Week 14
08-Mayo-2024
Física 1

Ejercicio-Ejemplo (15 min)

[E1] Cuando un objeto rueda sin resbalar, la fuerza de fricción por rodamiento es mucho menor que la fuerza de fricción cuando el objeto resbala; una moneda de plata rueda sobre su borde con mucho mayor rapidez que si resbala sobre su cara plana. Si un objeto rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal, podemos suponer que la fuerza de fricción es cero, de modo que a_x y a_z son aproximadamente cero, y v_x y ω_z son aproximadamente constantes. Rodar sin resbalar implica que $v_x = r\omega_z$ y $a_x = r\alpha_z$. Si un objeto se pone en movimiento en una superficie sin estas igualdades, la fricción por deslizamiento (cinética) actuará sobre el objeto mientras se desliza, hasta que se establece rueda sin resbalar. Un cilindro sólido de masa M y radio R, girando con rapidez angular ω_0 alrededor de un eje que pasa por su centro, se coloca en una superficie horizontal para la que el coeficiente de fricción cinética es μ_k.

a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del cilindro en la superficie. Medite bien la dirección de la fuerza de fricción cinética que actúa sobre el cilindro. Calcule las aceleraciones a_x del centro de masa y α_z de rotación alrededor del centro de masa.

b) Al inicio, el cilindro está resbalando totalmente, ya que $\omega_z = \omega_0$, pero $v_x = 0$. El rodamiento sin resbalar inicia cuando $v_x = R\omega_z$. Calcule la distancia que el cilindro rueda antes de que deje de resbalar.

c) Calcule el trabajo efectuado por la fuerza de fricción sobre el cilindro, mientras este se movió desde el punto donde se colocó, hasta el punto donde comenzó a rodar sin resbalar.

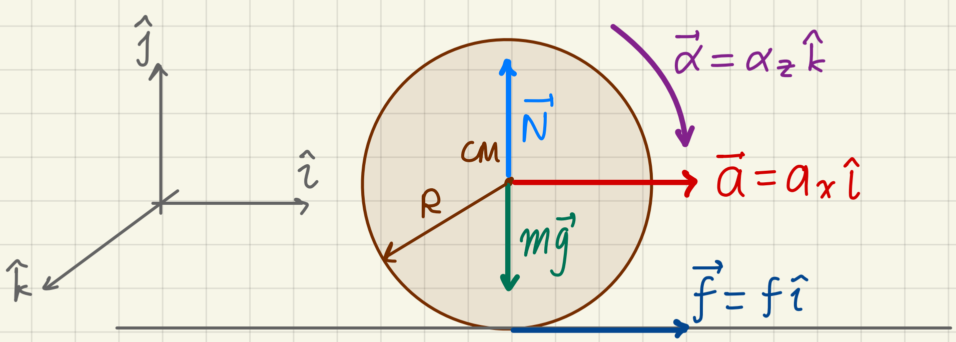
Solución:

Tenemos: 1) Traslación del centro de Masa $\longrightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}_{cm}$

2) Rotación en torno al Centro de Masa $\longrightarrow \sum \vec{\tau} = I_{cm}\vec{\alpha}_{cm}$

$f = \mu_k N$

↳ Modelo de fricción cinética



$I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$

↳ Momento de inercia del cilindro respecto al centro de masa a)

1) Traslación:

$\cdot \sum F_x = f = Ma_x \longrightarrow a_x = \frac{f}{M}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{a_x = \mu_k g}$ $\leftarrow$ Magnitud aceleración horizontal

$\cdot \sum F_y = N - Mg = M\cancel{a_y}^{0} \longrightarrow N = Mg \Rightarrow f = \mu_k Mg$

$\cdot \sum F_z = 0 = Ma_z \longrightarrow a_z = 0$

2) Rotacional: Sólo la fuerza de fricción hace torque.

$\vec{r} = -R\hat{j}$ $\leftarrow$ Vector posición del punto de contacto de la fricción respecto al centro de giro.

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} = -R\hat{j} \times f\hat{i} = -R\mu_k Mg \underbrace{\hat{j} \times \hat{i}}_{-\hat{k}} = R\mu_k Mg\,\hat{k}$ $\leftarrow$ Torque debido a la fricción

$\cdot \sum \tau_x = \sum \tau_y = 0 \longrightarrow \alpha_x = \alpha_y = 0$

$\cdot \sum \tau_z = \mu_k RMg = I_0 \alpha_z \longrightarrow \alpha_z = \frac{\mu_k \cancel{M} g \cancel{R}}{\frac{1}{2}\cancel{M}R^{\cancel{2}}} = 2\mu_k \frac{g}{R}$ $\leftarrow$ Aceleración angular respecto al C.M.

b) Nótese que a_x y α_z son constantes!! $\Rightarrow$

MRUA para el CM $\rightarrow v_{CM} = v_{0CM} + a_{CM}\Delta t \longrightarrow v_x(t) = v_0 + a_x \Delta t \longrightarrow v_x(t) = \mu_k g t$

MCUA respecto al CM $\rightarrow \omega_z = \omega_{0z} - \alpha_z \Delta t \longrightarrow \omega_z(t) = \omega_0 - \alpha_z \Delta t \longrightarrow \omega_z(t) = \omega_0 - \frac{2\mu_k g}{R} t$

En $t_0 = 0 \rightarrow v_x(0) = 0$ y $\omega_z(0) = \omega_0$ $\Rightarrow v_0 = 0$

Cuidado!! El cilindro gira tal que $\alpha < 0$!!

Sea $t=T$ el instante de tiempo en el cual el cilindro deja de resbalar.

En ese instante se empieza a cumplir que $v_x(t=T) = \omega_z(t=T)\cdot R$. Así:

$$v_x(t=T) = \mu_k g T = \left(\omega_0 - \frac{2\mu_k g}{R}T\right)\cdot R \longrightarrow T = \frac{\omega_0 R}{3\mu_k g}$$ ← Tiempo que dura deslizando sin rodar

La distancia que recorre deslizando sin rodar será:

$$x(t) = \cancel{x_0}^{0} + \cancel{v_{0x}}^{0}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}(\mu_k g)t^2 \;,\; t=T \Rightarrow x(t=T) = \frac{\mu_k g}{2}T^2$$

$$\Rightarrow D = \cancel{\frac{\mu_k g}{2}}\left(\frac{\omega_0 R}{3\mu_k g}\right)^{\cancel{2}} \longrightarrow \boxed{D = \frac{\omega_0^2 R^2}{18\mu_k g}}$$ ← Distancia que recorre el cilindro deslizándose.

c) Tenemos:

$$W = \Delta K = K_{final} - K_{inicial}$$

$$K_{inicial} = \cancel{K_{tras}}^{0} + K_{rot}\Big|_{ini} = \frac{1}{2}I_{cm}\omega_{cm}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega_0^2 = \frac{1}{4}M\omega_0^2R^2$$

$$K_{final} = K_{tras} + K_{rot}\Big|_{fin} = \frac{1}{2}Mv_x^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_x}{R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}Mv_x^2 + \frac{1}{4}Mv_x^2 = \frac{3}{4}Mv_x^2 = \frac{3}{4}M\left(a_x t\Big|_{t=T}\right)^2 = \frac{3}{4}M(\mu_k g T)^2 = \frac{3}{4}M\left[\cancel{\mu_k g}\left(\frac{\omega_0 R}{3\cancel{\mu_k g}}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{12}M\omega_0^2R^2$$

$$\Rightarrow \Delta K = \frac{1}{12} M\omega_0^2 R^2 - \frac{1}{4} M\omega_0^2 R^2 = -\frac{1}{6} MR^2\omega_0^2 < 0$$ ← Se pierde energía!!

De esta manera, el trabajo efectuado por la fuerza de fricción será

$$\boxed{W_{fricc} = -\frac{1}{6} MR^2\omega_0^2}$$

Bonus:

$$\frac{\Delta K}{K_0} = \frac{-\frac{1}{6} MR^2\omega_0^2}{\frac{1}{4} MR^2\omega_0^2} = -\frac{2}{3}$$ ← Independiente de ω_0!!

Esto quiere decir que un cilindro siempre perderá $\frac{2}{3}$ de su energía inicial mientras resbala sin rodadura!!