 340, \sqrt{0.1 \times 0.9 \times 340}^2)$$

On centre et on réduit (on désignera par Z la loi normale centrée réduite)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > 300) &= \mathbb{P}(\frac{S - 0.9 \times 340}{\sqrt{0.1 \times 0.9 \times 340}} > \frac{300 - 0.9 \times 340}{\sqrt{0.1 \times 0.9 \times 340}}) \\ &= \mathbb{P}(Z > -1.08) = \mathbb{P}(Z < 1.08) \\ &= 86\% \end{aligned} \tag{5.17}$$

3. Il suffit de remplacer dans les calculs précédents 340 par 324, on trouve

$$\mathbb{P}(S > 300) = \mathbb{P}(Z > 1.55) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1.55) \approx 6\%$$

4.
$$p(1-p) - 1/4 = -\frac{4p^2 - 4p + 1}{4} = -\frac{(2p-1)^2}{4} \leq 0$$

5. Soit Y_i la v.a. de Bernoulli représentant l'opinion de la personne i ; Y_i vaut 1 si cette personne trouve le surbooking compréhensible 0 sinon (le paramètre de cette v.a. de Bernoulli est C). On notera $n = 300$ la taille de l'échantillon et S la v.a. représentant le nombre de personnes trouvant le surbooking compréhensible : $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. La proportion de personnes trouvant le surbooking compréhensile dans l'échantillon est donnée par

$$\tilde{C} = \frac{S}{n}$$

Ici la taille de l'échantillon est fixée $n = 300$ et on cherche ϵ tel que

$$\mathbb{P}(|C - \tilde{C}| \leq \epsilon) = 0.95$$

Or

$$\mathbb{P}(|C - \tilde{C}| \leq \epsilon) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(C - \epsilon \leq \tilde{C} \leq C + \epsilon) = 0.95$$

or d'aprés le théorème central-limite (ou la proposition 1) $S \sim \mathcal{N}(nC; \sqrt{nC(1-C)}$ d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C - \epsilon \leq \frac{S}{300} \leq C + \epsilon) &= \mathbb{P}\left(-\frac{\epsilon\sqrt{300}}{\sqrt{C(1-C)}} \leq \frac{S - 300C}{\sqrt{300C(1-C)}} \leq \frac{\epsilon\sqrt{300}}{\sqrt{C(1-C)}}\right) \\ &= \mathbb{P}(-\alpha \leq Z \leq \alpha) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha = \dfrac{\epsilon\sqrt{300}}{\sqrt{C(1-C)}}$ et $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

On détermine d'abord α grâce à la table :

$$\mathbb{P}(-\alpha \leq Z \leq \alpha) = 2F_Z(\alpha) - 1 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1.96$$

et finalement on a

$$\epsilon \frac{\sqrt{300}}{\sqrt{C(1-C)}} = 1.96 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{1.96 \times \sqrt{C(1-C)}}{\sqrt{300}}$$

et grâce à la question précédente

$$\Rightarrow \quad \epsilon \leq 1.96 \times 0.5 \times \tfrac{1}{\sqrt{300}}$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon \leq 0.056$$

Solution de l'exercice 5.53 1. Remarque préliminaire :

$$(2p-1)^2 = 4p^2 - 4p + 1 \quad \Rightarrow \quad 4p^2 - 4p + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad p(1-p) \leq 1/4$$

Soit X_i la v.a. de Bernoulli représentant le vote de la personne i ; X_i vaut 1 si cette personne est favorable au texte et 0 sinon (le paramètre de cette v.a. de Bernoulli est p). On notera n la taille de l'échantillon et S la v.a. représentant le nombre de personnes favorables au texte : $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La proportion de personnes favorables à ce texte dans l'échantillon est donnée par

$$\tilde{p} = \frac{S}{n}$$

$\tilde{p}$ est appelé un estimateur de p.
On cherche n pour que

$$\mathbb{P}(|p - \tilde{p}| \leq 10^{-2}) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(p - 10^{-2} \leq \tilde{p} \leq p + 10^{-2}) = 0.95$$

or d'aprés le théorème central-limite pour n grand (ou la proposition 1) $S \sim \mathcal{N}(np; \sqrt{np(1-p)}$ d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(p - 10^{-2} \leq \frac{S}{n} \leq p + 10^{-2}) &= \mathbb{P}\left(-\frac{10^{-2}\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{10^{-2}\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &= \mathbb{P}(-\alpha \leq Z \leq \alpha) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha = \dfrac{10^{-2}\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
On détermine d'abord α grâce à la table :

$$\mathbb{P}(-\alpha \leq Z \leq \alpha) = 2F_Z(\alpha) - 1 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1.96$$

et finalement on a

$$10^{-2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} = 1.96 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} = 1.96 \times 10^2 \sqrt{p(1-p)}$$

et grâce à la remarque préliminaire

$$\Rightarrow \quad n \geq 196^2 \times \tfrac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad n \geq 9604$$

Il faut donc interroger au moins 9604 personnes pour que $\tilde{p}$ approche p à 10^{-2}.

2. On reprend exactement le même raisonnement avec $\epsilon = 0,01$ et une probabilité de 99%

Solution de l'exercice 5.54 1. On reprend les notations de la démonstration de l'exercice précédent et on fait le même type de raisonnement, cette fois-ci n est donné et on cherche la précision ϵ pour un seuil de confiance donné.

On cherche ϵ pour que

$$\mathbb{P}(|p-\tilde{p}| \leq \epsilon) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(p-\epsilon \leq \tilde{p} \leq p+\epsilon) = 0.95$$

or d'aprés le théorème central-limite (ou la proposition 1) $S \sim \mathcal{N}(np; \sqrt{np(1-p)}$ d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(p-\epsilon \leq \frac{S}{1000} \leq p+\epsilon) &= \mathbb{P}\left(-\frac{\epsilon\sqrt{1000}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{S-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}} \leq \frac{\epsilon\sqrt{1000}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\
&= \mathbb{P}(-\alpha \leq Z \leq \alpha)
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha = \dfrac{\epsilon\sqrt{1000}}{\sqrt{p(1-p)}}$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

On détermine d'abord α grâce à la table :

$$\mathbb{P}(-\alpha \leq Z \leq \alpha) = 2F_Z(\alpha) - 1 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1.96$$

et finalement on a

$$\begin{aligned}
\epsilon\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{p(1-p)}} = 1.96 \quad &\Rightarrow \quad \epsilon = \frac{1.96 \times \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{1000}} \\
&\quad\ \text{et grâce à la remarque préliminaire de l'exo précédent} \\
&\Rightarrow \quad \epsilon \leq 1.96 \times 0.5 \times \tfrac{1}{\sqrt{1000}} \\
&\Rightarrow \quad \epsilon \leq 0.03
\end{aligned}$$

2. même raisonnement en changeant les données.