Ejercicio-Ejemplo (15 min)

[E1] El mecanismo mostrado en la figura sirve para sacar una caja con provisiones de la bodega de un barco. La caja tiene una masa total de 50 kg. Una cuerda está enrollada en un cilindro de madera que gira sobre un eje metálico. El cilindro tiene un radio de 0.25 m y un momento de inercia $I = 2.9\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$ alrededor del eje. La caja cuelga del extremo libre de la cuerda. Un extremo del eje pivota sobre cojinetes sin fricción; una manivela está unida al otro extremo. Cuando se gira la manivela, el extremo del mango gira alrededor del eje en un círculo vertical de 0.12 m de radio, el cilindro gira y la caja sube. ¿Qué magnitud de la fuerza **F** aplicada tangencialmente a la manivela se necesita para levantar la caja con una aceleración de $1.40\ \mathrm{m/s^2}$? (Pueden despreciarse la masa de la cuerda, así como los momentos de inercia del eje y la manivela).

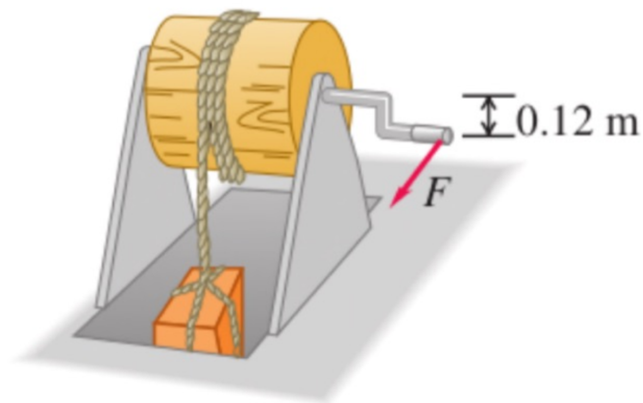
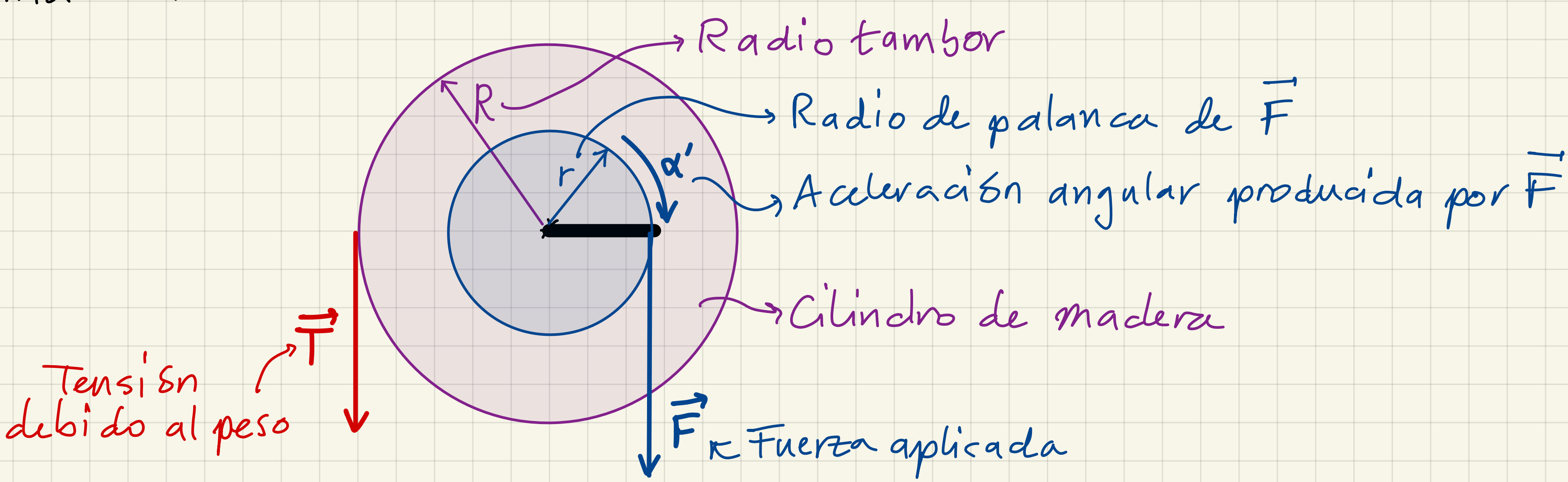


Fig. 1: Prob. E1.

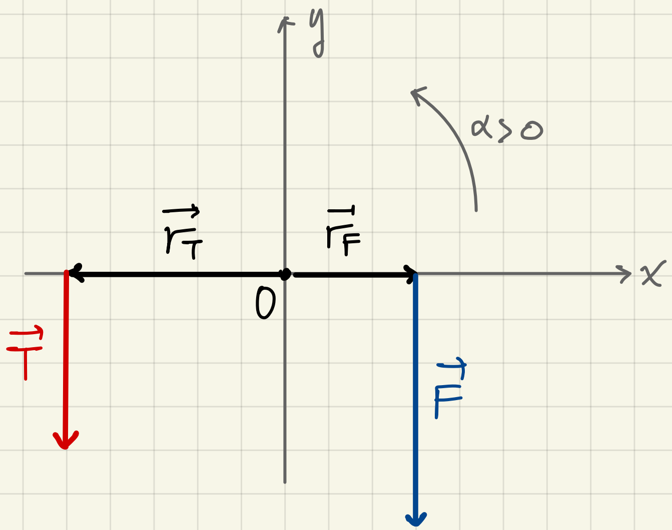
Solución:

Esquema de la situación:



2^{da} ley de Newton para Rotaciones: $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

Del esquema inicial tenemos:



• $\vec{r}_T = -R\hat{\imath}$, $\vec{T} = -T\hat{\jmath}$

↳ $\vec{\tau}_T = \vec{r}_T \times \vec{T} = (-R\hat{\imath}) \times (-T\hat{\jmath}) = RT\,\underbrace{\hat{\imath} \times \hat{\jmath}}_{\hat{k}}$

→ $\vec{\tau}_T = RT\hat{k}$ ← Torque efectuado por $\vec{T}$

• $\vec{r}_F = r\hat{\imath}$, $\vec{F} = -F\hat{\jmath}$

↳ $\vec{\tau}_F = \vec{r}_F \times \vec{F} = (r\hat{\imath}) \times (-F\hat{\jmath}) = -rF\,\underbrace{\hat{\imath} \times \hat{\jmath}}_{\hat{k}}$

→ $\vec{\tau}_F = -rF\hat{k}$ ← Torque efectuado por $\vec{F}$

⇒ $\Sigma \vec{\tau} = \vec{\tau}_T + \vec{\tau}_F = RT\hat{k} + (-rF\hat{k}) = (RT - rF)\hat{k} = I\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} = -\alpha'\hat{k}$ ← Gira en sentido negativo

→ $RT - rF = -I\alpha'$, $a = R\alpha'$ ← Del Mov. Cir. Unif. Acel.

→ $\boxed{F = \frac{R}{r}T + \frac{Ia}{Rr}}$

→ Hallemos ahora la tensión en la cuerda, $\vec{T}$.

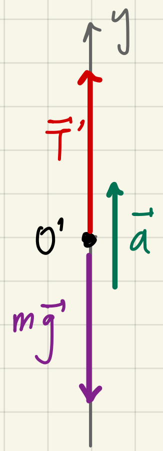


Diagrama cuerpo libre sobre la caja

- $\vec{T}' + m\vec{g} = m\vec{a}$ (2da ley Newton)

  ↳ $T'\hat{j} - mg\hat{j} = ma\hat{j} \longrightarrow T' = m(a+g)$ ← Sobre la caja

- Por 3ra ley Newton $T' = T \Rightarrow \boxed{T = m(a+g)}$

Regresando a F:

$$\boxed{F = \frac{R}{r} m(a+g) + \frac{Ia}{Rr}}$$

Numéricamente:

$I = 2.9\ kg \cdot m^2,\ R = 0.25\ m,\ r = 0.12\ m,\ a = 1.40\ m/s^2,\ g = 9.8\ m/s^2,\ m = 50\ kg$:

$$F = \frac{(0.25\ m)}{(0.12\ m)} \cdot (50\ kg) \cdot \left[(1.40\ m/s^2) + (9.8\ m/s^2)\right] + \frac{(2.9\ kg \cdot m^2) \cdot (1.40\ m/s^2)}{(0.25\ m) \cdot (0.12\ m)}$$

$$F = 1302\ N$$

↖ Fuerza a aplicar sobre la manivela