Dr. Norberto M. Nigro - Dr. Santiago Márquez Damián

Ejercicio - Acoplamiento presión-velocidad

Como introdución al problema de acoplamiento presión velocidad en el transporte de cantidad de movimiento trabajaremos con flujos con número de Reynolds muy pequeño descriptos por el denominado problema de Stokes, particularmente el caso estacionario.

Se plantean entonces las siguientes tareas,

i) Escribir las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso 2D.

ii) A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, obtener las ecuaciones para el flujo de Stokes (estacionario).

iii) Demostrar la independencia de las ecuaciones de momento por componente (respecto a las velocidades).

iv) Identificar cada término de las ecuaciones por componente con las de la Ecuación General de Advección-Difusión con Fuente.

v) Plantear un esquema de acoplamiento presión-velocidad tipo SIMPLE (no olvidar la relajación). Discutirlo con la cátedra.

vi) Implementar en `FVMLab` los siguientes operadores (prestar atención a las caras de borde):

- Divergencia explícita en celdas:
  `[divphi] = fvc_div(phif, mesh, patches)`
- Flujo en caras a partir de una matriz:
  `[flux] = Eqn_flux(mesh, patches, nu, A, phi)`

$$\Phi_f = \nu_f \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{S}_f$$

donde `A` es la matriz para el problema de difusión estacionaria con fuente:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\nu \vec{\nabla}\phi\right) = S$$

Recordar que para el caso de un problema difusivo unidimensional si se consideran las celdas internas 1, 2 y 3 su discretización resulta ser,

$$-\nu \left[\frac{\phi_1 - \phi_2}{h} + \frac{\phi_3 - \phi_2}{h}\right] |\vec{S}_f|$$

el primer término corresponde al flujo Φ_f en la cara 1-2 y el segundo al flujo en la cara 2-3. Este stencil puede re-escribirse como,

$$-\frac{\nu}{h}|\vec{S}_f|\phi_1 + 2\frac{\nu}{h}|\vec{S}_f|\phi_2 - \frac{\nu}{h}|\vec{S}_f|\phi_3$$

donde quedan explícitos los coeficientes a_{21}, a_{22} y a_{23} de la matriz del problema. De aquí se ve que si se desea recuperar el flujo para la cara 2-3 basta tomar el coficiente

a_{23} y multiplicarlo por $\phi_3 - \phi_2$, los valores de ϕ son los obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones. Para realizar esta operación en forma óptima se recorren las caras, mediante la información de `owner` y `neighbour` es posible saber entre que celdas se produce el flujo y su signo. De manera similar puede analizarse la situación de las caras de borde.

En los operadores anteriores `phi` es un campo escalar en celdas, `phif` es un campo escalar en caras que proviene de hacer $\phi_f = \vec{p}_f \cdot \vec{S}_f$ (siendo $\vec{p}$ el campo sobre el cual se calcula la divergencia), `mesh` es una estructura con los datos geométricos del problema, `patches` es una estructura con los datos de condiciones de borde del problema, `nu` es un campo escalar de difusividad por caras y Φ_f es el flujo difusivo discreto por caras obtenido a partir de la matriz de difusión y el campo ϕ en celdas.

vii) A partir de los operadores indicados en VI, implementar el método planteado en V.

viii) Resolver el flujo de Stokes para el caso de un problema de Coutte sin gradiente de presiones y otro de Poiseuille cotejando los resultados numéricos mediante las soluciones analíticas de dichos problemas. Presentar los siguientes resultados,

- Campo de velocidades (sin malla)
- Campo de presiones (sin malla)
- Convergencia de los residuos a lo largo de las iteraciones en un gráfico semilogarítmico, tanto para la presión como para las componentes de la velocidad
- Cierre de continuidad