Ejercicio-Ejemplo (15 min)

Week 11
17-abril-2024
Física 1

[E1] Un bandido suelta una carreta con dos cajas de oro (masa total = 300 kg) que estaba en reposo 50 m cuesta arriba de una pendiente de 6.0° (ver figura). El plan es que la carreta baje la cuesta, ruede por terreno plano y luego caiga en un cañón donde sus cómplices esperan. Sin embargo, en un árbol a 40 m del borde del cañón están el Llanero Solitario (masa de 75.0 kg) y Toro (masa de 60.0 kg), quienes se dejan caer verticalmente sobre la carreta al pasar por debajo de ellos.

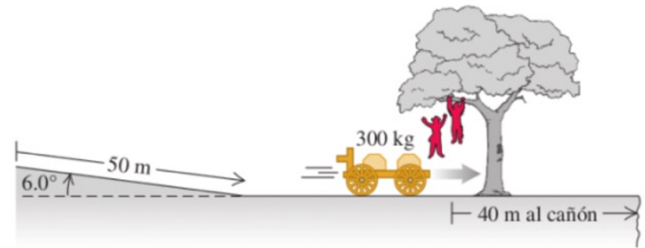
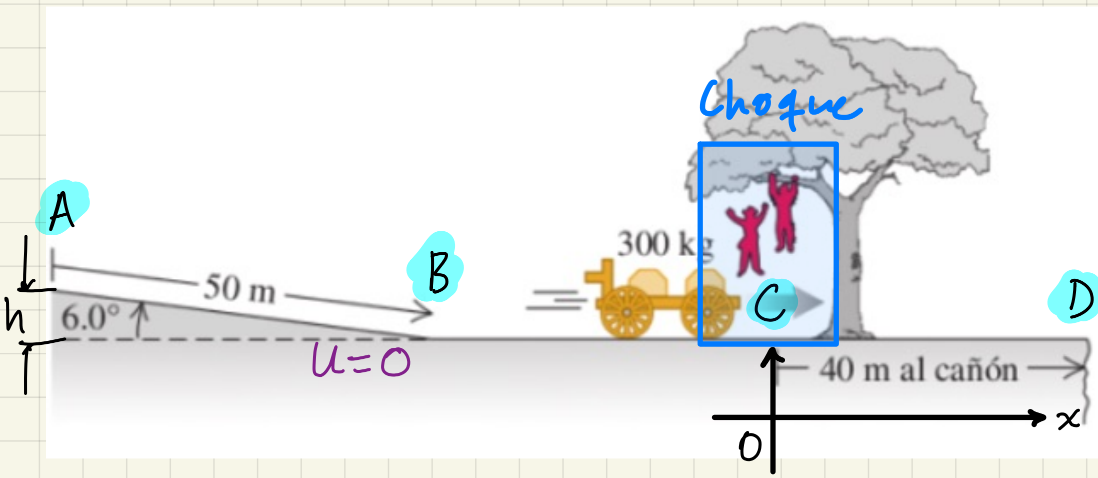


Fig. 1: Prob. E1.

a) Si nuestros héroes necesitan 5.0 s para tomar el oro y saltar, ¿lo lograrán antes de que la carreta llegue al borde del risco? La carreta rueda con fricción despreciable.

b) Cuando los héroes caen en la carreta, ¿se conserva la energía cinética del sistema de los héroes más la carreta? Si no, ¿aumenta o disminuye, y por cuánto?

Solución:



Empecemos con un análisis de energías. No hay fricción:

$$\underbrace{E_A = E_B = E_C}_{\text{Antes de caer a la carreta}} \qquad \underbrace{E_C^* = E_D}_{\text{Después de caer a la carreta}}$$

Tenemos:

(A) $K_A = 0 \leftarrow$ Parte del reposo

$U_A = m_c g h$

$\quad$ ⌊ masa carreta

$\Rightarrow E_A = m_c g h$

(C) $K_c = \frac{1}{2} m_c v_1^2$

$U_c = 0 \leftarrow$ Referencia cero de energía potencial

$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m_c v_1^2$

$\rightarrow$ Conservación energía: $E_A = E_c \longrightarrow U_A = K_c \longrightarrow \cancel{m_c} g h = \frac{1}{2} \cancel{m_c} v_1^2$

Despejamos v_1: $v_1 = \sqrt{2gh}$

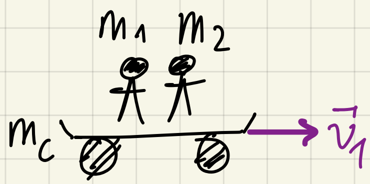
por trigonometría $\sin(\theta) = \frac{h}{d} \rightarrow h = d\sin(\theta)$

$\therefore v_1 = \sqrt{2gd\sin(\theta)} \leftarrow$ Rapidez con la cual llega la carreta al punto C, justo antes de que los hombres caigan a la carreta.

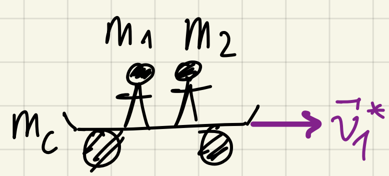
Analicemos ahora la caída de los hombres en la carreta.

- No hay forma de calcular la velocidad con la que caen a la carreta → Suponemos que es cero.
- El momento lineal se conserva antes y después del choque.

Antes:



Después:



$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{c\,antes} + \vec{p}_{\substack{hombres\\antes}} = m_c \vec{v}_1 \qquad \vec{p}_{después} = (m_c + m_1 + m_2)\vec{v}_1^*$$

$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$ ← Conservación momento lineal

$$\longrightarrow \quad m_c \vec{v}_1 = (m_c + m_1 + m_2)\vec{v}_1^*$$

$$\therefore \quad \vec{v}_1^* = \frac{m_c}{m_c + m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

Velocidad de la carreta junto con los hombres justo después de que ellos caen en la carreta

$$\therefore \quad v_1^* = \frac{m_c}{m_c + m_1 + m_2}\sqrt{2gd\sin(\theta)}$$

Tramo final $C \to D$: MRU $\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 \Delta t$

Tomamos $v_0 = v_1^*$, $x_0 = 0$, $\Delta t = t - t_0$, $t_0 = 0 \to \Delta t = t$.

Con $x_f = L$ la distancia recorrida en este tramo, el tiempo de recorrido será:

$$T = \frac{L}{v_1^*} = \frac{(m_1 + m_2 + m_c) L}{m_c \sqrt{2 g d \sin(\theta)}}$$

Valores numéricos: $m_c = 300$ kg, $m_1 = 75.0$ kg, $m_2 = 60.0$ kg, $L = 40$ m

$d = 50$ m, $\theta = 6.0°$, $g = 9.8\ m/s^2 \longrightarrow \boxed{T = 5.7\ s.}$

Así, les tomará 5.7 s llegar al borde del risco. Como gastarán 5.0 s en salvar el oro, los héroes lo lograrán por 0.7 s de diferencia.

Por otro lado, el cambio de energía antes y después del choque será:

$$\Delta E = E_c^* - E_c = (K_c^* + \cancel{U_c}^{\,0}) - E_A = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_c) v_1^{*2} - m_c g \underbrace{d \sin(\theta)}_{h}$$

Déspues Antes

$$\Delta E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_c)\left(\frac{m_c}{m_c + m_1 + m_2}\sqrt{2 g d \sin(\theta)}\right)^2 - m_c g d \sin(\theta)$$

$$\Delta E = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{m_c^2}{m_1+m_2+m_c} \cdot \cancel{2} g d \sin(\theta) - m_c g d \sin(\theta)$$

$$= \left(\frac{m_c}{m_1+m_2+m_c} - 1 \right) m_c g d \sin(\theta) = \frac{\cancel{m_c} - m_1 - m_2 - \cancel{m_c}}{m_1+m_2+m_c} m_c g d \sin(\theta)$$

$$= -\left(\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_c} \right) m_c g d \sin(\theta) < 0 \longrightarrow \text{Se pierde energía!!}$$

Numéricamente: $\boxed{\Delta E = -4768.7 \text{ J}}$