CONTROLLORI DI TIPO PID

Principi di funzionamento¹

Il termine **controllo** definisce l'azione svolta per portare e mantenere ad un valore prefissato un parametro fisico di un impianto o di un **processo** (ad esempio, la temperatura di un forno, il livello di un fluido in un serbatoio, la posizione del braccio di un robot, la velocità di rotazione di un motore, ecc.). Indicando con r(t) il valore che si vuole far assumere alla **variabile controllata** e con y(t) il valore effettivamente assunto da tale grandezza, possiamo introdurre una funzione d'errore definita come: e(t) = r(t) - y(t). Lo scopo dell'azione di controllo è quello di applicare la migliore scelta possibile della funzione u(t) (detta **variabile di controllo**) che i) renda il sistema asintoticamente stabile, i) minimizzi il valor medio di $e^2(t)$ oppure di |e(t)| e iii), riduca al livello minore possibile il tempo di risposta e le fluttuazioni intorno al valore asintotico in concomitanza di transitori di r(t).

Passando alla trasformata di Laplace, possiamo schematizzare il problema nel seguente modo:

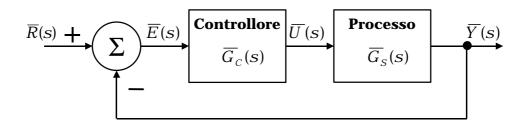


Fig. 1: schema a blocchi semplificato di un sistema contenete il controllo attivo di un processo. Per semplicità, non sono mostrate le sorgenti di rumore interne e le perturbazioni esterne che si sommano ai segnali indicati in figura.

Le principali componenti del sistema sono: il **rivelatore di errore** $\overline{E}(s) = \overline{R}(s) - \overline{Y}(s)$, il **controllore** che ha il compito di trasformare il segnale d'errore in un segnale $\overline{U}(s)$ che agisce sul **processo** sottoposto a controllo, un **sensore** posto all'interno del processo che misura la grandezza fisica da controllare fornendo il segnale $\overline{Y}(s)$. Supponiamo che sia il controllore sia il processo possano essere schematizzati come sistemi lineari e stazionari

_

¹ Appunti per l'insegnamento di "Laboratorio di Elettronica", corso di laurea specialistica in Fisica, Università di Trento. Lo scopo di queste note non è quello di affrontare con sistematicità il vasto argomento legato alla teoria del controllo. Qui ci limiteremo ad affrontare il tema legato ai cosiddetti controllori PID (proporzionale, integrale, differenziale) che trovano vasto impiego in laboratorio per la stabilizzazione di vari parametri fisici.

caratterizzati da una funzione di trasferimento che varrà, rispettivamente, $\overline{G}_C(s)$ e $\overline{G}_P(s)$.

Va detto che lo schema mostrato in Fig.1 è semplificato perché non mostra le sorgenti di rumore interne al sistema e le altre perturbazioni esterne che si sommano ai vari segnali. Una caratteristica essenziale di un buon controllore è quella di possedere una elevata "robustezza" rispetto alle fluttuazioni del sistema, mantenendo la grandezza controllata al valore desiderato anche in presenza di eventuali piccole variazioni della funzione di trasferimento che caratterizza il processo.

Utilizzando la ben nota relazione dei sistemi reazionati, scriviamo la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso:

$$\overline{T}(s) \equiv \frac{\overline{Y}(s)}{\overline{R}(s)} = \frac{\overline{G}_C(s) \cdot \overline{G}_P(s)}{1 + \overline{G}_C(s) \cdot \overline{G}_P(s)}$$

Il problema generale del controllo si riduce quindi a determinare, per una certa funzione di trasferimento del processo $\overline{G}_P(s)$, la migliore funzione di trasferimento del controllore $\overline{G}_C(s)$ che ottimizza la $\overline{T}(s)$.

Uno schema ampiamente utilizzato è quello **PID**, acronimo che indica l'utilizzo combinato di tre funzioni di controllo di tipo **P**roporzionale, **I**ntegrale e **D**ifferenziale. Lo schema generale di un controllore di tipo PID è il seguente:

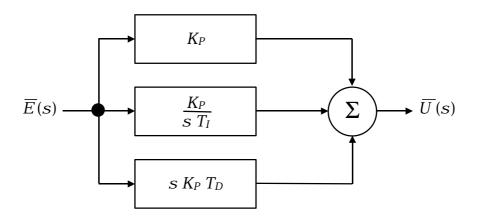


Fig. 2: schema a blocchi di un controllore di tipo PID (vedere il testo per i dettagli)

In pratica l'uscita di un controllore PID è costituita dalla somma di tre termini:

$$\overline{U}(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right) \cdot \overline{E}(s)$$

dove K_P , T_I e T_D sono tre costanti positive.

Il primo termine, K_P , è detto **coefficiente proporzionale**². Ponendo T_D = 0 e T_I = ∞ l'equazione precedente si riduce a: $\overline{U}(s) = K_P \cdot \overline{E}(s)$ e, in tal caso, si parla di **controllore proporzionale o di tipo P**. Il contributo dovuto a K_P è appunto proporzionale all'errore e diminuisce man mano che l'errore si avvicina a zero.

A titolo d'esempio, consideriamo il comportamento di un processo caratterizzato da una funzione di trasferimento contenente un polo singolo (con costante tempo τ) quando sia gestito tramite un controllore di tipo proporzionale. Sia:

$$\overline{G}_C(s) = K_P$$
 $\overline{G}_P(s) = \frac{A_0}{1 + \tau s}$

Ricaviamo:

$$\overline{T}(s) = \frac{\frac{K_p A_0}{1 + \tau s}}{1 + \frac{K_p A_0}{1 + \tau s}} = \frac{\frac{K_p A_0}{\tau}}{s + \frac{1 + K_p A_0}{\tau}}$$

Consideriamo il comportamento del sistema quando, al tempo t=0, viene applicata in entrata una funzione gradino di ampiezza unitaria:

$$\overline{R}(s) = \frac{1}{s}$$

il segnale d'uscita vale:

$$\overline{Y}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\frac{K_P A_0}{\tau}}{s + \frac{1 + K_P A_0}{\tau}}$$

e la funzione d'errore vale:

$$\overline{E}(s) = \overline{R}(s) - \overline{Y}(s) = \overline{R}(s) - \overline{E}(s)\overline{G}_{C}(s)\overline{G}_{P}(s) \quad \Rightarrow \quad \overline{E}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + \tau s}{1 + \tau s + K_{P} A_{0}}$$

Utilizzando il teorema dei residui si ricava:

$$y(t) = \left(\frac{K_P \cdot A_0}{1 + K_P \cdot A_0}\right) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{1 + K_P \cdot A_0}{\tau}t\right)\right]$$

Osserviamo che al crescere di K_P il guadagno in continua del sistema si avvicina all'unità e la costante tempo viene ridotta. In altre parole, aumentando K_P , il valore asintotico dell'uscita sarà sempre più vicino al valore richiesto (1 per il nostro segnale d'entrata corrispondente ad un

Ultima revisione: 8 gennaio 2003

 $^{^2}$ 100/ K_P esprime, in %, la cosiddetta **banda proporzionale**.

gradino di ampiezza unitaria) e si osserva una contemporanea riduzione del tempo necessario per arrivare a tale livello asintotico. Notiamo tuttavia che l'uscita non arriverà mai esattamente al valore richiesto, a meno di non far tendere K_P all'infinito. Il valore asintotico dell'errore viene detto **offset**.

L'offset può essere calcolato facilmente utilizzando il teorema del valore finale della trasformata di Laplace: $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot \overline{X}(s)$. Applicando tale teorema alla espressione della funzione d'errore si ottiene:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \overline{E}(s) = \frac{1}{1 + K_P \cdot A_0}$$

da cui verifichiamo che l'offset si riduce a zero solo quando il coefficiente proporzionale tende ad infinito.

Consideriamo ora un altro esempio. Supponiamo che il processo sia caratterizzato da una funzione di trasferimento del secondo ordine:

$$\overline{G}_P(s) = A_0 \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_0 s + \omega_0^2}$$

dove ω_0 e ζ sono due costanti positive. Con un procedimento analogo a quello sviluppato per il polo del primo ordine si ricava:

$$\overline{T}(s) \equiv \frac{\overline{Y}(s)}{\overline{R}(s)} = A_0 \frac{K_P \omega_0^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_0 s + \omega_0^2 (1 + K_P A_0)}$$

Quando si applica un gradino $\overline{R}(s) = 1/s$ in entrata, si ottiene la seguente espressione per la trasformata di Laplace dell'errore:

$$\overline{E}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2 (1 + K_P A_0)}$$

da cui si ricava l'errore asintotico:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+K_P\cdot A_0}$$

Analogamente a quanto visto per un processo con un polo del primo ordine, anche in questo caso si osserva la presenza di un offset che diminuisce all'aumentare di K_P . Tuttavia, analizzando l'espressione della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso, notiamo che la frequenza caratteristica di oscillazione vale $\omega_f = \omega_0^2 (1 + K_P \cdot A_0)^{1/2}$ ed il fattore di smorzamento è pari a $\zeta \cdot \omega_0/\omega_f$. Questo significa che, all'aumentare di K_P , il transitorio che segue rapide variazioni di r(t) è caratterizzato da oscillazioni di frequenza sempre più elevata e meno smorzate. Questa situazione è illustrata in Fig.2.

Ultima revisione: 8 gennaio 2003

Riassumendo, <u>utilizzando un controllore esclusivamente proporzionale</u> (**P**) si produce una differenza (offset) tra il valore richiesto e quello effettivamente ottenuto. Tale differenza può essere ridotta aumentando il guadagno del controllore. Tuttavia, se il processo da controllare possiede coppie di poli c.c., l'aumento del coefficiente proporzionale è accompagnato da un corrispondente aumento delle oscillazioni generate a seguito di rapidi transitori.

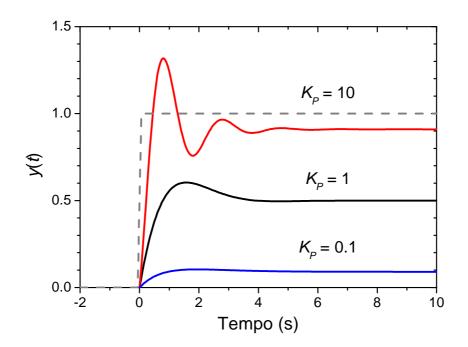


Fig. 3: Risposta ad un gradino di ampiezza unitaria, applicato al tempo t=0, ad un processo caratterizzato da una coppia di poli c.c. $(A_0=1, \omega_0=1 \text{ Hz}, \zeta=1)$ gestito tramite un controllore di tipo proporzionale (**P**). Il calcolo è effettuato per diversi valori di K_P . Si noti che per $K_P=10$ si riduce l'effetto dell'offset, ma la risposta al transitorio è caratterizzata da forti oscillazioni.

Per porre rimedio a questo problema è necessario aggiungere al termine proporzionale un termine aggiuntivo che elimini *a priori* la presenza dell'offset. In un controllore PID tale funzione è svolta dal termine inversamente proporzionale a $s \times T_I$, detto anche **contributo integrale**. È evidente che in presenza di un offset costante il contributo integrale è destinato a crescere indefinitamente nel tempo e questo ci permette di attivare una efficace azione correttiva. La costante T_I è detta **tempo di reset**. L'effetto dell'integrazione è tanto più importante, quanto più T_I è piccolo.

Consideriamo ora un esempio: il controllo di un processo caratterizzato da un polo singolo per mezzo di un controllore ${\bf PD}$, ovvero una combinazione di due termini, uno proporzionale ed uno integrale.

.

³ Ricordiamo che la trasformata di Laplace dell'integrale di una funzione si ottiene, fatta una opportuna scelta delle condizioni iniziali, dividendo per *s* la trasformata della funzione.

Supponiamo di inviare in entrata un gradino di ampiezza unitaria. Potremo scrivere:

$$\overline{G}_{C}(s) = K_{P}\left(1 + \frac{1}{T_{I}s}\right)$$
 $\overline{G}_{P}(s) = \frac{A_{0}}{1 + \tau s}$ $\overline{R}(s) = \frac{1}{s}$

da cui si ricava:

$$\overline{T}(s) = \frac{1}{1 + \frac{sT_I(1 + \tau s)}{A_0 K_P(1 + T_I s)}} \qquad \overline{E}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{sT_I(1 + \tau s)}{sT_I(1 + \tau s + A_0 K_P) + A_0 K_P}$$

L'errore asintotico vale:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\overline{E}(s) = 0$$

Notiamo che facendo tendere T_I all'infinito, ovvero eliminando il termine integrale, le espressioni precedenti si riducono a quelle trovate precedentemente per l'analogo esempio sviluppato considerando un controllore esclusivamente proporzionale. L'effetto della scelta di T_I è mostrato in Fig. 4. Si nota che <u>l'offset presente quando si opera solo con il controllore proporzionale ($T_I \to \infty$) sparisce attivando il termine integrale. Riducendo T_I il sistema risponde più velocemente al transitorio, ma si osservano anche delle forti oscillazioni.</u>

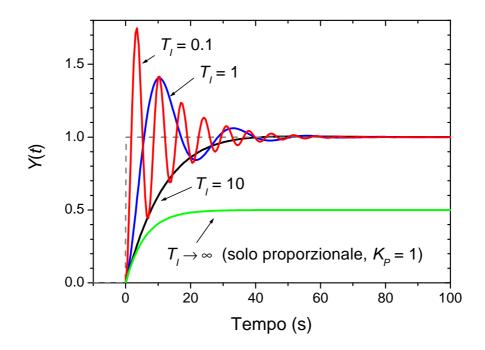


Fig. 4: risposta ad un gradino di ampiezza unitaria (linea tratteggiata) di un processo caratterizzato da un polo singolo (con costante tempo $\tau = 12$ s e guadagno in continua $A_0 = 1$), gestito tramite un controllore **PI**, calcolata per quattro diversi valori del tempo di reset T_I . Il valore di K_P è posto sempre uguale ad 1.

Passiamo ora al terzo termine di un controllore PID, quello derivativo.⁴ Il contributo derivativo al controllo tiene conto delle rapide variazioni dell'errore e cerca, in qualche modo, di anticipare la futura azione correttiva tenendo conto delle variazioni dell'errore nei tempi più recenti. In pratica questo si concretizza in una riduzione delle oscillazioni.

Per capire meglio l'effetto indotto dal contributo derivativo studiamo il comportamento di un controllore **PD**, ovvero un controllore in cui siano presenti sia il contributo proporzionale che quello derivativo.

$$\overline{G}_{C}(s) = K_{P}(1 + sT_{D})$$

dove T_D è detta **costante tempo di derivazione**. Supponiamo che il processo da controllare possegga due poli c.c. e scriviamo:

$$\overline{G}_{P}(s) = A_0 \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_0 s + \omega_0^2}$$

Consideriamo, come già visto negli esempi precedenti, il caso in cui si applichi in entrata una funzione gradino di ampiezza unitaria. L'uscita del sistema diventa:

$$\overline{Y}(s) = \frac{A_0}{s} \cdot \frac{\omega_0^2 K_P (1 + sT_D)}{s^2 + s(2\zeta\omega_0 + A_0\omega_0^2 K_P T_D) + \omega_0^2 (1 + A_0K_P)}$$

Si nota che la presenza del termine derivativo introduce uno zero ed aumenta il coefficiente di s nel polinomio di II grado posto al denominatore. Ambedue questi effetti producono una riduzione delle oscillazioni che si verificano in occasione dei transitori contribuendo a stabilizzare il sistema.

L'offset è lo stesso che si ha con il solo controllo proporzionale, ma come abbiamo visto precedentemente, questo effetto può essere eliminato utilizzando un opportuno contributo integrale. Un esempio di andamento tipico è mostrato in Fig. 5.

Riassumendo, il contributo derivativo permette di ridurre le oscillazioni spurie del sistema, evitando che questo oscilli intorno al valore asintotico. D'altro canto, in presenza di un forte rumore esterno, il contributo derivativo tende ad amplificare l'effetto del rumore producendo una instabilità addizionale del sistema.

In conclusione, il problema del progetto di un controllore PID si riduce alla scelta dei valori più opportuni per i parametri K_P , T_I e T_D . Tale scelta non è banale perché richiede la conoscenza dettagliata delle proprietà del processo che si vuole controllare. Esistono vari metodi per effettuare la scelta (**tuning**) dei coefficienti più opportuni. Nei prossimi paragrafi vedremo brevemente due metodi semi-empirici che trovano grande utilizzo pratico.

_

 $^{^4}$ Ricordiamo che la trasformata di Laplace della derivata di una funzione si ottiene, data una opportune scelta delle condizioni iniziali, moltiplicando per s la trasformata di Laplace della funzione.

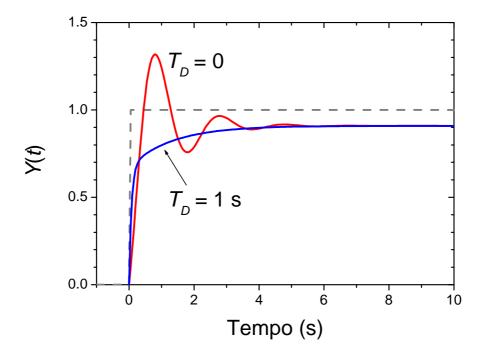


Fig. 5: risposta ad un gradino di ampiezza unitaria di un processo contenente due poli c.c. (stessi parametri usati in Fig. 3, $K_P = 10$), controllato tramite il metodo **PD**. Quando la costante tempo di derivazione è nulla la risposta è ovviamente la stessa di Fig. 3 (controllo proporzionale). Viceversa, l'aggiunta del termine derivativo elimina le oscillazioni, pur non avendo alcun effetto sull'offset che è lo stesso del caso proporzionale.

Metodo di Cohen e Coon

Questo metodo⁵ è basato sull'idea di descrivere il processo da sottoporre a controllo con un modello del tipo:

$$\overline{G}_P \cong A_0 \frac{\exp(-\tau s)}{1 + \Delta T s}$$

Essenzialmente il modello comprende un guadagno in continua pari ad A_0 , un ritardo τ ed una costante tempo ΔT . Questi parametri possono essere stimati sperimentalmente applicando in entrata al processo (sconnesso dalla catena di controllo) un segnale a gradino di ampiezza unitaria e misurando la risposta temporale del processo. I parametri che caratterizzano la funzione di trasferimento del processo vengono determinati da un fit dei dati sperimentali ottenuto approssimando il transitorio misurato in uscita dal processo con la retta tangente nel punto di flesso. La procedura è illustrata in Fig. 6. Una volta noti A_0 , τ e ΔT è possibile calcolare i valori che ottimizzano la resa del controllore, trovando il miglior compromesso tra

Ultima revisione: 8 gennaio 2003

⁵ Per un approfondimento di questo metodo nelle applicazioni legate al controllo di temperatura si veda, ad esempio, http://www.eurotherm.com/download/an13_2.doc.

stabilità e velocità di risposta. Le relazioni che forniscono i valori dei parametri del controllore in funzione dei dati ottenuti sperimentalmente sono riportate in Tabella 1.

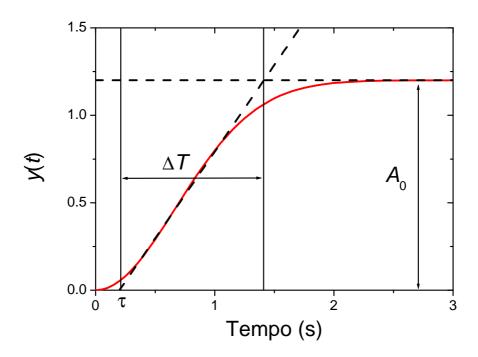


Fig. 6: metodo per la determinazione sperimentale dei parametri che descrivono un processo secondo il modello adottato nell'ambito del metodo di Cohen e Coon. Al processo, <u>operando ad anello aperto</u>, viene mandato in entrata un segnale a gradino di ampiezza unitaria. I dati sperimentali (curva rossa continua) sono approssimati nella zona del flesso con la linea tangente (curva nera tratteggiata). L'intercetta di tale curva con l'asse di tempi fornisce la stima del ritardo τ , mentre la costante tempo ΔT viene fornita dal tempo di salita della curva. Il guadagno in continua A_0 è uguale al valore asintotico (ricordiamo che il segnale di ingresso ha ampiezza unitaria).

	P	PI	PD	PID
K _P	1+R/3	0.9 + R/12	1.25 + R/6	1.33 + R/4
	A_0R	A_0R	A_0R	A_0R
$1/T_I$		30 + 3R		32 + 6R
		9 + 20R		$\tau \cdot \frac{13+8R}{13+8R}$
T_D			$\tau \cdot \frac{6-2R}{}$	τ. 4
1 D			22+3R	11+2R

Tabella 1: scelta dei parametri di un controllore a seconda del tipo di configurazione adottata e dei parametri sperimentali che caratterizzano il sistema da controllare (vedi Fig. 6). La quantità R è uguale a $\tau/\Delta T$.

Il metodo appena descritto funziona solo per sistemi stabili ad anello aperto, i quali siano ragionevolmente descritti dal modello semplificato

presentato in Fig. 6. Per sistemi più complicati, inclusi quelli che non sono stabili ad anello aperto, si deve ricorrere ad altri metodi. Un metodo alternativo utilizzato frequentemente è quello di Ziegler e Nicholls.

Metodo di Ziegler e Nicholls

L'idea che sta alla base di questo metodo può essere spiegata qualitativamente ricordando i risultati presentati nel capitolo dedicato alla stabilità dei sistemi reazionati. In molti esempi abbiamo visto che il sistema reazionato è stabile ad anello chiuso solo se il guadagno in continua ad anello aperto è mantenuto ad un livello sufficientemente piccolo. Aumentando il guadagno in continua il sistema diventa instabile. Ricordiamo che tra la zona di stabilità (poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso con componente reale negativa) e la zona di instabilità (poli con componente reale positiva) esiste un limite (poli con componente reale nulla) in cui il sistema non diverge, ma oscilla con ampiezza di oscillazione costante. Quindi, se aumentando il guadagno in continua si arriva ad una situazione di oscillazione stabile, possiamo assumere che un valore di guadagno in continua nettamente inferiore a tale limite possa corrispondere ad una condizione di lavoro ragionevole.

La procedura da seguire per l'ottimizzazione del controllore è la seguente:

- 1. Annullare, o quantomeno ridurre al minimo livello possibile, le azioni di integrazione e derivata facendo lavorare il controllore in modo puramente proporzionale.
- 2. Operando ad anello chiuso, aumentare progressivamente (e prudentemente) il valore di K_P fino a che si osserva che l'uscita y(t) oscilla in modo permanente (**limite di stabilità**). Indichiamo con K_0 il valore limite di K_P . Indichiamo con T_0 il periodo di oscillazione misurato quando $K_P = K_0$. Se il sistema non entra mai in oscillazione, il metodo non è applicabile.
- 3. A seconda della configurazione del controllore, applicare i parametri riportati in Tabella 2.

	P	PI	PID
K_P	$0.5 \cdot K_0$	$0.45 \cdot K_0$	$0.6 \cdot K_0$
T_{I}		$0.5 \cdot T_0$	$0.5 \cdot T_0$
T_D			$0.125 \cdot T_0$

Tabella 2: scelta dei parametri a seconda della configurazione del controllore secondo il metodo di Ziegler e Nichols.

Per concludere, ricordiamo alcuni limiti pratici dei metodi di tuning dei controllori appena descritti. Noi abbiamo sempre assunto che i processi da controllare siano lineari e stazionari. Purtroppo tali approssimazioni non sono sempre valide. In particolare, uno degli errori più comuni è quello di ottimizzare i parametri del controllore quando il processo da controllare si

Ultima revisione: 8 gennaio 2003 pag. 10 di 11

trova in condizioni molto diverse da quelle operative⁶. In tal caso eventuali non-linearità possono giocare un ruolo importante e l'ottimizzazione iniziale può perdere di significato, specialmente nel caso in cui sia stato adottato il metodo di Cohen e Coon. In altri casi le oscillazioni che devono essere innescate per tarare il controllore secondo il metodo di Ziegler e Nichols possono provocare danni al processo stesso. Quindi, nella pratica, bisogna operare con prudenza ricordando che i metodi semi-empirici appena descritti forniscono una ottimizzazione solo parziale del controllore. Il risultato finale dipende strettamente dal comportamento dinamico del processo sotto controllo. Per applicazioni critiche, si può ricorrere ad una ottimizzazione sperimentale dei parametri, utilizzando come punto di partenza quelli ottenuti con metodi semi-empirici oppure è necessario ricorrere a metodi di progetto più sofisticati.

_

⁶ Si pensi, ad esempio, al controllo della temperatura di un forno ottimizzato con il metodo di Cohen e Coon quando il forno si trova ad una temperatura prossima all'ambiente. Se la temperatura operativa del forno viene regolata a qualche centinaio di gradi, difficilmente si potrà assumere che l'ipotesi di linearità sia pienamente soddisfatta. Il tuning del controllore fatto a temperatura prossima all'ambiente potrebbe essere inadeguato.