강대모의고사K 4회 정답 및 해설

• 수학 영역 •

공통과목

1	⑤	2	③	3	③	4	⑤	5	③
6	④	7	②	8	④	9	④	10	②
11	②	12	⑤	13	④	14	①	15	③
16	39	17	24	18	15	19	28	20	45
21	123	22	11						

해설

1. $\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{1+\sqrt{2}}=2^{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$

$=2^{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=2^{\sqrt{2}}$

2. $f(x)=2x^3-3x+1$에서

$f'(x)=6x^2-3$이므로

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=3$

3. $\sin^2\theta=\dfrac{9}{25}$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\dfrac{16}{25}$이고

$\tan^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{9}{16}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$일 때 $\tan\theta>0$이므로

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

4. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)-\lim\limits_{x\to1+}f(x)=2-(-1)=3$

5. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 $a_1a_5=a_3^{\,2}$이고

$a_1a_3a_5=27$에서 $a_3^{\,3}=27$

곧, $a_3=3$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_4=a_3r=3r$이므로

$a_3+a_4=9$에서

$3+3r=9$

곧, $r=2$

따라서

$a_5=a_3\times r^2$

$=3\times2^2$

$=12$

6. $\dfrac{6}{\log_b a+1}=4$에서

$\log_b a=\dfrac{1}{2}$, 곧 $\log_a b=2$이고 $a^2=b$

따라서 $\dfrac{2a+b}{\log_a b}=4$에서 $\dfrac{2a+a^2}{2}=4$

$(a+4)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

이때 $b=a^2=4$

$a\times b=8$

7. $f(x)=x^3+3x^2$, $g(x)=2x^2+x+1$이라 하자.

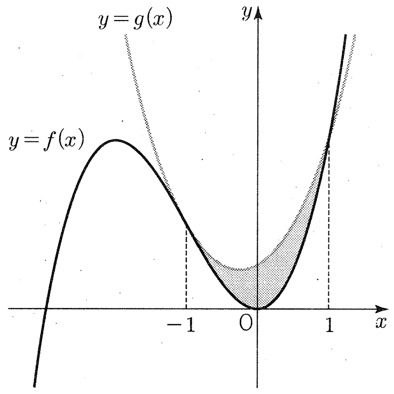
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3+3x^2=2x^2+x+1$에서

$x^3+x^2-x-1=0$

$(x+1)^2(x-1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=1$



닫힌구간 $[-1,1]$에서 $g(x)\ge f(x)$이므로

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-1}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx$

$=\int_{-1}^{1}(-x^3-x^2+x+1)dx$

$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx\left(\because\int_{-1}^{1}(-x^3+x)dx=0\right)$

$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$

$=2\left[-\dfrac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$

$=2\times\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{4}{3}$

8. $(x+3)f(x)=(x^2-x)g(x)$ ...... ㉠

위의 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$6f(3)=6g(3)$, 곧 $f(3)=g(3)$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x+3)f'(x)=(2x-1)g(x)+(x^2-x)g'(x)$

위의 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)+6f'(3)=5g(3)+6g'(3)$ ...... ㉡

$f(3)=g(3)=6$, $g'(3)=3$이므로 ㉡에서

$6+6f'(3)=5\times6+6\times3$

따라서 $f'(3)=7$

9. $(\sin x-k)(\cos x-k)=0$에서

$\sin x=k$ 또는 $\cos x=k$

곧, x에 대한 방정식 $(\sin x-k)(\cos x-k)=0$의 양의 실근은 직선 $y=k$가 $x>0$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$와 만나는 점의 x좌표와 같다.

$0<x\le\dfrac{\pi}{4}$에서 $0<\sin x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\cos x$이고

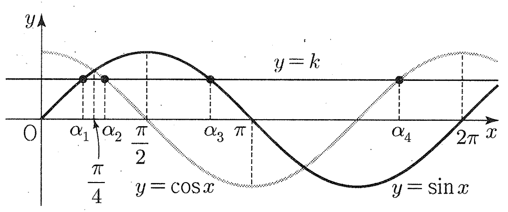
$\sin\alpha_1=k$이므로

$0<k\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

그런데 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이면 $\alpha_1=\dfrac{\pi}{4}$, $\alpha_2=\dfrac{3}{4}\pi$가 되어

$\alpha_2-\alpha_1=\dfrac{\pi}{10}$를 만족시키지 않는다.

따라서 $0<k<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



위의 그림과 같이 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$와 만나는 점은 구간 $[0,2\pi]$에 4개가 있다.

두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$는 주기가 모두 2π이므로 구간 $[2\pi,4\pi]$, $[4\pi,6\pi]$, $\cdots$에 이와 같은 교점 4개가 반복적으로 나타난다.

따라서

$\alpha_8-\alpha_7=(\alpha_4+2\pi)-(\alpha_3+2\pi)$

$=\alpha_4-\alpha_3$

그런데 곡선 $y=\cos x$는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\alpha_4=2\pi-\alpha_2$

또한 곡선 $y=\sin x$는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\alpha_3=\pi-\alpha_1$

따라서

$\alpha_4-\alpha_3=(2\pi-\alpha_2)-(\pi-\alpha_1)$

$=\pi-(\alpha_2-\alpha_1)$

$=\pi-\dfrac{\pi}{10}$

$=\dfrac{9}{10}\pi$

10. 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v_1(t)=at^2+bt$이고

조건 (가)에서 점 P는 시각 $t=2$에서 운동 방향이 바뀌므로

$v_1(2)=4a+2b=0$에서 $b=-2a$

곧, $v_1(t)=at(t-2)$

점 Q의 시각 t에서의 속도는

$v_2(t)=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$이므로

점 Q는 시각 $t=1$에서 처음으로 운동 방향이 바뀌고 $t=4$에서 두 번째로 운동 방향이 바뀐다.

점 P가 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 움직인 거리는

$\int_1^4|v_1(t)|dt=\int_1^4 a|t(t-2)|dt\ (\because a>0)$

$=-\int_1^2 at(t-2)dt+\int_2^4 at(t-2)dt$

$=-a\left[\dfrac{1}{3}t^3-t^2\right]_1^2+a\left[\dfrac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^4$

$=\dfrac{22}{3}a$

점 Q가 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 움직인 거리는

$\int_1^4|v_2(t)|dt=\int_1^4|(t-1)(t-4)|dt$

$=-\int_1^4(t-1)(t-4)dt$

$=-\left[\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{5}{2}t^2+4t\right]_1^4$

$=\dfrac{9}{2}$

조건 (나)에서 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 두 점 P, Q가 각각 움직인 거리는 같으므로

$\int_1^4|v_1(t)|dt=\int_1^4|v_2(t)|dt$에서

$\dfrac{22}{3}a=\dfrac{9}{2}$, 곧 $a=\dfrac{27}{44}$

수학 영역

11. $S_{2m}=a_{2m}+3a_m$

$S_{2m}-a_{2m}=3a_m$

곧, $S_{2m-1}=3a_m$ …… ㉠

좌변의 S_{2m-1}은

$S_{2m-1}=(2m-1)\times\dfrac{a_1+a_{2m-1}}{2}=(2m-1)\times a_m$

이므로 ㉠에서

$(2m-1)\times a_m=3a_m$

$(2m-4)\times a_m=0$

곧, $m=2$ 또는 $a_m=0$일 때 ㉠을 만족시킨다.

그런데 주어진 조건에서 ㉠을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합이 8이므로 $a_m=0$이 되도록 하는 자연수 m의 값은 6이다. ($\because$ $a_m=0$이 되도록 하는 자연수 m의 개수는 1 이하이다.)

곧, $a_6=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=-10$이므로

$d=\dfrac{a_6-a_1}{5}=\dfrac{0-(-10)}{5}=2$

따라서

$a_{10}=a_1+9d$

$=-10+9\times2$

$=8$

12. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수는 각각 1, -1이고, 조건 (가)에 의하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 모두 직선 $y=tx$와 원점에서 접하므로

$f(x)-tx=x^2$, $g(x)-tx=-x^2$

따라서

$f(x)g(x)=(x^2+tx)(-x^2+tx)$

$=-x^2(x+t)(x-t)$

곡선 $y=f(x)g(x)$와 직선 $y=x+t$가 모두 점 $(-t, 0)$을 지난다.

곡선 $y=f(x)g(x)$와 직선 $y=x+t$의 접점이 $(-t, 0)$인 경우와 접점이 $(-t, 0)$이 아닌 경우로 나누어 살펴보자.

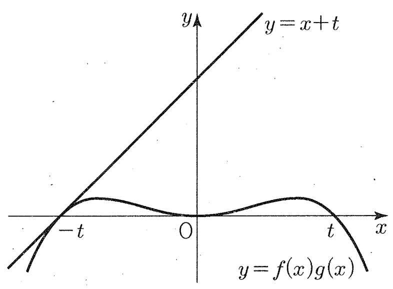
(i) 접점이 $(-t, 0)$인 경우

이 경우 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(-t, 0)$에서의 접선의 기울기는 직선 $y=x+t$의 기울기인 1과 같다.

$\{f(x)g(x)\}'=-4x^3+2t^2x$이므로

$-4\times(-t)^3+2t^2\times(-t)=1$에서

$2t^3=1$, 곧 $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$



(ii) 접점이 $(-t, 0)$이 아닌 경우

접점의 x좌표를 $\alpha\ (\alpha\neq-t)$라 하면 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(\alpha, -\alpha^2(\alpha+t)(\alpha-t))$에서의 접선의 방정식은

$y=(-4\alpha^3+2t^2\alpha)(x-\alpha)-\alpha^2(\alpha+t)(\alpha-t)$이고

이 직선이 점 $(-t, 0)$을 지나므로

$0=(-4\alpha^3+2t^2\alpha)(-t-\alpha)-\alpha^2(\alpha+t)(\alpha-t)$

$\alpha(\alpha+t)^2(3\alpha-2t)=0$

$\alpha\neq-t$이므로 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=\dfrac{2t}{3}$

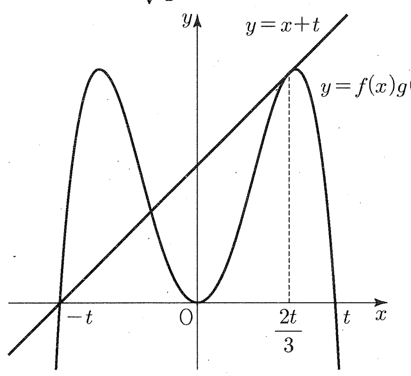
이때 접선의 기울기는 직선 $y=x+t$의 기울기인 1과 같으므로 $-4\alpha^3+2t^2\alpha=1$

그런데 $\alpha=0$은 $-4\alpha^3+2t^2\alpha=1$을 만족시키지 않으므로 $\alpha=\dfrac{2t}{3}$

$-4\alpha^3+2t^2\alpha=1$에서

$-4\times\left(\dfrac{2t}{3}\right)^3+2t^2\times\dfrac{2t}{3}=1$

$\dfrac{4t^3}{27}=1$, 곧 $t=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$



(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 t의 값의 곱은

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\times\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{3}{2}$

[다른 풀이]

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수는 각각 1, -1이고, 조건 (가)에 의하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 모두 직선 $y=tx$와 원점에서 접하므로

$f(x)-tx=x^2$, $g(x)-tx=-x^2$

따라서

$f(x)g(x)=(x^2+tx)(-x^2+tx)$

$=-x^2(x+t)(x-t)$

곡선 $y=f(x)g(x)$가 직선 $y=x+t$와 접하므로

방정식 $f(x)g(x)=x+t$에서

$-x^2(x+t)(x-t)=x+t$

곧, $(x+t)(x^3-tx^2+1)=0$이 중근을 갖는다.

따라서 방정식 $x^3-tx^2+1=0$이 $-t$를 실근으로 갖거나 $x^3-tx^2+1=0$이 중근을 갖는다.

(i) 방정식 $x^3-tx^2+1=0$이 $-t$를 실근으로 갖는 경우

$(-t)^3-t\times(-t)^2+1=0$

$2t^3=1$, 곧 $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

(ii) 방정식 $x^3-tx^2+1=0$이 중근을 갖는 경우

$h(x)=x^3-tx^2+1$이라 하면

$h'(x)=3x^2-2tx=x(3x-2t)$이므로

삼차함수 $h(x)$는 두 극값

$h(0)=1$, $h\left(\dfrac{2t}{3}\right)=-\dfrac{4t^3}{27}+1$을 갖는다.

삼차방정식 $h(x)=0$이 중근을 가지려면 두 극값 중 하나가 0이어야 하므로

$-\dfrac{4t^3}{27}+1=0$에서 $t=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 t의 값의 곱은

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\times\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{3}{2}$

13. $a_{n+1}=\begin{cases}3-a_n & (0\le a_n\le3)\\ \dfrac{a_n-3}{2} & (a_n>3)\end{cases}$ …… ㉠

만약 어떤 자연수 m에 대하여 $0\le a_m\le3$이면 ㉠에 의하여 $a_{m+1}=3-a_m$이 되어 $0\le a_{m+1}\le3$이고,

만약 어떤 자연수 m에 대하여 $a_m>3$이면

㉠에 의하여 $a_{m+1}=\dfrac{a_m-3}{2}$이 되어 $a_{m+1}>0$이다.

곧, $a_m\ge0$이면 $a_{m+1}\ge0$

그런데 $a_1\ge0$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge0$

$a_p=a_{p+2}$가 성립할 조건을 a_p의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 살펴보자.

(i) $0\le a_p\le3$인 경우

㉠에 의하여 $a_{p+1}=3-a_p$

$0\le a_{p+1}\le3$이므로 ㉠에 의하여

$a_{p+2}=3-a_{p+1}=a_p$

곧, $0\le a_p\le3$이면 $a_p=a_{p+2}$

(ii) $a_p>3$인 경우

㉠에 의하여 $a_{p+1}=\dfrac{a_p-3}{2}$

㉠에 의하여

$a_{p+2}=\dfrac{a_{p+1}-3}{2}$ 또는 $a_{p+2}=3-a_{p+1}$

곧, $a_{p+2}=\dfrac{a_p-9}{4}$ 또는 $a_{p+2}=\dfrac{9-a_p}{2}$

만약 $a_p=a_{p+2}$이면

$a_p=\dfrac{a_p-9}{4}$ 또는 $a_p=\dfrac{9-a_p}{2}$에서

$a_p=-3$ 또는 $a_p=3$이 되어

$a_p>3$을 만족시키지 않는다.

곧, $a_p>3$이면 $a_p\neq a_{p+2}$

(i), (ii)에 의하여

$a_p=a_{p+2}$이기 위한 필요충분조건은 $0\le a_p\le3$이다. …… ㉡

만약 $0\le a_1\le3$이면

㉠에 의하여 $a_2=3-a_1$이고 $0\le a_2\le3$이므로

㉡에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+2}$가 되어 '$a_p\neq a_{p+2}$인 자연수 p의 개수가 2'라는 조건을 만족시키지 않는다.

곧, $a_1>3$

만약 $0\le a_2\le3$이면 마찬가지의 방법으로 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+2}$가 되어 '$a_p\neq a_{p+2}$인 자연수 p의 개수가 2'라는 조건을 만족시키지 않는다.

곧, $a_2>3$

만약 $0\le a_3\le3$이면 마찬가지의 방법으로 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=a_{n+2}$

따라서 $a_1>3$, $a_2>3$, $0\le a_3\le3$일 때 '$a_p\neq a_{p+2}$인 자연수 p의 개수가 2'라는 조건을 만족시킨다.

이때 $a_3=a$라 하면

$0\le a_3\le3$이므로 ㉠에 의하여 $a_4=3-a$이고,

$0\le a_4\le3$이므로 ㉡에 의하여 모든 자연수 k에 대하여

$a_{2k+1}=a_3=a$,

$a_{2k+2}=a_4=3-a$

또한 $a_2>3$이므로 $a_3=\dfrac{a_2-3}{2}$

곧, $a_2=2a_3+3=2a+3$

$a_1>3$이므로 $a_2=\dfrac{a_1-3}{2}$

곧, $a_1=2a_2+3=4a+9$

따라서

수학 영역

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(a_{2k+1}+a_{2k+2})$$
$$=(4a+9)+(2a+3)+\sum_{k=1}^{5}\{a+(3-a)\}$$
$$=6a+12+\sum_{k=1}^{5}3$$
$$=6a+27$$

주어진 조건에서 $\sum_{k=1}^{12} a_k = 33$이므로

$6a+27=33$에서 $a=1$

따라서 $a_1=4a+9=13$, $a_{12}=3-a=2$이므로

$a_1+a_{12}=15$

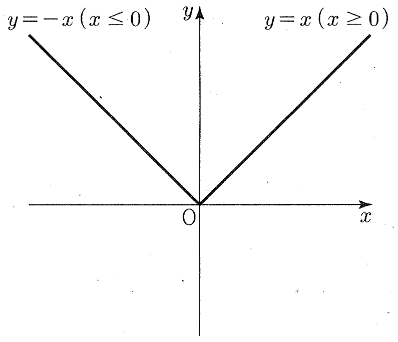
14. 집합 $A=\{x \mid f(x)=|x|\}$에서

방정식 $f(x)=|x|$는

$f(x)=x\ (x\ge 0)$ 또는 $f(x)=-x\ (x\le 0)$

과 같다.

곧, 집합 A의 원소는 곡선 $y=f(x)$가 두 반직선 $y=x\ (x\ge 0)$, $y=-x\ (x\le 0)$과 만나는 점의 x좌표이다.



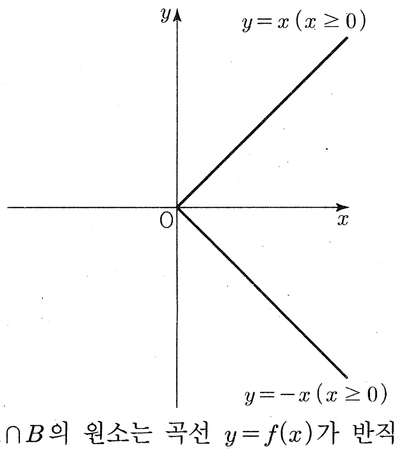
또한 집합 $B=\{x \mid |f(x)|=x\}$에서

방정식 $|f(x)|=x$는

$f(x)=x\ (f(x)\ge 0)$ 또는 $-f(x)=x\ (f(x)\le 0)$,

곧 $f(x)=x\ (x\ge 0)$ 또는 $f(x)=-x\ (x\ge 0)$과 같다.

곧, 집합 B의 원소는 곡선 $y=f(x)$가 두 반직선 $y=x\ (x\ge 0)$, $y=-x\ (x\ge 0)$과 만나는 점의 x좌표이다.



집합 $A\cap B$의 원소는 곡선 $y=f(x)$가 반직선 $y=x\ (x\ge 0)$과 만나는 점의 x좌표이므로

조건 (가)의 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$의 원소는 곡선 $y=f(x)$가 두 반직선 $y=-x\ (x<0)$, $y=-x\ (x>0)$과 만나는 점의 x좌표이다.

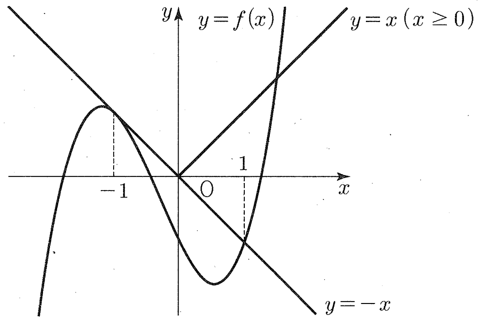
조건 (가)에서 이 집합의 원소는 -1, 1뿐이고 $f(0)\ne 0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$의 교점의 개수는 2이고, 이 교점의 x좌표는 -1 또는 1이다.

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

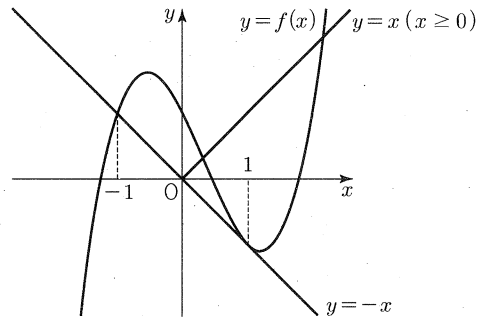
$f(x)=(x+1)^2(x-1)-x$ 또는

$f(x)=(x+1)(x-1)^2-x$

다음 그림과 같이 $f(x)=(x+1)^2(x-1)-x$일 때 곡선 $y=f(x)$와 반직선 $y=x\ (x\ge 0)$의 교점의 개수가 1이고 $n(A)+n(B)=2+2=4$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



다음 그림과 같이 $f(x)=(x+1)(x-1)^2-x$일 때 곡선 $y=f(x)$와 반직선 $y=x\ (x\ge 0)$의 교점의 개수가 2이고 $n(A)+n(B)=3+3=6$이 되어 조건 (나)를 만족시킨다.



따라서 모든 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는

$f(x)=(x+1)(x-1)^2-x$이므로

$f(3)=13$

15. $\overline{AE}:\overline{BE}=5:3$이므로

$\overline{AE}=5a$, $\overline{BE}=3a\ (a>0)$으로 놓을 수 있다.

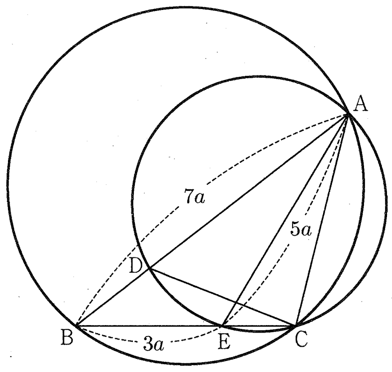
두 삼각형 ABC, AEC에서 사인법칙에 의하여

$\overline{AB}=2R_1\sin(\angle ACB)$, $\overline{AE}=2R_2\sin(\angle ACE)$이고

$\angle ACB=\angle ACE$이므로

$$\overline{AB}:\overline{AE}=2R_1\sin(\angle ACB):2R_2\sin(\angle ACE)$$
$$=R_1:R_2$$
$$=7:5$$

곧, $\overline{AB}=7a$



삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle AEB)=\frac{(3a)^2+(5a)^2-(7a)^2}{2\times 3a\times 5a}=-\frac{1}{2}$$

곧, $\angle AEB=\frac{2\pi}{3}$

$\angle EAD=\angle ECD$ ($\because$ 호 DE의 원주각)이므로

두 삼각형 ABE와 CBD는 닮은 도형이다.

따라서 $\angle CDB=\angle AEB=\frac{2\pi}{3}$이므로

$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$이고

$\overline{CB}:\overline{BD}=\overline{AB}:\overline{BE}=7:3$이므로

$\overline{CB}=7b$, $\overline{BD}=3b\ (b>0)$으로 놓을 수 있다.

$\overline{BE}:\overline{BD}=11:7$에서 $3a:3b=11:7$이므로

$a=\frac{11}{7}b$

$$\overline{AD}=\overline{AB}-\overline{BD}$$
$$=7a-3b$$
$$=8b$$

이고 $\overline{DC}=5b$, $\overline{AC}=7$, $\angle ADC=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$7^2=(8b)^2+(5b)^2-2\times 8b\times 5b\times\cos\frac{\pi}{3}$

$49=64b^2+25b^2-40b^2$

$b=1\ (\because b>0)$

곧, $\overline{AD}=8$, $\overline{DC}=5$

따라서 삼각형 ADC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 5\times\sin\frac{\pi}{3}=10\sqrt{3}$

16. $\log_3 2x$와 $\log_3(x-3)$에서 진수의 조건에 의하여

$2x>0$이고 $x-3>0$이므로

$x>3$ ...... ㉠

$\log_3 2x\ge\log_3(x-3)+1$에서

$\log_3 2x\ge\log_3(x-3)+\log_3 3$

$\log_3 2x\ge\log_3 3(x-3)$

$2x\ge 3x-9$

$x\le 9$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $3<x\le 9$이므로 부등식을 만족시키는 정수 x는 4, 5, 6, 7, 8, 9이고 그 합은 39이다.

17. $f'(x)=4x^3+4x-1$에서

$f(x)=x^4+2x^2-x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=2$에서 $C=2$

따라서 $f(x)=x^4+2x^2-x+2$이므로

$f(2)=24$

18. $\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})^2=20$에서

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_{2k-1})^2+2a_{2k-1}a_{2k}+(a_{2k})^2\}=20$ ...... ㉠

$\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}-a_{2k})^2=10$에서

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_{2k-1})^2-2a_{2k-1}a_{2k}+(a_{2k})^2\}=10$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 더하여 정리하면

$2\sum_{k=1}^{10}\{(a_{2k-1})^2+(a_{2k})^2\}=20+10$

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_{2k-1})^2+(a_{2k})^2\}=15$

따라서 $\sum_{k=1}^{20}(a_k)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(a_{2k-1})^2+(a_{2k})^2\}=15$

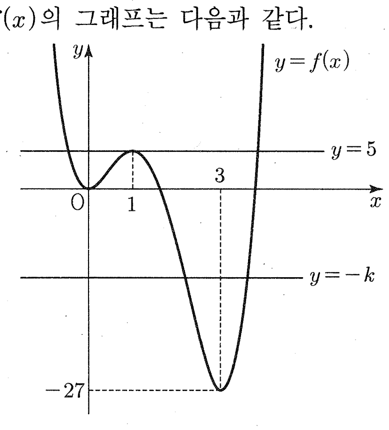
19. 함수 $f(x)$를 $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$이라 하자.

방정식 $3x^4-16x^3+18x^2+k=0$의 실근은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점의 x좌표이다.

$$f'(x)=12x^3-48x^2+36x$$
$$=12x(x-1)(x-3)$$

이고, $f(0)=0$, $f(1)=5$, $f(3)=-27$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 방정식 $3x^4-16x^3+18x^2+k=0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면

$-k=5$ 또는 $-27<-k\le 0$이다.

곧, $k=-5$ 또는 $0\le k<27$

따라서 정수 k의 개수는 28이다.

20. $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$라 하면

$G(0)=0$이고 $G'(x)=g(x)$

$|x-a|f(x)=G(x)$ ...... ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $|a|f(0)=0$에서

$a>0$이므로 $f(0)=0$이고,

㉠에 $x=a$를 대입하면 $G(a)=0$

또한 $x\ne a$일 때 $f(x)=\dfrac{G(x)}{|x-a|}$이고

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)$

$\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{G(x)}{|x-a|}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{G(x)}{|x-a|}$

$\lim\limits_{x\to a-}\left\{-\dfrac{G(x)-G(a)}{x-a}\right\}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{G(x)-G(a)}{x-a}$

($\because G(a)=0$)

곧, $-g(a)=g(a)$ ($\because G'(a)=g(a)$)

따라서 $g(a)=0$이고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이므로

$f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(a)$에서 $f(a)=0$이고, $f(0)=0$이므로

$f(x)=x(x-a)$ ...... 참고

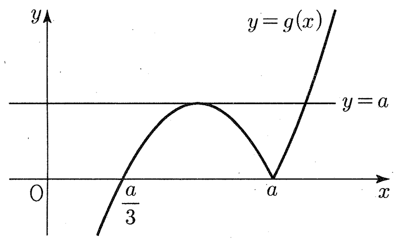
따라서 $G(x)=x|x-a|(x-a)$이므로

$G(x)=\begin{cases}-x(x-a)^2 & (x\le a)\\ x(x-a)^2 & (x>a)\end{cases}$이고

x에 대하여 미분하면

$g(x)=\begin{cases}-3\left(x-\dfrac{a}{3}\right)(x-a) & (x\le a)\\ 3\left(x-\dfrac{a}{3}\right)(x-a) & (x>a)\end{cases}$

곧, 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



방정식 $g(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수가 2이고 $a>0$이므로 함수 $y=-3\left(x-\dfrac{a}{3}\right)(x-a)$의 최댓값이 a이다.

함수 $y=-3\left(x-\dfrac{a}{3}\right)(x-a)$의 최댓값은

$x=\dfrac{2a}{3}$일 때 $-3\left(\dfrac{2a}{3}-\dfrac{a}{3}\right)\left(\dfrac{2a}{3}-a\right)=\dfrac{a^2}{3}$이므로

$\dfrac{a^2}{3}=a$에서 $a=3$ ($\because a>0$)

따라서 $g(x)=\begin{cases}-3(x-1)(x-3) & (x\le 3)\\ 3(x-1)(x-3) & (x>3)\end{cases}$

$g(2a)=g(6)=3\times5\times3=45$

참고

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\int_0^x g(t)\,dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

곧, 함수 $|x-a|f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 이차함수 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

21. 함수 $f(x)=\begin{cases}2^{a-x}+a & (x<a)\\ 2^{1-x}+1 & (x\ge a)\end{cases}$의 증가, 감소에 대하여 살펴보자.

두 함수 $y=2^{a-x}+a$, $y=2^{1-x}+1$은 각각 실수 전체의 집합에서 감소한다.

또한 이 두 함수의 그래프는 각각 두 점 $(a, 1+a)$, $(a, 2^{1-a}+1)$을 지나는데

$a=1$일 때 $1+a=2^{1-a}+1$,

$a>1$일 때 $1+a>2^{1-a}+1$,

$a<1$일 때 $1+a<2^{1-a}+1$

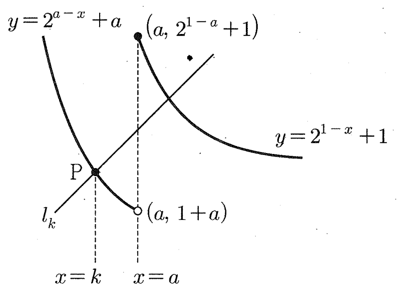
이다.

함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $P(k, f(k))$를 지나고 기울기가 1인 직선을 l_k라 하자.

$a\ge1$일 때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하므로 정수 k에 대하여 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 l_k의 교점의 개수는 1이다.

따라서 직선 l_k가 함수 $f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수가 14이려면 $a<1$이어야 한다.

(i) $k<a$인 경우



이때 $f(k)=2^{a-k}+a$이므로

위의 그림과 같이 직선 l_k는 두 점 $(k, 2^{a-k}+a)$, $(a, 2^{a-k}+a+(a-k))$를 지난다.

직선 l_k가 함수 $f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면 점 $(a, 2^{a-k}+a+(a-k))$가 점 $(a, 2^{1-a}+1)$보다 아래에 있거나 같아야 한다.

곧, $2^{a-k}+a+(a-k)\le 2^{1-a}+1$

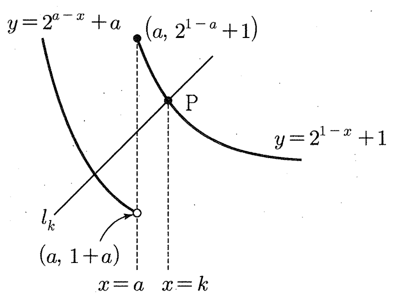
$2^{a-k}+(a-k)\le 2^{1-a}+(1-a)$

이때 함수 $y=2^x+x$는 증가함수이므로

$a-k\le 1-a$

따라서 $2a-1\le k<a$

(ii) $k\ge a$인 경우



이때 $f(k)=2^{1-k}+1$이므로

위의 그림과 같이 직선 l_k는 두 점 $(k, 2^{1-k}+1)$, $(a, 2^{1-k}+1-(k-a))$를 지난다.

직선 l_k가 함수 $f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면 점 $(a, 2^{1-k}+1-(k-a))$가 점 $(a, 1+a)$보다 위에 있어야 한다.

곧, $2^{1-k}+1-(k-a)>a+1$

$2^{1-k}+(1-k)>1$

$2^{1-k}+(1-k)>2^0+0$

이때 함수 $y=2^x+x$는 증가함수이므로

$1-k>0$

따라서 $a\le k<1$

(i), (ii)에 의하여 $2a-1\le k<1$이므로

정수 k의 개수는 $1-(2a-1)=2-2a$이다.

따라서 $2-2a=14$에서 $a=-6$이고

$f(x)=\begin{cases}2^{-6-x}-6 & (x<-6)\\ 2^{1-x}+1 & (x\ge-6)\end{cases}$

$f(a)=f(-6)=2^{1-(-6)}+1=129$

따라서 $a+f(a)=-6+129=123$

[다른 풀이]

곡선 $y=2^{1-x}+1$을 x축의 방향으로 $a-1$만큼, y축의 방향으로 $a-1$만큼 평행이동하면 곡선

$y=2^{a-x}+a$ ...... ㉠

와 일치한다.

곡선 $y=2^{a-x}+a$는 점 $(a, a+1)$을 지나고

곡선 $y=2^{1-x}+1$은 점 $(1, 2)$를 지나므로

두 곡선은 직선 $y=x+1$과 각각 이 두 점에서 만난다.

a의 값에 따라 경우를 나누어 함수 $f(x)$의 그래프를 살펴보자.

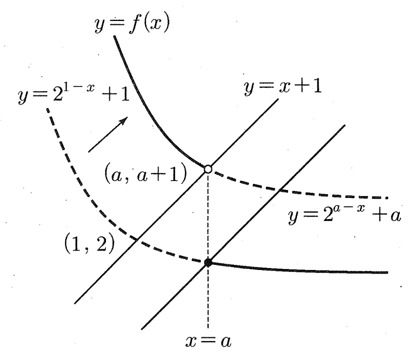
(i) $a=1$인 경우

$f(x)=\begin{cases}2^{a-x}+a & (x<a)\\ 2^{1-x}+1 & (x\ge a)\end{cases}$에서

$f(x)=2^{1-x}+1$이므로 함수 $f(x)$의 그래프와 기울기가 1인 직선의 교점의 개수는 항상 1이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a>1$인 경우

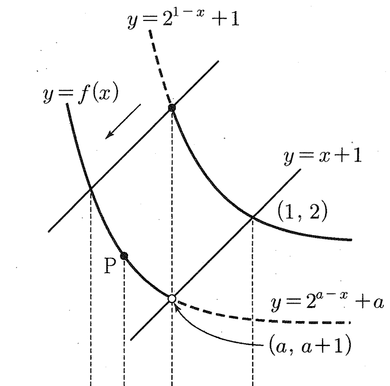
$a-1>0$이므로 ㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $f(x)$의 그래프와 기울기가 1인 직선의 교점의 개수는 0 또는 1이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a<1$인 경우

$a-1<0$이므로 ㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



위의 그림과 같이 곡선 $y=2^{1-x}+1$ 위의 점 중 x좌표가 a인 점을 지나고 기울기가 1인 직선이 곡선 $y=2^{a-x}+a$와 만나는 점의 x좌표는 $a+(a-1)=2a-1$이다. ($\because$ ㉠)

따라서 조건

'점 $P(k, f(k))$를 지나고 기울기가 1인 직선이 함수 $f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.'

를 만족시키는 점 P 중에서

곡선 $y=2^{a-x}+a$ 위에 있는 모든 점의 x좌표 k는 $2a-1$, $2a$, $\cdots$, $a-1$이고,

곡선 $y=2^{1-x}+1$ 위에 있는 모든 점의 x좌표 k는 a, $a+1$, $\cdots$, 0이다.

정수 k의 개수는

$0-(2a-1)+1=2-2a$

$2-2a=14$에서 $a=-6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a=-6$이고

$f(x)=\begin{cases} 2^{-6-x}-6 & (x<-6) \\ 2^{1-x}+1 & (x \geq -6) \end{cases}$ 이므로

$f(a)=f(-6)=2^{1-(-6)}+1=129$

따라서 $a+f(a)=-6+129=123$

22. '두 함수 $g(x)-h(x)$와 $g(x)+h(x)$가 불연속인 점의 개수가 각각 1이다.' …… ㉠

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 조건 (가)에 의하여

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$ (α는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=g(x)(x-1)(x-2)$이므로

$x \neq 1$, $x \neq 2$일 때 $g(x)=(x-3)(x-\alpha)$ …… ㉡

이고 함수 $g(x)$는 $x=1$과 $x=2$를 제외한 모든 점에서 연속이다.

마찬가지의 방법으로 조건 (가)에 의하여

$x \neq 1$, $x \neq 3$일 때 $h(x)=(x-2)(x-\alpha)$ …… ㉢

이고 함수 $h(x)$는 $x=1$과 $x=3$을 제외한 모든 점에서 연속이다.

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 불연속인 경우

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

두 함수 $g(x)-h(x)$, $g(x)+h(x)$는 각각 $x=2$에서 불연속이다.

이때 ㉠에 의하여

두 함수 $g(x)-h(x)$, $g(x)+h(x)$는 $x=2$를 제외한 모든 점에서 각각 연속이다.

곧, 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 $x=2$를 제외한 모든 점에서 각각 연속이다.

조건 (나)에 의하여 $g(1)=1$이고, ㉡에서

$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}(x-3)(x-\alpha)=2\alpha-2$

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=\lim_{x\to1}g(x)$

$1=2\alpha-2$에서 $\alpha=\frac{3}{2}$

이때 조건 (나)에 의하여 $h(3)=1$이고 ㉢에서

$\lim_{x\to3}h(x)=\lim_{x\to3}(x-2)(x-\alpha)$

$=3-\alpha$

$=\frac{3}{2}$

$h(3)\neq\lim_{x\to3}h(x)$

곧, 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 불연속이 되어 모순이다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(ⅱ) 함수 $h(x)$가 $x=3$에서 불연속인 경우

함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

두 함수 $g(x)-h(x)$, $g(x)+h(x)$는 각각 $x=3$에서 불연속이다.

조건 ㉠에 의하여

두 함수 $g(x)-h(x)$, $g(x)+h(x)$는 $x=3$을 제외한 모든 점에서 각각 연속이다.

곧, 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 $x=3$을 제외한 모든 점에서 각각 연속이다.

㉡에서

$g(2)=\lim_{x\to2}g(x)$

$=\lim_{x\to2}(x-3)(x-\alpha)$

$=\alpha-2$

㉢에서

$h(1)=\lim_{x\to1}h(x)$

$=\lim_{x\to1}(x-2)(x-\alpha)$

$=\alpha-1$

조건 (나)에서 $g(2)+h(1)=1$이므로

$(\alpha-2)+(\alpha-1)=1$

곧, $\alpha=2$

이때 ㉢에서

$\lim_{x\to3}h(x)=\lim_{x\to3}(x-2)(x-\alpha)=1$

조건 (나)에서 $h(3)=1$

곧, $h(3)=\lim_{x\to3}h(x)$가 되어 모순이다.

따라서 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 각각 $x=2$, $x=3$에서 연속이다.

조건 (나)에서 $h(3)=1$이고, ㉢에서

$\lim_{x\to3}h(x)=\lim_{x\to3}(x-2)(x-\alpha)=3-\alpha$이므로

$h(3)=\lim_{x\to3}h(x)$에서

$1=(3-2)(3-\alpha)$

곧, $\alpha=2$

$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)$이므로

$f(4)=12$

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이므로 ㉡에서

$g(2)=\lim_{x\to2}g(x)$

$=\lim_{x\to2}(x-3)(x-2)$

$=0$

조건 (나)에서 $g(2)+h(1)=1$이므로

$h(1)=1$

따라서 $f(4)+g(2)-h(1)=12+0-1=11$

[다른 풀이]

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 조건 (가)에서 $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$ (α는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 조건 (가)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)=g(x)(x-1)(x-2)$

이고 조건 (나)에 의하여 $g(1)=1$이므로

$g(2)=m$이라 하면

$g(x)=\begin{cases} (x-3)(x-\alpha) & (x\neq1,2) \\ 1 & (x=1) \\ m & (x=2) \end{cases}$

마찬가지의 방법으로 조건 (가)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)=h(x)(x-1)(x-3)$

이고 조건 (나)에 의하여

$h(3)=1$, $h(1)=1-g(2)=1-m$이므로

$h(x)=\begin{cases} (x-2)(x-\alpha) & (x\neq1,3) \\ 1-m & (x=1) \\ 1 & (x=3) \end{cases}$

따라서

$g(x)=\begin{cases} (x-3)(x-\alpha) & (x\neq1,2,3) \\ 1 & (x=1) \\ m & (x=2) \\ 0 & (x=3) \end{cases}$

이고

$h(x)=\begin{cases} (x-2)(x-\alpha) & (x\neq1,2,3) \\ 1-m & (x=1) \\ 0 & (x=2) \\ 1 & (x=3) \end{cases}$

$A(x)=g(x)-h(x)$라 하면

$A(x)=\begin{cases} -(x-\alpha) & (x\neq1,2,3) \\ m & (x=1) \\ m & (x=2) \\ -1 & (x=3) \end{cases}$

함수 $A(x)$가 $x=k$ ($k=1,2,3$)에서 연속일 조건을 표로 정리하면 다음과 같다.

k	$A(k)=\lim_{x\to k}A(x)$	
1	$m=\alpha-1$	…… (a)
2	$m=\alpha-2$	…… (b)
3	$-1=\alpha-3$	…… (c)

함수 $A(x)$의 불연속점의 개수는 1이므로 세 등식 (a), (b), (c) 중에서 두 등식은 성립하고 한 등식은 성립하지 않는다.

그런데 두 등식 (a), (b)는 동시에 성립할 수 없으므로 등식 (c)는 성립하고 두 등식 (a), (b) 중에 하나만 성립한다.

곧, (c)에서

$\alpha=2$ …… ㉠

이고, (a) 또는 (b)에서

$m=1$ 또는 $m=0$ …… ㉡

마찬가지의 방법으로

$B(x)=g(x)+h(x)$라 하면

$B(x)=\begin{cases} (2x-5)(x-2) & (x\neq1,2,3) \\ 2-m & (x=1) \\ m & (x=2) \\ 1 & (x=3) \end{cases}$

함수 $B(x)$가 $x=k$ ($k=1,2,3$)에서 연속일 조건을 표로 정리하면 다음과 같다.

k	$B(k)=\lim_{x\to k}B(x)$	
1	$2-m=3$	…… (d)
2	$m=0$	…… (e)
3	$1=1$	…… (f)

함수 $B(x)$의 불연속점의 개수는 1인데 위와 같이 함수 $B(x)$는 $x=3$에서 연속이므로 두 등식 (d), (e) 중에 하나만 성립한다.

곧, (d) 또는 (e)에서

$m=-1$ 또는 $m=0$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $m=0$

따라서 $g(2)=m=0$, $h(1)=1-m=1$이고

㉠에서 $\alpha=2$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)$

$f(4)=12$

$f(4)+g(2)-h(1)=12+0-1=11$

수학 영역

확률과 통계

23	⑤	24	③	25	①	26	②	27	④
28	④	29	7	30	21				

해설

23. $V(X)=50\times\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=8$

24. 여섯 자리의 자연수가 짝수이므로 일의 자리의 수가 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리에 2가 오는 경우
남은 다섯 자리에 1, 1, 2, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$

(ii) 일의 자리에 4가 오는 경우
남은 다섯 자리에 1, 1, 2, 2, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$60+30=90$

25. $P(A\cup B^C)=\frac{5}{6}$이므로

$P(A^C\cap B)=1-P(A\cup B^C)$
$=1-\frac{5}{6}$
$=\frac{1}{6}$

주어진 조건에서 $P(A|B)=\frac{1}{2}$이고

$P(A\cap B)=P(B)-P(A^C\cap B)=P(B)-\frac{1}{6}$이므로

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$에서

$\frac{1}{2}=\frac{P(B)-\frac{1}{6}}{P(B)}$

따라서 $P(B)=\frac{1}{3}$

26. 이 공장에서 생산하는 분필 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $80.51\le m\le 81.49$이므로

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=80.51$ …… ㉠

$\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=81.49$ …… ㉡

㉡에서 ㉠을 변끼리 빼면

$2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=81.49-80.51$

곧, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{4}$

이 공장에서 생산하는 분필 중에서 $4n$개를 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$

곧, $\overline{x_2}-1.29\times\frac{1}{4}\le m\le\overline{x_2}+1.29\times\frac{1}{4}$

이 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$a=\overline{x_2}-1.29\times\frac{1}{4}$

$b=\overline{x_2}+1.29\times\frac{1}{4}$

$b-a=\left(\overline{x_2}+1.29\times\frac{1}{4}\right)-\left(\overline{x_2}-1.29\times\frac{1}{4}\right)$
$=1.29\times\frac{1}{4}\times 2$
$=0.645$

27. 최초에 상자에는 검은 공이 3개 들어 있으므로 을이 꺼낸 두 공이 모두 검은색이려면 갑이 꺼낸 두 공 중 적어도 하나는 흰색이어야 한다.
갑이 꺼낸 두 공이 모두 흰색인 사건을 A_1,
갑이 꺼낸 두 공의 색이 서로 다른 사건을 A_2,
을이 꺼낸 두 공이 모두 검은색인 사건을 B라 하면
$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)$이므로
구하는 확률은

$P(A_1|B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_1\cap B)}{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)}$

$P(A_1\cap B)=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{18}{{}_7C_2\times{}_5C_2}$,

$P(A_2\cap B)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{12}{{}_7C_2\times{}_5C_2}$이므로

구하는 확률은

$P(A_1|B)=\frac{18}{18+12}=\frac{3}{5}$

28. 조건 (다)에 의하여 짝수 개의 검은색 볼펜을 받은 학생은 빨간색 볼펜을 받을 수 없다.
곧, 홀수 개의 검은색 볼펜을 받은 학생만 빨간색 볼펜을 받을 수 있다. …… ㉠
검은색 볼펜의 개수가 10이므로 홀수 개의 검은색 볼펜을 받는 학생의 수는 2 또는 4이다.

(i) 홀수 개의 검은색 볼펜을 받는 학생의 수가 4인 경우
A, B, C, D가 받는 검은색 볼펜의 개수를 각각 $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ (a, b, c, d는 음이 아닌 정수)라 하면
$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=10$,
$a+b+c+d=3$
순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
${}_4H_3={}_6C_3=20$
이때 ㉠에 의하여 네 학생 모두 빨간색 볼펜을 받을 수 있고 홀수 개의 볼펜을 받은 학생이 존재하게 되어 조건 (나)를 만족시킨다.
4명에게 2개의 빨간색 볼펜을 나누어 주는 경우의 수는
${}_4H_2={}_5C_2=10$
따라서 이 경우의 수는
$20\times 10=200$

(ii) 홀수 개의 검은색 볼펜을 받는 학생의 수가 2인 경우
홀수 개의 검은색 볼펜을 받는 학생을 정하는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
예를 들어 홀수 개의 검은색 볼펜을 받는 학생이 A, B인 경우 ㉠에 의하여 A, B만 빨간색 볼펜을 받을 수 있다.
그런데 A, B가 빨간색 볼펜을 각각 1개씩 받게 되면 네 학생 모두 짝수 개의 볼펜을 받게 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
따라서 A, B 중 한 명이 빨간색 볼펜 2개를 모두 받아야 한다.
빨간색 볼펜을 2개 받는 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$이다.
C, D는 짝수 개의 검은색 볼펜을 받아야 하므로 A, B, C, D가 받는 검은색 볼펜의 개수를 각각 $2a+1$, $2b+1$, $2c+2$, $2d+2$ (a, b, c, d는 음이 아닌 정수)라 하면
$(2a+1)+(2b+1)+(2c+2)+(2d+2)=10$,
$a+b+c+d=2$
순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
${}_4H_2={}_5C_2=10$
따라서 이 경우의 수는
$6\times 2\times 10=120$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$200+120=320$

[다른 풀이]
빨간색 볼펜을 받는 학생의 수는 1 또는 2이다.

(i) 빨간색 볼펜을 받는 학생의 수가 1인 경우
이때 한 명의 학생이 빨간색 볼펜 2개를 받는다.
빨간색 볼펜을 받는 학생을 정하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
예를 들어 빨간색 볼펜을 받는 학생을 A라 할 때, 조건 (다)에 의하여 A는 홀수 개의 검은색 볼펜을 받고 A가 받는 모든 색의 볼펜의 개수는 홀수이다.
따라서 B, C, D가 받는 볼펜의 개수와 관계없이 조건 (나)를 만족시킨다.
A, B, C, D가 받는 검은색 볼펜의 개수를 각각 $2a+1$, $b+1$, $c+1$, $d+1$ (a, b, c, d는 음이 아닌 정수)라 하면
$(2a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=10$,
$b+c+d=6-2a$
$a=0$일 때 $b+c+d=6$이고
순서쌍 (b, c, d)의 개수는 ${}_3H_6={}_8C_6=28$,
$a=1$일 때 $b+c+d=4$이고
순서쌍 (b, c, d)의 개수는 ${}_3H_4={}_6C_4=15$,
$a=2$일 때 $b+c+d=2$이고
순서쌍 (b, c, d)의 개수는 ${}_3H_2={}_4C_2=6$,
$a=3$일 때 $b+c+d=0$이고
순서쌍 (b, c, d)의 개수는 ${}_3H_0={}_2C_0=1$
따라서 이 경우의 수는
$4\times(28+15+6+1)=200$

(ii) 빨간색 볼펜을 받는 학생의 수가 2인 경우
두 명의 학생이 빨간색 볼펜을 각각 1개씩 받는다.
빨간색 볼펜을 받는 학생을 정하는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
예를 들어 빨간색 볼펜을 받는 두 학생을 A, B라 할 때, 조건 (다)에 의하여 A, B는 검은색 볼펜을 홀수 개 받으므로 A, B가 받는 볼펜의 개수는 모두 짝수이다.
조건 (나)에 의하여 C, D 중 적어도 한 명이 검은색 볼펜을 홀수 개 받아야 하고 검은색 볼펜이 10개이므로 C, D 모두 검은색 볼펜을 홀수 개 받아야 한다.
A, B, C, D가 받는 검은색 볼펜의 개수를 각각 $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ (a, b, c, d는 음이 아닌 정수)라 하면
$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=10$,
$a+b+c+d=3$
순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
${}_4H_3={}_6C_3=20$

따라서 이 경우의 수는

$6\times 20=120$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$200+120=320$

29. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\,2^2)$을 따르므로
$\mathrm{P}(x\le X\le x+4)$의 값은

$\dfrac{x+(x+4)}{2}=m$, 곧 $x=m-2$일 때 최댓값

$$\mathrm{P}(m-2\le X\le m+2)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$

을 갖는다.

또한 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(4,\,\sigma^2)$을 따르므로
$\mathrm{P}(y\le Y\le y+6)$의 값은

$\dfrac{y+(y+6)}{2}=4$, 곧 $y=1$일 때 최댓값

$$\mathrm{P}(1\le Y\le 7)=\mathrm{P}\left(-\frac{3}{\sigma}\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)$$

을 갖는다.

따라서 $\mathrm{P}(x\le X\le x+4)+\mathrm{P}(y\le Y\le y+6)$은
$x=m-2$이고 $y=1$일 때

최댓값 $2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{3}{\sigma}\right)$을 갖는다.

$x=y=a$에서

$m-2=1=a$, 곧 $m=3$, $a=1$

$2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{3}{\sigma}\right)=4\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{3}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

곧, $\sigma=3$

따라서 $m+\sigma+a=3+3+1=7$

30. 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있는 사건을 A, 뒷면이 연속해서 나오는 경우가 있는 사건을 B라 하자.

이때 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있거나 뒷면이 연속해서 나오는 경우가 없는 사건은 $A\cup B^C$이므로 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B^C)$이다.

그런데 $(A\cup B^C)^C=A^C\cap B$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B)$

곧, $\mathrm{P}(A^C\cap B)$의 값을 구하고 이를 이용하여 $\mathrm{P}(A\cup B^C)$의 값을 구하자.

사건 $A^C\cap B$는 앞면이 연속해서 나오는 경우가 없고 뒷면이 연속해서 나오는 경우가 있는 사건이다.

한 개의 동전을 5번 던질 때 나타나는 모든 경우의 수는

$2^5=32$

곧, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{n(A^C\cap B)}{32}$

뒷면이 나오는 횟수에 따라 경우를 나누어 $n(A^C\cap B)$의 값을 구하자.

뒷면이 나오는 횟수가 1 이하인 경우에는 뒷면이 연속해서 나올 수 없으므로 사건 $A^C\cap B$는 일어나지 않는다.

(ⅰ) 뒷면이 2번, 앞면이 3번 나오는 경우

이때 사건 $A^C\cap B$는 일어나지 않는다.

(ⅱ) 뒷면이 3번, 앞면이 2번 나오는 경우

이때 사건 $A^C\cap B$가 일어나는 경우는 다음과 같다.

∨ $\boxed{\text{뒤}}$ ∨ $\boxed{\text{뒤}}$ ∨ $\boxed{\text{뒤}}$ ∨

위의 '∨' 표시한 곳 중 두 곳에 앞면이 들어가는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

이 중에서 다음과 같이 뒷면이 연속하지 않는 경우는 제외해야 한다.

$\boxed{\text{뒤}}\boxed{\text{앞}}\boxed{\text{뒤}}\boxed{\text{앞}}\boxed{\text{뒤}}$

따라서 뒷면이 3번, 앞면이 2번 나오고 사건 $A^C\cap B$가 일어나는 경우의 수는

$6-1=5$

(ⅲ) 뒷면이 4번, 앞면이 1번 나오는 경우

이때 사건 $A^C\cap B$는 항상 일어나므로

이 경우의 수는

$\dfrac{5!}{4!}=5$

(ⅳ) 뒷면이 5번 나오는 경우

이때 사건 $A^C\cap B$는 항상 일어나므로

이 경우의 수는 1이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$n(A^C\cap B)=0+5+5+1=11$이고

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{n(A^C\cap B)}{32}=\dfrac{11}{32}$

따라서

$$\mathrm{P}(A\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B)=1-\frac{11}{32}=\frac{21}{32}$$

$p=\dfrac{21}{32}$이므로 $32\times p=21$

미적분

23	④	24	④	25	②	26	④	27	②
28	③	29	2	30	50				

해설

23. $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-6n}$

$$=\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-6n}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-6n}\right)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-6n}}$$

$$=\frac{(n^2+2n)-(n^2-6n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-6n}}$$

$$=\frac{8n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-6n}}$$

$$=\frac{8}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{6}{n}}}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-6n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{6}{n}}}=\frac{8}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=4$$

24. $x=t\ln t-t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=\ln t+t\times\dfrac{1}{t}-1=\ln t$

$y=2^{1-t}$에서

$\dfrac{dy}{dt}=2^{1-t}\times\ln 2\times(-1)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2^{1-t}\times\ln 2\times(-1)}{\ln t}\quad(\text{단, } t>1)$$

따라서 $t=2$일 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2^{-1}\times\ln 2\times(-1)}{\ln 2}=-\frac{1}{2}$$

25. 다음과 같이 경우를 나누어 $f(x)$를 살펴보자.

(ⅰ) $|x|>a$인 경우

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3|x|^n+a^n}{|x|^n+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{a}{|x|}\right)^n}{1+\left(\frac{a}{|x|}\right)^n}=3\left(\because 0<\frac{a}{|x|}<1\right)$$

(ⅱ) $|x|=a$인 경우

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3|x|^n+a^n}{|x|^n+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a^n+a^n}{a^n+a^n}=2$$

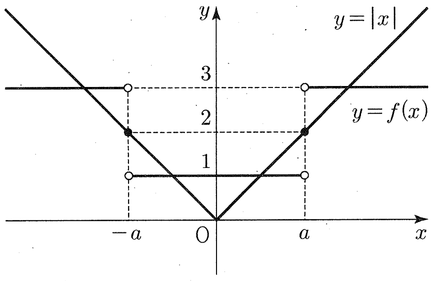
(ⅲ) $|x|<a$인 경우

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3|x|^n+a^n}{|x|^n+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{|x|}{a}\right)^n+1}{\left(\frac{|x|}{a}\right)^n+1}=1\left(\because 0<\frac{|x|}{a}<1\right)$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}3 & (|x|>a)\\ 2 & (|x|=a)\\ 1 & (|x|<a)\end{cases}$$

방정식 $f(x)=|x|$의 서로 다른 실근의 개수가 6이려면 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|$의 그래프의 교점의 개수가 다음 그림과 같이 6이어야 한다.



따라서 직선 $y=x$가 점 $(a, 2)$를 지나야 한다.
곧, $a=2$

26. $\int_1^4 f(\sqrt{t})\,dt$에서

$\sqrt{t}=u$라 하면 $t=u^2$이므로 $1=2u\times\frac{du}{dt}$

$t=1$일 때 $u=1$이고,
$t=4$일 때 $u=2$이므로

$$\int_1^4 f(\sqrt{t})\,dt=\int_1^2 2uf(u)\,du$$

$k=\int_1^2 2uf(u)\,du$라 하면

$$f(x)=x\ln x+\int_1^4 f(\sqrt{t})\,dt$$
$$=x\ln x+k$$

이므로

$$k=\int_1^2 2uf(u)\,du$$
$$=\int_1^2 2u(u\ln u+k)\,du$$
$$=\int_1^2 2u^2\ln u\,du+\int_1^2 2ku\,du$$
$$=\left[\frac{2}{3}u^3\times\ln u\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{2}{3}u^3\times\frac{1}{u}\right)du+\left[ku^2\right]_1^2$$
$$=\left[\frac{2}{3}u^3\ln u\right]_1^2-\left[\frac{2}{9}u^3\right]_1^2+\left[ku^2\right]_1^2$$
$$=\frac{16}{3}\ln 2-\frac{14}{9}+3k$$

따라서 $f(1)=k=\frac{7}{9}-\frac{8}{3}\ln 2$

27. $y=e^x+a$에서 $y'=e^x$이므로
이 곡선 위의 점 $\mathrm{A}(t, e^t+a)$에서의 접선 l의 기울기는 e^t이다.
따라서 점 $\mathrm{A}(t, e^t+a)$를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{e^t}(x-t)+e^t+a$$

$y=0$일 때 $0=-\frac{1}{e^t}(x-t)+e^t+a$에서
$x=e^{2t}+ae^t+t$이므로
$f(t)=e^{2t}+ae^t+t$,
$x=0$일 때 $y=-\frac{1}{e^t}(0-t)+e^t+a$에서
$y=e^t+a+\frac{t}{e^t}$이므로

$$g(t)=e^t+a+\frac{t}{e^t}$$

이때

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-g(t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(e^{2t}+ae^t+t\right)-\left(e^t+a+\frac{t}{e^t}\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(e^{2t}-e^t\right)+\left(ae^t-a\right)+\left(t-\frac{t}{e^t}\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{e^t(e^t-1)}{t}+\frac{a(e^t-1)}{t}+\left(1-\frac{1}{e^t}\right)\right\}$$
$$=1+a+0$$
$$=1+a$$

이고 주어진 조건에서 $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-g(t)}{t}=3$이므로
$1+a=3$에서 $a=2$

28. 조건 (나)에서 정수 n에 대하여
닫힌구간 $[2n\pi, (2n+1)\pi]$에서
$|f'(x)|=2\sin x$,
닫힌구간 $[(2n-1)\pi, 2n\pi]$에서
$|f'(x)|=0$
또한 도함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
닫힌구간 $[2n\pi, (2n+1)\pi]$에서
$f'(x)=2\sin x$ 또는 $f'(x)=-2\sin x$, …… ㉠
닫힌구간 $[(2n-1)\pi, 2n\pi]$에서
$f'(x)=0$ …… ㉡

조건 (다)에서
$\int_0^t f(x)\,dx=\int_{4\pi}^{t+4\pi}\{k-f(x)\}\,dx$의
양변을 t에 대하여 미분하면
$f(t)=k-f(t+4\pi)$
곧, 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=k-f(x+4\pi)$이고
$f(x+4\pi)=-f(x)+k$ …… ㉢
㉢에 $x=0$을 대입하면
$f(4\pi)=-f(0)+k=k>0$ …… ㉣

만약 함수 $f'(x)$가 닫힌구간 $[0, \pi]$에서
$f'(x)=-2\sin x$이면

$$f(4\pi)=\int_0^{4\pi}f'(x)\,dx\ (\because \text{조건 (가) } f(0)=0)$$
$$=\int_0^{\pi}(-2\sin x)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}0\,dx$$
$$+\int_{2\pi}^{3\pi}f'(x)\,dx+\int_{3\pi}^{4\pi}0\,dx\ (\because ㉡)$$
$$\le\int_0^{\pi}(-2\sin x)\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}2\sin x\,dx\ (\because ㉠)$$
$$=0$$

곧, $f(4\pi)\le 0$이 되어 ㉣을 만족시키지 않는다.
따라서 닫힌구간 $[0, \pi]$에서
$f'(x)=2\sin x$

만약 함수 $f'(x)$가 닫힌구간 $[2\pi, 3\pi]$에서
$f'(x)=-2\sin x$이면

$$f(4\pi)=\int_0^{4\pi}f'(x)\,dx\ (\because \text{조건 (가) } f(0)=0)$$
$$=\int_0^{\pi}2\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}0\,dx$$
$$+\int_{2\pi}^{3\pi}(-2\sin x)\,dx+\int_{3\pi}^{4\pi}0\,dx\ (\because ㉡)$$
$$=0\left(\because \int_{2\pi}^{3\pi}(-2\sin x)\,dx=\int_0^{\pi}(-2\sin x)\,dx\right)$$

곧, $f(4\pi)=0$이 되어 ㉣을 만족시키지 않는다.

따라서 닫힌구간 $[2\pi, 3\pi]$에서
$f'(x)=2\sin x$

정리하면

$$f'(x)=\begin{cases}2\sin x & (0\le x<\pi)\\ 0 & (\pi\le x<2\pi)\\ 2\sin x & (2\pi\le x<3\pi)\\ 0 & (3\pi\le x<4\pi)\end{cases}\quad \cdots\cdots \text{참고}$$

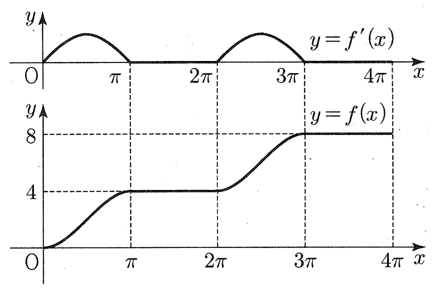
이므로

$$f(x)=\begin{cases}-2\cos x+C_1 & (0\le x<\pi)\\ C_2 & (\pi\le x<2\pi)\\ -2\cos x+C_3 & (2\pi\le x<3\pi)\\ C_4 & (3\pi\le x\le 4\pi)\end{cases}$$

(C_1, C_2, C_3, C_4는 적분상수)

$f(0)=0$에서
$-2\times\cos 0+C_1=0$, 곧 $C_1=2$
함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 연속이므로
$-2\times\cos\pi+C_1=C_2$, 곧 $C_2=4$
함수 $f(x)$는 $x=2\pi$에서 연속이므로
$C_2=-2\times\cos 2\pi+C_3$, 곧 $C_3=6$
함수 $f(x)$는 $x=3\pi$에서 연속이므로
$-2\times\cos 3\pi+C_3=C_4$, 곧 $C_4=8$
따라서

$$f(x)=\begin{cases}-2\cos x+2 & (0\le x<\pi)\\ 4 & (\pi\le x<2\pi)\\ -2\cos x+6 & (2\pi\le x<3\pi)\\ 8 & (3\pi\le x\le 4\pi)\end{cases}$$



이때 $f(4\pi)=8$이므로 ㉣에서
$k=8$ …… ㉤
㉢에 x 대신 $x+4\pi$를 대입하여 정리하면

$$f(x+8\pi)=-f(x+4\pi)+k$$
$$=-\{-f(x)+k\}+k$$
$$=f(x)$$

곧, $f(x+8\pi)=f(x)$
함수 $f(x)$의 주기가 8π이므로

$$\int_{8\pi}^{\frac{25}{2}\pi}f(x)\,dx=\int_{8\pi}^{\frac{25}{2}\pi}f(x+8\pi)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{9}{2}\pi}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{4\pi}f(x)\,dx+\int_{4\pi}^{\frac{9}{2}\pi}f(x)\,dx$$

(ⅰ) $\int_0^{4\pi}f(x)\,dx$의 값을 구하자.

$$\int_0^{4\pi}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}f(x)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}f(x)\,dx$$
$$+\int_{2\pi}^{3\pi}f(x)\,dx+\int_{3\pi}^{4\pi}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}(-2\cos x+2)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}4\,dx$$
$$+\int_{2\pi}^{3\pi}(-2\cos x+6)\,dx+\int_{3\pi}^{4\pi}8\,dx$$

$=\left[-2\sin x+2x\right]_0^{\pi}+\left[4x\right]_{\pi}^{2\pi}$

$\quad+\left[-2\sin x+6x\right]_{2\pi}^{3\pi}+\left[8x\right]_{3\pi}^{4\pi}$

$=2\pi+4\pi+6\pi+8\pi$

$=20\pi$

(ii) $\int_{4\pi}^{\frac{9}{2}\pi}f(x)\,dx$의 값을 구하자.

$\int_{4\pi}^{\frac{9}{2}\pi}f(x)\,dx$

$=\int_{4\pi}^{\frac{9}{2}\pi}\{-f(x+4\pi)+8\}\,dx$ ($\because$ ㉢, ㉣)

$=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\{-f(x+8\pi)+8\}\,dx$

$=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\{-f(x)+8\}\,dx$ ($\because f(x+8\pi)=f(x)$)

$=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\{-(-2\cos x+2)+8\}\,dx$

$=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}(2\cos x+6)\,dx$

$=\left[2\sin x+6x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$

$=2+3\pi$

(i), (ii)에 의하여

$\int_0^{\frac{9}{2}\pi}f(x)\,dx=\int_0^{4\pi}f(x)\,dx+\int_{4\pi}^{\frac{9}{2}\pi}f(x)\,dx$

$=20\pi+(2+3\pi)$

$=23\pi+2$

따라서

$k+\int_{8\pi}^{\frac{25}{2}\pi}f(x)\,dx=8+(23\pi+2)=23\pi+10$

29. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a (a는 자연수), 공차를 d (d는 자연수)라 하자.

$a_n=a+(n-1)d=(a-d)+dn$이므로

$r^{a_n}=r^{(a-d)+dn}=r^{a-d}\times(r^d)^n$

$|r|>1$이면 $|r^d|>1$이므로

$\lim_{n\to\infty}r^n$과 $\lim_{n\to\infty}\{r^{a-d}\times(r^d)^n\}$의 값이 모두 존재하지 않는다.

$|r|<1$이면 $|r^d|<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}r^n=0$, $\lim_{n\to\infty}\{r^{a-d}\times(r^d)^n\}=0$

$r=1$이면

$\lim_{n\to\infty}r^n=1$, $\lim_{n\to\infty}r^{a_n}=1$

따라서 두 수열 $\{r^n\}$, $\{r^{a_n}\}$ 중 하나만 수렴하려면 $r=-1$이어야 한다.

이때 수열 $\{r^n\}$, 곧 $\{(-1)^n\}$은 발산하므로

수열 $\{r^{a_n}\}$, 곧 $\{(-1)^{a-d}\times(-1)^{dn}\}$이 수렴한다.

따라서 d는 짝수이다.

그런데 $a_2=10$이고 $a_1=a$가 자연수이므로

가능한 d의 값은 2, 4, 6, 8이다. ...... ㉠

한편,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}a_n}=\frac{1}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+dn}\right)$

$=\frac{1}{d}\times\left(\frac{1}{a}-0\right)$

$=\frac{1}{da}$

$=\frac{1}{d(10-d)}$ ($\because a_2=10$)

d의 값이 2, 4, 6, 8일 때

$d(10-d)$의 값은 각각 16, 24, 24, 16이므로

$\frac{1}{d(10-d)}$은 $d=4$ 또는 $d=6$일 때 최솟값 $\frac{1}{24}$을 갖는다.

곧, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}a_n}$의 최솟값은 $\frac{1}{24}$이다.

$m=\frac{1}{24}$이므로 $48\times m=2$

30. $h(x)=\frac{x^3-3x^2+a}{x^2+1}$라 하자.

곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=t$의 교점 중

x좌표가 최대인 점의 x좌표가 $f(t)$이고

x좌표가 최소인 점의 x좌표가 $g(t)$이다.

함수 $h(x)$의 그래프의 개형에 대하여 살펴보자.

$h'(x)=\frac{(3x^2-6x)(x^2+1)-(x^3-3x^2+a)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{x(x^3+3x-2a-6)}{(x^2+1)^2}$

함수 $y=x^3+3x-2a-6$에서

$y'=3x^2+3>0$이므로

이 함수는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

곧, 방정식 $x^3+3x-2a-6=0$의 실근의 개수는 1이다.

이 실근을 β라 하면

$\beta^3+3\beta-2a-6=0$ ...... ㉠

만약 $\beta=0$, 곧 $a=-3$이면

$h'(x)=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\geq 0$이므로

함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

이때 모든 실수 t에 대하여 $f(t)=g(t)$이므로

'$f(t)\neq g(t)$를 만족시키는 t의 값의 범위가 $0\leq t\leq k$ $(k>0)$이다.'를 만족시키지 않는다.

따라서 $\beta\neq 0$이다.

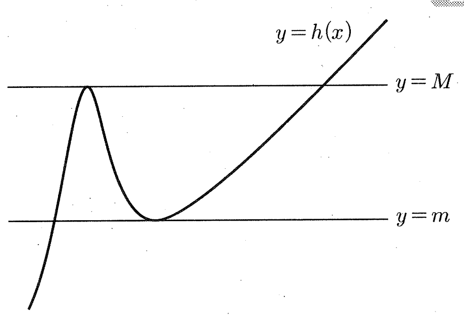
방정식 $h'(x)=0$은 두 실근 0, β를 가지므로

함수 $h(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

이 두 극값을 각각 M, m이라 하자.

$\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$이므로

함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다. ...... 참고



따라서

$t<m$ 또는 $t>M$일 때 $f(t)=g(t)$이고,

$m\leq t\leq M$일 때 $f(t)\neq g(t)$이다.

이때 $m\leq t\leq M$과 $0\leq t\leq k$가 같으므로

$m=0$, $M=k$

곧, '$h(0)=0$, $h(\beta)=k$' 또는 '$h(0)=k$, $h(\beta)=0$'

만약 $h(0)=0$, $h(\beta)=k$이면 $\beta<0$이고,

$h(0)=a$에서 $a=0$

이때 $h(x)=\frac{x^3-3x^2}{x^2+1}$이므로

$h(\beta)=\frac{\beta^3-3\beta^2}{\beta^2+1}=\frac{\beta^2(\beta-3)}{\beta^2+1}<0$

곧, $k<0$이 되어 모순이다.

따라서 $h(0)=k$, $h(\beta)=0$

$h(\beta)=\frac{\beta^3-3\beta^2+a}{\beta^2+1}=0$에서

$\beta^3-3\beta^2+a=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\beta=2$, $a=4$

따라서 $h(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2+1}$

이때 $h(0)=4$, $h(2)=0$이므로 $k=4$

또한 $t=4$일 때 방정식 $h(x)=4$에서

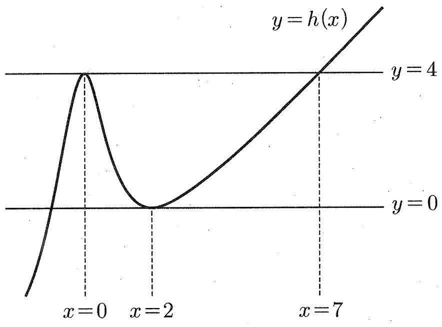
$\frac{x^3-3x^2+4}{x^2+1}=4$

$x^3-3x^2+4=4x^2+4$

$x^2(x-7)=0$

$x=0$ 또는 $x=7$ ...... ㉢

따라서 함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$k=4$이므로 $f'(k)=f'(4)$이고,

㉢에서 방정식 $h(x)=4$의 두 실근이 0과 7이므로

$f(4)=7$이고 $g(4)=0$

$t>0$에서 $h(f(t))=t$ ($\because f(t)>2$)

양변을 t에 대하여 미분하면

$h'(f(t))f'(t)=1$

$t=4$를 대입하면

$h'(f(4))f'(4)=1$

$f'(4)=\frac{1}{h'(7)}$

$h'(x)=\frac{x(x^3+3x-14)}{(x^2+1)^2}$에서

$h'(7)=\frac{49}{50}$이므로

$f'(4)=\frac{50}{49}$

따라서 $49\times f'(k)=49\times f'(4)=50$

참고

$h(x)=\frac{x^3-3x^2+a}{x^2+1}=x-3-\frac{x-a-3}{x^2+1}$

에서

$x\to\infty$일 때 $-\frac{x-a-3}{x^2+1}\to 0-$,

$x\to-\infty$일 때 $-\frac{x-a-3}{x^2+1}\to 0+$이므로

곡선 $y=h(x)$는 직선 $y=x-3$을 점근선으로 갖는다.

수학 영역

기하

23	⑤	24	③	25	②	26	①	27	②
28	②	29	52	30	30				

해설

23. 점 $\mathrm{A}(1, -4, 3)$을 yz평면에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{B}(-1, -4, 3)$이고 원점에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{C}(-1, 4, -3)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}$

$=\sqrt{\{(-1)-(-1)\}^2+\{4-(-4)\}^2+\{(-3)-3\}^2}$

$=10$

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$의 두 초점의 좌표를 $(0, c)$, $(0, -c)$ $(c>0)$이라 하자.

두 초점 사이의 거리가 20이므로

$2c=20$, 곧 $c=10$

따라서 $a^2+b^2=10^2$ …… ㉠

또한 한 점근선의 기울기가 $\dfrac{4}{3}$이므로

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=8$ $(\because a>0,\ b>0)$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2b=16$

25. 포물선 $y^2=9x$ 위의 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(9, a)$ $(a>0)$이라 하면

$a^2=9\times 9$에서 $a=9$

점 $\mathrm{A}(9, 9)$에서의 접선의 방정식은

$9y=\dfrac{9}{2}(x+9)$

곧, $y=\dfrac{1}{2}(x+9)$ …… ㉠

포물선 $y^2=9x$ 위의 점 B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, c)$라 하자.

점 B에서의 접선의 방정식은

$cy=\dfrac{9}{2}(x+b)$

곧, $y=\dfrac{9}{2c}(x+b)$ …… ㉡

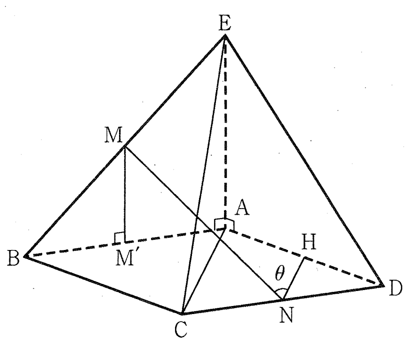
두 직선 ㉠, ㉡은 서로 수직이므로

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2c}=-1$에서 $c=-\dfrac{9}{4}$

곧, 점 B의 y좌표는 $-\dfrac{9}{4}$이다.

26. 선분 AD의 중점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{HN}}$이므로 두 직선 MN, AC가 이루는 예각의 크기는 두 직선 MN, HN이 이루는 예각의 크기와 같다.

곧, $\angle\mathrm{MNH}=\theta$



한편, 선분 AB의 중점을 M′이라 하면 $\overline{\mathrm{EA}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{MM'}}$이고 $\overline{\mathrm{EA}}\perp$(평면 ABC)이므로 점 M에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 M′이다.

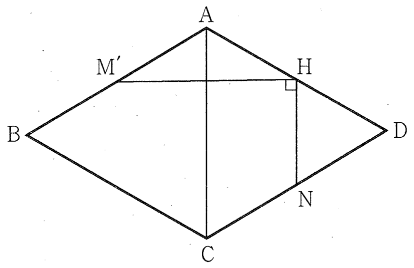
이때 $\overline{\mathrm{AM'}}=\overline{\mathrm{AH}}=1$이고 $\angle\mathrm{M'AH}=\dfrac{2\pi}{3}$이므로

이등변삼각형 M′AH에서 $\angle\mathrm{AHM'}=\dfrac{\pi}{6}$

$\overline{\mathrm{ND}}=\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{HN}}=1$이므로

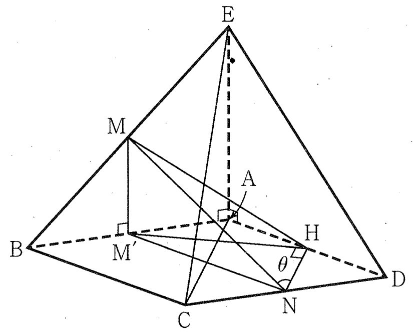
정삼각형 DHN에서 $\angle\mathrm{DHN}=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 $\angle\mathrm{M'HN}=\dfrac{\pi}{2}$



$\overline{\mathrm{MM'}}\perp$(평면 ABC)이고 $\overline{\mathrm{M'H}}\perp\overline{\mathrm{NH}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{MH}}\perp\overline{\mathrm{NH}}$



또한 $\overline{\mathrm{MM'}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AE}}=1$이고 $\overline{\mathrm{M'N}}=\overline{\mathrm{AD}}=2$이므로

직각삼각형 MM′N에서

$\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

따라서 직각삼각형 MNH에서

$\cos\theta=\cos(\angle\mathrm{MNH})$

$=\dfrac{\overline{\mathrm{NH}}}{\overline{\mathrm{MN}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

27. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$에서

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

따라서 점 P는 선분 OA를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

이 원을 C라 하자.

점 $\mathrm{B}(3, 9)$에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0\le\theta\le\pi)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}$

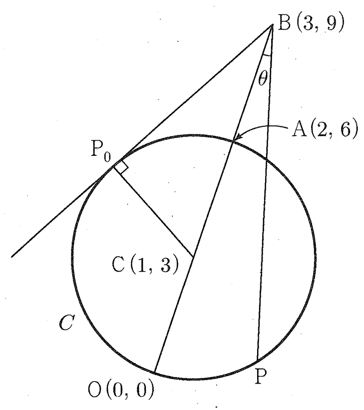
$=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\times\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\right|\times\cos\theta$

$=3\sqrt{10}\cos\theta$ $(\because |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3\sqrt{10})$

이므로 $\cos\theta$의 값이 최소일 때 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}$의 값도 최소이다.

한편, 원 C의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 OA의 중점이므로 좌표가 $\mathrm{C}(1, 3)$이고 네 점 O, $\mathrm{C}(1, 3)$, $\mathrm{A}(2, 6)$, $\mathrm{B}(3, 9)$가 한 직선 위에 있으므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각의 크기도 θ이다.

따라서 θ의 값은 다음 그림과 같이 직선 PB가 원 C에 접할 때 최대이고 이때 $\cos\theta$의 값은 최소이다.



이때 접하는 점 중 하나를 $\mathrm{P_0}$이라 하면

직각삼각형 $\mathrm{CBP_0}$에서

$\overline{\mathrm{CP_0}}=\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{CB}}=2\sqrt{10}$이므로

$\angle\mathrm{CBP_0}=\dfrac{\pi}{6}$

곧, $\cos\theta$의 최솟값은 $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}$, 곧 $3\sqrt{10}\cos\theta$의 최솟값은

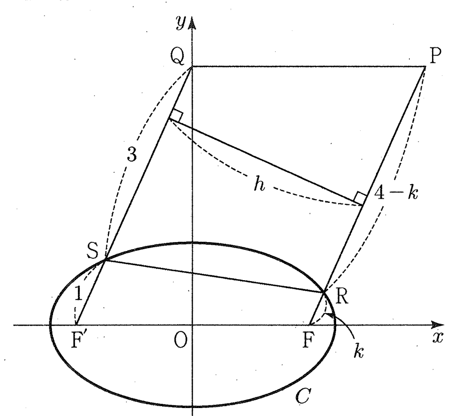
$3\sqrt{10}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{30}}{2}$

28. 평행사변형 PQF′F에서

$\overline{\mathrm{F'Q}}=4$, $\overline{\mathrm{F'S}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{SQ}}=3$

또한 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{F'Q}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{FR}}=k$라 하면

$\overline{\mathrm{RP}}=4-k$



평행한 두 직선 F′Q, FP 사이의 거리를 h라 하면 두 사다리꼴 PQSR, RSF′F의 넓이는 각각

$S_1=\dfrac{1}{2}\times h\times(\overline{\mathrm{SQ}}+\overline{\mathrm{RP}})$

$=\dfrac{1}{2}h\{3+(4-k)\}$

$=\dfrac{1}{2}h(7-k)$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times h\times(\overline{\mathrm{F'S}}+\overline{\mathrm{FR}})$

$=\dfrac{1}{2}h(1+k)$

$S_1:S_2=13:3$이므로

$\dfrac{1}{2}h(7-k):\dfrac{1}{2}h(1+k)=13:3$에서

$(7-k):(1+k)=13:3$

$13(1+k)=3(7-k)$

곧, $k=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{FR}}=k=\dfrac{1}{2}$

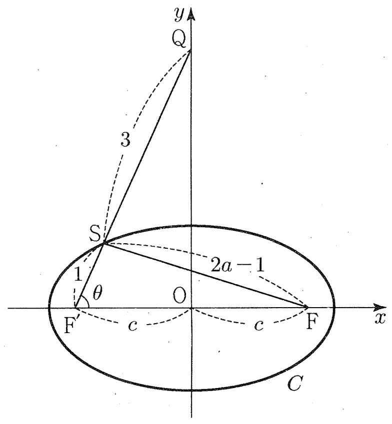
한편, 타원 C의 장축의 길이를 $2a$라 하면

$\overline{\mathrm{F'S}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{FS}}=2a-1$

$\overline{\mathrm{FR}}=\frac{1}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{F'R}}=2a-\frac{1}{2}$

직각삼각형 QF′O에서 $\angle \mathrm{QF'O}=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OF'}}}{\overline{\mathrm{F'Q}}}=\frac{c}{4}$

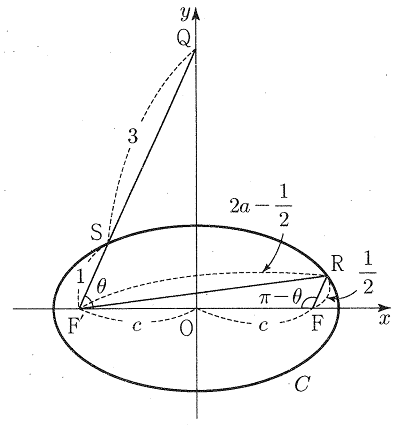


삼각형 SF′F에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{FS}}^2=\overline{\mathrm{F'S}}^2+\overline{\mathrm{FF'}}^2-2\times\overline{\mathrm{F'S}}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times\cos\theta$

$(2a-1)^2=1^2+(2c)^2-2\times1\times2c\times\frac{c}{4}$

$4a^2-4a=3c^2$ …… ㉠



$\angle \mathrm{RFF'}=\pi-\theta$이므로

삼각형 RFF′에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{F'R}}^2=\overline{\mathrm{FR}}^2+\overline{\mathrm{FF'}}^2-2\times\overline{\mathrm{FR}}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times\cos(\pi-\theta)$

$\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2c)^2-2\times\frac{1}{2}\times2c\times\left(-\frac{c}{4}\right)$

$4a^2-2a=\frac{9}{2}c^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{3}{2}\times(4a^2-4a)=4a^2-2a$

$4a^2=8a$이므로 $a=2$ ($\because a>0$)

따라서 타원 C의 장축의 길이는 $2a=4$

참고

$\overline{\mathrm{FR}}=\frac{1}{2}$을 구한 후 타원 C의 장축의 길이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

직선 F′Q가 타원과 만나는 점 중 S가 아닌 점을 T라 하면 두 평행선 F′Q, FP가 원점에 대하여 대칭이고 타원 C도 원점에 대하여 대칭이므로 두 선분 F′T, FR도 원점에 대하여 대칭이다.

곧, $\overline{\mathrm{F'T}}=\overline{\mathrm{FR}}=\frac{1}{2}$

또한 타원 C는 y축에 대하여 대칭이므로

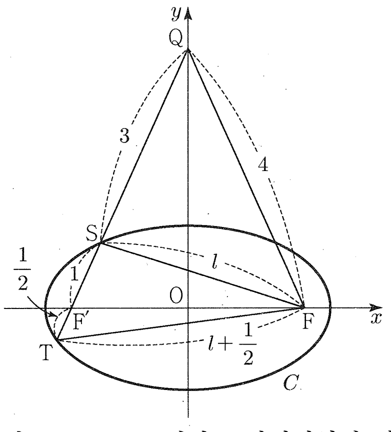
$\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{F'Q}}=4$

$\overline{\mathrm{FS}}=l$이라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FS}}+\overline{\mathrm{F'S}}=\overline{\mathrm{FT}}+\overline{\mathrm{F'T}}=$(타원 C의 장축의 길이)

이므로

$l+1=\overline{\mathrm{FT}}+\frac{1}{2}$에서 $\overline{\mathrm{FT}}=l+\frac{1}{2}$



두 삼각형 FQS, FQT에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle \mathrm{FQS})=\frac{\overline{\mathrm{FQ}}^2+\overline{\mathrm{SQ}}^2-\overline{\mathrm{FS}}^2}{2\times\overline{\mathrm{FQ}}\times\overline{\mathrm{SQ}}}$

$\cos(\angle \mathrm{FQT})=\frac{\overline{\mathrm{FQ}}^2+\overline{\mathrm{TQ}}^2-\overline{\mathrm{FT}}^2}{2\times\overline{\mathrm{FQ}}\times\overline{\mathrm{TQ}}}$

$\cos(\angle \mathrm{FQS})=\cos(\angle \mathrm{FQT})$이므로

$\frac{4^2+3^2-l^2}{2\times4\times3}=\frac{4^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{2\times4\times\frac{9}{2}}$에서

$(l-3)(l+1)=0$

$l=3$ ($\because l>0$)

따라서 타원 C의 장축의 길이는

$l+1=4$

29. 조건 (가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$이고

$0\le s\le1$이므로 P는 선분 AB 위의 점이다.

조건 (나)에서

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$

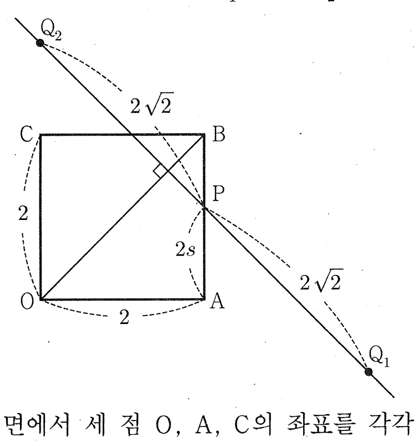
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=0$

곧, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=0$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ne\vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\ne\vec{0}$이므로

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 서로 수직이다.

정리하면 점 P는 선분 AB 위에 있고, 점 Q는 점 P를 지나고 직선 OB에 수직인 직선 위에 있다.

또한 조건 (다)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2\sqrt{2}$이므로 가능한 점 Q의 위치는 다음과 같이 $\mathrm{Q_1}$ 또는 $\mathrm{Q_2}$이다.



좌표평면에서 세 점 O, A, C의 좌표를 각각 O(0, 0), A(2, 0), C(0, 2)로 놓으면

조건 (가)에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0, 2s)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{PQ_1}}=(2, -2)$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ_2}}=(-2, 2)$이므로

세 점 P, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$의 좌표는

$\mathrm{P}(2, 2s)$, $\mathrm{Q_1}(4, 2s-2)$, $\mathrm{Q_2}(0, 2s+2)$이다.

점 Q가 점 $\mathrm{Q_1}(4, 2s-2)$이면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=2\times4+2s\times(2s-2)$

$=4\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+7$

≥7 $\left(\text{등호는 } s=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

따라서 점 Q는 점 $\mathrm{Q_2}(0, 2s+2)$이다.

조건 (다)의 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=3$에서

$2\times0+2s\times(2s+2)=3$

$4s^2+4s-3=0$

$(2s-1)(2s+3)=0$

곧, $s=\frac{1}{2}$ ($\because 0\le s\le1$)

이때 P(2, 1)이므로

$t=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$=2\times2+2\times1$

$=6$

따라서 $8(s+t)=8\left(\frac{1}{2}+6\right)=52$

30. 점 A를 지나고 z축에 수직인 평면을 α라 하자.

직선 AP는 z축과 수직이므로 점 P는 평면 α 위에 있다.

또한 점 P가 구 S 위의 점이므로 점 P는 평면 α와 구 S가 만나서 생기는 원 위에 있다.

이 원을 C라 하자.

원 C는 점 A(3, a, 3)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이다.

한편, 평면 α는 xy평면과 평행하므로

(평면 OAP와 평면 α가 이루는 각의 크기)

=(평면 OAP와 xy평면이 이루는 각의 크기)

$=\theta$

이때 평면 OAP와 평면 α의 교선은 직선 AP이다.

평면 OAP 위의 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 H(0, 0, 3)이고 $\overline{\mathrm{OH}}=3$이다.

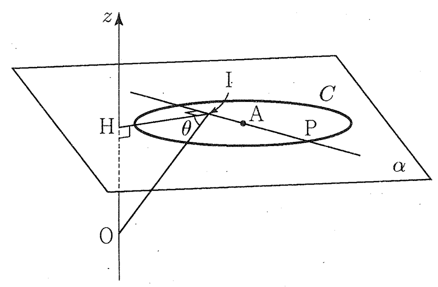
점 H가 직선 AP 위의 점일 때,

(평면 OAP)⊥(평면 α)가 되어 $\sin\theta=1$이고,

이때의 점 P는 $\mathrm{P_0}$이 아니다.

점 H가 직선 AP 위의 점이 아닐 때, 점 H에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OI}}$⊥(직선 AP)이므로

$\angle \mathrm{OIH}=\theta$



직각삼각형 OHI에서 $\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{HI}}}=\frac{3}{\overline{\mathrm{HI}}}$

$\sin\theta$의 최솟값이 $\frac{\sqrt{21}}{7}$이므로

$\tan\theta$의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

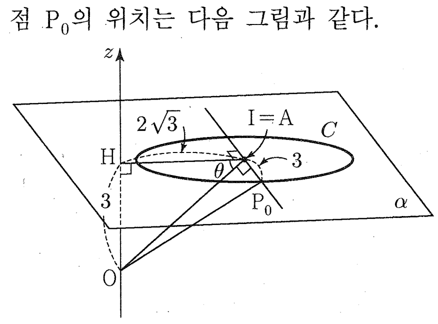
곧, $\tan\theta=\frac{3}{\overline{\mathrm{HI}}}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\overline{\mathrm{HI}}\le2\sqrt{3}$

그런데 선분 HI의 길이, 곧 점 H와 직선 AP 사이의 거리가 최대인 경우는 점 I가 점 A와 같을 때이다.

따라서 $\overline{\mathrm{HA}}=2\sqrt{3}$이고,

점 I가 점 A와 같을 때 $\overline{\mathrm{HA}}\perp\overline{\mathrm{AP_0}}$이다.

이때 점 $\mathrm{P_0}$의 위치는 다음 그림과 같다.



직각삼각형 OHA에서

$\overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HA}^2$

$= 3^2 + (2\sqrt{3})^2$

$= 21$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OA} \perp \overline{AP_0}$이므로

직각삼각형 OAP_0에서

$\overline{OP_0} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AP_0}^2}$

$= \sqrt{21 + 3^2}$

$= \sqrt{30}$

따라서 $\overline{OP_0}^2 = 30$