

# **CONTROLLORI STANDARD PID**

# MODELLO DEI REGOLATORI PID

Tra le ragioni del vastissimo utilizzo dei regolatori PID nella pratica dell'automazione industriale (i PID sono anche detti **regolatori industriali**), ricordiamo:

- *semplicità di realizzazione* in diverse tecnologie (elettronica, idraulica, pneumatica);
- *efficacia* per la regolazione di un'ampia gamma di processi industriali;
- *standardizzazione* con i relativi vantaggi in termini di *affidabilità* e *economicità*;
- *semplicità di taratura* dei parametri;
- possibilità di *taratura automatica* dei parametri, per mezzo di semplici esperimenti.

# MODELLO DEI REGOLATORI PID

Variabile di controllo  $u$  generata come somma di tre contributi:

- proporzionale all'errore  $e(t) = r(t) - y(t)$
- proporzionale all'integrale di  $e(t)$  (valor medio): errore nullo asintoticamente per segnali di riferimento o disturbi additivi costanti
- proporzionale alla derivata di  $e(t)$ : previsione dell'andamento dell'errore

Struttura ideale (sistema dinamico SISO lineare stazionario a tempo continuo, improprio)

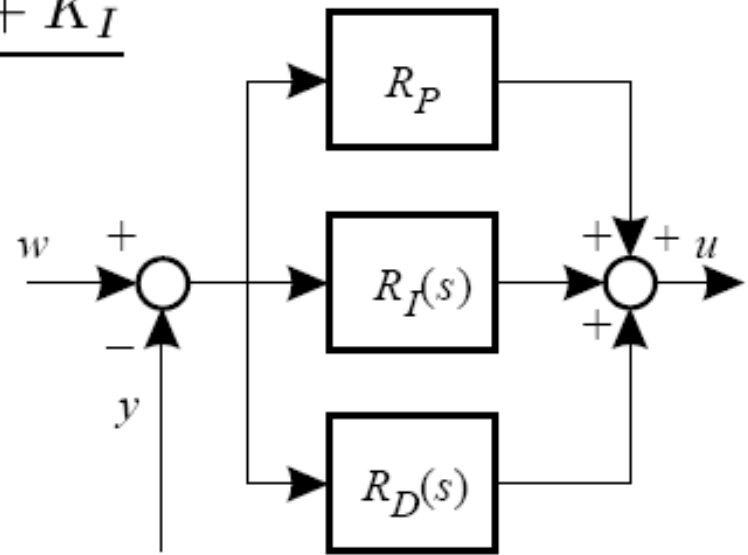
$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

- $K_P \geq 0$ : coefficiente dell'azione proporzionale (banda proporzionale  $PB = 100/K_P$  )
- $K_I \geq 0$ : coefficiente dell'azione integrale
- $K_D \geq 0$ : coefficiente dell'azione derivativa

# MODELLO DEI REGOLATORI PID

Effettuando la trasformata di Laplace ponendo  $t_0=0$  si ricava la seguente funzione di trasferimento:

$$R_{PID} = R_P + R_D(s) + R_I(s)$$
$$= K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$



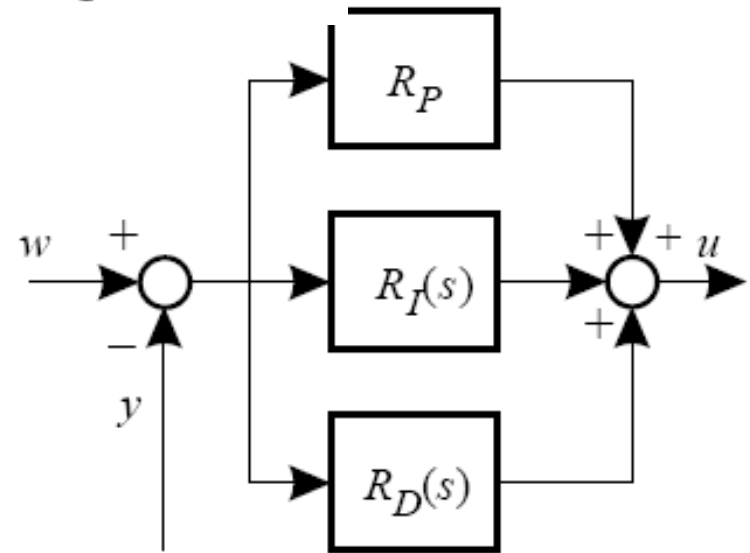
# MODELLO DEI REGOLATORI PID

Una diversa rappresentazione è la seguente:

$$R_{PID} = R_P + R_D(s) + R_I(s)$$
$$= K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_P \frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s}$$

Dove:

- $T_I = K_P / K_I$  è detto *tempo integrale* o *di reset*
- $T_D = K_D / K_P$  è detto *tempo derivativo*



# AZIONE PROPORZIONALE

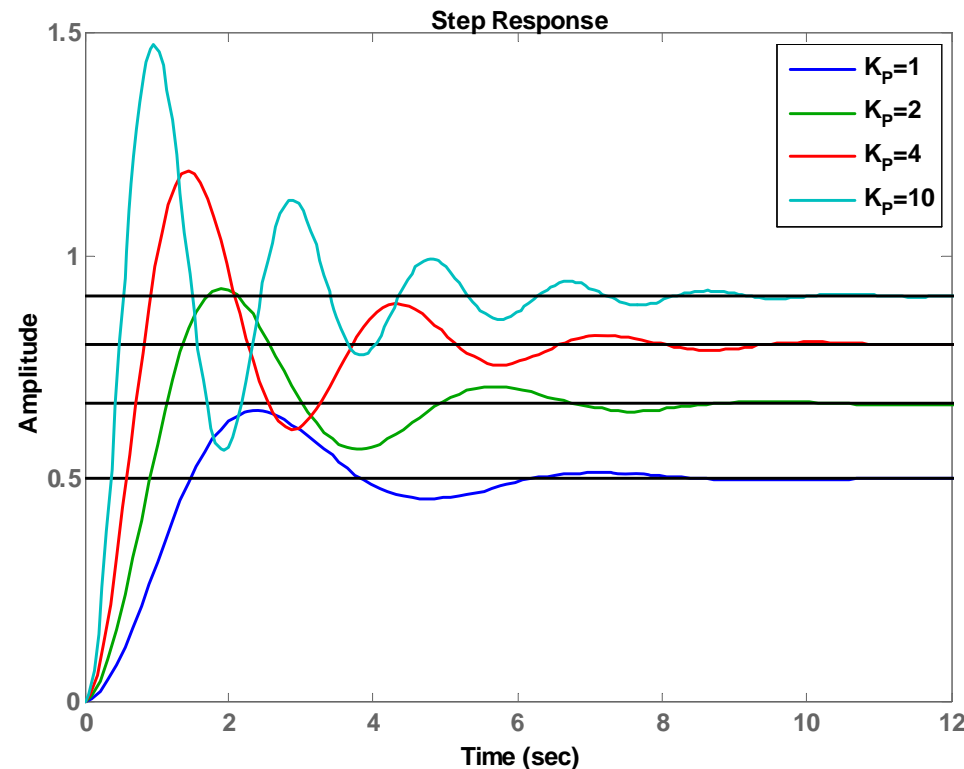
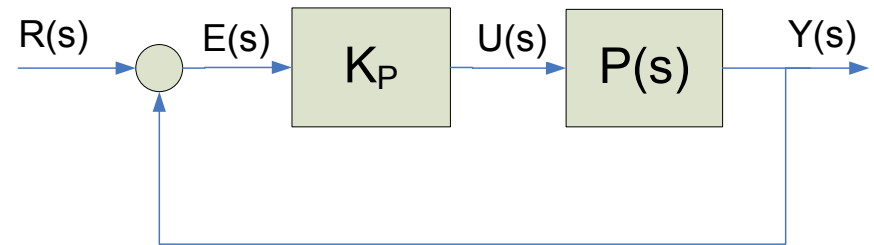
Qualora si effettui la retroazione, si ha l'esigenza di fornire in ingresso al plant un valore funzione della differenza tra il riferimento e l'errore tale da cercare di compensare l'errore.

$$U(s) = K_p * E(s) = K_p * [R(s) - Y(s)]$$

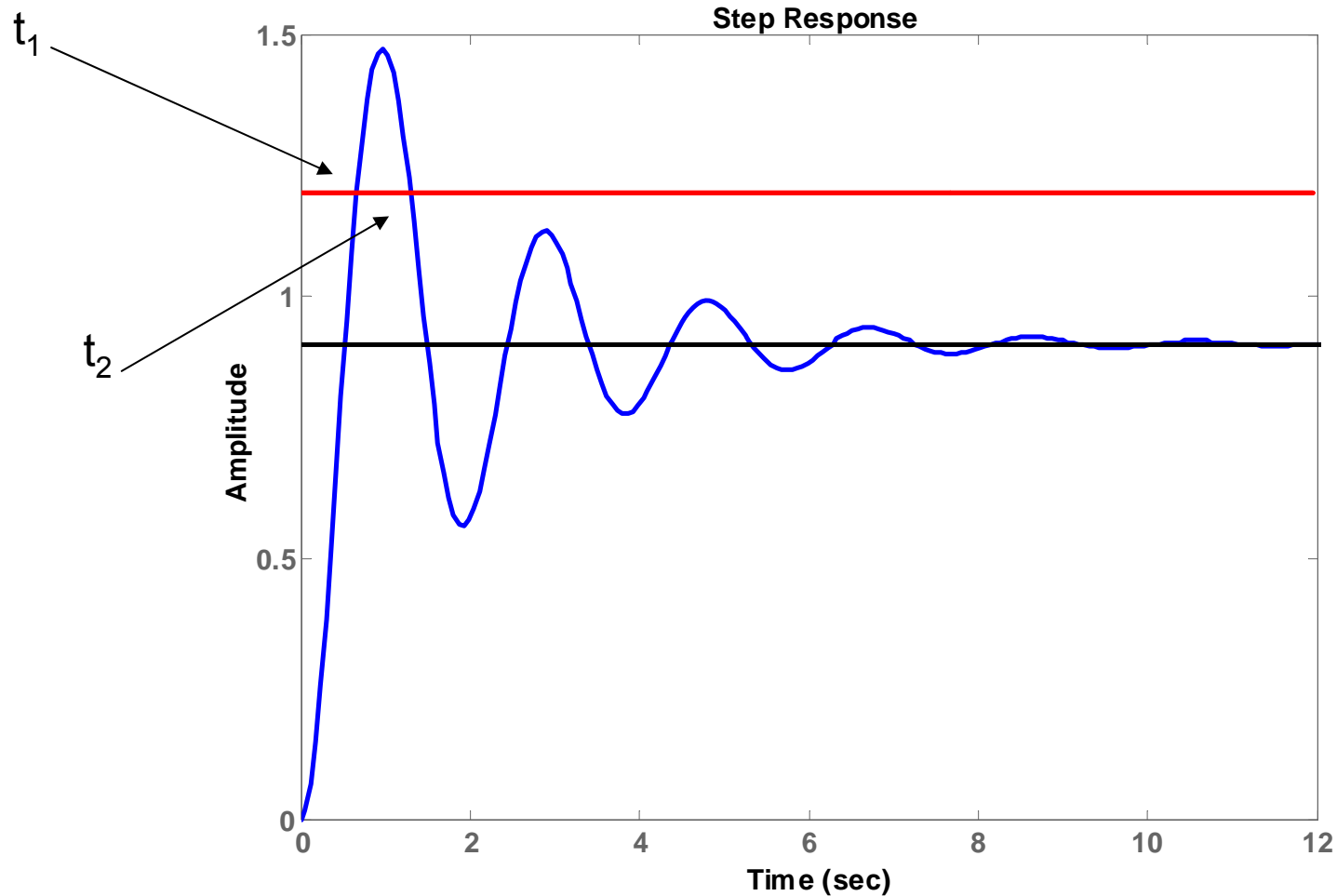
La sola azione proporzionale, nella maggioranza dei casi, non soddisfa le specifiche perché, in genere, si presentano problemi di:

- eccessive oscillazioni attorno al valore di regime
- errore a regime rispetto all'ingresso

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$



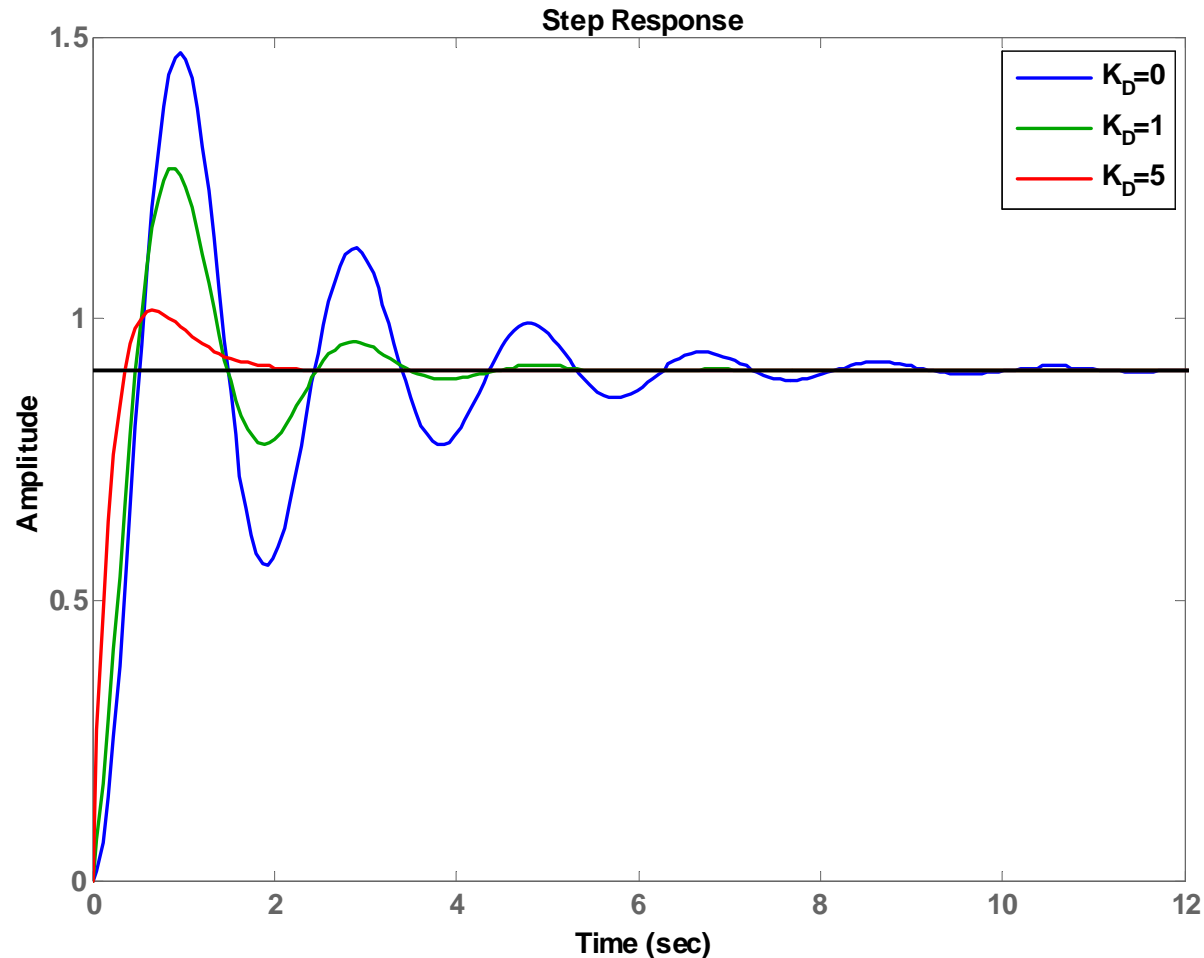
# AZIONE PROPORZIONALE



Un controllore proporzionale produce la stessa azione in  $t_1$  e  $t_2$ . Non è in grado di “predirre” l’andamento di  $y(t)$ .

# AZIONE DERIVATIVA

L'azione derivativa  $K_D s$  del regolatore PID rende il controllore capace di distinguere in quale direzione si sta muovendo il sistema e, quindi, di modificare l'azione di controllo di conseguenza.





# AZIONE DERIVATIVA

Un'altra maniera di leggere l'effetto dell'azione derivativa è il seguente.

Il controllore PD si può scrivere come

$$R_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P(1 + T_D s)$$

INTRODUZIONE DI UNO ZERO PURO



ANTICIPO DI FASE



AUMENTO DEL MARGINE DI FASE



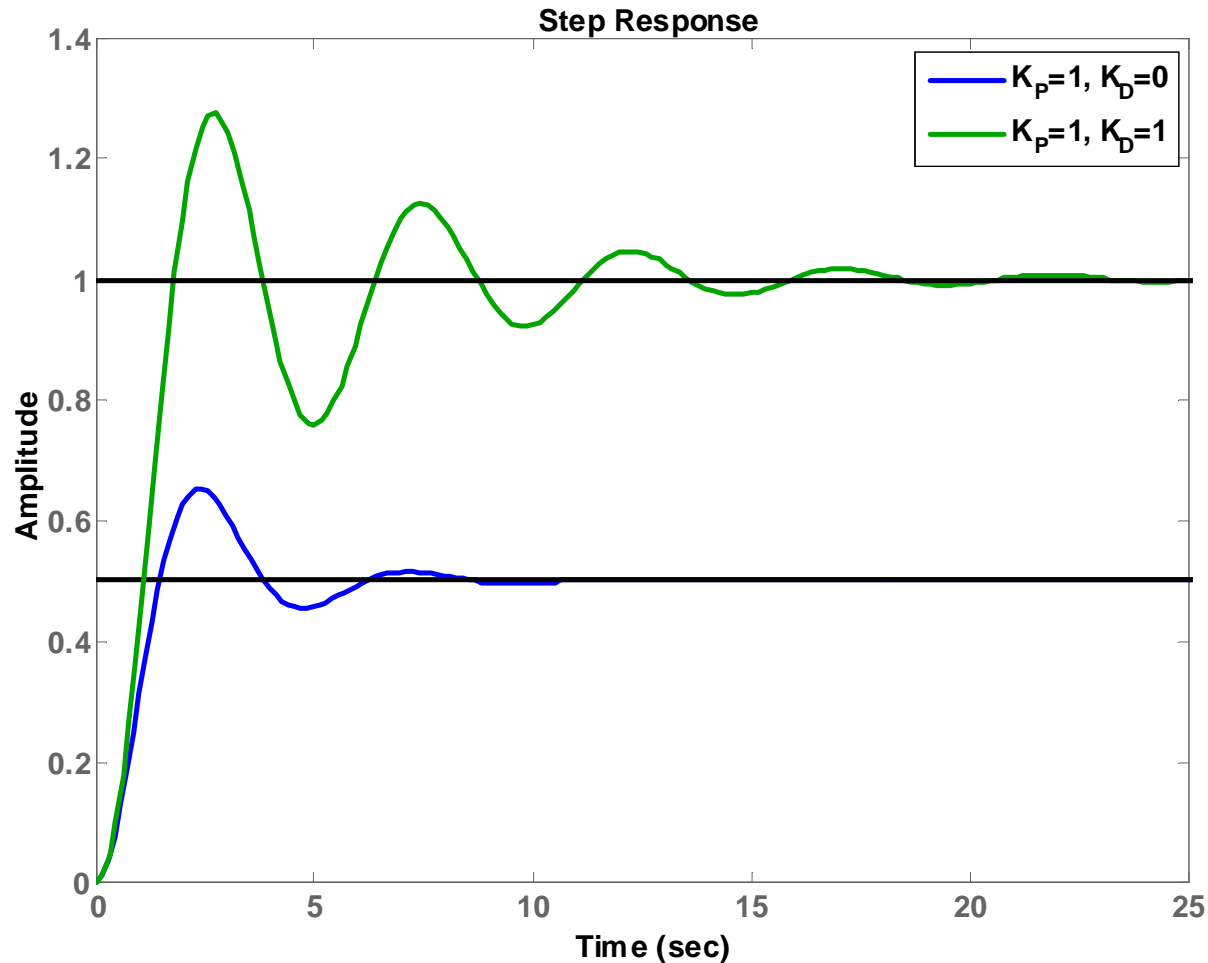
AUMENTO DELLO SMORZAMENTO



RIDUZIONE DELLA SOVRAELONGAZIONE

# AZIONE INTEGRALE

L'azione integrale  $K_I/s$  introduce un polo nell'origine nella funzione di trasferimento ad anello aperto e, quindi, migliora la risposta in termini di errore a regime.



# REGOLATORI PID

Naturalmente non tutte le azioni devono essere presenti contemporaneamente, ma posso utilizzare diverse combinazioni delle varie azioni.

- **Regolatore P.** Si ottiene ponendo  $K_D=K_I=0$  o  $T_I \rightarrow \infty$ ,  $T_D=0$ 
  - Controllo di processi asintoticamente stabili
  - Le prestazioni statiche non richiedono l'inserimento di un'azione integrale
- **Regolatore I.** ( $K_P=0$ ,  $K_D=0$ )
  - rete ritardatrice con polo nell'origine e zero all'infinito (restringimento della banda passante per compensare il contributo di fase negativo)
  - requisito stringente sulle prestazioni statiche, ma non sulle prestazioni dinamiche

# REGOLATORI PID

- **Regolatore PI.** ( $K_D=0$ )
  - Si possono vedere come reti ritardatrici con polo nell'origine e zero in  $s=-1/T_I$ .
  - azione integrale per prestazioni statiche, con banda passante più ampia grazie alla presenza dello zero
  - molto diffusi nel controllo di processi industriali, descrivibili come la serie di una funzione di trasferimento del primo ordine e di un eventuale ritardo (la presenza di un ulteriore zero di un PID completo porterebbe a un allargamento eccessivo della banda passante, nonché a difficoltà di taratura)
- **Regolatore PD.** ( $K_I=0$ )
  - rete anticipatrice con zero in  $s=-K_P/K_D=-1/T_D$  e polo all'infinito (polo aggiuntivo in alta frequenza per la realizzabilità)
  - non vi sono problemi di stabilità o di prestazioni statiche
  - necessario ottenere la banda passante più ampia possibile

# REGOLATORI PID

- **Regolatore PID**

- Ha un polo nell'origine e due zeri in

$$s = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I(T_I - 4T_D)}}{2T_I T_D}$$

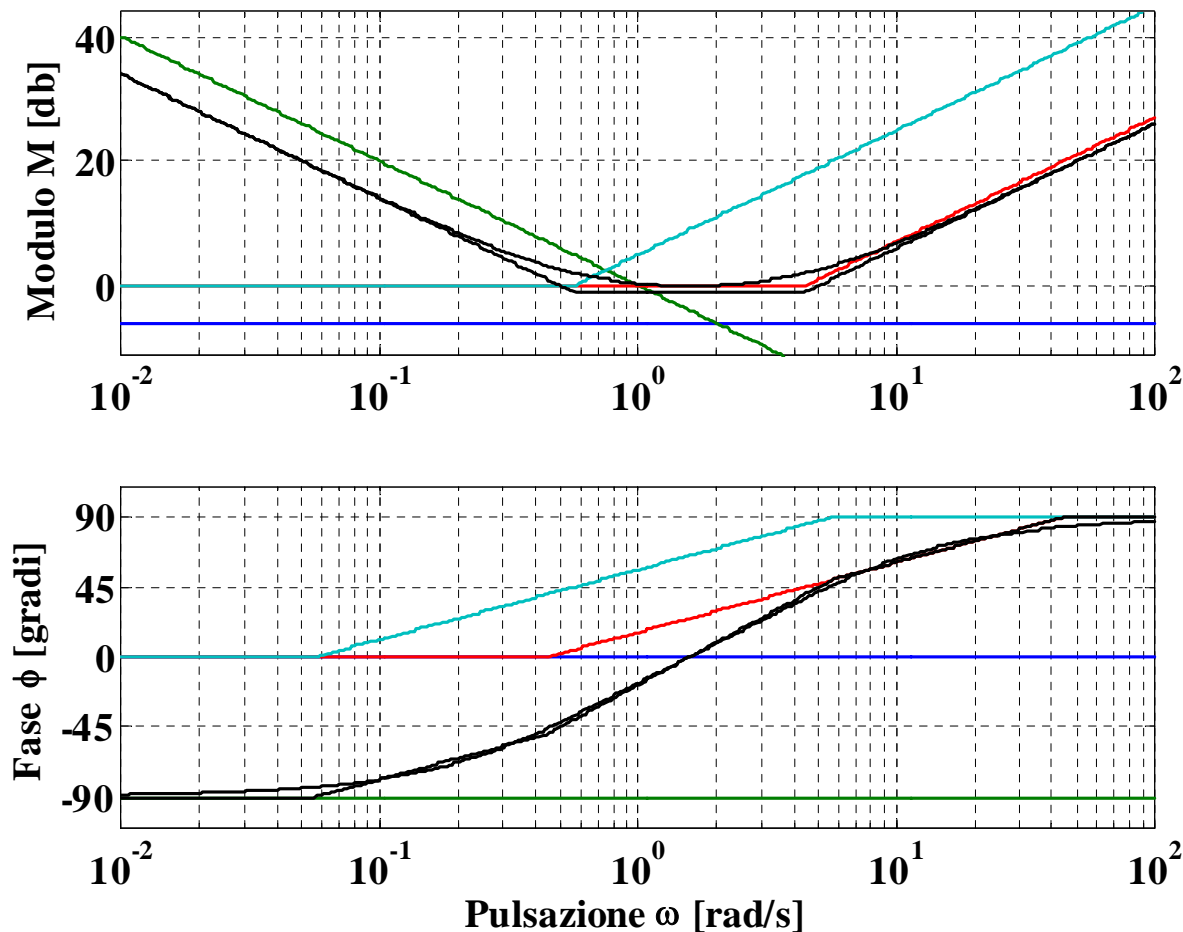
(polo aggiuntivo in alta frequenza: zeri praticamente invariati)

- zeri: reali per  $T_I \geq 4T_D$ , coincidenti in  $s = -1/2T_D$  per  $T_I = 4T_D$  (per semplificare la taratura)
- rete a sella (vantaggi sia di rete anticipatrice che attenuatrice)
- controllo per vaste classi di sistemi

# MODELLO DEI REGOLATORI PID

Diagramma di Bode (asintotico)

$$K_P=1$$
$$K_I=0.5$$
$$K_D=0.2$$



Il PID ideale è un sistema con due zeri a parte reale negativa e un polo nell'origine. E', quindi, un sistema improprio per la presenza del termine derivativo  $RD(s)$ .

# MODELLO DEI REGOLATORI PID

Per questo, nella pratica, l'azione derivativa è ottenuta per mezzo di

$$R_D^a(s) = \frac{K_P T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} = \frac{K_D s}{1 + \frac{K_D}{K_P N} s}$$

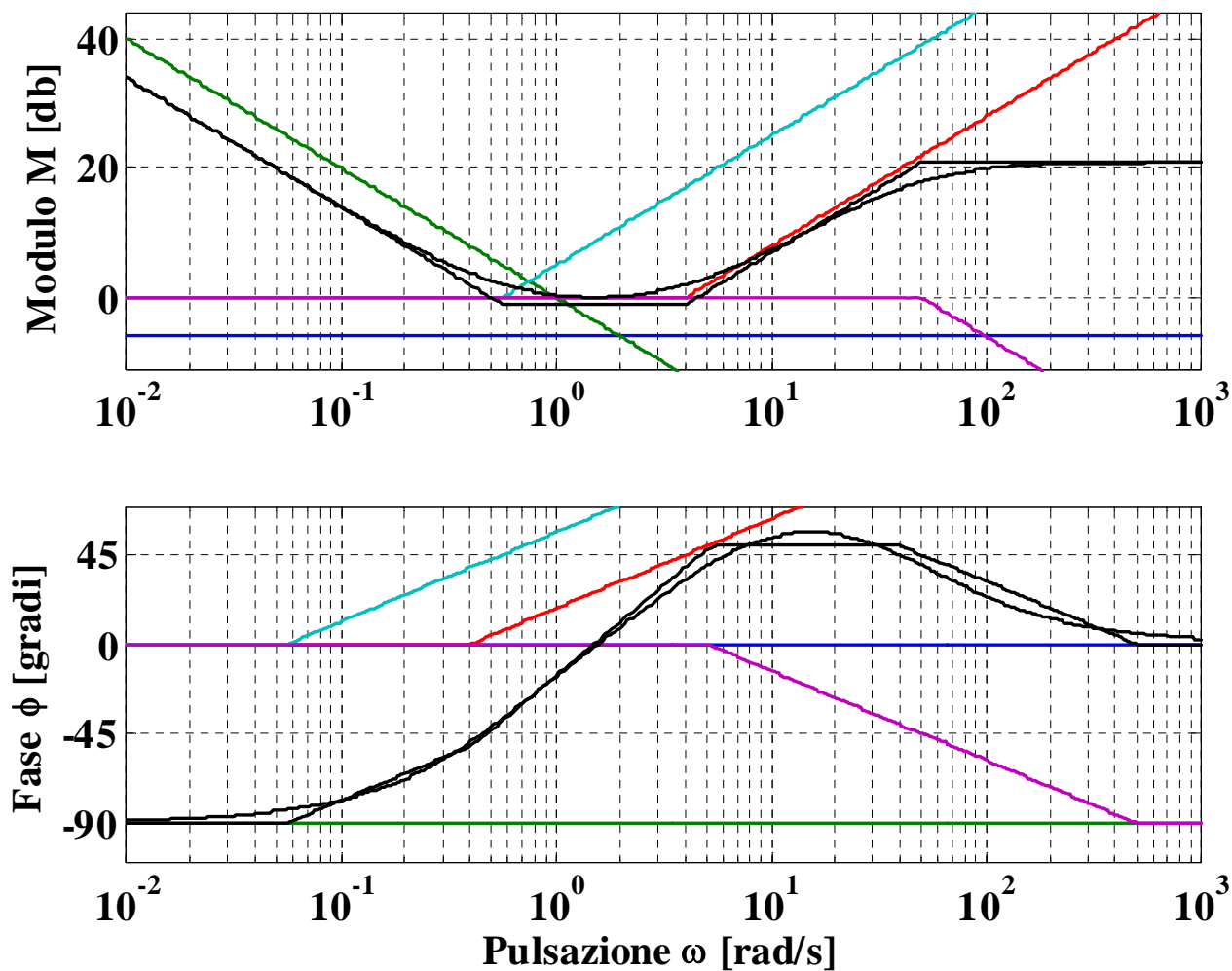
dove la costante positiva  $N$  è scelta in maniera che il polo in  $s = -N/T_D$  aggiunto per la realizzabilità sia all'esterno della banda di frequenze di interesse. D'altro canto non posso scegliere  $N$  troppo grande altrimenti avrei un guadagno troppo elevato alle alte frequenze. I valori tipici di  $N$  si trovano nell'intervallo  $[5, 20]$ .

Il PID in forma reale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$R_{PID} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D}{1 + \frac{T_D}{N} s} s \right) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \frac{K_D}{K_P N} s}$$

# MODELLO DEI REGOLATORI PID

Diagramma di Bode (asintotico)





# TARATURA AUTOMATICA

Una volta inserito il regolatore standard nella catena di trasferimento diretto del sistema di controllo è necessario regolarne il valore dei parametri affinché si adatti alla dinamica del sistema stesso. Il processo di aggiustamento dei parametri è detto **taratura**.

Quando la funzione di trasferimento è nota, si potrebbero usare i metodi di sintesi già illustrati (sintesi in frequenza e col luogo delle radici, **taratura per tentativi**). A volte, però, ricavare un modello a partire dalle leggi che governano il fenomeno è troppo impegnativo rispetto all'esigenza di progettare un regolatore che abbia prestazioni accettabili.

In questo caso si utilizzano i cosiddetti **metodi di taratura automatica**, detti anche **metodi empirici**. Si articolano in due fasi:

- effettuazione delle prove sul sistema in esame (una sorta di identificazione)
- A partire dai parametri ricavati nello step precedente, si usano tabelle e formule specifiche che consentono di ricavare i valori di  $K_P$ ,  $T_I$  e  $T_D$ .

# ZIEGLER e NICHOLS

## ad anello chiuso

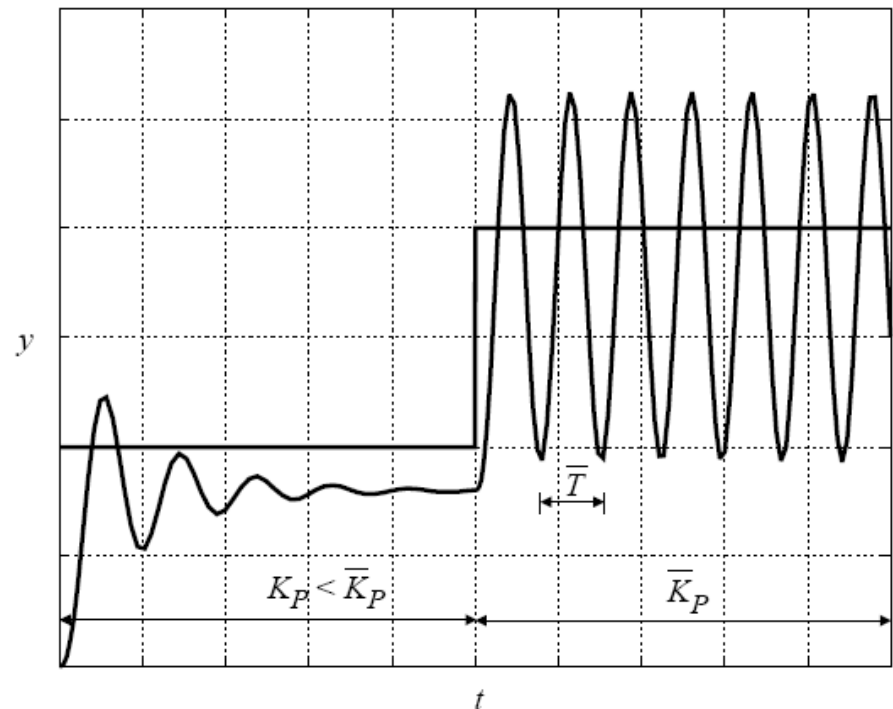
Questo metodo basa le sue formule su alcuni parametri relativi alla risposta in frequenza del sistema a ciclo chiuso.

- Chiudo in retroazione la cascata di  $C(s)$  e  $P(s)$ , dopo aver escluso le azioni integrali e derivative. ( $T_I = \infty$ ,  $T_D = 0$ )
- Aumento il coefficiente  $K_P$  fino a portare il sistema ai limiti della stabilità, ovvero oscillazioni permanenti nell'uscita a fronte di variazioni a gradino sul riferimento.

$\bar{T}$  = Periodo delle oscillazioni permanenti

$\bar{K}_P$  = Guadagno critico

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
$P$	$0.5\bar{K}_P$		
$PI$	$0.45\bar{K}_P$	$0.8\bar{T}$	
$PID$	$0.6\bar{K}_P$	$0.5\bar{T}$	$0.125\bar{T}$

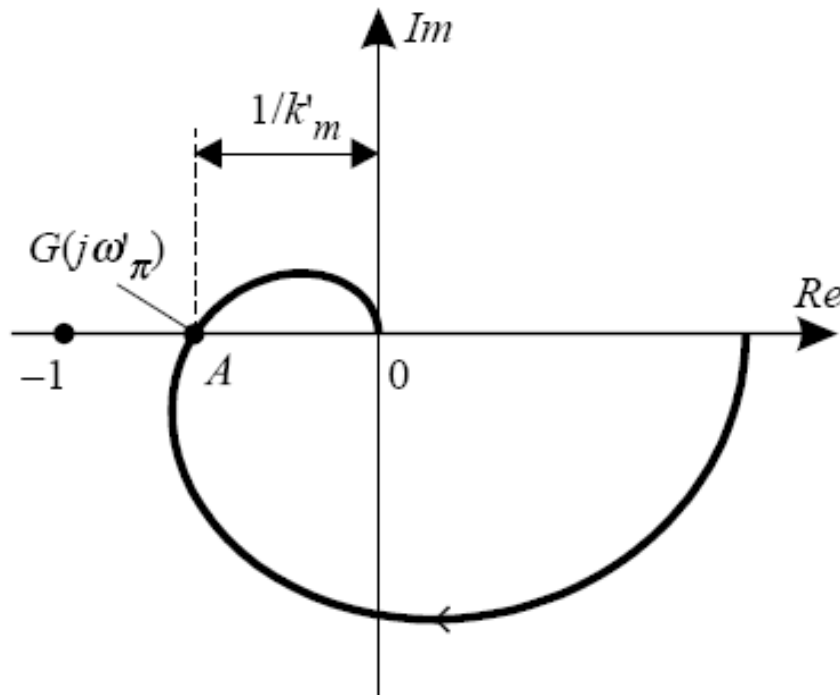


# ZIEGLER e NICHOLS

ad anello chiuso

$$\overline{K}_P = k'_m$$

$$\overline{T} = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$$



Il guadagno critico è il margine di guadagno del sistema sotto controllo (questa tecnica si può usare quando il  $M\phi$  è finito).

Il periodo delle oscillazioni è dato dalla pulsazione alla quale il diagramma di Nyquist ha fase  $\pi$

# ZIEGLER e NICHOLS

ad anello chiuso

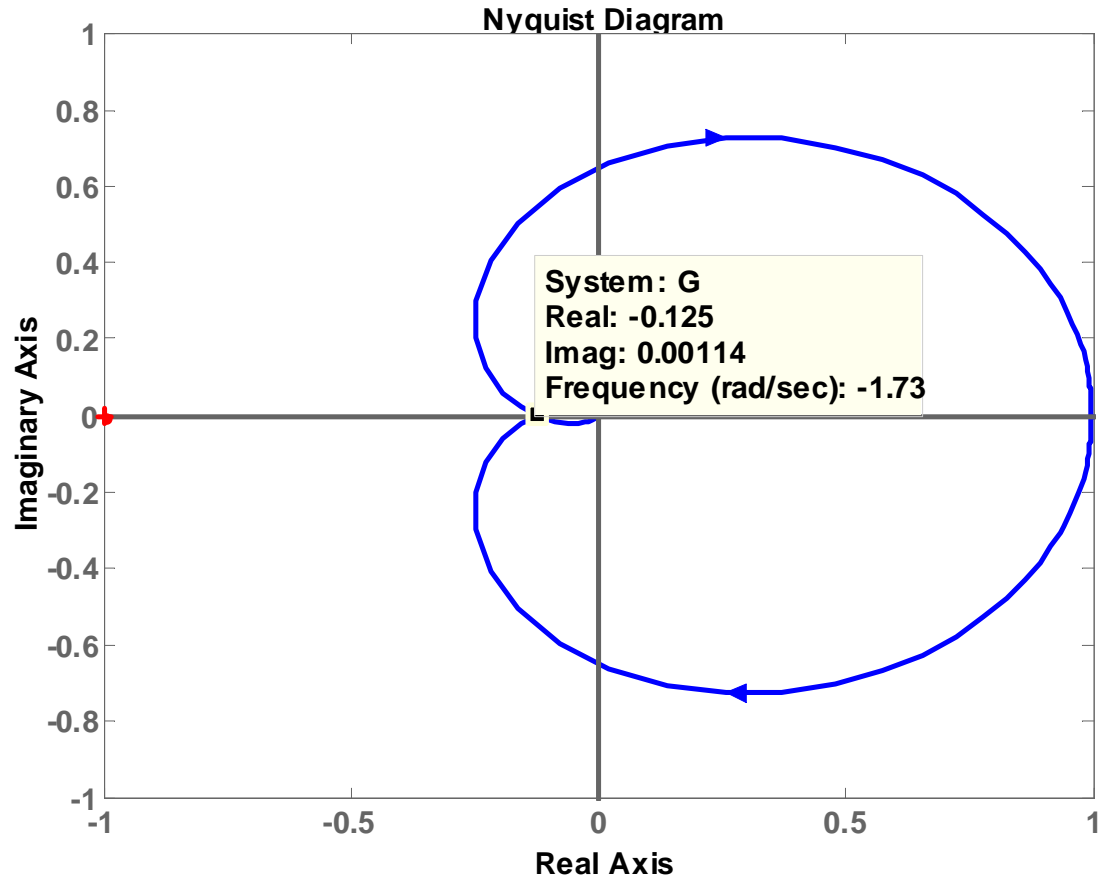
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$

$$\omega_{\pi}' = \sqrt{3}$$

$$k_m' = \frac{1}{0.125} = 8$$

$$\bar{K}_P = 8$$

$$\bar{T} \approx 3.63$$



# ZIEGLER e NICHOLS

ad anello aperto

Questo metodo, come tutti quelli ad anello aperto, si basano sull'ipotesi che il plant da controllare sia modellizzabile come un sistema a singolo polo e ritardo finito.

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$

dove il parametro  $\tau$  è detto *ritardo equivalente* mentre  $T$  è detta *costante di tempo equivalente*.

Per poter applicare questo metodo bisogna ricavare i valori dei parametri  $\mu$ ,  $T$  e  $\tau$  che descrivono il modello approssimato del sistema.

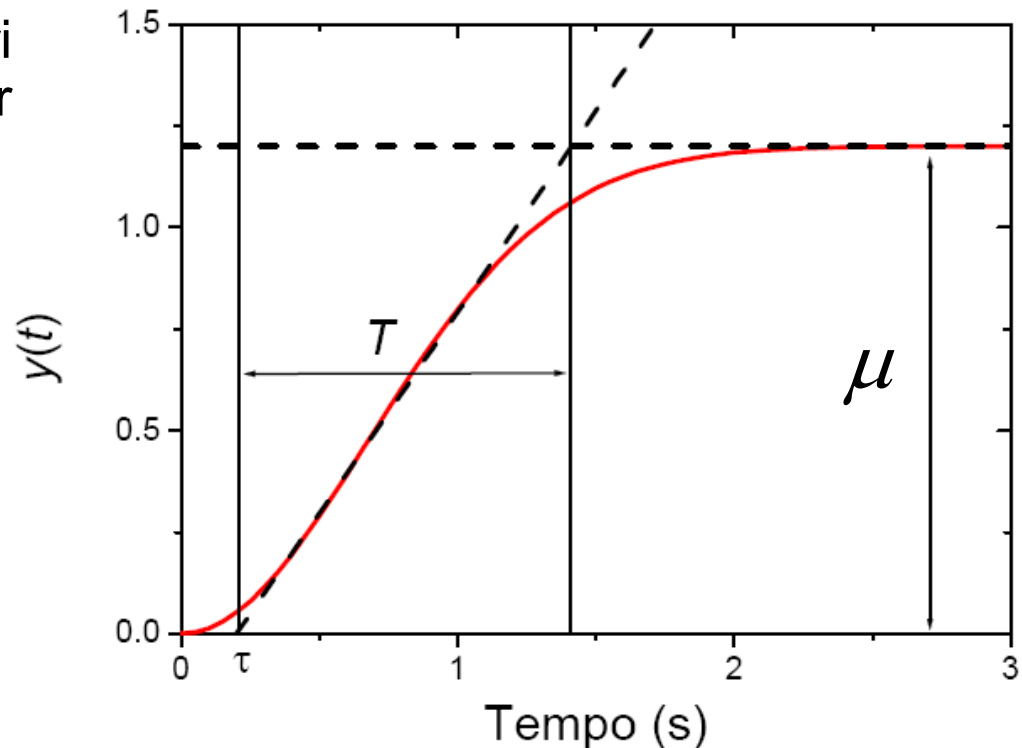
# ZIEGLER e NICHOLS

ad anello aperto

Una maniera per ricavare questi parametri si ottiene a partire dalla risposta allo scalino sperimentale del processo, tramite il **metodo della tangente**.

Una volta dedotti i parametri entro nella tabella per calcolare i valori di  $K_P$ ,  $T_I$  e  $T_D$ .

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
$P$	$\frac{T}{\mu\tau}$		
$PI$	$\frac{0.9T}{\mu\tau}$	$3\tau$	
$PID$	$\frac{1.2T}{\mu\tau}$	$2\tau$	$0.5\tau$



# LIMITI TARATURA AUTOMATICA

- Ziegler-Nichols ad anello aperto:
  - Fornisce dei valori indicativi. E' poi necessaria una taratura fine;
  - Non è applicabile quando:
    - Il sistema non raggiunge il limite di stabilità ( $k'_m = \infty$ )
    - Le oscillazioni possono essere pericolose per il sistema oggetto del controllo
- Ziegler-Nichols ad anello chiuso:
  - Fornisce anch'esso dei valori indicativi
  - Applicabile a sistemi con risposta al gradino con valore asintotico finito e non oscillante.

# TARATURA ANALITICA

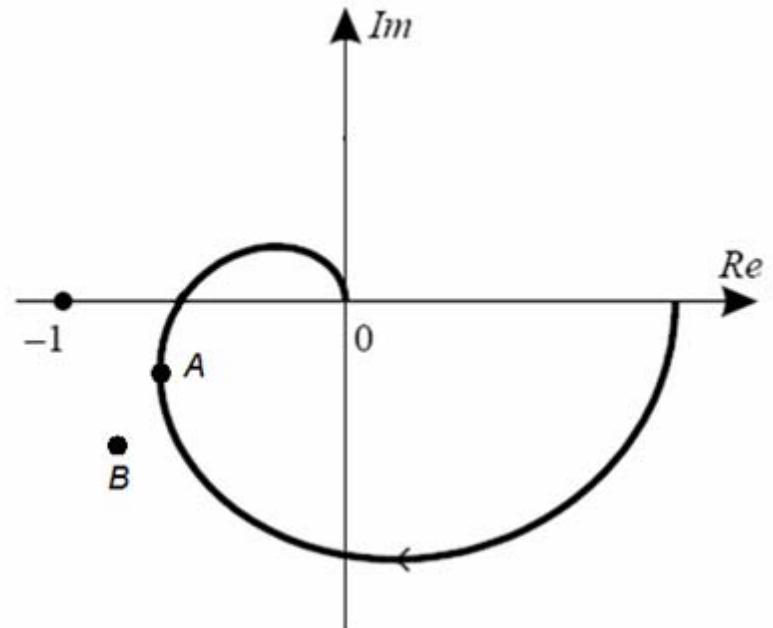
I metodi analitici per la taratura dei regolatori PID sono quelli che portano alla determinazione dei parametri del controllore  $K_P$ ,  $T_I$  e  $T_D$  attraverso calcoli svolti direttamente sul controllore.

In particolare, il metodo qui esposto si prefiggerà, dato un plant  $P(s)$  avente un determinato diagramma di Nyquist, di spostare un punto sul diagramma relativo alla pulsazione  $\omega_0$  ( $A=P(j\omega_0)$ ) ad una posizione assegnata per mezzo di un controllore PID.

Siano  $r_A$  e  $\phi_A$  rispettivamente il modulo e la fase del punto A per il quale passa il diagramma del sistema non compensato  $P(j\omega)$

$$P(j\omega_0) = |P(j\omega_0)|e^{j\angle P(j\omega_0)} = r_A e^{j\phi_A}$$

Siano, invece,  $r_B$  e  $\phi_B$  rispettivamente il modulo e la fase del punto B per il quale si vuole che passi il diagramma del sistema compensato  $C(j\omega)P(j\omega)$ .





# TARATURA ANALITICA

Dovrà, dunque, essere

$$C(j\omega_0)P(j\omega_0) = r_B e^{j\phi_B}$$

Se si pone

$$C(j\omega_0) = r_C e^{j\phi_C}$$

La condizione di passaggio per B si può riscrivere

$$r_C e^{j\phi_C} r_A e^{j\phi_A} = r_B e^{j\phi_B}$$

Uguagliando modulo e fasi ottengo

$$r_C r_A = r_B$$

$$\phi_C + \phi_A = \phi_B$$

Affinché, allora, il compensatore assicuri il passaggio per B esso dovrà avere:

$$|C(j\omega_0)| = r_C = \frac{r_B}{r_A}$$

$$\angle C(j\omega_0) = \phi_C = \phi_B - \phi_A$$

# TARATURA ANALITICA

Assumendo che il controllore sia del tipo PID, possiamo ricavare esplicitamente modulo e fase di  $C(j\omega_0)$  in funzione di  $K_P$ ,  $T_I$  e  $T_D$  e sfruttare, quindi, le relazioni ottenute per calcolare tali parametri in funzione di  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $\phi_A$  e  $\phi_B$ .

$$C(s) = K_P \left( 1 + T_D s + \frac{1}{s T_I} \right)$$

$$C(j\omega_0) = K_P \left( 1 + jT_D\omega_0 + \frac{1}{jT_I\omega_0} \right) = K_P + jK_P \left( T_D\omega_0 - \frac{1}{T_I\omega_0} \right)$$

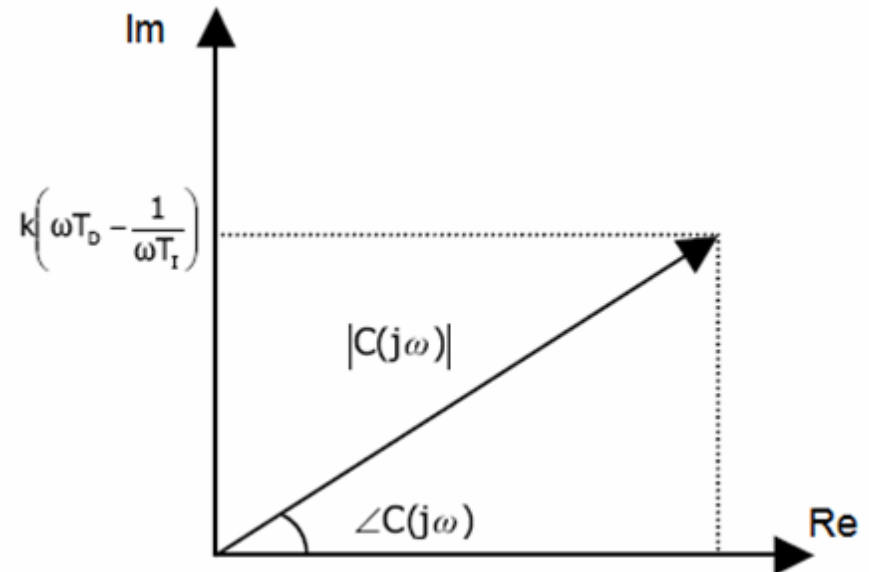
Considerando la figura

$$|C(j\omega_0)| = r_C = \frac{r_B}{r_A}$$

$$\angle C(j\omega_0) = \phi_C = \phi_B - \phi_A$$

$$\tan \phi_C = \frac{\text{Im}[C(j\omega_0)]}{\text{Re}[C(j\omega_0)]} = T_D\omega_0 - \frac{1}{T_I\omega_0}$$

$$K_P = |C(j\omega_0)| \cos \phi_C$$



# TARATURA ANALITICA

Quindi

$$K_P = \frac{r_B}{r_A} \cos(\phi_B - \phi_A)$$

$$T_I = 4T_D$$

il che equivale a imporre che i due zeri introdotti siano coincidenti

$$T_D \omega_0 - \frac{1}{T_I \omega_0} = \tan(\phi_B - \phi_A)$$

Tali formule sono valide per un generico PID. Possono essere particolarizzate al caso di un PI o PD ponendo, rispettivamente,  $T_D=0$  o  $T_I=\infty$

PD

PI

$$K_P = \frac{r_B}{r_A} \cos(\phi_B - \phi_A)$$

$$T_D = \frac{1}{\omega_0} \tan(\phi_B - \phi_A)$$

$$K_P = \frac{r_B}{r_A} \cos(\phi_B - \phi_A)$$

$$T_I = \frac{1}{\omega_0} \cot(\phi_B - \phi_A)$$

La scelta tra le varie opportunità (PID, PI o PD) sarà dettata dalle specifiche: se si vuole ridurre la sovraelongazione uno un PD, se devo ridurre l'errore a regime un PI, se ho entrambe le esigenze un PID.

# TARATURA ANALITICA

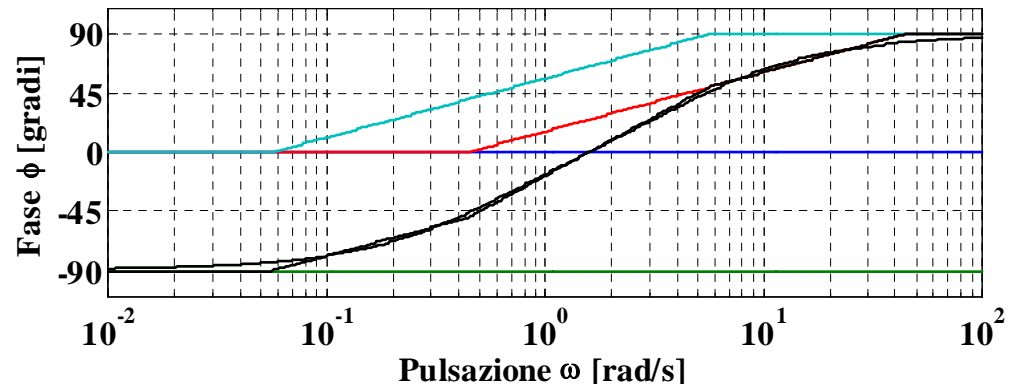
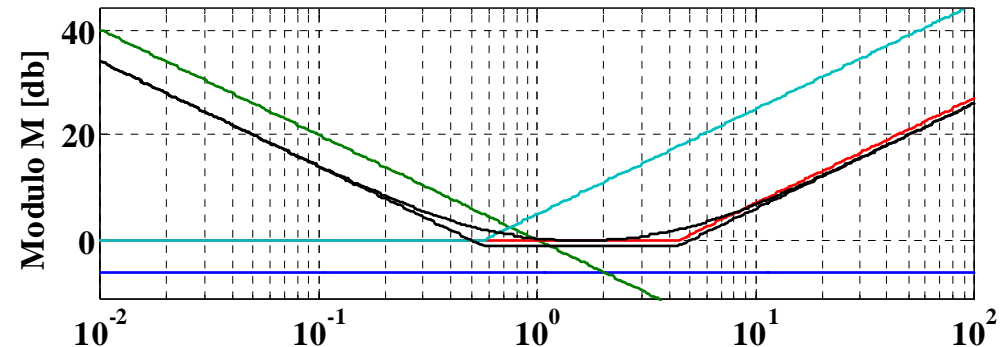
Esistono delle limitazioni all'applicabilità del metodo esposto.

Un generico PID non può realizzare uno sfasamento ( $\phi_B - \phi_A$ ) arbitrariamente grande. Guardando il diagramma di Bode delle fasi, ci si accorge che lo sfasamento che esso può introdurre è limitato all'intervallo  $[-90^\circ, 90^\circ]$

Per il PI, coppia polo nell'origine e zero negativo lo sfasamento è limitato all'intervallo  $[-90^\circ, 0^\circ]$ .

Per il PD, essendo costituito da un singolo zero negativo lo sfasamento è limitato all'intervallo  $[0^\circ, 90^\circ]$ .

Diagramma di Bode (asintotico)



# TARATURA ANALITICA

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Progettare un regolatore standard tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- $e_u=0$
- $\omega_T=1.8 \text{ rad/s}$
- $M_\phi=70^\circ$

La specifica sull'annullamento dell'errore a regime impone che il controllore sia di tipo PI o PID.

Le altre due specifiche possono ritenersi soddisfatte se il diagramma di Nyquist del sistema compensato passa alla pulsazione  $\omega=1.8 \text{ rad/s}$  per il punto B caratterizzato da  $r_B=1$  e  $\phi_B=-110^\circ$  invece che dal punto A avente  $r_A=0.18$  e  $\phi_A=-102.9^\circ$ .

$$(\phi_B - \phi_A) = -7.1^\circ$$

Devo introdurre un ritardo, quindi basterà utilizzare un PI.

$$K_p=5.51$$

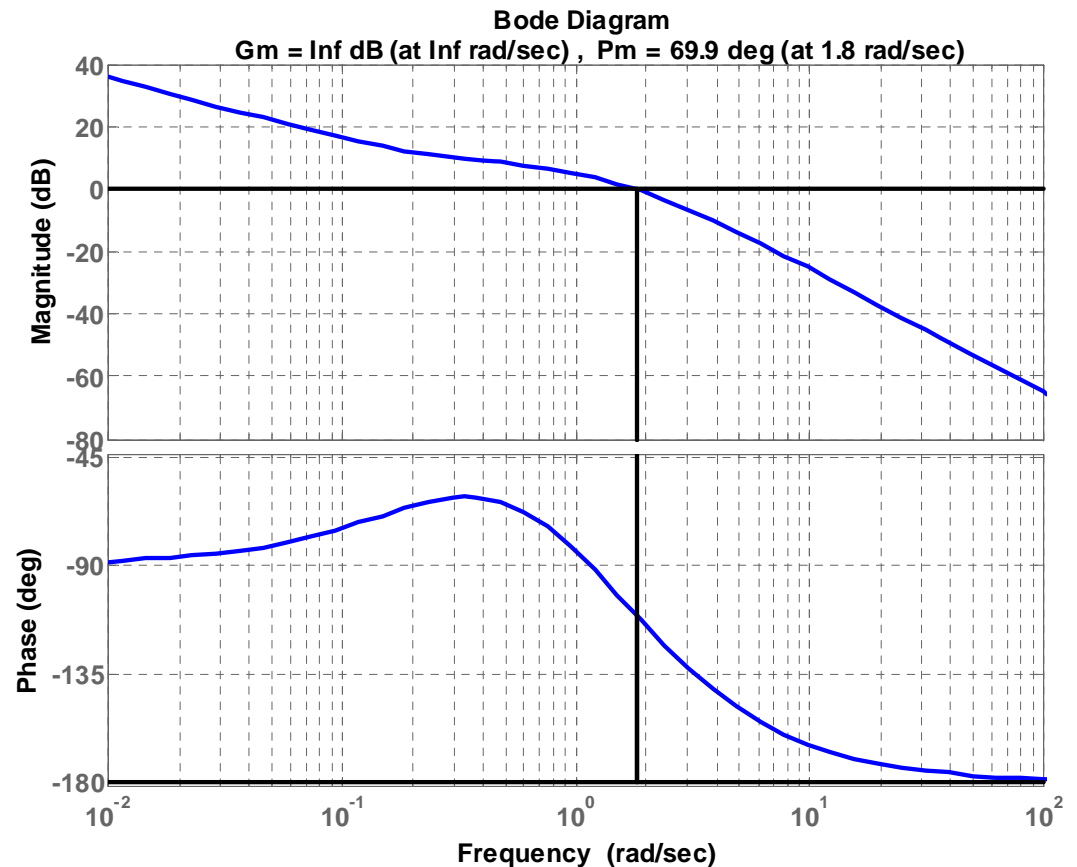
$$T_i=4.46 \text{ s}$$

# TARATURA ANALITICA

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$C(s) = 5.51 \left( 1 + \frac{1}{4.46s} \right)$$

- $e_u=0$
- $\omega_T=1.8 \text{ rad/s}$
- $M_\phi=70^\circ$



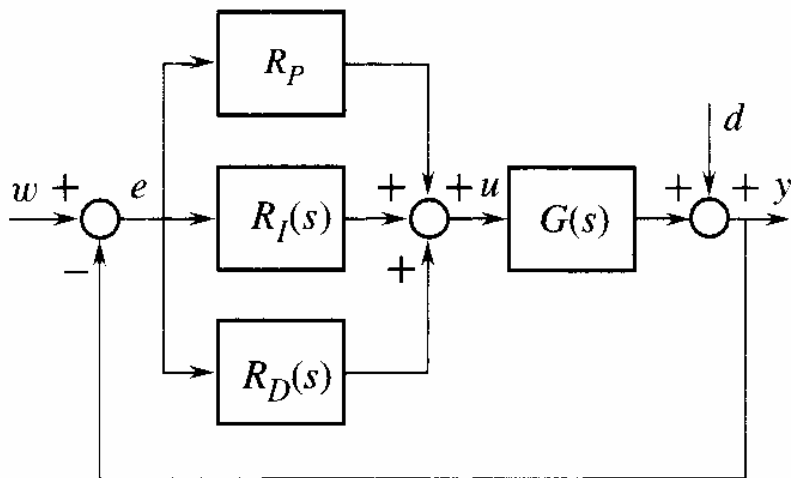
# PROBLEMI NELL'UTILIZZO DEI PID

Limitazione dell'azione derivativa.

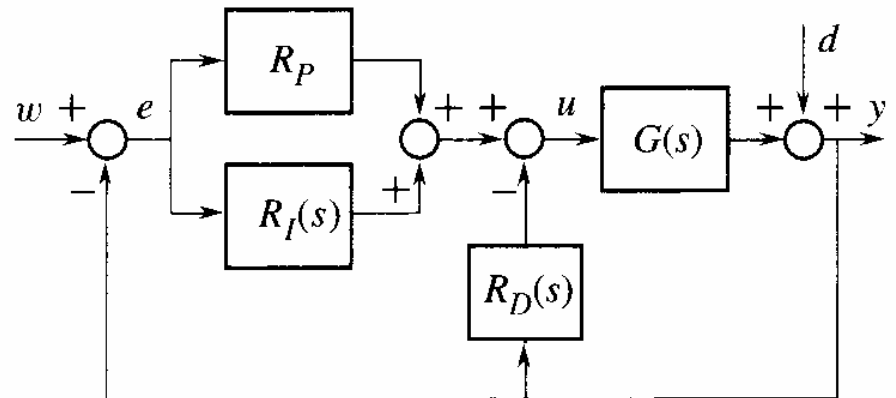
Nel classico schema di controllo l'azione derivativa è effettuata sull'errore. In presenza di un gradino sul riferimento l'uscita del derivatore e, quindi, la variabile di controllo ha un impulso.

- Contrasto con moderazione del controllo
- Può provocare saturazione dell'attuatore
- Allontanamento del sistema dalla condizione di linearità

L'azione derivativa è esercitata solo sull'uscita le cui variazioni sono in genere contenute.



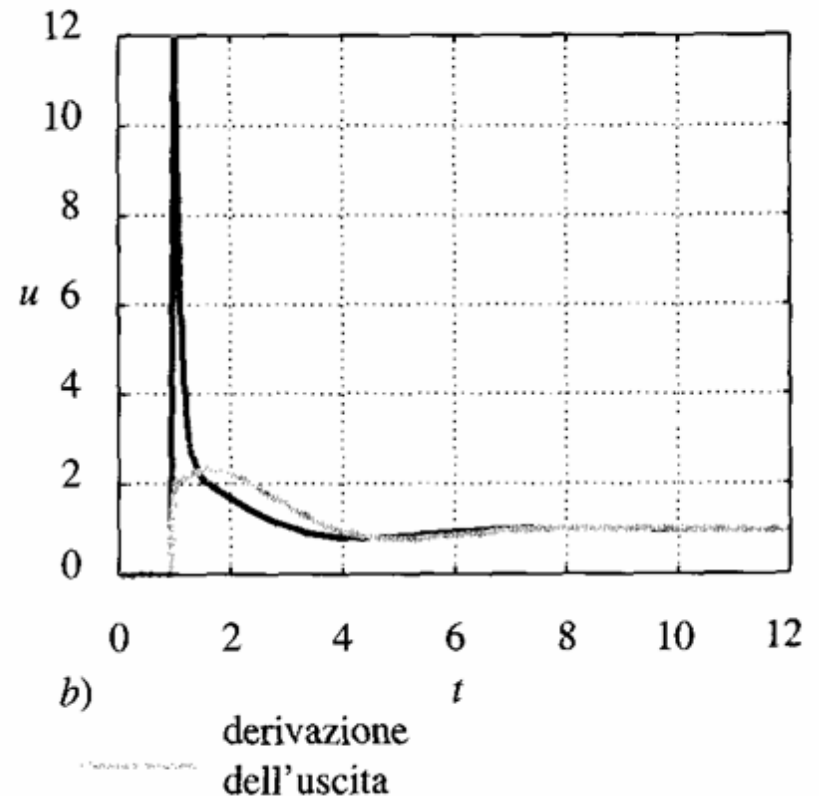
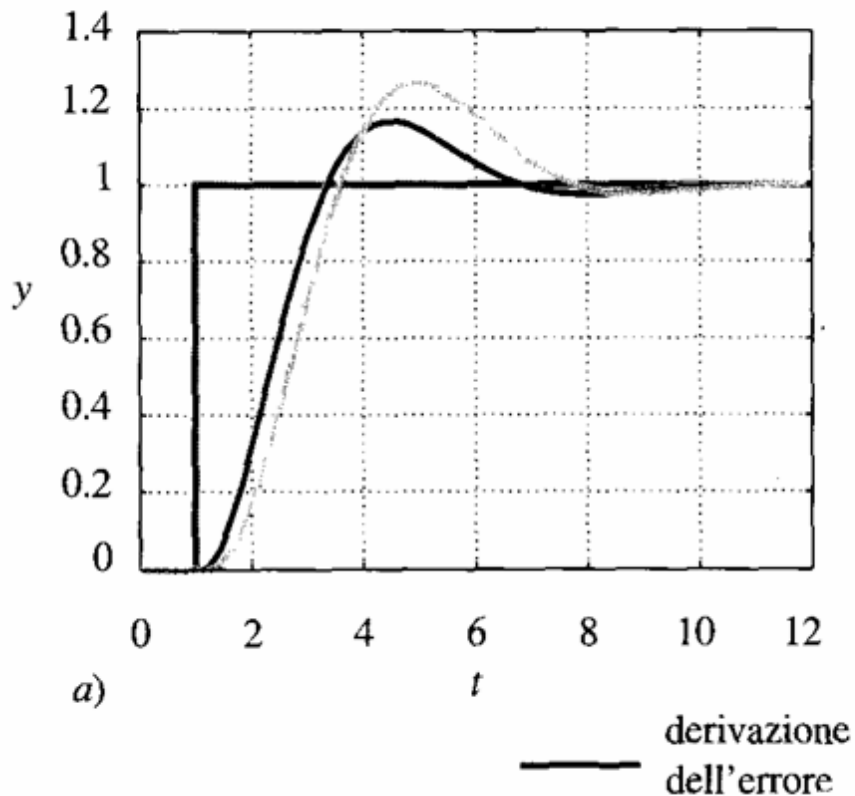
a)



b)

# PROBLEMI NELL'UTILIZZO DEI PID

Limitazione dell'azione derivativa.

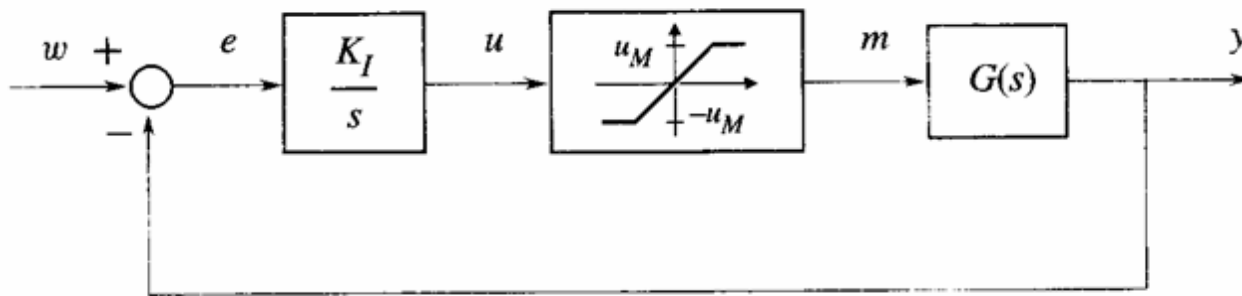




# PROBLEMI NELL'UTILIZZO DEI PID

## Fenomeno del wind-up

- Fenomeno non lineare di interazione tra l'azione di controllo di tipo integrale e l'attuatore, la cui uscita è fisicamente limitata (saturata).
- Quindi non è specifico dei PID, ma può esserci ogni volta che il regolatore contiene un'azione di tipo integrale.
- Si manifesta con un degrado di prestazioni del sistema di controllo, durante manovre che portino a saturare l'uscita dell'attuatore.



$$m(t) = \begin{cases} -u_M & , u(t) < -u_M \\ u(t) & , |u(t)| \leq u_M \\ u_M & , u(t) > u_M \end{cases}$$

# PROBLEMI NELL'UTILIZZO DEI PID

## Fenomeno del wind-up

Quando l'errore si mantiene dello stesso segno per un certo periodo (es startup) lo stato dell'integratore (e quindi la sua uscita) cresce in modulo, anche nel caso in cui l'uscita effettiva dell'attuatore sia limitata per saturazione (**l'integratore "si carica"**).

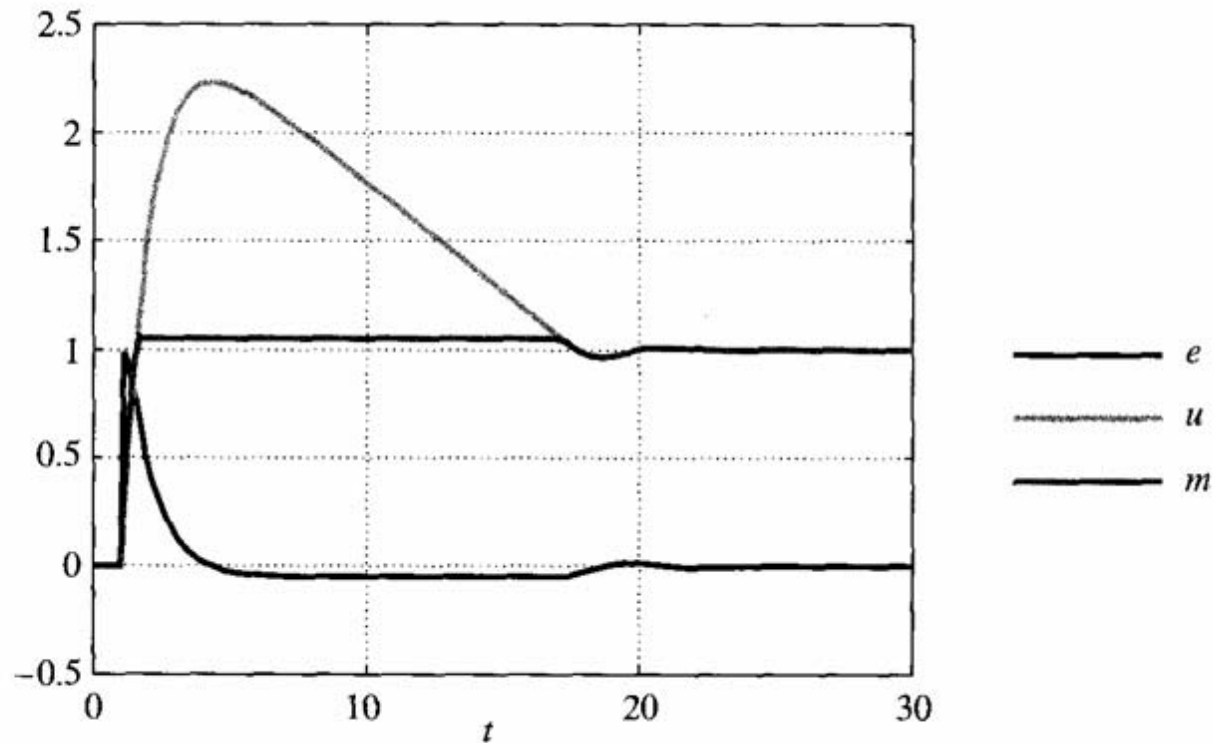
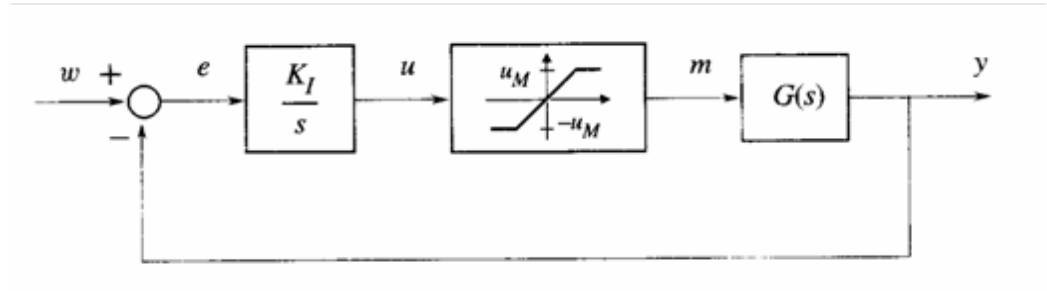
In corrispondenza della variazione di segno dell'errore non c'è una pronta variazione del segnale di controllo, poiché si deve attendere la **"scarica" dell'integrale** prima di poter avere un segnale di comando che faccia uscire dalla saturazione l'attuatore.

Questo fatto può dar origine a lunghi transitori, con sovraelongazioni eccessive ed indesiderate sull'uscita controllata (decadimento delle prestazioni).

Più pericoloso ancora è il fatto che nel periodo in cui l'attuatore è saturato e l'integratore "si carica" il sistema di controllo **non** è assolutamente **reattivo nei confronti di disturbi** che possono avvenire nel sistema controllato.

# PROBLEMI NELL'UTILIZZO DEI PID

Fenomeno del wind-up



# PROBLEMI NELL'UTILIZZO DEI PID

## Schema anti wind-up

- Quando si opera in zona lineare la fdt tra  $c$  ed  $e$  coincide con quella di un PI.
- Se  $b$  satura a  $u_M$  per la presenza di un errore positivo per un certo periodo di tempo, allora anche  $c$  è uguale a  $u_M$  e  $z$  tende a  $u_M$  come un sistema del primo ordine con costante di tempo  $T_I$ . Se  $e$  cambia di segno, allora anche  $q$  assume segno negativo e la variabile  $b=q+z$  diventa inferiore al limite di saturazione  $u_M$  cioè il sistema torna a funzionare in maniera lineare.

